بنك أسئلة الاحتمالات

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة الاحتمالات

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

م . مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 1 :

أولا : إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$

فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$ و $\mathbb{P}(A'\cap B')$ و $\mathbb{P}(A'\cup B')$ و استنتج $\mathbb{P}(B'|A')$.

ثانياً : إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B|A)=\frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(B|A')=\frac{4}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B)$.

الحل :

أولا :

- $\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$
- $\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{1}=\frac{4}{5}$
- $\mathbb{P}(A'\cap B')=\mathbb{P}(B\cup A)'=1-\mathbb{P}(A\cup B)=1-\left(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\right)$
  $=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{20}$
- $\mathbb{P}(A'\cup B')=\mathbb{P}(B\cap A)'=1-\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}$
- $\mathbb{P}(B'|A')=\frac{\mathbb{P}(A'\cap B')}{\mathbb{P}(A')}=\frac{3}{10}$

ثانياً

- $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap A')=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(A').\mathbb{P}(B|A')$
  $=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{37}{60}$

التمرين 2 :

نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة ونتأمل الأحداث :

الحدث A : العدد الظاهر زوجي الحدث B : العدد الظاهر أولي الحدث C : العدد الظاهر أكبر أو يساوي 3 والمطلوب :

❶ **جد كل من الاحتمالات التالية :** $\mathbb{P}(A),\mathbb{P}(B),\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(A\cap C),\mathbb{P}(A|C)$

❷ **هل الحدثين A و C مستقلين احتماليا**

الحل :

❶ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A=\{2,.4,6\}\Rightarrow\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}\ ,B=\{2,3,5\}\Rightarrow\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2},C=\{3,.4,5,6\}\Rightarrow\mathbb{P}(C)=\frac{2}{3}$

$A\cap C=\{4,6\}\Rightarrow\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{3},,\mathbb{P}(A|C)=\frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

❷ $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}=\mathbb{P}(A\cap C)$

فالحدثين مستقلين احتمالياً

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 3 :

نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين.

ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين.

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$(X = 2) = \{(1,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$$

$$(X = 3) = \{(1,2), (2,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{36}$$

$$(X = 4) = \{(1,3), (3,1), (2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{36}$$

$$(X = 5) = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 5) = \frac{4}{36}$$

$$(X = 6) = \{(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 6) = \frac{5}{36}$$

$$(X = 7) = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 7) = \frac{6}{36}$$

$$(X=8)=\{,(\mathbf{2},\mathbf{6}),(\mathbf{6},\mathbf{2}),(\mathbf{3},\mathbf{5}\ ),(\mathbf{5},\mathbf{3})(\mathbf{4},\mathbf{4})\} \Rightarrow \ \mathbb{P}(X=8)=\frac{5}{36}$$

$$(X=9)=\{(\mathbf{3},\mathbf{6}\ ),(\mathbf{6},\mathbf{3}),(\mathbf{4},\mathbf{5}),(\mathbf{5},\mathbf{4})\} \Rightarrow \ \mathbb{P}(X=9)=\frac{4}{36}$$

$$(X=10)=\{(\mathbf{4},\mathbf{6}),(\mathbf{6},\mathbf{4}),(\mathbf{5},\mathbf{5})\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=10)=\frac{3}{36}$$

$$(X=11)=\{(\mathbf{5},\mathbf{6}),(\mathbf{6}\ ,\mathbf{5})\} \ \Rightarrow \mathbb{P}(X=11)=\frac{2}{36}$$

$$(X=12)=\{(\mathbf{6},\mathbf{6})\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{36}$$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\mathbf{\frac{1}{36}}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1}{36}$$

$$=7$$

$$\mathbb{V}(X)=$$

$$\frac{4\times1+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5+49\times6+64\times5+81\times4+100\times3+121\times2+144\times1}{36}-49$$

$$=\frac{35}{6}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{6}}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 4 :

نتأمل حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة بالأعداد $3\,,2\,,2\,,1\,,1\,,1$ نلقي هذا الحجر مرتين متتاليتين

الحدث A : ظهور وجهين مجموعهما أصغر تماما من 4

الحدث B : ظهور وجهين فرقهما معدوم

❶ **كم عدد عناصر فضاء العينة**

❷ **أحسب : $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$ و $P(B|A)$**

نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور العدد 3

❸ **اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X و جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه**

الحل

+	1	1	1	2	2	3
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(2,3)
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,2)	(3,2)	(3,3)

❶

عدد فضاء العينة: $n(\Omega) = 6^2 = 36$

❷ $\mathbb{P}(A) = \frac{21}{36}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{14}{36}$ و $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{21}{36}$

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{9}{21}$$

❸ $X = \{0,1,2\}$

$$\mathbb{P}\,(X = 0) = \frac{25}{36}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 1) = \frac{10}{36}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 2) = \frac{1}{36}$$

$X = r$	0	1	2
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X = r})$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

التوقع الرياضي $E(X) = 0 + \frac{10}{36} \times 1 + \frac{1}{36} \times 2 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

لدينا $E(X^2) = 0 + \frac{10}{36} \times 1 + \frac{1}{36} \times 4 = \frac{14}{36}$

التباين

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{14}{36} - \frac{12}{36} = \frac{2}{36}$$

التمرين 5 : دورة 2017 الأولى

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية , بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل مرة يُساوي $\frac{1}{3}$, نُعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار .

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي

واحسب توقعه الرياضي وتباينه

الحل

لدينا تجربة برنولية حيث $n = 3$ $p = \frac{1}{3}$ **يعطي** $q = \frac{2}{3}$ $k \in X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$

نطبق قانون برنولي $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 . \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} , P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27} , P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

التوقع الرياضي $E(X) = n.p = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

التباين $V(X) = n.p.q = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

ملاحظة: يمكن حل المسألة عن طريق قاعدة الضرب (المبدأ الأساسي في العد)

لدينا $k \in X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ **حيث** $P(H) = \frac{1}{3}$ **و** $P(T) = \frac{2}{3}$

عندما $k = 0$ **تكون الحالة** (T, T, T) **ومنه**

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

عندما $k = 1$ **تكون الحالة** (H, T, T) **أو** (T, T, H) **أو** (T, H, T)

أي يوجد ثلاثة تبديلات ومنه $P(X = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 . \left(\frac{2}{3}\right)^2 . 3 = \frac{12}{27}$

عندما $k = 2$ **تكون الحالة** (H, H, T) **أو** (H, T, H) **أو** (T, H, H)

أي يوجد ثلاثة تبديلات ومنه $P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right)^1 . 3 = \frac{6}{27}$

عندما $k = 3$ **تكون الحالة** (H, H, H) **ومنه** $P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

التوقع الرياضي $E(X) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{12}{27} \times 1 + \frac{6}{27} \times 2 + \frac{1}{27} \times 3 = \frac{27}{27} = 1$

لدينا $E(X^2) = \frac{8}{27} \times 0 + \frac{12}{27} \times 1 + \frac{6}{27} \times 4 + \frac{1}{27} \times 9 = \frac{45}{27}$

التباين $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{45}{27} - \frac{27}{27} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 6 : النموذج الوزاري 2019

نملأ عشوائيا كل خانة من الخانات الأربع التالية | | | | | بأحد العددين 3 و 0 والمطلوب :

❶ ليكن الحدث A (مجموع الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي 6)

❷ ليكن B (عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين) أحسب $P(A)$ و $P(B|A)$

❸ نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة عدد الخانات التي كتب فيها العدد 3

اكتب القانون الاحتمالي ، واحسب التوقّع الرياضي والتباين

الحل

$n(\Omega)$	Ω				المجموع
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	3	
3	0	0	3	0	
4	0	0	3	3	6
5	0	3	0	0	
6	0	3	0	3	6
7	0	3	3	0	6
8	0	3	3	3	
9	3	0	0	0	
10	3	0	0	3	6
11	3	0	3	0	6
12	3	0	3	3	
13	3	3	0	0	6
14	3	3	0	3	
15	3	3	3	0	
16	3	3	3	3	

❶ عدد فضاء العينة: $n(\Omega) = 2^4 = 16$

الحدث A (مجموعة الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي 6)

يقع هذا الحدث عند ظهور عددان صفر وعددان 3 بغض النظر عن الترتيب $n(A) = \binom{4}{2} = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

الحدثB (عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين) أي

$$A \cap B = \{0303,3030\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

❷ $X = \{0,1,2,3,4\}$

$$P(X = 0) = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 2) = \frac{6}{16}$$

$$P(X = 3) = \frac{4}{16}$$

$$P(X = 4)\frac{1}{16}$$

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

التوقع الرياضي: $E(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

التباين: $V(X) = n.p.q = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$

التمرين 7 :

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء.

عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

❶ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟

❷ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة.

ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث. ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

الحل :

❶ بفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$ وبالتالي فإن عدد الكرات الكلي في الصندوق هو $4n$

بفرض أن الحدث R هو سحب كرة حمراء اللون :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$$

❷

$$\boldsymbol{X = \{0, 1, 2, 3\}}$$

طريقة أولى:

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 3$ و $p = \frac{3}{4}$ قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(X = 0) = \binom{3}{0}.\left(\frac{3}{4}\right)^0.\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 1) = \binom{3}{1}.\left(\frac{3}{4}\right)^1.\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 2) = \binom{3}{2}.\left(\frac{3}{4}\right)^2.\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{3}{3}.\left(\frac{3}{4}\right)^3.\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X = x})$	$\boldsymbol{\frac{1}{64}}$	$\boldsymbol{\frac{9}{64}}$	$\boldsymbol{\frac{27}{64}}$	$\boldsymbol{\frac{27}{64}}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

طريقة ثانية :

$$\mathbb{P}\,(X=0)=\frac{n}{4n}.\frac{n}{4n}.\frac{n}{4n}=\frac{1}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X=1)=\frac{3n}{4n}.\frac{n}{4n}.\frac{n}{4n}.3=\frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X=2)=\frac{3n}{4n}.\frac{3n}{4n}.\frac{n}{4n}.3=\frac{27}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X=3)=\frac{3n}{4n}.\frac{3n}{4n}.\frac{3n}{4n}=\frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x})$	$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}}$	$\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{64}}$	$\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{64}}$	$\frac{\mathbf{27}}{\mathbf{64}}$

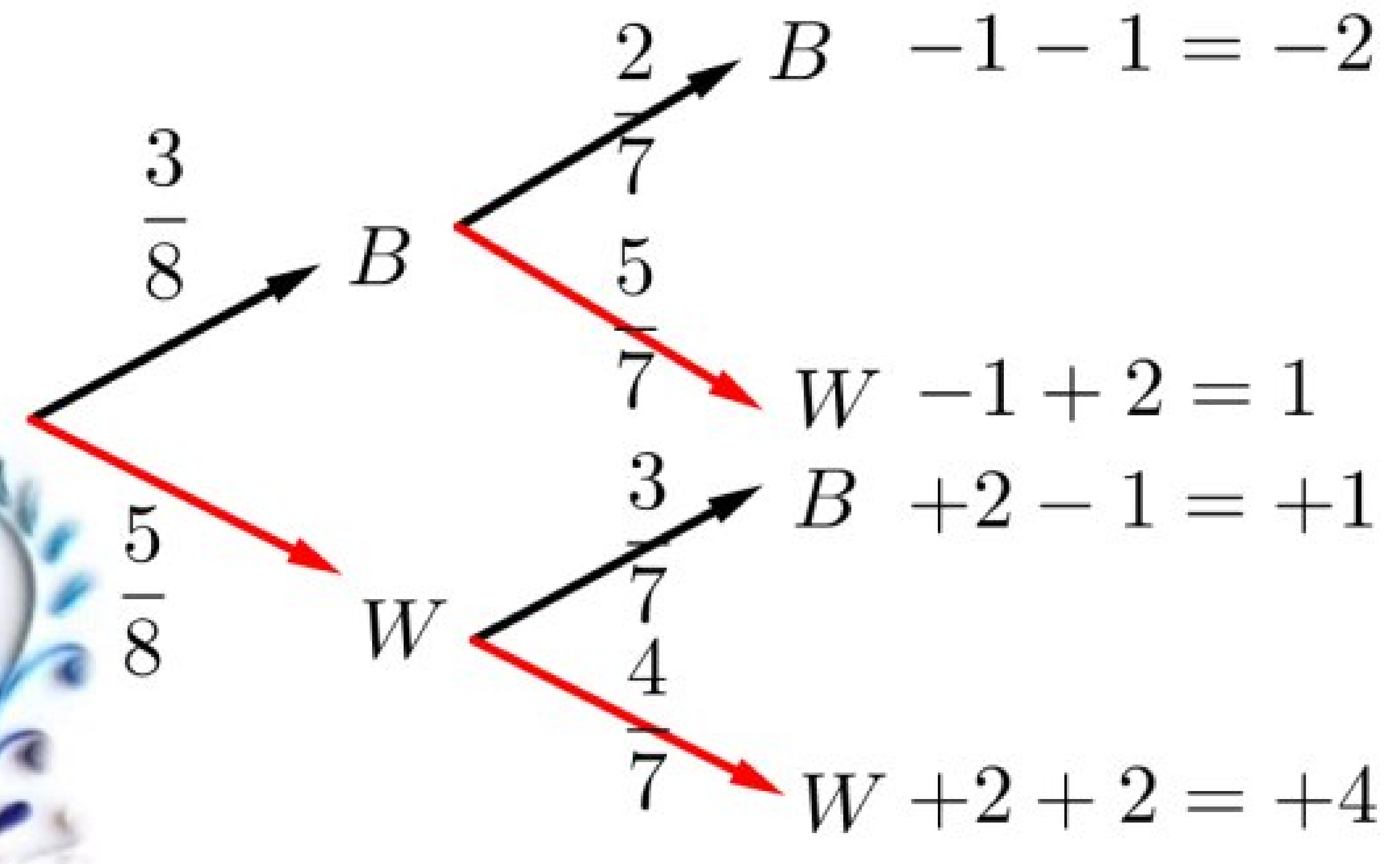
التمرين 8 : الاختبار 3

يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء،

عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين.

يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط؟

الحل:



حتّى يحصل اللاعب على نقطة واحدة عليه أن

يختار كرة من كل لون:

نفرض هذا الحدث هو A

$$P(A)=\frac{3}{8}.\frac{5}{7}+\frac{5}{8}.\frac{3}{7}=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

التمرين 9 : دورة 2018 الثانية

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها 4 كرات خضراء و 5 كرات حمراء

نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً ,

نتأمل المتحول العشوائي الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء

والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر ما عدا ذلك

والمطلوب :

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي.

الحل

لدينا $X = \{0,3,5\}$

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5\times4\times4}{7\times1\times1}}{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}} = \frac{240}{504} = \frac{20}{42}$$

$$P(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{5\times4\times3}{9\times8\times7} = \frac{5}{42}$$

ومنه $P(X=0) = 1 - [P(X=5)+P(X=3)] = 1 - \frac{25}{42} = \frac{17}{42}$

X	0	3	5
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{17}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{5}{42}$

التوقع الرياضي:

$$E(X) = 0\times P(X=0) + 3\times P(X=3) + 5\times P(X=5)$$

$$= 0 + \frac{60}{42} + \frac{25}{24} = \frac{85}{42}$$

التمرين 10 :

صندوق يحوي أربع كرات متماثلة (3 كرات سوداء و كرة واحدة بيضاء)

نسحب ثلاث كرات على التتالي مع اعادة الكرة المسحوبة الى الصندوق

❶ اذا علمت أن الكرات المسحوبة من لون واحد فما احتمال أن تكون من اللون الابيض

❷ يربح اللاعب n نقطة اذا حصل على 3 كرات بيضاء

يربح 5 نقاط اذا حصل على كرتين من اللون الأبيض فقط

يخسر نقطة واحدة اذا كانت النتيجة خلاف ذلك

نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد النقط التي ينالها اللاعب

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب n اذا كان توقعه الرياضي معدوما.

الحل

❶

A الكرات من لون واحد

Bالكرات الثلاث بيضاء

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1^3}{4^3}}{\frac{1^3+3^3}{4^3}}=\frac{1}{28}$$

❷

❸ $X=\{n,5,-1\}$

$$\mathbb{P}\ (X=n)=\frac{1^3}{4^3}=\frac{1}{64}$$

$$\mathbb{P}\ (X=5)=\frac{1^1\times 3^2\times 3}{4^3}=\frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}\ (X=-1)=\frac{1^1\times 3^2\times 3+3^3}{4^3}=\frac{54}{64}$$

$X=x_i$	n	5	-1
$\mathbb{P}(\boldsymbol{X}=x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{54}{64}$

$$E(X)=\frac{n}{64}+\frac{45}{64}-\frac{54}{64}=\frac{n-9}{64}=0\Longrightarrow n=9$$

التمرين 11 : دورة 2019 الأولى

صندوق يحوي 5 كرات متماثلة

ثلاث كرات حمراء اللون تحمل الأرقام $0, 1, 2$ وكرتان بيضاء اللون تحمل الأرقام $0, 1$

نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من الصندوق ,

❶ الحدث A الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته , احسب $P(A)$

❷ نعرف متحول عشوائياً يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين

عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

الحل

بيضاء $0,1$

حمراء $0,1,2$

❶ $A\{(R,R)(W,W)\}$

$$P(A) = \frac{{P_3}^2 + {P_2}^2}{{P_5}^2} = \frac{6+2}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

❷

$$X = \{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{P_2^1 \times P_2^1 \times 2}{{P_5}^2} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$$

$$P(X=2) = \frac{P_2^2 + P_1^1 \times P_2^1 \times 2}{P_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{P_1^1 \times P_2^1 \times 2}{P_5^2} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$$

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^{4} x_i \mathbb{P}(x_i) = \frac{0+4+6+6}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 12 : دورة 2019 الثانية

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء

نكرر عملية سحب عشوائيا لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة

عين مجموعة القيم التي يأخذها X واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي.

الحل

$$X = \{2,3,4\}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4}.\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}.\frac{2}{4}.\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=4) = \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{2}{5}\right) \times 2 + \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}\right) \times 2$$

$$= \left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{3}{5}\right) \times 2$$

$$P(X=4) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$

x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}(x_i) = \frac{2+9+24}{10} = \frac{35}{10}$$

التمرين 13 : الاختبار 1

يحوي صندوق 6 بطاقات مرقّمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$

نسحب منها عشوائيّاً بطاقتين على التتالي دون إعادة

ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

❶ عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي.

❷ احسب التوقّع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ والتباين $\mathbb{V}(X)$.

الحل

m	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2			2	2	2	2
3				3	3	3
4					4	4
5						5
6						

❶ مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X هي $I=\{1,2,3,4,5\}$ ، و جدول قانونه الاحتمالي هو :

x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

❷ حساب التوقّع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ والتباين $\mathbb{V}(X)$.

$$\mathbb{E}(X)=1\times\frac{5}{15}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{3}{15}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{15}=\frac{35}{15}=\frac{7}{3}$$

$$\mathbb{V}(X)=1\times\frac{5}{15}+4\times\frac{4}{15}+9\times\frac{3}{15}+16\times\frac{2}{15}+25\times\frac{1}{15}-\frac{49}{9}=\frac{210}{135}$$

التمرين 14 : الاختبار 4

نتأمّل صندوقين. يحتوي الصندوق الأوّل على (3) كرات مرقّمة بالأعداد $1 , 2 , 3$
ويحتوي الصندوق الثاني على (4) كرات مرقّمة بالأعداد $2 , 3 , 4 , 5$
نسحب عشوائيّاً كرة من الصندوق الأوّل ثمّ كرة من الصندوق الثاني والمطلوب :

❶ اكتب فضاء العيّنة المرتبط بهذا الاختبار.

❷ ليكن A الحدث " إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم (3) "
وليكن B الحدث " مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5) "
هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ؟ علّل إجابتك.

❸ نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين،
اكتب مجموعة قيم X واكتب قانون جدوله الاحتمالي ثمّ احسب توقّعه الرياضي وتباينه

الحل:

❶ $\Omega = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)\}$

❷ $A = \{(1,3)(2,3)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)\} \quad \Longrightarrow \mathbb{P}(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{(1,5)(2,4)(2,5)(3,3)(3,4)(3,5)\} \quad \Longrightarrow \mathbb{P}(B) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$A \cap B = \{(3,3)(3,4)(3,5)\} \quad \Longrightarrow \mathbb{p}(A \cap B) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4} = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

و الحدثان A و B مستقلان احتماليّاً لأنّ $\mathbb{p}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

❸ $X(\Omega) = \{3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8\}$

x_i	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(x_i) = p_i'$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3+8+15+18+14+8}{12} = \frac{66}{12} = \frac{11}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{9+32+75+108+98+64}{12} - \frac{121}{4} = \frac{23}{12}$$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 15 : النموذج الوزاري الثاني

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء, وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء.

نسحب عشوائيّاً معاً ثلاث كرات من الصندوق.

ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

❶ ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

❷ احسب كلاً من $\mathbb{p}(X=1)$ و $\mathbb{p}(X=3)$ ثمّ استنتج قيمة $\mathbb{p}(X=2)$.

❸ احسب توقّع X وانحرافه المعياري

الحل

$$X(\Omega)=\{1\,,2\,,3\,\}$$

❷ $$\mathbb{p}(X=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{4+1}{56}=\frac{5}{56}$$

$$\& \qquad p(X=3)=\frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{4\times3\times1}{56}=\frac{12}{56}$$

$$\mathbb{p}(X=2)=1-\left(\frac{5}{56}+\frac{12}{56}\right)=\frac{39}{56}$$

k	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

❸ احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X

$$\mathbb{E}(X)=\frac{5+78+36}{56}=\frac{119}{56}=\frac{17}{8}$$

$$\mathbb{v}(X)=\frac{5+152+108}{56}-\frac{289}{64}=\frac{129}{448}$$

التمرين 16 : النموذج الوزاري الثالث

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء.

نسحب عشوائيّاً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل

والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل احسب الاحتمالات التالية :

❶ $\mathbb{p}(A)$ و $\mathbb{p}(B)$ و $\mathbb{p}(A|B)$

❷ إذا كان X متحوّل عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة،
اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقّعه الرياضي وتباينه.

الحل:

❶

$$3R \quad \& \quad 4B$$

$$\Omega = \{\{R,R,R\},\{R,R,B\},\{R,B,B\},\{B,B,B\}\}$$

$$n(\Omega) = \binom{7}{3} = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2} = 35$$

$$n(A') = \binom{4}{3} = 4$$

$$A = \{\{R,R,R\},\{R,R,B\},\{R,B,B\}\} \Longrightarrow \mathbb{p}(A) = 1 - \mathbb{p}(A') = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

$$B = \{\{R,B,B\},\{B,B,B\}\} \Longrightarrow \mathbb{p}(B) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1} + \binom{4}{3}\cdot\binom{3}{0}}{35} = \frac{18+4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$A\cap B = \{\{R,B,B\}\} \Longrightarrow \mathbb{p}(A\cap B) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{35} = \frac{18}{35}$$

$$\mathbb{p}(A|B) = \frac{\mathbb{p}(A\cap B)}{\mathbb{p}(B)} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

❷

$$X = \{\,0\,,1\,,2\,,3\,\}$$

$$\mathbb{p}(X=0) = \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{4}{3}}{35} = \frac{4}{35} \qquad \& \qquad \mathbb{p}(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{35} = \frac{18}{35}$$

$$\mathbb{p}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}}{35} = \frac{12}{35} \qquad \& \qquad \mathbb{p}(X=4) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{0}}{35} = \frac{1}{35}$$

x_i	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

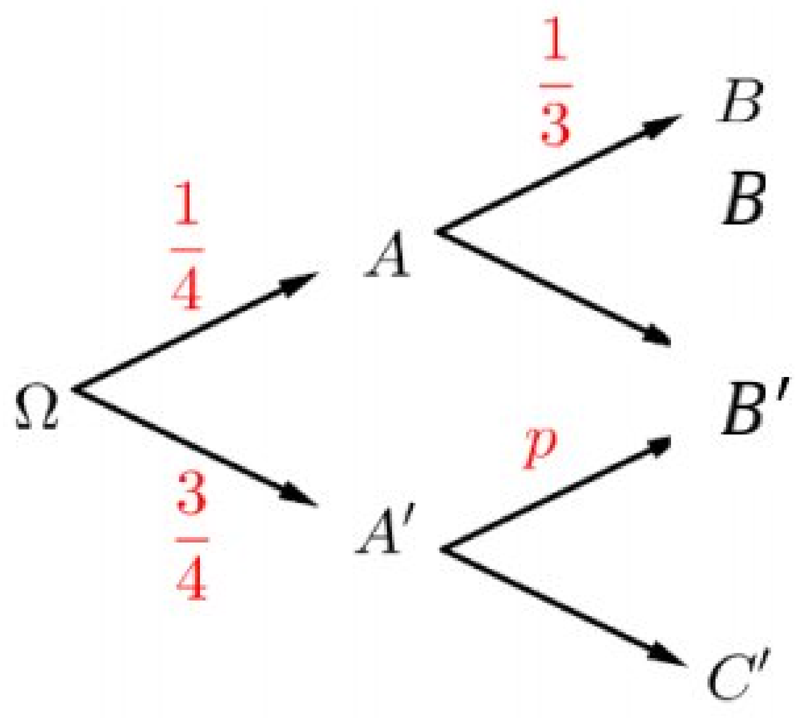
$$\mathbb{E}(X) = \frac{0+18+24+3}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

$$\mathbb{v}(X) = \frac{0+18+48+9}{35} - \frac{81}{49} = \frac{75}{35} - \frac{81}{49} = \frac{3675-2835}{1715} = \frac{840}{1715} = \frac{168}{343}$$

$$= \frac{24}{49}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 17 : الاختبار 2



ليكن A و B مرتبطين بتجربة عشوائيّة معروضة بالمخطّط الشجري المجاور.

كيف نختار قيمة p حتّى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتمالياً

الحل

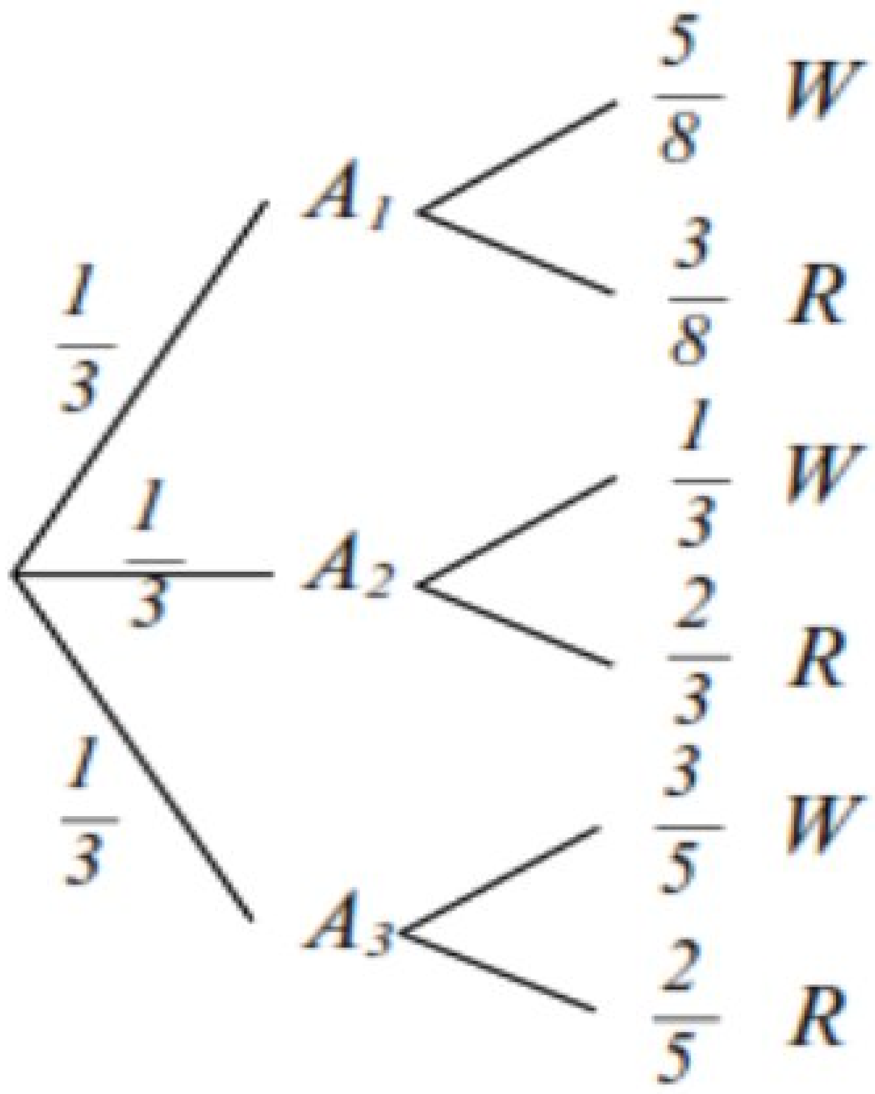
حتّى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً يجب أن يتحقّق:

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

$$\frac{1}{4}.\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}.\frac{1}{3}+\frac{3}{4}.p\right)\Longrightarrow\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}+\frac{3}{4}.p$$

$$\frac{3}{4}p=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}\Longrightarrow p=\frac{1}{3}$$

التمرين 18 : النموذج الوزاري الرابع



في المخطّط الشجري المرسوم جانباً،

الرمز W يدل على الكرات البيضاء

والرمز R على الكرات الحمراء حيث يتم عشوائيّاً اختيار كرة واحدة.

❶ ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

❷ إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأوّل.

الحل:

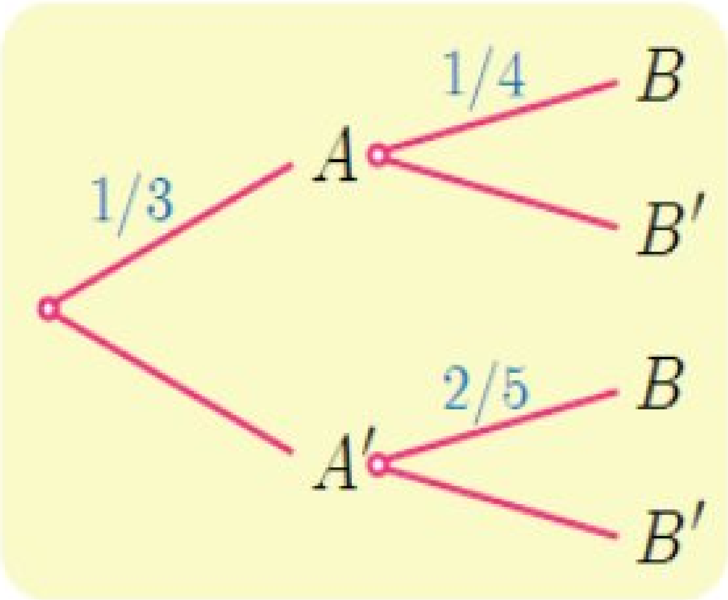
❶ .بفرض الحدث B الكرة المسحوبة حمراء:

$$\mathbb{p}(B)=\frac{1}{3}.\frac{3}{8}+\frac{1}{3}.\frac{2}{3}+\frac{1}{3}.\frac{2}{5}=\frac{173}{360}$$

❷ بفرض الحدث A الكرة المسحوبة من الصندوق الأوّل يكون المطلوب حساب:

$$\mathbb{p}(A|B)=\frac{\mathbb{p}(A\cap B)}{\mathbb{p}(B)}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}}=\frac{45}{173}$$

التمرين 19 :



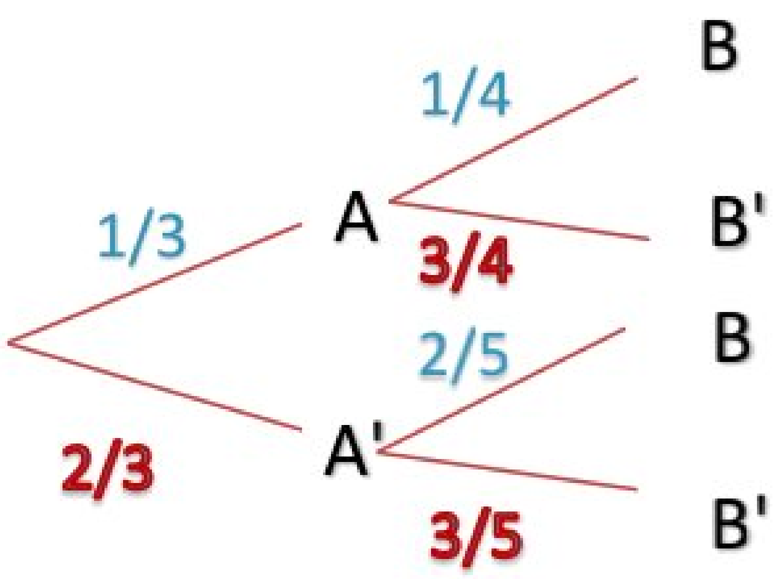
استنادا الى الشكل المجاور عين الاحتمالات

$P(A')$ و $P(B'|A)$ و $P(B'|A')$

واستنتج قيمة كل من $P(A\cap B)$ و $P(A\cap B')$

و $P(A'\cap B)$ و $P(A'\cap B')$

الحل :



- $\mathbb{P}(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{P}(B'|A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $\mathbb{P}(B'|A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
- $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
- $\mathbb{P}(A\cap B') = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(B'|A) = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(A'\cap B) = \mathbb{P}(A').\,\mathbb{P}(B|A') = \frac{2}{3}\times\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$
- $\mathbb{P}(A'\cap B') = \mathbb{P}(A').\,\mathbb{P}(B'|A') = \frac{2}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 20 :

نتأمل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات حمراء .

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق

ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق .

وبعدئذٍ نسحب مجدداً كرة من الصندوق .

لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث : "الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون" .

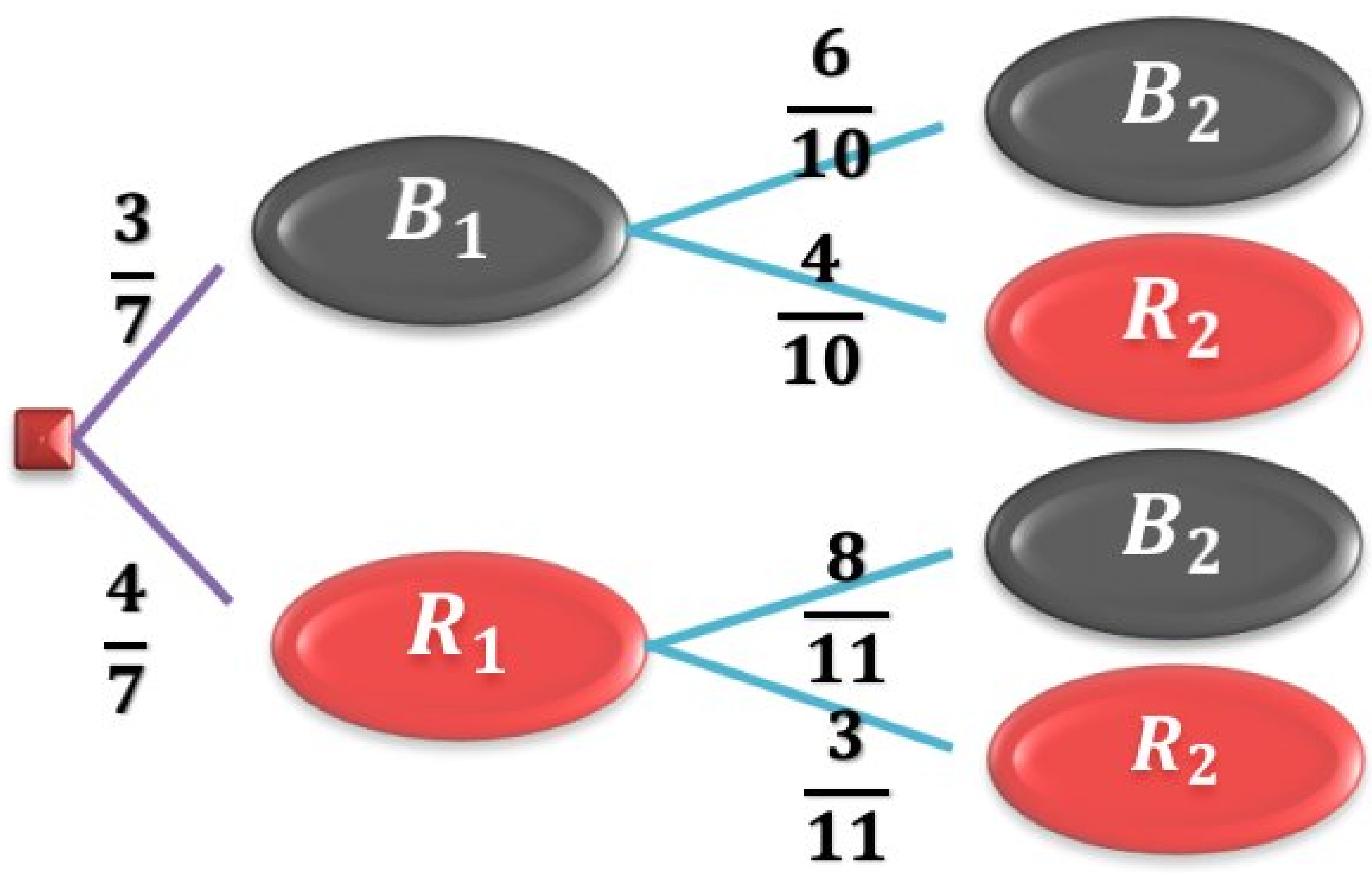
❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .

❷ احسب احتمال الحدث R_2 .

❸ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون

الحل :

❶



اعتماداً على المخطط الشجري نجد:

❷

$$P(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{226}{385}$$

❸

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{4}{10}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 21 :

ليكن لدينا ثلاثة صناديق :

الصندوق الأول يحوي خمس كرات زرقاء و كرة حمراء

الصندوق الثاني يحوي أربع كرات زرقاء و كرتان حمراوان

الصندوق الثالث يحوي ثلاث كرات زرقاء و ثلاث كرات حمراء

نختار عشوائياً واحداً من الصناديق ثم نختار منه كرة

1. **أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .**
2. **احسب احتمال سحب كرة زرقاء اللون .**
3. **وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء**

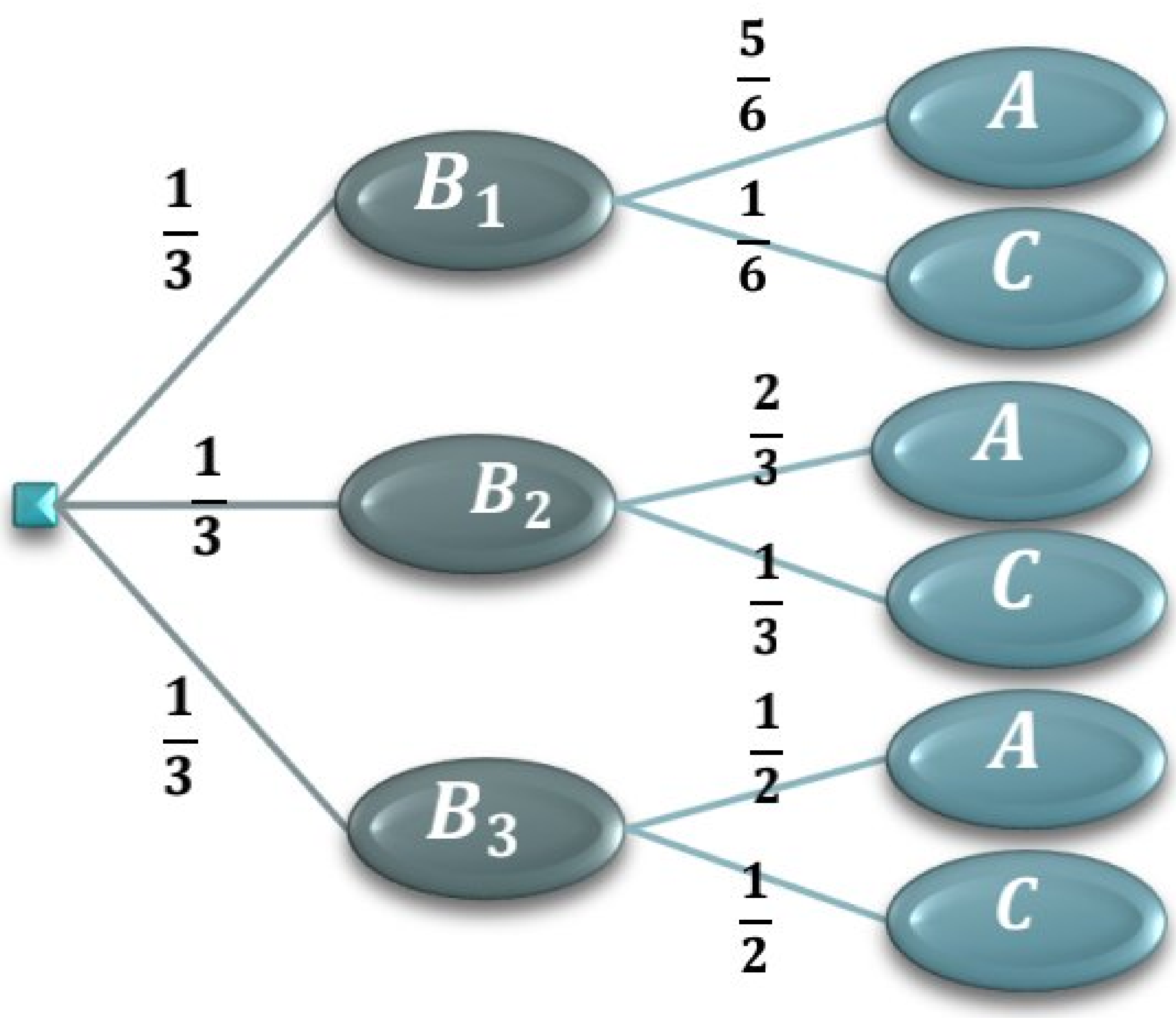
فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق الثاني .

الحل

الصندوق الأول B_1 — ***الكرة زرقاء*** A

الصندوق الثاني B_2 — ***الكرة حمراء*** C

الصندوق الثالث B_3



$$\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B_2|A)=\frac{\mathbb{P}(B_2\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{12}{18}}=\frac{1}{3}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

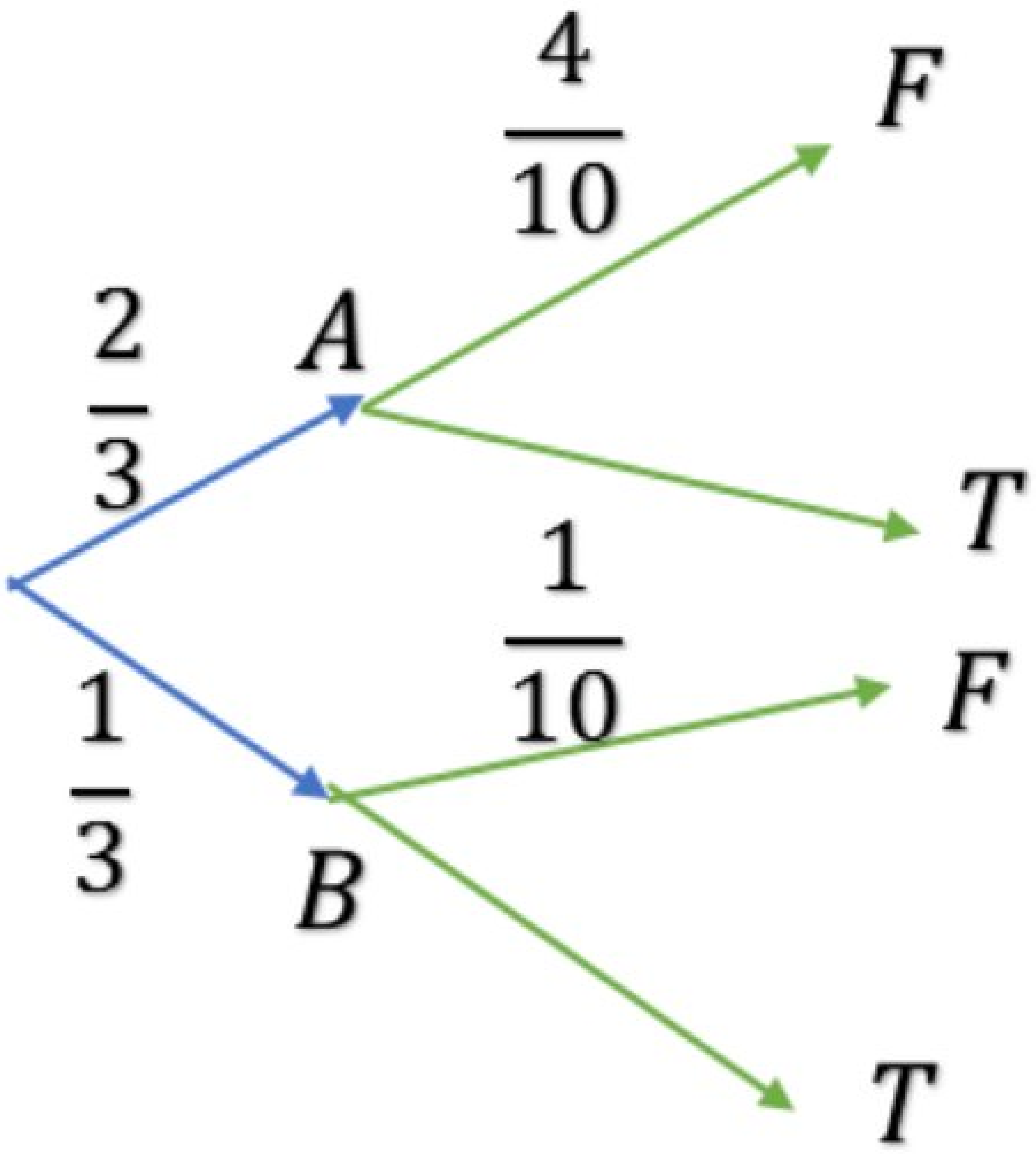
التمرين 22 : النموذج الوزاري الخامس

يشتري محل للأدوات الكهربائيّة 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B،
نعلم أنّ نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج A هي 40% وفي إنتاج B هي 10%
نسحب عشوائيّاً مصباحاً.

❶ ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

❷ إذا علمت أنّ المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع B

الحل:



1 . بفرض الحدث F المصباح معطوباً

$$F = (A \cap F) \cup (B \cap F)$$
$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A).\,\mathbb{P}(F|A) + \mathbb{P}(B).\,\mathbb{P}(F|B)$$
$$\mathbb{P}(F) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

2 . المطلوب حسابه هو $\mathbb{P}(B|F)$:

$$\mathbb{P}(B|F) = \frac{\mathbb{P}(B \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{30} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{9}$$

التمرين 23 :

في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب.
ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور, وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب.
ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارس لعبة كرة المضرب؟

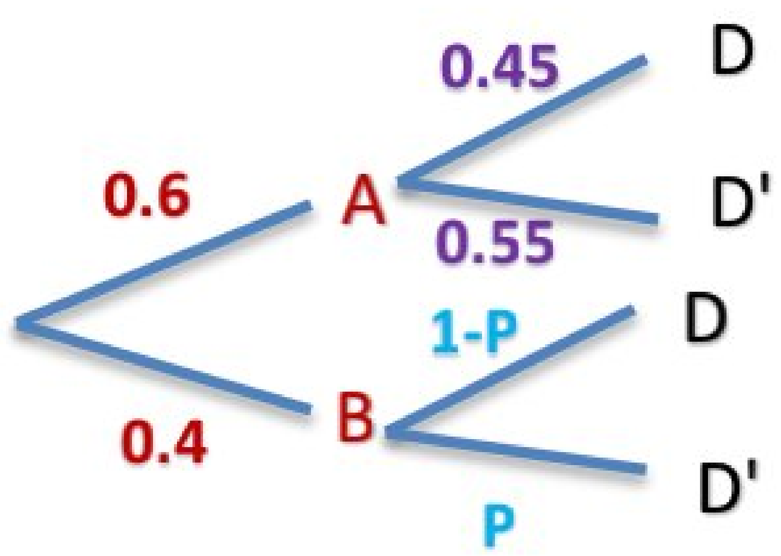
الحل :

بفرض A **الحدث أن يكون ذكر فيكون** $\mathbb{P}(A) = 0.6$

بفرض B **الحدث أن يكون أنثى فيكون** $\mathbb{P}(B) = 0.4$

بفرض D **الحدث أن يمارس الطالب لعبة كرة المضرب فيكون** $\mathbb{P}(D) = 0.3$

فيكون لدينا المخطط الشجري التالي :



$$\mathbb{P}(D'|B) = P$$

$$\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.45 + 04(1 - P) = 0.3$$

$$\Rightarrow P = 0.925$$

التمرين 24 : دورة 2017 الثانية

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . وعندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ,

صنعت الورشة A منها 600 وصنعت البقية الورشة B , وهناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال .

نسحب عشوائياً قلماً من الطلب ,

نرمز بالرمز A إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة A)

وبالرمز B إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة B)

وبالرمز Dإلى الحدث (القلم غير صالح للاستعمال)

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .

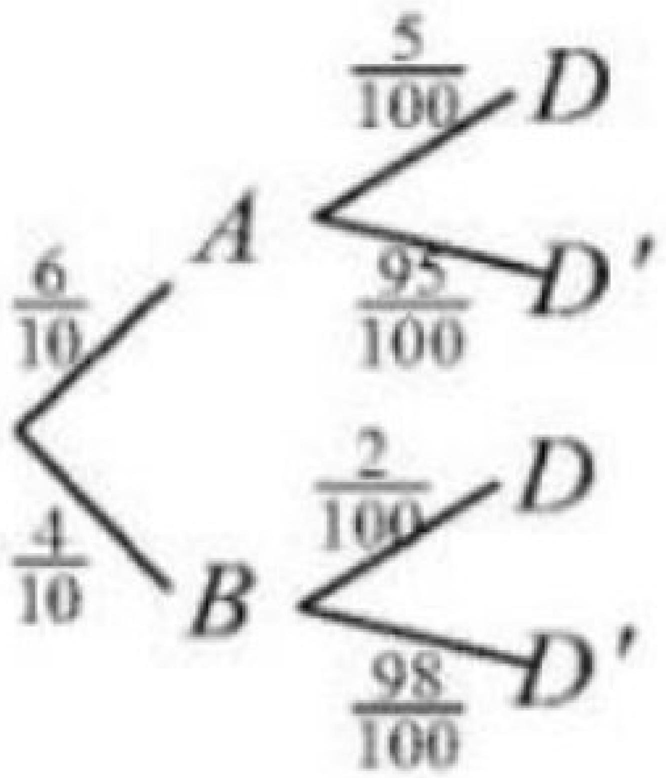
❷ احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال .

❸ إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A .

❹ نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً ,

وليكن X المتحول العشوائي الذي يُمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال ,

احسب $\mathbb{P}(X=0)$.



❶ المخطط الشجري

احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال هو $P(D')$

لدينا $P(A)=\frac{600}{100}=0.6$ و $P(B)=\frac{400}{100}=0.4$

لدينا أيضاً $P(D'|A)=1-0.05=0.95$ و

$P(D'|B)=1-0.02=0.98$

يعطي $P(D')=P(A\cap D')+P(B\cap D')$

يعطي $P(D')=P(A)\times P(D'|A)+P(B)\times P(D'B)$

ومنه $P(D')=0.6\times 0.95+0.4\times 0.98=0.962$

لدينا $P(A|D')=\frac{P(A\cap D\prime)}{P(D\prime)}=\frac{0.6\times 0.95}{0.962}=\frac{285}{481}$

لدينا $X=\{0,1,2\}$ و $P(X=0)$ هو احتمال سحب قلم غير صالح

عدد الأرقام غير الصالحة من الورشة A يساوي:$600\times 0.05=30$

باعتبار السحب معاً لذلك نستخدم التوافيق

ومنه $P(X=0)=\frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}}=\frac{30\times 29}{600\times 599}=\frac{29}{11980}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 25 :

يضم نادي رياضي 80 سباحاً و95 لاعب قوى و 125 لاعب جمباز .

يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط

❶ نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة . احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين :

a . الحدث A : "يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب قوى "

b . الحدث B : " يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة نفسها "

❷ نسبة الفتيات الذين يمارسون السباحة تساوي 45٪ وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20٪

وهي تساوي 68٪ بين الذين يمارسون لعبة الجمباز .

a . نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي .

احسب P_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى . و P_2 : احتمال أن يكون فتاة .

b . نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي . احسب P_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز .

الحل:

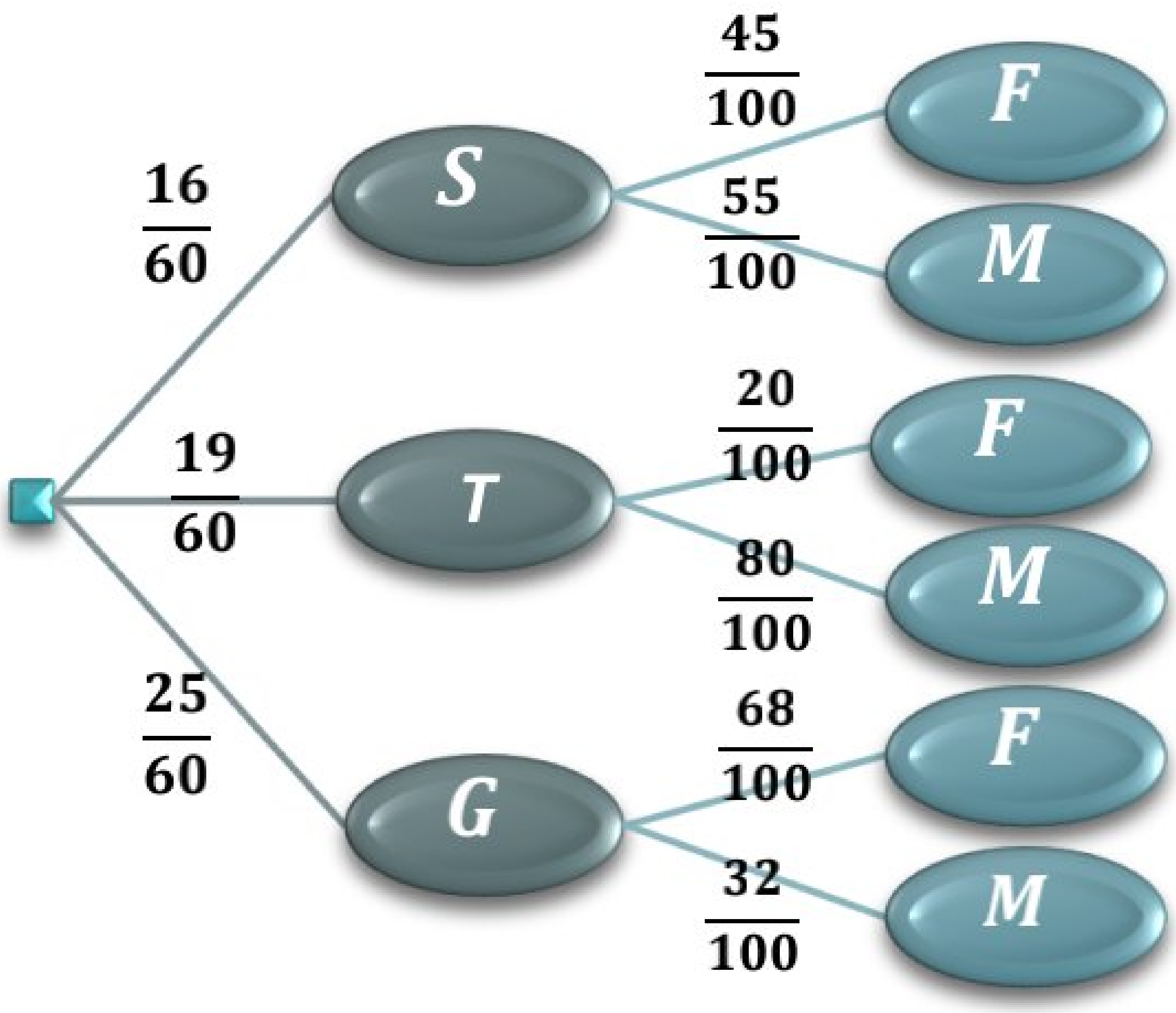
❶ a - $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}} = \dfrac{27683}{891021}$

b - $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{80}{3}+\binom{95}{3}+\binom{125}{3}}{\binom{300}{3}} = \dfrac{21533}{178204}$

❷ نرسم المخطط الشجري باعتبار S: لاعب سباحة G لاعب جمباز T لاعب قوى M شاب F فتاة

$\mathbb{P}(S) = \dfrac{80}{300} = \dfrac{16}{60}$, $\mathbb{P}(T) = \dfrac{95}{300} = \dfrac{19}{60}$, $\mathbb{P}(G) = \dfrac{125}{300} = \dfrac{25}{60}$, $\mathbb{P}(F|S) = \dfrac{45}{100}$ $\mathbb{P}(F|T) = \dfrac{20}{100}$,

$\mathbb{P}(F|G) = \dfrac{68}{100}$



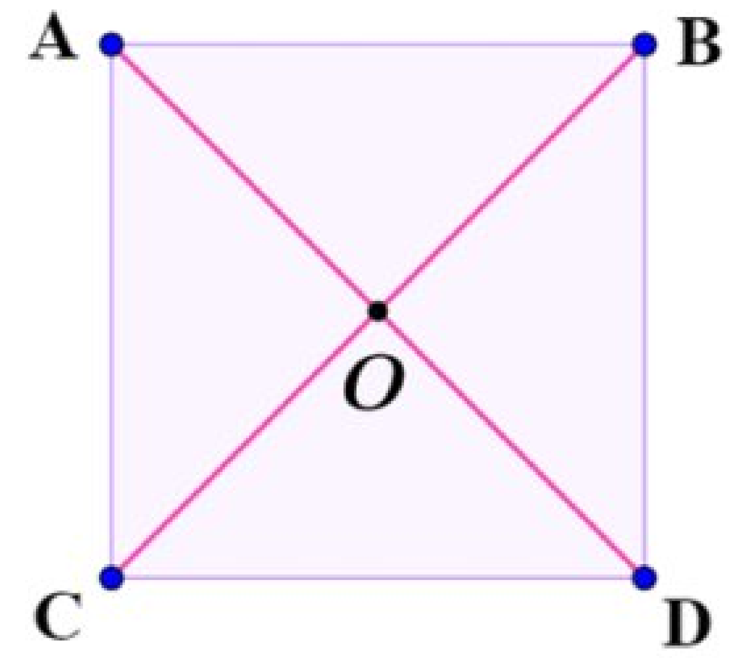
-a $P_1 = \mathbb{P}(F \cap T) = \mathbb{P}(T)(F|T) = \frac{19}{60} \times \frac{20}{100} = \frac{19}{300}$

$$P_2 = \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(T)(F|T) + \mathbb{P}(S)(F|S) + \mathbb{P}(G)(F|G)$$

$$= \frac{19}{60} \times \frac{20}{100} + \frac{16}{60} \times \frac{45}{100} + \frac{25}{60} \times \frac{68}{100} = \frac{140}{300} = \frac{7}{15}$$

-b $P_1 = \mathbb{P}(G|F) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{25}{60} \times \frac{68}{100}}{\frac{140}{300}} = \frac{17}{28}$

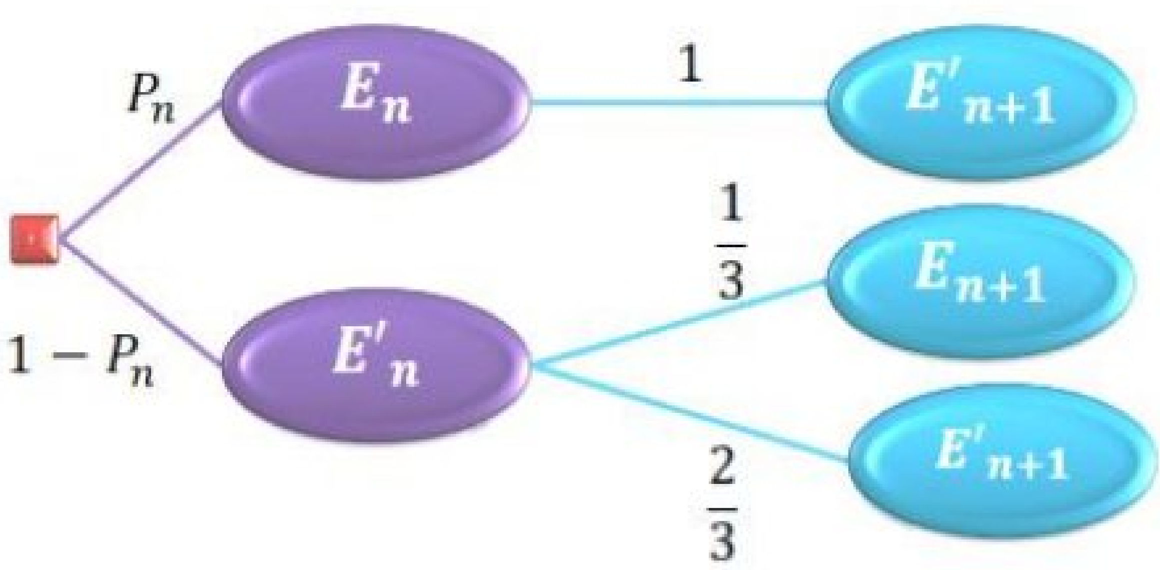
التمرين 26 :



نتأمل مربعاً $ABCD$ مركزه O . تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :

إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$

وإذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى أي من الرؤوس A, B , C , D باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$. في البدء كانت الجزيئة في A . في حالة $n \geq 1$ نرمز بالرمز E_n إلى الحدث : " الجزيئة في O بعد القفزة رقم n " وليكن $P_n = \mathbb{P}(E_n)$, (إذاً $p_1 = \frac{1}{3}$)



❶ علل الاحتمالات المكتوبة

❷ لماذا يوجد إلا فرع واحد بعد $E_n \rightarrow$

❸ ما الاحتمال الذي يجب كتابته على الفرع $E_n \rightarrow E'_{n+1}$

❹ أثبت أن $\mathbb{P}_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}_n)$

ليكن a حل المعادلة $x = \frac{1}{3}(1 - x)$ نضع $t_n = P_n - a$ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية , عين أساسها وحدها الأول ثم استنتج P_n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

الحل :

❶ مجموع احتمالات الفروع الصادرة عن العقدة يساوي 1

❷ بما أن الجزيئة كانت في مركز المربع في القفزة n فإنها ستنتقل حكما بعد القفزة $n+1$ إلى أحد الرؤوس ولن تبقى في مكانها وبالتالي فإن انتقالها سيكون حدث أكيد واحتماله 1 .

❸ الحدث الموافق ل E'_n هو أن الجزيئة تحتل أحد رؤوس المربع بعد القفزة n وبالتالي يمكن أن تقفز الجزيئة في القفزة $n+1$ إما إلى رأس آخر أو إلى المركز ويكون احتمالها في هذه الحالة $\frac{1}{3}$

❹ من المخطط الشجري:

$$\mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}_n)$$

$$x = \frac{1}{3}(1 - x) \Rightarrow x = \frac{1}{4} = a \Rightarrow t_n = P_n - \frac{1}{4}$$

$$t_{n+1} = P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - \mathbb{P}_n) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(\mathbb{P}_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}t_n$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول $t_1 = P_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow P_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{4}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 27 : الاختبار 2

لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \cdots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة حمراء واحدة،
وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء،
نسحب كرة من الصندوق u_1 ثمّ نضعها في الصندوق u_2
ثمّ نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ... ،
نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n .
يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء).

❶ احسب $\mathbb{P}(R_1)$.

❷ أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$

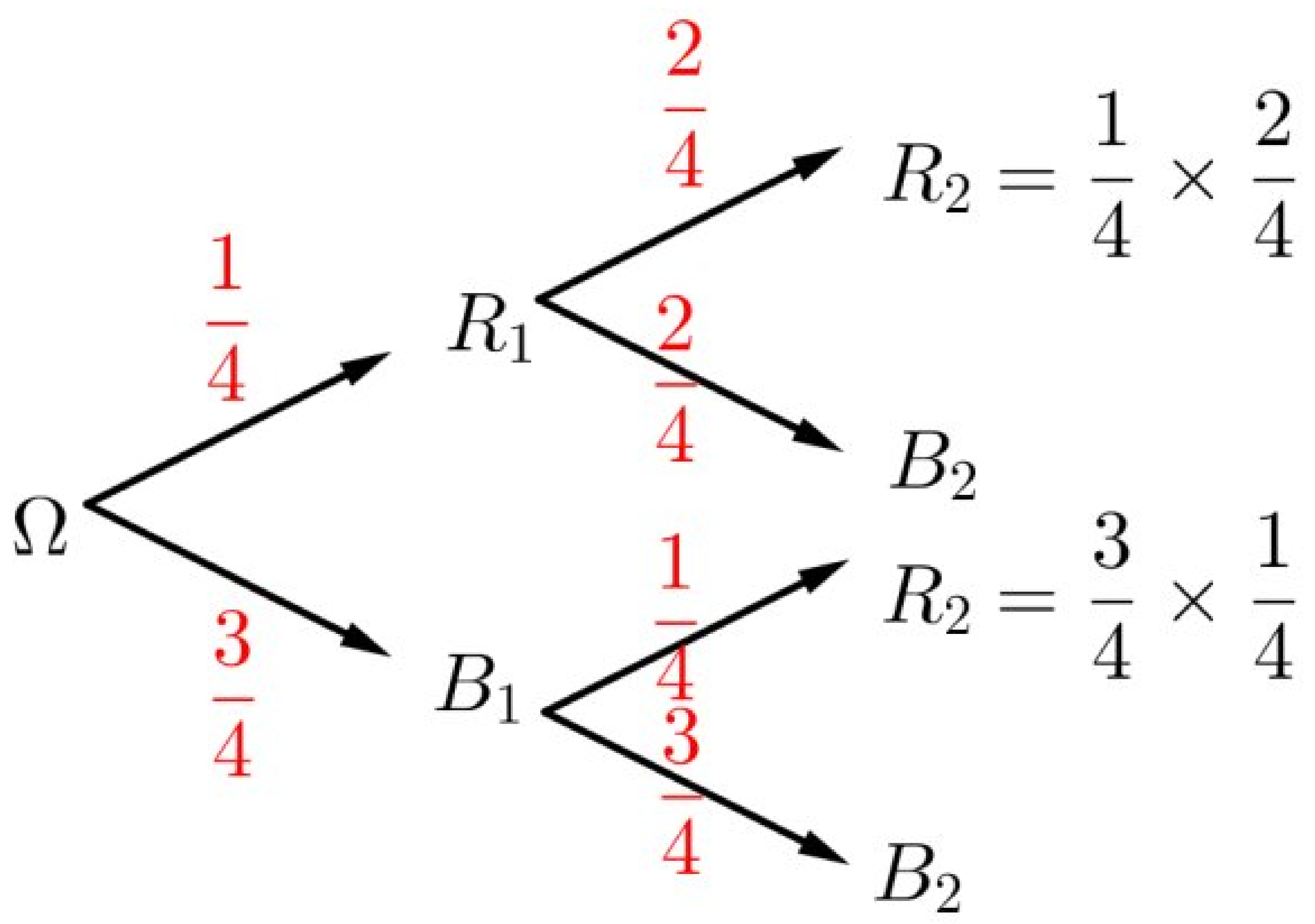
❸ أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \leq k \leq n$.

❹ نعرّف $x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$.

1. أثبت أنّ المتتالية $(x_k)_{k\geq 1}$ هندسيّة. عيّن أساسها وحدّها الأوّل.
2. اكتب x_k بدلالة k واستنتج $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k.

الحل:

1. $\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{4}$
2. $\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}.\frac{2}{4} + \frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{5}{16} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$



$$\mathbf{3}.\ \ \mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4} \quad : \quad 2 \le k \le n$$

نرمّز القضيّة $E(k)$ ، **من أجل** $k = 2$

$$\mathbb{P}\,(R_2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$$ **محقّقة من الطلب السابق**

نفرض صحّة $E(k)$ **ونبرهن صحّة** $E(k+1)$ **أي أنّ:**

$$\mathbb{P}(R_{k+1}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_k) + \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_{k+1}) &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4} = \frac{1}{16}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{5}{16}\\ &= \frac{1}{16}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}\right] + \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_k) + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

والقضيّة محقّقة من أجل $k+1$ **فهي محقّقة أيّاً** $2 \le k \le n$.

$$\mathbf{4}.\ \ x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \mathbb{P}(R_{k+1}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_k) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{12}\\ &= \frac{1}{4}\left[\mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{4}x_k\end{aligned}$$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{4}$ **حدّها الأوّل:**

$$x_1 = \mathbb{P}(R_1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$x_k = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$$

$$\mathbb{P}(R_k) = x_k + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right]$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 28 : الاختبار 3

يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء.

إذا صدّ ضربة الجزّاء n **فإنّ احتمال أن يصد ضربة الجزّاء** $n+1$ **يساوي** 0.8

وإذا لم يصد ضربة الجزّاء n **فإنّ احتمال أن يصد ضربة الجزّاء** $n+1$ **يساوي** 0.6

نفترض أنّ احتمال أن يصد أوّل ضربة جزّاء يساوي 0.7.

ليكن A_n **الحدث ≪ يصد حارس المرمى ضربة الجزّاء** n ≫ .

1. **احسب** $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ **و** $\mathbb{P}(A_2|A'_1)$.
2. **استنتج أنّ** $\mathbb{P}(A_2) = 0.74$
3. **نعرّف** $p_n = \mathbb{P}(A_n)$:

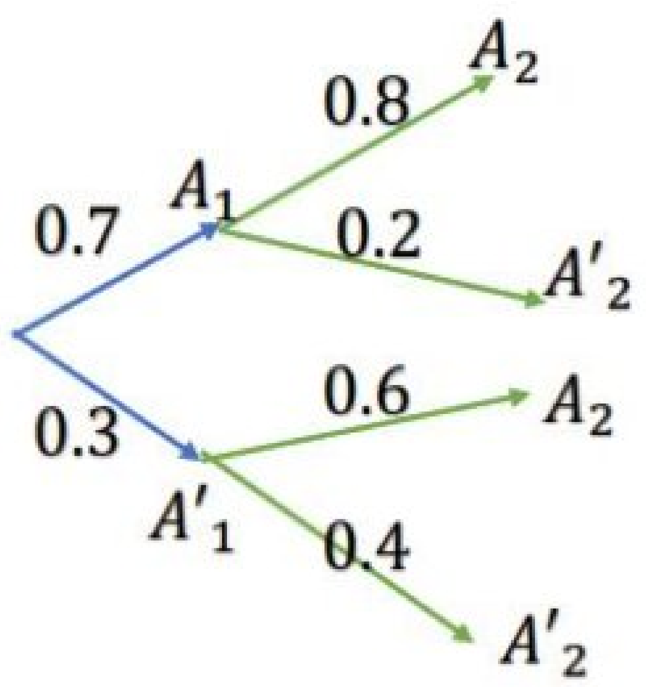
❶ **برهن أنّ** $p_{n+1} = (0.2)p_n + 0.6$.

❷ **لنعرّف المتتالية** $(u_n)_{n\geq 0}$ **بالصيغة** $u_n = p_n - 0.75$

بيّن أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ **متتالية هندسيّة أساسها** 0.2 **. استنتج عبارة** p_n **بدلالة** n

ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

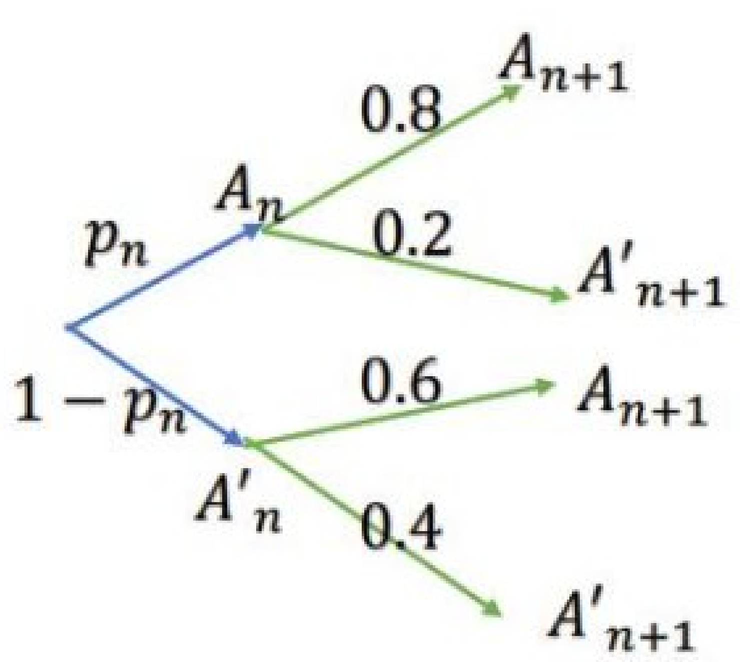
الحل: من المخطط الشجري يمكن أن نجد بسهولة



$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = 0.8$$
$$\mathbb{P}(A_2|A'_1) = 0.6$$
$$\mathbb{P}(A_2) = 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 = 0.56 + 0.18 = 0.74$$

❶

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(0.8) + (1-p_n)(0.6) = (0.8-0.6)p_n + 0.6 \\ &= 0.2p_n + 0.6 \end{aligned}$$



❷ $u_n = p_n - 0.75$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0.75 = 0.2p_n + 0.6 - 0.75 = 0.2p_n - 0.15 \\ &= 0.2(p_n - 0.75) = 0.2u_n \end{aligned}$$

وهي متتالية هندسيّة أساسها 0.2 **وحدّها الأوّل:**

$$u_1 = p_1 - 0.75 = 0.70 - 0.75 = -0.15$$

يكون:

$$u_n = u_1 . q^{n-1} = -0.15 \times (0.2)^{n-1} = -\frac{0.15}{0.2}(0.2)^n = -0.75(0.2)^n$$
$$p_n = u_n + 0.75 = 0.75(1-(0.2)^n)$$
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.75 \times \lim_{n\to+\infty}(1-(0.2)^n) = 0.75 \times 1 = 0.75$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 29 : دورة 2018 الأولى

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية , الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات , فإذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$

$P(X=0)=\frac{1}{27}$ و $P(X=1)=\frac{6}{27}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	...	...

❶ جد $P(X=3), P(X=2)$

❷ ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X.

❸ ما تباين المتحول العشوائي X.

الحل

❶ لدينا تجربة برنولية $P(X=K)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$ حيث

$k\in X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$ و $n=3$, $p=\frac{2}{3}$ يعطي $q=\frac{1}{3}$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}$$

و $$P(X=3)=\binom{3}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27}$$

❷ التوقع الرياضي: $E(X)=n.p=3\times\frac{2}{3}=2$

❸ التباين: $V(X)=n.p.q=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

التمرين 30 : النموذج الوزاري الأول

ليكن X متحوّل عشوائي يمثّل عدد النجاحات في تجربة برنوليّة.

الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X.

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$					$\frac{16}{81}$

❶ **ما عدد الاختبارات في التجربة؟**

❷ **أكمل الجدول المجاور.**

❸ **احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X**

الحل:

❶ **عدد الاختبارات في التجربة هو $n=4$ اختبارات لأنّه هو القيمة العظمى للنجاحات.**

❷ **.ومن الجدول نلاحظ أنّ:**

$$p^4=\frac{16}{81} \Rightarrow p=\frac{2}{3}$$

ونكمل الجدول اعتماداً على قانون التوزيع الاحتمالي للتجارب البرنوليّة:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}=\binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k.\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$$

$$\mathbb{P}(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0.\left(\frac{1}{3}\right)^4=(1)(1)\left(\frac{1}{81}\right)=\frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1.\left(\frac{1}{3}\right)^3=(4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{27}\right)=\frac{8}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^2=(6)\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{1}{9}\right)=\frac{24}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^1=(4)\left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4.\left(\frac{1}{3}\right)^0=(1)\left(\frac{16}{81}\right)(1)=\frac{16}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

❸ **احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X**

$$\mathbb{E}(X)=n.p=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\mathbb{v}(X)=n.pq=4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$$

التمرين 31 :

نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية.

❶ ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات؟

❷ ما احتمال الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل ؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 6$ و (عدد مرات الرمي) $p = \frac{1}{6}$ (احتمال ظهور 6 في الرمية الواحدة لحجر النرد)

ولدينا $r = 3$ (عدد مرات ظهور6)

يعطى القانون الاحتمالي للتجربة البرنولية $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{6}{3}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$$

❷ نوجد احتمال الحدث المتمم

$$\mathbb{P}\,(X < 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$
$$= \binom{6}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{6}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^1.\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^0.\left(\frac{1}{2}\right)^6$$
$$= \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{64}} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{64}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{64}} = \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{64}}$$

ومنه فاحتمال الحدث المطلوب

$$1 - \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{64}} = \frac{\mathbf{42}}{\mathbf{64}}$$

التمرين 32 :

يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار

يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6

يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 9$ و (عدد مرات اللعب) $p = 0.6$ (احتمال أن يكسب A في الدور الواحد)

يكسب B المباراة إذا كانت خسارة A خمسة مرات أو أكثر وهذا يعني أن يربح اللعب A أربع مباريات كأقصى حد

$$\mathbb{P}\,(X \le 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}\,(X = 1) + \mathbb{P}\,(X = 0)$$
$$= \binom{9}{4}.(0.6)^4.(0.4)^5 + \binom{9}{3}.(0.6)^3.(0.4)^6 + \binom{9}{2}.(0.6)^2.(0.4)^7$$
$$+ \binom{9}{1}.(0.6)^1.(0.4)^8 + \binom{9}{0}.(0.6)^0.(0.4)^9$$
$$\approx 0.26656768$$

التمرين 33 :

نُكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقد متوازنتين ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين

احسب احتمال كل من الحدثين

A : **" الحصول ثلاث مرات على الوجهين H "**

B : **" الحصول على وجهين H مرة على الأقل "**

الحل :

في الرمية الواحدة لقطعتي النقود يكون $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

وظهور الشعار على قطعتي النقود هو $S = \{(H,H)\}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 10$ **و** $p = \frac{1}{4}$ **قانونه الاحتمالي**

$$\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$$

$$\mathbb{P}\,(A) = \mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{10}{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 120.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 120.\frac{(3)}{(4)^{10}}^{7}$$

$$\mathbb{P}\,(B) = \mathbb{P}\,(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}\,(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}.\left(\frac{1}{4}\right)^0.\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 34 :

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر .

نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي

❶ ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد ؟

❷ ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل ؟

❸ ما قانون المتحول العشوائي X الذي يعد عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها ؟

الحل :

❶ في الرمية الواحدة لحجر النرد

الحدث R : ظهور وجه أحمر , فيكون $P(R)=\frac{1}{3}$ ويكون R_k هو ظهور الوجه الأحمر في المرة k

الحدث B: ظهور وجه أسود , فيكون $P(B)=\frac{2}{3}$ ويكون B_k هو ظهور الوجه الأسود في المرة k

الحدث A: ظهور وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء حجر نرد فيكون :

$$A=B_1\cap B_2\cap B_3\cap B_4\cap R_5$$

بما أن هذه الأحداث مستقلة احتمالياً :

$$\Rightarrow P(A)=P(B_1)P(B_2)P(B_3)P(B_4)P(R_5)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$$

❷ الحدث C : ظهور الوجه الأحمر مرة على الأقل . نأخذ الحدث المعاكس C' : ظهور الوجه الأسود خمس مرات . وبالتالي

$$P(C)=1-P(C')=1-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$

❸ $\boldsymbol{X=\{0,1,2,3,4,5\}}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n=5$ و $p=\frac{2}{3}$ قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X=r)=\binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}(X=0)=\binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}\ ,\mathbb{P}(X=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{40}{243}\ ,\mathbb{P}(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{80}{243}\ ,\mathbb{P}(X=5)=\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$$

X	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\boldsymbol{\frac{32}{243}}$

التمرين 35 :

طائرات ذات محركين وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات .

إن احتمال حدوث عطل في أحد المحركات يساوي p وهو عدد موجب و أصغر تماماً من 1 .

نفترض أن الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلة عن بعضها .

وليكن X المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين

وليكن Y المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات

❶ عيّن القيم التي يأخذها X وقانونه الاحتمالي .

❷ عيّن القيم التي يأخذها Y وقانونه الاحتمالي .

❸ يمكن لطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل

احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها ,

واحسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها .

❹ تحقّ أنّ $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$

و بيّن تبعاً لقيم p أي نوع من الطائرات يعطي وثوقية أكبر .

الحل :

❶

$\boldsymbol{X = \{0, 1, 2\}}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 2$ و p قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = r) = \binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(X=0) = \binom{2}{0}.(p)^0.(1-p)^2 = (1-p)^2$$

$$\mathbb{P}\,(X=1) = \binom{2}{1}.(p)^1.(1-p) = 2p(1-p)$$

$$\mathbb{P}\,(X=2) = \binom{2}{2}.(p)^2.(1-p)^2 = P^2$$

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	$\boldsymbol{P^2}$

❷

$\boldsymbol{Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 4$ **و** p **قانونه الاحتمالي** $\mathbb{P}\,(X = r) =$ $\binom{n}{r}.(p)^r.(1-p)^{n-r}$

$$\mathbb{P}\,(Y = 0) = \binom{4}{0}.(p)^0.(1-p)^4 = (1-p)^4$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 1) = \binom{4}{1}.(p)^1.(1-p)^3 = 4p(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 2) = \binom{4}{2}.(p)^2.(1-p)^2 = 6P^2(1-p)^2$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 3) = \binom{4}{3}.(p)^3.(1-p)^1 = 4p^3(1-p)$$

$$\mathbb{P}\,(Y = 4) = \binom{4}{4}.(p)^4.(1-p)^0 = p^4$$

Y	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Y = y)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6P^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	$\boldsymbol{p^4}$

❸

$$P_2 = \mathbb{P}\,(X \le 1) = 1 - \mathbb{P}\,(X = 2) = 1 - P^2$$

$$P_4 = \mathbb{P}\,(Y \le 2) = \mathbb{P}\,(Y = 0) + \mathbb{P}\,(Y = 1) + \mathbb{P}\,(Y = 2)$$

$$= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6P^2(1-p)^2$$

$$= (1-p)^2[(1-p)^2 + 4p(1-p)^2 + 6P^2] = 3P^4 - 4P^3 + 1$$

❹

$$P_2 - P_4 = 1 - P^2 - 3P^4 + 4P^3 - 1 = -3P^4 + 4P^3 - P^2$$

$$= P^2(-3P^2 + 4P - 1) = P^2(1-P)(3p-1)$$

بدراسة إشارة المقدار $(P_2 - P_4)$ **مع الأخذ بعين الاعتبار أن** $(1-P) > 0$ **و** $P^2 > 0$

نجد أن إشارة المقدار $(P_2 - P_4)$ **من إشارة المقدار** $(3p - 1)$

- **إذا كان** $0 \le p < \frac{1}{3}$ **يكون** $(P_2 < P_4)$ **والطائرات ذات المحركات الأربع أكثر موثوقية .**
- **إذا كان** $p = \frac{1}{3}$ **يكون** $(P_2 = P_4)$ **يكون للطائرتين نفس الموثوقية**
- **إذا كان** $\frac{1}{3} < p < 1$ **يكون** $(P_2 > P_4)$ **والطائرات ذات المحركين أكثر موثوقية .**

التمرين 36 :

لدينا صندوق يحتوي على كرة بيضاء واحدة تحمل الرقم (1)

و 3 كرات سوداء تحمل الأرقام $(2\,,1\,,1)$.

نسحب عشوائياً كرتين معاً .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة .

و المتحول Y الذي يمثل مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين :

1. **اكتب قيم كل من X و Y. و اكتب قانون الزوج $(X\,,Y)$**
2. **استنتج قانوني كل من X و Y. هل هما مستقلان احتماليا؟**

الحل

1.

$$\boldsymbol{X}=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\quad ,Y=\{2,3\}$$

$$\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}\,(X=1\cap Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=3)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}\,(X=1\cap Y=3)=\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{6}$$

Y \ X	0	1	**قانون** Y
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
قانون X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\mathbb{P}\,(X=0)\times\,\mathbb{P}(Y=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\neq\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=2)=\frac{1}{6}$$

المتحولين غير مستقلين احتمالياً

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 37 :

نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية,

أكمله وبين إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً

Y \ X	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

$$\mathbb{P}\,(X=0)\times\,\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}\neq\mathbb{P}\,(X=0\cap Y=0)=\frac{1}{20}$$

المتحولين غير مستقلين احتمالياً

التمرين 38 :

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y),

علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً

Y \ X	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.8	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	012	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 39 :

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي .

تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً .

نرمز بالرمز E إلى الحدث" يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل "

احسب احتمال الحدث E .

الحل :

لإنجاز الرحلة كاملة في ثلاثة أيام أو اقل نحن أمام الخيارات التالية :

- إنجاز المرحلة الأولى في يوم والمرحلة الثانية في يوم $(X_A = 1) \cap ((X_B = 1)$
- إنجاز المرحلة الأولى في يوم والمرحلة الثانية في يومين $(X_A = 1) \cap ((X_B = 2)$
- إنجاز المرحلة الأولى في يومين والمرحلة الثانية في يوم $(X_A = 2) \cap ((X_B = 1)$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{E}) = \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \cap ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \cap ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{2})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{2}) \cap ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1}))$$

بما أن الأحداث مستقلة احتمالياً نجد

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{E}) = \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \times ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{1}) \times ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{2})) + \mathbb{P}((\boldsymbol{X_A} = \mathbf{2}) \times ((\boldsymbol{X_B} = \mathbf{1}))$$

$$= 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.3 + 0.5 \times 0.2 = 0.2$$