شيفرة الـ 600

للإعداد والتكوين والتأسيس في الرياضيات

للثالث الثانوي العلمي
الجزء الثاني

by:Hisham Labanieh

إعداد المدرس
خالد عامر

0940 916 753 خالد عامر Syria - Damascus

شيفرة الـ 600 في الأشعة

تذكرة وعموميات:

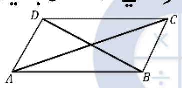
تعريف	لتكن لدينا النقطتين A و B من الفراغ نقول عن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ أنه الانسحاب الذي ينقل A إلى B
نميز	الحالة الأولى: في حالة $A \neq B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يمتلك: * منحى: هو منحى المستقيم (AB) * اتجاه: يتفق مع الانتقال من A إلى B * طولاً أو نظيماً: هو المسافة بين A و B ونرمز إلى نظيم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert$ ويكون: $\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = AB$
	الحالة الثانية: في حالة $A = B$ فإن الشعاع $\overrightarrow{AA}$ هو الشعاع الصفري ورمزه $\vec{0}$ حيث: الشعاع الصفري: هو شعاع له نفس البداية ونفس النهاية أي بدايته تنطبق على نهايته نتيجة هامة: إذا كان $\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ فهذا يعني أن $D = N$ أي D تنطبق على N

	الشعاعان المتساويان	الشعاعان المتعاكسان
تعريف	الشعاعين المتساويان لهما نفس المنحى ونفس الجهة ونفس الطويلة حيث: نفس المنحى تعني توازي أو انطباق	لهما نفس المنحى ونفس الطويلة ولكن اتجاهين متعاكسين
الفائدة	تفيد في استبدال شعاع بشعاع آخر يساويه	$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \to \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

العمليات على الأشعة:

تنويه: ناتج مجموع أشعة هو شعاع

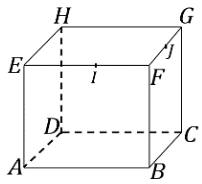
قواعد:

أولاً: مجموع شعاعين			
متساويين	متعاكسين	في حالة تعاقب	لهما البداية نفسها
الناتج هو ضعفي أحدهما مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$	الناتج هو الشعاع الصفري مثال: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$	أي نهاية أحد الأشعة هي بداية للشعاع الآخر وهنا نستخدم قاعدة شال في جمع الأشعة وفق: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	نستخدم قاعدة متوازي الأضلاع بحيث يكون مجموع الشعاعين هو قطر متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين والذي له نفس بداية الشعاعين مثال:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

ثانياً: طرح شعاعين
لطرح شعاعين نجمع الأول مع معاكس الشعاع الثاني وفق: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ ثم نتابع حسب قواعد جمع الأشعة

التمرين الأول:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$ والمطلوب أكمل ما يلي:



1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
2. $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC}$
3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$
4. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$
5. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF}$
6. $\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$
8. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
9. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
10. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DF}$
11. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AI}$
12. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}$
13. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
14. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DG}$
15. $\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{IA}$
16. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
17. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HJ}$
18. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FJ}$
19. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{EI}$
20. $\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{CG}$
21. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$
$= \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}$
$= \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$

22. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

23. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

24. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BG}$

25. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$

26. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GJ}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{EJ}$

27. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GI}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{EI}$

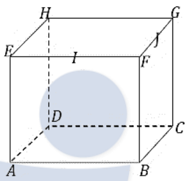
28. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

29. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

التمرين الثاني:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

أولاً:



في كل من الحالات الآتية بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب علل إجابتك:

1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF}$$

وهي تكافئ: $M = F$ أيّ أنّ النقطة M تنطبق على النقطة F والنقطة F هي أحد رؤوس المكعب.

2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG}$$

وهي تكافئ: $M = G$ أيّ أنّ النقطة M تنطبق على النقطة G والنقطة G هي أحد رؤوس المكعب.

3. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BF}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$$

وهي تكافئ $M = E$ أيّ أنّ النقطة M تنطبق على النقطة E والنقطة E هي أحد رؤوس المكعب.

4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG}$$

باعتبار C' هي نظيرة C بالنسبة إلى G نجد أنّ:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC'}$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC'}$$

إذاً M تنطبق على C' حيث C' ليست من رؤوس المكعب وبالتالي النقطة M لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب.

ملاحظة: غالباً لإيجاد مجموع شعاعين لهما نفس النهاية نوجد نظيرة إحدى النقاط ثم نستبدل الشعاع.

5. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FB})$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FG})$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG})$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB})$$
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$$

وهي تكافئ: $M = B$ ومنهُ النقطة M تنطبق على النقطة B والنقطة B هي أحد رؤوس المكعب.

ثانياً:

في كل من الحالات الآتية حدد موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة:

1. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ}$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ}$$

وهي تكافئ: $N = J$ ومنهُ النقطة N تنطبق على النقطة J

2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ}$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} \rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ}$$

وهي تكافئ: $N = J$ ومنهُ النقطة N تنطبق على النقطة J

3. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI}$$
$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI}$$

وهي تكافئ: $N = I$ ومنهُ النقطة N تنطبق على النقطة I

ثالثاً:

في كل من الحالات الآتية عبر عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد "قد يكون مضروباً بعدد" وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

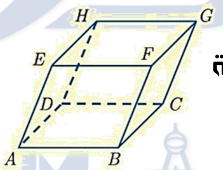
$$1.\ \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA}$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$$

$$2.\ \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$$
$$= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EC}$$
$$= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{EG}$$

$$3.\ \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$
$$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IF}$$
$$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$$
$$= 2\overrightarrow{AI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AI}$$

$$4.\ \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

التمرين الثالث:



$ABCDEFGH$ متوازي سطوح أثبت صحة المساواة الشعاعية في الحالات:

$$1.\ \underbrace{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE}}_{l_1} = \underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0} = l_2$$

بما أنّ $l_1 = l_2$ فإنّ المساواة الشعاعيّة صحيحة.

$$2.\ \underbrace{\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}}_{l_1} = \underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$$
$$= \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CF} = \vec{0} = l_2$$

بما أنّ $l_1 = l_2$ فإنّ المساواة الشعاعية محققة.

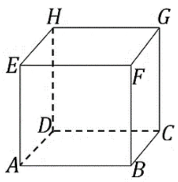
$$3.\ \underbrace{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB}}_{l_1} = \underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$
$$= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB}$$
$$= \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EB}$$
$$= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EB} = \vec{0} = l_2$$

بما أنّ $l_1 = l_2$ فإنّ المساواة الشعاعية محققة.

$$4.\ \underbrace{\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG}}_{l_1} = \underbrace{\overrightarrow{FD}}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG}$$
$$= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FG}$$
$$= \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{FG}$$
$$= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}$$
$$= \overrightarrow{FD} = l_2$$

بما أنّ $l_1 = l_2$ فإنّ المساواة الشعاعية محققة.

التمرين الرابع:



$ABCDEFGH$ مكعب والمطلوب:

١. أثبت أنّ $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DF}$

الحل:

الطريقة الأولى:

$$\underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}}_{l_1} = \underbrace{2\overrightarrow{DF}}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}$$
$$= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$$
$$= 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DH} = 2\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}\right)$$
$$= 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}\right) = 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}\right) = 2\overrightarrow{DF} = l_2$$

الطريقة الثانية:

$$\underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}}_{l_1} = \underbrace{2\overrightarrow{DF}}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}$$
$$= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FG}$$
$$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$$
$$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FG} = 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AD}$$
$$= 3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FD} = 3\overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{DF} = l_2$$

٢. عيّن النقطة M التي تحقق العلاقة الآتية:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DH}$$

الحل:

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG}\right) - \overrightarrow{DH}$$

لدينا من الطلب السابق:

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DF}$$

ومنهُ:

$$= \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DF}\right) - \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DH}$$
$$= \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DB}$$

إذاً لدينا $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$

ومنهُ نجد أنّ النقطة M تنطبق على النقطة B

المعلم في الفراغ:

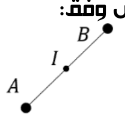
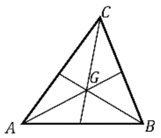
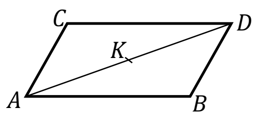
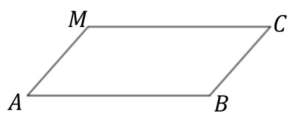
المعلم في الفراغ	هو إعطاء نقطة O تسمى مبدأ المعلم وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً تسمى أساس أشعة الفراغ "أشعة الواحدة"
إحداثيات نقطة في الفراغ	لتكن M نقطة من الفراغ إذاً إحداثيات M وفق: $M(x,y,z)$ حيث: x فاصلة النقطة و y ترتيب النقطة و z راقم النقطة
مركبات شعاع في الفراغ	ليكن $\vec{u}$ في الفراغ مركباته تعطى وفق: $\vec{u}(x,y,z)$ ويمكن أن نكتب $\vec{u}$ بالصيغة: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ويمكن أيضاً أن نكتب $\vec{u}$ وفق عمود وفق: $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
إيجاد مركبات شعاع	لتكن لدينا النقطتين: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ فإن مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ تعطى وفق: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$

العمليات على الأشعة:

ليكن لدينا $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ فإن:

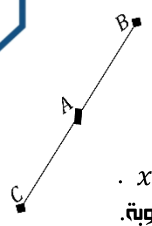
جداء عدد حقيقي بشعاع	مجموع شعاعين	تساوي شعاعين
هو شعاع مركباته تنتج من ضرب هذا العدد بمركبات الشعاع أي: $K\vec{u}=\begin{pmatrix}Kx_1\\Ky_1\\Kz_1\end{pmatrix}$	هو شعاع مركباته تنتج من جمع مركبات الشعاع الأول مع مقابلاتها من الشعاع الثاني أي: $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$	إذا كان لدينا $\vec{u}=\vec{v}$ فهذا يكافئ أن: $\vec{u}=\vec{v}\rightarrow\begin{pmatrix}x_1=x_2\\y_1=y_2\\z_1=z_2\end{pmatrix}$

إيجاد إحداثيات النقاط:

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	إن إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ تعطى وفق: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ 
إحداثيات مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ * جد إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC * جد إحداثيات G مركز تلاقي المتوسطات	إن إحداثيات G تعطى وفق: $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$ 
إحداثيات مركز متوازي الأضلاع	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ و $D(x_D,y_D,z_D)$ جد إحداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABCD$	إن إحداثيات النقطة K مركز متوازي الأضلاع $ABDC$ نقطة تلاقي قطريه أيّ (منتصف أحد أقطاره) أي: * إمّا الـ K منتصف $[AD]$ * أو الـ K منتصف $[CB]$ 
إحداثيات نقطة بمعلومية علاقة شعاعية وإحداثيات باقي النقط	جد إحداثيات النقطة التي تحقق العلاقة الشعاعية (بحيث العلاقة الشعاعية معطاة)	* نفرض النقطة المجهولة (x,y,z) . * نعوض في العلاقة الشعاعية المعطاة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة.
إحداثيات النقطة التي تجعل الرباعي متوازي أضلاع	لتكن لدينا النقاط: $A(x_A,y_A,z_A)$ و $B(x_B,y_B,z_B)$ و $C(x_C,y_C,z_C)$ جد إحداثيات النقطة M التي تجعل الرباعي $ABCM$ متوازي الأضلاع.	* نفرض النقطة المطلوبة $M(x,y,z)$ * نرسم شكل تقريبي * نأخذ علاقة شعاعية من الشكل. * نعوض في العلاقة. * نطبق العمليات على الأشعة. * نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . * نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة. 

تذكر جيداً ..

أن أعظم انتصار لك أن تهزم هَواك، ولن يبلغ المجد إلا أهل التعب، ولن يَصل إلا من صَدَق «والنَّعيم لا يُدرَك بالنَّعيم»

إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة	أوجد إحداثيات النقطة C نظيرة B بالنسبة إلى A .	❋ نفرض النقطة المطلوبة $C(x,y,z)$ ❋ نرسم شكل تقريبي، حيث النقطة التي تأتي بعد كلمة بالنسبة تكون في المنتصف. ❋ نأخذ علاقة شعاعية من الشكل ولتكن مثلاً: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$ ❋ مع الانتباه على أن يكون للشعاعين نفس المنحى والجهة. ❋ نعوض في العلاقة. ❋ نطبق العمليات على الأشعة. ❋ نحصل على معادلات من الدرجة الأولى بالمجاهيل z و y و x . ❋ نحل المعادلات السابقة فنحصل على إحداثيات النقطة المطلوبة. 
إحداثيات نقطة نظيرة نقطة بالنسبة إلى المبدأ	جد إحداثيات النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ.	تكون إحداثيات النقطة B هي عكس إحداثيات النقطة A أي أننا نغير الإشارات فقط.

التمرين الأول: لتكن لدينا النقاط:

$A(5,2,1)$	$B(-1,0,2)$
$C(3,1,-2)$	$D(0,-2,2)$
$E(3,-1,-3)$	$F(-1,1,0)$

1. جد مركبات كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB}(-6,-2,1)$$
$$\overrightarrow{CD}(-3,-3,4)$$

2. جد مركبات الشعاع $\vec{u}$ الذي يحقق العالقة:

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ED}$$
$$= 2\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\-1\\5\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-12\\-4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-\frac{2}{3}\\\frac{10}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-\frac{14}{3}\\\frac{16}{3}\end{pmatrix}$$

3. جد مركبات الشعاع $\vec{v}$ الذي يحقق العلاقة:

$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$$
$$= \begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-4\\2\\3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-12\\6\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{27}{5}\\\frac{43}{5}\\\frac{36}{5}\end{pmatrix}$$

4. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$$

لتكن النقطة $M(x,y,z)$ ومنه:

$$\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}4\\1\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-2\\8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\-3\\5\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\left.\begin{aligned}3-x=-10 &\to x=13\\ 1-y=-3 &\to y=4\\ -2-z=5 &\to z=-7\end{aligned}\right\} M(13,4,-7)$$

5. جد إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

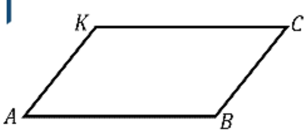
$$\left.\begin{aligned}x_I &= \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1\\ y_I &= \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}\\ z_I &= \frac{z_B+z_C}{2} = \frac{2-2}{2} = 0\end{aligned}\right\} I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$$

6. جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث (DFE)

$$\left.\begin{aligned}x_G &= \frac{x_D+x_F+x_E}{3} = \frac{0-1+3}{3} = \frac{2}{3}\\ y_G &= \frac{y_D+y_F+y_E}{3} = \frac{-2+1-1}{3} = \frac{-2}{3}\\ z_G &= \frac{z_D+z_F+z_E}{3} = \frac{2+0-3}{3} = -\frac{1}{3}\end{aligned}\right\} G\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

7. جد إحداثيات النقطة K التي تجعل $ABCK$ متوازي أضلاع ثم احسب إحداثيات النقطة N مركز متوازي الأضلاع.

إيجاد إحداثيات النقطة K التي تجعل الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.



لتكن النقطة $K(x,y,z)$

وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$$
$$\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\left.\begin{aligned} -6 &= 3 - x \to x = 9 \\ -2 &= 1 - y \to y = 3 \\ 1 &= -2 - z \to z = -3 \end{aligned}\right\} K(9,3,-3)$$

إيجاد إحداثيات النقطة N مركز متوازي الأضلاع هي نقطة تلاقي قطريه (منتصف أحد أقطاره) أيّ أنّ N منتصف $[AC]$ ومنهُ:

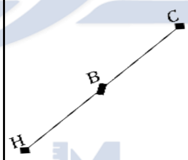
$$\left.\begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5+3}{2} = 4 \\ y_N &= \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ z_N &= \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1-2}{2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} N\left(4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

أو أنّ N منتصف $[KB]$ وفق:

$$\left.\begin{aligned} x_N &= \frac{x_K + x_B}{2} = \frac{9-1}{2} = 4 \\ y_N &= \frac{y_K + y_B}{2} = \frac{3-0}{2} = \frac{3}{2} \\ z_N &= \frac{z_K + z_B}{2} = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}\right\} N\left(4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

٨. جد إحداثيات النقطة H نظيرة C بالنسبة إلى B

لتكن $H(x,y,z)$ وليكن لدينا:



$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix} -1-x \\ 0-y \\ 2-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

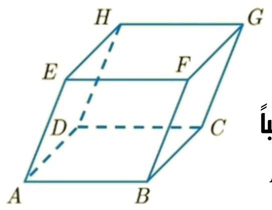
$$\left.\begin{aligned} -1 - x &= 4 \to x = -5 \\ -y &= 1 \to y = -1 \\ 2 - z &= -4 \to z = 6 \end{aligned}\right\} H(-5,-1,6)$$

٩. جد إحداثيات النقطة L نظيرة F بالنسبة إلى المبدأ

إنّ إحداثيات النقطة L هي $L(1,-1,0)$

التمرين الثاني:

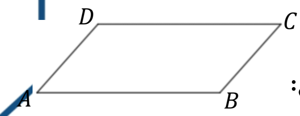
في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ نعطى إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً وهي: $A(2,1,-1)$ و $B(1,3,-1)$ و $C(-3,2,0)$ و $E(3,-1,3)$ جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.



فما نحن إلّا أيام، وما أعمارنا إلّا الأثر ..

الحل:

تعيين إحداثيات النقطة D :



ليكن لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع:

بفرض $D(x,y,z)$ ولدينا:

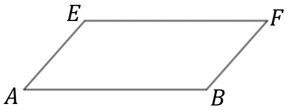
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-x \\ 2-y \\ -z \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} D(-2,0,0)$$

تعيين إحداثيات النقطة F :



ليكن لدينا $ABFE$ متوازي أضلاع:

بفرض $F(x,y,z)$ ولدينا:

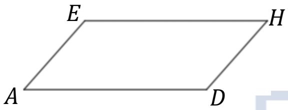
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} F(2,1,3)$$

تعيين إحداثيات النقطة H :



ليكن لدينا $ADHE$ متوازي أضلاع:

بفرض $H(x,y,z)$ ولدينا:

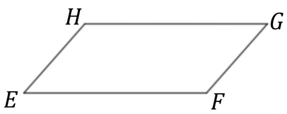
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}\right\} H(-1,-2,4)$$

تعيين إحداثيات النقطة G :



ليكن لدينا $EFGH$ متوازي أضلاع:

بفرض $G(x,y,z)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\left.\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 0 \\ z &= 4 \end{aligned}\right\} G(-2,0,4)$$

التمرين الثالث:

لدينا النقطتان $A(2,3,-2)\,,B(5,-1,0)$

في كل حالة جد إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة إن أمكن.

1. $\overrightarrow{MA}=2\overrightarrow{AB}$

لتكن $M(x,y,z)$ ومنه:

$$\begin{pmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-8\\4\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ: $x=-4$ و $y=-11$ و $z=-6$ إذاً:

$M(-4,-11,-6)$

2. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

لتكن $M(x,y,z)$ ومنه:

$$\begin{pmatrix}2-x\\3-y\\-2-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-x\\-1-y\\-z\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$2-x=5-x$$

$$-x+x=5-2\to 0\neq 3$$

إذاً لا يوجد نقطة M تحقق العلاقة السابقة.

3. $3\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

لتكن $M(x,y,z)$ ومنه:

$$3\begin{pmatrix}-3\\4\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5-x\\-1-y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-9\\12\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5-x\\-1-y\\-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4-x\\11-y\\-6-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ: $x=-4$ و $y=11$ و $z=-6$ إذاً:

$M(-4,11,-6)$

4. $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

الحل كما سبق يا عزيزي الطالب..

النجاح الحقيقي يحتاج وقت 💙
الاستمرارية هي السر 👑

المعلم في الفراغ:

اختيار معلم في الفراغ:

هو إعطاء نقطة O تسمى مبدأ المعلم وجملة ثلاثة أشعة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ليست مرتبطة خطياً تسمى أساس أشعة الفراغ "أشعة الواحدة"

رمز المعلم في الفراغ:

$$\Big(\underbrace{O}_{\text{مبدأ المعلم}}\ \underbrace{;}_{\text{فاصلة منقوطة}}\ \underbrace{\vec{\imath}}_{\text{شعاع الواحدة المحمول على محور الفواصل}}\ ,\ \underbrace{\vec{\jmath}}_{\text{شعاع الواحدة المحمول على محور التراتيب}}\ ,\ \underbrace{\vec{k}}_{\text{شعاع الواحدة محمول على محور الرواقم}}\Big)$$

أنواع المعلم

المعلم المتجانس	المعلم المتعامد	المعلم الكيفي
نقول بأن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متجانس إذا تحقق: * $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى * نظيم كل من $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ يساوي واحدة الطول أي: $\lVert\vec{\imath}\rVert=\lVert\vec{\jmath}\rVert=\lVert\vec{k}\rVert=1$	نقول بأن المعلم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متعامد إذا تحقق: $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ متعامدة مثنى مثنى "أي وجود ثلاثية متعامدة" ملاحظة: المعلم المتعامد يمكن تحويله إلى معلم متجانس	نقول إن المعلم كيفي إذا كانت $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ غير متعامدة مثنى مثنى (عدم وجود ثلاثية متعامدة)

متى يمكن وضع معلم متجانس؟

* في حالة المكعب
* في حالة متوازي المستطيلات بشرط أبعاده معلومة
* في حالة الهرم بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة
* في حالة رباعي الوجوه بشرط وجود ثلاثية متعامدة وبشرط أبعاده معلومة

إيجاد إحداثيات النقاط بالاعتماد على معلم متجانس:

أولاً: المكعب:

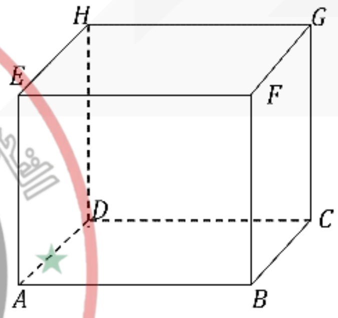
تمهيد:

* عندما يكون الشكل مكعب فهذا يعني وجود ثلاثية متعامدة أي وجود معلم متعامد
* عندما يكون طول حرف المكعب غير معلوم يمكننا أن نأخذ معلم متجانس باعتبار طول حرفه هو 1

هذه الأيام «فترة إنقاذ» تستدرك ما فات، وتدرك ما هو آت، وتعمل بجهدك ما استطعت، لا تكثر الشكوى، لا تطِل الوقوف، لا تجلس على حافة الطريق .. وجّه قلبك نحو السماء، وقل:«لَا أَبْرَحُ حَتَّى أَبْلُغَ» 💙

نص السؤال	فكرة الحل

نص السؤال: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه a باختيار معلم متجانس مبدؤه A , جد إحداثيات النقاط المشكلة لرؤوسه.



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$

إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق:

بالاعتماد على اسم المعلم نحدد النقاط:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,a)$
$B(a,0,0)$	$D(0,a,0)$

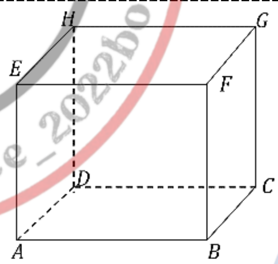
بالاعتماد على المستوي الأرضي نحدد إحداثيات النقطة C حيث يكون لها x و y وليس لها z وفق:

$$C(a,a,0)$$

بالاعتماد على المستوي العلوي نحدد إحداثيات النقاط G و F و H وذلك بأخذ إحداثيات نقاطه من المستوي الأرضي مع تعديل حقل الـ z لأنّ له ارتفاع وفق:

$F(a,0,a)$	$H(0,a,a)$
$G(a,a,a)$	

نص السؤال: $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 3 باختيار معلم متجانس مبدؤه D , جد إحداثيات النقاط المشكلة لرؤوسه.



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس:

$$\left(D;\frac{1}{3}\overrightarrow{DA},\frac{1}{3}\overrightarrow{DC},\frac{1}{3}\overrightarrow{DH}\right)$$

إيجاد إحداثيات رؤوس المكعب تعطى وفق:

$D(0,0,0)$	$H(0,0,3)$
$A(3,0,0)$	$E(3,0,3)$
$C(0,3,0)$	$G(0,3,3)$
$B(3,3,0)$	$F(3,3,3)$

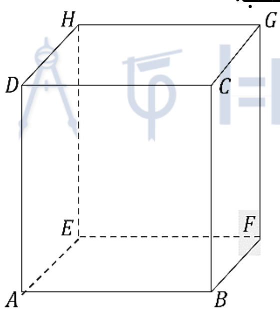
ثانياً: متوازي مستطيلات أبعاد معلومة:

تمهيد:

- في حالة متوازي المستطيلات يوجد ثلاثية متعامدة
- في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده معلومة يمكن وضع معلم متجانس.
- في حالة متوازي المستطيلات الذي أبعاده غير معلومة لا يمكن وضع معلم متجانس.

نص السؤال	فكرة الحل

نص السؤال: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = a$ و $BF = b$ و $FG = c$ باختيار معلم متجانس مبدؤه A أوجد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب:



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AE},\frac{1}{c}\overrightarrow{AD}\right)$

إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق:

بالاعتماد على اسم المعلم نحدد النقاط:

$A(0,0,0)$	$D(0,0,c)$
$B(a,0,0)$	$E(0,b,0)$

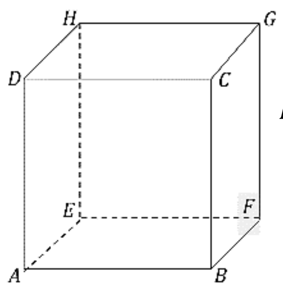
بالاعتماد على المستوي الأرضي نحدد إحداثيات النقطة F حيث يكون لها x و y وليس لها z وفق:

$$F(a,b,0)$$

بالاعتماد على المستوي العلوي نحدد إحداثيات النقاط C و G و H وذلك بأخذ إحداثيات نقاطه من المستوي الأرضي مع تعديل حقل الـ z لأنّ له ارتفاع وفق:

$C(a,0,c)$	$H(0,b,c)$
$G(a,b,c)$	

نص السؤال: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 4$ و $BF = 3$ و $FG = 5$ باختيار معلم متجانس مبدؤه E أوجد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب:



فكرة الحل:

لدينا المعلم المتجانس:

$$\left(E;\frac{1}{3}\overrightarrow{EA},\frac{1}{4}\overrightarrow{EF},\frac{1}{5}\overrightarrow{EH}\right)$$

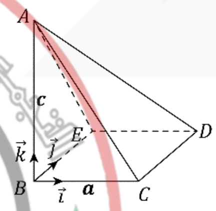
إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس المكعب تعطى وفق:

$E(0,0,0)$	$H(0,0,5)$
$A(3,0,0)$	$D(3,0,5)$
$F(0,4,0)$	$G(0,4,5)$
$B(3,4,0)$	$C(3,4,5)$

ثالثاً: هرم يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة:

نص السؤال

$ABCDE$ هرم رأسه A وقاعدته $BCDE$ مربع طول ضلعه a ولدينا (AB) عمودي على القاعدة $(BCDE)$ و $BA = c$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم.



فكرة الحل

لدينا المعلم المتجانس:

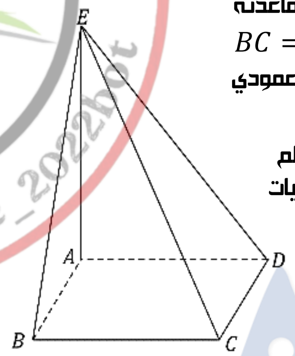
$$\left(B;\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{a}\overrightarrow{BE},\frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right)$$

انتبه: دائماً في هذه الحالة يكون المبدأ هو الحرف المشترك بين المستقيم العمودي على القاعدة والقاعدة ومنهُ تكون إحداثيات النقاط رؤوس الهرم تعطى وفق:

$A(0,0,c)$	$B(0,0,0)$
$E(0,a,0)$	$C(a,0,0)$
$D(a,a,0)$	

نص السؤال

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته $ABCD$ مستطيل فيه $BC = 4$ و $CD = 3$ ولدينا (AE) عمودي على القاعدة $(ABCD)$ و $AE = 4\sqrt{2}$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم.



فكرة الحل

لدينا المعلم المتجانس:

$$\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{AE}\right)$$

إيجاد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم تعطى وفق:

$E(0,0,4\sqrt{2})$	$A(0,0,0)$
$D(0,4,0)$	$B(3,0,0)$
$C(3,4,0)$	

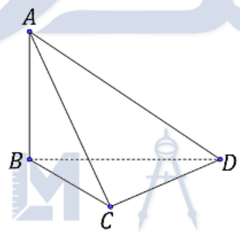
رابعاً: رباعي وجوه يحوي ثلاثية متعامدة وأبعاده معلومة:

تمهيد:

- رباعي الوجوه هو هرم قاعدته مثلث.
- في حال عدم معرفة الأطوال في حالة رباعي الوجوه فهذا يعني عدم إمكانية وضع معلم متجانس

نص السؤال

$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته BCD مثلث قائم في B وفيه: $BC = a$ و $BD = b$ ولدينا (AB) عمودي على القاعدة (BCD) ويتحقق $AB = c$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه



فكرة الحل

لدينا المعلم المتجانس:

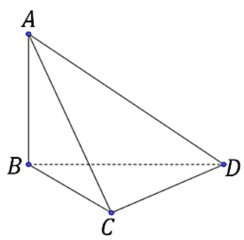
$$\left(B;\frac{1}{a}\overrightarrow{BC},\frac{1}{b}\overrightarrow{BD},\frac{1}{c}\overrightarrow{BA}\right)$$

إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه تعطى وفق:

$C(a,0,0)$	$B(0,0,0)$
$A(0,0,c)$	$D(0,b,0)$

نص السؤال

$ABCD$ رباعي وجوه رأسه A وقاعدته BCD مثلث قائم في B وفيه: $BC = 3$ و $BD = 4$ ولدينا (AB) عمودي على القاعدة (BCD) ويتحقق $AB = 4\sqrt{3}$ باختيار معلم متجانس مناسب أوجد إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه



فكرة الحل

لدينا المعلم المتجانس:

$$\left(B;\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\frac{1}{4}\overrightarrow{BD},\frac{1}{4\sqrt{3}}\overrightarrow{BA}\right)$$

إحداثيات النقاط رؤوس رباعي الوجوه تعطى وفق:

$C(3,0,0)$	$B(0,0,0)$
$A(0,0,4\sqrt{3})$	$D(0,4,0)$

نظيم شعاع (المسافة بين نقطتين):

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
قانون نظيم شعاع	ليكن لدينا الشعاع $\vec{u}(x,y,z)$, جد $\lVert\vec{u}\rVert$	$\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
المسافة بين نقطتين	ليكن لدينا النقطتين: $B(x_B,y_B,z_B)$ ، $A(x_A,y_A,z_A)$ جد المسافة AB	$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
انتبه وتذكر	❋ دستور نظيم شعاع ودستور المسافة بين نقطتين لا تطبق إلا في معلم متجانس ❋ قيمة نظيم شعاع والمسافة بين نقطتان هي مقدار موجب تماماً	

تطبيقات المسافة بين نقطتين في الفراغ:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
تحديد نوع المثلث	ليكن لدينا النقاط: $A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$ $C(x_C, y_C, z_C)$ والمطلوب: حدد نوع المثلث ABC	❋ نوجد أطوال أضلاع المثلث ونحدد نوعه من حيث أطوال أضلاعه. ❋ في حال كان المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع فإننا نختبر كونه قائماً، وفق: - نربع طول الضلع الأطول. - نربع طولي الضلعين الباقيين ونجمعهما ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا تحقق: مجموع مربعي الضلعين الباقيين $=$ مربع طول الضلع الأطول يكون المثلث قائم ووتره الضلع الأطول. ✌ الحالة الثانية: إذا تحقق: مجموع مربعي الضلعين الباقيين $\neq$ مربع طول الضلع الأطول فإن المثلث غير قائم
انتماء نقطة إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة	هل النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$ $M(x_M, y_M, z_M)$	❋ نوجد المسافة MA. ❋ نوجد المسافة MB. ❋ نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا تحقق: $MA = MB$ فإن النقطة M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ ✌ الحالة الثانية: إذا تحقق: $MA \neq MB$ فإن النقطة M لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$
وقوع نقطة على كرة	النمط الأول: هل النقطة M تقع على الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها R	❋ نوجد المسافة بين النقطة ومركز الكرة ولتكن مثلاً $M\Omega$ ❋ نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $R = M\Omega$ فالنقطة M تقع على الكرة. ✌ الحالة الثانية: إذا كان $R \neq M\Omega$ فالنقطة M لا تقع على الكرة
	النمط الثاني: هل النقاط A و B و C و D و E تقع على الكرة التي مركزها Ω	❋ نوجد المسافات بين جميع النقاط ومركز الكرة. ❋ نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت جميع المسافات السابقة متساوية فإن جميع النقاط تقع على كرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها هو المسافة بين المركز وإحدى النقاط. ✌ الحالة الثانية: إذا كانت جميع المسافات غير متساوية فالنقاط لا تقع على كرة واحدة.
إحداثيات نقطة تقع على أحد المحاور الإحداثية ومتساوية البعد عن نقطتين	جد على محور (الفواصل-التراتيب-الرواقم) نقطة C متساوية البعد عن A و B	❋ نفرض النقطة المطلوب وفق: - إذا كانت واقعة على محور الفواصل: $C(x, 0,0)$ - إذا كانت واقعة على محور التراتيب: $C(0, y, 0)$ - إذا كانت واقعة على محور الرواقم: $C(0,0, z)$ ❋ بما أنّ C متساوية البعد عن A و B فإنه يتحقق: $CA = CB \dots (*)$ ❋ نعوض في العلاقة $(*)$ ونصلح وصولاً للمطلوب.

التمرين الأول: نتأمل النقاط:

$B(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$	$A(1,1,\sqrt{2})$

و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O أثبت أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

الحل:

بما أنّ C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O فإنّ إحداثيات النقطة C عكس إحداثيات النقطة A أيّ: $C(-1, -1, -\sqrt{2})$

❋ $\overrightarrow{AB}(\sqrt{2}-1, -\sqrt{2}-1, -\sqrt{2})$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + (-\sqrt{2}-1)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$$

❋ $\overrightarrow{AC}(-2, -2, -2\sqrt{2})$

$$AC = \sqrt{4+4+8} = \sqrt{16} = 4$$

❋ $\overrightarrow{BC}(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

$$BC = \sqrt{(-1-\sqrt{2})^2 + (-1+\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{8}$$

ومنهُ المثلث (ABC) متساوي الساقين.

نختبر كونه قائماً وفق:

$$AC^2 = 16$$

$$BC^2 + AB^2 = 8 + 8 = 16$$

نلاحظ أنّ: $AC^2 = BC^2 + AB^2$

إذاً المثلث (ABC) قائم في B ومتساوي الساقين.

التمرين الثاني: لدينا النقطتان:

$B(3,0,1)$	$A(5,2,-1)$

بين أيّ النقاط $C(-2,5,-2)$ و $E(3,2,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

الحل:

اختبار انتماء النقطة C :

إيجاد المسافة CA وفق:

- $\overrightarrow{CA}(7,-3,1) \to CA = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$

إيجاد المسافة CB وفق:

- $\overrightarrow{CB}(5,-5,3) \to CA = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$

نلاحظ أنّ $CA = CB$ ومنه النقطة C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

اختبار انتماء النقطة E :

إيجاد المسافة EA وفق:

- $\overrightarrow{EA}(2,0,-2) \to EA = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}$

إيجاد المسافة EB وفق:

- $\overrightarrow{EB}(0,-2,0) \to EA = \sqrt{0+4+0} = 2$

نلاحظ أنّ: $EA \neq EB$ ومنه النقطة E لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الثالث:

لدينا كرة مركزها $A(2,3,-1)$ ونصف قطرها $r = 5$ هل النقطة $B(2,8,-1)$ تقع على الكرة السابقة؟

الحل:

نوجد المسافة AB وفق:

- $\overrightarrow{AB}(0,5,0) \to AB = \sqrt{0+25+0} = 5$

نلاحظ أنّ $AB = r$ ومنه النقطة B تقع على الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $r = 5$

التمرين الرابع: تتأمل النقاط:

$B(2,8,-1)$	$A(2,3,-1)$
$D(-1,3,3)$	$C(7,3,-1)$
$E(5,3,3)$	

أثبت أنّ النقاط B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A .

إيجاد المسافة AB وفق:

- $\overrightarrow{AB}(0,5,0) \to AB = \sqrt{0+25+0} = 5$

إيجاد المسافة AC وفق:

- $\overrightarrow{AC}(5,0,0) \to AC = \sqrt{25+0+0} = 5$

إيجاد المسافة AD وفق:

- $\overrightarrow{AD}(-3,0,4) \to AD = \sqrt{9+0+16} = 5$

إيجاد المسافة AE وفق:

- $\overrightarrow{AE}(3,0,4) \to AE = \sqrt{9+0+16} = 5$

نلاحظ أنّ: $AB = AC = AD = AE = 5$

إذاً النقاط B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A ونصف قطرها $r = 5$

التمرين الخامس:

نتأمل في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين:

$B(2,-2,3)$	$A(1,0,1)$

أوجد نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن A و B

الحل:

لتكن النقطة C تنتمي لمحور الفواصل $C(x,0,0)$ وبما أنّ C متساوية البعد عن A و B فإنه يتحقق: $CA = CB$

$$\sqrt{(1-x)^2+1} = \sqrt{(2-x)^2+4+9}$$

نربع الطرفين:

$$(1-x)^2+1 = (2-x)^2+13$$
$$1-2x+x^2+1 = 4-4x+x^2+13$$
$$x^2-2x+2 = x^2-4x+17$$
$$-2x+4x = 17-2$$
$$2x = 15 \to x = \frac{15}{2}$$

إذاً النقطة $C\left(\frac{15}{2},0,0\right)$ تنتمي لمحور الفواصل ومتساوية البعد عن A و B .

التمرين السادس:

ليكن α عدداً حقيقياً ولنتأمل النقاط:

$B(-1,5,-3)$	$A(3,1,-3)$
$C(-1,1,\alpha)$	

أثبت أنّ المثلث (ABC) متساوي الساقين أياً كان α

أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

الحل:

إثبات أنّ المثلث (ABC) متساوي الساقين:

لدينا:

- $\overrightarrow{AB}(-4,4,0) \to AB = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$
- $\overrightarrow{AC}(-4,0,\alpha+3) \to AC = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$
- $\overrightarrow{BC}(0,-4,\alpha+3) \to BC = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$

ومنه المثلث (ABC) متساوي الساقين.

أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

حتى يكون المثلث (ABC) متساوي الأضلاع

يجب أن يتحقق: $AC = AB$

$$\sqrt{16+(\alpha+3)^2} = \sqrt{32}$$

نربع الطرفين:

$$16+(\alpha+3)^2 = 32$$
$$16+\alpha^2+6\alpha+9 = 32$$
$$\alpha^2+6\alpha-7 = 0$$
$$(\alpha+7)(\alpha-1) = 0$$

إما $\alpha = -7$

أو $\alpha = 1$

ومنه حتى يكون المثلث (ABC) متساوي الأضلاع يجب أن تكون: $\alpha = -7$ أو $\alpha = 1$

أينما أنبتك الله .. أزهر 🙁 🌼 💙

الارتباط الخطي لشعاعين:

<table>
<tr><td>مبرهنة</td><td colspan="3">يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وفقط إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي أي إذا وجد عدد حقيقي k يحقق: $\vec{u} = k\vec{v}$ أو إذا وجد عدد حقيقي k' يحقق: $\vec{v} = k'\vec{u}$</td></tr>
<tr><td>المعنى الهندسي للارتباط الخطي لشعاعين</td><td colspan="3">يكون لهما نفس المنحى إمّا "توازي" أو "انطباق"</td></tr>
<tr><td>قراءة علاقة</td><td colspan="3">❋ إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{CD}$ نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان

❋ إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{AC}$ نفهم أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً والنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.</td></tr>
<tr><td>الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لشعاعين</td><td colspan="3">❋ معرفة توازي مستقيمان أو نفي ذلك
❋ معرف وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة أو نفي ذلك</td></tr>
<tr><td rowspan="3">كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين</td><td colspan="3">لاختبار الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإننا نميز الحالات:
الحالة الأولى:
إذا كانت مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ جميعها غير صفرية فإننا نختبر تناسب المركبات ونميز:
❋ المركبات متناسبة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.
❋ المركبات غير متناسبة: يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

الحالة الثانية:
إذا كانت مركبات أحد الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أو كلاهما تحوي أصفار فإننا نميز:</td></tr>
<tr><td>أولاً</td><td>ثانياً</td><td>ثالثاً</td></tr>
<tr><td>مركبات كل شعاع تحوي صفراً واحداً فقط والأصفار فوق بعضها فإننا نختبر تناسب المركبات المتبقية ونميز:
❋ المركبات متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً
❋ المركبات غير متناسبة إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً</td><td>الأصفار ليست فوق بعضها إذاً الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ويكون التعليل باستخدام المبرهنة "نلاحظ أنّ أحد الشعاعين لا ينتج عن الآخر بضربه بعدد حقيقي"</td><td>مركبات كل شعاع تحوي صفرين والأصفار فوق بعضها إذاً: الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً. ويكون التعليل باستخدام المبرهنة "نضع علاقة شعاعية تربط بين الشعاعين"</td></tr>
</table>

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	هل النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة أو هل النقطة A تقع على المستقيم (BC) ؟	❋ نشكل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ❋ نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ❋ ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
الثاني	هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان؟	❋ نشكل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ ❋ نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ ❋ ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً إذاً (AB) و (CD) متوازيان ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطياً إذاً (AB) و (CD) غير متوازيان
الثالث	هل النقاط A و B و C تشكّل مستوي؟	❋ نشكل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ❋ نختبر الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ❋ ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فهي لا تشكل مستوي. ✌ الحالة الثانية: إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً إذاً النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي.

اليوم ميدانك، والغرس قلبك، والإخلاص سِرُّك، واللحظة إن فاتت لن تعود! لذلك عُدّ نفسك واستعد..
بسم الله على الغايات حتّى نصل 💙

التمرين الأول:

في كل من الحالات الآتية هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

الحالة الأولى:

$\vec{v}(6,-2,4)$	$\vec{u}(3,-1,2)$

الحل:

نلحظ أنّ المركبات متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

الحالة الثانية:

$\vec{v}(6,-2,5)$	$\vec{u}(3,-1,2)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\frac{2}{5} \neq \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$ أيّ أنّ المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

الحالة الثالثة:

$\vec{v}(6,0,-2)$	$\vec{u}(3,0,-1)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\frac{-1}{-2} = \frac{3}{6}$ أيّ أنّ المركبات متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

الحالة الرابعة:

$\vec{v}(0,5,2)$	$\vec{u}(0,3,1)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{5}$ أيّ أنّ المركبات غير متناسبة ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.

الحالة الخامسة:

$\vec{v}(6,1,0)$	$\vec{u}(3,0,-1)$

الحل:

نلحظ أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لم ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد.

الحالة السادسة:

$\vec{v}(0,0,-5)$	$\vec{u}(0,0,-3)$

الحل:

نلحظ أنّ: $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{v}$ أيّ أنّ $\vec{u}$ ينتج عن $\vec{v}$ بعد ضربه بعدد ومنه الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

التمرين الثاني:

في كل من الحالات بيّن هل النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة؟

الحالة الأولى:

$C(2,0,-3)$	$B(0,2,4)$	$A(3,-1,2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-3,3,2) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(-1,1,-5)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقاط A و B و C تشكل مستوي.

الحالة الثانية:

$C(0,-1,7)$	$B(-2,0,5)$	$A(-4,1,3)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,2) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(4,-2,4)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً وبالتالي:

النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

الحالة الثالثة:

$C(1,-1,-3)$	$B(1,-1,4)$	$A(1,-1,0)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(0,0,4) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(0,0,-3)$$

نلاحظ أنّ: $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ وبالتالي الشعاعين مرتبطين خطياً

وبالتالي النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة

التمرين الثالث:

هل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان:

الحالة الأولى:

$B(2,-1,3)$	$A(3,5,2)$
$D(-1,-14,2)$	$C(1,-2,0)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-6,1) \quad , \quad \overrightarrow{CD}(-2,-12,2)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.

الحالة الثانية:

$B(-2,3,2)$	$A(3,0,-1)$
$D(0,-2,2)$	$C(3,5,2)$

الحل:

$$\overrightarrow{AB}(-5,3,3) \quad , \quad \overrightarrow{CD}(-3,-7,0)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي المستقيمان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير متوازيان.

التمرين الرابع:

هل النقاط:

$C(1,-1,0)$	$B(1,-1,4)$	$A(1,-1,3)$

تعيين مستوي؟

$$\overrightarrow{AB}(0,0,1) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(0,0,-3)$$

نلاحظ أنّ المركبات متناسبة وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً وبالتالي النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فهي لا تشكل مستوي.

ليست خطوة واحدة عملاقة التي حقّقت الإنجاز ..
إنما مجموعة خطوات صغيرة 💙

التمرين الخامس:

أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط:

$A(2,3,0)$	$B(3,2,1)$	$M(a,b,2)$

على استقامة واحدة؟

الحل:

حتى تكون النقاط A و B و M على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطياً ويتحقق ذلك إذا وُجد عدد حقيقي λ يحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

حيث:

$$\overrightarrow{AM}(a-2, b-3, 2) \quad , \quad \overrightarrow{AB}(1,-1,1)$$

نعوض في العلاقة السابقة وفق:

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ b-3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ b-3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$\begin{cases} a-2 = \lambda & \dots(1) \\ b-3 = -\lambda & \dots(2) \\ 2 = \lambda & \dots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ونحلها وفق:

من (3) نجد أنّ:

$$\lambda = 2$$

نعوض في (1) وفق:

$$a-2 = 2 \rightarrow a = 4$$

نعوض في (2) وفق:

$$b-3 = -2 \rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow M(4,1,2)$$

التمرين السادس:

هل يمكن تعيين a ليكون الشعاعين $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطياً؟

الحل:

يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً إذا وُجد عدد حقيقي λ يحقق العلاقة: $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda a \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} 2 = \lambda & \dots(1) \\ a = -2\lambda & \dots(2) \\ 5 = \lambda a & \dots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاث معادلات بمجهولين نحلها وفق:

الخطوة الأولى: نأخذ جملة معادلتين ولتكن:

$$\begin{cases} 2 = \lambda & \dots(1) \\ a = -2\lambda & \dots(2) \end{cases}$$

وهذه جملة معادلتين بمجهولين نحلها وفق:

من (1) نجد أنّ $\lambda = 2$

نعوض في (2) وفق: $a = -2\lambda$

$$a = -2(2) \rightarrow a = -4$$

الخطوة الثانية:

نتحقق من صحة الحل السابق في المعادلة المتبقية:

نتحقق في المعادلة (3) وفق:

$$5 = \lambda a$$

$$5 = (2)(-4)$$

$$5 \neq -8$$

إذاً غير محققة والمعادلة مستحيلة الحل.

إذاً لا يمكن تعيين a ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

تعريف	نقول عن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد نقطة O تجعل النقاط O, A, B, C المعرفة وفق: $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ و $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ تقع في مستوٍ واحد.
مبرهنة	$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة أشعة نفترض أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً عندئذٍ تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$
المعنى الهندسي للارتباط الخطي لثلاثة أشعة	إذا كان لدينا ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً فهذا يعني أن أحد الأشعة الثلاثة يوازي المستوي المنشأ على الشعاعيين الباقيين
قراءة علاقة	* إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{DE}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{DE}$ مرتبطة خطياً فالمستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE) * إذا كان لدينا: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$ فهذا يعني أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد
الفائدة من مفهوم الارتباط الخطي لثلاثة أشعة	* إثبات توازي مستقيم ومستوي * إثبات وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد. * إثبات تقاطع مستقيمين.
كيفية اختبار الارتباط الخطي لشعاعين	* نحدد منها شعاعين غير مرتبطين خطياً ولتكن فرضاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ * نبحث عن عددين حقيقيين a و b يحققان العلاقة $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ * ونميز: ☝ الحالة الأولى: وجود عددان a و b يحققان العلاقة: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مرتبطة خطياً. ✌ الحالة الثانية: عدم وجود عددان a و b يحققان العلاقة: $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ إذاً الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مرتبطة خطياً

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	هل النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد؟	❋ نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ ❋ نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ (كما ورد معنا سابقاً) ❋ ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد ✌ الحالة الثانية: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً إذاً النقاط A و B و C و D لا تقع في مستو واحد
الثاني	هل المستقيم (AB) يوازي المستوي (CDE)	❋ نأخذ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ ❋ نختبر الارتباط الخطي للأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ (كما ورد معنا سابقاً) ❋ ونميز: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (AB) يوازي المتسوي (CDE) ✌ الحالة الثانية: إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ غير مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (AB) لا يوازي المتسوي (CDE)
الثالث	لدينا المستقيم d_1 المار من A وشعاع توجيهه $\vec{u}$ ولدينا المستقيم d_2 المار من B وشعاع توجيهه $\vec{v}$ والمطلوب هو إثبات أن المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعان	❋ نثبت أن المستقيمان d_1 و d_2 غير متوازيان وذلك بإثبات أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ❋ نثبت أن d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد وذلك بإثبات أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً وبالتالي يكون d_1 و d_2 متقاطعان. ملاحظة: في حال تقاطع مستقيمان فإن تقاطعهما هو نقطة

التمرين الأول:

نتأمل في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)$	$B(1,-2,1)$	$C(5,5,0)$
$D(-3,-5,6)$	$E(3,1,2)$	

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستو واحد P وتبين إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P .

الحل:

إثبات انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستو واحد P :

لدينا:

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$	$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$
$\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$	

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ المركبات غير متناسبة.

نبحث عن عددين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a+3b\\-2a+5b\\-b\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-5 = -a+3b & \dots(1)\\ -5 = -2a+5b & \dots(2)\\ 5 = -b & \dots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}-5 = -2a+5b & \dots(2)\\ 5 = -b & \dots(3)\end{cases}$$

من (3) نجد أنّ: $b = -5$

نعوض في (2) فنجد أنّ:

$$-5 = -2a - 25 \rightarrow a = -10$$

نتحقق في (1) وفق:

$$-5 = -(-10) - 15$$

$$-5 = -5 \rightarrow \text{محققة}$$

إذاً للجملة حل وحيد ويوجد عددين $a = -10$ و $b = -5$ يحققان: $\overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$

ومنهُ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً ومنهُ النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد P

تبيّن أنّ النقطة E تنتمي إلى المستوي P :

يقصد: هل النقاط A و B و C و E تقع في مستو واحد

الحل:

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$	$\overrightarrow{AC}(3,5,-1)$
$\overrightarrow{AE}(1,1,1)$	

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ المركبات غير متناسبة ومنهُ نبحث عن عددين a و b يحققان العلاقة.

$$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+3b\\-2a+5b\\-b\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}1=-a+3b & \dots(1)\\ 1=-2a+5b & \dots(2)\\ 1=-b & \dots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}1=-2a+5b & \dots(2)\\ 1=-b & \dots(3)\end{cases}$$

من (3) نجد أنّ: $b=-1$

نعوض في (2) فنجد أنّ:

$$1=-2a-5\rightarrow a=-3$$

نتحقق في (1) وفق:

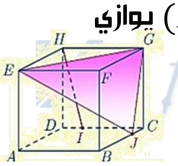
$$1=3-3$$
$$1\neq 0$$

غير محققة

وهذا غير ممكن , إذاً لا يوجد عددين a و b يحققان العلاقة $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ ومنه الأشعة غير مرتبطة خطياً ومنه النقاط A و B و C و E لا تقع في مستو واحد , ومنه النقطة E لا تنتمي إلى المستوي P .

التمرين الثاني:

نتأمل المكعب $ABCDEFGH$ النقطة I من الحرف $[CD]$ تحقق المساواة: $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة J من $[BC]$ تحقق المساواة: $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)



الحل:

لدينا المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ إذاً:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(1,0,0)$	$F(1,0,1)$
$D(0,1,0)$	$H(0,1,1)$
$C(1,1,0)$	$G(1,1,1)$

إيجاد إحداثيات النقطة I وفق:

لتكن $I(x,y,z)$:

$$\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y-1\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x=\frac{1}{4}\,,y=1\,,z=0\rightarrow I\left(\frac{1}{4},1,0\right)$$

إيجاد إحداثيات النقطة J وفق:

لتكن $J(x,y,z)$:

لدينا:

$$\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{4}\\0\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x=1\,,y=\frac{3}{4}\,,z=0$$

$$\rightarrow J\left(1,\frac{3}{4},0\right)$$

فكرة الحل:

يكون المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ) إذا كانت الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً.

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{4},0,-1\right),\overrightarrow{EG}(1,1,0),\overrightarrow{EJ}\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطة خطياً لأن المركبات غير متناسبة ومنه نبحث عن عددين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{HI}=a\overrightarrow{EG}+b\overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{4}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a+\frac{3}{4}b\\-b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}\frac{1}{4}=a+b & \dots(1)\\ 0=a+\frac{3}{4}b & \dots(2)\\ -1=-b & \dots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}0=a+\frac{3}{4}b & \dots(2)\\ -1=-b & \dots(3)\end{cases}$$

من (3) نجد أنّ: $b=1$

نعوض في (2) فنجد أنّ:

$$0=a+\frac{3}{4}\rightarrow a=-\frac{3}{4}$$

تحقق في (1) وفق:

$$\frac{1}{4} = -\frac{3}{4} + 1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{محققة}$$

إذاً للجملة حل وحيد إذاً يوجد عددين $a = -\frac{3}{4}$ و $b = 1$

يحقق العلاقة: $\overrightarrow{HI} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EJ}$

إذاً الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطياً إذاً المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ) .

التمرين الثالث:

في معلم $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$ والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$

ولدينا d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بـ $\vec{u}$

ولدينا d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجه بـ $\vec{v}$

والمطلوب أثبت أن المستقيمان d و d' متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطعهما.

الحل:

الخطوة الأولى:

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي إذاً $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً إذاً المستقيان d و d' غير متوازيان.

الخطوة الثانية:

إثبات أنّ d و d' يقعان في مستو واحد:

من أجل ذلك فإننا نثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

$$\vec{u}(1,0,-2)\,,\vec{v}(2,1,-3)\,,\overrightarrow{AB}(0,-2,-2)$$

لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ومنهُ نبحث عن عددين a و b

يحققان العلاقة الآتية: $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\\-2a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2b\\b\\-3b\end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$\begin{cases}0 = a + 2b & \dots(1)\\ -2 = b & \dots(2)\\ -2 = -2a - 3b & \dots(3)\end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases}0 = a + 2b & \dots(1)\\ -2 = b & \dots(2)\end{cases}$$

من (2) نجد أنّ: $b = -2$

نعوض في (1) فنجد أنّ:

$$0 = a - 4 \rightarrow a = 4$$

تحقق في (3) وفق:

$$-2 = -2(4) - 3(-2)$$

$$-2 = -8 + 6$$

$$-2 = -2 \rightarrow \text{محققة}$$

إذاً للجملة حل وحيد إذاً يوجد عددين $a = 4$ و $b = -2$

يحققان العلاقة: $\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$ إذاً الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً وبالتالي المستقيمان d و d' يقعان في مستو واحد ، مما سبق نستنتج أن d و d' متقاطعان.

إيجاد إحداثيات I نقطة تقاطع d و d' وفق:

لتكن: $I(x,y,z)$

وبما أنّ I نقطة تقاطع المستقيمان d و d' إذاً :

* $I \in d$ وبالتالي $\overrightarrow{AI}$ و $\vec{u}$ مرتبطان خطياً
* $I \in d'$ وبالتالي $\overrightarrow{BI}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً

$$\overrightarrow{AB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

ولدينا حسب علاقة شال:

$$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = 4\vec{u} - 2\vec{v}$$

بالمطابقة:

$$\overrightarrow{AI} = 4\vec{u}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-8\end{pmatrix}$$

تكافئ:

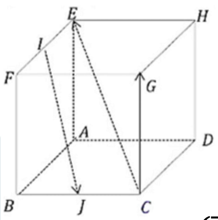
$$x - 3 = 4 \rightarrow x = 7$$

$$y + 1 = 0 \rightarrow y = -1$$

$$z - 1 = -8 \rightarrow z = -7$$

إذاً: $I(7,-1,-7)$

التمرين الرابع:



في الشكل المجاور مكعب I و J

منتصفات $[EF]$ و $[BC]$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ:

$$2\left(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}\right) = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}$$

2. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{2\left(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}\right)}_{l_1} = \underbrace{\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG}}_{l_2}$$

$$l_1 = 2\left(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{IE}\right) = 2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{IE}$$

$$= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$$

$$l_2 = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{GC}$$

$$= \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{CA}$$

إذاً: $l_1 = l_2$

الطلب الثاني:

لدينا العلاقة:

$$2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{IJ})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$2\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

ومنهُ:

الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ مرتبطة خطياً.

ماذا تستنتج؟؟

المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CEG)

مراكز الأبعاد المتناسبة:

الفكرة \ عدد النقاط	لنقطتين	لثلاثة نقاط
مبرهنة الوجود والتعريف	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و(B,β) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta\neq 0$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$
تجانس مركز الأبعاد " k عدد حقيقي غير معدوم"	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و(B,β) فإنّ G تكون مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,K\alpha)$ و$(B,k\beta)$ حيث k عدد حقيقي	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و$(B,k\beta)$ و$(C,k\gamma)$ حيث K عدد حقيقي
تساوي الأثقال	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,a) و (B,a) فهذا يعني أنّ G هي منتصف $[AB]$	إذا كان G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,a) و (B,a) و (C,a) تكون G مركز ثقل المثلث (ABC)
إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) فإنّ إحداثيّات النقطة G هي: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) فإنّ إحداثيّات النقطة G هي: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$
علاقة تفيد في الإنشاء	لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) فإنّ: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$
مبرهنة	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) ولدينا M نقطة من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

اعمل..

يا فتاي، بخطواتك الصغيرة، أودع في جوفها حُسن ظنك بالله، إنها على ضآلة ما ستُحدثه في الآن واللحظة،

تُريك نفسها كبيرة الشأن غداً، ممزوجة بالسعد والمجد..

الفكرة يا فتى، بخروجك من منطقة الراحة، وبقطعك الأميال باللهفة، وصبرك على النتائج حتى ترى الثمرات..

ألم تسمع قول الشاعر: أثر الفراشة لا يُرى.. أثر الفراشة لا يزول ! 💙

عدد النقاط / الفكرة	لأربعة نقاط
مبرهنة الوجود والتعريف	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ بحيث: $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$
تجانس مركز الأبعاد " k عدد حقيقي غير معدوم"	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ: $(A,k\alpha)$ و$(B,k\beta)$ و$(C,k\gamma)$ و$(D,k\delta)$ حيث k عدد حقيقي
تساوي الأثقال	لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,a) و(B,a) و(C,a) و(D,a) فهذا يعني أنّ النقطة G مركز ثقل رباعي الوجوه $(ABCD)$
إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة	ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) فإنّ إحداثيّات النقطة G تعطى وفق: $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$
علاقة تفيد في الإنشاء	
مبرهنة	إذا كان لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ) ولدينا النقطة M من الفراغ فإنّه يتحقّق: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\gamma\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\overrightarrow{MG}$

	لثلاثة نقاط	لأربعة نقاط
الخاصة التجميعية	**اتجاه اللم**	
	⁕ لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) و (C,γ) ⁕ لدينا النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) ☜ فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ)	⁕ ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و (B,β)و (C,γ)و (D,δ) ⁕ لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و(B,β) ⁕ لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ)و(D,δ) ☜ فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و $(J,\gamma+\delta)$
	اتجاه الفك	
	⁕ لدينا النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,\alpha+\beta)$ و (C,γ) ⁕ لدينا النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و (B,β). ☜ فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية تكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α)و (B,β)و (C,γ)	ليكن لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(I,\alpha+\beta)$ و$(J,\gamma+\delta)$. لدينا I مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β). لدينا J مركز الأبعاد المتناسبة لـ(C,γ) و(D,δ) ← فإنه استناداً إلى الخاصّة التجميعية يكون G مركز الأبعاد المتناسبة لـ(A,α) و(B,β) و(C,γ) و(D,δ)

أنماط التمارين:

النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث	النمط الرابع
إيجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة: يتم وفق تطبيق القانون المناسب.	قراءة علاقة: يتم بالاعتماد على علاقة الشّعاع الصّفري أو حسب علاقة الإنشاء.	إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة (إثبات أنّ نقطة تقع على مستقيم): ☜ الخطوات: ⁕ بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. ⁕ نصلح من أجل إثبات أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الباقيتين. ⁕ فتكون النقاط الثّلاثة على استقامة واحدة.	إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد (باستخدام مراكز الأبعاد المتناسبة): ☜ الخطوات: ⁕ بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. ⁕ نصلح من أجل إثبات أن إحدى النقاط هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الثّلاث المتبقية ⁕ فتكون النقاط الأربعة في مستوٍ واحد.

النمط الخامس	النمط السادس	النمط السابع
إثبات تلاقي مستقيمات: ☜ الخطوات: ⁕ بالاعتماد على نص السؤال نضع جميع المعطيات. ⁕ نصلح من أجل إثبات وجود نقطة مشتركة بين المستقيمات وبالتالي نثبت تلاقي المستقيمات	توضيع مراكز الأبعاد المتناسبة في شكل: ⁕ بالاستفادة من المعطيات نضع علاقة الإنشاء المناسبة. ⁕ بالاعتماد على علاقة الإنشاء نوضّع النقطة مركز الأبعاد المتناسبة في شكل. ➢ تنويه: من الممكن أن نستخدم الخاصة التجميعية	تعيين الثّوابت: ☜ الخطوات: ⁕ نضع علاقة تحوي ثوابت وعلاقة لا تحوي ثوابت وذلك بالاعتماد على معطيات المسألة. ⁕ نصلح من أجل أن نجعل العلاقتين متشابهتين. ⁕ بالمقارنة نحصل على المطلوب

التمرين الأول: لتكن لدينا النقاط:

$B(0,1,2)$	$A(2,-1,3)$
$D(-2,1,-3)$	$C(-1,1,0)$

أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(D,2)$	$(C,-1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

الحل:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$x_G = \frac{(1)(2)+(2)(0)+(-1)(-1)+(2)(-2)}{1+2-1+2}$$

$$x_G = \frac{2+0+1-4}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C + \delta y_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$y_G = \frac{(1)(-1)+(2)(1)+(-1)(1)+(2)(1)}{1+2-1+2}$$

$$y_G = \frac{-1+2-1+2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C + \delta z_D}{\alpha + \beta + \gamma + \delta}$$

$$z_G = \frac{(1)(3)+(2)(2)+(-1)(0)+(2)(-3)}{1+2-1+2}$$

$$z_G = \frac{3+4+0-6}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\to G\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

التمرين الثاني:

اقرأ العلاقات الآتية:

1. $3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

تعني أنّ A مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(B,3)$	$(C,-2)$	$(D,1)$

2. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DM} = \vec{0}$

تعني أنّ D مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(M,-3)$	$(B,1)$	$(A,1)$

3. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

تعني أنّ B مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,1)$	$(A,2)$

4. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{a}\overrightarrow{BA}$

تعني أنّ D مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(A,1)$	$(B,a-1)$

5. $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$

تعني أنّ C مركز أبعاد متناسبة لـ:

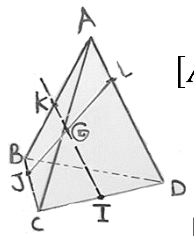
$(D,5)$	$(A,-4)$

6. $\overrightarrow{CA} = a\overrightarrow{CB}$

تعني أنّ A مركز أبعاد متناسبة لـ:

(B,a)	$(C,1-a)$

التمرين الثالث:



$ABCD$ رباعي وجوه فيه K منتصف $[AB]$

و I منتصف $[CD]$ و L تحقق العلاقة:

$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ و J تحقق العلاقة:

$\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$ وأخيراً G هي منتصف $[JL]$

أثبت أنّ G و I و K تقع على استقامة واحدة.

الحل:

لدينا:

※ النقطة J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,3)$	$(C,1)$

※ النقطة L تحقق العلاقة: $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

إذاً L مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(A,3)$

※ النقطة K منتصف $[AB]$:

إذاً K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,3)$	$(A,3)$

※ النقطة I منتصف $[CD]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(D,1)$

※ النقطة G منتصف $[JL]$:

إذاً G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(L,4)$	$(J,4)$

ومنهُ استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,1)$	$(C,1)$	$(B,3)$	$(A,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(I,2)$	$(K,6)$

ومنهُ النقاط G و I و K تقع على استقامة واحدة.

التمرين الرابع:

$ABCD$ رباعي وجوه تتحقق فيه:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$ أثبت أنّ النقاط: M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DA}=0$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA})=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{MA}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$$

إذاً:

النقطة M مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B,1)$	$(C,1)$	$(D,1)$

ومنه M و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

التمرين الخامس:

$ABCDEFGH$ مكعب أثبت أنّ النقطة K المعرفة بالعلاقة:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

تقع في المستوي (BCG) .

الحل:

نص السؤال:

أثبت أنّ النقطة K تقع في المستوي (BCG)

يقصد:

أثبت أنّ النقاط K و B و C و G تقع في مستوٍ واحد.

لدينا:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AG}=0$$
$$2\overrightarrow{AK}-(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB})-(\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA})-3(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG})=0$$
$$2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{AK}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{AK}-2\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KC}-\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}-3\overrightarrow{KG}=\vec{0}$$

ومنه:

النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط:

$(B,-1)$	$(C,2)$	$(G,-3)$

إذاً: النقاط K و B و C و G تقع في مستوٍ واحد ومنه K تقع في المستوي (BCG) .

ملاحظة مهمة:

- إذا كان لدينا $(B,1),(B,2)$ يمكن دمجهما بـ $(B,3)$
- إذا كان لدينا مثلاً $(B,3)$ يمكن تفريقها لـ $(B,2)$ و $(B,1)$
ونستخدم هذه الملاحظة عند اللزوم

التمرين السادس:

$ABCDEFGH$ مكعب فيه: I و J منتصفا الحرفين $[AB]$ و $[BC]$ ولدينا K مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(H,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

أثبت وقوع I و J و K و H في مستوٍ واحد.

الحل:

لدينا:

- النقطة K مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(H,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

$(B,1)$ $(B,1)$

- النقطة I منتصف $[AB]$:

إذاً I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,1)$	$(A,1)$

- النقطة J منتصف $[BC]$:

إذاً J مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,1)$	$(C,1)$

ومنه: استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(J,2)$	$(I,2)$	$(H,1)$

إذاً: النقاط J و I و K و H تقع في مستوٍ واحد.

التمرين السابع:

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ولنعرف النقاط P و Q و R و S كما يأتي:

$$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}\quad,\quad\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}\quad,\quad\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(D,3)$	$(C,1)$	$(B,4)$	$(A,1)$

والمطلوب:

الطلب الأول:

بيّن أنّ النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

يقصد: أثبت أنّ النقاط P و Q و G تقع على استقامة واحدة

الحل:

- لدينا: G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,3)$	$(C,1)$	$(B,4)$	$(A,1)$

- لدينا: $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ ومنه:

P مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,4)$	$(C,1)$

- لدينا: $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ ومنه:

Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(D,3)$	$(A,1)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(Q,4)$	$(P,5)$

ومنهُ النقاط P و Q و G تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقطة G تقع على المستقيم (PQ)

الطلب الثاني:

أثبت أنّ النقطة G تقع على المستقيم (RS):

الحل:

* لدينا النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(D,3)$	$(C,1)$	$(B,4)$	$(A,1)$

* لدينا: $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ إذاً النقطة S مركز أبعاد متناسبة لـ:

$(C,1)$	$(D,3)$

استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون النقطة G مركز أبعاد متناسبة لـ

$(R,5)$	$(S,4)$

ومنهُ النقاط G و R و S تقع على استقامة واحدة وبالتالي G تقع على المستقيم (RS)

الطلب الثالث:

استنتج تلاقي المستقيمان (PQ) و (RS) :

فكرة الحل:

نثبت أنّ المستقيمان يشتركان بنفس النقطة.

الحل:

* من الطلب الأول لدينا: G تقع على المستقيم (PQ)
* من الطلب الثاني لدينا: G تقع على المستقيم (RS)
* وبالتالي المستقيمان (PQ) و (RS) يلتقيان بنفس النقطة.

التمرين الثامن:

وضع على شكل النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(B,1)$	$(A,3)$

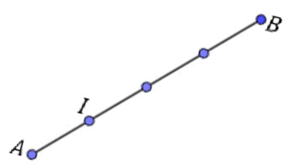
الحل:

* لدينا:

النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,1)$	$(A,3)$

* الإنشاء:



ملاحظة:

* لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لنقطتين:
الشكل هو مستقيم.
* لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لثلاثة نقاط:
الشكل هو مثلث.
* لدينا نقطة مركز أبعاد متناسبة لأربعة نقاط:
الشكل هو رباعي وجوه.

التمرين التاسع:

ABC مثلث والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$

الحل:

لدينا:

* النقطة I مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(C,1)$	$(A,1)$

إذاً I منتصف $[AC]$ ولدينا: $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

* النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

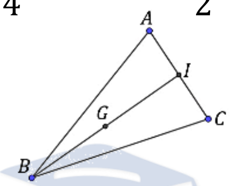
النقطة G مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,2)$	$(I,2)$

وبالتالي G منتصف $[BI]$ ولدينا:

$$\overrightarrow{IG}=\frac{2}{4}\overrightarrow{IB}\rightarrow\overrightarrow{IG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IB}$$

* الإنشاء:



التمرين العاشر:

$(ABCD)$ رباعي وجوه والمطلوب وضع النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

الحل:

* لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(B,2)$	$(A,1)$

إذاً: $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

* لتكن J مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,1)$	$(D,1)$

إذاً J منتصف $[CD]$ وبالتالي $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

* لدينا G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(D,1)$	$(C,1)$	$(B,2)$	$(A,1)$

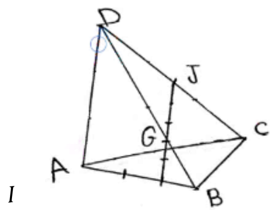
* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون:

G مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(I,3)$	$(J,2)$

ويكون: $\overrightarrow{IG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{IJ}$

* الإنشاء:



التمرين الحادي عشر:

النقطتان A و B نقطتان مختلفتان ، عيّن t التي تحقق
$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ علماً أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(B,3)$	$(A,2)$

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \dots (*)$$

وبما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتان:

$(B,3)$	$(A,2)$

$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA} + 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$5\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$-5\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$5\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ: $t = \frac{3}{5}$

ومنه: $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

ملاحظة:

يمكن إيجاد قيمة t من علاقة الإنشاء فوراً
$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ لكن الطريقة الأولى هي العامة.

التمرين الثاني عشر:

عين قيمة α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة لـ

(B,β)	(A,α)

حيث يتحقق: $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

الحل:

بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتان:

(B,β)	(A,α)

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0} \dots (*)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA} - 3\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha = 4 \quad , \quad \beta = -3$$

ومنه M مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,4)$ و $(B,-3)$

التمرين الثالث عشر:

نتأمل مثلثاً (ABC) جد عددين x و y بحيث:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

إذا علمت أنّ M هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,2)$	$(B,1)$	$(A,3)$

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \dots (*)$$

وبما أنّ النقطة M هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

$(C,2)$	$(B,1)$	$(A,3)$

فإنّه يتحقق:

$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$$
$$4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$6\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$-6\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$
$$6\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$x = \frac{1}{6} \ , \ y = \frac{1}{3}$$

ومنه:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

التمرين الرابع عشر:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقاط:

$B(1,4,7)$	$A(1,1,1)$
$D(-2,7,16)$	$C(0,1,2)$

الطلب الأول:

أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

الحل:

$$\overrightarrow{AC}(-1,0,1) \quad , \quad \overrightarrow{AB}(0,3,6)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

عيّن العددين α و β اللذين يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

وهل تقع النقاط A و B و C و D في مستوٍ واحد؟

الحل:

تعيين α و β :

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\alpha\\6\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\beta\\0\\\beta\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-3\\6\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\beta\\3\alpha\\6\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$\begin{cases}-3=-\beta & \dots(1)\\ 6=3\alpha & \dots(2)\\ 15=6\alpha+\beta & \dots(3)\end{cases}$$

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}-3=-\beta & \dots(1)\\ 6=3\alpha & \dots(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ: $-3=-\beta\rightarrow\beta=3$

من (2) نجد أنّ: $6=3\alpha\rightarrow\alpha=2$

نتحقق في (3) :

$$15=6(2)+3$$
$$15=15\rightarrow \text{محققة}$$

ومنه يوجد عددين $\alpha=2$ و $\beta=3$ يحققان:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$

من العلاقة السابقة نجد أنّ الأشعة الثلاثة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً , ومنه النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

الطلب الثالث:

استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

(C,c)	(B,b)	(A,a)

حيث a و b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

بما أنّ D مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) فإنه يتحقق:

$$a\overrightarrow{DA}+b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}\dots(*)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}-2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})-3(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{AD}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$4\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

ومنه النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة

$(C,-3)$	$(B,-2)$	$(A,4)$

ومنه:

$$a=4\ ,\ b=-2\ ,\ c=-3$$

التمرين الخامس عشر:

جد α و β و γ التي تجعل M مركز الأبعاد المتناسبة لـ النقاط المثقلة

(C,γ)	(B,β)	(A,α)

علماً أنه يتحقق: $\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$

الحل:

بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة لـ:

(C,γ)	(B,β)	(A,α)

فإنه يتحقق:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}\dots(*)$$

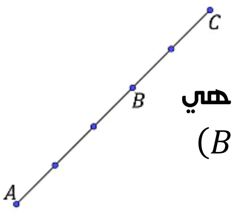
ولدينا:

$$\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{CM}-3(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA})-2(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB})=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{CM}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-4\overrightarrow{CM}-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\vec{0}\dots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha=-3\ ,\ \beta=-2\ ,\ \gamma=4$$

التمرين السادس عشر:



في الشكل التالي التدريجات متساوية

عين قيمة α و β إذا علمت أنّ النقطة C هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β)

الحل:

بما أنّ C مركز أبعاد متناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنه يتحقق:

$$\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}=\vec{0}\dots(*)$$

ولدينا من الشكل:

$$\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}}=\frac{5}{2}$$
$$2\overrightarrow{CA}=5\overrightarrow{CB}$$
$$2\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}=\vec{0}\dots(**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha=2\ ,\ \beta=-5$$

التمرين السابع عشر:

في الشكل التالي التدريجات متساوية , عين قيمة α و β إذا علمت أنّ النقطة B هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (C,β)

الحل:

بما أنّ B مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,α) و (B,β) فإنه يتحقق:

$$\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BC}=\vec{0}\dots(*)$$

ولدينا من الشكل:

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}}=-\frac{4}{3}$$

انتبه:

إشارة الناقص لأنّ الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ لهما اتجاهين متعاكسين.

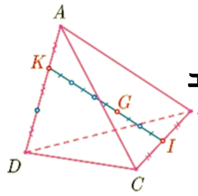
$$3\overrightarrow{BA} = -4\overrightarrow{BC}$$

$$3\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{BC} = \vec{0} \dots (**)$$

بالمقارنة بين $(*)$ و $(**)$ نجد أنّ:

$$\alpha = 3 \quad , \quad \beta = 4$$

التمرين الثامن عشر:



بالاستفادة من المعلومات المبنية على الشكل المجاور عيّن الأعداد a و b و c و d مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d).

الحل:

* لدينا I مركز أبعاد متناسبة لـ (C,c) و (B,b) وبما أنّ I منتصف $[BC]$ فإنّ $b = c$
* ولدينا K مركز أبعاد متناسبة لـ (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d).
* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون G مركز أبعاد متناسبة لـ $(I, b+c)$ و $(K, a+d)$ إذا:

$$(a+b)\overrightarrow{GK} + (b+c)\overrightarrow{GI} = \vec{0} \dots (*)$$

ومن الشكل لدينا:

$$\frac{\overrightarrow{GK}}{\overrightarrow{GI}} = -\frac{3}{2} \rightarrow 2\overrightarrow{GK} = -3\overrightarrow{GI}$$

$$2\overrightarrow{GK} + 3\overrightarrow{GI} = \vec{0}$$

بالمقارنة مع $(*)$ نجد أنّ:

$$a + d = 2$$
$$b + c = 3$$

تحديد قيم b و c :

لدينا: $b + c = 3$

ونحن نعلم أنّ $b = c$ إذاً:

$$2b = 3$$

$$b = \frac{3}{2} \quad , \quad c = \frac{3}{2}$$

تحديد قيم a و d :

لدينا K مركز أبعاد متناسبة لـ (A,a) و (D,d) إذاً:

$$a\overrightarrow{KA} + d\overrightarrow{KD} = \vec{0} \dots (**)$$

حيث $a + d = 2$

ولدينا من الشكل:

$$\frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{KD}} = -\frac{1}{2} \rightarrow 2\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KD}$$

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$$

انتبه:

قبل المقارنة مع $(**)$ تذكر التحقق من الشرط $a + d = 2$ وفق:

$$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{2}{3}$ وفق:

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KD} = \vec{0}$$

وهكذا نكون قد حصلنا على علاقة تشبه العلاقة $(**)$

وتحقق الشرط وبالمقارنة مع $(**)$ نجد أنّ:

$$a = \frac{4}{3} \quad , \quad b = \frac{2}{3}$$

مما سبق نجد أنّ:

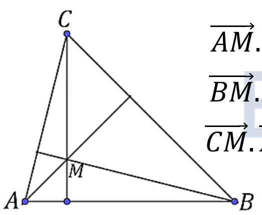
$$a = \frac{4}{3} \quad , \quad b = \frac{2}{3} \quad , \quad c = \frac{3}{2} \quad , \quad d = \frac{3}{2}$$

الجداء السلمي:

تعريف	في الفراغ , الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v}$
العبارات المختلفة للجداء السلمي	في الفراغ الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو العدد الحقيقي $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]$
	إذا كان α قياساً للزاوية الهندسية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ كان: $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\| \cos\alpha$
	إذا كانت H هي المسقط القائم في المستوي P للنقطة C على المستوي (AB) فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$
	العبارة التحليلية للجداء السلمي نفترض أنّ مركبات الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في معلم متجانس هي $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = (x_1.x_2) + (y_1.y_2) + (z_1.z_2)$
العبارات الشهيرة للجداء السلمي	الجداء السلمي لشعاعين متساويين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$
	الجداء السلمي لشعاعين متعاكسين: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$
	الجداء السلمي لشعاعين متعامدين: في حال $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = 0$
تنويه	يتم اختيار العبارة المناسبة للجداء السلمي وفقاً للمعطيات

خواص الجداء السلمي	لدينا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أشعة ولدينا a و b أعداد حقيقية فإنّ: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$ $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = ab.\vec{u}.\vec{v}$

أنماط التمارين:

النمط	نص السؤال	فكرة الحل	
		في حال وجود معلم	نطبق القانون المناسب وفقاً للمعطيات
الأول	أوجد الجداء السلمي لشعاعين	في حال عدم وجود معلم	* نطبق القانون: $\vec{u}.\vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert.\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert\cos(\vec{u},\vec{v})$ * شرط التطبيق: ○ معرفة أطوال الأضلاع. ○ معرفة الزاوية. ○ أن تكون البداية نفسها للشعاعين. * وعند اختلال الشرط فإننا نستخدم إصلاحات مناسبة: (الترتيب / الزرع / الاستبدال)
الثاني	هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان	* نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ (وذلك باستخدام إحدى العبارات المناسبة للمعطيات) * نميز: ① الحالة الأولى: إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v} = 0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين. ② الحالة الثانية: إذا تحقق $\vec{u}.\vec{v} \neq 0$ فإنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين.	
الثالث	عين قيمة الوسيط α ليكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان	* نكتب بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذاً: $\vec{u}.\vec{v} = 0$ * نعوض في العلاقة السابقة فنحصل على معادلة يكون فيها المجهول هو الوسيط وبحل هذه المعادلة نحصل على المطلوب	
الرابع	استنتج النسبة المثلثية للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$	* نوجد $\vec{u}.\vec{v}$ * نوجد $\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert$ و $\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert$ * نضع العبارة: $\vec{u}.\vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert.\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert\cos(\vec{u},\vec{v})$ * نعزل $\cos(\vec{u},\vec{v})$ وفق: $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert.\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert}$ * نعوض	
الخامس	أثبت أنّ النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث	* باستخدام الجداء السلمي نثبت أنّ: 1. (AM) ارتفاع في المثلث أيّ أنّ (AM) و(CB) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB} = 0$ 2. (BM) ارتفاع في المثلث أيّ أنّ (BM) و(AC) متعامدان أي: $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$ 3. (CM) ارتفاع في المثلث أيّ أنّ (CM) و(AB) متعامدان أيّ: $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$ إذاً النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث (ABC)	

التمرين الأول:

أوجد الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في كل من الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert = 4$	$\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert = 1$
$(\vec{u},\vec{v}) = 0$	

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert.\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= (1)(4)(1) = 4$$

الحالة الثانية:

الحل:

$\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert = 3$	$\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert = 2$
$(\vec{u},\vec{v}) = \pi$	

$$\vec{u}.\vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert.\lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$= (2)(3)\cos\pi = 6(-1) = -6$$

الحالة الثالثة:

$\vec{v}(1,-1,2)$	$\vec{u}(2,3,-1)$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v} = (2)(1) + (3)(-1) + (-1)(2)$$
$$= 2 - 3 - 2 = -3$$

الحالة الرابعة:

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
$\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

الحل:

$$\vec{u}(2,-3,1) \quad , \quad \vec{v}(3,-1,5)$$
$$\vec{u}.\vec{v} = (2)(3) + (-3)(-1) + (1)(5)$$
$$= 6 + 3 + 5 = 14$$

الحالة الخامسة:

$\left\|\vec{u}\right\| = 2$	$\left\|\vec{v}\right\| = 3$
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| = 3$	

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[(3)^2 - (2)^2 - (3)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}[9 - 4 - 9] = -2$$

الحالة السادسة:

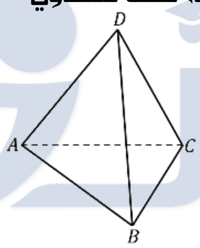
$\left\|\vec{u}\right\| = 3$	$\left\|\vec{v}\right\| = -4$
$\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\| = 5$	

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[25 - 9 - 16] = 0$$

التمرين الثاني:

$ABCD$ رباعي وجوه منتظم كل وجه فيه مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a والمطلوب:



١. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
٢. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$
٣. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

الطلب الثاني:

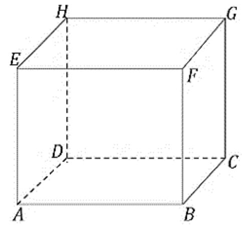
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AD}\right\|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= a.a.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

الطلب الثالث:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}\right)$$
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$
$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

التمرين الثالث:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a



١. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}$
٢. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH}$
٣. احسب $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$
٤. احسب $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$$
$$= a^2 + 0 = a^2$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE}$$
$$= \overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$$
$$= 0 + a^2 = a^2$$

الطلب الثالث:

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}\right)$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FG}$$
$$= a^2 + 0 = a^2$$

الطلب الرابع:

$$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{EB}$$
$$= \left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right).\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}\right)$$
$$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EF}.\overrightarrow{FB}$$
$$= 0 - a^2 + a^2 + 0 = 0$$

التمرين الرابع:

إذا علمت أنّ نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأنّ $\vec{u}.\vec{v} = -4$ فاحسب المقادير الآتية:

المقدار الأول:

$$\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$$
$$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v}$$
$$= \left\|\vec{u}\right\|^2 + \vec{u}.\vec{v}$$
$$= 25 - 4 = 21$$

المقدار الثاني:

$$\vec{v}(\vec{u}-\vec{v})$$
$$= \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v}$$
$$= \vec{u}.\vec{v} - \left\|\vec{v}\right\|^2 +$$
$$= -4 - 9 = -13$$

انظرْ للغيب بقلبٍ يؤمنُ أنَّ ربَّ الخيرِ لن يأتيَ إلا بالخير ..

المقدار الثالث:

$$(2\vec{u})(\vec{v}-3\vec{u})$$
$$=2\vec{u}.\vec{v}-6\vec{u}.\vec{u}=2\vec{u}.\vec{v}-6||\vec{u}||^2$$
$$=2(-4)-6(25)=-8-150=-158$$

المقدار الرابع:

$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v})$$
$$=\vec{u}.\vec{u}-3\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}-3\vec{v}.\vec{v}$$
$$=||\vec{u}||^2-3||\vec{v}||^2-2\vec{u}.\vec{v}$$
$$=(5)^2-3(3)^2-2(-4)$$
$$=25-27+8=6$$

التمرين الخامس:

هل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين في الحالات الآتية؟

الحالة الأولى:

$\vec{u}\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\vec{v}\left(-\frac{2}{5},2,3\right)$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)(2)+\left(\frac{1}{2}\right)(3)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{6}{2}+\frac{3}{2}=-\frac{4}{2}$$
$$=-2\neq 0$$

ومنهُ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متعامدين.

الحالة الثانية:

$\vec{u}(\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2})$
$\vec{v}(-\sqrt{2},1,1)$

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v}=(\sqrt{2})(-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1)+(1-\sqrt{2})(1)$$
$$=-2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}$$
$$=-2+2=0$$

ومنهُ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

التمرين السادس:

في الحالات التالية ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ عيّن α حتى يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين.

الحالة الأولى:

$\vec{u}\left(2,-\frac{1}{2},5\right)$	$\vec{v}\left(-\frac{2}{5},3,\alpha\right)$

لدينا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين ومنهُ:

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$
$$(2)\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)(3)+(5)(\alpha)=0$$
$$-\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+5\alpha=0$$
$$5\alpha=\frac{23}{10}\rightarrow\alpha=\frac{23}{50}$$

الحالة الثانية:

$\vec{u}\left(\sqrt{3},\frac{1}{3},2\right)$	$\vec{v}\left(\alpha+2\alpha,\frac{1}{2}\right)$

لدينا الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين ومنهُ:

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$
$$(\sqrt{3})(\alpha)+\left(\frac{1}{3}\right)(2\alpha)+(2)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\sqrt{3}\alpha+\frac{2}{3}\alpha+1=0$$
$$\sqrt{3}\alpha+\frac{2}{3}\alpha=-1\rightarrow\alpha=\frac{-1}{\sqrt{3}+\frac{2}{3}}$$

التمرين السابع:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(0,1,2)$	$B(2,1,1)$	$D(1,-2,\lambda)$

جد العدد الحقيقي λ بحيث يكون المثلث ABD قائم في A

الحل:

يكون المثلث ABD قائم في A إذا تحقق:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\ ...(*)$$

حيث:

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\ ,\overrightarrow{AD}(1,-3,\lambda-2)$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$(2)(1)+(0)(-3)+(-1)(\lambda-2)=0$$
$$2-\lambda+2=0\rightarrow\lambda=4$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا $\vec{u}(1,-2,1)$ و $\vec{v}(3,0,1)$

أوجد نسبة مثلثية للزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

الحل:

نعلم أنّ:

$$\vec{u}.\vec{v}=||\vec{u}||.||\vec{v}||\cos(\vec{u},\vec{v})\ ...(*)$$

حيث:

$$\vec{u}.\vec{v}=(3)(1)+(0)(-2)+(1)(1)=4$$
$$||\vec{u}||=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$$
$$||\vec{v}||=\sqrt{3^2+0^2+1^2}=\sqrt{10}$$

نعوض في علاقة $(*)$ وفق:

$$4=\sqrt{6}.\sqrt{10}\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{4}{\sqrt{6}.\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{60}}$$
$$=\frac{4}{\sqrt{4\times 15}}=\frac{4}{2\sqrt{15}}=\frac{2}{\sqrt{15}}$$

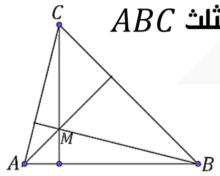
لو أنّ الغاية بسيطة لما أجهدنا ..
لكن يُؤنسنا أنَّ التعبَ بقدرِ المُبتغى

التمرين التاسع:

نتأمل في معلم متجانس النقاط:

$A(1,1,2)$	$B(3,1,-4)$
$C(2,0,-1)$	$M(2,-9,-1)$

أثبت أن M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC



الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-6)$$
$$\overrightarrow{BC}(-1,-1,3)$$
$$\overrightarrow{AC}(1,-1,-3)$$
$$\overrightarrow{AM}(1,-10,-3)$$
$$\overrightarrow{BM}(-1,-10,3)$$
$$\overrightarrow{CM}(0,-9,0)$$

إثبات أنّ (AM) ارتفاع في المثلث:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = (1)(-1) + (-10)(-1) + (-3)(3)$$
$$= -1 + 10 - 9 = 0$$

إثبات أنّ (BM) ارتفاع في المثلث:

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = (-1)(1) + (-10)(-1) + (3)(-3)$$
$$= -1 + 10 - 9 = 0$$

إثبات أنّ (CM) ارتفاع في المثلث:

$$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = (0)(2) + (-9)(0) + (0)(0)$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

ومنهُ: النقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث (ABC)

معادلات المستوي:

الشكل العام	$ax + by + cz + d = 0$ حيث: $\vec{n}(a,b,c)$ هو ناظم المستوي وهو شعاع عمودي على المستوي
كتابة معادلة المستوي	لكتابة معادلة مستوي فإننا نحتاج: * ناظم المستوي: $\vec{n}(a,b,c)$ * نقطة منه: $A(x_A, y_A, z_A)$ * وتكون المعادلة: $a(x-x_A) + b(y-y_A) + c(z-z_A) = 0$
تمرين: اكتب معادلة المستوي P المار من $A(1,0,5)$ ويقبل $\vec{n}(1,-1,0)$ ناظماً له	$P: 1(x-1) - 1(y-0) + 0(z-5) = 0$ $P: x - 1 - y = 0$ $P: x - y - 1 = 0$

حالات معادلة المستوي:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين: اكتب معادلة المستوي P في كل من الحالات
مستوي يوازي مستوي آخر	اكتب معادلة المستوي P المار من A والموازي للمستوي Q.	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم للمستوي: بما أن المستوي P والمستوي Q متوازيان فإن: $\vec{n}_P = \vec{n}_Q$ * تحديد النقطة: (A معطاة) * نكتب المعادلة	P مار من $A(1,0,5)$ ويوازي المستوي Q الذي معادلتهُ: $Q: 2x - y + 3z = 4$ الحل: النقطة: $A(1,0,5)$ الناظم: لدينا المستوي Q ناظمهُ: $\overrightarrow{n_Q}(2,-1,3)$ وبما أنّ المستويان P و Q متوازيان فإنّ $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$ أيّ: $\overrightarrow{n_P}(2,-1,3)$ المعادلة: $P: 2(x-1) - 1(y-0) + 3(z-5) = 0$ $P: 2x - 2 - y + 3z - 15 = 0$ $P: 2x - y + 3z - 17 = 0$
مستوي يعامد مستقيم	اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على المستقيم d.	* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P بما أن المستقيم (d) والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{n}_P = \vec{u}_d$ حيث: $\vec{u}_d$ شعاع توجيه المستقيم (d) * تحديد النقطة: (A معطاة) * نكتب المعادلة	P مار من $A(1,2,-1)$ ويعامد المستقيم d الذي شعاع توجيهه $\vec{u}(-4,1,3)$ الحل: النقطة: $A(1,2,-1)$ الناظم: لدينا المستقيم d والمستوي P متعامدان فإنّ: $\overrightarrow{n_P} = \vec{u}$ أيّ أنّ: $\overrightarrow{n_P}(-4,1,3)$ ومنهُ المعادلة: $P: -4(x-1) + 1(y-2) + 3(z+1) = 0$ $P: -4x + 4 + y - 2 + 3z + 3 = 0$ $P: -4x + y + 3z + 5 = 0$

<table>
<tr>
<td>معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة</td>
<td>اكتب معادلة P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$</td>
<td>* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P:
بما أن P هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فإن:
$\vec{n}_P = \overrightarrow{AB}$
* تحديد النقطة:
النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P لذلك نوجد احداثيات I
* نكتب المعادلة</td>
<td>P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث: $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$.
الحل:
النقطة: بما أنّ P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي إلى المستوي P حيث: $I(4,1,0)$
الناظم:
بما أنّ المستوي P هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ فإنّ:
$\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{AB}$ أيّ: $\overrightarrow{n_P}(-2,-2,2)$
المعادلة:
$P: -2(x-4) - 2(y-1) + 2(z-0) = 0$
$P: -2x + 8 - 2y + 2 + 2z = 0$
$P: -2x - 2y + 2z + 10 = 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>معادلة مستوي مار من نقطة ويحوي شعاعين (يقبل شعاعين توجيه)</td>
<td>اكتب معادلة المستوي P المار من A ويقبل $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين له.</td>
<td>* تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P
ليكن: $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن $\vec{n}_P$ ناظم للمستوي P وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ من المستوي P فإنّ $\vec{n}_P$ يكون عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أي:
$\vec{n}_P.\vec{u} = 0$
$\vec{n}_P.\vec{v} = 0$
نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a, b, c وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات ناظم المستوي $\vec{n}_P$
* تحديد النقطة: (A المعطاة)
* نكتب المعادلة</td>
<td>P مار بالنقطة $A(2,3,1)$ ويقبل كلاً من $\vec{u}(1,1,3)$ و $\vec{v}(2,-1,4)$ شعاعي توجيه لـ P.
الحل:
النقطة: $A(2,3,1)$
الناظم:
ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$ وبما أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين موجهين للمستوي P فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ يكون عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ أيّ أنّ:
$\overrightarrow{n_P}.\vec{u} = 0$
$(a)(1) + (b)(1) + (c)(3) = 0$
$a + b + 3c = 0 \dots (1)$
$\overrightarrow{n_P}.\vec{v} = 0$
$(a)(2) + (b)(-1) + (c)(4) = 0$
$2a - b + 4c = 0 \dots (2)$
$\begin{cases} a + b + 3c = 0 \dots (1) \\ 2a - b + 4c = 0 \dots (2) \end{cases}$
بجمع (1) و (2) نجد أنّ:
$3a + 7c = 0 \rightarrow a = -\frac{7}{3}c$
نعوض في (1) لنجد أنّ:
$-\frac{7}{3}c + b + 3c = 0 \rightarrow b = -\frac{2}{3}c$
لتكن $c = 3$ إذاً:
$\overrightarrow{n_P}(-7,-2,3)$
المعادلة:
$P: -7(x-2) - 2(y-3) + 3(z-1) = 0$
$P: -7x + 14 - 2y + 6 + 3z - 3 = 0$
$P: -7x - 2y + 3z + 17 = 0$</td>
</tr>
</table>

إنّ لي نفسًا تنبتُ بالتّعب..

لا توقفها العثرة، ولا تطفئها الخثرة، تبحث عن القِلّة، تتنفَّس المُحاولة، تؤمن أنّ جهادَ النّفس راحتها، وجُهدَ الغرس ساحتها، والآخرة ميدانها،

يُبنى الإنسان في تفاصيله، وتقوى روحُه داخل سِرّه، يَصقِل نفسه الصِّدَق، ويُرَتِّبُ قلبه الإخلاص! يعيش للّه ويموت سائراً إليه.

إنّ الصّادق لَيَجِدُ في السِرّ مَكانه الآمِن. 💙

معادلة مستوي مار من نقطة ويعامد مستويان	اكتب معادلة المستوي P المار من A والعمودي على كل من المستويان Q و R	※ تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_P(a,b,c)$ بما أن المستوي P و Q متعامدان فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان, أي : $\vec{n}_p.\vec{n}_Q=0$ بما أن المستوي P و R متعامدان فإن $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_R$ متعامدان أيّ: $\vec{n}_p.\vec{n}_R=0$ مما سبق نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a نحلها فنحصل على مركبات $\vec{n}_p$ ※ تحديد النقطة: (A المعطاة) ※ نكتب المعادلة	P مار من $A(2,5,-2)$ وعمودي على كل من Q و R حيث: $R: x+y+z+1=0$ و $Q: x-2y+3z-5=0$ الحل: النقطة: $A(2,5,-2)$ الناظم: ليكن $\vec{n_P}(a,b,c)$ بما أنّ المستويان P و Q متعامدين فإنّ $\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}(1,-2,3)$ متعامدين أيّ أنّ: $\vec{n_P}.\vec{n_Q}=0$ $a-2b+3c=0 \dots (1)$ بما أنّ المستويان P و R متعامدين فإنّ $\vec{n_P}$ و $\vec{n_R}(1,1,1)$ متعامدين أيّ أنّ: $\vec{n_P}.\vec{n_R}=0$ $a+b+c=0 \dots (2)$ لدينا جملة المعادلتين: $\begin{cases} a-2b+3c=0 \dots (1) \\ a+b+c=0 \dots (2) \end{cases}$ نضرب المعادلة (2) بالعدد (2): $\begin{cases} a-2b+3c=0 \dots (1) \\ 2a+2b+2c=0 \dots (2)' \end{cases}$ بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ: $3a+5c=0 \to a=-\frac{5}{3}c$ نعوض في (1) لنجد أنّ: $-\frac{5}{3}c-2b+3c=0 \to b=\frac{4}{6}c \to b=\frac{2}{3}c$ لتكن $c=3$ ومنهُ: $\vec{n_P}(-5,2,3)$ المعادلة: $P: -5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0$ $P: -5x+10+2y-10+3z+6=0$ $P: -5x+2y+3z+6=0$
معادلة مستوي مار من نقطتين ويعامد مستوي آخر	اكتب معادلة المستوي P المار من النقطتين A و B ويعامد المستوي Q	※ تحديد $\vec{n}_P$ ناظم المستوي P : ليكن $\vec{n}_p(a,b,c)$ بما أن النقطتان A و B من المستوي P فإن $\vec{n}_p$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان أي: $\vec{n}_p.\overrightarrow{AB}=0$ بما أنّ المستويان P و Q متعامدان فهذا يعني أنّ $\vec{n}_p$ و $\vec{n}_Q$ متعامدان أي: $\vec{n}_p.\vec{n}_Q=0$ بالتعويض نحصل مما سبق على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل وبحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}_p$ ※ تحديد النقطة إما A أو B ※ نكتب المعادلة	P مار من $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ وعمودي على المستوي Q حيث: $Q: x-y+3z-4=0$ الحل: النقطة: $A(1,-1,2)$ الناظم: ليكن $\vec{n_P}(a,b,c)$ بما أنّ النقطتان A و B من المستوي P فإنّ $\vec{n_P}$ و $\overrightarrow{AB}(1,1,2)$ متعامدان أيّ أنّ: $\vec{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$ $a+b+2c=0 \dots (1)$ بما أنّ المستويان P و Q متعامدان فهذا يعني أنّ $\vec{n_P}$ و $\vec{n_Q}(1,-1,3)$ متعامدان أيّ أنّ: $\vec{n_P}.\vec{n_Q}=0$ $a-b+3c=0 \dots (2)$ لدينا جملة المعادلتين: $\begin{cases} a+b+2c=0 \dots (1) \\ a-b+3c=0 \dots (2) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد أنّ: $2a+5c=0 \to a=-\frac{5}{2}c$ نعوض في (1) لنجد أنّ: $-\frac{5}{2}c+b+2c=0 \to b=\frac{1}{2}c$ لتكن $c=2$ فإنّ: $\vec{n_P}(-5,1,2)$ ومنهُ تكون المعادلة: $P: -5(x-1)+1(y+1)+2(z-2)=0$ $P: -5x+5+y+1+2z-4=0$ $P: -5x+y+2z+2=0$

معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط	صيغة أولى: اكتب معادلة المستوي المار من A و B و C صيغة ثانية: اكتب معادلة المستوي (ABC)	⁕ نتحقق من أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً ⁕ نحدد ناظم المستوي (ABC) $\vec{n}$ بما أن النقاط A و B و C من المستوي P فإن $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ أي: $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ ⁕ بالتعويض نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل c,b,a بحل هذه الجملة نحصل على مركبات $\vec{n}$ ⁕ تحديد النقطة: إما A أو B أو C ⁕ نكتب المعادلة	P مار من $A(0,1,0)$ و $B(-1,1,0)$ و $C(-1,2,3)$ الحل: الخطوة الأولى: إثبات أنّ النقاط A و B و C تعيّن مستوي: لدينا: $\overrightarrow{AB}(-1,0,0)\quad,\quad\overrightarrow{AC}(-1,1,3)$ نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً إذاً النقاط A و B و C تعيّن مستوي. الخطوة الثانية: كتابة معادلة المستوي (ABC) : النقطة: $A(0,1,0)$ الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ بما أنّ النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي P فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AB}=0$ $-a=0\ldots(1)$ $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{AC}=0$ $-a+b+3c=0\ldots(2)$ $\begin{cases}-a=0\ldots(1)\\-a+b+3c=0\ldots(2)\end{cases}$ من (1) نجد أنّ: $-a=0\rightarrow a=0$ نعوض في (2) لنجد أنّ: $-(0)+b+3c=0\rightarrow b=-3c$ ليكن $c=1$ ومنه: $\overrightarrow{n_P}(0,-3,1)$ ومنه المعادلة تكون: $P:0(x-0)-3(y-1)+1(z-0)=0$ $P:-3y+3+z=0$ $P:-3y+z+3=0$
معادلة مستوي يحوي مستقيمان متقاطعان	اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمان المتقاطعان d_1 و d_2	⁕ تحديد ناظم المستوي P $\overrightarrow{n_P}$: ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$ بما أن المستوي P محدد بالمستقيمان d_1 و d_2 فإنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_1}=0$ $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_2}=0$ ⁕ بالتعويض نحصل على جملة معادلتين بثلاثة مجاهيل a و b و c وبحلها نحصل على المطلوب ⁕ تحديد النقطة: نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 هي نقطة تنتمي إلى المستوي ⁕ نكتب المعادلة.	P المحدد بالمستقيمان d_1 و d_2 حيث شعاع توجيه المستقيم d_1 هو $\overrightarrow{u_1}(1,2,-1)$ وشعاع توجيه المستقيم d_2 هو $\overrightarrow{u_2}(2,1,3)$ والمستقيمان d_1 و d_2 يتقاطعان في النقطة $A(2,1,0)$ النقطة: $A(2,1,0)$ لأنّ نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 هي نقطة تنتمي إلى المستوي. الناظم: ليكن $\overrightarrow{n_P}(a,b,c)$ بما أنّ المستوي P محدد بالمستقيمان d_1 الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,2,-1)$ و d_2 الذي شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(2,1,3)$ فإنّ $\overrightarrow{n_P}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ أيّ أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_1}=0$ $a+2b-c=0\ldots(1)$ $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_2}=0$ $2a+b+3c=0\ldots(2)$ لدينا جملة المعادلتين: $\begin{cases}a+2b-c=0\ldots(1)\\2a+b+3c=0\ldots(2)\end{cases}$ نضرب المعادلة (2) بالعدد (-2): $\begin{cases}a+2b-c=0\ldots(1)\\-4a-2b-6c=0\ldots(2)\end{cases}$ بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ: $-3a-7c=0\rightarrow a=-\frac{7}{3}c$ نعوض في (1) لنجد أنّ: $-\frac{7}{3}c+2b-c=0\rightarrow b=\frac{5}{3}c$ ليكن $c=3$ ومنه: $\overrightarrow{n_P}(-7,5,3)$ المعادلة: $P:-7(x-2)+5(y-1)+3(z-0)=0$ $P:-7x+14+5y-5+3z=0$ $P:-7x+5y+3z+9=0$

معادلة مستوي مماس لكرة في نقطة	اكتب معادلة المستوي P المماس للكرة في النقطة A	※ تحديد ناظم المستوي $\vec{n}_p$: بما أن P هو المستوي المماس للكرة S فهذا يعني أنّ: $\vec{n}_p=\overrightarrow{\Omega A}$ حيث Ω هي مركز الكرة S ※ تحديد النقطة: (A المعطاة) ※ نكتب المعادلة	المستوي P المماس للكرة S التي مركزها $\Omega(3,0,-1)$ في النقطة $A(2,1,0)$ الحل: النقطة: $A(2,1,0)$ الناظم: بما أنّ P هو المستوي المماس للكرة S فهذا يعني أنّ $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{\Omega A}$ حيث؛ $\Omega(3,0,-1)$ هي مركز الكرة و $\overrightarrow{\Omega A}(-1,1,1)$ ومنهُ $\overrightarrow{n_P}(-1,1,1)$ المعادلة: $P:-1(x-2)+1(y-1)+1(z-0)=0$ $P:-x+2+y-1+z=0$ $P:-x+y+z+1=0$

تطبيقات معادلة المستوي:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
انتماء نقطة إلى مستوي	هل النقطة A تنتمي الى المستوي P ؟	※ نكتب معادلة المستوي P عند اللزوم ※ نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي P ※ نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: المعادلة محققة إذاً: $A\in P$ ✌ الحالة الثانية: المعادلة غير محققة اذاً: $A\notin P$
إثبات معادلة مستوي	أثبت أن معادلة المستوي ABC هي "وتكون معطاة"	الطريقة الأبسط في الإجابة: ※ نعوض إحداثيات النقاط A و B و C في المعادلة المعطاة ونثبت أنها محققة
وقوع أربعة نقاط في مستو واحد	هل النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد؟	※ نكتب معادلة مستوي مار من ثلاثة نقاط ولتكن (ABC) ※ نتحقق من انتماء النقطة المتبقية D الى المستوي السابق ※ نميز: ☝ الحالة الأولى: $D\in(ABC)$ بالتالي تكون: النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد ✌ الحالة الثانية: $D\notin(ABC)$ وبالتالي تكون: النقاط A و B و C و D لا تقع في مستوٍ واحد
بعد نقطة عن مستوي في الفراغ	ليكن لدينا المستوي P معادلته: $P: ax+by+cz+d=0$ ولدينا النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ والمطلوب: احسب بعد النقطة A عن المستوي P	إنّ بعد النقطة A عن المستوي P يعطى بالقانون: $dist(A,P)=\dfrac{\lvert ax_A+by_A+cz_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ انتبه شرط تطبيق القانون السابق: أن يكون الطرف الأيمن في معادلة المستوي هو الصفر
البعد بين مستويين متوازيين	ليكن لدينا المستويان P و Q احسب البعد بينهما علماً أنهما متوازيان	※ نأخذ نقطة A من المستوي P (مثلاً) وفق: نفرض قيم اختيارية للإحداثيتين من النقطة ولتكن مثلاً x و y ※ نعوض في معادلة المستوي فنحسب z ※ وبالتالي نحصل على النقطة المطلوبة ※ نحسب البعد بين النقطة السابقة عن المستوي Q بتطبيق دستور ال $dist$
كتابة معادلة مستوي مار من أربعة نقاط	اكتب معادلة المستوي $(ABCD)$	※ نكتب معادلة المستوي المار من ثلاثة نقاط ولتكن (ABC) ※ نتحقق من انتماء النقطة المتبقية ونميز: ☝ الحالة الأولى: $D\in(ABC)$ تكون معادلة المستوي $(ABCD)$ هي ذاتها معادلة المستوي (ABC) ✌ الحالة الثانية: $D\neq(ABC)$ لا يوجد معادلة للمستوي $(ABCD)$
إثبات أنّ شعاع ناظم على مستوي	أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC)	يقصد بها: أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC)

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستوي P المعطى وفق: $P: x+y-z-5=0$
والنقاط $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$ هل النقاط C و D و E تنتمي إلى المستوي P ؟

الحل:

اختبار النقطة C :

$$P:-2+5+2-5=0$$
$$0=0$$

محققة إذاً: $C\in P$

اختبار النقطة D :

$$P:1+1+3-5=0$$
$$0=0$$

محققة إذاً: $D\in P$

اختبار النقطة E :

$$P:3+2-1-5=0$$
$$-1=0$$

غير محققة إذاً: $E\neq P$

التمرين الثاني:

لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و $B(1,2,1)$ و $C(4,0,0)$ أثبت أنّ معادلة المستوي (ABC) تُعطى بالعلاقة $x+3y-3z-4=0$.

الحل:

تعويض A في معادلة المستوي المراد إثباتها:

$$1+3(1)-3(0)-4=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$

محققة

تعويض B في معادلة المستوي المراد إثباتها:

$$1+3(2)-3(1)-4=0$$
$$7-7=0$$
$$0=0$$

محققة

تعويض C في معادلة المستوي المراد إثباتها:

$$4+3(0)-3(0)-4=0$$
$$4-4=0$$
$$0=0$$

محققة

إذاً: معادلة المستوي (ABC) هي:

$$x+3y-3z-4=0$$

التمرين الثالث:

الطلب الأول:

احسب بُعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $P: 2x-y+3z-5=0$

الحل:

$$dist(A,P)=\frac{|2(5)-(-3)+3(4)-5|}{\sqrt{4+1+9}}$$
$$=\frac{|10+3+12-5|}{\sqrt{14}}=\frac{|20|}{\sqrt{14}}=\frac{20}{\sqrt{14}}$$

الطلب الثاني:

احسب بُعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $Q: y-z=0$

الحل:

$$dist(B,Q)=\frac{|2-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

التمرين الرابع:

تتأمل في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$A(2,0,1)$	$B(1,-2,1)$	$C(5,5,0)$
$D(-3,-5,6)$	$E(3,1,2)$	

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد P وتبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي P

الحل:

الخطوة الأولى نكتب معادلة المستوي (ABC)

إثبات أنّ النقاط A و B و C تشكل مستوٍ وفق:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,0) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(3,5,-1)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C تشكل مستوي.

كتابة معادلة المستوي (ABC) وفق:

النقطة: $A(2,0,1)$

الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي (ABC) فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$(a)(-1)+(b)(-2)+(c)(0)=0$$
$$-a-2b=0\ \dots(1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$(a)(3)+(b)(5)+(c)(-1)=0$$
$$3a+5b-c=0\ \dots(2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$\begin{cases}-a-2b=0\ \dots(1)\\ 3a+5b-c=0\ \dots(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$-a-2b=0 \to a=-2b$$

نعوض في (2) لنجد أنّ:

$$3(-2b)-c+5b=0 \to c=-b$$

لتكن $b=1$ ومنه:

$$\vec{n}(-2,1,-1)$$

المعادلة:

$$(ABC): -2(x-2)+1(y-0)-1(z-1)=0$$
$$(ABC): -2x+4+y-z+1=0$$
$$(ABC): -2x+y-z+5=0$$

الخطوة الثانية: اختبار انتماء النقطة D إلى المستوي (ABC)

$$-2(-3)+(-5)-(6)+5=0$$
$$6-5-6+5=0$$
$$0=0 \to \text{محققة}$$

إذاً: $D\in(ABC)$

وبالتالي النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد معادلته

$$-2x+y-z+5=0$$

اختبار انتماء النقطة E إلى المستوي $(ABCD)$

$$-2(3)+(1)-(2)+5=0$$
$$-6+1-2+5=0$$
$$-2=0 \to \text{غير محققة}$$

إذاً $E\neq(ABCD)$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا المستويان: $P: 2x + y - 3z - 7 = 0$

و $Q: 4x + 2y - 6z + 3 = 0$

الطلب الأول:

تحقق أنّ P و Q متوازيان:

الحل:

المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_P}(2,1,-3)$

المستوي Q ناظمه $\overrightarrow{n_Q}(4,2,-6)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متوازيان.

الطلب الثاني:

خذ نقطة اختيارية تنتمي إلى المستوي P :

الحل:

لتكن النقطة A تنتمي للمستوي P حيث نأخذ: $x_A = 0$

و $y_A = 1$ نعوض في معادلة المستوي P لحساب z_A وفق:

$$P: 2(0) + 1 - 3z_A - 7 = 0$$

$$-3z_A - 6 = 0 \rightarrow z_A = -2$$

ومنهُ:

$$A(0,1,-2)$$

الطلب الثالث:

احسب البعد بين المستويين P و Q :

الحل:

من الطلب السابق لدينا $A(0,1,-2)$ نقطة تنتمي إلى المستوي P ولحساب البعد بين المستويين P و Q نطبق القانون:

$$dist(A,Q) = \frac{|4(0) + 2(1) - 6(-2) + 3|}{\sqrt{16+4+36}}$$

$$= \frac{|2+12+3|}{\sqrt{56}} = \frac{|17|}{\sqrt{56}} = \frac{17}{\sqrt{56}}$$

التمرين السادس:

لتكن لدينا النقاط:

$B(1,1,0)$	$A(1,0,0)$
$D\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$	$C\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

والمطلوب اكتب معادلة المستوي $(ABCD)$:

الحل:

الخطوة الأولى نكتب معادلة المستوي (ABC)

إثبات أنّ النقاط A و B و C تشكل مستو وفق:

$$\overrightarrow{AB}(0,1,0) \quad , \quad \overrightarrow{AC}\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنهُ النقاط A و B و C تشكل مستو.

كتابة معادلة المستوي (ABC) وفق:

النقطة: $A(1,0,0)$

الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط A و B و C هي نقاط من المستوي (ABC) فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$(a)(0) + (b)(1) + (c)(0) = 0$$

$$b = 0 \ldots (1)$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$$(a)(-1) + (b)(1) + (c)\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-a + b + \frac{1}{2}c = 0 \ldots (2)$$

لدينا جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} b = 0 \ldots (1) \\ -a + b + \frac{1}{2}c = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$b = 0$$

نعوض في (2) لنجد أنّ:

$$-a + (0) + \frac{1}{2}c = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}c$$

ليكن $c = 2$ ومنهُ:

$$\vec{n}(1,0,2)$$

المعادلة:

$$(ABC): 1(x-1) + 0(y-0) + 2(z-0) = 0$$

$$(ABC): x - 1 + 2z = 0$$

$$(ABC): x + 2z - 1 = 0$$

الخطوة الثانية:

اختبار انتماء النقطة D إلى المستوي (ABC)

نعوّض إحداثيات D في معادلة المستوي:

$$(0) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

محققة

إذاً: $D \in (ABC)$

ومنهُ تكون معادلة المستوي $(ABCD)$ هي:

$$x + 2z - 1 = 0$$

العوَض آتٍ وربُّ القلب أدرَى بمِيعاده ..

التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ:

تمهيد:

الشكل العام	لدينا المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}$. التمثيلات الوسيطية لمعادلة المستقيم في الفراغ تعطى وفق: $(d):\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$ حيث: شعاع توجيه المستقيم هو: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$
كتابة التمثيل	لكتابة التمثيل الوسيطي لأيّ مستقيم في الفراغ فإننا نحتاج: * شعاع توجيه المستقيم: $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ * نقطة منه: $A(x_A,y_A,z_A)$ * نكتب التمثيل الوسيطي وفق: $(d):\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$

ملاحظة: في التمثيل الوسيطي لـ:

* مستقيم تكون: $t \in \mathbb{R}$
* نصف مستقيم تكون: $t \in \mathbb{R}_+^*$
* قطعة مستقيم تكون: $t \in [0,1]$

حالات إيجاد التمثيل الوسيطي:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين: اكتب معادلة التمثيل الوسيطي في كل من الحالات
التمثيل الوسيطي لمستقيم يوازي مستقيم	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة A والموازي للمستقيم Δ	* تحديد النقطة: (المعطاة A) * تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d: بما أن المستقيمان d و Δ متوازيان فإن: $\vec{u}_\Delta = \vec{u}_d$ * نكتب التمثيل الوسيطي	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) المار من النقطة $A(-1,2,1)$ والذي يوازي المستقيم (CD) حيث $C(1,0,-3)$ و $D(-1,-2,1)$. الحل: النقطة: $A(-1,2,1)$ شعاع التوجيه: بما أنّ المستقيم (d) و (CD) متوازيان فإنّ: $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{CD} \to \overrightarrow{u_d}(-2,-2,4)$ كتابة التمثيل الوسيطي: $d:\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = -2t + 2 \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 4t + 1 \end{cases}$
التمثيل الوسيطي لمستقيم يعامد مستوي	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعامودي على المستوي P	* تحديد النقطة: (A معلومة) * تحديد شعاع التوجيه $\vec{u}_d$ للمستقيم d : بما أن المستقيم d والمستوي P متعامدان فإن: $\vec{u}_d = \vec{n}_p$ * نكتب التمثيل الوسيطي	ليكن لدينا المستوي P الذي معادلته: $P: 3x - 5z + 7 = 0$ اكتب معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة $A(1,-3,2)$ والعمودي على المستوي P . الحل: النقطة: $A(1,-3,2)$ شعاع التوجيه: بما أنّ المستقيم d والمستوي P متعامدان فإنّ: $\vec{u} = \overrightarrow{n_P} \to \vec{u}(3,0,-5)$ المعادلة: $d:\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -3 \quad\quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = -5t + 2 \end{cases}$
التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من نقطتين	① صيغة أولى: اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) ② صيغة ثانية: اكتب التمثيل الوسيطي المار من A و B	* تحديد النقطة: إما A أو B * تحديد شعاع توجيه $\vec{u}$ المستقيم: بما أن المستقيم مار بالنقطتين A و B فإن: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ * نكتب التمثيل الوسيطي	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث: $A(2,1,-1)$ ، $B(3,-1,1)$ الحل: النقطة: $A(2,1,-1)$ شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ أيّ: $\vec{u}(1,-2,2)$ المعادلة: $(AB):\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t + 1 \ ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لمستويان	اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك للمستويان P و Q	* نأخذ معادلتي المستويان ثم نعطي قيمة اختيارية لأحد المجاهيل بدلالة t ونعوض في معادلتي المستويان فنحصل على جملة معادلتين بمجهولين * بحل هذه الجملة نحصل على جميع المجاهيل بدلالة t فنحصل على التمثيل الوسيطي للفصل المشترك	أعط تمثيلاً وسيطياً لـ (d) الفصل المشترك للمستويان $P: -x+y+z=3$ و $Q: 2x-y+2z=1$ الحل: $\begin{cases} P: -x+y+z=3 \dots (1) \\ Q: 2x-y+2z=1 \dots (2) \end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد أنّ: $x+3z=4$ $x=-3z+4 \dots (*)$ نعوض في (1) وفق: $-(-3z+4)+y+z=3$ $3z-4+y+z=3$ $4z+y=7$ $y=-4z+7 \dots (**)$ لتكن $z=t$, نعوض في علاقة $(*)$ و $(**)$: $x=-3t+4$ $y=-4t+7$ المعادلة: $d: \begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4t+7 \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

تطبيقات التمثيل الوسيطي لمستقيم:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
إثبات تمثيل وسيطي لمستقيم	أثبت أن معادلة المستقيم d (تمثيله الوسيطي معلوم) هو فصل مشترك للمستويان P و Q حيث (معادلتي P و Q معطاة)	الطريقة الأبسط في الإجابة: نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في كل من معادلتي المستويان P و Q ونثبت أن كل منهما محققة
انتماء نقطة إلى مستقيم في الفراغ	ليكن لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي: $(d): \begin{cases} x=\alpha t+x_A \\ y=\beta t+y_A \; ; t \in \mathbb{R} \\ z=\gamma t+z_A \end{cases}$ هل النقطة $B(x_B, y_B, z_B)$ تنتمي الى المستقيم d ؟	* نعوض إحداثيات النقطة في التمثيلات الوسيطية للمستقيم ثم نحدد قيم t * نميز: ☝ الحالة الأولى: قيم t متساوية وبالتالي تكون النقطة B تنتمي إلى المستقيم d ✌ الحالة الثانية: قيم t غير متساوية وبالتالي تكون النقطة B لا تنتمي إلى المستقيم d

التمرين الأول:

ليكن لدينا المستويان P و Q حيث:

$$\begin{cases} P: x+2y-z-4=0 \\ Q: 2x+3y-2z-5=0 \end{cases}$$

أثبت أنّ المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي

تمثيله الوسيطي: $d: \begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \\ z=t \end{cases} \; ; \; t \in \mathbb{R}$

الحل:

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في P :

$$P: t-2+2(3)-(t)-4=0$$
$$P: t-2+6-t-4=0$$
$0=0 \to$ محققة

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في Q :

$$P: 2(t-2)+3(3)-2(t)-5=0$$
$$P: 2t-4+9-2t-5=0$$
$0=0 \to$ محققة

إذاً: d هو الفصل المشترك لـ P و Q

التمرين الثاني:

ليكن المستقيم Δ تمثيله الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+1 \; ; \; t \in \mathbb{R} \\ z=t+2 \end{cases}$$

الطلب الأول:

هل النقطة $A(1,0,-1)$ تنتمي إلى Δ :

$1=2t-1 \to t=1$
$0=t+1 \to t=-1$
إذاً $A \notin \Delta$

الطلب الثاني:

هل النقطة $B(1,2,-1)$ تنتمي إلى Δ ؟

$1=2t-1 \to t=1$
$2=t+1 \to t=1$
$-1=t+2 \to t=-3$
إذاً $B \notin \Delta$

الطلب الثالث:

هل النقطة $C(1,2,3)$ تنتمي إلى Δ ؟

$1=2t-1 \to t=1$
$2=t+1 \to t=1$
$3=t+2 \to t=1$
إذاً $C \in \Delta$

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقطتان $A(3,1,-1)$ و $B(2,0,0)$ والمطلوب:

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)
2. عين قيمة العددين a و b حتى تنتمي النقطة $C(1,a,b)$ إلى المستقيم (AB)

الحل:

الطلب الأول:

تحديد النقطة: $A(3,1,-1)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(-1,-1,1)$$

التمثيل الوسيطي لـ (AB) :

$$(AB):\begin{cases}x=-t+3\\ y=-t+1\,;t\in\mathbb{R}\\ z=t-1\end{cases}$$

الطلب الثاني:

نعوض إحداثيات النقطة C في التمثيل الوسيطي لـ (AB) :

$$\begin{cases}1=-t+3\ldots(1)\\ a=-t+1\ldots(2)\\ b=t-1\ldots(3)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ: $t=2$ نعوض في (2) و (3) فنجد:

$$a=-1\quad,\quad b=1$$

ومنهُ: $C(1,-1,1)$

الكرة:

تمهيد:

الشكل العام	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ حيث: * مركز الكرة: $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ * نصف قطر الكرة: R
كتابة معادلة الكرة	لكتابة معادلة كرة فإننا نحتاج: * مركز الكرة: $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ * نصف قطر الكرة: R * تكون معادلة الكرة وفق: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
تمرين: اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r	حيث: $\Omega(0,5,-1)$ و $r=\sqrt{3}$ الحل: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ $x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$

حالات معادلة الكرة:

الحالة	نص السؤال	فكرة الحل	تمرين:
معادلة كرة مركزها معلوم وتمر من نقطة	اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمرّ من النقطة A	* تحديد المركز: Ω معلوم * تحديد نصف القطر R: $R=\Omega A$ * نكتب المعادلة	اكتب معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(2,-1,0)$ وتمر من النقطة $A(3,1,1)$ الحل: مركز الكرة: $\Omega(2,-1,0)$ نصف قطر الكرة: $R=\Omega A=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$ معادلة الكرة: $S:(x-2)^2+(y+1)^2+z^2=6$
معادلة كرة قطرها $[AB]$	اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.	* تحديد المركز Ω: النقطة Ω منتصف $[AB]$ هي مركز هذه الكرة. * تحديد نصف القطر R: - إمّا $R=\Omega A$ - أو $R=\Omega B$ - أو $R=\frac{1}{2}AB$ * نكتب المعادلة.	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$ $B(1,0,5)$ ، $A(-3,1,2)$ الحل: مركز الكرة: منتصف $[AB]$ وفق: $\Omega\left(-1,\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$ نصف القطر: $\overrightarrow{\Omega A}\left(-2,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ $R=\Omega A=\sqrt{(-2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{13}{2}}$ نكتب المعادلة وفق: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ $(x+1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$

معادلة كرة مركزها معلوم وتمس مستوي	اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمسّ المستوي P	* تحديد المركز Ω معلوم * تحديد نصف القطر R: بما أنّ الكرة تمسّ المستوي P فإنّ: $R = dist(\Omega, P)$ * نكتب المعادلة	في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $P: x+2y+3z=5$ اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي الحل: مركز الكرة: $A(2,-2,2)$ نصف القطر: بما أنّ الكرة وتمسّ المستوي P فإنّ: $R = dist(A,P) = \frac{\lvert 2-4+6-5\rvert}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{\lvert -1\rvert}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ نكتب المعادلة وفق: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$ $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2 = \frac{1}{14}$

معادلات الاسطوانة:

المحور	OX	OY	OZ
مركز قاعدتها الأولى	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
مركز قاعدتها الثانية	$B(x_B,0,0)$	$B(0,y_B,0)$	$B(0,0,z_B)$
نصف قطر القواعد	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ x_A \le x \le x_B \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y_A \le y \le y_B \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_A \le z \le z_B \end{cases}$

معادلات المخروط:

المحور	OX	OY	OZ
الرأس	المبدأ O		
مركز قاعدة	$A(x_A,0,0)$	$A(0,y_A,0)$	$A(0,0,z_A)$
نصف قطر القاعدة	r		
شكل المعادلة	$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{r^2}{(x_A)^2}x^2 \\ 0 \le x \le x_A \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+z^2=\frac{r^2}{(y_A)^2}y^2 \\ 0 \le y \le y_A \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{r^2}{(z_A)^2}z^2 \\ 0 \le z \le z_A \end{cases}$

أنماط التمارين:

الأنماط	الأول	الثاني	الثالث
نص السؤال	اكتب معادلة (الأسطوانة/ المخروط).	صف مجموع النقاط التي تحقق المعادلة (معطاة).	هل النقطة A تقع على (الأسطوانة/ المخروط)؟
فكرة الحل	قانون وتعويض.	نحدّد ماذا تمثّل المعادلة حسب ما ورد معنا في المخططات السّابقة.	* نعوّض إحداثيّات النّقطة في المعادلة * ونميز: الحالة الأولى: تحقق الشرطين إذاً النقطة A تنتمي إلى (الاسطوانة/المخروط) الحالة الثانية: اختلال أحد الشرطين إذاً النقطة A لا تنتمي إلى (الاسطوانة/المخروط)

التمرين الأول:

اكتب معادلة الاسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركزي قاعدتها $A(4,0,0)$ و $B(8,0,0)$ ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

الحل:

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ x_A \le x \le x_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=8 \\ 4 \le x \le 8 \end{cases}$$

التمرين الثاني:

اكتب معادلة المخروط التي محوره $(O,\vec{i})$ ورأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها $(4,0,0)$ ونصف قطرها 3

الحل:

$$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{r^2}{(x_A)^2}x^2 \\ 0 \le x \le x_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2+z^2=\frac{9}{16}x^2 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

التمرين الثالث:

في كل حالة من الحالات الآتية , صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي إحداثياتها تحقق العلاقات الآتية:

الطلب الأول:

$$\begin{cases} y^2+z^2=16 \\ 3\le x\le 7 \end{cases}$$

الحل:

معادلة اسطوانة محورها $(O,\vec{i})$ ونصف قطرها $r=4$

ومركزي قاعدتيها $A(3,0,0)$ و $B(7,0,0)$

الطلب الثاني:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{9}{25}z^2 \\ 0\le z\le 5 \end{cases}$$

الحل:

تمثل مخروط محوره $(O,\vec{k})$ ورأسه المبدأ O ومركز قاعدته $(0,0,5)$ ونصف قطرها $r=3$

التمرين الرابع:

لدينا معادلة الاسطوانة $\begin{cases} x^2+z^2=9 \\ 1\le y\le 5 \end{cases}$

ولدينا النقاط $A(3,2,0)$ و $B(3,9,0)$ و $C(\sqrt{3},2,1)$ هل النقاط A و B و C تقع على الاسطوانة؟

الحل:

اختبار النقطة A :

$$(3)^2+(0)^2=9\to 9=9$$
$$1\le 2\le 5$$

محققة إذاً النقطة A تقع على الاسطوانة.

اختبار النقطة B :

$$(3)^2+(0)^2=9\to 9=9$$
$$1\le 9\le 5$$

غير محققة إذاً النقطة B لا تقع على الاسطوانة.

اختبار النقطة C :

$$\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2=9\to 4\ne 9$$

غير محققة إذاً النقطة C لا تقع على الاسطوانة.

التمرين الخامس:

لدينا معادلة المخروط $\begin{cases} x^2+y^2=3z^2 \\ 0\le z\le 1 \end{cases}$ ولدينا النقاط $A(0,\sqrt{3},1)$ و $B(1,2,3)$ و $C(-1,1,2)$ هل النقاط A و B و C تقع على الاسطوانة؟

الحل:

اختبار النقطة A :

$$(0)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=3(1)^2\to 3=3$$
$$0\le 1\le 1$$

محققة إذاً النقطة A تقع على المخروط.

اختبار النقطة B :

$$(1)^2+(1)^2=3(3)^2\to 2=27$$

غير محققة إذاً النقطة B لا تقع على المخروط.

اختبار النقطة C :

$$(-1)^2+(1)^2=3(2)^2\to 2=12$$

غير محققة إذا النقطة C لا تقع على المخروط

ثق بالوصول ما دمت تكافح 😌🏆💙

الأوضاع النسبية:

الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:

نص السّؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P وQ متوازيان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P وQ متقاطعان	نثبت أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطان خطّيّاً
أثبت أنّ P وQ متعامدان	نثبت أنّ: $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=0$
أثبت أنّ P وQ منطبقان	نثبت أنّ معادلتي P و Q متكافئتان أيّ: إحدى المعادلتين تنتج عن الاخرى بضربها بعدد حقيقي
في حال تقاطع P و Q ما هو تقاطعهما؟	تقاطعهما هو فصل مشترك (مستقيم)
اكتب التمثيل الوسيطي للفصل المشترك لـ P وQ	الحالة الرّابعة من حالات كتابة التّمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ

التمرين الأول:

في الحالات الآتية ادرس الوضع النسبي للمستويان P و Q .

الطلب الأول:

$$\begin{cases} P: x-4y+7=0 \\ Q: x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمهُ $\overrightarrow{n_P}(1,-4,0)$

المستوي Q ناظمهُ $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

أهلاً بالصِّعاب ..

ما دامَتِ النِّهاية ستكونُ مُثمِرَة 🌸💙

الطلب الثاني:

$$\begin{cases} P: x-2y+3z-1=0 \\ Q: 2x-4y+6z=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمة $\overrightarrow{n_P}(1,-2,3)$

المستوي Q ناظمة $\overrightarrow{n_Q}(2,-4,6)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متوازيان.

الطلب الثالث:

$$\begin{cases} P: x+2y+4z-5=0 \\ Q: 2x+y-z+1=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمة $\overrightarrow{n_P}(1,2,4)$

المستوي Q ناظمة $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

التمرين الثاني:

تتأمل المستويان: $\begin{cases} P: 2x+y-z+2=0 \\ Q: x+2y-z+1=0 \end{cases}$

الطلب الأول:

أثبت أنّ P و Q متقاطعان

الحل:

المستوي P ناظمة $\overrightarrow{n_P}(2,1,-1)$

المستوي Q ناظمة $\overrightarrow{n_Q}(1,2,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_P}$ و $\overrightarrow{n_Q}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

الطلب الثاني:

جد تمثيل وسيطي لـ d الفصل المشترك للمستويان P و Q .

الحل:

$$\begin{cases} P: 2x+y-z+2=0 \\ Q: x+2y-z+1=0 \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (-2) وفق:

$$\begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ -2x-4y+2z-2=0 \end{cases}$$

بجمع (1) و $(2)'$ نجد أنّ:

$$-3y+z=0 \to z=3y$$

نعوض في (2) :

$$x+2y-3y+1=0 \to x=y-1$$

لتكن $y=t$ ومنهُ يكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويان P و Q وفق:

$$d: \begin{cases} x=t-1 \\ y=t \\ z=3t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثالث:

بيّن في كل من الحالات الآتية

إذا كان المستويان P و Q متعامدان

الطلب الأول:

$$\begin{cases} P: x+2y-5z+7=0 \\ Q: x+2y+z-3=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمة $\overrightarrow{n_P}(1,2,-5)$

المستوي Q ناظمة $\overrightarrow{n_Q}(1,2,1)$

لدينا:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=(1)(1)+2(2)+(-5)(1)$$
$$=1+4-5=0$$

ومنه المستويان P و Q متعامدان

الطلب الثاني:

$$\begin{cases} P: x-3y+2=0 \\ Q: y-2z+3=0 \end{cases}$$

الحل:

المستوي P ناظمة $\overrightarrow{n_P}(1,-3,0)$

المستوي Q ناظمة $\overrightarrow{n_Q}(0,1,-2)$

لدينا:

$$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=(1)(0)+(-3)(1)+(0)(-2)$$
$$-3\neq 0$$

ومنه المستويان P و Q غير متعامدان

لم تكن تجارُب فاشلة لولا ما مضى ؛ ما كنتُ هُنا !
تِلك الطّرُق التي وقفتُ في مُنتصفها وذاك التّردد الحائِر ؛ علّمني صِناعة البَوصلة !
الذّكريـات التي ألمِسها الآن بِسعادةٍ بعد أن نجوت..
الخُذلان الذي أوقَـد في داخلي قُوة التّخلي..
الزّهور التي قَطفتها بعد أن تجذّرتْ في عُـمري حقائق الفَهم ؛ لا أوهامُ الخَـيال الأصوات التي عاتبتني ؛ أو رُبما آذَتني بها تجاوزتُ عجزي !
اليوم أرخيتُ قَبضة يدي ، ولم أعُـد أتشبّثُ بشيءٍ ؛ سوى سَـلام روحي الذي قاتلتُ لأجلِه طويلاً !
اليوم أنـا هُنا ولديّ القُدرة أن أبتسمَ لكلّ الأيام الثّقيلة فقد مَنحتني انتصاراتٍ عَديدة مَنحتني ما أنا عليه هُنا !
لِلّهِ الحَـمد على يَـده التي ساقَتني في كُـل تلك الطّرُق و اليوم أدركتُ تماماً ؛ أنّـها يَـدٌ رَحيمة !

الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متوازيان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّياً * d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 منطبقان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ مرتبطان خطّياً * d_1 و d_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط
أثبت أنّ d_1 و d_2 متخالفان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّياً * d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة
أثبت أنّ d_1 و d_2 متقاطعان	نثبت أنّ: * $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطّياً * d_1 و d_2 يشتركان بنقطة
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع d_1 و d_2	بالحلّ المشترك لجملة التمثيلات الوسيطيّة لـ d_1 و d_2
أثبت أنّ d_1 و d_2 متعامدان	نثبت أنّ: $\vec{u}_1.\vec{u}_2 = 0$
هل d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟	ندرس الوضع النسبي لـ d_1 و d_2 ونميّز الحالات: حالة ①: d_1 و d_2 متخالفان إذاً d_1 و d_2 لا يقعان في مستوٍ واحد حالة ②: باقي الحالات إذاً d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد.

التمرين الأول:

ادرس الوضع النسبي للمستقيمان d_1 و d_2 في كل من الحالات:

الحالة الأولى:

$$d_1:\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4t \\ z = -t+1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$d_2:\begin{cases} x = -9t+4 \\ y = -12t+4 \\ z = 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(3,4,-1)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(-9,-12,3)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 4t \\ z = -t+1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = -9s+4 \\ y = -12s+4 \\ z = 3s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

فيكون:

$$\begin{cases} 3t+1 = -9s+4 \;...(1) \\ 4t = -12s+4 \;...(2) \\ -t+1 = 3s \;...(3) \end{cases}$$

والجملة السابقة هي جملة ثلاثة معادلات بمجهولين t و s لذلك نختار جملة معادلتين مجهولين ولتكن:

$$\begin{cases} 3t+1 = -9s+4 \;...(1) \\ -t+1 = 3s \;...(3) \end{cases}$$

وهذه جملة معادلتين بمجهولين (s و t) نحلها إما حذف بالجمع أو الحذف بالتعويض وفق:

نضرب المعادلة (3) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases} 3t+1 = -9s+4 \;...(1) \\ -3t+3 = 9s \;...(3)' \end{cases}$$

بجمع (1) و $(3)'$ نجد أنّ:

$$4 = 4$$

محققة.

وهذه الجملة لها عدد غير منته من الحلول أي يوجد للمعادلة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط ومنهُ d_1 و d_2 منطبقان.

الحالة الثانية:

$$d_1:\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t-1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$d_2:\begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \\ z = 2t-1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,-1,2)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(1,-1,2)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t \\ y = -t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -s + 1 \,; s \in \mathbb{R} \\ z = 2s - 1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t = s & \ldots(1) \\ -t = -s + 1 & \ldots(2) \\ 2t - 1 = 2s - 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاث معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t = s & \ldots(1) \\ -t = -s + 1 & \ldots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$0 \neq 1 \rightarrow$ غير محققة

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنهُ المستقيمان d_1 و d_2 متوازيان.

الحالة الثالثة:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = t \\ y = -3t - 3 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,-3,-3)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(1,-3,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = s \\ y = -3s - 3 \,; s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t + 1 = s & \ldots(1) \\ -3t + 2 = -3s - 3 & \ldots(2) \\ -3t + 3 = -s + 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاث معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t + 1 = s & \ldots(1) \\ -3t + 2 = -3s - 3 & \ldots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases} 3t + 3 = 3s & \ldots(1)' \\ -3t + 2 = -3s - 3 & \ldots(2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$5 \neq -3 \rightarrow$ غير محققة

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنهُ المستقيمان d_1 و d_2 متخالفان.

الحالة الرابعة:

الطلب الأول:

ادرس الوضع النسبي بين d_1 و d_2:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_1}(1,2,-1)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_2}(3,-1,-1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{u_1}$ و $\overrightarrow{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \,; s \in \mathbb{R} \\ z = -s + 1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} t + 1 = 3s + 2 & \ldots(1) \\ 2t - 3 = -s - 1 & \ldots(2) \\ -t + 2 = -s + 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاث معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} t + 1 = 3s + 2 & \ldots(1) \\ -t + 2 = -s + 1 & \ldots(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نجد أنّ:

$$3 = 2s + 3 \rightarrow 2s = 0 \rightarrow s = 0$$

نعوض في (1) وفق:

$$t+1=0+2 \to t=1$$

نتحقق في المعادلة المتبقية (2) وفق:

$$2(1)-3=0-1$$

$$-1=-1 \to \text{محققة}$$

إذاً يوجد للجملة السابقة حل هو $t=1$ و $s=0$ وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 يشتركان بنقطة وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 متقاطعان.

الطلب الثاني:

أوجد إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2:

الحل:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 فإننا نعوض قيمة $(t=1)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1 وفق:

$$x=t+1 \to x=2$$

$$y=2t-3 \to y=-1$$

$$z=-t+2 \to z=1$$

ومنه: $I(2,-1,1)$

ملاحظة:

من الممكن أيضاً إيجاد احداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيمان d_1 و d_2 وذلك بتعويض قيمة $(s=0)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d_2

التمرين الثاني:

لدينا d المستقيم المار من النقطة $A(2,0,5)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$ والمستقيم d' المار من النقطة $B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$ وهل المستقيمان d و d' متقاطعان؟ وفي حالة الإيجاب عين نقطة تقاطعهما.

الحل:

الجزء الأول من السؤال: إثبات التقاطع:

لدينا المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(2,5,-1)$

لدينا المستقيم d' شعاع توجيهه $\vec{v}(1,2,1)$

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d و d' إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=2t+2 \\ y=5t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-t+5 \end{cases}$$

لدينا المستقيم d' تمثيله الوسيطي:

$$d':\begin{cases} x=s+2 \\ y=2s+2\,;s\in\mathbb{R} \\ z=s-1 \end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases} 2t+2=s+2 \dots (1) \\ 5t=2s+2 \quad \dots (2) \\ -t+5=s-1 \dots (3) \end{cases}$$

وهذه جملة ثلاث معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases} 2t+2=s+2 \dots (1) \\ -t+5=s-1 \dots (3) \end{cases}$$

نضرب (3) بالعدد (2) نجد أنّ:

$$\begin{cases} 2t+2=s+2 \quad \dots (1) \\ -2t+10=2s-2 \ \dots (3)' \end{cases}$$

بجمع (1) و $(3)'$ لنجد أنّ:

$$12=3s \to s=4$$

نعوض في (3) وفق:

$$-t+5=4-1 \to t=2$$

نتحقق في المعادلة المتبقية (2) وفق:

$$5(2)=2(4)+2$$

$$10=10 \to \text{محققة}$$

إذاً يوجد للجملة السابقة حل هو $t=2$ و $s=4$ وبالتالي المستقيمان d و d' يشتركان بنقطة وبالتالي المستقيمان d و d' متقاطعان.

الجزء الثاني من السؤال: إيجاد نقطة التقاطع:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان d و d' فإننا نعوض قيمة $(s=4)$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d' وفق:

$$x=s+2 \to x=6$$

$$y=2s+2 \to y=10$$

$$z=s-1 \to z=3$$

ومنه: $I=(6,10,3)$

التمرين الثالث:

أعط تمثيلاً وسيطياً لـ d' وبيّن إذا كان d يوازي d' أو كان d منطبقاً على d' حيث:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=-t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=2t-1 \end{cases}$$

$$d':\begin{cases} 3x-y-2z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

الحل:

التمثيل الوسيطي للمستقيم d':

$$\begin{cases} 3x-y-2z=1 \dots (1) \\ x-y-z=0 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ (-1) وفق:

$$\begin{cases} -3x+y+2z=-1 \dots (1)' \\ x-y-z=0 \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$-2x+z=-1$$

$$z=2x-1$$

نعوض في (1) وفق:

$$3x-y-4x+2=1$$
$$-x-y=-1$$
$$y=-x+1$$

بفرض $x=t$ فتكون:

$$d':\begin{cases}x=t\\ y=-t+1\,;t\in\mathbb{R}\\ z=2t-1\end{cases}$$

إثبات توازي أو انطباق المستقيمان d و d':

لدينا المستقيم d : شعاع توجيهه $\vec{u}(1,-1,2)$

ولدينا المستقيم d' : شعاع توجيهه $\vec{v}(1,-1,2)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً ومنهُ المستقيمان d و d' إما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=-t\quad;t\in\mathbb{R}\\ z=2t-1\end{cases}$$

لدينا المستقيم d' تمثيله الوسيطي:

$$d':\begin{cases}x=s\\ y=-s+1\,;s\in\mathbb{R}\\ z=2s-1\end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases}t=s\,...(1)\\ -t=-s+1\,...(2)\\ 2t-1=2s-1\,...(3)\end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases}t=s\,...(1)\\ -t=-s+1\,...(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$0\neq 1\rightarrow$ غير محققة

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d و d' لا يشتركان بأيّة نقطة , إذاً المستقيمان d و d' متوازيان.

التمرين الرابع: دورة 2017 الثانية:

ليكن لدينا المستقيمان d_1 و d_2 حيث:

$$d_1:\begin{cases}x=t+1\\ y=-3t+2\,;t\in\mathbb{R}\\ z=-3t+3\end{cases}$$

$$d_2:\begin{cases}x=s\\ y=-3s+3\,;s\in\mathbb{R}\\ z=-s+1\end{cases}$$

الطلب الأول:

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمان d_1 و d_2

الحل:

لدينا المستقيم d_1 شعاع توجيهه $\vec{u_1}(1,-3,-3)$

لدينا المستقيم d_2 شعاع توجيهه $\vec{u_2}(1,-3,-1)$

الطلب الثاني:

هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستو واحد علل إجابتك.

الحل:

نلاحظ أنّ $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

لدينا المستقيم d_1 تمثيله الوسيطي:

$$d_1:\begin{cases}x=t+1\\ y=-3t+2\,;t\in\mathbb{R}\\ z=-3t+3\end{cases}$$

لدينا المستقيم d_2 تمثيله الوسيطي:

$$d_2:\begin{cases}x=s\\ y=-3s+3\,;s\in\mathbb{R}\\ z=-s+1\end{cases}$$

فيكون:

$$\begin{cases}t+1=s\quad ...(1)\\ -3t+2=-3s+3\,...(2)\\ -3t+3=-s+1\quad ...(3)\end{cases}$$

وهذه جملة ثلاثة معادلات بمجهولين نأخذ منها:

$$\begin{cases}t+1=s\quad ...(1)\\ -3t+2=-3s+3\,...(2)\end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (3) وفق:

$$\begin{cases}3t+3=3s\quad ...(1)'\\ -3t+2=-3s+3\,...(2)\end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$5\neq 3\rightarrow$ غير محققة

إذاً ليس للجملة السابقة حل وبالتالي المستقيمان d_1 و d_2 لا يشتركان بأيّة نقطة ومنهُ المستقيمان d_1 و d_2 متخالفان وبالتالي d_1 و d_2 لا يقعان في مستو واحد لأنهما متخالفان.

التمرين الخامس: دورة 2019 الأولى:

لدينا النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ والمطلوب:

الطلب الأول:

اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل $\vec{u}(2,2,1)$.

الحل:

$$d:\begin{cases}x=2t+1\\ y=2t\qquad ;t\in\mathbb{R}\\ z=t+1\end{cases}$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ المستقيمان (AB) و d متعامدان.

الحل:

المستقيم (AB) شعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(2,2,1)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-2+2+0=0$$

إذاً المستقيمان d و (AB) متعامدان.

دراسة الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:

نص السؤال	طريقة الإجابة
أثبت أنّ P و d متوازيان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u}=0$
أثبت أنّ P و d متقاطعان	نثبت أنّ: $\vec{n}.\vec{u}\neq 0$
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ معلوم	نثبت أنّ $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطيّاً
أثبت أنّ P و d متعامدان بحيث $\vec{n}$ غير معلوم	نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيّاً من المستوي
أوجد إحداثيّات نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P	بالحلّ المشترك لجملة معادلات المستوي ومعادلات المستقيم نحصل على نقطة التقاطع
هل المستقيم d محتوى في المستوي P ؟	بالحلّ المشترك لجملة المعادلات الأربعة نلاحظ أنّ المستقيم والمستوي يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم محتوى في المستوي

التمرين الأول:

نتأمل النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي:

$$P: 2x-y+z-2=0$$

الطلب الأول:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

الحل:

النقطة: $A(2,1,-2)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ ومنهُ: $\vec{u}(-3,1,3)$

$$(AB):\begin{cases} x=-3t+2 \\ y=t+1 \\ z=3t-2 \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$$

الطلب الثاني:

تيقّن أنّ (AB) يقطع المستوي P :

الحل:

المستقيم (AB) شعاع توجيه $\vec{u}(-3,1,3)$ والمستوي P ناظمه: $\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$ ومنهُ.

$$\overrightarrow{n_P}.\vec{u}=-6-1+3=-4\neq 0$$

إذاً المستقيم d والمستوي P متقاطعان.

الطلب الثالث:

حدد إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي P

الحل:

لتكن الجملة:

$$\begin{cases} 2x-y+z-2=0 \dots (1) \\ x=-3t+2 \dots (2) \\ y=t+1 \quad \dots (3) \\ z=3t-2 \quad \dots (4) \end{cases}$$

لحل هذه الجملة "دوماً": نعوض (2) و (3) و (4) في (1)

$$2(-3t+2)-(t+1)+(3t-2)-2=0$$

$$-6t+4-t-1+3t-2-2=0$$

$$-4t-1=0\rightarrow t=-\frac{1}{4}$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$(2): x=-3\left(-\frac{1}{4}\right)+2\rightarrow x=\frac{11}{4}$$

$$(3): y=\left(-\frac{1}{4}\right)+1\rightarrow y=\frac{3}{4}$$

$$(4): z=3\left(-\frac{1}{4}\right)-2\rightarrow x=-\frac{11}{4}$$

ومنهُ نقطة التقاطع هي:

$$I\left(\frac{11}{4},\frac{3}{4},-\frac{11}{4}\right)$$

ملاحظة:

انتبه هنا لا نضرب بالعدد (4) لأنها نقطة.

التمرين الثاني:

نتأمل النقطتان $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$ ولدينا مستوي P يقبل: $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجهين لهُ والمطلوب: أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P .

الحل:

هنا لا نعلم ناظم المستوي P لذلك لإثبات أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P يكفي إثبات أنّ $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي P :

نلاحظ أنّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً من (P)

نعلم أنّ شعاع توجيه المستقيم (AB) هو

$$\overrightarrow{AB}(-3,-5,-4)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{u}=-3-5+8=0$$

إذاً: $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\vec{u}$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-9+5+4=0$$

إذاً: $\overrightarrow{AB}$ عمودي على $\vec{v}$

بما أن $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من P فهذا يعني أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي P

التمرين الثالث:

ليكن المستقيم d المعطى وفق:

$$d:\begin{cases} x=1 \\ y=t \;;t\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$$

والمستوي P الذي معادلتهُ: $P: x+2z+1=0$

أثبت أنّ d محتوى في المستوي P .

الحل:

المستقيم d شعاع توجيهه $\vec{u}(0,1,0)$

والمستوي P ناظمه $\vec{n}(1,0,2)$

وبما أنّ:

$$\vec{u}.\vec{n} = 0 + 0 + 0 = 0$$

إذاً المستقيم d والمستوي P متوازيان.

اختبار الاحتواء:

$$\begin{cases} x + 2z + 1 = 0 \ldots (1) \\ x = 1 \quad \ldots (2) \\ y = t \quad \ldots (3) \\ z = -1 \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$1 - 2 + 1 = 0$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{محققة}$$

ومنهُ للجملة عدد لا نهائي من الحلول أي المستقيم d والمستوي P يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم d محتوى في المستوي P

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المستويات P و Q و R معادلاتها:

$$P: x + 2y - 2z - 3 = 0$$

$$Q: 2x + y - z - 3 = 0$$

$$R: x - y + z = 0$$

أثبت أنّ المستويات Q و R يتقاطعان بمستقيم فصل مشترك d ثم أثبت أنّ d محتوى في المستوي P .

الحل:

إثبات أنّ Q و R يتقاطعان بمستقيم d :

المستوي Q ناظمه: $\overrightarrow{n_Q}(2,1,-1)$

المستوي R ناظمه: $\overrightarrow{n_R}(1,-1,1)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_Q}$ و $\overrightarrow{n_R}$ غير مرتبطين خطياً

إذاً المستويان Q و R متقاطعان.

إيجاد المستقيم d وفق:

$$\begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0 \ldots (1) \\ x - y + z = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3x - 3 = 0 \rightarrow x = 1$$

نعوض في (1) لنجد أنّ

$$2 + y - z - 3 = 0 \rightarrow y = z + 1$$

لتكن $z = t$ ومنهُ يكون التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويان Q و R وفق:

$$(d): \begin{cases} x = 1 \\ y = t + 1 \,; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

إثبات أنّ d محتوى في المستوي P :

المستقيم d شعاع توجيهه $\overrightarrow{u_d}(0,1,1)$

المستوي P ناظمهُ: $\overrightarrow{n_P}(1,2,-2)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_p} = 0 + 2 - 2 = 0$$

إذاً المستوي P والمستقيم d متوازيان.

اختبار الاحتواء:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 3 = 0 \ldots (1) \\ x = 1 \quad \ldots (2) \\ y = t + 1 \quad \ldots (3) \\ z = t \quad \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$1 + 2t + 2 - 2t - 3 = 0$$

$$0 = 0 \rightarrow \text{محققة}$$

ومنهُ للجملة عدد لا نهائي من الحلول أي المستقيم d والمستوي P يشتركان بعدد لا نهائي من النقاط إذاً المستقيم d محتوى في المستوي P

تتلاشى المستحيلات ..
عندما نخطو أول خطوة 😌💙

دراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ:

- نصّ السؤال: ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R .
- فكرة الحلّ:

الخطوة الأولى: باستخدام طريقة غاوس نحلّ جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل (معادلات P و Q و R).

الخطوة الثانية:

نميّز الحالات:

① الحالة الأولى: إذا كانت الجملة مستحيلة الحلّ: فهذا يعني أنّ المستويات P و Q و R لا تشترك بأيّة نقطة.

② الحالة الثّانية: إذا كان للجملة حلّ وحيد: فهذا يعني أنّ المستويات P و Q و R تشترك بنقطة وحيدة وإحداثيّات هذه النقطة هي حلّ الجملة

③ الحالة الثّالثة: إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول: فهذا يعني أنّ المستويات P و Q و R تشترك بعدد لا نهائي من النقاط وبالتالي المستويات تشترك بمستقيم d (فصل مشترك)

ملاحظة:

إذا كان للجملة عدد لا نهائي من الحلول وطُلب منّا إيجاد التمثيل الوسيطي للمستويات فإننا نأخذ المعادلتين L_1 و L'_2 ونتابع كما في الحالة الرّابعة من حالات التمثيل الوسيطي لمستقيم في الفراغ.

التمرين الأول:

ادرس الوضع النسبي للمستويات في كل من الحالات:

الحالة الأولى:

$$\begin{cases} P_1: 5x + y + z = -5 \\ P_2: 2x + 13y - 7z = -1 \\ P_3: x - y + z = 1 \end{cases}$$

الحل:

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & \dots (L_1) \\ 2x + 13y - 7z = -1 & \dots (L_2) \\ 5x + y + z = -5 & \dots (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2L_1 + L_2 \to (L_2)'$$
$$-5L_1 + L_3 \to (L_3)'$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & \dots (L_1) \\ 15y - 9z = -3 & \dots (L_2)' \\ 6y - 4z = -10 & \dots (L_3)' \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-\frac{6}{15}L_2' + L_3' \to (L_3)''$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & \dots (L_1) \\ 15y - 9z = -3 & \dots (L_2)' \\ -\frac{2}{5}z = -\frac{44}{5} & \dots (L_3)'' \end{cases}$$

ومنهُ:

من $(L_3)''$ نجد أنّ $z = 22$

نعوض في $(L_2)'$ نجد:

$$15y - 9(22) = -3$$
$$15y = -3 + 198$$
$$15y = 195$$
$$y = 13$$

نعوض في (L_1) نجد أنّ:

$$x - 13 + 22 = 1 \to x = -8$$

ومنهُ للجملة حل وحيد

$$x = -8 \quad , \quad y = 13 \quad , \quad z = 22$$

إذاً المستويات P_1 و P_2 و P_3

تشترك بنقطة واحدة هي: $I(-8,13,22)$

الحالة الثانية:

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 0 \\ P_2: x + 2y + z = 0 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

الحل:

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (L_1) \\ 2x - y + 3z = 0 & \dots (L_2) \\ 3x - 4y + 5z = 0 & \dots (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2L_1 + L_2 \to (L_2)'$$
$$-3L_1 + L_3 \to (L_3)'$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ -10y + 2z = 0 & \dots (L_3)' \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-2L_2' + L_3' \to (L_3)''$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ 0 = 0 & \dots (L_3)'' \end{cases}$$

إذاً للجملة عدد لا نهائي من الحلول وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 تشترك بفصل مشترك d

إيجاد التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & \dots (1) \\ -5y + z = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$z = 5y \dots (*)$$

نعوض في (1) فنجد أنّ:

$$x = -7y \dots (**)$$

بفرض $y = t$ نجد أنّ:

نعوض في $(*)$ و $(**)$:

$$x = -7t \quad , \quad z = 5t$$

ومنهُ:

$$d: \begin{cases} x = -7t \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t \end{cases}$$

الحالة الثالثة:

$$\begin{cases} P_1: 2x - y + 3z = 2 \\ P_2: x + 2y + z = 1 \\ P_3: 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

الحل:

باستخدام طريقة غاوس نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \dots (L_1) \\ 2x - y + 3z = 2 & \dots (L_2) \\ 3x - 4y + 5z = 4 & \dots (L_3) \end{cases}$$

المرحلة الأولى:

$$-2L_1 + L_2 \to (L_2)'$$
$$-3L_1 + L_3 \to (L_3)'$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 & \dots (L_2)' \\ -10y + 2z = 1 & \dots (L_3)' \end{cases}$$

المرحلة الثانية:

$$-2L_2' + L_3' \to (L_3)''$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \ \dots (L_1) \\ -5y + z = 0 \ \dots (L_2)' \\ 0 = 1 \qquad \dots (L_3)'' \end{cases}$$

ومنهُ:

إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستويات P_1 و P_2 و P_3 لا يشتركان بأيّة نقطة.

ملاحظة:

نصّ السؤال: لدينا ثلاث مستويات P و Q و R والمطلوب:

1. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك لـP و Q (تمّ مناقشة الفكرة سابقاً)
2. أثبت أنّ المستقيم d والمستوي R متقاطعان (تمّ مناقشة الفكرة سابقاً)
3. استنتج نقطة تقاطع المستويات P و Q و R، في هذه الحالة نقطة تقاطع المستويات P و Q و R هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي R

التمرين الثاني:

تتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستويان:

$$P: 2x - y + 3z = 9$$
$$Q: 3x - 2y + 4z = 11$$
$$(ABC): x - 3y + 2z - 1 = 0$$

1. أثبت أنّ المستويان P و Q متقاطعين وجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d.
2. أوجد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).

الحل:

الطلب الأول:

لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,3)$

لدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(3,-2,4)$

نلاحظ أنّ $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات ومنه المستويان P و Q متقاطعان، لتحديد الفصل المشترك d:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \dots \dots (1) \\ 3x - 2y + 4z = 11 \dots \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (-2):

$$\begin{cases} -4x + 2y - 6z = -18 \dots \dots (1)' \\ 3x - 2y + 4z = 11 \dots \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2):

$$-x - 2z = -7$$
$$x = -2z + 7$$

نعوض x في (2) نجد:

$$3(-2z + 7) - 2y + 4z = 11$$
$$-6z + 21 - 2y + 4z = 11$$
$$-2z - 2y = 11 - 21$$
$$2y = -2z + 10$$
$$y = -z + 5$$

بفرض $z = t$ نعوض في y و x:

$$x = -2t + 7$$
$$y = -t + 5$$

ومنه:

$$d: \begin{cases} x = -2t + 7 \\ y = -t + 5 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

الطلب الثاني:

من الطلب السابق أوجدنا أن المستويان P و Q يتقاطعان في الفصل المشترك d ولتحديد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) فإننا نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وبالتالي تكون نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC).

الخطوة الأولى:

دراسة الوضع النسبي بين المستقيم d والمستوي (ABC):

لدينا المستقيم d شعاع توجيهه: $\vec{u}_d(-2,-1,1)$

لدينا المستوي (ABC) ناظمه: $\vec{n}_{ABC}(1,-3,2)$

ولدينا:

$$\vec{n}_{ABC}.\vec{u}_d = -2 + 3 + 2 = 3 \neq 0$$

ومنه المستقيم d والمستوي (ABC) متقاطعان.

الخطوة الثانية:

إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC):

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z - 1 = 0 \dots (1) \\ x = -2t + 7 \dots (2) \\ y = -t + 5 \quad \dots (3) \\ z = t \qquad \dots (4) \end{cases}$$

نعوض كلاً من $(2),(3),(4)$ في (1):

$$-2t + 7 - 3(-t + 5) + 2t - 1 = 0$$
$$-2t + 7 + 3t - 15 + 2t - 1 = 0$$
$$3t - 9 = 0$$
$$3t = 9 \to t = 3$$

نعوض قيمة t في $(2),(3),(4)$:

$$x = -2(3) + 7 \Rightarrow x = 1$$
$$y = -(3) + 5 \Rightarrow y = 2$$
$$z = 3$$

ومنه إحداثيات I نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) هي: $I(1,2,3)$

الخطوة الثالثة:

نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وهي: $I(1,2,3)$

التنويه:

- في حال عدم تدريج الطلبات فهذا يعني استخدام طريقة غاوس
- في حال كان السؤال حل الجمل الخطيّة الموفقة فهذا يعني استخدام غاوس.

الوضع النسبي لمستوي وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستوي وكرة	ليكن لدينا المستوي P والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستوي P مماس للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستوي P خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النسبي للمستوي P والكرة S.	⁕ نحدّد R نصف قطر الكرة وΩ مركزها. ⁕ نوجد بُعد مركز الكرة عن المستوي P، أي نوجد $dist(\Omega,P)$ ونميّز: ▪ $dist(\Omega,P)>R$: فإنّ المستوي P خارج الكرة S. ▪ $dist(\Omega,P)=R$: فإنّ المستوي P مماس للكرة S. ▪ $dist(\Omega,P)<R$: فإنّ المستوي P قاطع للكرة S.
تحديد نقطة تماس المستوي P والكرة S	ليكن لدينا المستوي P والكرة S أوجد إحداثيات نقطة تماس P و S	تكون نقطة التماس هي المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي P

تمرين:

ادرس الوضع النسبي بين المستوي $P: x+y-z+6=0$ والكرة التي مركزها $\omega(-1,-2,6)$ ونصف قطرها $R=4$

الحل:

$$dist(\omega,P)=\frac{|-1-2-6+6|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

بما أنّ:

$$dist(\omega,P)<R$$

فإنّ المستوي P قاطع للكرة S .

الوضع النسبي لمستقيم وكرة:

الفكرة	نص السؤال	طريقة الإجابة
الوضع النسبي لمستقيم وكرة	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S مركزها Ω، ونصف قطرها R، والمطلوب: إمّا: أثبت أنّ المستقيم d مماس للكرة S. أو: أثبت أنّ المستقيم d قاطع للكرة S. أو: أثبت أنّ المستقيم d خارج للكرة S. أو: ادرس الوضع النسبي للمستقيم d والكرة S.	⁕ نعوّض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة الكرة فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية ⁕ نحل هذه المعادلة ونميز: ▪ للمعادلة حلّان، فالمستقيم قاطع للكرة في نقطتين. ▪ للمعادلة حلّ وحيد، فالمستقيم مماس للكرة في نقطة. ▪ المعادلة مستحيلة الحلّ، فالمستقيم خارج الكرة.
تحديد النقطة المشتركة للمستقيم d والكرة s	ليكن لدينا المستقيم d والكرة S، عيّن إحداثيّات النقاط المشتركة.	نعوّض قيم الحلول في التمثيل الوسيطي فنحصل على المطلوب

تمرين:

ليكن لدينا المستقيم:

$$(d):\begin{cases} x=6-3t \\ y=-4+4t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=-5+t \end{cases}$$

ولنتأمل معادلة الكرة:

$$S:(x+1)^2+(y+3)^2+(z+4)^2=25$$

الطلب الأول:

هل المستقيم d مماس للكرة S ؟

الحل:

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة الكرة S وفق:

$$(7-3t)^2+(-1+4t)^2+(-1+t)^2=25$$

$$26t^2-52t+26=0$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$t-1=0\rightarrow t=1$$

إذاً للمعادلة حل وحيد ومنهُ المستقيم d مماس للكرة S في نقطة واحدة.

الطلب الثاني:

وفي حال المماس حدد إحداثيات نقطة التماس

الحل:

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم d وفق:

$$x=6-3(1)\rightarrow x=3$$

$$y=-4+4(1)\rightarrow y=0$$

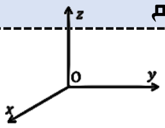
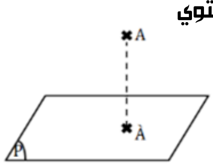
$$z=-5+1\rightarrow z=-4$$

ومنهُ نقطة التقاطع هي:

$$(3,0,-4)$$

المساقط القائمة:

المسقط القائم لنقطة على مستوٍ:

<table>
<tr><th colspan="3">المستوي معلم</th><th>المستوي عشوائي</th></tr>
<tr><td colspan="3">هو المستوي المرسوم على المحاور الإحداثيّة
تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه:
</td><td rowspan="3">لا تعتمد فكرته على الرّسم إنّما تحتاج مهارة
الخطوات:
* نكتب معادلة المستوي P المراد الإسقاط عليه.
* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المارّ من النقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستوي السابق P
* يكون المسقط القائم هو نقطة تقاطع المستقيم والمستوي
</td></tr>
<tr><td>المستوي (OYZ)</td><td>المستوي (OXZ)</td><td>المستوي (OXY)</td></tr>
<tr><td>نحافظ على ترتيب وراقم النقطة ونجعل فاصلة النقطة هو صفر أيّ: $(0,y,z)$</td><td>نحافظ على فاصلة وراقم النقطة ونجعل ترتيب النقطة هو صفر، أيّ: $(x,0,z)$</td><td>نحافظ على فاصلة وترتيب النقطة ونجعل راقم النقطة هو صفر، أيّ: $(x,y,0)$</td></tr>
</table>

تمرين:

في معلم متجانس نتأمل النقاط:

$A(1,2,0)$	$B(0,0,1)$	$C(1,5,5)$

الطلب الأول:

عيّن إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC) .

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب معادلة المستوي (ABC) وفق:

إيجاد $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC) :

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-2,1) \quad , \quad \overrightarrow{AC}(0,3,5)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً ولدينا $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ أيّ:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$$
$$-a-2b+c=0 \ldots (1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$$
$$3b+5c=0 \ldots (2)$$

نأخذ $c=3$ فيكون:

$$\begin{cases} -a-2b+3=0 \ldots (1) \\ 3b+15=0 \quad \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$3b=-15 \to b=-5$$

نعوض في (1) :

$$-a+10+3=0 \to a=13$$

ومنهُ: $\vec{n}(13,-5,3)$

كتابة معادلة المستوي (ABC) حيث:

ناظمهُ: $\vec{n}(13,-5,3)$

نقطة منهُ: $B(0,0,1)$

المعادلة:

$$13(x-0)-5(y-0)+3(z-1)=0$$
$$13x-5y+3z-3=0$$

الخطوة الثانية:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC) وفق:

بما أنّ المستقيم d عمودي على المستوي (ABC) فإنّ شعاع توجيه المستقيم هو ذاته ناظم المستوي أيّ أنّ:

$$\vec{u}=\vec{n} \to \vec{u}(13,-5,3)$$

كتابة التمثيل الوسيطي للمستقيم d حيث:

شعاع توجيهه $\vec{u}(13,-5,3)$

نقطة منهُ: $D(-11,9,-4)$

ومنهُ:

$$d:\begin{cases} x=13t-11 \\ y=-5t+9 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=3t-4 \end{cases}$$

الخطوة الثالثة:

النقطة D' هي نقطة تقاطع المستوي (ABC) والمستقيم (d) وفق:

$$\begin{cases} 13x-5y+3z-3=0 \ldots (1) \\ x=13t-11 \ldots (2) \\ y=-5t+9 \ \ldots (3) \\ z=3t-4 \quad \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$13(13t-11)-5(-5t+9)+3(3t-4)-3=0$$
$$169t-143+25t-45+9t-12-3=0$$
$$203t-203=0$$
$$203t=203$$
$$t=1$$

نعوض قيمة t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=13t-11 \to x=2$$
$$y=-5t+9 \to y=4$$
$$z=3t-4 \to z=-1$$

إذاً: $D'(2,4,-1)$

الطلب الثاني:

احسب DD' :

الحل:

$$\overrightarrow{DD'}(13,-5,3)$$

إذاً:

$$DD' = \left\|\overrightarrow{DD'}\right\| = \sqrt{169+25+9} = \sqrt{203}$$

الطلب الثالث:

احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

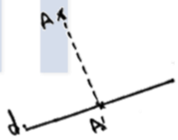
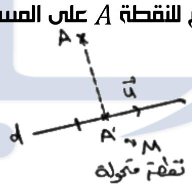
الحل:

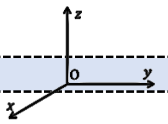
$$dist(A,(ABC)) = \frac{|13(-11)-5(9)+3(-4)-3|}{\sqrt{169+25+9}} = \frac{|-143-45-12-3|}{\sqrt{203}} = \frac{|-203|}{\sqrt{203}} = \frac{203}{\sqrt{203}} = \sqrt{203}$$

ملاحظة:

دائماً وأبداً يكون بعد النقطة A عن المستوي P يساوي المسافة بين A ومسقط A على المستوي P

المسقط القائم لنقطة على مستقيم:

<table>
<tr><th colspan="3">مستقيم عشوائي</th></tr>
<tr><td colspan="3">لا تعتمد فكرته على الرّسم إنّما تحتاج مهارة، لدينا ثلاثة أساليب، حيث نستخدم دائماً الأسلوب الثاني إلّا في حال تدريج الطلّاب نستخدم المناسب</td></tr>
<tr><th>الأسلوب الأول</th><th>الأسلوب الثاني</th><th>الأسلوب الثالث</th></tr>
<tr>
<td>* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه)
* نكتب معادلة المستوي P المارّ من النقطة A (المراد إيجاد مسقطها) والعمودي على المستقيم d
* يكون المسقط القائم هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم d
</td>
<td>* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه)
* نأخذ نقطة A' من المستقيم d (بحيث إحداثيّات A' هي نفسها معادلات المستقيم) يتحقّق: $\vec{u}.\overrightarrow{AA'} = 0$
* بالتعويض نحصل على قيمة الوسيط t نعوّض قيمة t في التمثيلات الوسيطيّة للمستقيم d فنحصل على إحداثيّات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d
</td>
<td>* نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d (المراد الإسقاط عليه)
* نأخذ نقطة A' من المستقيم d (بحيث إحداثيّات A' هي نفسها معادلات المستقيم)
* نوجد $(AA')^2$ بدلالة t (الإتمام إلى مربّع كامل)
* نحدّد قيمة t التي تجعل $(AA')^2$ أصغر ما يمكن
* نعوّض قيمة t في إحداثيّات النقطة A'
* فتكون هي ذاتها إحداثيّات النقطة A' المطلوبة.</td>
</tr>
</table>



<table>
<tr><th colspan="3">مستقيم معلم</th></tr>
<tr><td colspan="3">هو المستقيم المرسوم على أحد المحاور الإحداثيّة تعتمد فكرته على الرّسم، ونميّز فيه:</td></tr>
<tr><th>المحور (OX)</th><th>المحور (OY)</th><th>المحور (OZ)</th></tr>
<tr><td>نحافظ على فاصلة النقطة ونجعل كلّاً من الترتيب والراقم هي أصفار أيّ: $(x,0,0)$</td><td>نحافظ على ترتيب النقطة ونجعل كل من الفاصلة والرّاقم هي أصفار، أيّ: $(0,y,0)$</td><td>نحافظ على راقم النقطة ونجعل كلّاً من الفاصلة والترتيب هي أصفار أيّ: $(0,0,z)$</td></tr>
</table>

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط:

$C(3,4,7)$	$B(1,2,0)$	$A(0,1,-2)$

الطلب الأول:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) :

الحل:

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1,1,2)$

تحديد النقطة: $A(0,1,-2)$

ومنه:

$$(AB): \begin{cases} x = t \\ y = t+1 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-2 \end{cases}$$

الطلب الثاني:

اكتب معادلة المستوي P المار من C والعمودي على المستقيم (AB) :

الحل:

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي P عمودي على المستقيم (AB) فإنّ:

$$\vec{n} = \vec{u}(1,1,2)$$

تحديد النقطة: $C(3,4,7)$

ومنه:

$$P: 1(x-3)+1(y-4)+2(z-7) = 0$$
$$P: x-3+y-4+2z-14 = 0$$
$$P: x+y+2z-21 = 0$$

الطلب الثالث:

استنتج إحداثيات النقطة C' المسقط القائم للنقطة C على المستقيم (AB) :

الحل:

تكون C' هي نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي P :

$$\begin{cases} x+y+2z-21=0 \ldots(1) \\ x=t \quad \ldots(2) \\ y=t+1 \quad \ldots(3) \\ z=2t-2 \ldots(4) \end{cases}$$

نعوض كلاً من (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$t+t+1+2(2t-2)-21=0$$
$$2t+1+4t-4-21=0$$
$$6t-24=0$$
$$6t=24 \rightarrow t=4$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=4$$
$$y=t+1 \rightarrow y=5$$
$$z=2t-2 \rightarrow z=6$$

أيّ: $C'(4,5,6)$

التمرين الثاني:

لتكن لدينا النقاط:

$A(2,3,0)$	$B(2,3,6)$	$M(4,-1,2)$

أوجد إحداثيات النقطة M' المسقط القائم لـ M على المستقيم (AB) .

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) .

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}(0,0,6)$$
$$A(2,3,0)$$

ومنه:

$$(AB):\begin{cases} x=2 \\ y=3\,; t\in\mathbb{R} \\ z=6t \end{cases}$$

الخطوة الثانية:

بما أنّ M' نقطة من المستقيم (AB) إذاً:

$$M'(2,3,6t)$$

تكون M' هي المسقط القائم لـ M على المستقيم (AB) إذا تحقق:

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0 \ldots(*)$$

حيث: $\overrightarrow{MM'}(-2,4,6t-2)$

$$\vec{u}(0,0,6)$$

نعوض في علاقة $(*)$:

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u}=0$$
$$(-2)(0)+(4)(0)+(6t-2)(6)=0$$
$$36t-12=0$$
$$36t=12$$
$$t=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

فتكون إحداثيات M' هي: $M'(2,3,2)$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا المستويان P و Q حيث:

$$\begin{cases} P: 2x-y+z-4=0 \\ Q: x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

الطلب الأول:

أثبت تقاطع المستويان P و Q :

الحل:

المستوي P ناظمة: $\overrightarrow{n_1}(2,-1,1)$

المستوي Q ناظمة: $\overrightarrow{n_2}(1,1,2)$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{n_1}$ و $\overrightarrow{n_2}$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي المستويان P و Q متقاطعان.

الطلب الثاني:

اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الفصل المشترك للمستويان P و Q :

الحل:

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \\ x+y+2z-5=0 \end{cases}$$

نأخذ $z=t$ فيكون:

$$\begin{cases} 2x-y+t-4=0 \ldots(1) \\ x+y+2t-5=0 \ldots(2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3x+3t-9=0$$
$$3x=-3t+9$$
$$x=-t+3$$

نعوض في (2) وفق:

$$-t+3+y+2t-5=0$$
$$y=-t+2$$

إذاً التمثيل الوسيطي للمستقيم d يعطى بالشكل:

$$(d):\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2\,; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

الطلب الثالث:

أوجد إحداثيات A' المسقط القائم للنقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم d :

الحل:

الخطوة الأولى:

التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) :

$$(d):\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2\,; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

شعاع توجيه المستقيم d :

$$\vec{u}(-1,-1,1)$$

نأخذ A' من المستقيم d :

$$A'(-t+3,-t+2,t)$$

الخطوة الثانية:

باعتبار A' هي المسقط القائم لـ A على المستقيم d فيتحقق:

$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'}=0$$

$$\overrightarrow{AA'}(-t,-t+3,t-2)$$

إذاً:

$$t+t-3+t-2=0$$

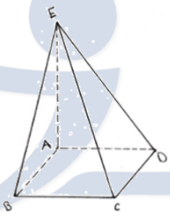
$$3t-5=0 \to t=\frac{5}{3}$$

نعوض قيمة t في إحداثيات النقطة A' وفق:

$$A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

فتكون إحداثيات النقطة A' المسقط القائم لـ A على المستقيم d هي: $A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

التمرين الرابع:



في الشكل المجاور ليكن الهرم $EABCD$

رأسه E فيه: $ABCD$ مربع طول ضلعه 3 و

[EA] عمودي على $ABCD$ حيث: $EA=4$

ليكن المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث:

$$\overrightarrow{AB}=3\vec{i} \text{ و } \overrightarrow{AD}=3\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{AE}=4\vec{k}$$

١. أوجد إحداثيات النقاط رؤوس الهرم

$A(0,0,0)$	$B(3,0,0)$
$D(0,3,0)$	$C(3,3,0)$
$E(0,0,4)$	

٢. أوجد إحداثيات النقطة F التي تحقق العلاقة:

$$3\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CE}$$

لتكن $F(x,y,z)$:

$$3\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CE}$$

$$3\begin{pmatrix}x-3\\y-3\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3x-9\\3y-9\\3z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\4\end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$3x-9=-3 \to x=2$$

$$3y-9=-3 \to y=2$$

$$3z=4 \to z=\frac{4}{3}$$

إذاً: $F\left(2,2,\frac{4}{3}\right)$

٣. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة F على المستوي $(ABCD)$

$$N(2,2,0)$$

٤. أوجد إحداثيات النقطة R المسقط القائم للنقطة N على المستقيم AB

$$R(2,0,0)$$

٥. احسب المسافة FR :

$$\overrightarrow{FR}\left(0,-2,-\frac{4}{3}\right)$$

$$FR=\left\|\overrightarrow{FR}\right\|=\frac{\sqrt{52}}{3}$$

٦. أوجد إحداثيات النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[EC]$

G منتصف القطعة المستقيمة $[EC]$ إذاً:

$$G\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$$

٧. أثبت أن النقاط A و B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها G ثم عين نصف قطر هذه الكرة

الحل:

$$\overrightarrow{GA}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right) \to GA=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GB}\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},-2\right) \to GB=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GC}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right) \to GC=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GD}\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right) \to GD=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GE}\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},2\right) \to GE=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

نلاحظ أنّ:

$$GA=GB=GC=GD=GE$$

إذاً النقاط A و B و C و D و E

تقع على كرة واحدة مركزها G ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{34}}{2}$

٨. هل النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CD]$

$$\overrightarrow{GC}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right) \to GC=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$$\overrightarrow{GD}\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-2\right) \to GD=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

إذاً النقطة G تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[CD]$

حاربوا من أجل الوصول لأحلامكم ..
فالعالم يحتاج الكثير من الشغوفين 💙

بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ (لا يوجد قانون مباشر):

لإيجاد بُعد نقطة A عن مستقيم d في الفراغ فإننا:

- نوجد إحداثيّات النقطة A' (المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d)
- يكون بُعد A عن المستقيم d هو المسافة بين النقطة A ومسقطها A'
- أيّ: بعد النقطة عن المستقيم يعطى بالعلاقة: $dist(\text{المستقيم}\backslash\text{النقطة}) = AA'$

تمرين: لتكن لدينا النقاط:

$A(2,3,0)$	$B(2,3,6)$	$N(4,-1,2)$

أوجد بُعد النقطة N عن المستقيم (AB) :

الحل:

الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) حيث:

شعاع توجيهه: $\overrightarrow{AB}(0,0,6)$

نقطة منه: $A(2,3,0)$

نكتب التمثيل الوسيطي وفق:

$$(AB):\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 6t \end{cases}$$

الخطوة الثانية:

لتكن النقطة $N'(2,3,6t)$ هي المسقط القائم للنقطة N على المستقيم (AB) وبالتالي: $\overrightarrow{NN'}(-2,4,6t-2)$

الخطوة الثالثة:

يكون شعاع توجيه المستقيم $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{NN'}$ متعامدين أيّ:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{NN'} = 0$$

$$0 + 0 + 6(6t - 2) = 0$$

$$36t - 12 = 0$$

$$36t = 12 \to t = \frac{1}{3}$$

إذاً: $N'(2,3,2)$

وبالتالي بعد النقطة N عن المستقيم (AB) هو:

$$dist(N,(AB)) = \left\|\overrightarrow{NN'}\right\|$$

$$= \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

بعد نقطة عن الفصل المشترك لمستويان متعامدان:

إذا كان لدينا مستويان P و Q متعامدان وكان المطلوب هو إيجاد بُعد نقطة A عن المستقيم d الفصل المشترك لـ P و Q فإننا نتبع الخطوات الآتية:

- نوجد بُعد النقطة A عن المستوي الأوّل P ويكون: $\mathrm{dist}(A,P) = m_1$
- نوجد بُعد النقطة A عن المستوي الثّاني Q ويكون: $\mathrm{dist}(A,Q) = m_2$.
- استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث يكون بعد A عن المستقيم d مُعطى وفق: $\mathrm{dist}(A,d) = \sqrt{{m_1}^2 + {m_2}^2}$

تمرين:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,1,2)$

والمستويان P و Q حيث: $P: x + y - 2z - 1 = 0$

و $Q: x + y + z = 0$

1. أثبت أن المستويان P و Q متعامدان

الحل:

لدينا المستوي P ناظمه $\overrightarrow{n_1}(1,1,-2)$

لدينا المستوي Q ناظمةُ $\overrightarrow{n_2}(1,1,1)$

وبما أنّ:

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 1 + 1 - 2 = 0$$

فإنّ المستويان P و Q متعامدان.

2. احسب بعد A عن كل من المستويان P و Q

- حساب بعد A عن Q وفق:

$$dist(A,Q) = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

- حساب بعد A عن P وفق:

$$dist(A,P) = \frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

3. استنتج بعد النقطة A عن الفصل المشترك لـ P و Q :

الحل

لدينا المستقيم d هو الفصل المشترك لـ P و Q ويكون بعد النقطة A عن المستقيم d وفق:

$$dist(A,d) = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{3} + \frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

مجموعات النقاط:

صف مجموعة القاط / ماذا تمثل مجموعة النقاط

نميز الحالات الآتية:

أولاً: يكون المعطى هو علاقة "مساواة" تحوي طويلة "نظيم"

نصلح في هذه العلاقة للوصول إلى

- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ تمثل الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB
- $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

ثانياً: يكون المعطى هو علاقة:

نعوض في هذه العلاقة ونصلح وصولاً إلى معادلة كما سبق.

ثالثاً: يكون المعطى هو علاقة من الشكل:

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

بالإتمام إلى مربعات كاملة نحصل على:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$

- $k < 0$ مجموعة خالية
- $k = 0$ تمثل نقطة (x_0, y_0, z_0)
- $k > 0$ تمثل كرة مركزها (x_0, y_0, z_0) ونصف قطرها $R = \sqrt{k}$

التمرين الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه, G مركز ثقل المثلث (DBC) و M نقطة من الفراغ جد مجموعة النقاط التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\|$$

الحل:

نعلم أنّ:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = (1+1+1)\overrightarrow{MG}$$

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = 3\overrightarrow{MG}$$

لدينا:

$$\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MG})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA})\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{GA}\|$$

$$3\|\overrightarrow{MG}\| = 3\|\overrightarrow{GA}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GA}\|$$

تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها $R = GA$

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ عين طبيعة مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ في الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 2 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل وفق:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 6y + 9 - 9 + z^2 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 - 12 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 12$$

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega(1, -3, 0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{12}$

الحالة الثانية:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2z + 26 = 0$$

$$x^2 - 10x + y^2 + z^2 + 2z + 26 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2 - 10x + 25 - 25 + y^2 + z^2 + 2z + 1 - 1 + 26 = 0$$

$$(x-5)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 0$$

تمثل نقطة وحيدة إحداثياتها $\Omega(5, 0, -1)$

الحالة الثالثة:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 5 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + z^2 + 5 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

$$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = -1$$

تمثل مجموعة خالية من النقاط.

التمرين الثالث:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

تتأمل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

1. أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق أنّ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
2. ما طبيعة المجموعة ε

الطلب الأول:

الحل:

لتكن النقطة $M(x, y, z)$ ومنه:

$$\overrightarrow{MA}(2-x, 1-y, 2-z)$$

$$\overrightarrow{MB}(-2-x, -y, 2-z)$$

لدينا:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

$$(2-x)(-2-x) + (1-y)(-y) + (2-z)(2-z) = 0$$

$$-4 - 2x + 2x + x^2 - y + y^2 + (z-2)^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - y + (z-2)^2 - 4 = 0$$

بالإتمام إلى مربع كامل وفق:

$$x^2+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+(z-2)^2-4=0$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2-\frac{17}{4}=0$$

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$$

الطلب الثاني:

تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$

التمرين الرابع:

في معلم متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نتأمل النقطتان $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$ والمطلوب:

1. أعط معادلة للمجموعة ε مكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $MA=2MB$ وما طبيعة المجموعة ε
2. أعط معادلة للمجموعة p المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة p

الطلب الأول:

$$MA=2MB\rightarrow MA^2=4MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2]$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=4[(x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2]$$

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=4x^2+4+8y+4y^2+4+8z+4z^2$$

$$3x^2+3y^2+3z^2+2x+10y+10z+5=0$$

$$3x^2+2x+3y^2+10y+3z^2+10z+5=0$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+y^2+\frac{10}{3}y+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$$

$$x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+y^2+\frac{10}{3}y+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+z^2+\frac{10}{3}z+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+\frac{5}{3}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=4$$

مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل معادلة كرة مركزها $\Omega\left(\frac{-1}{3},\frac{-5}{3},\frac{-5}{3}\right)$ ونصف قطرها $R=2$

الطلب الثاني:

$$MA=MB\rightarrow MA^2=MB^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(-x)^2+(-1-y)^2+(-1-z)^2$$

$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(x)^2+(1+y)^2+(1+z)^2$$

$$1-2x+x^2+1-2y+y^2+1-2z+z^2=x^2+1+2y+y^2+1+2z+z^2$$

$$-2x-4y-4z+1=0$$

المجموعة p تمثل معادلة مستو وهو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

إلى أين ستصل؟؟

إلى ذلك الشيء الذي يعتقد العالم أنني لن أصل إليه.. 😔💙

التمرين الخامس:

نتأمل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ نضع $r = \frac{1}{2}AB$
ونعرف I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1. أثبت أنه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقق المساواة
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - r^2$$
2. أثبت أن مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق أنّ: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}_{l_1} = \underbrace{MI^2 - r^2}_{l_2}$$
$$l_1 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$
$$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$
$$= \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$
$$= \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) - \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2$$
$$= MI^2 + 0 - r^2 = l_2$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$
$$MI^2 - r^2 = 0$$
$$MI = r$$

تمثل معادلة كرة مركزها I ونصف قطرها r .

التمرين السادس:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, ; \vec{k})$ لتكن النقاط $C(1,2,1)$ و $B(0,2,7)$ و $A(3,2,1)$ والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$
2. صف Γ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفراغ التي تحقق:
$$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$$

الحل:

الطلب الأول:

$$x_G = \frac{(3)(1) + (0)(2) + (1)(3)}{1 + 2 + 3} = 1$$
$$y_G = \frac{(2)(1) + (2)(2) + (2)(3)}{1 + 2 + 3} = 2$$
$$z_G = \frac{(1)(1) + (7)(2) + (1)(3)}{1 + 2 + 3} = 3$$
$$\rightarrow G(1,2,3)$$

الطلب الثاني:

نعلم أنّ:

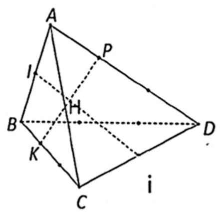
$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (1 + 2 + 3)\overrightarrow{MG}$$
$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$$

ولدينا:

$$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 6\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6\overrightarrow{MG} - 6\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC})\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CM})\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MG})\right\|$$
$$\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|6\overrightarrow{CG}\right\|$$
$$6\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6\left\|\overrightarrow{CG}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{CG}\right\|$$

ومنهُ Γ مجموعة النقاط من الفراغ تمثل معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها $R = CG$

التمرين السابع:



$ABCD$ رباعي وجوه فيه I و J هما بالترتيب منتصفا $[AB]$ و $[CD]$
والنقطتان P و K تحققان العلاقتين
$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK}$
وأخيراً H منتصف $[PK]$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.
2. بفرض G مركز ثقل المثلث BCD جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:
$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

الحل:

الطلب الأول:

المعطيات:

* النقطة P تحقق العلاقة
$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AP} \rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$
ومنهُ النقطة P مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,1)$ و $(A,2)$
* النقطة K تحقق العلاقة
$$\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BK} \rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$
ومنهُ النقطة K مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,1)$ و $(B,2)$
* النقطة I منتصف $[AB]$
أيّ أنّ النقطة I مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,2)$ و $(B,2)$
* النقطة J منتصف $[CD]$
أيّ أنّ النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,1)$ و $(D,1)$
* النقطة H منتصف $[PK]$
أيّ أنّ النقطة H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(P,3)$ و $(K,3)$

المطلوب:

إثبات أنّ I و J و H على استقامة واحدة أيّ يجب إثبات أن H مركز الأبعاد المتناسبة لـ I و J .

الحل:

* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.
* استناداً إلى الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I,4)$ و $(J,2)$

ومنهُ النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

نعلم أنّ:

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$$

ولدينا:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right)\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GM}\right)\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{GA}\right\|$$

$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R=GA$.

المساحات:

القانون	الشكل
مساحة المثلّث $= \dfrac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$	المثلث
مساحة المثلّث القائم $= \dfrac{\text{جداء الضّلعين القائمتين}}{2}$	المثلث القائم
$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ وارتفاعه: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ حيث طول الضلع $=a$	المثلث متساوي الأضلاع
الارتفاع $\times$ القاعدة $=$ مساحة متوازي الأضلاع	متوازي الأضلاع
العرض $\times$ الطّول $=$ مساحة المستطيل	المستطيل
مساحة المربّع $= (\text{طول الضلع})^2$	المربع
مساحة المعيّن $= \dfrac{\text{جداء طولي قطريه}}{2}$ $2\times$ جداء الضّلعين القائمتين $=$ مساحة المعيّن	المعين
مساحة شبه المنحرف $= \dfrac{\text{ارتفاع شبه المنحرف} \times \text{مجموع طولي القاعدتين}}{2}$	شبه المنحرف
$S=\pi r^2$; حيث نصف القطر $= r$	الدائرة

الحجوم:

المجسمات ذات القاعدة الواحدة	
القانون	الشكل
حجم المجسم $= \frac{1}{3}(\text{مساحة القاعدة})\times(\text{ارتفاع المجسم})$	(هرم/ رباعي وجوه/ مخروط/ .....)

المجسمات ذات القاعدتين	
القانون	الشكل
حجم المجسم $= (\text{مساحة القاعدة})\times(\text{ارتفاع المجسم})$	(المكعّب/ متوازي المستطيلات/ متوازي السّطوح / الموشور القائم/ الأسطوانة)

ملاحظة: لإيجاد حجم الهرم أو رباعي الوجوه:

الخطوة① : نحدّد قاعدة الهرم ونحسب مساحتها نصيحة: اختر القاعدة الّتي يكون حساب مساحتها سهلاً (ممكناً).

الخطوة② : نحدّد رأس الهرم ونوجد ارتفاع الهرم، حيث:

ارتفاع الهرم: هو بُعد رأس الهرم عن مستوي قاعدته،

ولإيجاد ارتفاع الهرم، نميّز حالتين:

الحالة ❶ :

قاعدة الهرم هي مستوي معلم، فإننا:

* نوجد مسقط رأس الهرم على مستوي القاعدة.

* ارتفاع الهرم يكون هو المسافة بين رأس الهرم ومسقطه على مستوي القاعدة

الحالة ❷:

قاعدة الهرم هي مستوي عشوائي يكون:

$$h = dist(\text{مستوي القاعدة} \,,\, \text{رأس الهرم})$$

الخطوة ③: نضع القانون:

$$V = \frac{1}{3} S_b . h$$

الخطوة ④: نعوّض

المسألة الأولى:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$B(2,2,3)$	$A(1,0,-1)$
$D(-4,2,1)$	$C(3,1,-2)$

١. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

٢. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي ABC واستنتج معادلة المستوي (ABC)

٣. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $(DABC)$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ المثلث ABC قائم:

* $\overrightarrow{AB}(1,2,4) \rightarrow AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$
* $\overrightarrow{AC}(2,1,-1) \rightarrow AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$
* $\overrightarrow{BC}(1,-1,-5) \rightarrow BC = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$

لدينا المثلث ABC مختلف الأضلاع.

نختبر كونه قائماً وفق:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$
$$27 = 21 + 6$$
$$27 = 27$$

ومنه المثلث ABC قائم في A

حساب المساحة:

$$S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{126}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC):

وهنا ناظم المستوي غير معلوم لذلك نثبت أنّ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي وفق:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 2 - 6 + 4 = 0$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 4 - 3 - 1 = 0$$

إذاً $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC) ومنه $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC) وبالتالي $\vec{n}$ ناظم على المستوي (ABC)

استنتاج معادلة المستوي (ABC) وفق:

النقطة: $A(1,0,-1)$

الناظم: $\vec{n}(2,-3,1)$

المعادلة:

$$(ABC): 2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$$
$$(ABC): 2x - 2 - 3y + z + 1 = 0$$
$$(ABC): 2x - 3y + z - 1 = 0$$

الطلب الثالث:

حساب بُعد D عن المستوي (ABC) :

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}$$
$$dist(D,(ABC)) = \sqrt{14}$$

حساب الحجم:

رباعي الوجوه $(D-ABC)$ قاعدته:

الوجه (ABC) مساحته $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

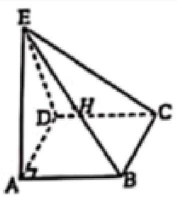
رأسه D وارتفاعه:

$$h_{DABC} = dist(D,(ABC)) = \sqrt{14}$$

الحجم:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} . h_{DABC}$$
$$= \frac{1}{3} . \frac{3\sqrt{14}}{2} . \sqrt{14} = 7$$

المسألة الثانية:



$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3 ولدينا $[AE]$ عمودي على المستوي $ABCD$ و $EA = 3$ نختار المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. عين إحداثيات E و D و C و B و A

٢. جد معادلة المستوي EBC

٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي EBC

٤. استنتج أنّ H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$

الحل:

الطلب الأول:

$D(0,3,0)$	$B(3,0,0)$	$A(0,0,0)$
$C(3,3,0)$	$E(0,0,3)$	

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{EB}(3,0,-3) \quad , \quad \overrightarrow{EC}(3,3,-3)$$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{EB}$ و $\overrightarrow{EC}$ غير مرتبطان خطياً.

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ ولدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{EB}=0$$
$$3a-3c=0\ \dots(1)$$
$$\vec{n},\overrightarrow{EC}=0$$
$$3a+3b-3c=0\ \dots(2)$$

لدينا:

$$\begin{cases}3a-3c=0 & \dots(1)\\ 3a+3b-3c=0 & \dots(2)\end{cases}$$

من (1) نجد أنّ:

$$3a=3c$$
$$a=c\ \dots(*)$$

نعوض في (2) وفق:

$$3c+3b-3c=0$$
$$3b=0\rightarrow b=0$$

ليكن $C=1$ إذاً: $a=1$

ومنهُ:

$$\vec{n}(1,0,1)$$
$$B(3,0,0)$$
$$(EBC):1(x-3)+0(y-0)+1(z-0)=0$$
$$(EBC):x-3+z=0$$
$$(EBC):x+z-3=0$$

الطلب الثالث:

النقطة: $A(0,0,0)$

شعاع التوجيه: بما أنّ المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فإنّ:

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_{EBC}}\rightarrow\overrightarrow{u_d}(1,0,1)$$

التمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=0\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

الطلب الرابع:

H منتصف القطعة المستقيمة $[EB]$ ومنهُ:

$$H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$$

إيجاد A' المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC) ومنهُ بالحل المشترك للجملة:

$$\begin{cases}x+z-3=0\ \dots(1)\\ x=t\ \dots(2)\\ y=0\ \dots(3)\\ z=t\ \dots(4)\end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$t+t-3=0\rightarrow t=\frac{3}{2}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x=\frac{3}{2}\quad,\quad y=0\quad,\quad y=\frac{3}{2}$$
$$\Longrightarrow A'\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)\rightarrow A'=H$$

الطلب الخامس:

الطريقة الأولى:

رباعي الوجوه $(AEBC)$ فيه:

قاعدته: الوجه (AEB) وهو مثلث قائم في A مساحته:

$$S_{AEB}=\frac{AB.AE}{2}=\frac{9}{2}$$

رأسه: C

ارتفاعه: القاعدة مستوي معلم

لدينا رأس الهرم $C(3,3,0)$ ومسقطه على مستوي القاعدة هو $C'(3,0,0)$ ويكون:

$$h_{AEBC}=CC'$$
$$=\sqrt{0^2+(-3)^2+(0)^2}=\sqrt{9}=3$$

ويكون حجمه:

$$V_{AEBC}=\frac{1}{3}S_{AEB}.h_{AEBC}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)(3)=\frac{9}{2}$$

الطريقة الثانية:

رباعي الوجوه $(AEBC)$ فيه:

قاعدته: الوجه (ABC) وهو مثلث قائم في B مساحته:

$$S_{ABC}=\frac{BA.BC}{2}=\frac{9}{2}$$

رأسه: E

ارتفاعه: القاعدة مستوي معلم

لدينا رأس الهرم $E(0,0,3)$ ومسقطه على مستوي القاعدة هو $E'(3,0,0)$ ويكون:

$$h_{AEBC}=EE'$$
$$=\sqrt{0^2+0^2+(9)^2}=\sqrt{9}=3$$

ويكون حجمه:

$$V_{AEBC}=\frac{1}{3}S_{ABC}.h_{AEBC}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)(3)=\frac{9}{2}$$

طلب إضافي ضربة الموسم:

استنتج مساحة المثلث (EBC) :

الحل:

لدينا رباعي الوجوه $(AEBC)$ فيه:

قاعدته: الوجه (EBC)

مساحتها: $S_{EBC}=?$

رأسه: A

ارتفاعه: قاعدته مستوي عشوائي

$$h_{AEBC} = dist\big(A,(EBC)\big) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

حجمه: من الطلب السابق $V_{AEBC} = \frac{9}{2}$

إذاً:

$$V_{AEBC} = \frac{1}{3}S_{EBC}.h_{AEBC}$$
$$\frac{9}{2} = \left(\frac{1}{3}\right).S_{EBC}.\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\frac{9}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)S_{EBC}$$
$$S_{EBC} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{9}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

المسألة الثالثة:

m و n عددان حقيقيان موجبان يحققان

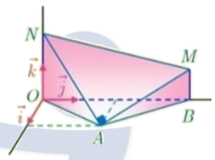
$n > m > 0$ تتأمل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$

و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و

$N(0,0,n)$ في معلم متجانس

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عين n و m ليكون المثلث MAN قائماً في A

وحجم المجسم AOBMN يساوي $5\sqrt{3}$



الحل:

المثلث MAN قائم في A فإنه يتحقق:

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0 \dots (*)$$
$$\overrightarrow{AM}(-\sqrt{3},3,m) \quad , \quad \overrightarrow{AN}(-\sqrt{3},-3,n)$$

بالتعويض في علاقة $(*)$ نجد أنّ:

$$(-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) + (3)(-3) + (m)(n) = 0$$
$$3 - 9 + m.n = 0$$
$$m.n = 6 \dots (1)$$

حجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$ أيّ أنّ:

$$V_{AOBMN} = 5\sqrt{3}$$

حيث:

$$V_{AOBMN} = \frac{1}{3}S_{OBMN}.h_{\text{هرم}} \dots (**)$$

ولدينا مساحة القاعدة:

$$S_{OBMN} = \left(\frac{ON+BM}{2}\right).(OB) = \left(\frac{n+m}{2}\right)(6)$$
$$S_{OBMN} = 3(n+m)$$

ارتفاع الهرم:

مسقط النقطة A على القاعدة $OBMN$ فتكون:

$$\Longrightarrow A'(0,3,0)$$
$$h = \left\|\overrightarrow{AA'}\right\| = \sqrt{3}$$

نعوض في علاقة $(**)$:

$$V_{AOBMN} = \frac{1}{3}S_{OBMN}.h$$
$$5\sqrt{3} = \frac{1}{3}.3(m+n)\sqrt{3}$$
$$m + n = 5 \dots (2)$$

ومنهُ لدينا الجملة:

$$\begin{cases} m.n = 6 \dots (1) \\ m + n = 5 \dots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد أنّ:

$$m = 5 - n \dots (***)$$

نعوض في (1) وفق:

$$(5-n)n = 6$$
$$-n^2 + 5n - 6 = 0$$
$$n^2 - 5n + 6 = 0$$
$$(n-3)(n-2) = 0$$

إما $n = 3 \to m = 2 \,; n > m$ مقبول لأن

أو $n = 2 \to m = 3 \,; n < m$ مرفوض لأن

المسألة الرابعة: تتأمل المستقيمين:

$$d_1:\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \,; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$
$$d_2:\begin{cases} x = 4 - s \\ y = 2s \quad ; s \in \mathbb{R} \\ z = 2 - s \end{cases}$$

1. أثبت أن المستقيمين d_1 و d_2 متعامدان.
2. أوجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين d_1 و d_2
3. اكتب معادلة المستوي P الذي يشمل المستقيمين d_1 و d_2

الحل:

الطلب الأول:

$$\vec{u_1}(1,2,3)$$
$$\vec{u_2}(-1,2,-1)$$
$$\vec{u_1}.\vec{u_2} = (1)(-1) + (2)(2) + (3)(-1)$$
$$= -1 + 4 - 3 = 0$$

ومنه المستقيمان (d_1) و (d_2) متعامدان.

الطلب الثاني:

لإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) نحل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 3 + t = 4 - s \quad \dots (1) \\ 2 + 2t = 2s \quad \dots (2) \\ 3t + 1 = 2 - s \dots (3) \end{cases}$$

نختار جملة المعادلتين (1) و (2) :

$$\begin{cases} 3 + t = 4 - s \dots (1) \\ 2 + 2t = 2s \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ 2 وفق:

$$\begin{cases} 6+2t = 8-2s & \dots (1)' \\ 2+2t = 2s & \dots (2) \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) :

$$8+4t = 8$$
$$4t = 0 \to t = 0$$

نعوض في (2) :

$$2+2(0) = 2s$$
$$2 = 2s$$
$$s = 1$$

نتحقق في المعادلة المتبقية (3) وفق:

$$3(0)+1 = 2-(1)$$
$$1 = 1$$

محققة ومنه يوجد للجملة حل وحيد هو:

$$S = 1$$
$$t = 0$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d_1) أو نعوض قيمة S في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d_2) (طبعاً حتطلع معي ذات النتيجة)

نعوض $t = 0$

في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d_1) وفق:

$$x = 3+0 \quad \to x = 3$$
$$y = 2+2(0) \to y = 2$$
$$z = 3(0)+1 \to z = 1$$

ومنه إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) هي: $I(3,2,1)$

الطلب الثالث:

تحديد النقطة:

هي ذاتها نقطة تقاطع المستقيمان (d_1) و (d_2) والتي هي: $I(3,2,1)$

تحديد الناظم:

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ وبما أنّ المستوي P يشمل المستقيمان (d_1) و (d_2) فإنّ أشعة التوجيه $\vec{u_1}(1,2,3)$ و $\vec{u_2}(-1,2,-1)$ هما شعاعين موجهين للمستوي P

وبالتالي الناظم $\vec{n}$ عمودي على كل منهما أيّ أنّ:

$$\vec{n}.\vec{u_1} = 0$$
$$a+2b+3c = 0 \dots (1)$$
$$\vec{n}.\vec{u_2} = 0$$
$$-a+2b-c = 0 \dots (2)$$

نحل جملة المعادلتين:

$$a+2b+3c = 0 \dots (1)$$
$$-a+2b-c = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$4b+2c = 0$$
$$2c = -4b$$
$$c = -2b \dots (*)$$

نعوض في (1) :

$$a+2b-6b = 0$$
$$a = 4b \dots (**)$$

بفرض $b = 1$:

نعوض في $(*)$ و $(**)$ وفق:

$$c = -2$$
$$a = 4$$
$$\to \vec{n}(4,1,-2)$$

نكتب معادلة المستوي وفق:

$$a(x-x_I)+b(y-y_I)+c(z-z_I) = 0$$
$$4(x-3)+1(y-2)-2(z-1) = 0$$
$$4x-12+y-2-2z+2 = 0$$
$$4x+y-2z-12 = 0$$

المسألة الخامسة:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط: $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$ و $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ C و E و D ليست واقعة على استقامة واحدة.
٢. أثبت أن المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE)
٣. عين إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE)
٤. عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,0)$ للمستوي (CDE)

الحل:

الطلب الأول:

$$\overrightarrow{CE}(-3,-1,1)$$
$$\overrightarrow{CD}(-4,4,0)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CD}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط C و E و D ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثاني:

نثبت أنّ شعاع توجيه المستقيم (AB) عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$ الغير مرتبطين خطياً من المستوي (CDE) .

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE} = 0$$
$$(-1)(-3)+(-1)(-1)+(-4)(1) = 0$$
$$3+1-4 = 0$$
$$0 = 0$$

ومنهُ (AB) عمودي على (CE)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$$
$$(-1)(-4)+(-1)(4)+(-4)(0) = 0$$
$$4-4 = 0$$
$$0 = 0$$

ومنهُ (AB) عمودي على (CD)

ومنهُ المستقيم (AB)عمودي على المستوي (CDE)

الطلب الثالث:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

تحديد النقطة: $A(2,1,3)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\overrightarrow{AB}(-1,-1,-4)$$

$$(AB):\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-t+1 \ ; t\in\mathbb{R} \\ z=-4t+3 \end{cases}$$

كتابة معادلة المستوي (CDE) :

تحديد النقطة: معلومة $C(4,0,0)$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) فإنّ $\overrightarrow{u_{AB}}=\overrightarrow{n_{CDE}}$ أيّ: $\overrightarrow{n_{CDE}}(-1,-1,-4)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_C)+b(y-y_C)+c(z-z_C)=0$$

$$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0$$

$$-x+4-y-4z=0$$

$$-x-y-4z+4=0$$

لإيجاد إحداثيات النقطة N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE) فإننا نحل أربعة معادلات وفق:

$$-x-y-4z+4=0\ldots(1)$$

$$x=-t+2\ldots(2)$$

$$y=-t+1\ldots(3)$$

$$z=-4t+3\ldots(4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) وفق:

$$-(-t+2)-(-t+1)-4(-4t+3)+4=0$$

$$t-2+t-1+16t-12+4=0$$

$$18t-11=0$$

$$18t=11\to t=\frac{11}{18}$$

نعوض t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=-\left(\frac{11}{18}\right)+2\to x=\frac{25}{18}$$

$$y=-\left(\frac{11}{18}\right)+1\to y=\frac{7}{18}$$

$$z=-4\left(-\frac{11}{18}\right)+3\to z=\frac{98}{18}$$

$$N\left(\frac{25}{18},\frac{7}{18},\frac{98}{18}\right)$$

الطلب الرابع:

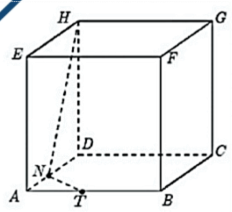
نعوض إحداثيات النقطة M في المستوي (CDE) ثم نعزل m فنحصل على قيمتها وفق:

$$-m-1-0+4=0$$

$$-m+3=0$$

$$m=3$$

المسألة السادسة:



ليكن لدينا $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1 و T نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و N نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$ والمطلوب:

١. في المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جد إحداثيات النقاط T و N و F و H

٢. جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة للمستوي (HNT)

٣. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)

٤. استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

الحل:

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

$E(0,0,1)$	$A(0,0,0)$
$F(1,0,1)$	$B(1,0,0)$
$H(0,1,1)$	$D(0,1,0)$
$G(1,1,1)$	$C(1,1,0)$

إيجاد إحداثيات النقطة T :

لتكن $T(x,y,z)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x=\frac{2}{5}$$

$$y=0$$

$$z=0$$

$$T\left(\frac{2}{5},0,0\right)$$

إيجاد إحداثيات النقطة N :

لتكن $N(x,y,z)$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{2}{5}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

وهي تكافئ:

$$x=0$$

$$y=\frac{2}{5}$$

$$z=0$$

$$N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$$

الطلب الثاني:

$$\overrightarrow{NT}\left(-\frac{2}{5},\frac{2}{5},0\right) \to \overrightarrow{NT}(-2,2,0)$$
$$\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right) \to \overrightarrow{NH}(0,3,5)$$

كتابة معادلة المستوي (HNT) وفق:

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{NH}$ و $\overrightarrow{NT}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط N و T و H تشكل مستوي.

تحديد النقطة: معلومة $H(0,1,1)$

تحديد الناظم: ليكن $\vec{n}(a,b,c)$

بما أنّ النقاط N و T و H من المستوي فإنّ $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ومنهُ:

$$\overrightarrow{NT}.\vec{n}=0$$
$$-2a+2b=0$$
$$\overrightarrow{NH}.\vec{n}=0$$
$$3b+5c=0$$

نحل جملة المعادلتين الآتية:

$$\begin{cases}-2a+2b=0 \ldots(1)\\ 3b+5c=0 \quad \ldots(2)\end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ 3 والمعادلة الثانية بـ -2

$$\begin{cases}6a-6b=0 \quad \ldots(1)'\\ 6b+10c=0 \quad \ldots(2)'\end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و $(2)'$ نجد أنّ:

$$6a+10c=0$$
$$6a=-10c$$
$$a=-\frac{5}{3}c \ldots(*)$$

نعوض في (1) :

$$-2\left(-\frac{5}{3}c\right)+2b=0$$
$$-\frac{10}{3}c+2b=0$$
$$2b=\frac{10}{3}c$$
$$b=\frac{10}{6}c$$
$$b=\frac{5}{3}c \ldots(**)$$

نفرض $c=3$ نعوض في $(*)$ و $(**)$ ومنهُ:

$$a=-5$$
$$b=5$$

ومنهُ $\vec{n}(-5,5,3)$

نكتب المعادلة وفق:

$$a(x-x_H)+b(y-y_H)+c(z-z_H)=0$$
$$-5(x-0)+5(y-1)+3(z-1)=0$$
$$-5x+5y+3z-8=0$$

الطلب الثالث:

تحديد النقطة: معلومة $E(0,0,1)$

تحديد شعاع التوجيه:

$$\vec{u}=\overrightarrow{EF}$$
$$\vec{u}(1,0,0)$$

نكتب التمثيل الوسيطي وفق:

$$(EF):\begin{cases}x=t\\ y=0\,;t\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$$

الطلب الرابع:

لدينا معادلة المستوي (HNT) :

$$-5x+5y+3z-8=0$$

لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) :

$$(EF):\begin{cases}x=t\\ y=0\,;t\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$$

نوجد نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT) ولتكن J بحل جملة أربعة معادلات وفق:

$$-5x+5y+3z-8=0 \ldots(1)$$
$$x=t \ldots(2)$$
$$y=0 \ldots(3)$$
$$z=1 \ldots(4)$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

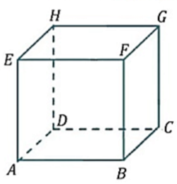
$$-5(t)+5(0)+3(1)-8=0$$
$$-5t+3-8=0$$
$$-5t-5=0$$
$$-5t=5$$
$$t=-1$$

نعوض t في (2) و (3) و (4) وفق:

$$x=-1$$
$$y=0$$
$$z=1$$

ومنهُ: $J(-1,0,1)$

المسألة السابعة:



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 والنقاط K و J و I منتصفات الأضلاع $[FG]$ و $[BC]$ و $[AD]$ بالترتيب , نختار المعلم المتجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ والمطلوب:

1. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{AK}$
2. أثبت أن النقاط F و H و I تشكل مستوي
3. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$
4. هل النقطة K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$
5. هل المستقيمان (ID) و (FE) متعامدان؟

الحل

الطلب الأول:

إحداثيات رؤوس المكعب:

$H(0,0,1)$	$D(0,0,0)$
$E(1,0,1)$	$A(1,0,0)$
$G(0,1,1)$	$C(0,1,0)$
$F(1,1,1)$	$B(1,1,0)$

إحداثيات I و J و K وفق:

$J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$	$K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$
$I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$	

حساب مركبات الأشعة:

$$\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1-1\right)$$
$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$
$$\overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ F و H و I تشكل مستوي:

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)$$
$$\overrightarrow{HF}(1,1,0)$$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HF}$ غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه النقاط F و H و I ليست على استقامة واحدة.

الطلب الثالث:

كتابة معادلة المستوي المحوري للقطعة $[BC]$:

تحديد النقطة:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ فإنّ النقطة N منتصف القطعة $[BC]$ تنتمي إلى المستوي حيث:

$$N\left(\frac{1}{2},1,0\right)$$

تحديد الناظم:

بما أنّ المستوي هو المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ فإنّ $\vec{n}=\overrightarrow{BC}$ أيّ: $\vec{n}(-1,0,0)$

نكتب المعادلة وفق:

$$-1\left(x-\frac{1}{2}\right)+0(y-1)+0(z-0)=0$$
$$-x+\frac{1}{2}=0$$
$$-2x+1=0$$

الطلب الرابع:

اختبار انتماء النقطة $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$ ويتم وفق تعويض إحداثيات النقطة K في معادلة المستوي $[BC]$ وفي حال كانت المعادلة محققة نقول أنها تنتمي وفي حال كانت المعادلة غير محققة نقول أنها لا تنتمي.

$$-2x+1=0$$
$$-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0$$
$$-1+1=0$$
$$0=0$$

محققة إذاً K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[BC]$

الطلب الخامس:

$$\overrightarrow{ID}\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$$
$$\overrightarrow{FE}(0,-1,0)$$

نوجد $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{FE}=0$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(0)+(0)(-1)+(0)(0)=0$$
$$0=0$$

ومنهُ المستقيمان (ID) و (FE) متعامدان

المسألة الثامنة:

ليكن لدينا المستويان:

$$P: 2x-y+z-4=0$$
$$Q: x+y+2z-5=0$$

المطلوب:

١. أثبت أن P و Q متقاطعان.
٢. أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d_1 الفصل المشترك للمستويان P و Q.
٣. ادرس الوضع النسبي للمستقيمان d_1 و d_2 حيث:
$$d_2:\begin{cases} x=2s-1 \\ y=s \\ z=1-3s \end{cases} ;s\in\mathbb{R}$$
٤. هل المستقيمان d_1 و d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟؟ علل إجابتك.
٥. أثبت أن المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان حيث:
$B(1,1,2), A(3,0,3)$
٦. ادرس تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R حيث: $R: x-y+z=1$ وفي حال التقاطع عيّن إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم d_2 والمستوي R.
٧. هل المستقيم (CD) عمودي على المستوي R حيث:
$C(1,1,-1)$ و $D(3,-1,1)$
٨. لتكن لدينا النقطة $E(3,-1,2)$, أوجد إحداثيات النقطة E_1 المسقط القائم للنقطة E على المستوي P.
٩. احسب بعد النقطة E عن المستوي P بطريقتين مختلفتين.
١٠. أوجد إحداثيات النقطة E_2 المسقط القائم للنقطة E على المستقيم d_1.

١١. احسب بعد النقطة E عن المستقيم d_1.

١٢. هل النقاط G و F تنتمي إلى المستوي P ؟

$G(1,1,-2)$	$F(2,1,1)$

١٣. هل النقاط G و F تنتمي إلى المستقيم d_2 ؟

$G(1,1,-2)$	$F(2,1,1)$

١٤. ادرس الوضع النسبي للمستويات P و Q و R.

١٥. اكتب معادلة الكرة S_1 التي مركزها E ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$

الحل:

١. لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,1)$ والمستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(1,1,2)$ نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي P و Q متقاطعان.

٢. لتكن:

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \dots\dots (1) \\ x+y+2z-5=0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$3x+3z-9=0$$
$$3x=-3z+9$$
$$x=-z+3$$

نعوض في (2):

$$-z+3+y+2z-5=0$$
$$y+z-2=0$$
$$y=-z+2$$

لتكن $z=t$ ومنهُ:

$$(d_1):\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2\,;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

٣.

المستقيم d_1 شعاع توجيه: $\vec{u}_1(-1,-1,1)$

المستقيم d_2 شعاع توجيه: $\vec{u}_2(2,1,-3)$

نلاحظ أن $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطان خطياً وبالتالي d_1 و d_2 إما متقاطعان أو متخالفان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases} -t+3=2s-1 \dots (1) \\ -t+2=s \dots (2) \\ t=1-3s \dots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} -t+3=2s-1 \dots (1) \\ t=1-3s \dots (3) \end{cases}$$

بالجمع:

$$3=-s \Rightarrow s=-3$$

نعوض في (3):

$$t=1+9 \Rightarrow t=10$$

نتحقق في (2):

$$-10+2=-3$$

$$-8\neq-3$$

غير محققة ومنهُ الجملة مستحيلة الحل إذاً d_1 و d_2 لا يشتركان بأية نقطة فهما متخالفان.

٤. d_1 و d_2 متخالفان إذاً لا يقعان في مستوٍ واحد.

٥.

المستقيم d_1 شعاع توجيهه: $\vec{u}_1(-1,-1,1)$

المستقيم (AB) شعاع توجيهه:

$$\overrightarrow{AB}(-2,1,-1)$$
$$\vec{u}_1.\overrightarrow{AB}=2-1-1=0$$

إذاً المستقيمان d_1 و (AB) متعامدان.

٦.

المستقيم d_2 شعاع توجيهه: $\vec{u}_2(2,1,-3)$

المستوي R ناظمه: $\vec{n}_R(1,-1,1)$

$$\vec{u}_2.\vec{n}_R=2-1-3=-2$$

إذا المستوي R والمستقيم d_2 متقاطعان.

إيجاد نقطة التقاطع R مع d_2:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \dots (1) \\ x=s-1 \dots (2) \\ y=s \quad \dots (3) \\ z=1-3s \dots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1):

$$2s-1-s+1-3s=1$$
$$-2s=1\to s=-\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة s في $(2),(3),(4)$:

$$x=2\left(-\frac{1}{2}\right)-1\Rightarrow x=-2$$
$$y=-\frac{1}{2}$$
$$z=1-3\left(-\frac{1}{2}\right)=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow I\left(-2\,,-\frac{1}{2}\,,\frac{5}{2}\right)$$

٧.

ناظم المستوي R هو: $\vec{n}_R(1,-1,1)$

المستقيم (CD) شعاع توجيهه: $\overrightarrow{CD}(2,-2,2)$

نلاحظ أن $\vec{n}_R$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطان خطياً إذاً:

المستوي R والمستقيم (CD) متعامدان

٨.

الخطوة الأولى:

نكتب معادلة المستوي P:

$$P:2x-y+z-4=0$$

الخطوة الثانية:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ المار من E والعمودي على المستوي P, بما أن المستقيم Δ والمستوي P متعامدان فإنّ:

$$\vec{u}_{\Delta} = \vec{n}_P(2,-1,1)$$
$$E(3,-1,2)$$
$$(\Delta):\begin{cases} x = 2k+3 \\ y = -k-1\,;k\in\mathbb{R} \\ z = k+2 \end{cases}$$

الخطوة الثالثة:

تكون النقطة E_1 هي نقطة تقاطع المستوي P والمستقيم Δ أيّ:

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 \ldots(1) \\ x = 2k+3 \quad \ldots(2) \\ y = -k-1 \ldots(3) \\ z = k+2 \quad \ldots(4) \end{cases}$$

نعوض $(2),(3),(4)$ في (1):

$$2(2k+3)-(-k-1)+k+2-4=0$$
$$4k+6+k+1+k+2-4=0$$
$$6k+5=0$$
$$6k=-5 \to k=-\frac{5}{6}$$

نعوض قيمة k في $(2),(3),(4)$:

$$x = 2\left(-\frac{5}{6}\right)+3 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$
$$y = -\left(-\frac{5}{6}\right)-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{6}$$
$$z = -\frac{5}{6}+2 \Rightarrow z=\frac{7}{6}$$
$$\Rightarrow E_1\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{6},\frac{7}{6}\right)$$

٩. الطريقة الأولى:

$$dist(E,P) = \frac{|2(3)-(-1)+2-4|}{\sqrt{4+1+1}}$$
$$= \frac{|6+1+2-4|}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

الطريقة الثانية:

$$\overrightarrow{EE_1}\left(-\frac{5}{3},\frac{5}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

يكون بعد النقطة E عن المستوي P يساوي المسافة بين E ومسقط E على المستوي P

$$EE_1 = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{25}{36}+\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{150}{36}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

١٠. الخطوة الأولى:

نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d_1:

$$(d_1):\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2\,;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

الخطوة الثانية:

لدينا النقطة M من المستقيم d_1 حيث:

$$M(-t+3,-t+2,t)$$
$$\vec{u}_1(-1,-1,1)$$
$$\overrightarrow{EM}(-t,-t+3,t-2)$$

لدينا $\vec{u}_1$ و $\overrightarrow{EM}$ متعامدان إذاً:

$$\overrightarrow{EM}.\vec{u}_1 = 0$$
$$t+t-3+t-2=0$$
$$3t=5 \to t=\frac{5}{3}$$

إذاً:

$$x = -\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3}$$
$$y=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}$$
$$z=\frac{5}{3}$$
$$\Rightarrow E_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

١١. الخطوة الأولى:

نوجد إحداثيات E_2 المسقط القائم لـ E على d_1:

$$E_2\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

الخطوة الثانية:

يكون بعد النقطة E عن المستقيم d_1 هو المسافة بين E و E_2 مسقط E على المستقيم d_1 أيّ:

$$\overrightarrow{EE_2}\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$
$$dist(E,d_1)=EE_2$$
$$= \sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{42}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

المستقبل ملك لأولئك الذين يؤمنون بروعة أحلامهم 😍💙

١٢.

النقطة F:

$$2(2)-1+1-4=0$$
$$4-4-1+1=0$$
$$0=0$$

إذاً النقطة F تنتمي للمستوي P.

النقطة G:

$$2(1)-1+(-2)-4=0$$
$$2-1-2-4=0$$
$$-5\neq 0$$

إذاً النقطة G لا تنتمي للمستوي P.

١٣.

النقطة F:

$$2=2s-1\Rightarrow s=\frac{3}{2}$$
$$1=s\Rightarrow s=1$$

إذاً F لا تنتمي للمستقيم d_2.

النقطة G:

$$1=2s-1\Rightarrow s=1$$
$$1=s\Rightarrow s=1$$
$$-2=1-3s\Rightarrow s=1$$

إذاً G تنتمي للمستقيم d_2.

١٤. لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0\ldots(\mathrm{L}_1)\\ x-y+z-1=0\ldots(\mathrm{L}_2)\\ 2x-y+z-4=0\ldots(\mathrm{L}_3)\end{cases}$$

$$-\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2\to \mathrm{L}'_2$$
$$-2\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2\to \mathrm{L}'_3$$

$$\begin{cases} \mathrm{x+y+2z-5=0}\ldots(\mathrm{L}_1)\\ \mathrm{-2y-z+4=0}\ldots(\mathrm{L'}_2)\\ \mathrm{-3y-3z+6=0}\ldots(\mathrm{L'}_3)\end{cases}$$

$$-\frac{3}{2}\mathrm{L}'_2+\mathrm{L}'_3\to \mathrm{L}''_3$$

$$\begin{cases} x+y+2z-5=0\ldots(\mathrm{L}_1)\\ -2y-z+4=0\ldots(\mathrm{L'}_2)\\ -\frac{3}{2}z=0\ldots(\mathrm{L''}_3)\end{cases}$$

من (L''_3) نجد:

$$-\frac{3}{2}z=0\Rightarrow z=0$$

نعوض في (L'_2) نجد:

$$-2y+4=0$$
$$-2y=-4$$
$$y=2$$

نعوض في (L_1) فنجد:

$$x+2-5=0$$
$$x=3$$

إذاً المستويات P و Q و R تشترك بنقطة واحدة هي: $I(3,2,0)$

١٥. المركز: $E(3,-1,2)$

نصف القطر: $R=\sqrt{3}$

المعادلة:

$$S_1:(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$$

المسألة التاسعة:

في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ نتأمل النقطة $A(1,1,1)$

والمستويين: $P:x+y+z=6$

و $Q=3x+y-z=2$

١. أثبت أن المستويين متقاطعان.

٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك Δ.

٣. أوجد احداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم Δ.

٤. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ.

٥. اكتب معادلة المستوي R الذي يحوي Δ ويمر بالنقطة A.

الحل:

١. لدينا:

$$\vec{n}_Q(3,1,-1)\,,\vec{n}_P(1,1,1)$$

نلاحظ أن المركبات غير متناسبة وبالتالي $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً، ومنه المستويان P و Q متقاطعان.

٢. لدينا:

$$\begin{cases} x+y+z=6\\ 3x+y-z=2\end{cases}$$

بجمع المعادلتين نجد:

$$4x+2y=8$$
$$2y=-4x+8$$
$$y=-2x+4$$

نعوض في المعادلة الأولى فنجد:

$$2-2x+4+z=6$$
$$z=x+2$$

وبفرض $x=t$ نجد:

$$\Delta:\begin{cases} x=t\\ y=-2t+4;t\in\mathbb{R}\\ z=t+2\end{cases}$$

٣. لدينا المستقيم Δ تمثيله الوسيطي:

$$\Delta:\begin{cases} x = t \\ y = -2t+4 ; t\in\mathbb{R} \\ z = t+2 \end{cases}$$

بما ان A' من المستقيم Δ فإنّ:

$$A'(t, -2t+4, t+2)$$

تكون A' هي المسقط القائم لـ A على Δ إذا تحقق:

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_{\Delta} = 0$$

حيث:

$$\overrightarrow{AA'}(t-1, -2t+3, t+1)$$
$$\vec{u}_{\Delta}(1,-2,1)$$

حيث $\vec{u}_{\Delta}$ هو شعاع توجيه المستقيم Δ ومنه:

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_{\Delta} = 0$$
$$(t-1)(1)+(-2t+3)(-2)+(t+1)(1)=0$$
$$t-1+4t-6+t+1=0$$
$$6t-6=0$$
$$6t=6$$
$$t=1$$

وبالتالي احداثيات A' تكون:

$$A'(1,2,3)$$

٤. بُعد A عن Δ يعطى بالعلاقة:

$$dist(A,\Delta) = AA'$$

أي بعد A عن Δ هو المسافة AA'، لدينا:

$$AA' = \sqrt{0^2+1^2+2^2} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow dist(A,\Delta) = \sqrt{5}$$

٥. فكرة:

* المستوي R يحوي Δ

فهو يحوي شعاع التوجيه $\vec{u}_{\Delta}$.

* النقطة A' من المستقيم Δ والمستقيم Δ من المستوي R وبالتالي A' محتواة أيضاً في المستوي R.

* المستوي R مار من A.

أي نجد أنّ: المستوي R يقبل الشعاعين

$\vec{u}_{\Delta}(1,-2,1)$, $\overrightarrow{AA'}(0,1,2)$ كشعاعي توجيه له.

تحديد الناظم: بفرض $\vec{n}(a,b,c)$

• بما أنّ $\vec{n}_R$ ناظم على المستوي R وبما أن $\vec{u}_{\Delta}$ و $\overrightarrow{AA'}$ من المستوي R فإن $\vec{n}_R$ عمودي عليهما وبالتالي:

$$\vec{n}_R.\vec{u}_{\Delta} = 0 \Rightarrow a-2b+c=0$$
$$\vec{n}_R.\overrightarrow{AA'} = 0 \Rightarrow b+2c=0$$

لدينا:

$$\begin{cases} a-2b+c=0 \dots (1) \\ b+2c=0 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الثانية بالعدد (2):

$$\begin{cases} a-2b+c=0 \dots (1) \\ 2b+4c=0 \dots (2) \end{cases}$$

بالجمع:

$$a+5c=0$$
$$a=-5c$$

نعوض في المعادلة الأولى فنجد:

$$-5c-2b+c=0$$
$$-2b=4c$$
$$b=-2c$$

بفرض $c=-1$ تكون:

$$a=5 , b=2$$
$$\Rightarrow \vec{n}_R(5,2,-1)$$

تحديد النقطة:

$$A(1,1,1)$$

كتابة المعادلة:

$$R: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$R: 5(x-1)+2(y-1)-1(z-1)=0$$
$$R: 5x-5+2y-2-z+1=0$$
$$R: 5x+2y-z-6=0$$

المسألة العاشرة:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, المستوي P الذي يشمل النقطة $A(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظم له وليكن المستوي Q معادلته:

$$Q: x+2y-7=0$$

١. اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي P.

٢. تحقق أن النقطة $B(-1,4,-1)$ مشتركة بين المستويين P و Q.

٣. بين أن المستويين P و Q متقاطعان وفق مستقيم Δ يطلب تعيين تمثيله الوسيطي.

٤. أثبت أن المستويين P و Q متعامدان.

٥. لتكن لدينا النقطة $C(5,-2,-1)$ والمطلوب:

a) احسب المسافة بين النقطة C والمستوي P ثم المسافة بين النقطة C والمستوي Q.

b) استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم Δ.

الحل:

١. لدينا:

النقطة: $A(1,-2,1)$

الناظم: $\vec{n}(-2,1,5)$

المعادلة:

$$P: -2(x-1)+1(y+2)+5(z-1)=0$$
$$P: -2x+2+y+2+5z-5=0$$
$$P: -2x+y+5z-1=0$$

٢. التحقق أن النقطة B للمستوي P:

$$-2(-1)+4+5(-1)-1=0$$
$$+2+4-5-1=0$$
$$0=0$$

محققة إذاً النقطة B تنتمي للمستوي P.

التحقق من انتماء B للمستوي Q:

$$-1+2(4)-7=0$$
$$-1+8-7=0$$
$$0=0$$

محققة، إذاً B تنتمي للمستوي Q

وعليه فإنّ النقطة B تنتمي للمستوي P و Q.

٣.

لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(-2,1,5)$ ولدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(1,2,0)$ وبما أنّ $\vec{n}_P,\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً فإنّ المستويين P و Q متقاطعان

التمثيل الوسيطي لـ Δ:

$$-2x+y+5z-1=0$$
$$x+2y-7=0$$
$$\begin{cases}-2x+y+5z-1=0 \dots (1)\\ x+2y-7=0 \dots (2)\end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد -2:

$$\begin{cases}4x-2y-10z+2=0 \dots (1)\\ x+2y-7=0 \dots (2)\end{cases}$$

نجمع المعادلتين:

$$5x-10z-5=0$$
$$5x=10z+5$$
$$x=2z+1$$

نعوض في المعادلة (2):

$$2z+1+2y-7=0$$
$$2y=-2z+6$$
$$y=-z+3$$

ليكن لدينا $z=t$ ومنهُ:

$$\Delta:\begin{cases}x=2t+1\\ y=-t+3\,;t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

٤. لدينا:

$$\vec{n}_P.\vec{n}_Q=(-2)1+(1)2+(0)5$$
$$=-2+2+0=0$$

إذاً المستويين P و Q متعامدين.

٥. لدينا:

a) المسافة بين C و P:

$$dist(C,P)=\frac{|-2(5)-2+5(-1)-1|}{\sqrt{4+1+25}}$$

$$=\frac{18}{\sqrt{30}}=\frac{18\sqrt{30}}{30}=\frac{3\sqrt{30}}{5}$$

المسافة بين C و Q:

$$dist(C,Q)=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{1+4+0}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

b) بما أن المستويين P و Q متعامدان ومتقاطعان وفق المستقيم (Δ)، فإن حسب فيثاغورث:

$$dist(C,\Delta)=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{30}}{5}\right)^2+\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{9\times30}{25}+\frac{36\times5}{25}}=\sqrt{\frac{450}{25}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

المسألة الحادية عشر:

في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن لدينا النقاط $C(2,6,0)$ و $B(4,0,-2)$ و $A(4,5,3)$ والمستقيم d المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$d:\begin{cases}x=6-2\lambda\\ y=-1+6\lambda\,;\lambda\in\mathbb{R}\\ z=1+2\lambda\end{cases}$$

١. أثبت أن النقطة A تنتمي إلى المستقيم d.

٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CB).

٣. ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (d) و (CB).

٤. اكتب معادلة المستوي P الذي يمر بالنقطة A ويقبل $\vec{u}(-2,1,-3)$ و $\vec{v}(0,-5,-5)$ شعاعين موجهين له.

٥. بفرض G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,2),(B,-1),(A,2)$ ماذا تمثل مجموعة النقاط في الفراغ والتي تحقق العلاقة:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MA}\right\|$$

الحل:

١. نعوض النقطة A في المستقيم (d):

- $4=6-2\lambda\Rightarrow2\lambda=2\Rightarrow\lambda=1$
- $5=-1+6\lambda\Rightarrow6\lambda=6\Rightarrow\lambda=1$
- $3=1+2\lambda\Rightarrow2\lambda=2\Rightarrow\lambda=1$

إذاً النقطة A تنتمي إلى المستقيم (d).

٢. لدينا:

النقطة: $B(4,0,-2)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{CB}(2-6,-2)$

التمثيل الوسيطي:

$$(CB):\begin{cases}x=2t+4\\ y=-6t\quad;t\in\mathbb{R}\\ z=-2t-2\end{cases}$$

.٣

لدينا المستقيم (d) شعاع توجيهه:$\vec{u}_d = (-2,6,2)$

ولدينا المستقيم (CB) شعاع توجيهه:$\vec{u}_{CB}(2,-6,-2)$

نلاحظ أن $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{CB}$ مرتبطان خطياً إذاً (d) و (CB) اما متوازيان أو منطبقان.

اختبار الاشتراك بنقطة:

$$\begin{cases} 6-2\lambda = 2t+4 \ldots (1) \\ -1+6\lambda = -6t \ldots (2) \\ 1+2\lambda = -2t-2 \ldots (3) \end{cases}$$

نأخذ الجملة:

$$\begin{cases} 6-2\lambda = 2t+4 \ldots (1) \\ 1+2\lambda = -2t-2 \ldots (3) \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$7 \neq 2$$

إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستقيمان (d) و (CB) لا يشتركان بأية نقطة فهما متوازيان.

.٤ تحديد النقطة:$A(4,5,3)$

تحديد الناظم $\vec{n}_P$:

ليكن $\vec{n}_P$ ناظم على المستوي P وبما أن $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{CB}$ شعاعين موجهين للمستوي P فإن $\vec{n}_P$ عمودي على كل من $\vec{u}_d$ و $\vec{u}_{CB}$ أي:

$$\vec{n}_P.\vec{u} = 0 \Rightarrow -2a+b-3c = 0$$
$$\vec{n}_P.\vec{v} = 0 \Rightarrow -5b-5c = 0$$

$$\begin{cases} -2a+b-3c = 0 \ldots (1) \\ -5b-5c = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

من (2) نجد:

$$-5b-5c = 0$$
$$5b = -5c$$
$$b = -c$$

نعوض في (1) فنجد:

$$-2a-c-3c = 0$$
$$2a = -4c$$
$$a = -2c$$

ليكن $c = 1$ ومنه:

$$\Rightarrow \vec{n}_P(-2,-1,1)$$

المعادلة:

$$P: -2(x-4)-1(y-5)+1(z-3) = 0$$
$$P: -2x+8-y+5+z-3 = 0$$
$$P: -2x-y+z+10 = 0$$

.٥ نعلم أن:

$$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (2-1+2)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$$

نعوض:

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MA}\right\|$$
$$\left\|(2-1+2)\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MA}\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA})\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG})\right\|$$
$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{AG}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{AG}\right\|$$

أي أن M نقطة متحركة بالفراغ بحيث يكون بعدها عن النقطة الثانية G يساوي مقداراً ثابتاً هو طول القطعة $[AG]$ أي أن M ترسم سطح الكرة التي مركزها G ونصف $R = AG$.

المسألة الثانية عشر:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(0,1,2)$ و $B(2,1,1)$ و $C(1,0,0)$ و $D(1,-2,\lambda)$ والمستويان:

$$P: 2x-y+3z = 9$$
$$Q: 3x-2y+4z = 11$$

1. جد العدد الحقيقي λ بحيث يكون المثلث ABD قائم في A.
2. أثبت أنّ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).
3. أثبت أنّ المستويان P و Q متقاطعين وجد تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك d.
4. أوجد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC).
5. أثبت ان النقطة $A'\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d ثم استنتج بعد A عن d.

الحل:

.١ يكون المثلث ABD قائم في A إذا كان الضلعين القائمين AB و AD متعامدان أي يتحقق:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$$
$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\,,\overrightarrow{AD}(1,-3,\lambda-2)$$

نعوض:

$$2(1)+0(-3)-1(\lambda-2) = 0$$
$$2-\lambda+2 = 0$$
$$\lambda = 4$$

.٢

حتى يكون (AD) عمودي على (ABC) يجب أن يكون $\overrightarrow{AD}$ شعاع توجيه للمستقيم، (AD) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC)، لدينا:

$$\overrightarrow{AB}(2,0,-1)\,,\overrightarrow{AC}(1,-1,-2)$$

شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC).ونعلم أن شعاع توجيه المستقيم (AD) هو: $\overrightarrow{AD}(1,-3,2)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 2+0-2 = 0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = 1+3-4 = 0$$

وبالتالي (AD) عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABD)، فهذا يعني أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC):

الناظم:

بما أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) فإنّ:

$$\vec{n}_{(ABC)} = \overrightarrow{AD}(1,-3,2)$$

النقطة: $A(0,1,2)$

المعادلة:

$$1(x-0)-3(y-1)+2(z-2)=0$$
$$x-3y+3+2z-4=0$$
$$x-3y+2z-1=0$$

٣.

لدينا المستوي P ناظمه $\vec{n}_P(2,-1,3)$

لدينا المستوي Q ناظمه $\vec{n}_Q(3,-2,4)$

نلاحظ أن $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات ومنه المستويان P و Q متقاطعان، لتحديد الفصل المشترك d:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=9 \ldots (1) \\ 3x-2y+4z=11 \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (-2):

$$\begin{cases} -4x+2y-6z=-18 \ldots (1) \\ 3x-2y+4z=11 \ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2):

$$-x-2z=-7$$
$$x=-2z+7$$

نعوض x في (2) نجد:

$$3(-2z+7)-2y+4z=11$$
$$-6z+21-2y+4z=11$$
$$-2z-2y=11-21$$
$$2y=-2z+10$$
$$y=-z+5$$

بفرض $z=t$ نعوض في y و x:

$$x=-2t+7$$
$$y=-t+5$$

ومنه:

$$d:\begin{cases} x=-2t+7 \\ y=-t+5\ ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

٤.

من الطلب السابق أوجدنا أن المستويان P و Q يتقاطعان في الفصل المشترك d ولتحديد نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) فإننا نوجد نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC)

وبالتالي تكون نقطة تقاطع المستويات P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC)

الخطوة الأولى:

دراسة الوضع النسبي بين المستقيم d والمستوي (ABC):

لدينا المستقيم d شعاع توجيهه: $\vec{u}_d(-2,-1,1)$

لدينا المستوي (ABC) ناظمه: $\vec{n}(1,-3,2)$

ولدينا:

$$\vec{n}.\vec{u}=-2+3+2=3\neq 0$$

ومنه المستقيم d والمستوي (ABC) متقاطعان.

الخطوة الثانية:

إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC):

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x-3y+2z-1=0 \ldots (1) \\ x=-2t+7 \ldots (2) \\ y=-t+5 \quad \ldots (3) \\ z=t \qquad \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض كلاً من $(2),(3),(4)$ في (1):

$$-2t+7-3(-t+5)+2t-1=0$$
$$-2t+7+3t-15+2t-1=0$$
$$3t-9=0$$
$$3t=9$$
$$t=3$$

نعوض قيمة t في $(2),(3),(4)$:

$$x=-2(3)+7 \Rightarrow x=1$$
$$y=-(3)+5 \Rightarrow y=2$$
$$z=3$$

ومنه إحداثيات I نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) هي:

$$I(1,2,3)$$

الخطوة الثالثة:

نقطة تقاطع المستويات الثلاثة P و Q و (ABC) هي نفسها نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) وهي: $I(1,2,3)$

٥. لدينا المستقيم d شعاع توجيهه:

$$\vec{u}(-2,-1,1)$$

ولدينا:

$$\overrightarrow{AA'}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

نختبر تعامد كلاً من $\overrightarrow{AA'}$ مع شعاع توجيه المستقيم d وفق:

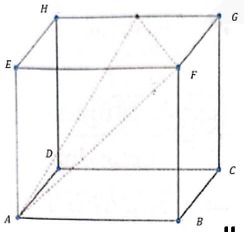
$$\vec{u}.\overrightarrow{AA'}=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=0$$

إذاً النقطة A' هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d.

لحساب بعد النقطة A عن المستقيم d:

$$dist(A,d) = AA'$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{21}{9}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$



المسألة الثالثة عشر:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

فيه $AB = 4$ و $AE = AD = 2$

ولتكن J منتصف $[HG]$ وتتأمل معلماً

متجانساً $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. أوجد إحداثيات النقاط A و F و C و J.

٢. احسب المسافتين $[AJ]$ و $[JF]$.

٣. أثبت أن المثلث AFJ قائم في J واحسب مساحته.

٤. أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$

ناظم المستوي (AFJ) ثم اكتب معادلته.

٥. احسب بعد C عن المستوي AFJ

ثم استنتج حجم الرباعي الوجوه $AFJC$.

٦. أوجد إحداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة E

على المستقيم (AF).

الحل:

١. إيجاد الإحداثيات:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,2)$
$B(4,0,0)$	$F(4,0,2)$
$D(0,2,0)$	$H(0,2,2)$
$C(4,2,0)$	$G(4,2,2)$

$$J\left(\frac{0+4}{2},\frac{2+2}{2},\frac{2+2}{2}\right)$$

$$J(2,2,2)$$

٢. لحساب المسافتين:

$$\overrightarrow{AJ}(2,2,2) \to AJ = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{JF}(2,-2,0) \to JF = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

٣. حتى يكون المثلث AFJ قائم في J يجب أن يكون:

$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JF} = 0$$

$$4-4+0$$

$$0 = 0$$

محققة، إذا المثلث AEJ قائم في J.

مساحتهُ:

$$S_{AFJ} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمتين}}{2}$$

$$S_{AFJ} = \frac{AJ.JF}{2} = \frac{2\sqrt{3}.2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}$$

٤. لدينا:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AJ} = 2+2-4 = 0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{JF} = 2-2+0 = 0$$

أي $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AJ}$ و $\overrightarrow{JF}$

وبالتالي $\vec{n}$ ناظم على المستوي (AFJ).

معادلة المستوي حيث:

النقطة: $A(0,0,0)$

الناظم: $\vec{n}(1,1,-2)$

فتكون المعادلة:

$$1(x-0)+1(y-0)-2(z-0) = 0$$

$$x+y-2z = 0$$

٥. لدينا:

$$dist\big(C,(AFJ)\big) = \frac{|4+2-0|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

حساب الحجم:

$$V_{AFJC} = \frac{1}{3}.S_{AFJ}.h$$

حيث:

$$S_{AFJ} = 2\sqrt{6}$$

$$h = dist\big(C,(AFJ)\big) = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow V_{AFJC} = \frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6} = 4$$

٦.

التمثيل الوسيطي للمستقيم (AF):

النقطة: $A(0,0,0)$

شعاع التوجيه: $\overrightarrow{AF}(4,0,2)$

فيكون التمثيل الوسيطي هو:

$$(AF):\begin{cases} x = 4t \\ y = 0 \;\; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

لتكن النقطة $N(4t,0,2t)$ نقطة من المستقيم (AF) ولدينا:

$$\overrightarrow{EN}(4t,0,2t-2)$$

$$\vec{u}(4,0,2)$$

تكون النقطة N هي المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF) إذا تحقق:

$$\overrightarrow{EN}.\vec{u} = 0$$

$$16t+0+4t-4 = 0$$

$$20t = 4 \to t = \frac{4}{20} \to t = \frac{1}{5}$$

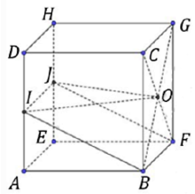
نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x = \frac{4}{5} \;, y = 0 \;, z = \frac{2}{5}$$

ومنه إحداثيات N هي:

$$N\left(\frac{4}{5},0,\frac{2}{5}\right)$$

المسألة الرابعة عشر:



$ABCDEFGH$ مكعب فيه I و J منتصفا $[AD]$ و $[EH]$ و O مركز الوجه $(BCGF)$

نتخذ المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقاط B , F , I.
2. تأكد أن $\vec{n}(1,0,2)$ ناظم على المستوي $(BFJI)$ ثم اكتب معادلته.
3. احسب بعد O عن المستوي $(BFJI)$ وحجم الهرم $(OBFJI)$.
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(BFJI)$ والمار بالنقطة O
5. احسب احداثيات النقطة N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(BFJI)$.
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,\alpha),(B,\beta),(F,\gamma)$ حيث α و β و γ يطلب تعيينها.

الحل:

1. إحداثيات رؤوس المكعب:

$D(0,0,1)$	$A(0,0,0)$
$C(1,0,1)$	$B(1,0,0)$
$H(0,1,1)$	$E(0,1,0)$
$G(1,1,1)$	$F(1,1,0)$

إحداثيات I منصف $[AD]$: $I\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$

إحداثيات J منتصف $[EH]$: $J\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$

إحداثيات O مركز الوجه $(BCGF)$:

تكون إحداثياتها هي منتصف القطر $[BG]$: $O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

2. لإثبات أن $\vec{n}(1,0,2)$ ناظم على المستوي $(BFJI)$ نثبت أنه عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً فيه وليكن لدينا:

$$\overrightarrow{BF}(0,1,0)\ ,\ \overrightarrow{BI}\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$$

نلاحظ أنهما غير مرتبطين خطياً

لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد.

$$\vec{n}.\overrightarrow{BF}=1(0)+0(1)+2(0)=0$$

ومنه $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BF}$ متعامدين.

$$\vec{n}.\overrightarrow{BI}=1(-1)+0(0)+2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=-1+1=0$$

ومنه $\vec{n}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعامدين.

لكتابة معادلة المستوي نحتاج نقطة وناظم ولدينا:

النقطة: $B(1,0,0)$

الناظم: $\vec{n}(1,0,2)$

المعادلة:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$1(x-1)+0(y-0)+2(z-0)=0$$
$$x-1+2z=0$$
$$(BFJI): x+2z-1=0$$

3. لحساب بعد O عن المستوي $(BFJI)$:

$$dist\big(O,(BFJI)\big)=\frac{\left|1+2\left(\frac{1}{2}\right)-1\right|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $(OBFJI)$:

القانون:

$$V_{(OBFJI)}=\frac{1}{3}S_{(BFJI)}.h$$

مساحة القاعدة S:

لدينا:

$$BF=1\ ,BI=\sqrt{1+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

ومنه:

$$S_{(BFJI)}=BF\times BI=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

الارتفاع h:

$$h=dist\big(O,(BFJI)\big)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

وبالتالي:

$$V_{(OBFJI)}=\frac{1}{3}S_{(BFJI)}.h$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{6}$$

4. لكتابة التمثيل الوسيطي نحتاج:

نقطة: $O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

شعاع توجيه:

بما أن d عمودي على المستوي $(BFJI)$ فإن:

$$\vec{u}=\vec{n}(1,0,2)$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=2t+\dfrac{1}{2}\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$$

قُل للأماني السائراتِ لربها؛ اللهُ يسمعُها ولن ينساها

٥. لتكن الجملة:

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \ldots (1) \\ x = t + 1 \ldots (2) \\ y = \frac{1}{2} \ldots (3) \\ z = 2t + \frac{1}{2} \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1):

$$t + 1 + 2\left(2t + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$
$$t + 2 + 4t + 1 - 1 = 0$$
$$5t + 1 = 0$$
$$5t = -1$$
$$t = -\frac{1}{5}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4):

$$x = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$
$$y = \frac{1}{2}$$
$$z = 2\left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow N\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}\right)$$

٦. بما أن النقطة N هي نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(BFJI)$ فإن النقاط N و I و J و F و B تقع في مستوٍ واحد وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BN}$ مرتبطة خطياً وبالتالي يوجد عددين حقيقيين a و b يحققان:

$$\overrightarrow{BN} = a\overrightarrow{BF} + b\overrightarrow{BI}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

لله كل الأحلام لله كل الأماني 🙁💙

وهي تكافئ:

$$\begin{cases} -\frac{1}{5} = -b \ldots (1) \\ \frac{1}{2} = a \ \ldots (2) \\ \frac{1}{10} = \frac{1}{2}b \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$b = \frac{1}{5}$$

من (2) نجد:

$$a = \frac{1}{2}$$

نعوض في (3) للتحقق:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)$$
$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

محققة ومنه يوجد للجملة حل وحيد بحيث:

$$b = \frac{1}{5} \quad , \quad a = \frac{1}{2}$$

أيّ أنّ:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{5}\overrightarrow{BI}$$
$$10\overrightarrow{BN} = 5\overrightarrow{BF} + 2\overrightarrow{BI}$$
$$10\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$$
$$10\overrightarrow{BN} - 5\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NF}\right) - 2\left(\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NI}\right) = \vec{0}$$
$$10\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{NF} - 2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{NF} - 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$
$$-3\overrightarrow{NB} - 5\overrightarrow{NF} - 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$
$$3\overrightarrow{NB} + 5\overrightarrow{NF} + 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$$

ومنه النقطة N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$(I, 2), (F, 5), (B, 3)$ أيّ أنّ: $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$

المسألة الخامسة عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$B(1,0,-1)$	$A(-1,1,3)$
$D(2,0,-1)$	$C(2,-1,1)$

والمستوي P الذي معادلته $P := 2y + z + 1 = 0$

والمستقيم Δ الذي تمثيله الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$

١. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $[BC]$ ثم تحقق ان المستقيم $[BC]$ محتوى في P.

٢. بين أن المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا في نفس المستوي.
٣. احسب المسافة بين النقطة A والمستوي P.
٤. بين أن النقطة D من المستوي P وأنّ المثلث BCD قائم.
٥. احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل:

١. لكتابة التمثيل الوسيطي نحتاج:

النقطة: $B(1,0,-1)$

شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{BC}(1,-1,2)$

التمثيل الوسيطي للمستقيم يكون:

$$(BC):\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

التحقق من أن المستقيم $[BC]$ محتوى في P:

- لدينا المستقيم (BC) شعاع توجيهه: $\vec{u}(1,-1,2)$
- ولدينا المستوي P ناظمه: $\vec{n}(0,2,1)$
- نختبر أن (BC) و P متوازيان:

$$\vec{n}.\vec{u} = 0-2+2 = 0$$

ومنه (BC) و P متوازيان

نختبر الاحتواء وفق:

لدينا الجملة:

$$\begin{cases} 2y+z+1=0 \ldots (1) \\ x = t+1 \ldots (2) \\ y = -t \quad \ldots (3) \\ z = 2t-1 \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) فنجد:

$$2(-t)+2t-1+1 = 0$$
$$0 = 0$$

محققة ومنه للجملة عدد لا نهائي من الحلول

إذاً المستقيم (BC) محتوى في المستوي P.

٢. يقصد في السؤال أن نبين

أنّ المستقيمين (Δ) و (BC) متخالفين.

- لدينا المستقيم (Δ) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{\Delta}(0,1,-2)$
- لدينا المستقيم (BC) شعاع توجيهه: $\vec{u}_{(BC)}(1,-1,2)$

نلاحظ أن $\vec{u}_{\Delta}$ و $\vec{u}_{(BC)}$ غير مرتبطين خطياً

لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ومنه فإنّ

المستقيمان (Δ) و (BC) إما متقاطعان أو متخالفان

(ليسا من نفس المستوي)

نجري اختبار الاشتراك بنقطة، لدينا الجملة:

$$\begin{cases} -1 = t+1 \ldots (1) \\ 2+\beta = -t \ldots (2) \\ 1-2\beta = 2t-1 \ldots (3) \end{cases}$$

من (1) نجد:

$$-1 = t+1 \Rightarrow t = -2$$

من (2) نجد:

$$2+\beta = -(-2) \Rightarrow \beta = 0$$

نتحقق في (3):

$$1-2(0) = 2(-2)-1$$
$$1 \neq -5$$

وهذا غير ممكن إذاً الجملة مستحيلة الحل وبالتالي المستقيمان (Δ) و (BC) لا يشتركان بأية نقطة وبالتالي (Δ) و (BC) متخالفان، أي ليسا من نفس المستوي.

٣. لحساب المسافة بين P و A:

$$dist(A,P) = \frac{|2(1)+3+1|}{\sqrt{0+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

٤. نعوض إحداثيات النقطة D في المستوي P وفق:

$$2(0)-1+1 = 0$$
$$0 = 0$$

محققة ومنه D نقطة من المستوي P.

لإثبات أن المثلث قائم، لدينا:

$$\overrightarrow{BC}(1,-1,2) \rightarrow BC = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{BD}(1,0,0) \rightarrow BD = \sqrt{1+0+0} = 1$$
$$\overrightarrow{CD}(0,1,-2) \rightarrow CD = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}$$

ومنه المثلث BCD مختلف الأضلاع نختبر كونه قائماً:

$$(BC)^2 = (BD)^2 + (CD)^2$$
$$(\sqrt{6})^2 = (1)^2 + (\sqrt{5})^2$$
$$6 = 1+5$$
$$6 = 6$$

إذاً المثلث BCD مختلف الأضلاع وقائم في D ووتره BC

٥. حجم رباعي الوجوه $ABCD$:

- تمهيد:

تحديد قاعدة رباعي الوجوه $ABCD$:

بما أن المستقيم (BC) محتوى في المستوى P.

وبما أن النقطة D من المستوي P ومنه المستوي P معين بالنقاط B و C و D وبالتالي فإن المثلث BCD يمثل قاعدة رباعي الوجوه.

تحديد رأس رباعي الوجوه $ABCD$:

بما أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P فإنّ A تمثل رأس رباعي الوجوه.

- قانون:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD}.h$$

حيث:

مساحة القاعدة S_{BCD} :

بما أن المثلث قائم فإنّ مساحته:

$$S_{BCD} = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{BC.CD}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

الارتفاع:

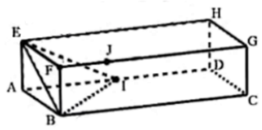
$$h = dist(A,P) = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

ومنهُ:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.S_{BCD}.h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 1$$

المسألة السابعة عشر:



ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $AD = 4$ و $AE = 1$, ولتكن النقطة I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق العلاقة $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات و I و J.

٢. أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي:
$$x + y + 2z - 2 = 0$$

٣. بين نوع المثلث EIB, ثم احسب مساحته.

٤. احسب بعد G عن المستوي (EIB) واستنتج حجم رباعي الوجوه $G - EIB$.

٥. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J عمودياً على المستوي (EIB).

٦. استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

الحل:

١. إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(2,0,0)$	$F(2,0,1)$
$D(0,4,0)$	$H(0,4,1)$
$C(2,4,0)$	$G(2,4,1)$

إحداثيات I منتصف $[AD]$:

$$I\left(\frac{x_A + x_D}{2},\frac{y_A + y_D}{2},\frac{z_A + z_D}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+4}{2},\frac{0+0}{2}\right)$$

$$I(0,2,0)$$

إحداثيات J التي تحقق:

$$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$

لتكن لدينا $J(x,y,z)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

تكافئ:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$
$$y = 1$$
$$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$$
$$\to J(2,1,1)$$

٢. تعويض إحداثيات E في المعادلة:

$$0 + 0 + 2 - 2 = 0$$
$0 = 0 \to$ محققة

تعويض إحداثيات I في المعادلة:

$$0 + 2 + 0 - 2 = 0$$
$0 = 0 \to$ محققة

تعويض إحداثيات B في المعادلة:

$$2 + 0 + 0 - 2 = 0$$
$0 = 0 \to$ محققة

بما أن المعادلات الثلاثة محققة تكون معادلة المستوي (EIB) هي:

$$x + y + 2z - 2 = 0$$

٣. نوع المثلث EIB:

لدينا:

$$\overrightarrow{EI}(0,2,-1) \to EI = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{EB}(2,0,-1) \to EB = \sqrt{4+0+1} = \sqrt{5}$$
$$\overrightarrow{BI}(-2,2,0) \to BI = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

ومنه المثلث EIB متساوي الساقين.

اختبار كونه قائم:

$$(BI)^2 = (EI)^2 + (EB)^2$$
$$8 = 5 + 5$$
$$8 \neq 10$$

إذاً المثلث EIB متساوي الساقين.

مساحة EIB:

المساحة $= \frac{1}{2}$(طول القاعدة)(الارتفاع)

حيث:

طول القاعدة هو: $BI = 2\sqrt{2}$

الارتفاع هو: EK حيث الـ K هي منتصف $[BI]$

$$K(1,1,0)$$

يكون الارتفاع هو:

$$EK = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

منه تكون المساحة:

$$S_{EIB}=\frac{1}{2}(BI)(EK)$$
$$=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})(\sqrt{3})=\sqrt{6}$$

٤. بعد G عن المستوي (EIB):

$$dist(G,(EIB))=\frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

حجم رباعي الوجوه $G-EIB$:

الرأس هو: G

القاعدة هي: (EIB)

مساحة القاعدة: $S_{EIB}=\sqrt{6}$

الارتفاع هو: بعد رأس رباعي الوجوه G عن مستوي القاعدة (EIB)، أي:

$$dist(G,(EIB))=\sqrt{6}$$

ومنه حجم رباعي الوجوه $G-EIB$:

$$V_{G-EIB}=\frac{1}{3}.S_{EIB}.h$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{6}(\sqrt{6})=\frac{6}{3}=2$$

٥.

النقطة: $J(2,1,1)$

شعاع التوجيه:

بما ان المستقيم d عمودي على المستوي (EIB) فإنّ، ناظم المستوي هو نفسه شعاع التوجيه:

$$\vec{u}=\vec{n}(1,1,2)$$

التمثيل الوسيطي d:

$$(d):\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\;;t\in\mathbb{R}\\ z=2t+1\end{cases}$$

٦. لدينا المستوي (EIB) معادلته:

$$(EIB):x+y+2z-2=0$$

لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J والعمودي على المستوي (EIB):

$$(d):\begin{cases}x=t+2\\ y=t+1\;;t\in\mathbb{R}\\ z=2t+1\end{cases}$$

تكون إحداثيات J' المسقط القائم لـ J على المستوي (EIB) هي نقطة تقاطع المستقيم d المستوي (EIB) ويتم إيجادها وفق:

$$\begin{cases}x+y+2z-2=0\;...(1)\\ x=t+2\;...(2)\\ y=t+1\;...(3)\\ z=2t+1\;...(4)\end{cases}$$

نعوض (2) , (3) , (4) في (1):

$$t+2+t+1+2(2t+1)-2=0$$
$$2t+3+4t+2-2=0$$
$$6t+3=0$$
$$6t=-3$$
$$t=-\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) , (3) , (4):

$$x=-\frac{1}{2}+2\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$
$$y=-\frac{1}{2}+1\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$
$$z=2\left(-\frac{1}{2}\right)+1\Rightarrow z=0$$

ومنه تكون إحداثيات J' المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) هي: $J'\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$

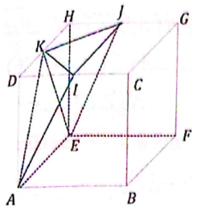
يقصد في الطلب أثبت أن I و J' و B تقع على استقامة واحدة.

لدينا:

$$\overrightarrow{BI}(-2,2,0)\,,\overrightarrow{BJ'}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BJ'}$ مرتبطان خطياً ومنه تكون النقاط B و I و J' تقع على استقامة واحدة وبالتالي النقطة J' تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$.

المسألة الثامنة عشر:



نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ لتكن I و J و K منتصفات الأضلاع $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب. نتخذ معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ في الفراغ والمطلوب:

1. أوجد إحداثيات النقاط A و I و E.
2. اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$.
3. احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$
4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.
5. احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.
6. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

1. نلاحظ حسب الرسم أن:

$$E(0,1,0)\,,I\left(\frac{1}{2},0,1\right)\,,A(0,0,0)\,,J\left(\frac{1}{2},1,1\right)$$
$$\overrightarrow{AE}(0,1,0)\,,\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

٢. نفرض شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$ للمستوي $(AIJE)$:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AE}=0\Rightarrow b=0$$

$$\vec{n}.\overrightarrow{AI}=0\Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$$

نفرض $c=1$ لأن للمستوي أكثر من ناظم:

$$\frac{1}{2}a+1=0\Rightarrow a=-2$$

وبالتالي يكون $\vec{n}(-2,0,1)$.

معادلة المستوي $(AIJE)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$-2(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0$$
$$-2x+z=0$$

نعوض إحداثيات النقطة J في المعادلة.

$$-2\left(\frac{1}{2}\right)+1=0\to -1+1=0\to 0=0$$

ومنه: $J\in(AIE)$.

٣. بعد K عن المستوي $(AIJE)$:

نلاحظ حسب الرسم أن $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$:

$$h=dist(K,AIJE)=\frac{|-2(0)+0+1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

حجم الهرم $KAIJE$:

نحسب مساحة قاعدة الهرم $KAIJE$ وهي $AIJE$:

$$S_{AIJE}=IJ.AI=1\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$V_{KAIJE}=\frac{1}{3}.S_{AIJE}.h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}$$

٤. بما أن المستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$:

$$\vec{u}_d=\vec{n}_{AIJE}=(-2,0,1)$$

$$d:\begin{cases}x=-2t\\ y=\frac{1}{2}\quad ;t\in\mathbb{R}\\ z=t+1\end{cases}$$

٥. لحساب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$ نوجد الحل المشترك لمعادلة المستوي $(AIJE)$ مع المستقيم d:

$$-2(-2t)+0\left(\frac{1}{2}\right)+t+1=0$$

$$4t+t+1=0\Rightarrow t=-\frac{1}{5}$$

ومنه إحداثيات N هي $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$.

٦.

$$\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AI}+y\overrightarrow{AE}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x\\ 0\\ x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y\\ 0\end{pmatrix}$$

فتكون:

$$\frac{1}{2}x=\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{4}{5}$$

$$y=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AE}$$

$$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{AN}+5\overrightarrow{NE}$$

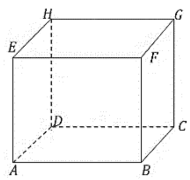
$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow -3\overrightarrow{NA}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$$

إذاً N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$(A,-3),(I,8),(E,5)$$

المسألة التاسعة عشر:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

فيه $AB=3$ و $BC=2$ و $AE=1$

و J مركز ثقل المثلث BGE والمطلوب:

١. أثبت صحة المساواة الشعاعية $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

٢. في معلم متجانس $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ أوجد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات النقطة J.

٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DF)

٤. أثبت أنّ النقاط D و J و F تقع على استقامة واحدة.

٥. اكتب معادلة الأسطوانة التي محورها $[AE]$ ونصف قطرها $[AD]$

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AD}}_{l_1}=\underbrace{\vec{0}}_{l_2}$$

$$l_1=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{AD}$$
$$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC}-\overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}$$
$$= \vec{0} = l_2$$
محققة

الطلب الثاني:

إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات:

$A(0,0,0)$	$E(0,0,1)$
$B(3,0,0)$	$F(3,0,1)$
$D(0,2,0)$	$H(0,2,1)$
$C(3,2,0)$	$G(3,2,1)$

إحداثيات J مركز ثقل المثلث (BGE) :

$$x_J = \frac{x_B + x_G + x_E}{3} = \frac{3+3+0}{3} = 2$$
$$y_J = \frac{y_B + y_G + y_E}{3} = \frac{0+2+0}{3} = \frac{2}{3}$$
$$z_J = \frac{z_B + z_G + z_E}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\rightarrow J\left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

الطلب الثالث:

التمثيل الوسيط للمستقيم (DF)

تحديد النقطة: $D(0,2,0)$

تحديد شعاع التوجيه: $\vec{u} = \overrightarrow{DF}(3,-2,1)$

التمثيل الوسيطي:

$$(DF): \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t + 2 \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

الطلب الرابع:

لدينا:

$$\overrightarrow{DJ}\left(2, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{DF}(3,-2,1)$$

نلاحظ أنّ المركبات متناسبة ويتحقق:

$$\overrightarrow{DJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DF}$$

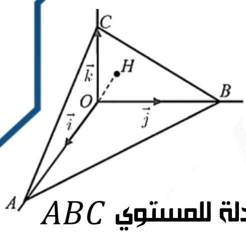
إذاً الشعاعين $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطين خطياً ومنه النقاط D و F و J تقع على استقامة واحدة.

الطلب الخامس:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$0 \le z \le 1$$

لكل حلم ؛ حياة.. ولكل حياة ؛ حلم محقق 😍💙

المسألة العشرون:



تتأمل في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط $A(2,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

١. أثبت أنّ $x + y + 2z = 2$ معادلة للمستوي ABC

٢. استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC)

٣. أوجد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC)

٤. تحقق أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC.

الحل:

الطلب الأول:

تعويض النقطة A في معادلة المستوي:

$$2 + 0 + 2(0) = 2$$
$2 = 2 \rightarrow$ محققة

تعويض النقطة B في معادلة المستوي:

$$0 + 2 + 2(0) = 2$$
$2 = 2 \rightarrow$ محققة

تعويض النقطة C في معادلة المستوي:

$$0 + 0 + 2(1) = 2$$
$2 = 2 \rightarrow$ محققة

ومنه $x + y + 2z = 2$ معادلة للمستوي (ABC)

الطلب الثاني:

التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ :

تحديد النقطة $O(0,0,0)$.

تحديد شعاع التوجيه:

بما أنّ Δ عمودي على المستوي (ABC) فإنّ

$$\vec{u}_\Delta = \vec{n}_{ABC}(1,1,2)$$

التمثيل الوسيطي:

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

الطلب الثالث:

النقطة H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC)

ومنه لدينا الجملة:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \ldots (1) \\ x = t \ldots (2) \\ y = t \ldots (3) \\ z = 2t \ldots (4) \end{cases}$$

نعوض (2) و (3) و (4) في (1) :

$$t + t + 2(2t) = 2$$

$$6t = 2 \rightarrow t = \frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في كل من (2) و (3) و (4) :

$$x = \frac{1}{3} \quad , \quad y = \frac{1}{3} \quad , \quad z = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

الطلب الرابع:

لدينا:

$\overrightarrow{AB}(-2,2,0)$

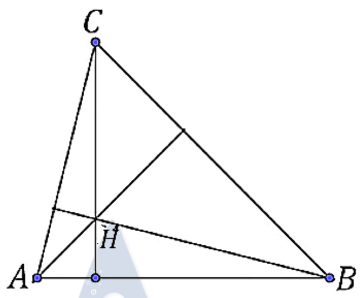
$\overrightarrow{AC}(-2,0,1)$

$\overrightarrow{BC}(0,-2,1)$

$\overrightarrow{AH}\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{BH}\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{CH}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$



إثبات أنّ (AH) ارتفاع في المثلث (ABC) :

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \left(-\frac{5}{3}\right)(0) + \left(\frac{1}{3}\right)(-2) + \left(\frac{2}{3}\right)(1)$$

$$= 0 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

ومنه (AH) ارتفاع في المثلث ABC .

إثبات أنّ (BH) ارتفاع في المثلث (ABC) :

$$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\right)(-2) + \left(-\frac{5}{3}\right)(0) + \left(\frac{2}{3}\right)(1)$$

$$= -\frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 0$$

ومنه (BH) ارتفاع في المثلث ABC .

إثبات أنّ (CH) ارتفاع في المثلث (ABC) :

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3}\right)(-2) + \left(\frac{1}{3}\right)(2) + \left(-\frac{1}{3}\right)(0)$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0 = 0$$

ومنه (CH) ارتفاع في المثلث ABC .

وبالتالي النقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

الطلب الخامس:

حجم رباعي الوجوه $(OABC)$:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{OAB}.h$$

حيث:

$$S_{OAB} = \frac{OA.OB}{2} = \frac{(2)(2)}{2} = 2$$

$$h = OC = 1$$

ومنهُ:

$$V_{OABC} = \frac{1}{3}(2)(1) = \frac{2}{3}$$

مساحة المثلث ABC :

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.h \ldots (*)$$

حيث h في هذه الحالة هي بُعد النقطة O عن المستوي (ABC) أيّ أنّ:

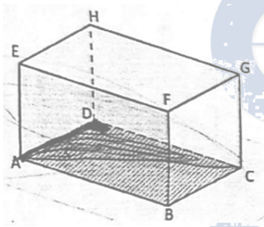
$$h = OH = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

بالتعويض في علاقة $(*)$:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} S_{ABC}.\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

المسألة الواحد والعشرون:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات مرسوم جانباً فيه $AD = 2$ و $AB = 4$ و $AE = 1$ نزوده بالمعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. اكتب إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات.

٢. نعرف النقطة M بالعلاقة $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$, عين إحداثيات النقطة M

٣. بفرض K مسقط M على $[DC]$ عين إحداثيات النقطة K ثم استنتج طول القطعة $[MK]$

٤. عندما تدور القطعة $[AC]$ من المثلث ACD حول المستقيم (AD) تولد مخروطاً دورانياً قائماً , عين معادلة هذا المخروط ثم احسب حجمهُ.

٥. اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AH]$

الحل:

الطلب الأول:

احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات:

$E(0,0,1)$	$A(0,0,0)$
$F(4,0,1)$	$B(4,0,0)$
$H(0,2,1)$	$D(0,2,0)$
$G(4,2,1)$	$C(4,2,0)$

الطلب الثاني:

إيجاد إحداثيات النقطة M :

بفرض $M(x,y,z)$ ولدينا:

$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EG}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$x=\frac{4}{3}\quad,\quad y=\frac{2}{3}\quad,\quad z=1$$

$$\rightarrow M\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

الطلب الثالث:

تعيين K :

التمثيل الوسيطي $[DC]$:

النقطة: $D(0,2,0)$

شعاع التوجيه: $\vec{u}=\overrightarrow{DC}(4,0,0)$

التمثيل الوسيطي:

$$[DC]:\begin{cases} x=4t \\ y=2 \\ z=0 \end{cases};t\in[0,1]$$

بما أنّ K من $[DC]$ فإنّ:

$$K(4t,2,0)\ldots(*)$$

وتكون K مسقط M على $[DC]$ إذا تحقق

$$\overrightarrow{MK}.\vec{u}=0\ldots(**)$$

$$\left(4t-\frac{4}{3}\right)(4)+\left(\frac{4}{3}\right)(0)+(-1)(0)=0$$

$$16t-\frac{16}{3}=0$$

$$16t=\frac{16}{3}\rightarrow t=\frac{1}{3}$$

نعوض قيمة t في $(*)$ فنجد:

$$K\left(\frac{4}{3},2,0\right)$$

طول $[MK]$:

$$MK=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{0+\frac{16}{9}+1}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

الطلب الرابع:

معادلة المخروط:

تحديد المحور $(O,\vec{j})$

تحديد الرأس: $A(0,0,0)$

تحديد مركز القاعدة: $D(0,2,0)$

تحديد نصف القطر: $r=DC=4$

حيث:

$$\overrightarrow{DC}(4,0,0)\rightarrow DC=4$$

ومنهُ:

$$\begin{cases} x^2+z^2=\left(\frac{4}{2}\right)^2y^2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=4y^2 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$$

حجم المخروط:

$$\text{حجم المخروط}=\frac{1}{3}(\text{مساحة القاعدة})(\text{الارتفاع})$$

حيث:

$$\text{مساحة القاعدة}=\pi r^2=16\pi$$

$$\text{الارتفاع}=AD=\sqrt{4}=2$$

ومنهُ:

$$\text{حجم المخروط}=\frac{1}{3}(16\pi)(2)=\frac{32\pi}{3}$$

الطلب الخامس:

معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AH]$:

تحديد النقطة:

النقطة I منتصف القطعة $[AH]$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AH]$ ومنهُ:

$$I\left(\frac{0+0}{2},\frac{0+2}{2},\frac{0+1}{2}\right)$$

$$\rightarrow\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$$

تحديد الناظم:

إنّ ناظم المستوي المحوري للقطعة $[AH]$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AH}(0,2,1)$$

المعادلة:

$$0(x-0)+2(y-1)+1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$2y-2+z-\frac{1}{2}=0$$

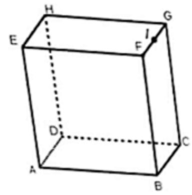
$$4y+2z-4-1=0$$

$$4y+2z-5=0$$

دورة 2017 امتحان نصفي 60 درجة:

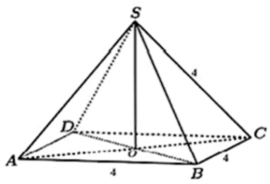
$ABCD$ رباعي وجوه فيه I و J منتصفا $[AB]$ و $[CD]$ على الترتيب ولدينا E و F تحققان العلاقتين: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ وأخيراً H هي منتصف $[EF]$ أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

دورة 2017 امتحان نصفي 40 درجة:



في الشكل المجاور $ABCDEFGH$ مكعب و I منتصف FG والمطلوب: عين النقطة M التي تحقق: $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{GI}$

دورة 2017 امتحان نصفي 60 درجة:



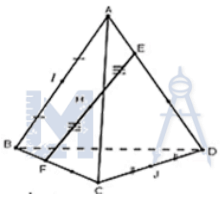
تتأمل هرم $S-ABCD$ قاعدته مربع طول ضلعه يساوي 4 ورأسه S وطول كل حرف من حروفه الجانبية يساوي 4 ولدينا النقطة O مرتسم S القائم على القاعدة والمطلوب:

١. احسب $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

٢. احسب طول القطر CA ثم احسب $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AS}$

٣. عين G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,2)$ و $(B,3)$ و $(S,1)$

دورة 2017 امتحان نصفي 100 درجة:



في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(2,1,-2)$ و $B(7,-2,0)$ والشعاعان $\vec{u}(2,-1,0)$ و $\vec{v}(-3,1,2)$ والمطلوب:

١. أثبت أن الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

٢. اكتب معادلة المستوي الذي يقبل $\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه له

٣. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d الذي يقبل $\vec{u}$ شعاعاً توجيهياً له ويمر بالنقطة A

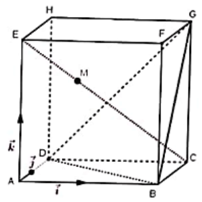
دورة 2017 الأولى 40 درجة:

١. اكتب معادلة للكرة S التي مركزها O مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

٢. تحقق أن المستوي P الذي معادلته $P: x-y+z+3=0$ مماس للكرة S

حلمك ليس سهلاً، ولكنه ممكن..

دورة 2017 الأولى 100 درجة:



$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 , نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في المعلم $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ و $\overrightarrow{AE}=2\vec{k}$

١. اكتب معادلة للمستوي GBD

٢. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم (EC)

٣. جد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي GBD

٤. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق: $\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$

٥. أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC)

دورة 2017 الثانية 40 درجة:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقطتان $A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

دورة 2017 الثانية 40 درجة:

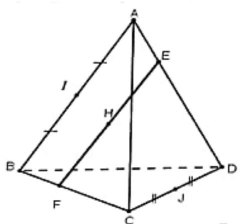
اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d و d' حيث:

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=-3t+2\,;t\in R \\ z=-3t+3 \end{cases}$$

$$d':\begin{cases} x=s \\ y=-3s-3\,;s\in R \\ z=-s+1 \end{cases}$$

هل المستقيمان d و d' يقعان في مستو واحد؟ علل إجابتك..

دورة 2017 الثانية 60 درجة:



ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه ويكن α عدد حقيقي و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ ولدينا النقطتان E و F معرفتان بالعلاقتين: $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ وأخيراً H منتصف $[EF]$ أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

دورة 2018 الاولى 40 درجة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي:

$$P: x+2y+z-1=0$$

احسب بعد النقطة A عن المستوي P ثم اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

دورة 2018 الأولى 100 درجة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,1,0)$ و $B(1,2,1)$ و $C(4,0,0)$ والمطلوب:

١. أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

٢. أثبت أن معادلة المستوي ABC تعطى بالعلاقة:

$$x+3y-3z-4=0$$

☜ ليكن المستويان P و Q معادلتهما:

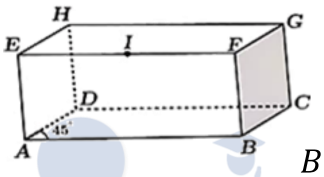
$$P: x+2y-z-4=0$$
$$Q: 2x+3y-2z-5=0$$

٣. أثبت أن المستويين يتقاطعان في الفصل المشترك d الذي تمثيله الوسيطي:

$$d:\begin{cases} x=t-2 \\ y=3 \qquad ;t\in R \\ z=t \end{cases}$$

٤. ما هي نقطة تقاطع المستويات P و Q و ABC

٥. احسب بعد A عن المستقيم d



دورة 2018 الثانية 40 درجة:

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$ يساوي 45^0 والنقطة I منتصف $[EF]$

١. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

٢. عين موضع النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{FB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$$

دورة 2018 الثانية 100 درجة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $A(2,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(4,0,0)$ و $D(0,4,0)$ و $E(1,-1,1)$

جد $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CE}$

١. أثبت أن النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة

٢. أثبت أن (AB) يعامد المستوي CDE

٣. اكتب معادلة المستوي CDE

٤. احسب بعد B عن المستوي CDE

٥. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمس المستوي CDE

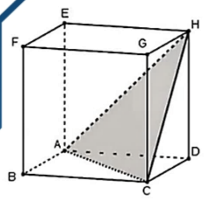
دورة 2019 الأولى 40 درجة:

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

تتأمل النقطتين $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$

١. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه له $\vec{u}(2,2,1)$

٢. أثبت أن المستقيمان (AB) و d متعامدان



دورة 2019 الأولى 100 درجة:

نتأمل في معلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$

١. اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A و C و H و F و D

٢. اكتب معادلة المستوي ACH

٣. أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: -2x+2y-2z+1=0$ يوازي المستوي ACH

٤. بفرض I مركز ثقل المثلث ACH أثبت أن D و I و F على استقامة واحدة

٥. اكتب معادلة كرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$ وبين أن المستوي (ACH) يمس الكرة S

دورة 2019 الثانية 40 درجة:

نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(2,1,-2)$ و $B(-1,2,1)$ والمستوي P الذي معادلته:

$$P: 3x-y-3z-8=0$$

١. أثبت أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P

٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على P

دورة 2019 الثانية 100 درجة:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

$$P: 2x-y+2z-2=0$$
$$Q: x+y+z-1=0$$
$$R: x-z-1=0$$

١. أثبت أن المستويين P و Q متقاطعين بفصل مشترك Δ , اكتب تمثيلاً وسيطياً له

٢. تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر بالنقطة A

٣. أثبت ان المستويات P و Q و R تتقاطع في نقطة I يطلب تعيين إحداثياتها

٤. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم Δ

دورة 2020 الأولى 40 درجة:

نتأمل المستويات:

$$P_1: 2x-y+z+1=0$$
$$P_2: x+y-z=0$$

١. تيقن أن المستويان متعامدان

٢. اكتب تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك

كل ما ترجوهُ آتٍ .. إنّ خير اللهِ مقبل 💙

دورة 2020 الأولى 80 درجة:

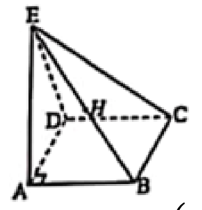
في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $D(0,0,1)$ و $A(1,0,0)$ و $B(4,3,-3)$ و $C(-1,1,2)$ والمطلوب:

١. أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً

٣. استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

دورة 2020 اللولى 100 درجة:



$EABCD$ هرم رباعي رأسه E وقاعدته مربع طول ضلعه 3 ولدينا $[AE]$ عمودي على المستوي $ABCD$ و $EA=3$ نختار المعلم المتجانس: $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. عين إحداثيات E و D و C و B و A

٢. جد معادلة المستوي EBC

٣. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي EBC

٤. استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC)

٥. احسب حجم رباعي الوجوه $AEBC$

دورة 2020 الثانية 40 درجة:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$ والنقطة $A(1,1,-2)$

١. أثبت أنّ النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P

٢. اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P

دورة 2020 الثانية 80 درجة:

المستقيمان d و d' معرفان وسيطياً وفق:

$$d:\begin{cases}x=t+2\\ y=2t+1\ ;t\in R\\ z=-t\end{cases}$$

$$d':\begin{cases}x=2s-1\\ y=s-2\quad ;s\in R\\ z=3s-2\end{cases}$$

١. أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع

٢. جد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمان d و d'

دورة 2020 الثانية 100 درجة:

مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 2 , O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$ نختار المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. جد إحداثيات النقاط A و B و G و H و O

٢. أعط معادلة للمستوي GOB

٣. احسب $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OB}$ واستنتج $\cos\widehat{GOB}$

٤. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)

٥. أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB)

٦. جد الأعداد الحقيقية α و β و γ حتى تكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ)

دورة 2021 اللولى 40 درجة:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط الآتية:

$D(6,2,5)$ و $C(5,0,5)$ و $B(1,-2,1)$ و $A(2,0,1)$

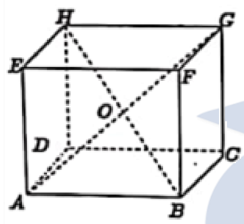
١. أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً

٢. عين العددين الحقيقيين α و β بحيث:

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$

٣. واستنتج أن النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد

دورة 2021 الأولى 100 درجة:



في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط: $A(-1,2,3)$ و $B(2,1,1)$ و $C(-3,4,-1)$ و $D(3,1,1)$ والمطلوب:

١. جد $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ وبين أن المستقيمين (AC) و (AB) متعامدين

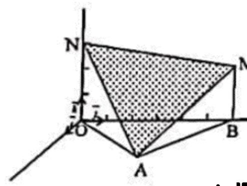
٢. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي

٣. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة D والعمودي على المستوي (ABC)

٤. احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$

٥. بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A;1)$ و $(B;-1)$ و $(C;2)$ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CG) متوازيان

دورة 2021 الثانية 70 درجة:



في معلم متجانس لتكن لدينا النقاط $N(0,0,3)$ و $M(0,6,2)$ و $A(1,3,0)$ و $B(0,6,0)$ والمطلوب:

١. اكتب معادلة المستوي AMN

٢. اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم Δ المار من O ويعامد المستوي AMN

٣. أثبت أن المستوي الذي معادلته $z-1=0$ هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BM]$

دورة 2021 الثانية 40 درجة:

تتأمل في معلم متجانس $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ النقطة $A(2,1,2)$

والمستوي P الذي معادلته: $P: 2x+y-2z-4=0$

والمطلوب:

١. احسب بعد A عن المستوي P

٢. اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

دورة 2022 اللولى 40 درجة:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:

$A(2,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ والمطلوب:

١. احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ واستنتج $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

٢. إذا كانت النقطة G مركز ثقل المثلث ABC عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة:

$$||2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}||=||\overrightarrow{AB}||$$

دورة 2022 اللولى 100 درجة:

لدينا في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستويان P و Q :

$$P: x-y+2z-1=0$$
$$Q: 2x+y+z+1=0$$

١. أثبت أن المستويان P و Q متقاطعان بفصل مشترك d

٢. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d

٣. اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويان P و Q

٤. جد إحداثيات النقطة B الناتجة من تقاطع المستقيم d والمستوي R

٥. احسب بعد النقطة A عن المستقيم d

٦. اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q

دورة 2022 الثانية 40 درجة:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ لدينا النقطتان $A(0,1,-1)$ و $B(1,-1,1)$ والمطلوب:

أعط معادلة للمجموعة S المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة: $MA=MB$ وما طبيعة المجموعة S ؟

دورة 2022 الثانية 100 درجة:

في المعلم المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ تتأمل النقاط $A(2,-2,2)$ و $B(1,1,0)$ و $C(1,0,1)$ و $D(0,0,1)$ والمطلوب:

١. تحقق أن النقاط B و C و D لا تقع على استقامة واحدة

٢. أثبت أنّ: $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD)

٣. أعط تمثيلا وسيطياً للمستقيم Δ المار من النقطة A ويعامد المستوي (BCD)

٤. عين إحداثيات النقطة K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)

٥. اكتب معادلة الكرة التي تقبل $[AD]$ قطراً لها

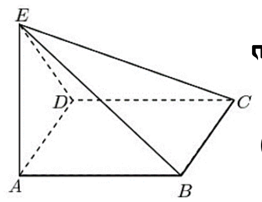
دورة 2023 الأولى 40 درجة:

تتأمل في معلم متجانس $\left(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ النقطتين $A(1,-1,2),B(2,0,4)$ والمستوي

$$P: x-y+3z-4=0$$

جد معادلة للمستوي Q الموازي للمستوي P والمار من النقطة A واكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$

دورة 2023 الأولى 100 درجة:



$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربع، والمستقيم (AE) عمودي على المستوي $(ABCD)$ فيه $AB=4$ و $AE=3$

تتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

١. جد إحداثيات النقاط A و B و C و D و E .

٢. جد إحداثيات النقطة M التي تحقق $4\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{CE}$

٣. احسب $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{BC}$ واستنتج نوع المثلث EBC ، ثمّ احسب مساحته.

٤. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) .

٥. اكتب معادلة للمستوي (EBC) ، واحسب بُعد النقطة A عن المستوي (EBC) ، ثم استنتج حجم الهرم $AEBC$

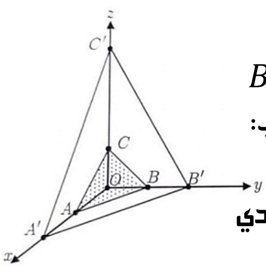
دورة 2023 الثانية 70 درجة:

تتأمل في معلم متجانس $\left(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ تتأمل النقطتين: $A(2,2,4),B(-2,0,2)$ والمطلوب:

١. أعط معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

٢. أعط معادلة للمجموعة s المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ ما طبيعية المجوعة s .

دورة 2023 الثانية 100 درجة:



تتأمل النقاط: $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ و $D(1,1,1)$ والمطلوب:

١. جد إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC وأثبت أن (OG) عمودي على المستوي (ABC)

٢. جد معادلة المستوي (ABC)

٣. تعرّف النقاط $A'(2,0,0),B'(0,2,0),C'(0,0,4)$ المستوي $(A'B'C')$ أثبت أن $2x+2y+z-4=0$ معادلة للمستوي $(A'B'C')$.

٤. أثبت أن Δ الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$ يقبل التمثيل الوسيطي

$$\Delta\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 \end{cases}$$

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه و G مركز ثقل المثلث DBC
جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين الثاني:

ادرس وضع المستقيمان d و d' المعرفين كما يأتي:

$$d:\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\dfrac{1}{2}t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$$

التمرين الثالث:

صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات:

$2 \le y \le 5$ و $x^2 + z^2 = 16$

التمرين الرابع:

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G فيه K مركز ثقل المثلث الوجه BCD أثبت أن النقاط G و A و K تقع على استقامة واحدة وعين موضع النقطة G على القطعة المستقيمة $[AK]$

التمرين الخامس:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$ والمستوي P الذي يقبل معادلة

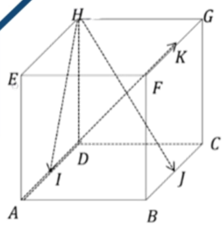
$$2x - 3y + z - 5 = 0$$

١. أثبت أن المستقيم (AB) يقطع المستوي P في نقطة C يطلب تعيين إحداثياتها .

٢. أكتب معادلة المستوي Q العمودي على p ويمر بالنقطتين A و B .

قاوم ما تكره، لِتصل إلى ما تحب 💙

التمرين السادس:



$ABCDEFGH$ مكعب I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$ باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ والمطلوب:

١. احسب مركبات كل من الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

٢. أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان المساواة: $\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ}$ ثم استنتج أنّ الأشعة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطياً

التمرين السابع:

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4 فيه I منتصف $[CD]$.

١. وضع النقطة M المحققة للعلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BI}$$

٢. احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

التمرين الثامن:

لتكن النقاط $A(1,-1,2)$ و $B(2,1,0)$ و $C(2,3,-1)$ و $D(0,0,2)$ والمطلوب:

١. عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$

٢. حدد S مجموعة النقاط M في الفراغ التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = 6$$

٣. جد معادلة للمجموعة S

التمرين التاسع:

لتأم النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ والمطلوب:

١. احسب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

٢. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

٣. عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع

التمرين العاشر:

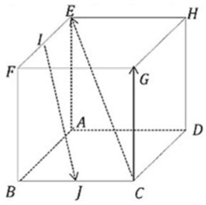
في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط: $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

١. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

٢. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

٣. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $(D-ABC)$

التمرين الحادي عشر:

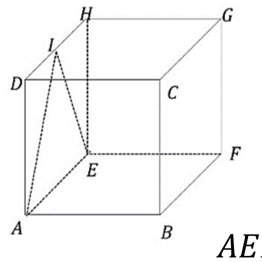


في الشكل المجاور مكعب I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$ والمطلوب:

١. أثبت أن $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً

التمرين الثاني عشر:



نجد جانباً مكعباً طول ضلعه 1 مزوداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ حيث I منتصف $[DH]$

١. أعط إحداثيات النقاط I و E و A

٢. جد إحداثيات O مركز ثقل المثلث AEI

٣. أين تقع النقطة M التي تحقق: $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$

٤. احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$

التمرين الثالث عشر:

$ABCDEFGH$ مكعب حيث K من CD تحقق: $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ والنقطة $J\in BC$ بحيث: $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

١. جد إحداثيات النقط H,E,J,K,G في المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$.

٢. أثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ غير مرتبطين خطيًا .

٣. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HK},\overrightarrow{EG},\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيا

٤. أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

التمرين الرابع عشر:

تتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي P الذي معادلته: $P:x-y+3z-4=0$ والمطلوب:

١. جد معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P ويمر بالنقطتين A و B

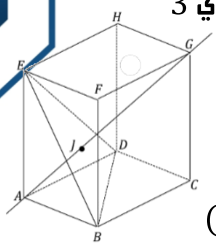
٢. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة A ويعامد المستوي P

٣. عين إحداثيات النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P

٤. أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ مبيناً طبيعة المجموعة ε

التمرين الخامس عشر:

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه يساوي 3



١. عين إحداثيات النقاط E و G و B و D في المعلم $\left(A;\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD},\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$

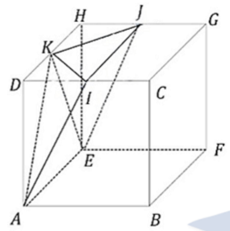
٢. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AG)

٣. أثبت أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (EDB)

٤. المستقيم (AG) يتقاطع مع المستوي (EDB) في J عين إحداثياتها

٥. أثبت أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث EDB ومركز ثقله

التمرين السادس عشر:



تتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[DH]$ بالترتيب تتخذ $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$ معلماً متجانساً في الفراغ والمطلوب:

١. أوجد إحداثيات النقاط A و I و E

٢. اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$

٣. احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$

٤. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K

٥. احسب إحداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

٦. أثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

التمرين السابع عشر:

تتأمل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ليكن P المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً وليكن المستوي Q الذي معادلته: $Q:x-y+2z+4=0$ وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB .

١. أثبت أن $2x+y-z+8=0$ هي معادلة المستوي P

٢. جد معادلة الكرة S

٣. أثبت أن المستوي Q مستوي مماس للكرة S

٤. أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

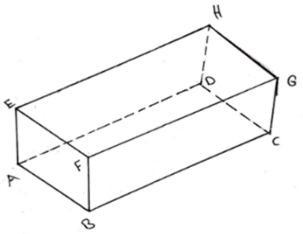
ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً:

$$d:\begin{cases} x=t \\ 12-5t\ ;t\in\mathbb{R} \\ 4-3t \end{cases}$$

٥. أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويان P و Q

٦. أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

التمرين الثامن عشر:



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $AD=4$ و $AE=1$ و I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق العلاقة: $\overrightarrow{FJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ نتأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

١. جد إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات I و J

٢. أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي

$$x+y+2z-2=0$$

٣. بين نوع المثلث EIB ثم احسب مساحته

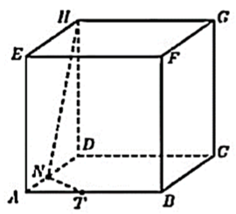
٤. احسب بعد G عن المستوي (EIB) واستنتج حجم رباعي الوجوه $GEIB$

٥. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J والعمودي على المستوي (EIB)

٦. استنتج إحداثيات النقطة J' المسقط القائم لـ J على المستوي EIB

٧. أثبت أن J' تقع على القطعة المستقيمة

التمرين التاسع عشر:



ليكن ABCDEFGH مكعباً طول حرفه يساوي 4 ولتكن نقطة I منتصف [AB] والنقطة J تحقق العلاقة $4\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AD}$

تأمل المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{4}\overrightarrow{AD},\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب

١. جد احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I و J

٢. اثبت ان معادلة المستوي (EIJ) هي:

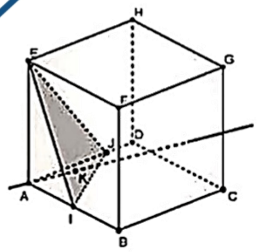
$$6x+4y+3z-12=0$$

٣. اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A والعمودي على المستوي (EIJ) ثم جد احداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ)

٤. احسب مساحة المثلث AEJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه I − AEJ

٥. احسب بعد النقطة A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ

التمرين العشرون



ليكن لدينا المكعب ABCDEFGH طول حرفه 1 و T نقطة من [AB] تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ و N نقطة من [AD] وتحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

١. في المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ جد احداثيات النقاط T و N و H و F

٢. جد الشعاعين $\overrightarrow{NT}$ و $\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة المستوي (HNT)

٣. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF)

٤. استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT)

٥. اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) وما طبيعته

الاختبارات:

السؤال الأول:

$ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقله G , I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$ أثبت أن النقاط I و J و G تقع على استقامة واحدة

السؤال الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,-1,0)$ والمستوي P الذي معادلته $2x+y-2z+9=0$ اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

السؤال الثالث:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

١. بين أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة

٢. بين أن النقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد

٣. استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها

السؤال الرابع:

نتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقاط $A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$

١. أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته

٢. أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

٣. احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

السؤال الخامس:

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لدينا النقاط:
$A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و
$D(0,4,-1)$ بين مع التعليل صحة أو خطأ كل من المقولات الآتية:

1. المثلث ABC قائم
2. المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)
3. حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$

السؤال السادس:

المستقيمان L و L' معرفان وسيطياً وفق:

$$L:\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

$$L':\begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \quad ;t\in\mathbb{R} \\ z=-1+2s \end{cases}$$

1. أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة يطلب تعيين إيجاد إحداثياتها
2. أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمان L و L'

فهرس بحث الأشعة:

٢٠. معادلة لأسطوانة:

- اكتب معادلة لأسطوانة
- صف مجموعة النقاط التي تحقق معادلة (معطاة)
- وقوع نقطة على اسطوانة.

٢١. الأوضاع النسبية:

- الوضع النسبي لمستويان في الفراغ:
  - إثبات أن مستويان متوازيان
  - إثبات أن مستويان متقاطعان
  - إثبات أن مستويان متعامدان
  - إثبات أن مستويان منطبقان
  - كيفية إيجاد الفصل المشترك لمستقيمان متقاطعان
- الوضع النسبي لمستقيمان في الفراغ:
  - إثبات أن مستقيمان متوازيان
  - إثبات أن مستقيمان منطبقان
  - إثبات أن مستقيمان متخالفان
  - إثبات أن مستقيمان متقاطعان
  - إثبات أن مستقيمان متعامدان
  - كيفية إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمان
  - هل المستقيمان d_1, d_2 يقعان في مستوٍ واحد؟
- الوضع النسبي بين مستقيم ومستوي في الفراغ:
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متوازيان
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متقاطعان
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي معلوم
  - إثبات أن مستقيم ومستوي متعامدان بحيث ناظم المستوي غير معلوم
  - ايجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيم ومستوي
  - إثبات أنّ مستقيم محتوى في مستوي.
- الوضع النسبي لثلاث مستويات في الفراغ
- الوضع النسبي لمستوي وكرة:
  - إثبات أن مستوي مماس لكرة
  - إثبات أن مستوي قاطع لكرة
  - إثبات أن مستوي خارج الكرة
  - تحديد نقطة تماس المستوي والكرة
- الوضع النسبي لمستقيم وكرة:
  - إثبات أن مستقيم مماس لكرة
  - إثبات أن مستقيم قاطع لكرة
  - إثبات أن مستقيم خارج الكرة
  - تحديد النقطة المشتركة للمستقيم والكرة

٢٢. المساقط القائمة:

- المسقط القائم لنقطة على مستوي (عشوائي/معلم)
- المسقط القائم لنقطة على مستقيم (عشوائي/معلم)

٢٣. بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ.

٢٤. مجموعات النقاط.

٢٥. المساحات – الحجوم.

سيحتار عقلك في فهم كثير مِن الأحداث ، إلى أن يؤذَن لك : بِرؤية حكمة الله في قضائه و رؤية رحمة الله في أقداره ..

شيفرة الـ 600 في الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$:

وهي مجموعة الأعداد الحقيقية بالإضافة إلى الوحدة التخيلية i حيث يتحقق: $i^2 = -1$

الأشكال العقدية والعمليات عليها:

الشكل الجبري:

	الشكل الجبري	تمرين
الشكل	$z = x + iy$	حدد كلاً من $Re(z)$ و $Im(z)$ في الحالات الآتية: 1. $z = 2 + 3i$ 2. $z = -2 + 5i$ 3. $z = 1 - i$ 4. $z = 3$ 5. $z = -3i$
حيث	x: هي القسم الحقيقي للعدد العقدي z ويرمز له $\mathrm{Re}(z)$ y: هي القسم التخيلي للعدد العقدي z ويرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$ حيث القسم التخيلي هو أمثال i	الحل: 1. $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 3$ 2. $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 5$ 3. $\mathrm{Re}(z) = 1$, $\mathrm{Im}(z) = -1$
شروط الشكل	لا يوجد	4. $\mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = 0$ 5. $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = -3$

العمليات على الشكل الجبري:

	الشكل الجبري
لدينا	$z = x + iy$
المرافق $\bar{z}$	هي العدد العقدي عند تغيير إشارة القسم التخيلي أيّ: $\bar{z} = x - iy$
الطويلة $\lvert z\rvert$	هي عدد موجب حقيقي ناتج عن جمع تربيع القسم الحقيقي والقسم التخيلي تحت الجذر أيّ: $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$
لدينا	$z_1 = x_1 + iy_1 \quad , \quad z_2 = x_2 + iy_2$
الجمع $z_1 + z_2$	هو جمع القسم الحقيقي من z_1 مع القسم الحقيقي من z_2 وكذلك القسم التخيلي من z_1 مع القسم التخيلي من z_2 وفق: $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i$
الضرب $z_1 . z_2$	نستخدم النشر مع مراعاة أنّ $(i)^2 = -1$ وفق: $z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + x_1y_2i + x_2y_1i - y_1y_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i$
ضرب العدد العقدي بمرافقه	$z . \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = r^2$
القسمة $\frac{z_1}{z_2}$	نميز حالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كان المقام لا يحوي i فإننا نستخدم تفريق الكسور ✌ الحالة الثانية: إذا كان المقام يحوي i فإننا نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

تمرين

ليكن لدينا الأعداد العقدية الآتية:

$z_1 = 2 + 4i$ ، $z_2 = 3 - i$ ، $z_3 = -\frac{5}{2}i$

أوجد كلاً من:

1. $\lvert z_1\rvert$	2. $\lvert z_3\rvert$
3. $\bar{z}_1$	4. $\bar{z}_3$
5. $z_1 + z_2$	6. $z_3 - z_1$
7. $z_1 . z_2$	8. $\frac{z_1}{z_2}$
9. $\mathrm{Im}(z_2)$	10. $\mathrm{Re}(z_3)$

الحل:

1. $\lvert z_1\rvert = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
2. $\lvert z_3\rvert = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{0 + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$
3. $\bar{z}_1 = 2 - 4i$
4. $\bar{z}_3 = \frac{5}{2}i$
5. $z_1 + z_2 = 2 + 4i + 3 - i = 5 + 3i$
6. $z_3 - z_1 = -\frac{5}{2}i - (2 + 4i) = -\frac{5}{2}i - 2 - 4i = -2 - \frac{5}{2}i - \frac{8}{2}i = -2 - \frac{13}{2}i$
7. $z_1 . z_2 = (2 + 4i)(3 - i) = 6 - 2i + 12i - 4i^2 = 6 + 4 + 10i = 10 + 10i$
8. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{3-i} = \frac{(2+4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+2i+12i+4i^2}{9+1} = \frac{6+14i-4}{10} = \frac{2+14i}{10} = \frac{2}{10} + \frac{14}{10}i = \frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$
9. $\mathrm{Im}(z_2) = -1$
10. $\mathrm{Re}(z_3) = 0$

تكفيك ساعة صدقٍ واحدة، تُكاشِفُ فيها نفسك، لترى حجم الفُرَص والخطوات التي عكفتَ أن تفعلها وما فعلت، لأنك ظننت أن لن يَمُرَّ وقد مَرّ.. ✌️💙

<table>
<tr><th colspan="4">القوة للشكل الجبري</th></tr>
<tr><th colspan="2">$z = i$</th><th colspan="2">$z = x + iy$</th></tr>
<tr><td colspan="2">لدينا $(i)^n$ بحيث n عدد طبيعي موجب فإننا نميز:</td><td colspan="2">لدينا $(x+iy)^n$ بحيث n عدد طبيعي موجب فإننا نميز:</td></tr>
<tr><th>الحالة الخاصة</th><th>الحالة العامة</th><th>الحالة الأولى</th><th>الحالة الثانية</th></tr>
<tr>
<td>$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$</td>
<td>▪ نقسم n على 4
▪ ننظر إلى الباقي ونميز:
إذا كان باقي القسمة يساوي الصفر فإنّ
$i^n = i^0 = 1$
إذا كان باقي القسمة يساوي الواحد فإنّ
$i^n = i^1 = i$
إذا كان باقي القسمة يساوي 2 فإنّ:
$i^n = i^2 = -1$
إذا كان باقي القسمة يساوي 3 فإنّ:
$i^n = i^3 = -i$</td>
<td>إذا كان n عدد زوجي:
$(x+iy)^n$
$= ((x+iy)^2)^{\frac{n}{2}}$</td>
<td>إذا كان n عدد فردي:
$(x+iy)^n$
$= (x+iy)(x+iy)^{n-1}$
$= (x+iy)((x+iy)^2)^{\frac{n-1}{2}}$</td>
</tr>
</table>

تمرين: أوجد ما يلي:

1. i^{2003}	2. i^{2016}
3. i^{1079}	4. $(2i)^{2017}$
5. $(1+i)^8$	6. $(1+i)^{2020}$
7. $(1-i)^{2017}$	

الحل:

الطلب الأول: i^{2003}

نقسم 2003 على 4 وفق: $\frac{2003}{4}$ فنجد أنّ الباقي 3

$i^{2003} = i^3 = -i$

الطلب الثاني: i^{2016}

نقسم 2016 على 4 وفق: $\frac{2016}{4}$ فنجد أنّ الباقي 0

$i^{2016} = i^0 = 1$

الطلب الثالث: i^{1079}

نقسم 1079 على 4 وفق: $\frac{1079}{4}$ فنجد أنّ الباقي 3

$i^{1079} = i^3 = -i$

الطلب الرابع: $(2i)^{2017}$

$(2i)^{2017} = (2)^{2017}(i)^{2017}$

نقسم 2017 على 4 وفق: $\frac{2017}{4}$ فنجد أنّ الباقي 1 .

$(2i)^{2017} = (2)^{2017}.(i)^1 = (2)^{2017}i$

الطلب الخامس: $(1+i)^8$

$(1+i)^8 = ((1+i)^2)^4$
$= (1+2i-1)^4 = (2i)^4$
$= 2^4 + i^4 = 16$

الطلب السادس: $(1+i)^{2020}$

$(1+i)^{2020} = ((1+i)^2)^{1010}$
$= (1+2i-1)^{1010} = (2i)^{1010}$
$= 2^{1010} + i^{1010}$

نقسم 1010 على 4 وفق: $\frac{1010}{4}$ فنجد أنّ الباقي 2 .

$\rightarrow = 2^{1010}(i)^2 = -2^{1010}$

الطلب السابع: $(1-i)^{2017}$

$(1-i)^{2017} = (1-i)(1-i)^{2016}$
$= (1-i)((1-i)^2)^{1008}$
$= (1-i)(1-2i-1)^{1008}$
$= (1-i)(-2i)^{1008}$
$= (1-i)(-2)^{1008}(i)^{1008}$

نقسم 1008 على 4 وفق: $\frac{1008}{4}$ فنجد أنّ الباقي 0 .

$\rightarrow = (1-i)(-2)^{1008}(i)^0$
$= (1-i)(-2)^{1008}$
$= (1-i)(-1)^{1008}(2)^{1008}$
$= (1-i)(2)^{1008}$

سَيَبلُغ القَلبُ ذاتَ يوم مُرادهِ، وشَدائدُ الامتِحان يَوماً ترتَحِل..

شتيفة II 009

أخـــــ د الثانوية

الشكل المثلثي:

	الشكل المثلثي
الشكل	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
حيث	r: هي طويلة العدد العقدي z , أي $r = \lvert z\rvert$ θ: هي زاوية العدد العقدي z أي $\theta = arg(z)$
شروط الشكل	⁕ r: عدد حقيقي موجب تماماً ⁕ الإشارة بين الـ $\sin$ والـ $\cos$ هي $(+)$ حصراً ⁕ θ كوني شو ما بدك لكن بشرط θ لـ $\sin$ نفسها θ لـ $\cos$ ⁕ الـ i رفيقة الـ $\sin$ حصراً

تمرين:

حدد $arg(z)$ و $\lvert z\rvert$ في الحالات الآتية:

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_2 = 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

الحل:

$\lvert z_1\rvert = 2$ $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$	$\lvert z_2\rvert = 5$ $\arg(z_2) = \frac{\pi}{4}$

هل الشكل مثلثي في الحالات التالية أم لا؟

$z_1 = -3\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$z_2 = 3i\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$z_3 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$z_4 = 5\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$z_5 = 2\left[sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$	$z_6 = (1+i)\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$
$z_7 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^5$	$z_8 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left[cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

الحل:

z_1 ليس مثلثي لأنّ r سالبة
z_2 ليس مثلثي لأنّ r ليس حقيقي
z_3 ليس مثلثي لأنّ θ مختلفة
z_4 ليس مثلثي لأنّ الإشارة بين الـ sin والـ cos سالبة.
z_5 ليس مثلثي لأنّ الـ i رفيقة الـ cos
z_6 ليس مثلثي لأنّ الـ r ليس حقيقي
z_7 ليس مثلثي بسبب وجود القوّة.
z_8 ليس مثلثي لأنّ الـ r سالبة

العمليات على الشكل المثلثي:

	الشكل المثلي
لدينا	$z = r(cos\theta + isin\theta)$
المرافق $\bar{z}$	هو العدد العقدي عند تغيير إشارة الزاوية أيّ: $\bar{z} = r(cos(-\theta) + isin(-\theta))$
الطويلة $\lvert z\rvert$	هي عدد حقيقي موجب تماماً حيث: $\lvert z\rvert = r$
القوة	دستور دوموافر: أياً كان العدد الحقيقي θ والعدد الصحيح n كان: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = cos(n\theta) + i\,sin(n\theta)$ نتيجة: $(z)^n = \left(r(cos\,\theta + i\sin\theta)\right)^n$ $= r^n[cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$
لدينا	$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)\,, z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
الجمع $z_1 + z_2$	لا يوجد قانون ينص على جمع عددان عقديان بالشكل المثلثي ولكن يمكن استخدام أحد الطريقتين: الطريقة الأولى: نتبع الخطوات: ⁕ كتابة كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري ⁕ جمع كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري ⁕ إعادة كتابة ناتج الجمع بالشكل المثلثي الطريقة الثانية: استخدام خواص وقواعد
الضرب $z_1.z_2$	نضرب الطويلة بالطويلة ونجمع الزوايا وفق: $z_1.z_2 = r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$
ضرب العدد العقدي بمرافقه	$z_1.\bar{z}_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta).r(\cos-\theta + i\sin-\theta) = r^2$
القسمة $\frac{z_1}{z_2}$	نقسم الطويلة على الطويلة ونطرح الزوايا وفق: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$ $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}[\cos(\theta_2-\theta_1) + i\sin(\theta_2-\theta_1)]$

تمرين

ليكن لدينا العددان العقديان الآتيان:

$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$z_2 = 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

أوجد كلاً مما يلي:

1. $\lvert z_1\rvert$	2. $\bar{z}_2$	3. $\arg(z_2)$	4. $(z_1)^7$
5. $(z_2)^3$	6. $z_1.z_2$	7. $\frac{z_1}{z_2}$	8. $\frac{z_2}{z_1}$

الحل:

1. $\lvert z_1\rvert = 1$
2. $\bar{z}_2 = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
3. $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$
4. $(z_1)^7 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^7 = \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right)$
5. $(z_2)^3 = \left(3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^3$
   $= 27\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
6. $z_1.z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(3\left[\cos-\frac{\pi}{4} + i\sin-\frac{\pi}{4}\right]\right)$
   $= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right] = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$
7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \frac{1}{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$
   $= \frac{1}{3}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$
8. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$
   $= 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right] = 3\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

شيفرة الـ 600

الجـــزء الثاني

الشكل الأسي:

	الشكل الأسي
الشكل	$z = re^{i\theta}$
حيث	r: هي طويلة العدد العقدي z أيّ: $r = \|z\|$ θ: هي زاوية العدد العقدي z أيّ: $\theta = arg(z)$
شروط الشكل	r عدد حقيقي موجب تماماً

تمرين:

حدد $|z|$ و $arg(z)$ في الحالات الآتية:

1. $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$	2. $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
3. $z = 3e^{\frac{2i\pi}{3}}$	4. $z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$

الحل:

1. $\|z\| = 3$ $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$	2. $\|z\| = 1$ $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$
3. $\|z\| = 3$ $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$	4. $\|z\| = \sqrt{2}$ $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

هل الشكل هو شكل أسي في الحالات الآتية؟

$z_1 = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_2 = 2ie^{-i\frac{\pi}{4}}$

الحل:

z_1 ليس أسي لأن الـ r سالبة.

z_2 ليس أسي لأن الـ r تخيلي بحت.

العمليات على الشكل الأسي:

	الشكل الأسي
لدينا	$z = re^{i\theta}$
المرافق $\bar{z}$	هو العدد العقدي عند تغيير إشارة الزاوية أيّ: $\bar{z} = re^{-i\theta}$
الطويلة $\|z\|$	هي عدد حقيقي موجب تماماً تمثل أمثال $e^{i\theta}$ أيّ: $\|z\| = r$
القوة	دستور دوموافر: أيّاً كان العدد الحقيقي θ والعدد الصحيح n كان: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ نتيجة: $(z)^n = \left(r\left(e^{i\theta}\right)\right)^n = (r)^n\left(e^{i\theta}\right)^n = r^n\left(e^{in\theta}\right)$
لدينا	$z_1 = r_1e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$
الجمع $z_1 + z_2$	لا يوجد قانون ينص على جمع عددان عقديان بالشكل الأسي ولكن يمكن استخدام أحد الطريقتين: الطريقة الأولى: نتبع الخطوات: * كتابة كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري * جمع كل من z_1 و z_2 بالشكل الجبري * إعادة كتابة ناتج الجمع بالشكل الأسي الطريقة الثانية: استخدام خواص وقواعد
الضرب $z_1.z_2$	نضرب الطويلة بالطويلة ونجمع الزوايا وفق: $z_1.z_2 = (r_1.r_2)e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
ضرب العدد العقدي بمرافقه	$z.\bar{z} = \left(re^{i\,\theta}\right)\left(re^{-i\,\theta}\right) = r^2$
القسمة $\frac{z_1}{z_2}$	نقسم الطويلة على الطويلة ونطرح الزوايا وفق: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ $\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$
علاقتا أويلر	$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \rightarrow e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \rightarrow e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

تمرين

ليكن لدينا العددان العقديان:

$z_2 = \sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$	$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

أوجد كلاً من:

1. $\|z_2\|$	2. $\bar{z}_2$	3. $\arg(z_2)$	4. $(z_1)^7$
5. $(z_2)^5$	6. $z_1.z_2$	7. $\frac{z_1}{z_2}$	8. $\frac{z_2}{z_1}$

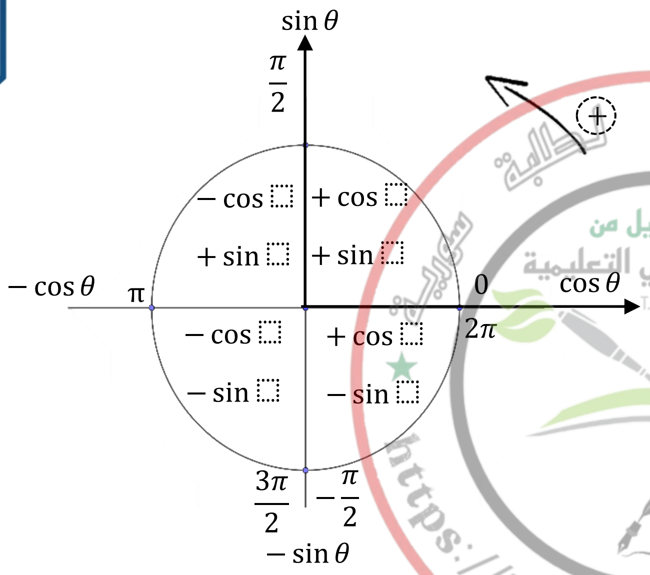
الحل:

1. $|z_2| = \sqrt{3}$
2. $\bar{z}_2 = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$
3. $arg(z_2) = -\frac{2\pi}{3}$
4. $(z_1)^7 = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7 = 2^7\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^7 = 128e^{i\frac{7\pi}{4}}$
5. $(z_2)^5 = \left(\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = \left(\sqrt{3}\right)^5\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = 9\sqrt{3}e^{-i\frac{10\pi}{3}}$
6. $z_1.z_2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$
7. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{11\pi}{12}}$
8. $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

علاج التّعَب بالتّعب، مُحرّك جسد المُحِبّ، ويكون اشتغالك بقدر الحُبّ الذي فيك، وكلّما زاد الحُفاء حُبّاً زاد الجهد ضِعفاً على قدر محاولة إخلاص الوجهة والسَّير لذلك؛ حاول وإن لَم تصِل ✌ 💙

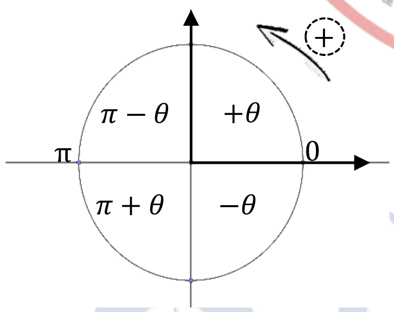
النسب المثلثية:

أولاً: النسب المثلثية للزوايا الشهيرة:



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

ثانياً: النسب المثلثية للزوايا غير الشهيرة:



لإيجاد النسب المثلثية غير الشهيرة فإن ذلك يتم على مرحلتين

المرحلة الأولى (مرحلة الإصلاح):

نحاول في هذه المرحلة كتابة الزاوية غير الشهيرة θ بدلالة زاوية شهيرة

المرحلة الثانية (مرحلة الإرجاع):

وتتم وفق:

أولاً:

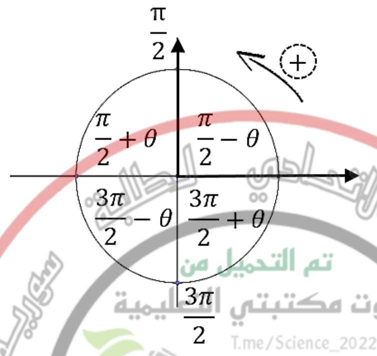
إذا كانت الزاوية تحوي π تكون أسماء الأرباع:

- الربع الأول $+\theta$
- الربع الثاني: $\pi-\theta$
- الربع الثالث: $\pi+\theta$
- الربع الرابع: $-\theta$

المجموعة الأولى:	المجموعة الثانية: الحالة الأولى	المجموعة الثانية: الحالة الثانية
الربع الأول: $\cos(+\theta_1)=\cos(\theta_1)$ $\sin(+\theta_1)=\sin(\theta_1)$ الربع الثاني: $\cos(\pi-\theta_1)=-\cos(\theta_1)$ $\sin(\pi-\theta_1)=+\sin(\theta_1)$ الربع الثالث: $\cos(\pi+\theta_1)=-\cos(\theta_1)$ $\sin(\pi+\theta_1)=-\sin(\theta_1)$ الربع الرابع: $\cos(-\theta_1)=+\cos(\theta_1)$ $\sin(-\theta_1)=-\sin(\theta_1)$	في حال كانت الزاوية θ من الشكل: $\theta=(\text{عدد زوجي }\pi+\theta_1)$ فإننا عند الإرجاع نكتب: $\cos(\text{عدد زوجي }\pi+\theta_1)=\cos(\theta_1)$ $\sin(\text{عدد زوجي }\pi+\theta_1)=\sin(\theta_1)$ أي في هذه الحالة نحذف الـ (π عدد زوجي) عند الإرجاع ثم نكمل كما سبق.	في حال كانت θ من الشكل: $\theta=(\text{عدد فردي }\pi+\theta_1)$ فإننا نكتب الزاوية θ من الشكل: $\theta=(\pi+\theta_1)$ ثم عند الإرجاع نكتب: $\cos(\text{عدد فردي }\pi+\theta_1)$ $=\cos(\pi+\theta_1)=-\cos\theta_1$ $\sin(\text{عدد فردي }\pi+\theta_1)$ $=\sin(\pi+\theta_1)=-\sin\theta_1$ أي أنه في حال وجود عدد فردي من π فإنه يستبدل بـ π ثم نكمل كما سبق.

ملاحظات هامة جداً:

الملاحظة الأولى:	أحياناً بعد تطبيق قواعد المجموعة الثانية نحتاج لتطبيق قواعد المجموعة الأولى.
الملاحظة الثانية:	انتبه للأشكال: * $\cos(\theta-\pi)=\cos(-(-\theta+\pi))=\cos(-(\pi-\theta))=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ * $\sin(\theta-\pi)=\sin(-(-\theta+\pi))=\sin(-(\pi-\theta))=-\sin(\pi-\theta)=-\sin\theta$



ثانياً:

* إذا كانت الزاوية تحوي $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$ تكون أسماء الأرباع:
* الربع الأول $\frac{\pi}{2}-\theta$
* الربع الثاني: $\frac{\pi}{2}+\theta$
* الربع الثالث: $\frac{3\pi}{2}-\theta$
* الربع الرابع: $\frac{3\pi}{2}+\theta$

علماً أنّ وجود الـ $\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$ يقلب النسبة دوماً.

المجموعة الأولى:	المجموعة الثانية	
	الحالة الأولى	**الحالة الثانية**
الربع الأول: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=+\sin(\theta_1)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)=+\cos(\theta_1)$ **الربع الثاني:** $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)=-\sin(\theta_1)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)=\cos(\theta_1)$ **الربع الثالث:** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta_1\right)=-\sin(\theta_1)$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta_1\right)=-\cos(\theta_1)$ **الربع الرابع:** $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)=+\sin(\theta_1)$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)=-\cos(\theta_1)$	في حال كانت الزاوية θ من الشكل: $\theta=\left(\text{عدد زوجي}\,\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$ أو: $\theta=\left(\text{عدد زوجي}\,\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)$ فإننا عند الإرجاع نكتب: * $\cos\left(\text{عدد زوجي}\,\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\cos(\theta_1)$ * $\cos\left(\text{عدد زوجي}\,\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\cos(\theta_1)$ * $\sin\left(\text{عدد زوجي}\,\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\sin(\theta_1)$ * $\sin\left(\text{عدد زوجي}\,\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\sin(\theta_1)$	في حال كانت θ من الشكل: $\theta=\left(\text{عدد فردي}\,\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$ أو: $\theta=\left(\text{عدد فردي}\,\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)$ فإننا عند الإرجاع نكتب: * $\cos\left(\text{عدد فردي}\,\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)=-\sin\theta_1$ * $\sin\left(\text{عدد فردي}\,\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta_1\right)=+\cos\theta_1$ * $\cos\left(\text{عدد فردي}\,\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)=+\sin\theta_1$ * $\sin\left(\text{عدد فردي}\,\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)$ $=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta_1\right)=-\cos\theta_1$

التمرين الاول:

عيّن $\sin\theta$ و $\cos\theta$ في الحالات:

الحالة الأولى: $\theta=\frac{7\pi}{6}$:

مرحلة الإصلاح وتتم وفق:

$$\theta=\frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}$$
$$=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$$

مرحلة الإرجاع وتتم وفق:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحالة الثانية: $\theta=\frac{11\pi}{6}$:

مرحلة الإصلاح وتتم وفق:

$$\theta=\frac{11\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}$$
$$=\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=2\pi-\frac{\pi}{6}$$

مرحلة الإرجاع وتتم وفق:

$$\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الحالة الثالثة: $\theta=\frac{3\pi}{4}$:

$$\theta=\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}$$
$$=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$$

مرحلة الإرجاع وتتم وفق:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الحالة الرابعة: $\theta=\frac{10\pi}{3}$:

$$\theta=\frac{10\pi}{3}=\frac{9\pi+\pi}{3}=\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=3\pi+\frac{\pi}{3}$$

مرحلة الإرجاع وتتم وفق:

$$\sin\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

الملاحظة الأولى: كيفية إيجاد النسبة المثلثية لزاوية θ:

- الزاوية شهيرة: حفظ من جدول النسب المثلثية
- الزاوية غير شهيرة: إصلاح ثم إرجاع
- زاوية غير شهيرة ولا يمكن إشهارها: تدريج طلبات ثم بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي

الملاحظة الثانية: كيفية تحديد θ بمعرفة النسبة المثلثية:

الخطوات:

1. ننظر إلى الإشارات ونحدد الربع حيث:
   * cos موجب و sin موجب فهذا يعني ربع أول
   * cos سالب و sin موجب فهذا يعني ربع ثاني
   * cos سالب و sin سالب فهذا يعني ربع ثالث
   * cos موجب و sin سالب فهذا يعني ربع رابع
2. ننظر إلى النسب المثلثية دون إشارات ونحدد الزاوية θ_1 بما يتوافق مع جدول النسب المثلثية الشهيرة
3. نكتب الزاوية θ بدلالة اسم الربع والزاوية الشهيرة θ_1 حيث:
   * الربع الأول: $+\theta_1$
   * الربع الثاني: $\pi-\theta_1$
   * الربع الثالث: $\pi+\theta_1$
   * الربع الرابع: $-\theta_1$

تمرين: حدد θ في كل من الحالات الآتية:

1.	$\cos\theta=1$	$\sin\theta=0$
2.	$\cos\theta=0$	$\sin\theta=1$
3.	$\cos\theta=-1$	$\sin\theta=0$
4.	$\cos\theta=-\frac{1}{2}$	$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$
5.	$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6.	$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\theta=-\frac{1}{2}$
7.	$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

الحل:

1. $\theta=0$	2. $\theta=\frac{\pi}{2}$
3. $\theta=\pi$	4. $\theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$
5. $\theta=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$	6. $\theta=-\frac{\pi}{6}$
7. $\theta=\frac{\pi}{4}$	

ملاحظة:

بعد كتابة z بالشكل المثلثي أو الأسي فإننا نفكر بالقياس الأساسي للزاوية θ وعند اللزوم وفق:

الحالة الأولى: البسط أصغر من المقام فإنّه لا يوجد داعي للقياس الأساسي.

الحالة الثانية: البسط أكبر من المقام:

نميز:

* البسط أكبر من المقام وأصغر من ضعفي المقام فإنّه لا داعي للقياس الأساسي.
* البسط أكبر من المقام وأكبر من ضعفي المقام نوجد القياس الأساسي كما ورد معنا في فكرة الإصلاح.

تمرين: عيّن في كل من الحالات الآتية القياس الأساسي للزاوية الموجهة θ:

1. $\theta=\frac{7\pi}{2}$	2. $\theta=-\frac{4\pi}{3}$	3. $\theta=\frac{35\pi}{6}$
4. $\theta=\frac{21\pi}{4}$	5. $\theta=-\frac{202\pi}{3}$	6. $\theta=-18\pi$
7. $\theta=19\pi$		

الحل:

1. $\theta=\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}$
2. $\theta=-\frac{4\pi}{3}$
3. $\theta=\frac{35\pi}{6}=\frac{36\pi-\pi}{6}=6\pi-\frac{\pi}{6}$
4. $\theta=\frac{21\pi}{4}=\frac{20\pi+\pi}{4}=5\pi+\frac{\pi}{4}$
5. $\theta=\frac{-202\pi}{3}=\frac{-201\pi-\pi}{3}=-67\pi-\frac{\pi}{3}$
6. $\theta=18\pi\rightarrow\theta=0$
7. $\theta=19\pi\rightarrow\theta=\pi$

التحويلات بين الأشكال:

	التحويل من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي أو الأسي	التحويل من الشكل المثلثي أو الأسي إلى الشكل الجبري
المعلوم	x , y	θ , r
المجهول	θ , r	x , y
الخطوات	* نحسب r من القانون: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ * نوجد كلاً من: $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}$ * نحدد θ * نكتب بالشكل المطلوب	* نوجد النسب المثلثية لـ θ * نوجد x وفق: $x=r\cos\theta$ * نوجد y وفق: $y=r\sin\theta$ * نكتب بالشكل الجبري

شيفرة الـ 600

الجزء الثاني

التمرين الأول:

اكتب بالشكل الجبري كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

الحل:

لدينا:

$$r = \sqrt{2} \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ:

$$x = r\cos\theta = (\sqrt{2}).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

$$y = r\sin\theta = (\sqrt{2}).\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

ومنهُ: $z_1 = 1 + i$

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$r = 2$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4} = \frac{4\pi + \pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = r\cos\theta = (2).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta = (2).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

ومنهُ: $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

$$z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$r = 2 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = r\cos\theta = (2).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$y = r\sin\theta = (2).\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

ومنهُ: $z_3 = \sqrt{3} + i$

$$z_4 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$r = 4$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = r\cos\theta = (4).\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\sin\theta = (4).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}$$

ومنهُ: $z_4 = -2 + 2\sqrt{3}i$

التمرين الثاني:

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الأتية

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$x = 1 \quad , \quad y = -\sqrt{3}$$

تحديد الطويلة:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4} = 2$$

تحديد الزاوية θ :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\to \theta = -\frac{\pi}{3}$$

ومنهُ: $z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$z_2 = 2\sqrt{3} + 6i$$

$$x = 2\sqrt{3} \quad , \quad y = 6$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\to \theta = \frac{\pi}{3}$$

ومنهُ:

$$z_2 = 4\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

التمرين الثالث:

اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

$$z_1 = -1 + i$$

$$x = -1 \quad , \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

ومنهُ: $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

ومنهُ: $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

التحويلات المباشرة:

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z = 1$	$z = \cos 0 + i \sin 0$	$z = e^{i\,0}$
$z = -1$	$z = \cos\pi + i\sin\pi$	$z = e^{i\,\pi}$
$z = i$	$z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$	$z = e^{i\frac{\pi}{2}}$
$z = -i$	$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$	$z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

التمرين الأول:

اكتب بالشكل الجبري كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

1. $z_1 = \cos\pi + i\sin\pi \rightarrow z_1 = -1$
2. $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \rightarrow z_2 = -i$

التمرين الثاني:

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

1. $z_1 = 2i \rightarrow z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$
2. $z_2 = \sqrt{3} - 3 = -(3 - \sqrt{3})$
   $\rightarrow z_2 = (3 - \sqrt{3})[\cos\pi + i\sin\pi]$

التمرين الثالث:

اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

1. $z_1 = -7i \rightarrow z_1 = 7e^{i\frac{3\pi}{2}}$
2. $z_2 = 5i \rightarrow z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$

حرجات الشكل المثلثي وكيفية إرضائه:

الحرجة	كيفية الإرضاء
الـ r عدد حقيقي سالب	نعكس إشارة الـ r ونضيف π إلى الزاوية وفق: $z = -r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$
الـ r ليس حقيقي	* نحول كل شيء إلى الشكل المثلثي * نطبق العمليات على الشكل المثلثي أيّ تحويلات ثم عمليات.
الـ i مع الـ cos "حرجة الخيانة"	نستبدل $\cos x$ بـ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ونستبدل $\sin x$ بـ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ وفق: $z = r(\sin\theta + i\cos\theta) = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$ تذكر: الزاويتان المتتامتان مجموعهما هو $\frac{\pi}{2}$ تذكر: $\cos(\text{زاوية}) = \sin(\text{المتممة})$, $\sin(\text{زاوية}) = \cos(\text{المتممة})$ حيث: $(\text{المتممة}) = \frac{\pi}{2} - x$

الزاوية مختلفة	* نعوض بقيم النسب المثلثية * نحول من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي
النسب المثلثية نفسها	* نخرج النسبة المثلثية المشتركة عامل مشترك * نحول من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي
حركة الإشارات	* الحالة الأولى: $z = r[-\cos\theta + i\sin\theta] = r[\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)]$ * الحالة الثانية: $z = r[-\cos\theta - i\sin\theta] = r[\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)]$ * الحالة الثالثة: $z = r[\cos\theta - i\sin\theta] = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

ملاحظة:

عند اجتماع عدة حركات فيجب مراعاة الأولوية في الإرضاء وفق:
حركة الخيانة - حركة الإشارات - باقي الحركات.

تمرين:

اكتب بالشكل المثلثي كلاً مما يلي:

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) - i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$$
$$\rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

$$z_3 = -\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= (-1)\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= [\cos\pi + i\sin\pi]\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_3 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_4 = (\sqrt{2} - 2)\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= -(2 - \sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= (2 - \sqrt{2})[\cos\pi + i\sin\pi]\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= (2 - \sqrt{2})\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_4 = (2 - \sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)\right]$$

$$z_5 = 3\left[-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$
$$= -3\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$
$$= 3[\cos\pi + i\sin\pi]\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_5 = 3\left[\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right]$$

$$z_6 = i\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$
$$\rightarrow z_6 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$z_7 = -2i\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$= 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_7 = 2\left[\cos\left(\frac{17\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{10}\right)\right]$$

$$z_8 = 3\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right]$$
$$= 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_8 = 3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right]$$

$$z_9 = \sqrt{2}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\rightarrow z_9 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

حلمك ليس سهلاً، ولكنه ممكن 😍💙

$z_{10} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right] = 1 + i$$

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ: $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow z_{10} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$z_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$$z_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)(1+i)$$

لدينا: $w = 1 + i$

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

تحديد الطويلة:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

تحديد الزاوية:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ: $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$w = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$

$$\rightarrow z_{11} = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$z_{12} = 4\left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$

$$z_{12} = 4\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)[1+i]$$

الطريقة الأولى:

لدينا:

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_{12} = 4\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5}[\cos\pi + i\sin\pi]\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5}\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\rightarrow z_{12} = 4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{5}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

الطريقة الثانية:

$$z_{12} = 4\left[\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]$$

$$z_{12} = 4\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)[1+i]$$

لدينا:

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_{12} = 4\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -\left[-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\rightarrow z_{12} = -4\sqrt{2}\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$z_{13} = 3\left[\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]$

$$= 3\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)[1+i]$$

$$= 3\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$

$$= 3\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)[\cos\pi + i\sin\pi]\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\rightarrow z_{13} = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

حركات الشكل الأسي وكيفية إرضائه:

الحركة	كيفية الإرضاء
الـ r عدد حقيقي سالب	* نخرج (-1) عامل مشترك * نكتب (-1) بالشكل الأسي (تحويلات مباشرة) * نطبق العمليات على الشكل الأسي وفق: $z=-re^{i\theta}=(-1)re^{i\theta}=e^{i\pi}\,re^{i\theta}\rightarrow z=re^{i(\theta+\pi)}$
الـ r ليس حقيقي	* نحول كل شيء إلى الشكل الأسي * نطبق العمليات على الشكل الأسي * أي تحويلات ثم عمليات

تمرين:

اكتب بالشكل الأسي كلاً مما يلي:

$$z_1=-2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$=(-1)2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$=2e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$
$$=2e^{i\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)}$$
$$\rightarrow z_1=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

$$z_2=(\sqrt{7}-7)e^{-i\frac{\pi}{5}}$$
$$=-(7-\sqrt{7})e^{-i\frac{\pi}{5}}$$
$$=(7-\sqrt{7})e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{5}}$$
$$=(7-\sqrt{7})e^{i\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)}$$
$$\rightarrow z_2=(7-\sqrt{7})e^{i\frac{4\pi}{5}}$$

$$z_3=3ie^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=3e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$=3e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$\rightarrow z_1=3e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_4=-2ie^{i\frac{3\pi}{5}}$$
$$=2e^{i\frac{3\pi}{2}}.e^{i\frac{3\pi}{5}}$$
$$=2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{5}\right)}$$
$$=2e^{i\left(\frac{21\pi}{10}\right)}$$
$$=2e^{i\left(\frac{20\pi+\pi}{10}\right)}$$
$$=2e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{10}\right)}$$
$$\rightarrow z_4=2e^{i\frac{\pi}{10}}$$

خفايا التحويلات:

نص السؤال	فكرة الحل
اكتب z بالشكل الجبري	* نحول كل شيء إلى الشكل الجبري * نطبق العمليات على الشكل الجبري
اكتب z بالشكل المثلثي	* نحول كل شيء إلى الشكل المثلثي * نطبق العمليات على الشكل المثلثي
اكتب z بالشكل الأسي	* نحول كل شيء إلى الشكل الأسي * نطبق العمليات على الشكل الأسي
ملخص الكلام	تحويلات ثم عمليات

ملاحظات:

* عند وجود عامل مشترك يُنصح بإخراجه قبل إجراء التحويل.
* قبل إجراء العمليات على الشكل المثلثي يجب التأكد أنه مثلثي.
* قبل إجراء العمليات على الشكل الأسي يجب التأكد أنه أسي.

التمرين الأول:

اكتب z بالشكل الجبري.

$$z_1=(2+i)(-3-2i)$$
$$=-6-4i-3i+2$$
$$z_1=-4-7i$$

$$z_2=\frac{2+i}{-1-i}$$
$$=\frac{(2+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}$$
$$=\frac{-2+2i-i-1}{1+1}=\frac{-3+i}{2}$$

$$z_2=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$z_3=(1+i)e^{i\frac{\pi}{2}}$$

نحوّل $e^{i\frac{\pi}{2}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$
$$\rightarrow=(1+i)(i)$$
$$z_3=-1+i$$

يهونها الله، وتمر..

$$z_4 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right](-3+i)$$

نحوّل $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= 2\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right] = 1 + \sqrt{3}i$$
$$\rightarrow (1+\sqrt{3}i)(-3+i)$$
$$= -3 + i - 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}$$
$$z_4 = -3 - \sqrt{3} + (1 - 3\sqrt{3})i$$

$$z_5 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$$

نحوّل $e^{i\frac{\pi}{3}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_5 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_6 = -1 + i + e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

نحوّل $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= 1 + i + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}i$$

$$z_7 = \frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}$$

نحوّل $-2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$-2e^{i\frac{3\pi}{4}} = -2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -2\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$
$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}i - \sqrt{6}i - \sqrt{2}}{3+1}$$
$$z_7 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{(-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}i$$

$$z_8 = \left[\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\right]^4$$
$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right)\right]^4$$
$$= \left[\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{16}\right)\right]^4$$
$$= \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$z_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

التمرين الثاني:

اكتب بالشكل المثلثي.

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$$

نحول البسط إلى مثلثي

نحول المقام إلى مثلثي ثم قسمة مثلثيين.

ليكن لدينا:

$$z' = 1 - \sqrt{3}i$$
$$x = 1 \quad , \quad y = -\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$z' = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

ليكن لدينا:

$$z'' = 1 + i$$
$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$z'' = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

ومنهُ:

$$z_1 = \frac{z'}{z''} = \frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$z_2 = (1+i)^5$

نحول $1+i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \ , \ y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

نعوّض:

$$z_2 = \left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^5$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^5 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^5$$

$$z_2 = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$z_3 = (1-\sqrt{3})(1+i)^3$

نحول $1+i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \ , \ y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

نعوّض:

$$z_3 = (1-\sqrt{3})\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^3$$

$$= (1-\sqrt{3})\left(\sqrt{2}\right)^3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^3$$

$$= (1-\sqrt{3})2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})[\cos\pi + i\sin\pi]\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})\left[\cos\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_3 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]$$

$z_4 = \frac{(1-\sqrt{3}i)^5}{(1+i)^4}$

نحوّل $1 - \sqrt{3}i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \ , \ y = -\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

نحول $1+i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \ , \ y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

نعوّض:

$$z_4 = \frac{\left(2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right)^5}{\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^4}$$

$$= \frac{(2)^5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^5}{\left(\sqrt{2}\right)^4\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^4}$$

$$= \frac{32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]}{4[\cos\pi + i\sin\pi]}$$

$$= 8\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3} - \pi\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3} - \pi\right)\right]$$

$$= 8\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 8\left[\cos\left(-2\pi - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_4 = 8\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$z_5 = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^5$$

نحول $1-\sqrt{3}i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = -\sqrt{3}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$1-\sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

نحوّل $1+i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

نعوّض:

$$z_5 = \left(\frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}\right)^5$$
$$= \frac{\left(2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\right)^5}{\left(\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)^5}$$
$$= \frac{(2)^5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^5}{\left(\sqrt{2}\right)^5\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^5}$$
$$= \frac{32\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]}{4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]}$$
$$= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)\right]$$
$$= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{35\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{35\pi}{12}\right)\right]$$
$$= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-2\pi - \frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-2\pi - \frac{11\pi}{12}\right)\right]$$
$$= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_6 = (1+i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^5$$

نحول $1+i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

نعوّض:

$$z_6 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^5$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right)\right]$$
$$z_6 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right]$$

$$z_7 = 1-\sqrt{3} + i\left(\sqrt{3}-1\right)$$
$$= 1-\sqrt{3} - i\left(1-\sqrt{3}\right)$$
$$= \left(1-\sqrt{3}\right)(1-i)$$

نحول $1-i$ إلى الشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = -1$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]$$

نعوّض:

$$z_7 = \left(1-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$z_8 = -5i\left[i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= -5i\left[i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i^2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= (-5i)(i)\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$
$$= 5\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

التمرين الثالث: اكتب بالشكل الأسي.

$$z_1 = \frac{6}{1+i}$$

نحول $1+i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

نعوّض:

$$z_1 = \frac{6}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{6(1)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{6e^{i0}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{6}{\sqrt{2}}e^{i\left(0-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_1 = 3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

نحول $1+i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

نعوّض:

$$= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \sqrt{6}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$z_3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^4$$

نحول $1+\sqrt{3}i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

نعوّض:

$$z_3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = (2)^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$z_3 = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_4 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

نحول $1+\sqrt{3}i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$1+\sqrt{3}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

نعوّض:

$$z_4 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= (2)^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 16e^{i\frac{4\pi}{3}}.e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

$$= 16e^{i\frac{8\pi}{3}} = 16e^{i\,2\pi+\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_4 = 16e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_5 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$$

نحول $1+i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

نحول $\sqrt{3}+i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = \sqrt{3} \quad , \quad y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$$

ومنهُ $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

نعوّض:

$$z_5 = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^5 = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5}{\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^5 e^{\frac{5\pi}{4}}}{(2)^5 e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{4\sqrt{2}}{32}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)}$$

$$z_5 = \frac{1}{4\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$z_6=\frac{\left(2\sqrt{3}+2i\right)^5}{(1-i)^4}$$

نحول $2\sqrt{3}+2i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x=2\sqrt{3}\ ,\ y=2$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{12+4}=4$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

ومنهُ $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$2\sqrt{3}+2i=4e^{i\frac{\pi}{6}}$$

نحول $1-i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x=1\ ,\ y=-1$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ $\theta=-\frac{\pi}{4}$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

نعوّض:

$$z_6=\frac{\left(4e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4}=\frac{(4)^5e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\left(\sqrt{2}\right)^4e^{-i\pi}}$$

$$=\frac{1024}{4}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+\pi\right)}$$

$$z_6=256.\,e^{i\frac{11\pi}{6}}$$

$$z_7=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

الطريقة الأولى:

استخدام الدساتير المثلثية وفق:

$$z_7=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$=1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تذكرة:

$$\boxed{\begin{gathered}1+\cos(\text{زاوية})=2\cos^2(\text{نصف الزاوية})\\ \sin(\text{زاوية})=2\sin\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\ \text{الزاوية}\end{matrix}\right).\cos\left(\begin{matrix}\text{نصف}\\ \text{الزاوية}\end{matrix}\right)\end{gathered}}$$

$$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[e^{i\frac{\pi}{6}}\right]=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_7=\sqrt{3}.\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

الطريقة الثانية: استخدام قوانين أويلر وفق:

$$z_7=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$=e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{6}}}+\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)$$

$$=e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)$$

$$=e^{i\frac{\pi}{6}}\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)$$

تذكر:

$$\boxed{e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta}$$

ومنهُ:

$$=e^{i\frac{\pi}{6}}\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_7=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

الطريقة الثالثة:

$$z_7=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$$

نحول $e^{i\frac{\pi}{3}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

نعوّض:

$$z_7=1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x=\frac{3}{2}\ ,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$z_7=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

تذكر دوماً كل الطرق تؤدي إلى روما *_^

$$z_8=1+i+\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

نحول $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right]$$

$$=-1-i$$

نعوّض:

$$z_8 = 1 + i - 1 - i$$
$$z_8 = 0$$

$$\boldsymbol{z_9 = -1 + i + e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

نحول $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ إلى الشكل الجبري وفق:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

نعوّض:

$$z_9 = -1 + i + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$
$$= \frac{-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}i$$
$$= \frac{-(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} + \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}i$$
$$= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(-1+i)$$

نحوّل $-1+i$ إلى الشكل الأسي وفق:

$$x = -1 \quad , \quad y = 1$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنه $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

نعوّض:

$$z_9 = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$
$$= (\sqrt{2}-1)e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\boldsymbol{z_{10} = e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{8}}}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{8}}\left(e^{i\frac{\pi}{8}} + 1\right)$$
$$= e^{i\frac{\pi}{8}}.e^{i\frac{\pi}{16}}\left(e^{i\frac{\pi}{16}} + e^{-i\frac{\pi}{16}}\right)$$
$$= e^{i\frac{3\pi}{16}}\left(2\cos\frac{\pi}{16}\right)$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)e^{i\frac{3\pi}{16}}$$

التمرين الرابع:

ليكن θ من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ أعطِ الشكل الأسي للعدد العقدي $z = 1 + e^{2i\theta}$

الحل:

الأسلوب الأول:

$$z = 1 + e^{2i\theta}$$
$$= 1 + \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta + i(2\sin\theta\,.\cos\theta)$$
$$= 2\cos^2\theta + 2i\sin\theta\,.\cos\theta$$
$$= 2\cos\theta\,[\cos\theta + i\sin\theta]$$
$$= (2\cos\theta)e^{i\,\theta}$$

وبما أنّ θ من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (الربعين الرابع والأول) فإنّ $\cos\theta$ يكون موجب وبالتالي يكون الشكل الأسي المطلوب:

$$z = (2\cos\theta)e^{i\,\theta}$$

الأسلوب الثاني:

$$z = 1 + e^{2i\theta}$$
$$= e^{i\theta}\left(\frac{1}{e^{i\theta}} + \frac{e^{2i\theta}}{e^{i\theta}}\right) = e^{i\theta}\left(e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right)$$
$$= e^{i\theta}(2\cos\theta) = (2\cos\theta)e^{i\theta}$$

وبما أنّ θ من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (الربعين الرابع والأول) فإنّ $\cos\theta$ يكون موجب وبالتالي يكون الشكل الأسي المطلوب هو:

$$z = (2\cos\theta)e^{i\,\theta}$$

التمرين الخامس:

أعطِ الشكل الأسي للعدد العقدي $z = 1 - e^{i2\alpha}$ حيث α عدد من المجال $]0, \pi[$

الحل:

$$z = 1 - e^{i2\alpha}$$
$$= e^{i\alpha}\left(\frac{1}{e^{i\alpha}} - \frac{e^{i2\alpha}}{e^{i\alpha}}\right) = e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right)$$
$$= -e^{i\alpha}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right) = -e^{i\alpha}(2i\sin\alpha)$$
$$= -2i\sin\alpha\,(e^{i\alpha}) = (-i)2\sin\alpha\, e^{i\alpha}$$
$$= 2\sin\alpha\, e^{i\frac{3\pi}{2}}e^{i\alpha} = 2\sin\alpha\, e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$

وبما أنّ α من المجال $]0, \pi[$ (الربعين الأول والثاني) فإنّ $\sin\alpha$ يكون موجب وبالتالي يكون الشكل الأسي المطلوب:

$$= 2\sin\alpha\, e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$$

تذكرة:

- $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$
- $\cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\,\theta}$

قاوم ما تكره، لِتصل إلى ما تُحب..

التمرين السادس:

$$z=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$$

بسط كتابة العدد العقدي موضحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الحل:

يكون المقدار z موجوداً في حال المقام لا يساوي الصفر وهذا يكافئ تحقق الشرطين $\sin x\neq 0$ و $1+\cos x\neq 0$ وهذا يكافئ: $x\neq \pi+2\pi$

تبسيط المقدار:

$$z=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$$

$$=\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}=\frac{e^{-ix}\left(\frac{1}{e^{-ix}}+1\right)}{1+e^{ix}}$$

$$=\frac{e^{-ix}\left(e^{ix}+1\right)}{\left(1+e^{ix}\right)}=e^{-ix}$$

التمرين السابع:

اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي المعطى وفق:

$$z=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}$$

الحل:

$$z=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x}=\frac{e^{ix}}{e^{-ix}}=e^{2ix}$$

$$=\cos(2x)+i\sin(2x)$$

وبوضع:

$$a=\cos 2x\ \ ,\ \ b=\sin(2x)$$

فيكون:

$$z=a+ib$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا العدد العقدي: $z=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$ برهن أنّ $z^{24}=1$

الحل:

كتابة $1+\sqrt{3}i$ بالشكل الأسي:

$$x=1\ \ ,\ \ y=\sqrt{3}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\ \ ,\ \ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$\rightarrow 1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

كتابة $\sqrt{3}+i$ بالشكل الأسي:

$$x=\sqrt{3}\ \ ,\ \ y=1$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \ ,\ \ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow \sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

كتابة z بالشكل الأسي وفق:

$$z=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

إثبات أنّ $z^{24}=1$ وفق:

$$z^{24}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{24}=e^{i\frac{24\pi}{6}}=e^{i4\pi}=1$$

التمرين التاسع:

نعطى العددان العقديين:

$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$	$z_2=1-i$

الطلب الأول:

اكتب بالشكل المثلثي كلاً من z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$

الحل:

كتابة z_1 بالشكل المثلثي وفق:

$$z_1=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \ ,\ \ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

ومنهُ: $\theta=-\frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow z_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

كتابة z_2 بالشكل المثلثي وفق:

$$z_2=1-i$$

$$x=1\ \ ,\ \ y=-1$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ ,\ \ \sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ: $\theta=-\frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow z_2=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

كتابة $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي وفق:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

الطلب الثاني:

اكتب $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري.

الحل:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i}=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2}).(2+2i)}{(2-2i).(2+2i)}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{6}i-2\sqrt{2}i+2\sqrt{2}}{4+4}$$

$$=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}i-2\sqrt{2}i}{8}=\frac{2(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{6}i-\sqrt{2}i)}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}i$$

الطلب الثالث: استنتج أنّ:

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

الحل:

$$\underset{\text{جبري}}{\frac{z_1}{z_2}}=\underset{\text{مثلثي}}{\frac{z_1}{z_2}}$$

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}i=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\ ,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

التمرين العاشر:

ليكن لدينا العددان العقديان

$z_1=\left(\cos\frac{\pi}{8}+i.\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$	$z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

1. اكتب z_1 و z_2 و $z_1.z_2$ بالشكل الجبري.
2. اكتب z_1 و $z_1.z_2$ بالشكل الأسي
ثم استنتج $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة z_1 بالشكل الجبري:

$$z_1=\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$$

$$=\cos\frac{6\pi}{8}+i\sin\frac{6\pi}{8}$$

$$=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$r=1\quad,\quad\theta=\frac{3\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$x=r.\cos\theta=1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y=r.\sin\theta=1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

كتابة z_2 بالشكل الجبري:

$$z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$r=2\quad,\quad\theta=-\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$x=r.\cos\theta=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

$$y=r.\sin\theta=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}$$

$$z_2=1-i\sqrt{3}$$

كتابة $z_1.z_2$ بالشكل الجبري:

$$z_1.z_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right).(1-i\sqrt{3})$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i+\frac{1}{\sqrt{2}}i+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}i$$

الطلب الثاني:

كتابة z_1 بالشكل الأسي:

$$z_1=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_1=e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

كتابة $z_1.z_2$ بالشكل الأسي:

$$z_1.z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}.2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$=2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

استنتاج النسب المثلثية:

$$\underbrace{z_1.z_2}_{\text{أسي}}=\underbrace{z_1.z_2}_{\text{جبري}}$$

$$2e^{i\frac{5\pi}{12}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}i$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

$$2\cos\frac{5\pi}{12}+2i\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\to\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\to\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

التمرين الحادي عشر:

لتكن لدينا الأعداد العقدية:

$z_1 = \dfrac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$
$z_2 = -2\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$

أولاً:

الطلب الأول:

اكتب العدد العقدي z_1 بالشكل الجبري.

الحل:

$$z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(4+4i).(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3}).(1+i\sqrt{3})} = \frac{4+4\sqrt{3}i+4i-4\sqrt{3}}{1+3}$$

$$= \frac{4-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}i+4i}{4} = \frac{4(1-\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i)}{4}$$

$$= (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i$$

الطلب الثاني:

اكتب العدد العقدي z_1 بالشكل المثلثي.

الحل:

$$z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}$$

كتابة $4+4i$ بالشكل المثلثي وفق:

$$x = 4 \quad , \quad y = 4$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ: $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow 4+4i = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

كتابة $1-\sqrt{3}i$ بالشكل المثلثي وفق:

$$x = 1 \quad , \quad y = -\sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ: $\theta = -\frac{\pi}{3}$

$$\rightarrow 1-\sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

كتابة z_1 بالشكل المثلثي وفق:

$$z_1 = \frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]}$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

الطلب الثالث:

استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{7\pi}{12}$.

الحل:

مثلثي $z_1 = z_1$ جبري

$$(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right]$$

$$(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})i = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1-\sqrt{3} \rightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1+\sqrt{3} \rightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ثانياً:

الطلب الأول:

عيّن كلاً من طويلة وزاوية العدد العقدي z_2

الحل:

$$z_2 = -2\left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= -2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2[\cos\pi + i\sin\pi]\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

ومنهُ:

$$|z_2| = 2 \quad , \quad \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}$$

الطلب الثاني:

اكتب $(z_2)^2$ بالشكل الأسي.

الحل:

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$(z_2)^2 = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = 2^2\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$

$$\rightarrow (z_2)^2 = 4e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

التمرين الثاني عشر:

ليكن لدينا العدد العقدي:

$$\boxed{z=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

الطلب الأول:

عيّن كلاً من زاوية وطويلة العدد العقدي $(z)^2$ ثم اكتب z بالشكل الأسي.

الحل:

$$(z)^2=\left[\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^2$$

$$=\left(\sqrt{3}+1\right)^2+2i\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\left(\sqrt{3}\right)(1)+(1)^2+2i\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-(1)^2\right)+i^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$=3+2\sqrt{3}+1+2i(3-1)-\left(3-2\sqrt{3}+1\right)$$

$$=3+2\sqrt{3}+1+4i-3+2\sqrt{3}-1$$

$$=4\sqrt{3}+4i$$

$$x=4\sqrt{3}\ ,\ y=4i$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2+(4)^2}$$

$$=\sqrt{16.(3)+16}=\sqrt{16(4)}=(4)(2)=8$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{4\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow (z)^2=8e^{i\frac{\pi}{6}}$$

كتابة z بالشكل الأسي وفق:

$$(z)^2=8e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z=\sqrt{8e^{i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt{8}.\sqrt{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$=2\sqrt{2}.\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

الطلب الثاني:

استنتج كلاً من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

الحل:

أسي $z=z$ جبري

$$\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}+1\rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-1\rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

التمرين الثالث عشر:

لتكن الأعداد العقدية التالية

$$z_1=1+i$$

$$z_2=2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)\right]$$

$$z_3=-\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

1. اكتب z_1 و z_2 و z_3 بالشكل الأسي.
2. مستفيداً من الطلب السابق أثبت أنّ $\left[\frac{(z_1)^2}{(z_2)^3(z_3)^6}\right]$ تخيلي بحت.
3. أوجد $(z_1.z_2)$ بالشكل الجبري
4. أوجد $(z_1.z_2)$ بالشكل المثلثي واستنتج $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة z_1 بالشكل الأسي:

$$z=1+i$$

$$x=1\ ,\ y=1$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta&=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

كتابة z_2 بالشكل الأسي:

$$z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

كتابة z_3 بالشكل الأسي:

$$z_3=-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\pi}\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$=\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}$$

الطلب الثاني:

لدينا:

$$z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(z_1)^2=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2=2e^{i\frac{\pi}{2}}=2i$$

$$z_2=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$(z_2)^3=\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=8\,e^{i2\pi}=8$$

$$z_3=-\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$(z_3)^6=\left(\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^6=27e^{i7\pi}=27e^{i\pi}=-27$$

ومنه:

$$\frac{(z_1)^2}{(z_2)^3(z_3)^6}=\frac{2i}{(8)(-27)}=\frac{-1}{108}i$$

ومنه المقدار تخيلي بحت.

الطلب الثالث:

لدينا:

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$r = 2 \ , \ \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi - \pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = r\cos\theta = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = r\sin\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3}$$

ومنه:

$$z_1 . z_2 = (1+i)(-1+i\sqrt{3})$$

$$= -1 + i\sqrt{3} - i - \sqrt{3}$$

$$= (-1-\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i$$

الطلب الرابع:

لدينا:

$$z_1 . z_2 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(2e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

لدينا:

$$\underbrace{z_1 . z_2}_{\text{جبري}} = \underbrace{z_1 . z_2}_{\text{مثلثي}}$$

$$(-1-\sqrt{3}) + (-1+\sqrt{3})i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$(-1+\sqrt{3}) + i(-1+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}\cos\frac{11\pi}{12} + 2\sqrt{2}i\sin\frac{11\pi}{12}$$

بالمطابقة نجد:

$$-1+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{12}$$

$$\sin\frac{11\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

كل ما ترجوهُ آتٍ.. إنّ خيرَ اللهِ مقبل 🤩 💙

طويلة عدد عقدي:

الرمز	$\lvert z\rvert$
قانون	$\lvert z\rvert = r = \sqrt{x^2+y^2}$
خواص	1. أياً كان العددان العقديان غير المعدومين z_1 و z_2 كان: ❋ $\lvert z_1 . z_2\rvert = \lvert z_1\rvert . \lvert z_2\rvert$ ❋ $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$ ❋ $\left\lvert\frac{1}{z_1}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z_1\rvert}$ 2. أياً كان العدد العقدي غير المعدوم z وأياً كان العدد الطبيعي n كان: $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$

زاوية عدد عقدي:

الرمز	$\arg(z)$
خواص	1. أياً كان العددان العقديان غير المعدومين z_1 و z_2 كان: ❋ $\arg(z_1 . z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ ❋ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ ❋ $\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1)$ 2. أياً كان العدد العقدي غير المعدوم z وأيّاً كان العدد الطبيعي n كان: $\arg(z^n) = n\arg(z)$

تمرين:

ليكن لدينا العدد العقدي:

$$z = \frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ $|z| = 1$ و $\arg(z) = \frac{19\pi}{12}$

ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد العقدي z .

الحل:

إثبات أنّ $|z| = 1$ و $\arg(z) = \frac{19\pi}{12}$:

الطريقة الأولى:

$$|z| = \left|\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}\right| = \frac{\left|-2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right|}{\left|\sqrt{3}+i\right|}$$

$$= \frac{|-2| . \left|e^{i\frac{3\pi}{4}}\right|}{\left|\sqrt{3}+i\right|} = \frac{(2)(1)}{\sqrt{3+1}} = \frac{2}{2} = 1$$

ومنه: $|z| = 1$

$$\arg(z) = \arg\left(\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}\right)$$

$$= \arg\left(-2e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) - \arg(\sqrt{3}+i)$$

$$= \arg(-2) + \arg\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) - \arg(\sqrt{3}+i)$$

حساب زاوية $\sqrt{3}+i$ وفق:

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\rightarrow \pi+\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{12\pi+9\pi-2\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

ومنهُ: $\arg(z)=\frac{19\pi}{12}$

الطريقة الثانية:

$$z=\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}$$

كتابة $-2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ بالشكل الأسي وفق:

$$-2e^{i\frac{3\pi}{4}}=2(e^{i\pi})\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)$$

$$=2e^{i\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

كتابة $\sqrt{3}+i$ بالشكل الأسي وفق:

$$x=\sqrt{3}\quad,\quad y=1$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow \sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

لدينا:

$$z=\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2e^{i\frac{7\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$=e^{i\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\left(\frac{21\pi-2\pi}{12}\right)}=e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

ومنهُ نجد أنَّ:

$$|z|=1$$

$$\arg(z)=\frac{19\pi}{12}$$

الشكل المثلثي لـ z هو:

$$z=\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

الطلب الثاني:

اكتب العدد العقدي z بالشكل الجبري

ثم استنتج $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

الحل:

كتابة z بالشكل الجبري:

$$z=\frac{-2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{3}+i}$$

كتابة $-2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ بالشكل الجبري وفق:

$$-2e^{i\frac{3\pi}{4}}=2e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

$$r=2$$

$$\theta=\frac{7\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ:

$$x=r.\cos\theta=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$

$$y=r.\sin\theta=2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}$$

$$\rightarrow 2e^{i\frac{7\pi}{4}}=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

نعوض في z وفق:

$$z=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-i\sqrt{2}).(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i).(\sqrt{3}-i)}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}-i\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3+1}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{(-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

استنتاج $\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$ وفق:

مثلثي $z=z$ جبري

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{(-\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)$$

$$\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

مرافق عدد عقدي:

تمهيد	⁕ مرافق الـ z هو $\bar{z}$ ⁕ مرافق الـ $\bar{z}$ هو z ⁕ مرافق الـ 3 هو 3 ⁕ مرافق الـ $3i$ هو $-3i$
المرافق والعمليات	١. إن مرافق مجموع عددين عقديين يساوي مجموع مرافقيهما أيّ: $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$ ٢. إن مرافق جداء عددين عقديين يساوي جداء مرافقيهما أيّ: $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$ ٣. إن مرافق خارج قسمة عددين عقديين يساوي خارج قسمة مرافقيهما أيّ: $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ حيث $w \neq 0$ ٤. في حالة عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
نتائج مباشرة	ليكن العدد العقدي $z = x+iy$ وليكن $\bar{z} = x-iy$ فإنّ: ١. مرافق العدد العقدي $\bar{z}$ هو العدد العقدي z أيّ: $\overline{(\bar{z})} = z$ ٢. ناتج جمع z و $\bar{z}$ هو ضعفي القسم الحقيقي أيّ: $z+\bar{z} = 2x$ ٣. ناتج طرح $\bar{z}$ من z هو ضعفي القسم التخيلي أيّ: $z-\bar{z} = 2iy$ ٤. يكون z حقيقياً إذا وفقط إذا كان: $\bar{z} = z$ ٥. يكون z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان: $\bar{z} = -z$ ٦. إن جداء العدد العقدي بمرافقه يساوي طويلة العدد العقدي للتربيع أيّ: $z.\bar{z} = \lvert z\rvert^2$ تعميم: $\left\lvert \text{العدد العقدي} \right\rvert^2 = (\text{مرافقه})\left(\text{العدد العقدي}\right)$ وتطبق بشكل عكسي. $(\text{مرافقه})\left(\text{العدد العقدي}\right) = \left\lvert \text{العدد العقدي} \right\rvert^2$

تمرين:

اكتب بدلالة $\bar{z}$ كل من الأعداد العقدية الآتية:

1. $z = (z-1)(z+i) \to \bar{z} = (\bar{z}-1)(\bar{z}-i)$
2. $z = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i} \to \bar{z} = \frac{3\bar{z}^2+2i\bar{z}+4}{2\bar{z}+3i}$
3. $z = z^3+2iz^2+1-3i \to \bar{z} = \bar{z}^3-2i\bar{z}^2+1+3i$
4. $z = (1+2iz)^3 \to \bar{z} = (1-2i\bar{z})^3$

أنماط التمارين:

	النمط الأول	النمط الثاني	النمط الثالث
نص السؤال	أثبت صحة العلاقة	أثبت أنّ z حقيقي	أثبت أنّ z تخيلي بحت
فكرة الحل	لدينا اسلوبان: ⁕ ننطلق من أحد الأطراف وصولاً إلى الطرف الثاني. ⁕ ننطلق من الطرفين وصولاً إلى نفس النتيجة.	⁕ نوجد $\bar{z}$ ⁕ نثبت أنّ $\bar{z} = z$	⁕ نوجد $\bar{z}$ ⁕ نثبت أنّ $\bar{z} = -z$

التمرين الأول:

ليكن z و z' عددان عقديان , أثبت أنّ:

$$\underbrace{\lvert z+z'\rvert^2 + \lvert z-z'\rvert^2}_{l_1} = \underbrace{2\lvert z\rvert^2 + 2\lvert z'\rvert^2}_{l_2}$$

الحل:

$$l_1 = \lvert z+z'\rvert^2 + \lvert z-z'\rvert^2$$
$$= (z+z')(\bar{z}+\bar{z'}) + (z-z')(\bar{z}-\bar{z'})$$
$$= z.\bar{z} + z.\bar{z'} + z'.\bar{z} + z'.\bar{z'}$$
$$+z.\bar{z} - z.\bar{z'} - z'.\bar{z} + z'.\bar{z'}$$
$$= 2z.\bar{z} + 2z'.\bar{z'}$$
$$= 2\lvert z\rvert^2 + 2\lvert z'\rvert^2 = l_2$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا z عدد عقدي ما , أثبت أنّ :

$$\underbrace{\lvert iz+2i\rvert^2 + \lvert z-2\rvert^2}_{l_1} = \underbrace{2\lvert z\rvert^2 + 8}_{l_2}$$

الحل:

$$l_1 = \lvert iz+2i\rvert^2 + \lvert z-2\rvert^2$$
$$= (iz+2i)(-i\bar{z}-2i) + (z-2)(\bar{z}-2)$$
$$= z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 + z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4$$
$$= 2z\bar{z} + 8 = 2\lvert z\rvert^2 + 8 = l_2$$

ظننتُ أنها لن تمضي وبرحمة الله مضت..

التمرين الثالث:

ليكن لدينا z عدد عقدي ما , أثبت أنّ :

$$\underbrace{|z+3i|^2+|z-3i|^2}_{l_1}=\underbrace{2|z|^2+18}_{l_2}$$

$$l_1=|z+3i|^2+|z-3i|^2$$
$$=(z+3i)(\bar{z}-3i)+(z-3i)(\bar{z}+3i)$$
$$=z\bar{z}-3iz+3i\bar{z}+9+z\bar{z}+3iz-3i\bar{z}+9$$
$$=2z\bar{z}+18=2|z|^2+18=l_2$$

التمرين الرابع:

تتأمّل عدد عقديين z و w يحققان $|z|=1$ و $|w|=1$ و $zw\neq -1$ أثبت أنّ العدد العقدي $u=\frac{z+w}{1+zw}$ عدد حقيقي.

الحل:

$$\bar{u}=\frac{\bar{z}+\bar{w}}{1+\bar{z}.\bar{w}}\dots(*)$$

لدينا:

$$|z|=1\to|z|^2=1\to z.\bar{z}=1\to\bar{z}=\frac{1}{z}$$
$$|w|=1\to|w|^2=1\to w.\bar{w}=1\to\bar{w}=\frac{1}{w}$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$\bar{u}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{z}.\frac{1}{w}}=\frac{\frac{w+z}{w.z}}{\frac{z.w+1}{w.z}}=\frac{z+w}{1+z.w}=u$$

إذاً $\bar{u}=u$ وبالتالي u حقيقي.

التمرين الخامس:

ليكن z عدد عقدي ما وليكن w عدد عقدي طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد وليكن لدينا u مُعطى وفق:

$u=\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ أثبت أنّ u تخيلي بحت.

الحل:

$$\bar{u}=\frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i\bar{w}+i}\dots(*)$$

لدينا:

$$|w|=1\to|w|^2=1\to w.\bar{w}=1\to\bar{w}=\frac{1}{w}$$

نعوّض في $(*)$ وفق:

$$\bar{u}=\frac{\frac{1}{w}.z-\bar{z}}{-i.\frac{1}{w}+i}=\frac{\frac{z}{w}-\bar{z}}{-\frac{i}{w}+i}$$
$$=\frac{\frac{z-w\bar{z}}{w}}{\frac{-i+iw}{w}}=\frac{z-w\bar{z}}{-i+iw}$$
$$=\frac{-(w\bar{z}-z)}{(iw-i)}=-\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}=-u$$

إذاً $\bar{u}=-u$ وبالتالي u تخيلي بحت.

التمرين السادس:

نتأمل z و w عددان عقديان طويلة كل منهما تساوي الواحد حيث $wz\neq 1$ والمطلوب:

1. أثبت أنّ العدد العقدي $u=\frac{w+z}{1-wz}$ تخيلي بحت.
2. نفترض أنّ $z=e^{i\frac{\pi}{5}}$ و $w=e^{i\frac{4\pi}{5}}$ أثبت أنّ $u=i\sin\frac{\pi}{5}$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ u تخيلي بحت:

$$\underbrace{\bar{u}}_{l_1}=\underbrace{-u}_{l_2}$$

$$l_1=\bar{u}=\overline{\left(\frac{w+z}{1-wz}\right)}=\frac{\bar{w}+\bar{z}}{1-\bar{w}.\bar{z}}$$

لدينا:

$$|z|=1\to|z|^2=1\to z.\bar{z}=1\to\bar{z}=\frac{1}{z}$$
$$|w|=1\to|w|^2=1\to w.\bar{w}=1\to\bar{w}=\frac{1}{w}$$

$$l_1=\frac{\frac{1}{w}+\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{w}.\frac{1}{z}}=\frac{\frac{z+w}{zw}}{\frac{wz-1}{zw}}$$
$$=\frac{z+w}{zw-1}=\frac{z+w}{-(1-wz)}$$
$$=-\frac{z+w}{1-wz}=-u=l_2$$

ومنهُ نجد أنّ u تخيلي بحت.

الطلب الثاني:

$$u=\frac{w+z}{1-wz}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{1-e^{i\frac{4\pi}{5}}.e^{i\frac{\pi}{5}}}$$
$$=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{1-e^{i\pi}}=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{1-(-1)}$$
$$=\frac{e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{\pi}{5}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

سنعود بعد قليل..

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{5\pi-\pi}{5}\right)$$
$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

عدنا..

$$u=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(2i\sin\frac{\pi}{5}\right)=i\sin\frac{\pi}{5}$$

التمرين السابع:

نفترض أنّ $u\neq 1$ وأنّ $w=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عدد حقيقي أثبت أنه إمّا أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u|=1$

الحل:

بما أنّ w عدد حقيقي فإنّ: $\bar{w}=w$ ومنهُ:

$$\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$$
$$(\bar{z}-\bar{u}z)(1-u)=(z-u\bar{z})(1-\bar{u})$$
$$\bar{z}-u\bar{z}-z\bar{u}+zu\bar{u}=z-z\bar{u}-u\bar{z}+\bar{z}u\bar{u}$$
$$\bar{z}+zu\bar{u}=z+\bar{z}u\bar{u}$$
$$\bar{z}-z+zu\bar{u}-\bar{z}u\bar{u}=0$$
$$\bar{z}-z+u\bar{u}(z-\bar{z})=0$$
$$\bar{z}-z-u\bar{u}(\bar{z}-z)=0$$
$$(\bar{z}-z)(1-u\bar{u})=0$$

إمّا $\bar{z}-z=0\rightarrow \bar{z}=z$

ومنهُ z عدد حقيقي.

أو $1-u\bar{u}=0\rightarrow u\bar{u}=1$

$$\rightarrow |u|^2=1\rightarrow |u|=1$$

التمرين الثامن:

ليكن لدينا العدد العقدي:

$$\boxed{w=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

الطلب الأول:

بيّن أنّ $|w|=1$ ثم اكتب w بالشكل الأسي.

الحل:

بيّن أنّ $|w|=1$ وفق:

$$|w|=\left|\frac{-2e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+i\sqrt{3}}\right|=\frac{\left|-2e^{i\frac{\pi}{4}}\right|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|}$$
$$=\frac{|-2|.\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|}{\left|1+i\sqrt{3}\right|}=\frac{(2)(1)}{\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{1+3}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=\frac{2}{2}=1$$

ومنهُ: $|w|=1$

كتابة w بالشكل الأسي:

$$w=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{-2e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{1+i\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{4}}}{1+i\sqrt{3}}$$

كتابة $1+i\sqrt{3}$ بالشكل الأسي وفق:

$$x=1\quad,\quad y=\sqrt{3}$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=2$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}\quad,\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$\rightarrow 1+i\sqrt{3}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

نعوّض:

$$w=\frac{2e^{i\frac{4\pi}{5}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{4\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$\rightarrow w=e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

الطلب الثاني:

ليكن لدينا العدد العقدي:

$$\boxed{z=\frac{2iw+1}{w-2i}}$$

أثبت أنّ $|z|=1$.

الحل:

$$\bar{z}=\frac{-2i\bar{w}+1}{\bar{w}+2i}\ldots(*)$$

لدينا من الطلب السابق $|w|=1$ ومنهُ:

$$|w|=1\rightarrow |w|^2=1\rightarrow w.\bar{w}=1\rightarrow \bar{w}=\frac{1}{w}$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$\bar{z}=\frac{-2i.\frac{1}{w}+1}{\frac{1}{w}+2i}=\frac{\frac{-2i}{w}+1}{\frac{1}{w}+2i}$$
$$=\frac{\frac{-2i+w}{w}}{\frac{1+2iw}{w}}=\frac{-2i+w}{1+2iw}=\frac{w-2i}{2iw+1}$$
$$\bar{z}=\frac{1}{z}\rightarrow \bar{z}.z=1\rightarrow |z|^2=1\rightarrow |z|=1$$

التمرين التاسع:

ليكن لدينا العدد العقدي $w=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}e^{i\frac{\pi}{4}}$ والمطلوب:

1. بيّن أنّ $|w|=1$ ثم اكتب العدد w بالشكل الأسي.
2. ليكن $z=\frac{2iw+1}{w-2i}$ أثبت أنّ $|z|=1$

الحل:

الطلب الأول:

بيّن أنّ $|w| = 1$:

$$|w| = \left|\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \left|\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right|\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right|$$

$$= \frac{|-2|}{|1+\sqrt{3}i|}\left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = \frac{2}{2}(1) \rightarrow |w| = 1$$

كتابة w بالشكل الأسي:

لدينا:

$$w = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

وليكن لدينا:

$$w_1 = -2 = (-1)(2)$$

$-1 = e^{i\pi}$:نعلم أنّ

$$w_1 = 2.e^{i\pi}$$

$$w_2 = 1+\sqrt{3}i$$

$$x = 1 \quad , \quad y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه:

$$w = \frac{2e^{i\pi}.e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= e^{i\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $|z| = 1$:

$$z = \frac{2iw+1}{w-2i}$$

$$\bar{z} = \frac{-2i\bar{w}+1}{\bar{w}+2i}$$

بما أنّ:

$$|w| = 1 \rightarrow |w|^2 = 1 \rightarrow w.\bar{w} = 1 \rightarrow \bar{w} = \frac{1}{w}$$

$$\bar{z} = \frac{-\frac{2i}{w}+1}{\frac{1}{w}+2i} = \frac{\frac{-2i+w}{w}}{\frac{1+2iw}{w}} = \frac{w-2i}{1+2iw}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z} \rightarrow z.\bar{z} = 1 \rightarrow |z| = 1$$

التمرين العاشر:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين:

$z_A = (\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i$	$z_B = \bar{z_A}$

أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم

استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

الحل:

إثبات أنّ $\underbrace{\frac{z_A}{z_B}}_{l_1} = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{6}}}_{l_2}$ وفق:

$$l_1 = \frac{z_A}{z_B} = \frac{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i}{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i}$$

$$= \frac{[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i].[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i]}{[(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i].[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i]}$$

$$= \frac{[(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)i]^2}{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \frac{[(\sqrt{3}+1)^2+2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)^2]}{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1+2i(3-1)-3+2\sqrt{3}-1}{8}$$

$$= \frac{3+2\sqrt{3}+1+4i-3+2\sqrt{3}-1}{8}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+4i}{8} = \left(\frac{4\sqrt{3}}{8}+\frac{4}{8}i\right)$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y = \frac{1}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;, \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

ومنه: $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\rightarrow \frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

استنتاج زاوية العدد العقدي z_A :

لدينا:

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_A}{\bar{z_A}} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_A \cdot z_A}{\overline{z_A} \cdot z_A} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{z_A^2}{|z_A|^2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_A^2 = |z_A|^2 . e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_A = \sqrt{|z_A|^2 . e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt{|z_A|^2} . \sqrt{e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$= |z_A| . \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = |z_A| . e^{i\frac{\pi}{12}}$$

حساب $|z_A|$ وفق:

$$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$$

$$|z_A| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}$$

$$= \sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} . e^{i\frac{\pi}{12}}$$

ومنه: $\arg(z_A) = \frac{\pi}{12}$

إيجاد النسب المثلثية:

جبري $z_A = z_A$ أسي

$$2\sqrt{2} . e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$$

ومنه:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

التمرين الحادي عشر:

في المستوي العقدي المنوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين:

$$z_A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i$$

$$z_B = \overline{z_A}$$

1. أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A
2. استنتج قيمة $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$
3. أثبت أنّ $1 + z_A + z_A^2 + \cdots + z_A^{15} = 0$

الحل:

الطلب الأول:

$$\underbrace{\frac{z_A}{z_B}}_{l_1} = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{4}}}_{l_2}$$

$$l_1 = \frac{z_A}{z_B} = \frac{z_A(\overline{z_A})}{z_B(\overline{z_A})} = \frac{z_A^2}{|z_A|^2}$$

حيث:

$$z_A^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i\right) + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{2} i - \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

$$|z_A|^2 = |z_A^2| = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

ومنه:

$$\frac{z_A^2}{|z_A|^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

ومنه:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$$

وبالتالي:

$$\frac{z_A^2}{|z_A|^2} = e^{i\frac{\pi}{4}} = l_2$$

استنتاج زاوية العدد العقدي z_A :

لدينا:

$$\frac{z_A^2}{|z_A|^2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_A^2 = |z_A|^2 e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_A = \sqrt{|z_A|^2 e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \sqrt{|z_A|^2} . \sqrt{e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= \sqrt{1}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\pi}{8}}$$

ومنه زاوية العدد العقدي z_A هي $\frac{\pi}{8}$

الطلب الثاني:

استنتاج $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$:

لدينا:

$$\underbrace{z_A}_{\text{جبري}} = \underbrace{z_A}_{\text{مثلثي}}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} i = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

سيُقر الله العين بِما ترجُو .. 🙁💙

الطلب الثالث:

لدينا:

$$\underbrace{1 + z_A + z_A^2 + \cdots + z_A^{15}}_{l_1} = \underbrace{0}_{l_2}$$

$$l_1 = z_A + z_A^2 + \cdots + z_A^{15}$$

تمثل مجموع حدود متوالية من متتالية هندسية أساسها $q = z_A$ وحدها الأول 1 وعدد الحدود 16

$$l_1 = (\text{الحد الأول}).\left[\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right]$$

$$= (1).\frac{1-(z_A)^{16}}{1-z_A} = \frac{1-\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^{16}}{1-e^{i\frac{\pi}{8}}} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1-1}{1-e^{i\frac{\pi}{8}}} = 0 = l_2$$

وبما أنّ $l_1 = l_2$ فإنّ العلاقة محققة.

المعادلات في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$:

نص السؤال	فكرة الحل
حل المعادلات في $\mathbb{C}$	إيجاد قيمة المجهول z
حل جملة المعادلات	إيجاد قيم جميع المجاهيل

أنواع المعادلات:

نوع المعادلة	فكرة الحل
المعادلات من الدرجة الأولى	* ننقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى الطرف الثاني مع تغيير إشارة المنقول * نختزل * نعزل z (أي نقسم الطرفين على أمثال المجهول)
الجداء الصفري	* إما القوس الأول يساوي الصفر * أو القوس الثاني يساوي الصفر * وهاكوذا.. ملاحظة: إذا كان لدينا قوس مرفوع إلى قوة يساوي الصفر فإن القوس بدون قوّة يساوي الصفر.
المعادلات التي تحوي $\bar{z}$ فقط	* نأخذ مرافق الأطراف * نكمل كما سبق
المعادلات التي تحوي z و $\bar{z}$	* نصنع معادلة ثانية وذلك بأخذ مرافق الأطراف للمعادلة الأولى * نحصل على جملة معادلتين بمجهولين نحلها إما بالحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض

مَن أخلَص قلبًا صَدَق سَيرًا..

ومَن ذابَ بِما أحبَّ اجتَهد! اللهمّ هذا سَيرُنا، وتلك عثراتنا، نتعبَّد إليك استقامة قلوبنا، ما أوهنَ الطّريق سَعيَنا، ولا أطفأ الكَيدُ جَمرَنا، ولا استطاع المَيلُ أمرَنا، ولا لانَ لغيرك جَنبَنا، نسيرُ خُطوة الألف وَحدنا، إنا للّه أحلامنا.. 🙁💙💙💙💙💙💙💙💙💙💙

خالد عامر تشفيرة الـ 009

<table>
<tr><td rowspan="4">المعادلة من الدرجة الثانية</td><td>تحوي z^2 و z فقط</td><td colspan="2">

- ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن
- نحلل الطرف الأيسر باستخدام العامل المشترك
- نحصل على الجداء الصفري وبحله نحصل على المطلوب

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">تحوي z^2 وعدد w</td><td colspan="2">

- نعزل z^2 للوصول إلى الشكل $z^2 = w$
- نميز ما يلي:

</td></tr>
<tr><td>أولاً: إذا كان العدد w لا يحوي i</td><td>ثانياً: إذا كان w يحوي i</td></tr>
<tr><td>

الحالة الأولى: إذا كان w عدد موجب يكون للمعادلة حلان $z_1 = +\sqrt{w}, z_2 = -\sqrt{w}$

الحالة الثانية: إذا كان w صفر يكون للمعادلة حل وحيد $z = 0$

الحالة الثالثة: إذا كان w عدد سالب يكون للمعادلة حلان عقديان مترافقان

$z_1 = +i\sqrt{-w}, z_2 = -i\sqrt{-w}$

</td><td>

فإننا نوجد الجذور التربيعية لـ w وفق:

- نفرض $z = x + iy$
- والمعادلة $z^2 = w$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| \\ x^2 - y^2 = Re(w) \\ 2xy = Im(w) \end{cases}$$

- بحل جملة المعادلات السابقة نحصل على المطلوب

ملاحظة:

نص السؤال يكون بأحد الأشكال:

- حل المعادلة $z^2 = w$ في $\mathbb{C}$ حيث w معلوم ويحوي i
- أوجد الجذور التربيعية لـ w
- حيث w معلوم ويحوي i

</td></tr>
<tr><td rowspan="3">المعادلة من الدرجة الثانية</td><td rowspan="3">تحوي z^2 و z وعدد</td><td colspan="2">

- ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن
- نحلل الطرف الأيسر باستخدام طريقة التحليل المباشر فنحصل على الجداء الصفري وفي حال فشل طريقة التحليل المباشر فإننا نلجأ إلى طريقة المميز Δ وفق:
- نحسب Δ حيث: $\Delta = b^2 - 4ac$
- ونميز:

</td></tr>
<tr><td>أولاً: إذا كان ناتج Δ لا يحوي i</td><td>ثانياً: إذا كان ناتج Δ يحوي i</td></tr>
<tr><td>

فإننا نميز ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان $\Delta > 0$ يكون للمعادلة حلان حقيقيان

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

الحالة الثانية: إذا كان $\Delta = 0$ يكون للمعادلة حل وحيد

$$z = -\frac{b}{2a}$$

الحالة الثالثة: إذا كان $\Delta < 0$

تكون المعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$ ولكن في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ لها حلان عقديان وفق:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

ملاحظة:

إذا كانت الأمثال a و b و c حقيقية يكون للمعادلة حلّان عقديان مترافقان

</td><td>

- نوجد الجذور التربيعية لـ Δ أيّ نحل المعادلة $w^2 = \Delta$ حيث الجذور التربيعية هي w_1 و w_2
- تكون حلول المعادلة هي:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

</td></tr>
<tr><td>المعادلات من الدرجة الثالثة وما فوق</td><td colspan="3">

- ننقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر ونجعل الصفر في الطرف الأيمن
- نحلل الطرف الأيسر باستخدام القسمة الإقليدية
- نحصل على الجداء الصفري
- نتابع كما سبق

</td></tr>
<tr><td>جملة معادلتين تحوي z_1 و z_2</td><td colspan="3">نحلها إما الحذف بالجمع أو الحذف بالتعويض.</td></tr>
</table>

الجذور من المرتبة n	نعطى عدداً عقدياً غير الصفر $w = x + iy$ ونهدف إلى حل المعادلة $z^n - w = 0$ وفق: ١. نعزل z^n للوصول إلى الشكل $(*)(z^n = w)$ ٢. نكتب كُلاً من z و w بالشكل الأسي وفق: $z = re^{i\theta}\ , w = r_1 e^{i\theta_1}$ ٣. نعوض في $(*)$ وفق: $(re^{i\theta})^n = r_1 e^{i\theta_1}$ $r^n e^{in\theta} = r_1 e^{i\theta_1}$ **ملاحظة:** تساوي عددين عقديين بالشكل الأسي وليكن $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ يعنى أنّ $z_1 = z_2$ $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ وهذا يكافئ: $r_1 = r_2$ ويكافئ أيضاً: $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi k$ حيث k هو عدد الدورات. ٤. بالمطابقة نوجد كلاً من r و θ وفق: $r^n = r_1 \to r = \sqrt[n]{r}$ $\theta = \theta_1 + 2\pi k$ حيث k تمثل عدد الدورات وتبدأ قيمتها من الصفر وصولاً إلى $n - 1$ **ملاحظة:** - إذا كان المطلوب إيجاد الجذور التربيعية لـ $w = z^2$ فإن قيم k تكون $k = 0,1$ - إذا كان المطلوب إيجاد الجذور التكعيبية لـ $w = z^3$ فإن قيم k تكون $k = 0,1,2$ - إذا كان المطلوب إيجاد الجذور لـ $w = z^7$ فإنّ قيم k تكون $k = 0,1,2,3,4,5,6$ - وهكذا.. ٥. نكتب الجذور بشكلها الاسي

التمرين الأول:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

1. $2z - 2(1 + i) = -4(z + 2) + i$

$$2z - 2 - 2i = -4z - 8 + i$$
$$6z = -6 + 3i$$
$$z = -\frac{6}{6} + \frac{3}{6}i = -1 + \frac{1}{2}i$$

2. $(z - 3i)(2 - 7iz)^3(2 - 3z) = 0$

إما $z - 3i = 0 \to z = 3i$

أو $(2 - 7iz)^3 = 0$

$$2 - 7iz = 0 \to 7iz = 2$$
$$z = \frac{2}{7i} \to z = \frac{(2)(-7i)}{(7i)(-7i)} = -\frac{14i}{49}$$

أو $2 - 3z = 0 \to 3z = 2 \to z = \frac{2}{3}$

3. $-7\bar{z} = -7 + 7i$

نأخذ مرافق الطرفين.

$$-7z = -7 - 7i \to z = 1 + i$$

4. $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = i$

نأخذ مرافق الطرفين.

$$\frac{z - 1}{z + 1} = -i$$
$$(z - 1) = -i(z + 1)$$
$$z - 1 = -iz - i$$
$$z + iz = 1 - i$$
$$z(1 + i) = (1 - i)$$
$$z = \frac{1 - i}{1 + i}$$
$$z = \frac{(i)(-1 - i)}{1 + i} = \frac{-i(1 + i)}{(1 + i)} = -i$$

5. $z - 2\bar{z} = 2$

نأخذ مرافق الطرفين فنجد:

$$\bar{z} - 2z = 2$$

ومنهُ نحصل على جملة معادلتين:

$$\begin{cases} z - 2\bar{z} = 2 \ldots (1) \\ -2z + \bar{z} = 2 \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) بالعدد (2) فنجد أنّ:

$$\begin{cases} z - 2\bar{z} = 2 \ldots (1) \\ -4z + 2\bar{z} = 4 \ldots (2)' \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$-3z = 6 \to z = -2$$

6. $2z - \bar{z} = 2 - 5i$

نأخذ مرافق الطرفين فنجد:

$$2\bar{z} - z = 2 + 5i$$

ومنهُ نحصل على جملة معادلتين:

$$\begin{cases} 2z - \bar{z} = 2 - 5i \dots (1) \\ -z + 2\bar{z} = 2 + 5i \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بالعدد (2) فنجد أنّ:

$$\begin{cases} 4z - 2\bar{z} = 4 - 10i \dots (1)' \\ -z + 2\bar{z} = 2 + 5i \dots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$3z = 6 - 5i \to z = 2 - \frac{5}{3}i$$

7. $7z^2 = -3iz$

$7z^2 + 3iz = 0$

$z(7z + 3i) = 0$

إما $z = 0$

أو $7z + 3i = 0 \to z = -\frac{3}{7}i$

8. $4z^2 - 100 = 0$

$4z^2 = 100 \to z^2 = 25$

إما $z = 5$

أو $z = -5$

9. $3z^2 + 5 = 5$

$3z^2 = 0 \to z^2 = 0 \to z = 0$

10. $4z^2 + 16 = 0$

$z^2 = -4$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان وفق:

$z_1 = i\sqrt{-(-4)} = 2i$

$z_2 = -i\sqrt{-(-4)} = -2i$

11. $z^2 + 3 = 4i$

$z^2 = -3 + 4i$

بفرض أن $z = x + iy$

وأنّ $w = -3 + 4i$

والمعادلة $z^2 = w$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) \\ 2xy = \mathrm{Im}(w) \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = -3 \dots (2) \\ 2xy = 4 \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x^2 = 2 \to x^2 = 1$$

إما $x = 1$

نعوض في (3) فنجد:

$y = 2$

$\to z_1 = 1 + 2i$

أو $x = -1$

نعوض في (3) فنجد:

$y = -2$

$\to z_2 = -1 - 2i$

12. $z^2 - 1 = 2\sqrt{2}i$

$z^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$

بفرض أن $z = x + iy$

وأنّ $w = 1 + 2\sqrt{2}i$

والمعادلة $z^2 = w$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) \\ 2xy = \mathrm{Im}(w) \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = 1 \dots (2) \\ 2xy = 2\sqrt{2} \dots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x^2 = 4 \to x^2 = 2$$

إما $x = \sqrt{2}$

نعوض في (3) فنجد:

$y = 1$

$\to z_1 = \sqrt{2} + 1$

أو $x = -\sqrt{2}$

نعوض في (3) فنجد:

$y = -1$

$z_2 = -\sqrt{2} - i$

13. $(2 - z - z^2)^3 = 0$

$2 - z - z^2 = 0$

$z^2 + z - 2 = 0$

$(z + 2)(z - 1) = 0$

إما $z = -2$

أو $z = 1$

14. $3z^2 - z = 4$

$3z^2 - z - 4 = 0$

$a = 3 \;,\; b = -1 \;,\; c = -4$

$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = 1 + 48 = 49 > 0$

للمعادلة حلان وفق:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 7}{6} = -1$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 7}{6} = \frac{4}{3}$$

15. $z^2+25=-10z$

$z^2+10z+25=0$

$(z+5)^2=0$

$z+5=0$

$z=-5$

16. $z^2-(1+\sqrt{3})z+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$z^2+(-1-\sqrt{3})z+1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$

$a=1\ ,\ b=-1-\sqrt{3}\ ,\ c=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Delta=b^2-4(a)(c)$

$=(-1-\sqrt{3})^2-4(1)\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=1+2\sqrt{3}+3-4-2\sqrt{3}=0$

للمعادلة حل وحيد وفق:

$$z=-\frac{b}{2a}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

17. $2z^2-6z+5=0$

$a=2\ ,\ b=-6\ ,\ c=5$

$\Delta=b^2-4(a)(c)$

$\Delta=36-40=-4<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6-2i}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{6+2i}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$$

18. $3z^2+iz+2=0$

$a=3\ ,\ b=i\ ,\ c=2$

$\Delta=b^2-4(a)(c)$

$\Delta=-1-24=-25<0$

للمعادلة حلان عقديان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-i-5i}{6}=-i$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-i+5i}{6}=\frac{2}{3}i$$

19. $z^2-2(\cos\theta)z+1=0\ ;\theta\in\mathbb{R}$

$a=1\ ,\ b=-2\cos\theta\ \ ,\ c=1$

$\Delta=b^2-4(a)(c)$

$\Delta=4\cos^2\theta-4$

$=-4(1-\cos^2\theta)$

$=-4\sin^2\theta<0$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$=\frac{2\cos\theta-2i\sin\theta}{2}=\cos\theta-i\sin\theta$$

$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$=\frac{2\cos\theta+2i\sin\theta}{2}=\cos\theta+i\sin\theta$$

20. $z^2+iz-2-6i=0$

$a=1\ ,\ b=i\ \ ,\ c=-2-6i$

$\Delta=b^2-4(a)(c)$

$\Delta=-1-4(1)(-2-6i)$

$\Delta=-1+8+24i$

$\Delta=7+24i$

Δ يحوي i فإننا نوجد الجذور التربيعية لـ Δ

أي نحل المعادلة $w^2=\Delta$

بفرض أنّ $w=x+iy$

وأنّ $\Delta=7+24i$

والمعادلة $w^2=\Delta$ تكافئ:

$$\begin{cases}x^2+y^2=|\Delta|\\x^2-y^2=\mathrm{Re}(\Delta)\\2xy=\mathrm{Im}(\Delta)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=25\ ...(1)\\x^2-y^2=7\ ...(2)\\2xy=24\ ...(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$2x^2=32\rightarrow x^2=16$

إما $x=4$

نعوض في (3) فنجد:

$y=3$

$\rightarrow w_1=4+3i$

أو $x=-4$

نعوض في (3) فنجد:

$y=-3$

$\rightarrow w_2=-4-3i$

نوجد حلول المعادلة وفق:

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-i+4+3i}{2}=\frac{4}{2}+\frac{2}{2}i=2+i$$

$$z_2=\frac{-b+w_2}{2a}=\frac{-i-4-3i}{2}=-\frac{4}{2}-\frac{4}{2}i=-2-2i$$

21. $2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

$a=2i\ ,b=3+7i\ ,c=4+2i$

$\Delta=b^2-4(a)(c)$

$\Delta=(3+7i)^2-4(2i)(4+2i)$

$\Delta=9+42i-49-32i+16$

$\Delta=-24+10i$

Δ يحوي i فإننا نوجد الجذور التربيعية لـ Δ

أي نحل المعادلة $w^2 = \Delta$

بفرض أنّ $w = x + iy$

وأنّ $\Delta = -24 + 10i$

والمعادلة $w^2 = \Delta$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 26 \ldots (1) \\ x^2 - y^2 = -24 \ldots (2) \\ 2xy = 10 \ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x^2 = 2 \to x^2 = 1$$

إما $x = 1$

نعوض في (3) فنجد:

$$y = 5$$

$$\to w_1 = 1 + 5i$$

أو $x = -1$

نعوض في (3) فنجد:

$$y = -5$$

$$\to w_2 = -1 - 5i$$

نوجد حلول المعادلة وفق:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} = \frac{-3 - 7i + 1 + 5i}{4i} = \frac{-2 - 2i}{4i} = \frac{-1 - i}{2i} = \frac{(-1 - i)(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{-2 + 2i}{4}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + w_2}{2a} = \frac{-3 - 7i - 1 - 5i}{4i} = \frac{-4 - 12i}{4i} = \frac{-1 - 3i}{i} = \frac{(-1 - 3i)(-i)}{(i)(-i)} = \frac{-3 + i}{1}$$

$$z_2 = -3 + i$$

22. $z^3 = 3z - 2$

$$z^3 - 3z + 2 = 0$$

و ربُّ المُستحيل على المُستحيل قادر .. 😍🔥💙

نلاحظ أنّ القيمة (1) تعدم المقدار لذلك نقسم المقدار على $(z - 1)$ باستخدام القسمة الإقليدية.

$$\begin{array}{r|l} & z^2 + z - 2 \\ z - 1 & z^3 - 3z + 2 \\ & -z^3 \pm z^2 \\ \hline & z^2 - 3z + 2 \\ & -z^2 \pm z \\ \hline & -2z + 2 \\ & \pm 2z \mp 2 \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{z^3 - 3z + 2}{z - 1} = z^2 + z - 2$$

$$z^3 - 3z + 2 = (z - 1)(z^2 + z - 2)$$

$$z^3 - 3z + 2 = 0$$

$$(z - 1)(z^2 + z - 2) = 0$$

إما $z - 1 = 0 \to z = 1$

أو $z^2 + z - 2 = 0 \to (z + 2)(z - 1) = 0$

إما $z + 2 = 0 \to z = -2$

أو $z - 1 = 0 \to z = 1$

23. $z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0$

نلاحظ أنّ $2i$ تعدم المقدار لذلك نقسم المقدار على $z - 2i$ باستخدام القسمة الإقليدية.

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 2z + 2 \\ z - 2i & z^3 - 2z^2 - 2iz^2 + 2z + 4iz - 4i \\ & -z^3 \pm 2iz^2 \\ \hline & -2z^2 + 0iz^2 + 2z + 4iz - 4i \\ & \pm 2z^2 \mp 4iz \\ \hline & 2z + 0iz - 4i \\ & -2z \pm 4i \\ \hline & 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i}{z - 2i} = z^2 - 2z + 2$$

$$z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = (z - 2i)(z^2 - 2z + 2)$$

$$z^3 - 2(1 + i)z^2 + 2(1 + 2i)z - 4i = 0$$

$$(z - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

إما $z - 2i = 0 \to z = 2i$

أو $z^2 - 2z + 2 = 0$

$$a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

24. $z^3 = 27i$

$$z^3 = 27i \dots (*)$$

نكتب كلاً من z^3 و $27i$ بالشكل الأسي.

كتابة z^3 بالشكل الأسي وفق:

بفرض $z = r.e^{i\,\theta}$ فتكون: $z^3 = r^3.e^{i3\theta}$

كتابة $27i$ بالشكل الأسي وفق: $27i = 27.e^{i\frac{\pi}{2}}$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$r^3.e^{i3\theta} = 27.e^{i\frac{\pi}{2}}$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$r^3 = 27 \to z = 3$$

ونجد أيضاً:

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \to \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$k = 0 \to \theta = \frac{\pi}{6} \to z_1 = 3.e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$k = 1 \to \theta = \frac{5\pi}{6} \to z_2 = 3.e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$k = 2 \to \theta = \frac{3\pi}{2} \to z_3 = 3.e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

25. $z^3 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$

$$z^3 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i \dots (*)$$

نكتب كلاً من z^3 و $\left(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i\right)$ بالشكل الأسي.

كتابة z^3 بالشكل الأسي وفق:

بفرض $z = r.e^{i\,\theta}$

فتكون: $z^3 = r^3.e^{i3\theta}$

كتابة $-\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ بالشكل الأسي وفق:

$$x = -\sqrt{2} \quad , \quad y = \sqrt{6}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$r^3.e^{i3\theta} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$r^3 = 2\sqrt{2} \to r = \sqrt{2}$$

ونجد أيضاً:

$$3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$k = 0 \to \theta = \frac{2\pi}{9} \to z_1 = \sqrt{2}.e^{i\frac{2\pi}{9}}$$

$$k = 1 \to \theta = \frac{8\pi}{9} \to z_2 = \sqrt{2}.e^{i\frac{8\pi}{9}}$$

$$k = 2 \to \theta = \frac{14\pi}{9} \to z_3 = \sqrt{2}.e^{i\frac{14\pi}{9}}$$

الملاحظة الأولى:

- في حال كان المطلوب تحديد الجذور التربيعية بالشكل الجبري فإننا نطبق اسلوب المعادلات الثلاثة

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |w| \\ x^2 - y^2 = \text{Re}(w) \\ 2xy = \text{Im}(w) \end{cases}$$

- في حال كان المطلوب تحديد الجذور التربيعية بالشكل الأسي فإننا نطبق الاسلوب الذي استخدمناه في إيجاد الجذور من المرتبة n

الملاحظة الثانية:

- إذا كان نص السؤال أوجد الجذور التربيعية لـ w فإنه يقصد بها حل المعادلة $z^2 = w$
- إذا كان نص السؤال أوجد الجذور التكعيبية لـ w فإنه يقصد بها حل المعادلة $z^3 = w$
- ويمكن حلها بإحدى الطريقتين إما بالقسمة الإقليدية (ولكن لا تنفع دوماً) أو طريقة الـ k (تنفع دوماً).

تطبيقات المعادلات:

التطبيق	نص السؤال	فكرة الحل
الأول	تحقق أنّ $z = \alpha$ هو حل للمعادلة (مُعطاة)	نعوض α في المعادلة نميز حالتين: المعادلة محققة: يكون $z = \alpha$ حل للمعادلة المعادلة غير محققة: يكون $z = \alpha$ ليس حل للمعادلة
الثاني	إذا كان لدينا معادلة من الشكل: $az^2 + bz + c = 0$ فإن حلولها تحقق: $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad , \quad z_1.z_2 = \frac{c}{a}$	تفيد في: حساب z_1 أو z_2 أو a أو b أو c بمعرفة ثلاثة منها

الثالث	استنتج الحل الآخر للمعادلة (مُعطاة)	نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كانت المعادلة من الدرجة الثانية $az^2+bz+c=0$ فإن حلولها z_1 و z_2 تحقق: $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ و $z_1.z_2=\frac{c}{a}$ بالاستفادة من العلاقات السابقة نوجد المطلوب. الحالة الثانية: إذا كانت المعادلة من الدرجة الثالثة وما فوق فإننا: نحل المعادلة باستخدام القسمة الاقليدية وبذلك نكون قد حصلنا على المطلوب.
الرابع	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (مُعطاة) علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً	⁎ بما أنّ المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإنّ حل المعادلة يكون من الشكل $z=ib$ ⁎ نعوض في المعادلة ⁎ بالمطابقة نكون قد حصلنا على الحل التخيلي الأول ⁎ ثم نكمل كما سبق وفقاً لنوع المعادلة
الخامس	حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (مُعطاة) علماً أنها تقبل حلاً حقيقياً	⁎ بما أنّ المعادلة تقبل حلاً حقيقياً فإنّ حل المعادلة يكون من الشكل $z=a$ ⁎ نعوض في المعادلة ⁎ بالمطابقة نكون قد حصلنا على الحل الحقيقي الأول ⁎ ثم نكمل كما سبق وفقاً لنوع المعادلة
السادس	معادلتين متكافئتين إحداهما تحوي ثوابت والمطلوب إيجاد قيم هذه الثوابت.	⁎ نحول إحدى المعادلتين إلى شكل المعادلة الأخرى باستخدام إصلاحات مناسبة (النشر – القسمة الإقليدية – توحيد مقامات ...) ⁎ نقارن بين المعادلتين ونحدد الثوابت.

التمرين الأول:

ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغير z المعرف كما يلي

$$P(z)=3z^3+(-6+i)z^2+(2-2i)z-4$$

الطلب الأول:

تحقق أنّ $P(2)=0$ ثم جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغيّر z

حيث: $P(z)=(z-2)Q(z)$.

الحل:

إثبات أنّ $P(2)=0$:

$$P(2)=3(2)^3+(-6+i)(2)^2+(2-2i)(2)-4$$
$$=3(8)+(-6+i)(4)+(2-2i)(2)-4$$
$$=24-24+4i+4-4i-4=0$$

إيجاد $Q(z)$:

بما أنّ كثير الحدود $P(z)$ ينعدم عند الـ (2) فإننا نقسم

$P(z)$ على المقدار $(z-2)$ باستخدام القسمة الإقليدية

وفق:

$$z-2 \;\overline{\big)\, 3z^3+(-6+i)z^2+(2-2i)z-4}$$

نطبق القاعدة:

$$(\text{المقسوم})=(\text{الناتج})(\text{المقسوم عليه})$$
$$P(z)=(z-2)(3z^2+iz+2)$$
$$P(z)=(z-2)Q(z)$$

بالمقارنة:

$$Q(z)=3z^2+iz+2$$

الطلب الثاني:

حل المعادلة $P(z)=0$.

الحل:

$$3z^3+(-6+i)z^2+(2-2i)z-4=0$$
$$(z-2)(3z^2+iz+2)=0$$

إما $z-2=0 \to z=2$

أو $3z^2+iz+2=0$

$$a=3 \quad , \quad b=i \quad , \quad c=2$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=(i)^2-4(3)(2)$$
$$=-1-24=-25<0$$

للمعادلة حلان عقديان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-i-5i}{6}=-i$$
$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-i+5i}{6}=\frac{2}{3}i$$

التمرين الثاني:

جد عددين p و q كي تقبل المعادلة $z^2+pz+q=0$

العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها.

الحل:

لدينا المعادلة:

$$z^2+pz+q=0$$
$$a=1 \quad , \quad b=p \quad , \quad c=q$$

ولدينا:

$$z_1=1+2i \quad , \quad z_2=3-5i$$

حلولها تحقق:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$
$$1 + 2i + 3 - 5i = -\frac{p}{1}$$
$$-p = 4 - 3i$$
$$p = -4 + 3i$$
$$z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$
$$(1 + 2i)(3 - 5i) = \frac{q}{1}$$
$$q = 3 - 5i + 6i + 10$$
$$q = 13 + i$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا $P(z)$ المعطى وفق:

$$P(z) = z^2 + (1 + 2i)z + 3 + 3i$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ $z_1 = -1 + i$ هو حل للمعادلة $P(z) = 0$

الحل:

$$P(-1 + i) = (-1 + i)^2$$
$$+(1 + 2i)(-1 + i) + 3 + 3i$$
$$= 1 - 2i - 1 - 1 + i - 2i - 2 + 3 + 3i$$
$$= 4 - 4 - 4i + 4i = 0$$

الطلب الثاني:

استنتج الحل الآخر للمعادلة.

الحل:

$$P(z) = z^2 + (1 + 2i)z + 3 + 3i$$
$$a = 1 \ , \ b = 1 + 2i \ , \ c = 3 + 3i$$
$$z_1 = -1 + i$$

حلول $P(z)$ تحقق:

الطريقة الأولى لحساب z_2 وفق:

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$
$$-1 + i + z_2 = \frac{-1 - 2i}{1}$$
$$z_2 = -1 - 2i + 1 - i$$
$$z_2 = -3i$$

الطريقة الثانية لحساب z_2 وفق:

$$z_1 . z_2 = \frac{c}{a}$$
$$(-1 + i)z_2 = \frac{3 + 3i}{1}$$
$$z_2 = \frac{3 + 3i}{-1 + i}$$
$$= \frac{(3 + 3i)(-1 - i)}{(-1 + i)(-1 - i)}$$

$$= \frac{-3 - 3i - 3i + 3}{1 + 1} = -\frac{6i}{2}$$
$$z_2 = -3i$$

التمرين الرابع:

لتكن لدينا المعادلة:

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ $z = 4i$ هو حل للمعادلة.

الحل:

$$(4i)^3 - (3 + 4i)(4i)^2$$
$$-6(3 - 2i)(4i) + 72i = 0$$
$$-64i - (3 + 4i)(-16)$$
$$-72i - 48 + 72i = 0$$
$$-64i + 48 + 64i - 72i - 48 + 72i = 0$$
$$0 = 0$$

محققة, إذاً $z = 4i$ هو حل للمعادلة.

الطلب الثاني:

استنتج الحلول الأخرى في حال وجودها.

الحل:

$$z - 4i \,\big)\, z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i$$

تذكر:

$$(\text{المقسوم}) = (\text{الناتج})(\text{المقسوم عليه})$$
$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i$$
$$= (z - 4i)(z^2 - 3z - 18)$$

المعادلة:

$$z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i = 0$$
$$(z - 4i)(z^2 - 3z - 18) = 0$$

إما $z - 4i = 0 \rightarrow z = 4i$

أو $z^2 - 3z - 18 = 0$

$$(z - 6)(z + 3) = 0$$

إما $z - 6 = 0 \rightarrow z = 6$

أو $z + 3 = 0 \rightarrow z = -3$

التمرين الخامس:

نعتبر في مجموع الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^3-(1+i\sqrt{2})z^2+(1+i\sqrt{2})z-i\sqrt{2}=0$$

الطلب الأول:

بيّن أنّ هذه المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً يطلب تعيينهُ.

الحل:

بفرض $z=ib$

نعوض في المعادلة.

$$(ib)^3-(1+i\sqrt{2})(ib)^2$$
$$+(1+i\sqrt{2})(ib)-i\sqrt{2}=0$$
$$-ib^3-(1+i\sqrt{2})(-b^2)+(1+i\sqrt{2})(ib)-i\sqrt{2}=0$$
$$-ib^3+b^2+ib^2\sqrt{2}+ib-b\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0$$
$$b^2-b\sqrt{2}+i(-b^3+\sqrt{2}b^2+b-\sqrt{2})=0$$

بما أنّ المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً فإنّه يتحقق:

$$b^2-\sqrt{2}b=0$$
$$b(b-\sqrt{2})=0$$

إما $b=0\rightarrow$ مرفوض

أو $b-\sqrt{2}=0\rightarrow b=\sqrt{2}$

ومنهُ تقبل المعادلة حلاً تخيلياً بحتاً هو $z=i\sqrt{2}$

الطلب الثاني:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة المُعطاة.

الحل:

$$z-\sqrt{2}i\;\Big|\;z^3-(1+i\sqrt{2})z^2+(1+i\sqrt{2})z-i\sqrt{2}$$

تذكر:

(المقسوم) = (الناتج)(المقسوم عليه)

$$z^3-(1+i\sqrt{2})z^2+(1+i\sqrt{2})z-i\sqrt{2}$$
$$=(z-\sqrt{2}i)(z^2-z+1)$$

ومنهُ:

$$z^3-(1+i\sqrt{2})z^2+(1+i\sqrt{2})z-i\sqrt{2}=0$$
$$(z-\sqrt{2}i)(z^2-z+1)=0$$

إما $z-\sqrt{2}i=0\rightarrow z=\sqrt{2}i$

أو $z^2-z+1=0$

$$a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=1$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$\Delta=1-4(1)(1)$$
$$\Delta=1-4=-3<0$$

ومنهُ للمعادلة حلان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

التمرين السادس:

نعتبر مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z التالية.

$$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=0$$

الطلب الأول:

أثبت أنّ المعادلة (E) تقبل حلاً حقيقياً z_0 يُطلب تعيينها.

الحل:

بفرض $z=a$

نعوض في المعادلة وفق:

$$(a)^3+(-6-i)(a)^2+(13+i)(a)$$
$$-10+2i=0$$
$$a^3-6a^2-ia^2+13a+ia-10+2i=0$$
$$a^3-6a^2+13a-10+i(-a^2+a+2)=0$$

بما أنّ المعادلة تقبل حلاً حقيقياً فإنّه يتحقق:

$$-a^2+a+2=0$$
$$-(a^2-a-2)=0$$
$$a^2-a-2=0$$
$$(a-2)(a+1)=0$$

إما $a-2=0\rightarrow a=2\rightarrow$ مقبول

أو $a+1=0\rightarrow a=-1\rightarrow$ مرفوض

طبعاً يا جماعة تحديد الحل المقبول والحل المرفوض عن طريق التعويض في المعادلة.

ومنهُ للمعادلة (E) حلاً حقيقياً هو $z_0=2$.

الطلب الثاني:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

الحل:

نقسم المعادلة (E) على $(z-2)$ باستخدام القسمة الإقليدية.

$$z-2\;\Big|\;z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i$$

تذكر:

$$(\text{المقسوم عليه})(\text{الناتج}) = (\text{المقسوم})$$

$$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i$$
$$=(z-2)(z^2-(4+i)z+5-i)$$

إما $z-2=0 \to z=2$

أو $z^2-(4+i)z+5-i=0$

$$a=1\ ,b=-4-i\ ,c=5-i$$
$$\Delta = b^2-4(a)(c)$$
$$\Delta = (-4-i)^2-4(1)(5-i)$$
$$\Delta = 16+8i-1-20+4i$$
$$\Delta = -5+12i$$

نوجد الجذور التربيعية لـ Δ أي نحل المعادلة $w^2=\Delta$

بفرض $w=x+iy$ ومنهُ المعادلة $w^2=\Delta$ تكافئ:

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta| \\ x^2-y^2=Re(\Delta) \\ 2xy=Im(\Delta) \end{cases} \to \begin{cases} x^2+y^2=13\ ...(1) \\ x^2-y^2=-5\ ...(2) \\ 2xy=12\ ...(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد:

$$2x^2=8 \to x^2=4$$

إما $x=2$

نعوض في (3) نجد:

$$y=3$$
$$\to w_1=2+3i$$

أو $x=-2$

نعوض في (3) نجد:

$$y=-3$$
$$\to w_2=-2-3i$$

ومنهُ حلول المعادلة:

$$z_1=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{4+i+2+3i}{2}=3+2i$$

$$z_2=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{4+i-2-3i}{2}=1-i$$

التمرين السابع:

في المجموعة $\mathbb{C}$ لتكن المعادلة (E): $z^3+2z^2-16=0$

الطلب الأول:

بيّن أن العدد 2 هو حل للمعادلة (E) :

الحل:

$$(2)^3+2(2)^2-16=0$$
$$8+8-16=0$$
$$16-16=0$$
$$0=0$$

محققة ومنهُ $z=2$ حل للمعادلة.

اللهم هب لي من توفيقك ما يُبلغني غايتي..

الطلب الثاني:

جد العددين a و b حتى يكون من أجل كل عدد عقدي z:

$$z^3+2z^2-16=(z-2)(z^2+az+b)$$

الحل:

لدينا:

$$(z-2)(z^2+az+b)$$
$$=z^3+az^2+bz-2z^2-2az-2b$$
$$=z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$$

بالمقارنة نجد أنّ:

$$\begin{cases} a-2=2\ ...(1) \\ b-2a=0\ ...(2) \\ -2b=-16\ ...(3) \end{cases}$$

من (1) و (3) نجد أنّ:

$$a=4$$
$$b=8$$

نتحقق في (2) :

$$8-2(4)=0$$
$$8-8=0$$
$$0=0$$

محققة ومنهُ $a=4$ و $b=8$

$$(E): (z-2)(z^2+4z+8)$$

الطلب الثالث:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

الحل:

لدينا:

$$z^3+2z^2-16=0$$
$$(z-2)(z^2+4z+8)=0$$

إما $z-2=0 \to z=2$

أو $z^2+4z+8=0$

$$a=1\quad ,\quad b=4\quad ,\quad c=8$$
$$\Delta = b^2-4(a)(c)$$
$$=16-4(1)(8)$$
$$=16-32=-16<0$$

للمعادلة حلان عقديان مترافقان وفق:

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-4-4i}{2}=-2-2i$$
$$z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-4+4i}{2}=-2+2i$$

التمرين الثامن:

ليكن $\alpha=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ نضع: $A=\alpha+\alpha^4$ و $B=\alpha^2+\alpha^3$

الطلب الأول:

أثبت أنّ $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ واستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية

$$(1): x^2+x-1=0$$

الحل:

إثبات أنّ: $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

$$l_1 = 1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$

l_1 تمثل مجموع حدود من متتالية هندسية أساسها $q=\alpha$ وحدها الأول 1 وعدد الحدود فيها 5 ومنهُ:

$$l_1 = (\text{الحد الأول}).\left[\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}\right] = 1.\left[\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}\right]$$

ولكن نعلم أنّ $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ومنهُ:

$$l_1 = \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-\alpha} = \frac{1-e^{i2\pi}}{1-\alpha} = \frac{1-1}{1-\alpha}$$
$$= 0 = l_2$$

استنتاج أنّ A جذراً للمعادلة (1) :

لدينا:

$$A=\alpha+\alpha^4$$
$$(1): x^2+x-1=0$$

نعوض A في المعادلة (1) وفق:

$$(\alpha+\alpha^4)^2+(\alpha+\alpha^4)-1=0$$
$$l_1=\alpha^2+2\alpha^5+\alpha^8+\alpha+\alpha^4-1$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^8-1$$

نعلم أنّ $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ وأنّ:

$$\alpha^5=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=e^{i2\pi}=1$$

نعوض في l_1 وفق:

$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^4+2(1)+\alpha^3.\alpha^5-1$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2-1$$
$$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$

من الطلب السابق لدينا:

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

ومنهُ:

$$l_1=0\to l_1=l_2$$

محققة ومنهُ A جذراً للمعادلة (1) .

استنتاج أنّ B جذراً للمعادلة (1) :

لدينا:

$$A=\alpha^2+\alpha^3$$
$$(1): x^2+x-1=0$$

نعوض B في المعادلة (1) وفق:

$$(\alpha^2+\alpha^3)^2+(\alpha^2+\alpha^3)-1=0$$
$$l_1=\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6+\alpha^2+\alpha^3-1$$
$$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2\alpha^5+\alpha^6-1$$

نعلم أنّ $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ وأنّ:

$$\alpha^5=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5=e^{i2\pi}=1$$

نعوض في l_1 وفق:

$$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4++2(1)+\alpha.\alpha^5-1$$
$$=\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2(1)+\alpha.(1)-1$$
$$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+2-1$$
$$=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$$

من الطلب السابق لدينا:

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$$

ومنهُ:

$$l_1=0\to l_1=l_2$$

محققة ومنهُ B جذراً للمعادلة (1) .

الطلب الثاني: عبّر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

الحل:

$$A=\alpha+\alpha^4=e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{10\pi-2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi-2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

الطلب الثالث:

حل المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل:

$$x^2+x-1=0$$
$$a=1\quad,\quad b=1\quad,\quad c=-1$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=1-4(1)(-1)=5>0$$

للمعادلة حلان وفق:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

استنتاج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ وفق:

لدينا $A=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ مقدار موجب لأنّ $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ تقع في الربع الأول ووجدنا أنّ حل المعادلة (1) المعطى وفق:

$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ مقدار موجب أيضاً ومنهُ:

$$A=x_2\to 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

شيفرة الـ 600 في تطبيقات الأعداد العقدية:

تمهيد:

في هذه الوحدة نتأمل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.

رموز عقدية:

الرمز	معناه
A	نقطة
a	عدد عقدي
Z_A	العدد العقدي الممثل للنقطة A
$A(a)$	النقطة A التي يمثلها العدد العقدي a
$Z_{\overrightarrow{AB}}$	العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$
AB	المسافة بين a و b

في الروحِ إصرارٌ وفي أعماقنا أملٌ..
لا يعتري خطواتنا يأسٌ ولا سأمُ
🤍✌😍

القسم الأول:

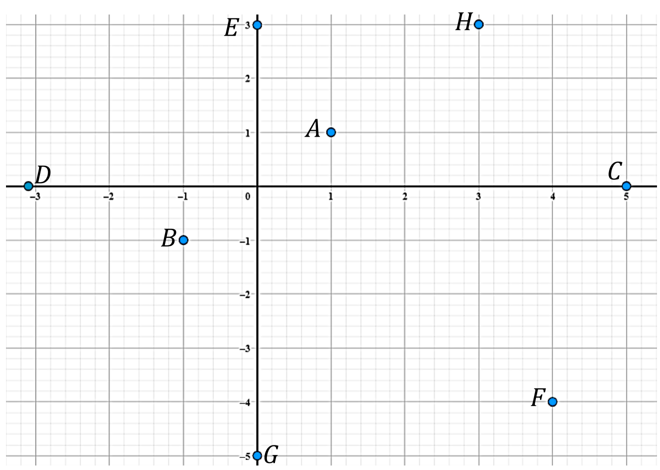
الفكرة	تمهيد	نص السؤال	فكرة الحل
العدد العقدي الممثل لنقطة.	☝ كل نقطة $A(x_A,y_A)$ يمثلها عدد عقدي a أو Z_A بحيث يكون من الشكل: $a=x_A+iy_A$ أو $Z_A=x_A+iy_A$ أيّ: ❋ فاصلة النقطة هي القسم الحقيقي ❋ ترتيب النقطة هو القسم التخيلي	يكون المُعطى هو أعداد عقدية بالشكل الجبري تمثل نقاط والمطلوب وضّع هذه النقاط في شكل.	① نستفيد من كون أنّ: ❋ فاصلة النقطة هي القسم الحقيقي ❋ ترتيب النقطة هو القسم التخيلي ② نحدد هذه النقاط على الشكل
		يكون المُعطى هو أعداد عقدية بالشكل (المثلثي أو الأسي) تمثل نقاط والمطلوب وضّع هذه النقاط في شكل	① نحدد طويلة وزاوية كل من هذه الأعداد ② ثم نعيّن النقاط في الشكل
	✌ كل عدد عقدي $z_B=x_B+iy_B$ أو $b=x_B+iy_B$ تمثله نقطة $B(x_B,y_B)$ أيّ: ❋ القسم الحقيقي هو فاصلة النقطة. ❋ القسم التخيلي هو ترتيب النقطة.	يكون المعطى شكل مزود بنقاط والمطلوب تحديد الأعداد العقدية التي تمثل هذه النقاط بالشكل الجبري	① نستفيد من كون أنّ: ❋ فاصلة النقطة هي القسم الحقيقي ❋ ترتيب النقطة هو القسم التخيلي ② نكتب الشكل الجبري الموافق.

التمرين الأول:

مثل في شكل النقاط A و B و C و D و E و F و G و H التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$Z_A=1+i$	$Z_B=-1-i$
$Z_C=5$	$Z_D=-3$
$Z_E=3i$	$Z_F=4-4i$
$Z_G=-5i$	$Z_H=3+3i$

الحل:

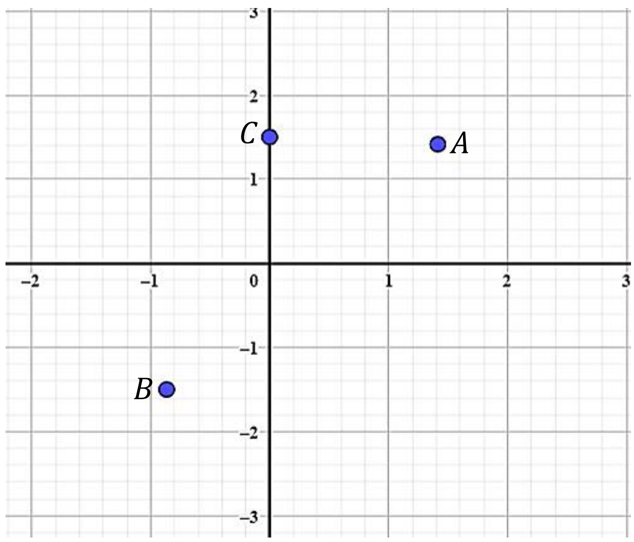


التمرين الثاني:

لتكن لدينا النقاط A و B و C تمثلها الأعداد العقدية

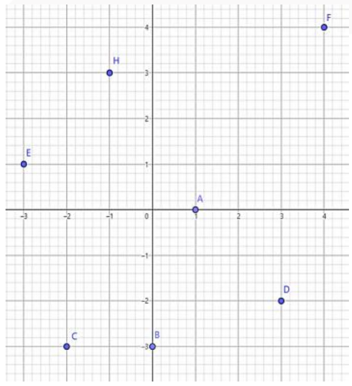
$z_A=2e^{i\frac{\pi}{4}}$	$z_B=\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$
$z_C=\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	

الحل:



التمرين الثالث:

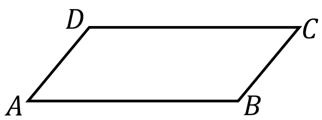
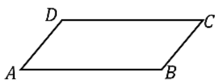
تتأمل في المستوي العقدي المزود بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A و B و C و D و E و F و H والمطلوب: أوجد الأعداد العقدية Z_A و Z_B و Z_C و Z_D و Z_E و Z_F و Z_H التي تمثل النقاط السابقة بالترتيب.



الحل:

$z_B = -3i$	$z_A = 1$
$z_D = 3 - 2i$	$z_C = -2 - 3i$
$z_H = -1 + 3i$	$z_E = -3 + i$
$z_F = 4 + 4i$	

اللهمَّ وإن استحالت فإنها بأمرك ..

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
العدد العقدي الممثل بشعاع	لتكن النقاط A و B تمثلها الأعداد العقدية Z_A و Z_B جد العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ أو أوجد $\overrightarrow{AB}$	إن العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ يُعطى وفق: $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$
العدد العقدي الممثل لنقطة منتصف القطعة المستقيمة	أوجد العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	نطبق القانون: $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$
العدد العقدي الممثل للنقطة مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)	صيغة أولى: أوجد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M مركز ثقل المثلث ABC صيغة ثانية: أوجد العدد العقدي Z_M الممثل للنقطة M نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث ABC	نطبق القانون: $Z_M = \dfrac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$
العدد العقدي الممثل لنقطة مركز الأبعاد المتناسبة	أوجد العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A_1,a_1),(A_2,a_2)\,,\dots\,,(A_n,a_n)$ التي تمثلها الأعداد العقدية: $z_1\,,z_2\,,\dots\,,z_n$	يُعطى العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة لهذه النقاط بالعلاقة: $z_G = \dfrac{a_1z_1 + a_2z_2 + \cdots + a_nz_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$
متوازي الأضلاع	النمط الأول: هل الرباعي ABCD متوازي أضلاع 	※ نوجد كلاً من $Z_{\overrightarrow{AB}}$ و $Z_{\overrightarrow{DC}}$ ※ نميز حالتين: الحالة الأولى: إذا كان $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ فإن هذا يكافئ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وبالتالي يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع الحالة الثانية: إذا كان $Z_{\overrightarrow{AB}} \neq Z_{\overrightarrow{DC}}$ وبالتالي يكون الرباعي $ABCD$ ليس متوازي أضلاع
	النمط الثاني: أوجد العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D التي تجعل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع 	بما أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فإن: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وهذا يكافئ $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ $Z_D = Z_A - Z_B - Z_C$ ※ أي نعزل Z_D ثم نعوض
المسافة بين نقطتان	لتكن لدينا النقاط A و B تمثلها الأعداد العقدية Z_A و Z_B جد المسافة AB	※ إن المسافة بين A و B تحسب وفق: $AB = \left\|Z_{\overrightarrow{AB}}\right\| = \left\|Z_B - Z_A\right\|$ ※ ثم نعوض ونصلح ※ تعميم: $AB = \sqrt{\left(\text{القسم الحقيقي}\right)^2 + \left(\text{القسم التخيلي}\right)^2}$

شيفرة الـ 600

الجزء الثاني

	نص السؤال	فكرة الحل
تحديد نوع المثلث	حدد نوع المثلث ABC	⁕ نحسب أطوال أضلاع المثلث ⁕ نحدد نوعه من حيث أطوال أضلاعه ⁕ في حالة المثلث متساوي الساقين أو مختلف الأضلاع نختبر كونه قائماً حسب عكس فيثاغورث الملاحظة الأولى: من المستحيل أن يكون المثلث متساوي الأضلاع قائماً الملاحظة الثانية: اختبار كون المثلث قائماً: ⁕ نربع طول الضلع الأول ⁕ نربع طولي الضلعين الباقيين ونجمعهما ⁕ نميز: ① الحالة الأولى: إذا تحقق مربع طول الضلع الأطول يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمتين بالتالي يكون المثلث قائم ووتره الضلع الأطول ② الحالة الثانية: إذا تحقق مربع طول الضلع الأطول لا يساوي مجموع مربعي الضلعين القائمتين وبالتالي يكون المثلث غير قائم
انتماء نقطة إلى دائرة	النمط الأول: هل النقطة A تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r	⁕ نوجد المسافة بين النقطة A ومركز الكرة Ω (أي نوجد $A\Omega$) ⁕ نقارن هذه المسافة مع نصف قطر الدائرة ⁕ ونميز: ① الحالة الأولى إذا تحقق $A\Omega = r$ بالتالي النقطة A تنتمي إلى الدائرة ② الحالة الثانية: إذا تحقق $A\Omega \neq r$ بالتالي النقطة A لا تنتمي إلى الدائرة
	النمط الثاني: هل النقاط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها Ω	⁕ نوجد جميع المسافات بين هذه النقاط ومركز الدائرة (أي نوجد ΩA و ΩB و ΩC و ΩD) ⁕ نقارن هذه المسافات ⁕ نميز حالتين: ① الحالة الأولى: إذا كانت جميع المسافات متساوية بالتالي تكون النقاط A و B و C و D تنتمي إلى الدائرة ② الحالة الثانية: إذا كانت المسافات غير متساوية بالتالي تكون النقاط A و B و C و D لا تنتمي إلى الدائرة
انتماء نقطة إلى محور قطعة مستقيمة	هل النقطة M تنتمي إلى محور القطعة المستقيمة $[AB]$	⁕ نوجد المسافة بين النقطة M والنقطة A (طرف القطعة المستقيمة أي نوجد MA) ⁕ نوجد المسافة بين النقطة M والنقطة B (طرف القطعة المستقيمة أي نوجد MB) ⁕ نميز حالتين: ① الحالة الأولى: إذا تحقق $MA = MB$ بالتالي تكون النقطة M تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$ ② الحالة الثانية: إذا تحقق $MA \neq MB$ بالتالي تكون النقطة M لا تنتمي إلى محور القطعة $[AB]$

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

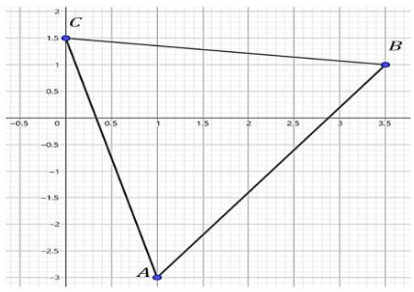
$a = 1 - 3i$	
$b = \frac{7}{2} + i$	$c = \frac{3}{2}i$

الطلب الأول:

وضّع النقاط A و B و C في شكل.

الحل لدينا:

$A(1, -3)$	$B\left(\frac{7}{2}, 1\right)$	$C\left(0, \frac{3}{2}\right)$



الطلب الثاني:

احسب الأعداد العقدية التي تمثّل الأشعة: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$

الحل:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$
$$= \frac{7}{2} + i - 1 + 3i = \frac{5}{2} + 4i$$
$$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A$$
$$= \frac{3}{2}i - 1 + 3i = -1 + \frac{9}{2}i$$
$$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$$
$$= \frac{3}{2}i - \frac{7}{2} - i = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$$

اللهُم قدراً جميلاً وخيراً يتبعه الرضا

الطلب الثالث:

احسب أطوال أضلاع المثلث ABC ثم حدد نوعهُ.

$$AB = |z_{\overrightarrow{AB}}| = |z_B - z_A| = \left|\frac{5}{2} + 4i\right|$$

$$= \sqrt{\frac{25}{4} + 16} = \sqrt{\frac{25+64}{4}} = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

$$AC = |z_{\overrightarrow{AC}}| = |z_C - z_A| = \left|-1 + \frac{9}{2}i\right|$$

$$= \sqrt{1 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{4+81}{4}} = \frac{\sqrt{85}}{2}$$

$$BC = |z_{\overrightarrow{BC}}| = |z_C - z_B| = \left|-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i\right|$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{50}}{2}$$

نلاحظ أنّ المثلث ABC مختلف الأضلاع لذلك نختبر كونهُ قائماً وفق:

$$l_1 = (AB)^2 = \frac{89}{4}$$

$$l_2 = (BC)^2 + (AC)^2 = \frac{135}{4}$$

بما أنّ $l_1 \neq l_2$ فإنّ المثلث ABC
مختلف الأضلاع.

الطلب الرابع:

أوجد العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

الحل:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$= \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i}{2} = \frac{\frac{9}{2} - 2i}{2} = \frac{9}{4} - i$$

الطلب الخامس:

أوجد العدد العقدي z_G الممثل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

الحل:

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

$$= \frac{1 - 3i + \frac{7}{2} + i + \frac{3}{2}i}{3} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{1}{2}i}{3} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6}i$$

الطلب السادس:

أوجد العدد العقدي z_M الممثل للنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,-1)$

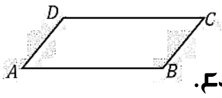
الحل:

$$z_M = \frac{(-1)(a) + (1)(b) + (-1)(c)}{-1+1-1}$$

$$= \frac{-a+b-c}{-1} = \frac{-1 + 3i + \frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i}{-1}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} + 4i - \frac{3}{2}i}{-1} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i}{-1} = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$$

الطلب السابع:



أوجد العدد العقدي d الممثل للنقطة D التي تجعل الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

الحل:

بما أنّ ABCD متوازي أضلاع فإنّ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ وتكافئ:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$$

$$b - a = c - d$$

$$d = a - b + c$$

$$= 1 - 3i - \frac{7}{2} - i + \frac{3}{2}i$$

$$= -\frac{5}{2} - 4i + \frac{3}{2}i$$

$$= -\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$$

الطلب الثامن:

أثبت أنّ الشكل ABCD متوازي أضلاع.

الحل:

كي يكون ABCD متوازي أضلاع يجب أن يكون:

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$$

$$\frac{5}{2} + 4i = \frac{5}{2} + 4i$$

وهذا يكافئ:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

ومنهُ الرباعي ABCD متوازي أضلاع

الطلب التاسع:

هل النقطة C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $R = \frac{3}{2}$.

الحل:

$$OC = |z_{\overrightarrow{OC}}| = |z_C - z_O| = |z_C| = \left|\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

بما أنّ $R = OC$ فإنّ C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $R = \frac{3}{2}$.

بلُوغ القمة يبدأ بخطوة صغِيرة.. 🏆💙

الطلب العاشر:

هل النقطة B تنتمي إلى الدائرة

التي مركزها C ونصف قطرها $R = \frac{5}{\sqrt{2}}$

الحل:

$$CB = |z_{\overrightarrow{CB}}| = |z_B - z_C| = \left|\frac{7}{2} + i - \frac{3}{2}i\right|$$

$$= \left|\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{50}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

بما أنّ $R = CB$ فإنّ B تنتمي إلى الدائرة التي مركزها C ونصف قطرها $R = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

التمرين الثاني:

في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ ليكن لدينا العددان $b = -1 + \sqrt{3}i$ و $c = -1 - \sqrt{3}i$ والمطلوب:

1. اكتب العدد b بالشكل الأسي واستنتج الشكل الأسي للعدد c
2. في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن لدينا النقاط A و B و C حيث: $Z_A = a$ و $Z_B = b$ و $Z_C = c$ حيث $a \in \mathbb{R}^+$, عيّن a ليكون المثلث ABC متساوي الأضلاع.

الحل:

الطلب الأول:

كتابة b بالشكل الأسي وفق:

$$b = -1 + \sqrt{3}i$$

$$x = -1 \quad , \quad y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\rightarrow b = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

استنتاج الشكل الأسي للعدد c:

$$c = \bar{b}$$

$$c = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

الطلب الثاني:

تعيين a:

حتى يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع يكفي أن يكون $BA = BC$ حيث:

$$BC = |Z_{\overrightarrow{BC}}| = |Z_c - Z_B|$$

$$= |-1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i|$$

$$= |-2\sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

$$BA = |Z_{\overrightarrow{BA}}| = |Z_A - Z_B|$$

$$= |a + 1 - \sqrt{3}i|$$

$$= \sqrt{(a+1)^2 + 3}$$

نعوض في العلاقة $BA = BC$ وفق:

$$\sqrt{(a+1)^2 + 3} = 2\sqrt{3}$$

$$a^2 + 2a + 1 + 3 = 12$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a+4)(a-2) = 0$$

إما $a = -4 \rightarrow$ مرفوض

أو $a = 2 \rightarrow$ مقبول

القسم الثاني:

تمهيد	ليكن لدينا العدد العقدي: $$w = \frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}$$ ونعلم أنّ لكل عدد عقدي طويلة وزاوية ، حيث: $$\lvert w\rvert = \frac{AB}{CD} \quad , \quad \arg(w) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$$
كيفية إيجاد $\lvert w\rvert$	❈ نصلح w (يكتب بالشكل الجبري) ❈ نطبق القانون: $$\lvert w\rvert = \sqrt{\left(\text{القسم الحقيقي}\right)^2 + \left(\text{القسم التخيلي بدون } i\right)^2}$$

ح يجي اليوم اللي ح تحكو فيه ..

"نحن مو بس رضينا، والله نحن من شِدة بهجة الرِّضا نسينا بشو مرينا" 😍💙

كيفية إيجاد $\arg(w)$	❈ نصلح w ونميز:	
	w حقيقي موجب	$\arg(w)=0$
	w حقيقي سالب	$\arg(w)=\pi$
	w تخيلي بحت موجب	$\arg(w)=\frac{\pi}{2}$
	w تخيلي بحت سالب	$\arg(w)=\frac{3\pi}{2}$
	w غير ذلك	❈ نوجد r ❈ نوجد كلاً من: $\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\cos\theta=\frac{x}{r}$ ❈ نحدد θ تكون $\arg(w)=\theta$
رموز	❈ $\left\lvert\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}\right\rvert=\frac{AB}{AC}$ ❈ $\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}\right)=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)$ ❈ $\arg\left(\overrightarrow{AB}\right)=\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ ❈ $\arg(Z_A)=\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$	
ملاحظة	النسبة الذهبية يجب أن تكون أربعة أعداد عقدية وفي حال كانت أقل من ذلك فإننا نستفيد من المبدأ من أجل إكمالها إلى أربعة أعداد عقدية. أمثلة: ❈ في حال كان المبدأ O وكان لدينا: $w=\frac{Z_A}{Z_B-Z_C}=\frac{Z_A-Z_O}{Z_B-Z_C}=\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}$ $\lvert w\rvert=\frac{OA}{CB}$ $\arg(w)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{OA}\right)$ ❈ في حال كان المبدأ A وكان لدينا: $w=\frac{Z_C}{-Z_D}=\frac{Z_C-Z_A}{Z_A-Z_D}=\frac{Z_{\overrightarrow{AC}}}{Z_{\overrightarrow{DA}}}$ $\lvert w\rvert=\frac{AC}{DA}$ $\arg\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC}\right)$ ❈ لإثبات أنّ Z حقيقي يمكن استعمال الخاصة الآتية: $\arg(z)=0$ أو π ❈ لإثبات أنّ Z تخيلي بحت يمكن استعمال الخاصة الآتية: $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$	

إثباتات:

الفكرة	نص السؤال	فكرة الحل
إثبات أن مستقيمان متوازيان	أثبت أن المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان	❈ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}$ ❈ نصلح ❈ نثبت أنّ: $\arg(w)=0$ أو π
إثبات أن مستقيمان متعامدان	أثبت أن المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان	❈ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CD}}}$ ❈ نصلح ❈ نثبت أنّ: $\arg(w)=\frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$
إثبات أن ثلاثة نقاط تقع على استقامة واحدة	أثبت أن النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة	❈ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}$ ❈ نصلح ❈ نثبت أنّ: $\arg(w)=0$ أو π
إثبات صحة علاقة تحوي أطوال أضلاع	أثبت أن $MN=\alpha EA$	❈ نوجد w وفق: $w=\frac{Z_{\overrightarrow{MN}}}{Z_{\overrightarrow{EA}}}$ ❈ نصلح ❈ نوجد طويلة w وفق: $\lvert w\rvert=\frac{MN}{EA}$ ❈ نعوض ثم نطبق جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين (فنحصل على المطلوب)
نسبة واستنتاج	يكون المعطى هو نسبة مطلوب إيجادها ثم ماذا تستنتج	❈ نوجد النسبة كما تعلمنا ❈ نوجد كل من الطويلة والزاوية ونفسر النتائج التي حصلنا عليها

التمرين الأول:

لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_B=\frac{7}{2}+i$	$z_A=\frac{3}{2}i$
$z_D=-3-i$	$z_C=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$

أثبت أنّ المستقيمان (AD) و (CB) متوازيان.

الحل:

$$\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=\frac{z_D-z_A}{z_B-z_C}$$
$$=\frac{-3-i-\frac{3}{2}i}{\frac{7}{2}+i-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i}=\frac{\frac{-6-2i-3i}{2}}{\frac{7+2i-1+3i}{2}}$$
$$=\frac{-6-5i}{6+5i}=\frac{-(6+5i)}{6+5i}=-1$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=-1\to\arg(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AD})=\pi$$

ومنهُ المستقيمان (AD) و (CB) متوازيان.

التمرين الثاني:

لتكن لدينا النقاط M و D و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_C=2i$	$z_D=-2$
$z_M=-1+i$	

أثبت أنّ المستقيمان (OM) و (DC) متعامدان.

الحل:

$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DC}}}=\frac{z_M-z_O}{z_C-z_D}$$
$$=\frac{-1+i}{2i+2}=\frac{-1+i}{2(1+i)}$$
$$=\frac{i(i+1)}{2(1+i)}=\frac{i(1+i)}{2(1+i)}=\frac{1}{2}i$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DC}}}=\frac{1}{2}i\to\arg(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{2}$$

ومنهُ المستقيمان (OM) و (DC) متعامدان.

التمرين الثالث:

لتكن لدينا النقاط M و B التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية.

$z_M=-1+i$	$z_B=1-i$

أثبت أنّ النقاط M و O و B تقع على استقامة واحدة

الحل:

$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}=\frac{z_M-z_O}{z_B-z_O}$$
$$=\frac{-1+i}{1-i}=\frac{-(1-i)}{1-i}=-1$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}=-1\to\arg(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})=\pi$$

ومنهُ النقاط M و O و B تقع على استقامة واحدة.

التمرين الرابع:

لتكن لدينا النقاط A و D و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية.

$z_A=-2$	
$z_C=-1+i$	$z_D=1-3i$

أثبت أنّ $AD=3AC$.

الحل:

$$\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}=\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}$$
$$=\frac{1-3i+2}{-1+i+2}=\frac{3-3i}{1+i}$$
$$=\frac{3(1-i)}{1+i}=\frac{3i(-i-1)}{1+i}$$
$$=\frac{-3i(1+i)}{1+i}=-3i$$
$$\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}=-3i\to\left|\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right|=|-3i|$$
$$\frac{AD}{AC}=3\to AD=3AC$$

التمرين الخامس:

لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية.

$z_B=2-\frac{5}{4}i$	$z_A=1+\frac{3}{4}i$
$z_C=3+\frac{7}{4}i$	

احسب $\frac{b-a}{c-a}$ وماذا تستنتج؟

الحل:

$$\frac{b-a}{c-a}=\frac{2-\frac{5}{4}i-1-\frac{3}{4}i}{3+\frac{7}{4}i-1-\frac{3}{4}i}$$
$$=\frac{1-2i}{2+i}=\frac{i(-i-2)}{2+i}$$
$$=\frac{-i(2+i)}{2+i}=-i$$
$$\frac{b-a}{c-a}=-i\to\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}=-i$$
$$\arg(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=\frac{3\pi}{2}$$

ومنهُ المستقيمان (AC) و (AB) متعامدان.

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right|=|-i|$$
$$\frac{AB}{AC}=1\to AB=AC$$

نستنج أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

التمرين السادس:

ليكن لدينا في المعلم المتجانس المزود بمستوي عقدي $(O,\vec{u},\vec{v})$

لتكن لدينا النقاط M و B التي تمثلها الأعداد العقدية:

$z_B=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$	$z_M=-\frac{1}{3}+i$

احسب $\frac{m}{b}$ وماذا تستنتج؟

$$\frac{m}{b}=\frac{-\frac{1}{3}+i}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}=\frac{\frac{-1+3i}{3}}{\frac{1-3i}{2}}$$

$$=\frac{(-1+3i)}{(3)}.\frac{(2)}{(1-3i)}$$

$$=\frac{-(1-3i)}{(3)}.\frac{(2)}{(1-3i)}=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{m}{b}=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{m-o}{b-o}=-\frac{2}{3}$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}=-\frac{2}{3}$$

$$\arg(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM})=\pi$$

ومنهُ النقاط O و M و B تقع على استقامة واحدة.

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right|=\left|-\frac{2}{3}\right|$$

$$\frac{OM}{OB}=\frac{2}{3}$$

$$3OM=2OB\rightarrow OM=\frac{2}{3}OB$$

التمرين السابع:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس نعرف النقاط A و B و C صور الأعداد:

$z_A=1-i\sqrt{3}$	$z_B=1+i\sqrt{3}$
$z_c=4$	

الطلب الأول:

احسب طويلة وزاوية العدد $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$

ثم استنتج نوع المثلث ABC .

الحل:

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1-i\sqrt{3}-4}{1+i\sqrt{3}-4}$$

$$=\frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{(-3-i\sqrt{3}).(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3}).(-3-i\sqrt{3})}$$

$$=\frac{9+3\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-3}{9+3}$$

$$=\frac{6+6\sqrt{3}i}{12}=\frac{6}{12}+\frac{6\sqrt{3}}{12}i$$

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إيجاد الطويلة:

$$\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right|=1\rightarrow\frac{CA}{CB}=1\rightarrow CA=CB$$

إيجاد الزاوية:

$$x=\frac{1}{2}\quad,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}\quad,\quad \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ومنهُ: $\theta=\frac{\pi}{3}$

تحديد نوع المثلث (ABC) :

بما أنّ $CA=CB$ و $\theta=\frac{\pi}{3}$ فإنّ المثلث (ABC) متساوي الأضلاع

الطلب الثاني:

احسب z_G الممثل للنقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,|z_A|)$ و $(B,|z_B|)$ و $(C,|z_C|)$

الحل:

لدينا:

$\lvert z_A\rvert=2$	$\lvert z_B\rvert=2$	$\lvert z_C\rvert=4$

$$z_G=\frac{2z_A+2z_B+4z_c}{2+2+4}$$

$$=\frac{2(1-i\sqrt{3})+2(1+i\sqrt{3})+4(4)}{8}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}i+16}{8}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

التمرين الثامن:

نعتبر كثير الحدود $P(z)=z^3-(4+4i)z^2+(-2+8i)z+12$ والمطلوب:

أولاً:

1. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد $w=12+16i$
2. احسب $P(2)$ ثم عين العددين العقديين α و β بحيث يكون $P(z)=(z-2)(z^2+\alpha z+\beta)$
3. حل المعادلة $P(z)=0$

بلُوغ القمة يبدأ بخطوة صغِيرة .. 🤩💙

ثانيًا: في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية $z_A = 2$ و $z_B = 3+3i$ و $z_C = -1+i$ والمطلوب:

1. مثل النقاط A و B و C في المستوي.
2. احسب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

الحل:

أولًا:

الطلب الأول:

لتكن $z = x + iy$ والمعادلة $z^2 = w$ تحقق:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = |w| \\ x^2-y^2 = Re(w) \\ 2xy = Im(w) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 20 \;...(1) \\ x^2-y^2 = 12 \;...(2) \\ 2xy = 16 \;...(3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x^2 = 32 \rightarrow x^2 = 16$$

إما $x_1 = 4$

نعوض في (3) :

$$y_1 = 2$$

$$z_1 = 4+2i$$

أو $x_2 = -4$

نعوض في (3) :

$$y_2 = -2$$

$$z_1 = -4-2i$$

الطلب الثاني:

حساب $P(2)$:

$$P(2) = (2)^3 - (4+4i)(2)^2 + (-2+8i)2 + 12$$
$$= 8 - 16 - 16i - 4 + 16i + 12 = 0$$

تعيين α و β :

نقسم المقدار على $P(z)$ على $(z-2)$:

باستخدام القسمة الإقليدية نجد أنّ:

$$P(z) = (z-2)(z^2-(2+4i)z-6)$$

وبالتالي:

$$\alpha = -2-4i \quad , \quad \beta = -6$$

الطلب الثالث:

$$P(z) = 0$$
$$(z-2)(z^2-(2+4i)z-6) = 0$$

إما $z = 2$

أو $z^2-(2+4i)z-6 = 0$

$$a = 1 \quad , \quad b = -2-4i \quad , \quad c = -6$$

$$\Delta = b^2 - 4(a)(c)$$
$$= (-2-4i)^2 - 4(1)(-6)$$
$$= 4 + 16i - 16 + 24$$
$$= 12 + 16i = w$$

ومنهُ الجذور التربيعية لـ Δ هي:

$$A_1 = -4-2i \quad , \quad A_2 = 4+2i$$

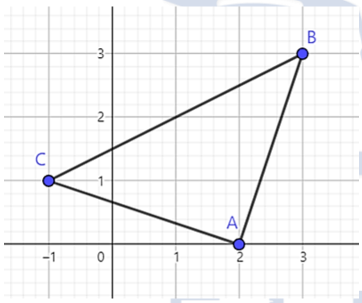
ومنهُ حلول المعادلة هي:

$$z_1 = \frac{-b+A_1}{2a}$$
$$= \frac{2+4i-4-2i}{2} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

$$z_2 = \frac{-b+A_2}{2a}$$
$$= \frac{2+4i+4+2i}{2} = \frac{6+6i}{2} = 3+3i$$

ثانيًا:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

لدينا:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+i-2}{3+3i-2} = \frac{-3+i}{1+3i} = \frac{i(3i+1)}{1+3i} = i$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |i| \rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \rightarrow AC = AB$$

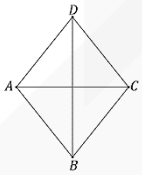
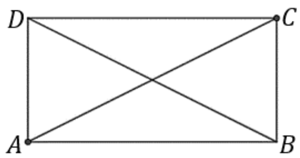
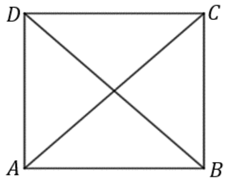
حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) \rightarrow (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

كون متأكد ..إنك ح توصل بالوقت المناسب للمكان المناسب

إثبات الأشكال:

	المعين	المستطيل	المربع
			
تعريف	❋ هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان ❋ هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان	❋ هو متوازي أضلاع قطراه متساويان ❋ هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متجاوران متعامدان	❋ هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتساويان ❋ هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متجاوران متعامدان متساويان
نص السؤال	أثبت أن الرباعي $ABCD$ معين	أثبت أن الرباعي $ABCD$ مستطيل	أثبت أن الرباعي $ABCD$ مربع
فكرة الحل	الخطوة الأولى: نثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (تم سابقاً) الخطوة الثانية: ① الأسلوب الأول: نثبت أنّ قطراه متعامدان ② الأسلوب الثاني: نثبت أنّ فيه ضلعان متجاوران متساويان	الخطوة الأولى: نثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (تم سابقاً) الخطوة الثانية: ① الأسلوب الأول: نثبت أنّ قطراه متساويان ② الأسلوب الثاني: نثبت أنّ فيه ضلعان متجاوران متعامدان	الخطوة الأولى: نثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (تم سابقاً) الخطوة الثانية: ① الأسلوب الأول: نثبت أنّ قطراه متعامدان ومتساويان ② الأسلوب الثاني: نثبت أنّ فيه ضلعان متجاوران متعامدان متساويان

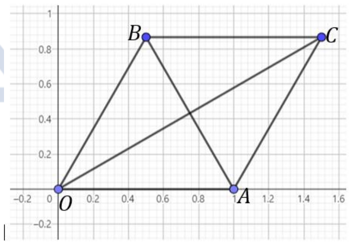
التمرين الاول:

لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_A = 1$	
$z_C = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$	$z_B = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

الطلب الأول:

وضع النقاط في شكل:



الطلب الثاني:

أثبت أنّ الرباعي OACB معيّن.

الحل:

الخطوة الأولى: إثبات أنّ الرباعي OACB متوازي أضلاع.

$$z_{\overrightarrow{OA}} = z_A - z_O = 1$$

$$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1$$

نلاحظ أنّ: $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}}$

تكافئ: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$

ومنهُ الرباعي OACB متوازي أضلاع.

الخطوة الثانية: إثبات أنّ الرباعي OACB معيّن.

$$\frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_C - z_O}{z_B - z_A}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}i}{2}}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} = \frac{3+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-3 - 3\sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 3}{1+3} = -\frac{4\sqrt{3}i}{4} = -\sqrt{3}i$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = -\sqrt{3}i$$

$$\arg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{3\pi}{2}$$

وبالتالي الرباعي OACB معيّن.

التمرين الثاني:

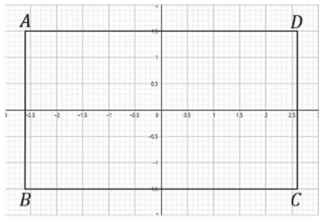
لتكن لدينا النقاط D و C و B و A التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$Z_A = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$
$Z_B = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$
$Z_C = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$
$Z_D = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

الطلب الأول:

وضع النقاط في شكل:

الحل:



الطلب الثاني:

أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل.

الحل:

الخطوة الأولى: إثبات أنّ الرباعي ABCD متوازي أضلاع وفق:

$$z_{\overrightarrow{AD}} = z_D - z_A$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = 3\sqrt{3}$$
$$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = 3\sqrt{3}$$

نلاحظ أنّ:

$$z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$$

تكافئ:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

الخطوة الثانية: إثبات أنّ الرباعي ABCD مستطيل:

نشكل w وفق:

$$w = \frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$$
$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{-3i} = -\frac{\sqrt{3}}{i} = \frac{-\sqrt{3}(-i)}{i(-i)} = \sqrt{3}i$$

بما أنّ w هو تخيلي بحت موجب فإنّ

$$\arg(w) = \arg\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$$

وبالتالي الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متعامدان فهو مستطيل.

التمرين الثالث:

لتكن لدينا النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$a = 2 - 2i$	$b = -1 + 7i$
$c = 4 + 2i$	$d = -4 - 2i$

الطلب الأول:

لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$ والمطلوب أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$.

الحل:

$$\Omega A = \left|z_{\overrightarrow{\Omega A}}\right| = |z_A - z_\Omega|$$
$$= |a - \omega| = |2 - 2i + 1 - 2i|$$
$$= |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\Omega B = \left|z_{\overrightarrow{\Omega B}}\right| = |z_B - z_\Omega|$$
$$= |b - \omega| = |-1 + 7i + 1 - 2i|$$
$$= |5i| = \sqrt{0 + 25} = 5$$

$$\Omega C = \left|z_{\overrightarrow{\Omega C}}\right| = |z_C - z_\Omega|$$
$$= |c - \omega| = |4 + 2i + 1 - 2i|$$
$$= |5| = \sqrt{25 + 0} = 5$$

$$\Omega D = \left|z_{\overrightarrow{\Omega D}}\right| = |z_D - z_\Omega|$$
$$= |d - \omega| = |-4 - 2i + 1 - 2i|$$
$$= |-3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

إذاً النقاط A و B و C و D تقع على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها $R = 5$

الطلب الثاني:

ليكن e العدد الممثل للنقطة E منتصف $[AB]$ احسب e وبرهن أنّ:

$$\frac{a - e}{d - e} = \frac{c - e}{a - e}$$

الحل:

إيجاد العدد العقدي الممثل للنقطة E وفق:

$$e = \frac{a + b}{2} = \frac{2 - 2i - 1 + 7i}{2} = \frac{1 + 5i}{2}$$
$$\rightarrow e = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

إثبات: $\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$ وفق:

$$l_1 = \frac{a - e}{d - e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$$
$$= \frac{\frac{4 - 4i - 1 - 5i}{2}}{\frac{-8 - 4i - 1 - 5i}{2}} = \frac{3 - 9i}{-9 - 9i}$$
$$= \frac{3(1 - 3i)}{3(-3 - 3i)} = \frac{1 - 3i}{-3 - 3i} = \frac{(1 - 3i)(-3 + 3i)}{(-3 - 3i)(-3 + 3i)}$$
$$= \frac{-3 + 3i + 9i + 9}{9 + 9} = \frac{6 + 12i}{18} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$l_2 = \frac{c-e}{a-e} = \frac{4+2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}{2-2i-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{\frac{8+4i-1-5i}{2}}{\frac{4-4i-1-5i}{2}} = \frac{7-i}{3-9i}$$

$$= \frac{(7-i)(3+9i)}{(3-9i)(3+9i)} = \frac{21+63i-3i+9}{9+81}$$

$$= \frac{30+60i}{90} = \frac{30}{90} + \frac{60}{90}i = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

نلاحظ أنّ: $l_1 = l_2$

الطلب الثالث:

ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث (DEC).

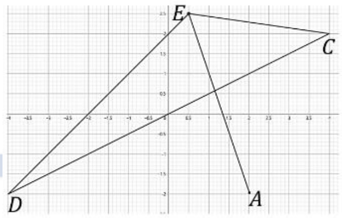
الحل:

لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e} \rightarrow \frac{z_{\overrightarrow{EA}}}{z_{\overrightarrow{ED}}} = \frac{z_{\overrightarrow{EC}}}{z_{\overrightarrow{EA}}}$$

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

إذاً المستقيم (EA) هو منصف للزاوية $\widehat{DEC}$



التمرين الرابع:

تتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان

$z_A = 4$	$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$

وليكن I منتصف [AB] والمطلوب:

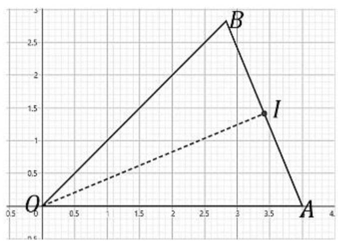
1. ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB
2. استنتج قياس للزاوية $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$
3. احسب العدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.
4. استنتج كلاً من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

الحل:

الطلب الأول:

$$z_A = 4 \rightarrow A(4,0)$$

$$z_B = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \rightarrow B(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$$



توضيح طبيعة المثلث OAB وفق:

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_B}{z_A}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

نوجد الزاوية والطويلة لتحديد نوع المثلث:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right| \rightarrow \frac{OB}{OA} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{OB}{OA} = 1 \rightarrow OB = OA$$

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right) = \arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

نحسب زاوية العدد $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ وفق:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ومنهُ: $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\rightarrow \arg(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}$$

ومنهُ المثلث (OAB) متساوي الساقين.

إنّ: $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$

الطلب الثاني:

بما أنّ المثلث AOB متساوي الساقين فيه (OI) متوسط متعلق بالقاعدة فهو منصف للزاوية $\widehat{AOB}$ أيّ أنّ:

$$(\vec{u}, \overrightarrow{OI}) = \arg(z_I) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

الطلب الثالث:

كتابة z_I بصيغته الجبرية:

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i}{2}$$

$$z_I = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

كتابة z_I بصيغته الأسيّة:

لدينا:

$$z_I = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$x = 2 + \sqrt{2} \quad , \quad y = \sqrt{2}$$

الطويلة:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{4+4\sqrt{2}+2+2}=\sqrt{8+4\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{4\left(2+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

الزاوية: لدينا من الطلب الثاني $\theta=\arg(z_I)=\frac{\pi}{8}$

$$\to z_I=2\sqrt{2+\sqrt{2}}.\,e^{i\frac{\pi}{8}}$$

الطلب الرابع:

أسي $z_I = z_I$ جبري

$$2+\sqrt{2}+\sqrt{2}i=2\sqrt{2+\sqrt{2}}.\,e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

التمرين الخامس:

تأمل في معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان العقديان $a=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ ولتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والمطلوب:

1. ارسم شكلاً مناسباً وبيّن طبيعة المثلث OAB
2. استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.
3. أوجد الشكل الجبري والأسي للعدد العقدي Z_I الممثل للنقطة I.
4. استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$

الحل:

الطلب الأول:

نكتب العدد العقدي a بالشكل الجبري:

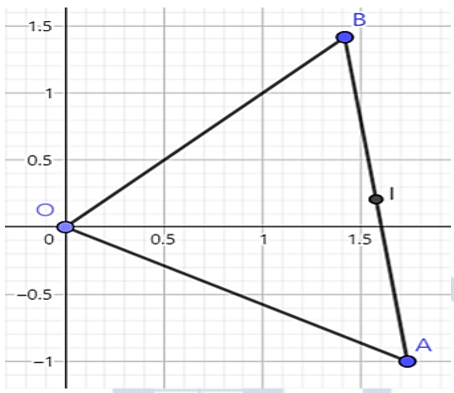
$$a=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$r=2\quad,\quad \theta=-\frac{\pi}{6}$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$
$$x=r.\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$$
$$y=r.\sin\theta=2\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$$

$$a=\sqrt{3}-i\to A\left(\sqrt{3},-1\right)$$

نكتب العدد العقدي b بالشكل الجبري:

$$b=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$r=2\quad,\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad,\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x=r.\cos\theta=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$
$$y=r.\sin\theta=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$$
$$b=\sqrt{2}+\sqrt{2}i\to B\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$$

الرسم:



طبيعة المثلث OAB :

$$Z_{\overrightarrow{OB}}=b-o=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$
$$OB=\left|Z_{\overrightarrow{OB}}\right|=\left|\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right|$$
$$=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$$

$$Z_{\overrightarrow{OA}}=a-o=\sqrt{3}-i$$
$$OA=\left|Z_{\overrightarrow{OA}}\right|=\left|\sqrt{3}-i\right|$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$Z_{\overrightarrow{AB}}=b-a=\sqrt{2}+\sqrt{2}i-\sqrt{3}+i$$
$$=\sqrt{2}-\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}+1\right)i$$
$$AB=\left|Z_{\overrightarrow{AB}}\right|=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}+1\right)i\right|$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}+1\right)^2}$$
$$=\sqrt{2-2\sqrt{6}+3+2+2\sqrt{2}+1}$$
$$=\sqrt{8-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}$$

إذاً المثلث OAB متساوي الساقين.

الطلب الثاني:

لدينا المثلث OAB مثلث متساوي الساقين ولدينا I منتصف $[AB]$ إذاً هو متوسط متعلق برأس المثلث OAB , ولأنه مثلث متساوي الساقين يكون المتوسط المتعلق بالرأس هو منصف لزاوية الرأس إذاً:

$$(\vec{u},\overrightarrow{OI}) = \frac{(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\vec{u},\overrightarrow{OB})}{2}$$

$$=\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{\frac{6\pi-4\pi}{24}}{2}=\frac{\frac{2\pi}{24}}{2}=\frac{\pi}{24}$$

$$\to (\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{\pi}{24}$$

الطلب الثالث:

الشكل الجبري:

$$Z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{3}-i+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)i}{2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}i$$

الشكل الأسي:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\ ,\ y=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6}+2+2-2\sqrt{2}+1}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}$$

$$\theta=(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{\pi}{24}$$

$$Z_I=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}.e^{i\frac{\pi}{24}}$$

الطلب الرابع:

$$\underbrace{Z_I}_{\text{اسي}}=\underbrace{Z_I}_{\text{جبري}}$$

$$\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}.e^{i\frac{\pi}{24}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}i$$

بالمقارنة نجد أنّ:

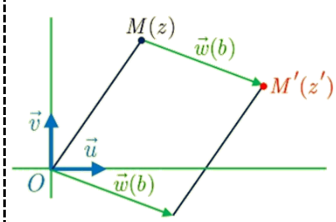
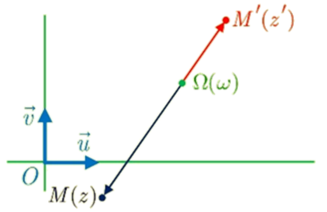
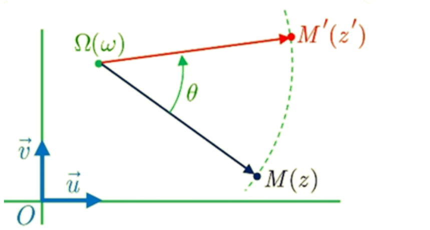
$$\cos\frac{\pi}{24}=\frac{x}{r}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$$

$$\sin\frac{\pi}{24}=\frac{y}{r}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}$$

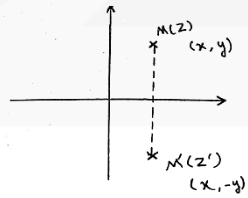
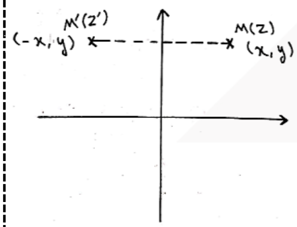
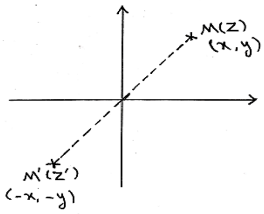
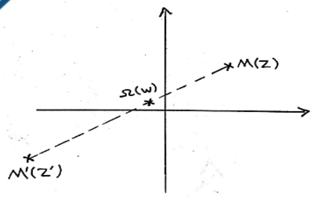
القسم الثالث: الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية:

الانسحاب	التحاكي	الدوران
 لدينا النقطة M' صورة النقطة M وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}}=Z_{\text{قديم}}+Z_{\text{شعاع}}$ أيّ: $Z'=Z+b$	 لدينا النقطة M' صورة النقطة M وفق التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته K الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}}-Z_{\text{مركز}}=k(Z_{\text{قديم}}-Z_{\text{مركز}})$ أيّ: $Z'-w=k(Z-w)$ حيث k عدد حقيقي.	 لدينا النقطة M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه Ω وزاويته θ الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}}-Z_{\text{مركز}}=e^{i\theta}(Z_{\text{قديم}}-Z_{\text{مركز}})$ أيّ: $Z'-w=e^{i\theta}(Z-w)$

ملاحظات هامة جداً:

- جديد صورة قديم
- عندما يكون التحويل هو الدوران فيجب كتابة $Z_{\text{جديد}}$ بالشكل الجبري حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك

التناظر

التناظر المحوري		التناظر المركزي	
الذي محوره Ox	الذي محوره Oy	الذي مركزه المبدأ O	الذي مركزه Ω
			
النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المحوري الذي محوره محور الفواصل (OX) الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = \bar{Z}_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = \bar{Z}$	النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المحوري الذي محوره محور التراتيب (OY) الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = -\bar{Z}_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = -\bar{Z}$	النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = -Z_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = -Z$	النقطة M' صورة النقطة M وفق التناظر المركزي الذي مركزه Ω الصيغة العقدية: $Z_{\text{جديد}} = 2Z_{\text{مركز}} - Z_{\text{قديم}}$ أيّ: $Z' = 2w - Z$

أنماط التمارين

النمط الأول: إيجاد z جديد	النمط الثاني: تعيين طبيعة التحويل
نضع الصيغة العقدية المناسبة لنوع التحويل ثم نعوّض ونصلح ونعزل z جديد.	نكتب العلاقة بصيغة تشبه أحد التحويلات الهندسية ثم نحدد نوع التحويل الموافق.

التمرين الأول:

لتكن A النقطة التي يمثلها العدد العقدي $Z_A = 1 - 3i$ والمطلوب:

١. أوجد العدد العقدي Z_B الممثل للنقطة B صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره Ox

$$z_B = \bar{z}_A$$
$$z_B = 1 + 3i$$

٢. أوجد العدد Z_C الممثل للنقطة C صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره Oy

$$z_C = -\bar{z}_A$$
$$z_C = -(1 + 3i)$$
$$z_C = -1 - 3i$$

٣. أوجد العدد Z_D الممثل للنقطة D وفق التناظر المركزي الذي مركزه المبدأ

$$z_D = -z_A$$
$$z_D = -1 + 3i$$

٤. أوجد العدد Z_E الممثل للنقطة E وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega(2 + i)$

$$z_E = 2\omega - z_A$$
$$z_E = 2(2 + i) - (1 - 3i)$$
$$z_E = 4 + 2i - 1 + 3i$$
$$z_E = 3 + 5i$$

التمرين الثاني:

لتكن النقطة A التي يمثلها العدد العقدي $Z_A = 2 + 2i$ والمطلوب:

١. أوجد العدد العقدي Z_B الممثل للنقطة B صورة النقطة A وفق التحاكي الذي مركزه $\Omega(3 - i)$ ونسبته $k = 2$

$$b - \omega = k(a - \omega)$$
$$b - 3 + i = 2(2 + 2i - 3 + i)$$
$$b - 3 + i = -2 + 6i$$
$$b = -2 + 3 + 6i - i$$
$$b = 1 + 5i$$

٢. أوجد العدد العقدي Z_C الممثل للنقطة C صورة النقطة A وفق التحاكي الذي مركزه المبدأ ونسبته $k = -3$

$$c = -3a$$
$$c = -3(2 + 2i)$$
$$c = -6 - 6i$$

٣. أوجد العدد العقدي Z_D الممثل للنقطة D صورة النقطة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$

$$d = a + z_{\vec{w}}$$
$$d = 2 + 2i - 1 + 2i$$
$$d = 1 + 4i$$

ادرس للحد الذي يجعلك تنافس به قدوتك..

٤. أوجد العدد العقدي Z_E الممثل للنقطة E صورة النقطة A وفق الدوران الذي مركزه $\Omega(1+i)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$e-\omega=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-\omega)$$
$$e-1-i=i(2+2i-1-i)$$
$$e-1-i=i-1$$
$$e=2i$$

٥. أوجد العدد العقدي Z_F الممثل للنقطة F صورة النقطة A وفق الدوران الذي مركزه المبدأ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{3}$

$$f=e^{i\frac{\pi}{3}}a$$
$$f=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(2+2i)$$
$$f=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$$

٦. أوجد العدد العقدي Z_H الممثل للنقطة H صورة النقطة A وفق الدوران الذي مركزه $\Omega(i)$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$h-\omega=e^{i\frac{\pi}{4}}(a-\omega)$$
$$h-i=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+2i-i)$$
$$h-i=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(2+i)$$
$$h-i=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}i+\sqrt{2}i-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$h=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i+i$$
$$h=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\left(3+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}i$$

التمرين الثالث:

لتكن لدينا النقطتان A و B تمثلها الأعداد العقدية a و b والمطلوب عيّن طبيعة التحويل الهندسي في الحالات الآتية:

1.	$b=\bar{a}$
2.	$b=-\bar{a}$
3.	$b-1+i=3(a-1+i)$
4.	$b=-5a$
5.	$b+i=e^{i\frac{\pi}{5}}(a+i)$
6.	$b+5-2i=e^{i\frac{\pi}{6}}(a+5-2i)$
7.	$b=e^{i\frac{\pi}{4}}a$
8.	$b-2=i(a-2)$
9.	$b+1+5i=-i(a+1+5i)$
10.	$b-\frac{1}{2}-2i=-\left(a-\frac{1}{2}-2i\right)$
11.	$b=-a$
12.	$b=a+2+3i$
13.	$b=a-1+5i$
14.	$b=2+i-a$
15.	$b=5+4i-a$
16.	$b=a+5-i$
17.	$b=-a+5+i$

الحل:

١. النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (OX) .

٢. النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المحوري الذي محورهُ (OY) .

٣. النقطة B صورة النقطة A وفق تحاك مركزهُ $\Omega(1-i)$ ونسبتهُ $k=3$.

٤. النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكٍ مركزهُ المبدأ ونسبتهُ $k=-5$

٥. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ $\Omega(-i)$ وزاويتهُ $\theta=\frac{\pi}{5}$

٦. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ $\Omega(-5+2i)$ وزاويتهُ $\theta=\frac{\pi}{6}$

٧. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ المبدأ وزاويتهُ $\theta=\frac{\pi}{4}$

٨. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ $\Omega(2)$ وزاويتهُ $\theta=\frac{\pi}{4}$

٩. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ $\Omega(-1-5i)$ وزاويتهُ $\theta=\frac{3\pi}{2}$

١٠.

التعليل الأول:

النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكٍ مركزهُ $\Omega\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ ونسبتهُ $k=-1$

التعليل الثاني:

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ $\Omega\left(\frac{1}{2}+2i\right)$ وزاويتهُ $\theta=\pi$

١١.

التعليل الأول:

النقطة B صورة النقطة A وفق تحاكٍ مركزهُ المبدأ ونسبتهُ $k=-1$

التعليل الثاني:

النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزهُ المبدأ وزاويتهُ $\theta=\pi$

التعليل الثالث:

النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزهُ المبدأ.

١٢. النقطة B صورة النقطة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

١٣. النقطة B صورة النقطة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega} = -\vec{u} + 5\vec{v}$

١٤. النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega\left(1+\frac{1}{2}i\right)$

١٥. النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega\left(\frac{5}{2}+2i\right)$

١٦. النقطة B صورة النقطة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\vec{\omega} = 5\vec{u} - \vec{v}$

١٧. النقطة B صورة النقطة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه $\Omega\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

التمرين الرابع:

لتكن النقطتان $G\left(3-i\sqrt{3}\right)$ و $H\left(3+i\sqrt{3}\right)$ وليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O ويحقق: $H = \mathcal{R}(G)$, احسب قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}\right)$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}$

الحل:

تذكر: الرمز $\mathcal{R}(G) = H$ يُقرأ النقطة H صورة النقطة G وفق الدوران $\mathcal{R}$ وهنا $\mathcal{R}$ مركزه O وزاويته $\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}\right)$.

$$\left(\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OH}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OH}}}{z_{\overrightarrow{OG}}}\right) = \arg\left(\frac{h-o}{g-0}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3-i\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

ومنه الصيغة العقدية للدوران:

$$h = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

التمرين الخامس:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

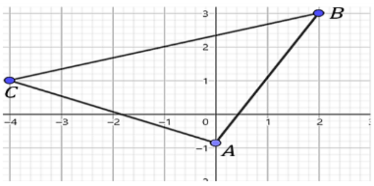
$b = 2+3i$	$a = -i$
$c = -4+i$	

الطلب الأول:

مثل النقاط في شكل.

الحل:

$$a = -i \to A(0,-1)$$
$$b = 2+3i \to B(2,3)$$
$$c = -4+i \to C(-4,1)$$



الطلب الثاني:

اكتب بالشكل الجبري والأسي للعدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

الحل:

الشكل الجبري

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{-4+i+i}{2+3i+i} = \frac{-4+2i}{2+4i} = \frac{i(4i+2)}{(2+4i)} = i$$

الشكل الأسي:

$$\frac{c-a}{b-a} = i \to \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

استنتاج طبيعة المثلث (ABC) وفق:

الطويلة:

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \to \left|\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right| = 1$$

$$\frac{AC}{AB} = 1 \to AC = AB$$

الزاوية:

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$$

$$\arg\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$$

إذاً المثلث (ABC) قائم ومتساوي الساقين.

الطلب الثالث:

لتكن $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق التحويل T حيث: $z' = iz-1-i$, ما طبيعة التحويل؟

الحل:

$$z' = iz-1-i$$
$$z'+i = iz+i^2$$
$$z'+i = i(z+i)$$
$$z'+i = e^{i\frac{\pi}{2}}(z+i)$$

ومنه النقطة M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه $\Omega(-i)$ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$.

الطلب الرابع:

نفترض النقطة D التي يمثلها العدد العقدي $d = -6+2i$ صورة النقطة A وفق تحاك مركزه C ونسبته k , احسب k

$$d-c = k(a-c)$$
$$k = \frac{d-c}{a-c}$$
$$k = \frac{-6+2i+4-i}{-i+4-i}$$
$$k = \frac{-2+i}{4-2i} \to k = \frac{-(2-i)}{2(2-i)} = -\frac{1}{2}$$

التمرين السادس:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C و M التي تمثلها الأعداد العقدية الآتية:

$z_B = 1-i$	$z_A = -1-i$
$z_M = -1+i$	$z_C = 2i$

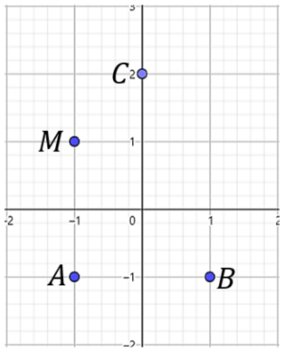
والمطلوب:

الطلب الأول:

مثّل النقاط في المستوي.

الحل:

$$z_A = -1-i \to A(-1,-1)$$
$$z_M = -1+i \to M(-1,1)$$
$$z_B = 1-i \to B(1,-1)$$
$$z_C = 2i \to Z(0,2)$$



الطلب الثاني:

احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$d - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-o)$$
$$d = i(2i) \to d = -2$$

الطلب الثالث:

أثبت أنّ M و O و B تقع على استقامة واحدة.

$$w = \frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = \frac{z_M - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_M}{z_B}$$
$$= \frac{-1+i}{1-i} = \frac{-(1-i)}{1-i} = -1$$

بما أنّ w عدد حقيقي سالب فإنّ:

$$\arg(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}) = \pi$$

إذاً النقاط M و O و B تقع على استقامة واحدة.

الطلب الرابع:

احسب $\arg\left(\frac{c-d}{m}\right)$ واستنتج أنّ (OM) و (DC) متعامدان.

الحل:

$$\frac{c-d}{m} = \frac{2i+2}{-1+i} = \frac{(2i+2)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$
$$= \frac{-2i+2-2-2i}{1^2+1^2} = -\frac{4i}{2} = -2i$$

إذاً:

$$\arg\left(\frac{c-d}{m}\right) = \arg\left(\frac{c-d}{m-o}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{DC}}}{z_{\overrightarrow{OM}}}\right)$$
$$\arg(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC}) = \frac{3\pi}{2}$$

إذاً (OM) و (DC) متعامدان.

التمرين السابع:

نزود المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نتأمل ثلاث نقاط A و B و C تمثلها بالترتيب الأعداد العقدية $a = 3-11i$ و $b = -2i$ و $c = 6-5i$ والمطلوب:

1. جد العدد العقدي c' الممثل للنقطة C' صورة C وفق انسحاب شعاعه $\vec{w} = -\vec{v}$
2. جد العدد العقدي a' الممثل للنقطة A' صورة A وفق تحاكي مركزه B ونسبته $k = -2$
3. احسب $\frac{a-c}{b-c}$ ثم أثبت أنّ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

الحل:

الطلب الأول:

$$c' = c + \omega$$
$$c' = 6-5i-i$$
$$c' = 6-6i$$

الطلب الثاني:

$$a' - b = k(a-b)$$
$$a' + 2i = -2(3-11i+2i)$$
$$a' = -6+16i$$

الطلب الثالث:

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{3-11i-6+5i}{-2i-6+5i}$$
$$= \frac{-3-6i}{-6+3i} = \frac{i(3i-6)}{3i-6} = i$$

حساب الطولية:

$$\left|\frac{a-c}{b-c}\right| = |i|$$
$$\frac{CA}{CB} = 1 \to CA = CB$$

حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) = \arg(i)$$
$$(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ المثلث ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين.

التمرين الثامن:

1. حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^2-(5+2i)z+5+5i=0$$

في المستوي العقدية المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نتأمل النقطتين A و B الممثلتين بالعددين العقديين

$z_A=2+i$	$z_B=3+i$

2. اكتب بالشكلين الجبري والأسي العدد $z_A.z_B$
3. استنتج القياس الأساسي للزاوية

$$\theta=\arg(z_A)+\arg(z_B)$$

4. لتكن النقطة C صورة A وفق الدوران الذي مركزه O وزاويته $\theta=\frac{\pi}{2}$ أوجد z_C .

الحل:

الطلب الأول:

$$z^2-(5+2i)z+5+5i=0$$
$$a=1\ ,\ b=-5-2i\ ,\ c=5+5i$$
$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$
$$=(-5-2i)^2-4(1)(5+5i)$$
$$=25+20i-4-20-20i=1$$

للمعادلة حلّان حيث:

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+2i+1}{2}=3+i$$
$$z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+2i-1}{2}=2+i$$

الطلب الثاني:

كتابة $Z_A.Z_B$ بالشكل الجبري:

$$Z_A.Z_B=(2+i)(3+i)$$
$$=6+2i+3i-1=5+5i$$

كتابة $Z_A.Z_B$ بالشكل الأسي:

$$Z_A.Z_B=5+5i$$
$$=5\underbrace{(1+i)}_{w}$$
$$w=1+i$$
$$x=1\ ,\ y=1$$
$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\to\theta=\frac{\pi}{4}$$
$$w=\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه:

$$Z_A.Z_B=5\left(\sqrt{2}.e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

الطلب الثالث:

$$\theta=\arg(Z_A)+\arg(Z_B)=\arg(Z_A.Z_B)$$

حيث: $Z_A.Z_B=5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه:

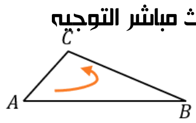
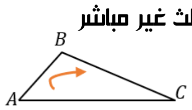
$$=\arg\left(5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

الطلب الرابع:

$$Z_C-Z_O=e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A-Z_O)$$
$$Z_C-0=i(Z_A-0)$$
$$Z_C=i(2+i)$$
$$Z_C=-1+2i$$

القسم الرابع: أسلوب تسميع الكلام والشاطر يفهم.

أولاً: كلمة ومعنى:

الكلمة	المعنى
دوران دورة كاملة	$\theta=2\pi$
دوران نصف دورة	$\theta=\pi$
دوران ربع دورة	$\theta=\frac{\pi}{2}$
ABC مثلث مباشر التوجيه 	تسمية المثلث وفق الدوران بالإتجاه الموجب
ABC مثلث غير مباشر 	تسمية المثلث وفق الدوران بالإتجاه السالب

ثانياً: التحويل الهندسي والشكل الموافق:

لدينا	نفهم
النقطة A صورة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$	أن الشكل ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين
النقطة A صورة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$	أن الشكل ABC متساوي الأضلاع

تمرين:

نتأمل النقاط A و B و C التي توافق:

$a=8$	$b=-4+4i$	$c=-4i$

الطلب الأول:

تحقق أنّ $b-c=i(a-c)$.

$$l_1=b-c=-4+4i+4i=-4+8i$$
$$l_2=i(a-c)=i(8+4i)=8i-4=-4+8i$$

إذاً $l_1=l_2$

الطلب الثاني:

استنتج أنّ المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

الحل: لدينا من الطلب السابق:

$$b-c=i(a-c)$$
$$b-c=e^{i\frac{\pi}{2}}(a-c)$$

النقطة B صورة A وفق دوران مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$

إذاً المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

دائماً .. يكتب اللّهُ خيراً أنت تجهلهُ

الطلب الثالث:

نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموافقة للعدد العقدي:

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}.z$ ما التحويل الهندسي الموافق؟

الحل:

النقطة M' صورة النقطة M وفق دوران مركزه المبدأ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

الطلب الرابع:

احسب الأعداد a' و b' و c' الموافقة لـ A' و B' و C' صور A و B و C وفق التحويل السابق.

الحل:

النقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه المبدأ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$a' = e^{i\frac{\pi}{3}}.a$$

$$a' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]8$$

$$a' = \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]8 \rightarrow \boxed{a' = 4 + 4\sqrt{3}i}$$

النقطة B' صورة النقطة B

وفق دوران مركزه المبدأ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$b' = e^{i\frac{\pi}{3}}.b$$

$$b' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right](-4 + 4i)$$

$$b' = \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right](-4 + 4i)$$

$$b' = -2 + 2i - 2\sqrt{3}i - 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{b' = -2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 - 2\sqrt{3}\right)}$$

النقطة C' صورة النقطة C

وفق دوران مركزه المبدأ وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$$c' = e^{i\frac{\pi}{3}}.c$$

$$c' = \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right](-4i)$$

$$c' = \left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right](-4i)$$

$$c' = -2i + 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{c' = 2\sqrt{3} - 2i}$$

الطلب الخامس:

لتكن P و Q و R منتصفات القطع $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$ ولتكن p و q و r الأعداد العقدية التي توافقها، احسب p و q و r:

الحل:

$$p = \frac{a' + b}{2} = \frac{4 + 4\sqrt{3}i - 4 + 4i}{2}$$

$$p = 2\sqrt{3}i + 2i$$

$$\boxed{p = \left(2\sqrt{3} + 2\right)i}$$

$$q = \frac{b' + c}{2}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3}i - 4i}{2}$$

$$\boxed{q = -1 - \sqrt{3} + \left(-1 - \sqrt{3}\right)i}$$

$$r = \frac{c' + a}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2i + 8}{2}$$

$$\boxed{r = \sqrt{3} + 4 - i}$$

الطلب السادس:

تحقق أنّ: $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$

ثم استنتج أنّ المثلث PQR متساوي الأضلاع.

إثبات أنّ: $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$

$$l_1 = r - p = \sqrt{3} + 4 - i - 2\sqrt{3}i - 2i$$

$$= \sqrt{3} + 4 - 3i - 2\sqrt{3}i$$

$$= \sqrt{3} + 4 + \left(-3 - 2\sqrt{3}\right)i$$

$$l_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$$

$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(-1 - \sqrt{3} - i - \sqrt{3}i - 2\sqrt{3}i - 2i\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]\left(-1 - \sqrt{3} - 3i - 3\sqrt{3}i\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}$$

$$= 4 + \sqrt{3} - 3i - 2\sqrt{3}i$$

$$= \sqrt{3} + 4 + \left(-3 - 2\sqrt{3}\right)i$$

ومنهُ: $l_1 = l_2$

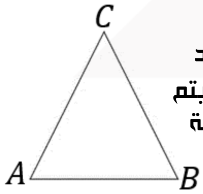
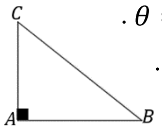
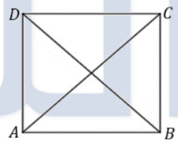
استنتاج أنّ المثلث PQR متساوي الأضلاع:

لدينا من الطلب السابق: $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$

ومنهُ النقطة R صورة النقطة Q وفق دوران مركزه P

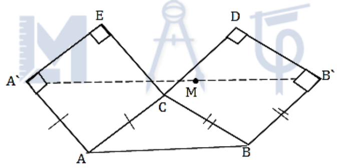
وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$

ثالثاً: الأشكال ومعانيها: (قراءة شكل):

الشكل	معناه	مثال
المثلث متساوي الأضلاع	في المثلث متساوي الأضلاع يوجد دوران زاويته $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$ وذلك حسب اتجاه الدوران والمركز يمكن أن يكون أي نقطة من رؤوس المثلث.أي يوجد 6 صيغ للدوران بحيث يتم اختيار الصياغة المناسبة لنص السؤال.  	ABC مثلث متساوي الأضلاع والمطلوب: اكتب صيغ الدورانات الموجودة. ١. النقطة A صورة النقطة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$. ٢. النقطة B صورة النقطة A وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$. ٣. النقطة B صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$. ٤. النقطة C صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$. ٥. النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3}$. ٦. النقطة A صورة النقطة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$.
المثلث القائم المتساوي الساقين	في المثلث القائم ومتساوي الساقين يوجد دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ وذلك حسب اتجاه الدوران والمركز يمكن أن يكون موقع الزاوية القائمة حصراً أي يوجد 2 صيغة للدوران بحيث يتم اختيار الصياغة المناسبة لنص السؤال.	ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين والمطلوب اكتب صيغ الدورانات الموجودة. ١. النقطة B صورة النقطة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$. ٢. النقطة C صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$. 
المثلث المتساوي الساقين	يوجد دوران مركزه رأس المثلث وزاويته θ (معطاة)	
المربع	في المربع يوجد دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$ وذلك حسب اتجاه الدوران والمركز يمكن أن يكون أي رأس من رؤوس المربع والنقطة وصورتها هما رأسيين غير متتاليين من رؤوس المربع أي يوجد 8 صيغة للدوران بحيث يتم اختيار الصياغة المناسبة لنص السؤال.  	١. النقطة B صورة النقطة D وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٢. النقطة B صورة النقطة D وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ٣. النقطة D صورة النقطة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ٤. النقطة D صورة النقطة B وفق دوران مركزه C وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٥. النقطة A صورة النقطة C وفق دوران مركزه D وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٦. النقطة A صورة النقطة C وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ٧. النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ٨. النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه D وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

التمرين الأول:

ليكن المثلّث ABC في المستوي نشئ على ضلعيه $[AC]$ و$[BC]$ وخارجه المربعين $ACEA'$ و$CBB'D$ كما في الشكل المجاور



تمثّل الأعداد العقديّة a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'

١. B' هي صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه واكتب الصّيغة العقديّة للعدد b' بدلالة b و c

٢. أثبت أنّ $a' = i(c-a)+a$

٣. عين بدلالة a و b العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

الحل:

الطلب الأول:

لدينا $CBB'D$ مربع ومنهُ:

B' صورة C وفق دوران مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b' - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-b)$$
$$b' - b = -i(c-b)$$
$$b' = -i(c-b)+b$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $a' = i(c-a)+a$ وفق:

لدينا $ACEA'$ مربع ومنهُ:

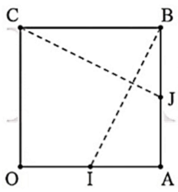
A' صورة C وفق دورا مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$a' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$a' - a = i(c-a)$$
$$a' = i(c-a)+a$$

الطلب الثالث:

لدينا M منتصف القطعة المستقيمة $[A'B']$

$$m = \frac{a'+b'}{2}$$
$$m = \frac{i(c-a)+a-i(c-b)+b}{2}$$
$$m = \frac{ic-ia+a-ic+ib+b}{2}$$
$$m = \frac{a+b+ib-ia}{2}$$
$$m = \frac{a+b+(b-a)i}{2} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}i$$



التمرين الثاني:

$OABC$ مربع ; النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$ والنقطة J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$, نتأمّل المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. اكتب العدد العقدي Z_C بدلالة Z_A ثم اكتب Z_B بدلالة Z_A
2. اكتب العددين العقديين Z_I و Z_J بدلالة Z_A
3. احسب $\frac{Z_C-Z_J}{Z_B-Z_I}$ ثم استنتج أنّ $IB=JC$ وأنّ $(IB)\perp(JC)$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة Z_c بدلالة Z_A :

C صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$:

$$Z_C - Z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A - Z_O)$$

لدينا النقطة O مبدأ المعلم: وبالتالي $Z_O = 0$

$$Z_C = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_A)$$
$$Z_C = i(Z_A)$$
$$Z_C = i\,Z_A$$

كتابة Z_B بدلالة Z_A :

لدينا $OABC$ مربع وكما نعلم في المربع أنّ كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين وبالتالي:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$$

يُكافئ:

$$Z_{\overrightarrow{OA}} = Z_{\overrightarrow{CB}}$$
$$Z_A - Z_O = Z_B - Z_C$$
$$Z_A = Z_B - Z_C$$
$$Z_B = Z_A + Z_C$$

من سابقاً لدينا $Z_C = i\,Z_A$ نعوّض:

$$Z_B = Z_A + i\,Z_A$$
$$Z_B = Z_A(1+i) \rightarrow Z_B = (1+i)Z_A$$

الطلب الثاني:

لدينا النقطة I منتصف القطعة المستقيم $[OA]$

$$Z_I = \frac{Z_O + Z_A}{2}$$
$$Z_I = \frac{Z_A}{2} \rightarrow Z_I = \frac{1}{2}Z_A$$

لدينا النقطة J منتصف القطعة المستقيم $[AB]$

$$Z_J = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

من سابقاً لدينا: $Z_B = (1+i)Z_A$

$$Z_J = \frac{Z_A + (1+i)Z_A}{2}$$
$$Z_J = \frac{Z_A[1+(1+i)]}{3}$$
$$Z_J = \frac{Z_A(1+1+i)}{2}$$
$$Z_J = \frac{Z_A(2+i)}{2}$$
$$Z_J = \frac{(2+i)Z_A}{2}$$
$$Z_J = \frac{2+i}{2}Z_A$$

الطلب الثالث:

حساب النسبة $\frac{Z_C-Z_J}{Z_B-Z_I}$:

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = \frac{iZ_A - \frac{2+i}{2}Z_A}{(1+i)Z_A - \frac{1}{2}Z_A}$$

$$= \frac{Z_A\left[i - \frac{2+i}{2}\right]}{Z_A\left[(1+i) - \frac{1}{2}\right]} = \frac{\frac{2i-2-i}{2}}{\frac{2+2i-1}{2}}$$

$$= \frac{-2+i}{1+2i} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{1+4} = \frac{5i}{5}$$

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = i$$

استنتاج أنّ: $IB = JC$

من سابقاً لدينا:

$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = i \rightarrow \frac{Z_{\overrightarrow{JC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}} = i$$

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{JC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}}\right| = |i| \rightarrow \frac{JC}{IB} = 1$$

جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين ومنهُ:

$$IB = JC$$

استنتاج أنّ: $(IB)\perp(JC)$:

من سابقاً لدينا:

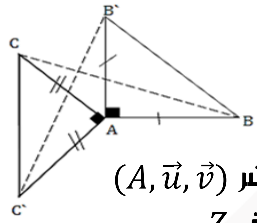
$$\frac{Z_C - Z_J}{Z_B - Z_I} = i \rightarrow \frac{Z_{\overrightarrow{JC}}}{Z_{\overrightarrow{IB}}} = i$$

$$\arg(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{JC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ المستقيمان (IB) و (JC) متعامدان

سَيَبلُغ القَلبُ ذاتَ يوم مُرادَه، وشَدائدُ الامتِحان يَوماً تَرتَحِل..

التمرين الثالث: في الشكل المجاور



المثلثان ABB' و ACC' كلٌّ منهما قائم في A ومتساوي الساقين، تأمّل المعلم المتجانس والمباشر $(A,\vec{u},\vec{v})$

1. اكتب $Z_{B'}$ بدلالة Z_B و $Z_{C'}$ بدلالة Z_C.
2. احسب $\dfrac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}$
3. استنتج أنّ $(BC)\perp(B'C')$ و $BC = B'C'$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة $Z_{B'}$ بدلالة Z_B ويتم وفق:

لدينا المثلث ABB' قائم في A ومتساوي الساقين ومنهُ:

B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$b'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$

لدينا النقطة A مبدأ المعلم وبالتالي: $a=0$

$$b'=e^{i\frac{\pi}{2}}(b)$$
$$b'=ib$$

كتابة $Z_{C'}$ بدلالة Z_C ويتم وفق:

لدينا المثلث ACC' قائم في A ومتساوي الساقين ومنهُ:

C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$c'=e^{i\frac{\pi}{2}}(c)$$
$$c'=ic$$

الطلب الثاني:

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}=\frac{b'-c'}{b-c}$$
$$=\frac{ib-ic}{b-c}=\frac{i(b-c)}{b-c}=i$$

الطلب الثالث:

استنتاج أنّ: $(BC)\perp(B'C')$ ويتم وفق:

من الطلب السابق لدينا:

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\Longrightarrow i\,\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}=i$$
$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}\right)=\frac{\pi}{2}$$
$$\arg(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{C'B'})=\frac{\pi}{2}$$

ومنهُ $(BC)\perp(B'C')$

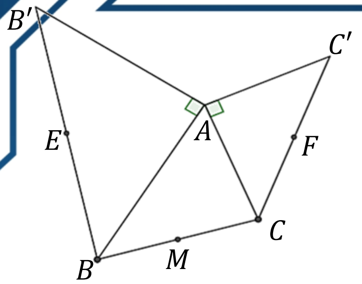
استنتاج أنّ: $BC=B'C'$ ويتم وفق:

من الطلب السابق لدينا:

$$\frac{Z_{B'}-Z_{C'}}{Z_B-Z_C}\Longrightarrow i\,\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}=i$$
$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}\right|=|i|$$
$$\frac{C'B'}{CB}=1\rightarrow C'B'=CB$$

ومنهُ $BC=B'C'$

التمرين الرابع:



ABC مثلث مباشر التوجيه النقطتين B' و C' تجعلان المثلثين $AB'B$ و ACC' قائمين ومتساوي الساقين ولتكن النقاط M و E و F منتصفات الأضلاع $[BC]$ و $[BB']$ و $[CC']$ بالترتيب ، نفرض معلماً متجانساً $(A,\vec{u},\vec{v})$ ونرمز للأعداد العقدية a و b و c و e و f و m التي تمثل النقاط A و B و C و E و F و M .

1. أثبت أنّ $c'=ic$ و $b'=ib$

   ثم اكتب بالشكل الجبري العدد العقدي $\dfrac{c'-b}{b'-c}$
2. أثبت أنّ $BC'=CB'$ وأنّ المستقيمان (BC') و (CB') متعامدين
3. عبّر عن الأعداد العقدية m و e و f بدلالة b و c
4. أثبت أنّ $\dfrac{e-m}{f-m}=i$ واستنتج طبيعة المثلث EFM

الحل:

الطلب الأول:

لدينا المثلث ACC' مثلث قائم ومتساوي الساقين ومنهُ: C' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$c'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$

لدينا النقطة A مبدأ المعلم وبالتالي: $a=0$

$$c'=e^{i\frac{\pi}{2}}(c)$$
$$c'=i\,c$$

لدينا المثلث $AB'B$ مثلث قائم ومتساوي الساقين ومنهُ: B' صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$b'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$
$$b'=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b)$$
$$b'=-i\,b$$

الطلب الثاني:

نشكّل النسبة:

$$w=\frac{Z_{\overrightarrow{BC'}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}}$$
$$w=\frac{Z_{C'}-Z_B}{Z_{B'}-Z_C}$$

لدينا: $b'=-ib$ و $c'=ic$ نعوّض:

$$w=\frac{ic-b}{-ib-c}$$

نضرب بالمرافق:

$$w=\frac{(ic-b)(+ib-c)}{(-ib-c)(+ib-c)}$$
$$w=\frac{-cb-ic^2-ib^2+cb}{b^2+c^2}$$
$$w=\frac{-ib^2-ic^2}{b^2+c^2}$$
$$w=\frac{-i(b^2+c^2)}{b^2+c^2}=-i$$

إثبات أنّ $BC' = CB'$ ويتم وفق:

من النسبة يلي شكلناها من شوي نجد أنّ:

$$w = \frac{Z_{\overrightarrow{BC'}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}} = -i$$

$$|w| = |-i|$$

$$\frac{BC'}{CB'} = 1 \to BC' = CB'$$

إثبات أنّ (BC') و (CB') متعامدان ويتم وفق:

من النسبة يلي شكلناها من شوي نجد أنّ:

$$w = \frac{Z_{\overrightarrow{BC'}}}{Z_{\overrightarrow{CB'}}} = -i$$

$$\arg\left(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{BC}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

ومنهُ نستنتج أنّ المستقيمان (BC') و (CB') متعامدان

الطلب الثالث:

النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$m = \frac{b+c}{2}$$

لدينا E منتصف القطعة المستقيمة $[BB']$

$$e = \frac{b+b'}{2} = \frac{b-ib}{2}$$

لدينا F منتصف القطعة المستقيم $[CC']$

$$f = \frac{c+c'}{2} = \frac{c+ic}{2}$$

الطلب الرابع:

إثبات أنّ $\frac{e-m}{f-m} = i$

$$\frac{e-m}{f-m} = \frac{\frac{b-ib}{2} - \frac{(b+c)}{2}}{\frac{c+ic}{2} - \frac{(b+c)}{2}}$$

$$= \frac{\frac{b-ib-b-c}{2}}{\frac{c+ic-b-c}{2}} = \frac{-c-ib}{-b+ic}$$

$$= \frac{(-c-ib)(-b-ic)}{(-b+ic)(-b-ic)} = \frac{cb+ic^2+ib^2-cb}{b^2+c^2}$$

$$= \frac{ib^2+ic^2}{b^2+c^2} = \frac{i(b^2+c^2)}{b^2+c^2} = i$$

$$\frac{e-m}{f-m} = i$$

استنتاج طبيعة المثلث EFM :

لدينا من سابقاً:

$$\frac{e-m}{f-m} = i \to \frac{Z_{\overrightarrow{ME}}}{Z_{\overrightarrow{MF}}} = i$$

نوجد الطويلة وفق:

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{ME}}}{Z_{\overrightarrow{MF}}}\right| = |i|$$

$$\frac{ME}{MF} = 1 \to ME = MF$$

نوجد الزاوية وفق:

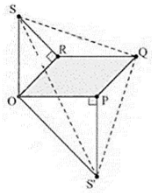
$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{ME}}}{Z_{\overrightarrow{MF}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg\left(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME}\right) = \frac{\pi}{2}$$

إذاً المستقيمان (MF) و (ME) متعامدان.

ومنهُ: المثلث EFM مثلث قائم في M ومتساوي الساقين

التمرين الخامس:



$OPQR$ متوازي أضلاع, نشئ على الضلع $[OP]$ مثلث OPS' قائماً في P ومتساوي الساقين ونشئ على الضلع $[OR]$ مثلثاً ORS قائما في R ومتساوي الساقين كما في الشكل ولتكن الأعداد العقدية s' و s و r و q و p الممثلة للنقاط S' و S و R و Q و P في المعلم المتجانس المباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

1. اكتب s و s' و q بدلالة p و r
2. احسب $\frac{q-s'}{q-s}$
3. استنتج طبيعة المثلث QSS'

الحل

الطلب الأول:

إيجاد s :

لدينا المثلث ORS قائم في R ومتساوي الساقين ومنهُ

النقطة S صورة O وفق دوران مركزه R وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ومنهُ:

$$s - r = e^{-i\frac{\pi}{2}}(-r)$$

$$s - r = -i(-r)$$

$$s - r = ir$$

$$\boxed{s = r + ir}$$

إيجاد s' :

لدينا المثلث OPS' قائم في P ومتساوي الساقين ومنهُ

النقطة S' صورة O وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنهُ:

$$s' - p = e^{i\frac{\pi}{2}}(o - p)$$

$$s' - p = i(-p)$$

$$s' - p = -ip$$

$$\boxed{s' = p - ip}$$

إيجاد q :

بما أنّ الرباعي $OPQR$ متوازي الأضلاع فإنّ:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RQ}$$

$$Z_{\overrightarrow{OP}} = Z_{\overrightarrow{RQ}}$$

$$p - o = q - r$$

$$p = q - r$$

$$\boxed{q = p + r}$$

الطلب الثاني:

$$\frac{q-s'}{q-s} = \frac{p+r-p+ip}{p+r-r-ir} = \frac{r+ip}{p-ir}$$

$$= \frac{i(-ir+p)}{p-ir} = \frac{i(p-ir)}{p-ir} = i$$

الطلب الثالث:

الطويلة:

$$\left|\frac{q-s'}{q-s}\right| = |i| \to \left|\frac{z_{\overrightarrow{S'Q}}}{z_{\overrightarrow{SQ}}}\right| = |i|$$

$$\frac{S'Q}{SQ} = 1 \to S'Q = SQ$$

الزاوية:

$$\arg\left(\frac{q-s'}{q-s}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{S'Q}}}{z_{\overrightarrow{SQ}}}\right)$$

$$\arg\left(\overrightarrow{SQ},\overrightarrow{S'Q}\right) = \frac{\pi}{2}$$

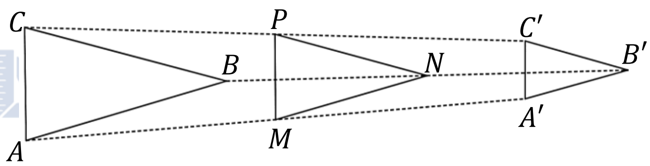
ومنه: $(SQ)\perp(S'Q)$

إذاً المثلث (QSS') قائم في Q ومتساوي الساقين.

التمرين السادس:

ABC و $A'B'C'$ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين التوجيه , النقاط M و N و P منتصفات القطع المستقيمة $[AA']$ و $[BB']$ و $[CC']$ ونرمز للأعداد العقدية a و b و c و a' و b' و c' و m و n و p التي تمثل النقاط A و B و C و A' و B' و C' و M و N و P بالترتيب والمطلوب:

1. اشرح لماذا $c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ و $c'-a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(b'-a')$
2. أثبت أنّ $p-m = e^{i\frac{\pi}{3}}(n-m)$
3. استنتج طبيعة المثلث MNP



الحل:

الطلب الأول:

شرح العلاقة: $c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

في المثلث المتساوي الأضلاع ABC لدينا C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ ومنه: $c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

شرح العلاقة: $c'-a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(b'-a')$

في المثلث المتساوي الأضلاع $A'B'C'$ لدينا C' صورة B' وفق دوران مركزه A' وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ ومنه صيغة الدوران تعطى وفق:

$$c'-a' = e^{i\frac{\pi}{3}}(b'-a')$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ: $p-m = e^{i\frac{\pi}{3}}(n-m)$

$$l_1 = p-m = \frac{c+c'}{2} - \frac{a+a'}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(c+c'-a-a')$$

$$= \frac{1}{2}[(c-a)+(c'-a')]$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(b'-a')\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}[b-a+b'-a']$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}[(b+b')-(a+a')]$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}\left[\frac{(b+b')-(a+a')}{2}\right]$$

$$= e^{i\frac{\pi}{3}}\left[\frac{b+b'}{2} - \frac{a+a'}{2}\right]$$

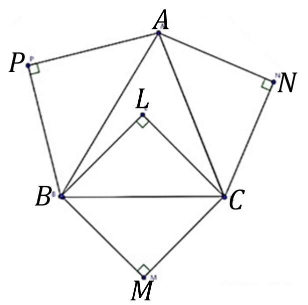
$$\to p-m = e^{i\frac{\pi}{3}}(n-m)$$

الطلب الثالث:

استنتاج طبيعة المثلث (MNP) .

مما سبق نجد أنّ P صورة N وفق دوران مركزه M وزاويته $\theta = \frac{\pi}{3}$ أيّ أنّ المثلث (MNP) متساوي الأضلاع

التمرين السابع:



ABC مثلث مباشر التوجيه فيه النقاط M و N و P و L تجعل المثلثات CBM و ACN و BAP و BCL المباشرة التوجيه قائمة ومتساوية الساقين نفرض معلماً متجانساً $(A,\vec{u},\vec{v})$ ونرمز الأعداد العقدية a و b و c و l و m و n التي تمثل النقاط A و B و C و L و M و N على الترتيب.

1. أثبت أنّ $n = \frac{1}{2}c(1+i)$ ثم أوجد الأعداد العقدية p و l
2. أثبت أنّ $n = l-p$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ANLP$
3. اكتب الشكل الجبري $\frac{n-b}{m-p}$ ثم استنتج أنّ $BN = PM$ وأنّ $(BN)\perp(PM)$

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ $n = \frac{1}{2}c(1+i)$ وفق:

في المثلث القائم والمتساوي الساقين ACN لدينا C صورة A وفق دوران مركزه N وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$c-n = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-n)$$

$$c-n = i(0-n)$$

$$c-n = -in$$

$$n-in = c$$

$$(1-i)n = c$$

$$n=\frac{c}{1-i}$$
$$n=\frac{c.(1+i)}{(1-i).(1+i)}$$
$$n=\frac{c+ic}{1^2+1^2}=\frac{c+ic}{2}$$
$$n=\frac{1}{2}c(1+i)$$

إيجاد العدد العقدي p :

في المثلث القائم المتساوي الساقين BAP لدينا A صورة B وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$a-p=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-p)$$
$$-p=i(b-p)$$
$$-p=ib-ip$$
$$-p+ip=ib$$
$$p(-1+i)=ib$$
$$p=\frac{ib}{-1+i}\to p=\frac{ib(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}$$
$$p=\frac{-ib+b}{1^2+1^2}\to p=\frac{b-ib}{2}$$
$$p=\frac{1}{2}b(1-i)$$

إيجاد العدد العقدي l :

في المثلث القائم المتساوي الساقين BCL لدينا C صورة B وفق دوران مركزه L وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$c-l=e^{i\frac{\pi}{2}}(b-l)$$
$$c-l=i(b-l)$$
$$c-l=ib-il$$
$$l-il=c-ib$$
$$l(1-i)=c-ib$$
$$l=\frac{c-ib}{1-i}\to l=\frac{(c-ib).(1+i)}{(1-i).(1+i)}$$
$$l=\frac{c+ic-ib+b}{2}$$
$$l=\frac{1}{2}(c+ic-ib+b)$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ $n=l-p$ وفق:

$$l_1=n=\frac{c+ic}{2}$$
$$l_2=l-p=\frac{c+ic+b-ib}{2}-\frac{b-ib}{2}$$
$$=\frac{c+ic+b-ib-b+ib}{2}=\frac{c+ic}{2}$$
$$l_1=l_2$$

استنتاج طبيعة الرباعي $ANLP$.

ومنه: $n=l-p$ تكافئ: $\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{PL}$

وبالتالي الرباعي $ANLP$ متوازي أضلاع.

الطلب الثالث:

إيجاد العدد العقدي m وفق:

في المثلث القائم والمتساوي الساقين CBM لدينا:

B صورة C وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ومنه:

$$b-m=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-m)$$
$$b-m=i(c-m)$$
$$b-m=ic-im$$
$$m-im=b-ic$$
$$m(1-i)=b-ic$$
$$m=\frac{b-ic}{1-i}\to m=\frac{(b-ic).(1+i)}{(1-i).(1+i)}$$
$$=\frac{b+ib-ic+c}{2}=\frac{1}{2}(b+c+ib-ic)$$

كتابة $\frac{n-b}{m-p}$ بالشكل الجبري وفق:

$$\frac{n-b}{m-p}=\frac{\frac{c+ic}{2}-b}{\frac{b+c+ib-ic}{2}-\frac{(b-ib)}{2}}$$
$$=\frac{\frac{c+ic-2b}{2}}{\frac{b+c+ib-ic-b+ib}{2}}=\frac{c-2b+ic}{c+2ib-ic}$$
$$=\frac{i(-ic+2ib+c)}{c+2ib-ic}=\frac{i(c+2ib-ic)}{c+2ib-ic}$$
$$\frac{n-b}{m-p}=i$$

إثبات أنّ $BN=PM$:

$$\frac{n-b}{m-p}=i\to\frac{z_{\overrightarrow{BN}}}{Z_{\overrightarrow{PM}}}=i$$
$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{BN}}}{Z_{\overrightarrow{PM}}}\right|=|i|\to\frac{BN}{PM}=1$$

ومنه: $BN=PM$

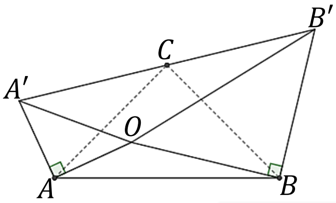
إثبات أنّ $(BN)\perp(PM)$:

$$\arg\left(\frac{n-b}{m-p}\right)=\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BN}}}{z_{\overrightarrow{PM}}}\right)$$
$$=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$$

ومنه: $BN\perp PM$

اجعل حياتك قصةً تستحقُ أن تروى.. 🙁💙

التمرين الثامن:



في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ليكن المثلث OAB نشئ على ضلعيه $[OA]$ و $[OB]$ وخارجه المثلثين $OA'A$ و OBB' كلا منهما قائم ومتساوي الساقين والنقطة C في منتصف $[A'B']$ نمثل الأعداد العقدية a و b و C و a' و b' النقاط A و B و C و A' و B' والمطلوب:

1. اكتب b' بدلالة b و a' بدلالة a ثم اكتب c بدلالة a و b
2. احسب العدد $\frac{c-b}{c-a}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

الحل:

الطلب الأول: كتابة b' بدلالة b :

لدينا المثلث OBB' قائم ومتساوي الساقين وفيه النقطة B' صورة النقطة O وفق دوران مركزه B وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$

ومنهُ الصيغة العقدية:

$$b' - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(o-b)$$
$$b' - b = -i(-b)$$
$$\boxed{b' = b + ib}$$

كتابة a' بدلالة a :

لدينا المثلث $OA'A$ قائم ومتساوي الساقين وفيه النقطة A' صورة النقطة O وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية:

$$a' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(o-a)$$
$$a' - a = i(-a)$$
$$\boxed{a' = a - ia}$$

كتابة c بدلالة a و b :

لدينا النقطة C هي منتصف $[A'B']$ ومنهُ:

$$c = \frac{a'+b'}{2} = \frac{a - ia + b + ib}{2}$$
$$\boxed{c = \frac{a+b}{2} + i\frac{(b-a)}{2}}$$

الطلب الثاني: حساب العدد $\frac{c-b}{c-a}$ وفق:

$$\frac{c-b}{c-a} = \frac{\frac{a+b-ia+ib}{2} - b}{\frac{a+b-ia+ib}{2} - a}$$
$$= \frac{\frac{a+b-ia+ib-2b}{2}}{\frac{a+b-ia+ib-2a}{2}}$$
$$= \frac{a-b-ia+ib}{b-a-ia+ib}$$

الطريقة الأولى:

$$= \frac{i(-ia+ib-a+b)}{b-a-ia+ib} = i$$

الطريقة الثانية:

$$= \frac{a-b-ia+ib}{b-a-ia+ib}$$
$$= \frac{(a-b)-i(a-b)}{-(a-b)-i(a-b)}$$
$$= \frac{(a-b)(1-i)}{(a-b)(-1-i)} = \frac{1-i}{-1-i}$$
$$= \frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}$$
$$= \frac{-1+i+i+1}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i$$

استنتاج طبيعة المثلث (ABC) :

الطويلة:

$$\left|\frac{c-b}{c-a}\right| = |i| \to \left|\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right| = |i|$$
$$\frac{BC}{AC} = 1 \to BC = AC$$

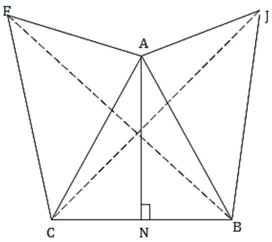
الزاوية:

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{AC}}}\right)$$
$$\arg\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ: $(BC) \perp (AC)$

إذاً المثلث (ABC) قائم في C ومتساوي الساقين.

التمرين التاسع:



ليكن ABC مثلّثاً متساوي السّاقين رأسه A، نشئ خارجه مثلثين قائمين في A ومتساويا السّاقين ABJ و ACF، لتكن الأعداد العقديّة a, b, c, j, f الممثّلة للنقاط A, B, C, J, F بالترتيب والمطلوب:

1. جد بدلالة b و c العددين j و f.
2. اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشّكل الجبري.
3. أثبت أنّ $JC = BF$ وأنّ المستقيمين (CJ) و(BF) متعامدان.
4. نفترض أنّ A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,1)(F,3)(J,2)(B,1)$ احسب $\frac{c}{b}$.

الحل:

الطلب الأول:

نختار معلم متجانس $(A,\vec{u},\vec{v})$.

إيجاد العدد العقدي الممثل للنقطة J وفق:

لدينا المثلث ABJ قائم في A ومتساوي الساقين ومنهُ: J صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$j - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-a)$$
$$j = i(b) \to \boxed{j = ib}$$

إيجاد العدد العقدي الممثل للنقطة f وفق:

لدينا المثلث ACF قائم في A ومتساوي الساقين ومنهُ: F صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$$f-a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-a)$$
$$f = -i(c) \to \boxed{f=-ic}$$

الطلب الثاني:

$$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib}$$
$$= \frac{i(-c+ib)}{-(-c+ib)} = -i$$

الطلب الثالث:

لدينا من نصف دقيقة ^_* :

$$\frac{f-b}{c-j} = -i \to \frac{z_{\overrightarrow{BF}}}{z_{\overrightarrow{JC}}} = -i$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{BF}}}{z_{\overrightarrow{JC}}}\right| = |-i| \to \frac{BF}{JC} = 1$$
$$BF = JC$$

الزاوية:

$$\arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BF}}}{z_{\overrightarrow{JC}}}\right) = \frac{3\pi}{2}$$
$$\arg(\overrightarrow{JC},\overrightarrow{BF}) = \frac{3\pi}{2}$$

ومنهُ المستقيمان (BF) و (JC) متعامدان.

الطلب الرابع:

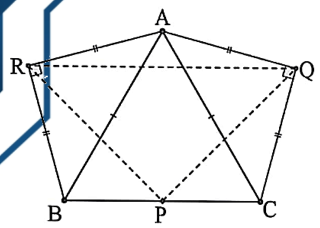
A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(F,3)$ و $(J,2)$ ومنهُ:

$$a = \frac{(1)(b)+(1)(c)+(3)(f)+(2)(j)}{1+1+3+2}$$
$$a = \frac{b+c-3ic+2ib}{7}$$

بما أنّ النقطة A مبدأ المعلم فإنّ $a=0$:

$$0 = \frac{b+c-3ic+2ib}{7}$$
$$b+c-3ic+2ib = 0$$
$$c-3ic = -b-2ib$$
$$c(1-3i) = b(-1-2i)$$
$$\frac{c}{b} = \frac{-1-2i}{1-3i}$$
$$= \frac{(-1-2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$$
$$= \frac{-1-3i-2i+6}{1+9} = \frac{5-5i}{10}$$
$$= \frac{5}{10} - \frac{5}{10}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

التمرين العاشر:



تتأمل في الشكل المجاور مثلثاً متساوي الأضلاع ABC ننشئ على الضلع $[AB]$ مثلثاً ARB قائماً في R ومتساوي الساقين وننشئ على الضلع $[AC]$ مثلثاً ACQ قائماً في Q ومتساوي الساقين , النقطة P منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ ولتكن الأعداد العقدية r و q و p و c و b و a الممثلة للنقاط R و Q و P و C و B و A في المعلم المتجانس المباشر $(A;\vec{u},\vec{v})$

والمطلوب:

1. أثبت أنّ $q = \frac{1+i}{2}c$ و $r = \frac{1-i}{2}b$
2. اكتب العدد العقدي p بدلالة c و b
3. احسب $\frac{p-r}{p-q}$
4. استنتج طبيعة المثلث PQR

الحل:

الطلب الأول:

إثبات أنّ $q = \frac{1+i}{2}c$:

لدينا المثلث ACQ قائم في Q ومتساوي الساقين فيه النقطة C صورة النقطة A وفق دوران مركزه Q وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران:

$$c-q = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-q)$$
$$c-q = i(-q)$$
$$q-iq = c$$
$$(1-i)q = c$$
$$q = \frac{c}{1-i}$$
$$q = \frac{(1)(1+i)}{(1-i)(1+i)}c = \frac{1+i}{2}c$$

إثبات أنّ $r = \frac{1-i}{2}b$:

لدينا المثلث ARB قائم في R ومتساوي الساقين فيه النقطة A صورة النقطة B وفق دوران مركزه R وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران:

$$a-r = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-r)$$
$$-r = i(b-r)$$
$$r-ir = -ib$$
$$(1-i)r = -ib$$
$$r = \frac{-i}{1-i}b$$
$$r = \frac{(-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}b = \frac{1-i}{2}b$$

الطلب الثاني:

كتابة p بدلالة c و b :

بما أنّ النقطة P منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ فإنّ:

$$p = \frac{b+c}{2}$$

الطلب الثالث:

حساب $\frac{p-r}{p-q}$:

$$\frac{p-r}{p-q} = \frac{\frac{b+c}{2} - \frac{1-i}{2}b}{\frac{b+c}{2} - \frac{1+i}{2}c}$$

$$= \frac{b+c-(1-i)b}{b+c-(1+i)c} = \frac{b+c-b+ib}{b+c-c-ic}$$

$$= \frac{c+ib}{b-ic} = \frac{i(-ic+b)}{b-ic} = i$$

الطلب الرابع:

استنتاج طبيعة المثلث PQR :

لدينا من الطلب السابق:

$$\frac{p-r}{p-q} = i \rightarrow \frac{Z_{\overrightarrow{RP}}}{Z_{\overrightarrow{QP}}} = i$$

حساب الطويلة:

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{RP}}}{Z_{\overrightarrow{QP}}}\right| = i$$

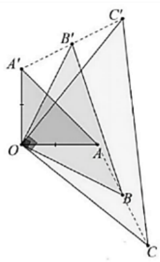
$$\frac{RP}{QP} = 1 \rightarrow RP = QP$$

حساب الزاوية:

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{RP}}}{Z_{\overrightarrow{QP}}}\right) = i \rightarrow \left(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{RP}\right) = \frac{\pi}{2}$$

ومنهُ المثلث PQR متساوي الساقين وقائم في P

التمرين الحادي عشر:



في الشكل المجاور نتأمل المثلثات OAA' و OBB' و OCC' كل منها قائم في O ومتساوي الساقين والنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة و $AB = BC$

باتخاذ معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ والمطلوب:

1. اكتب العدد العقدي a' بدلالة a و b' بدلالة b و c' بدلالة c
2. أثبت أنّ: $\frac{b'-a'}{b'-c'} = \frac{b-a}{b-c}$
3. استنتج أنّ النقاط A' و B' و C' تقع على استقامة واحدة وأنّ $A'B' = B'C'$
4. نفترض أنّ O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(A',2)$ و $(B,1)$ و $(B',-2)$ ، احسب $\frac{a}{b}$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة العدد العقدي a' بدلالة a :

لدينا المثلث OAA' قائم في O ومتساوي الساقين فيه النقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران هي:

$$a' - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(a - o)$$
$$a' = ia$$

كتابة العدد العقدي b' بدلالة b :

لدينا المثلث OBB' قائم في O ومتساوي الساقين فيه النقطة B' صورة النقطة B وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران هي:

$$b' - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - o)$$
$$b' = ib$$

كتابة العدد العقدي c' بدلالة c :

لدينا المثلث OCC' قائم في O ومتساوي الساقين فيه النقطة C' صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ ومنهُ الصيغة العقدية للدوران هي:

$$c' - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - o)$$
$$c' = ic$$

الطلب الثاني:

إثبات أنّ: $\frac{b'-a'}{b'-c'} = \frac{b-a}{b-c}$

لدينا:

$$\underbrace{\frac{b'-a'}{b'-c'}}_{l_1} = \underbrace{\frac{b-a}{b-c}}_{l_2}$$

$$l_1 = \frac{b'-a'}{b'-c'} = \frac{ib-ia}{ib-ic}$$

$$= \frac{i(b-a)}{i(b-c)} = \frac{b-a}{b-c} = l_2$$

الطلب الثالث:

لدينا:

$$\frac{b'-a'}{b'-c'} = \frac{b-a}{b-c} \rightarrow \frac{Z_{\overrightarrow{A'B'}}}{Z_{\overrightarrow{C'B'}}} = \frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}$$

حساب الطويل:

$$\left|\frac{Z_{\overrightarrow{A'B'}}}{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}\right| = \left|\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}\right| \rightarrow \frac{A'B'}{C'B'} = \frac{AB}{CB}$$

حيث نعلم أنّ:

$$AB = BC \rightarrow \frac{AB}{BC} = 1$$

ومنه:

$$\frac{A'B'}{C'B'} = 1 \to A'B' = C'B'$$

الزاوية:

$$\arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{A'B'}}}{Z_{\overrightarrow{C'B'}}}\right) = \arg\left(\frac{Z_{\overrightarrow{AB}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}\right)$$

وبما أنّ النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة فإنّ النقاط A' و B' و C' تقع على استقامة واحدة.

الطلب الرابع:

بما أنّ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(A',2)$ و $(B,1)$ و $(B',-2)$ فإنّ:

$$o = \frac{(1)a + (2)a' + (1)b + (-2)b'}{1+2+1-2}$$

$$o = \frac{a + 2ia + b - 2ib}{2}$$

بما أنّ النقطة O مبدأ المعلم فإنّ: $z_O = 0$ ومنه:

$$0 = \frac{a + 2ia + b - 2ib}{2}$$

$$a + 2ia + b - 2ib = 0$$

$$a + 2ia = -b + 2ib$$

$$a(1+2i) = b(-1+2i)$$

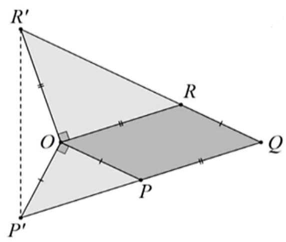
$$a = \frac{b(-1+2i)}{1+2i}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-1+2i}{1+2i}$$

$$= \frac{(-1+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$= \frac{-1+2i+2i+4}{1+4} = \frac{4i+3}{5}$$

التمرين الثاني عشر:



$OPQR$ متوازي أضلاع , ننشئ على الضلع OP المثلث $OP'P$ القائم في O ومتساوي الساقين وننشئ على الضلع OR المثلث ORR' القائم في O ومتساوي الساقين , نتخذ معلماً متجانساً مباشراً $(O,\vec{u},\vec{v})$ ولتكن الأعداد العقدية p و q و r و p' و r' الممثلة للنقاط P و Q و R و P' و R' بالترتيب.

1. اكتب r' بدلالة r واكتب p' بدلالة p ثم اكتب q بدلالة p و r
2. احسب العدد $\frac{r'-p'}{q}$
3. استنتج أنّ (OQ) هو ارتفاع المثلث $OR'P'$ وأنّ $OQ = P'R'$

الحل:

الطلب الأول:

كتابة r' بدلالة r :

لدينا ORR' مثلث قائم في O ومتساوي الساقين فيه R' صورة R وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = \frac{\pi}{2}$ والصيغة العقدية للدوران

$$r' - o = e^{i\frac{\pi}{2}}(r - o)$$

$$r' = ir$$

كتابة p' بدلالة p :

لدينا $OP'P$ مثلث قائم في O ومتساوي الساقين فيه P' صورة P وفق دوران مركزه O وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$ والصيغة العقدية للدوران

$$p' - o = e^{-i\frac{\pi}{2}}(p - o)$$

$$p' = -ip$$

كتابة q بدلالة p و r :

بما أنّ الرباعي $OPQR$ متوازي أضلاع فإنّ:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$$

$$q - o = p - o + r - o$$

$$q = p + r$$

الطلب الثاني:

$$\frac{r'-p'}{q} = \frac{ir+ip}{p+r} = \frac{i(r+p)}{p+r} = i$$

الطلب الثالث:

استنتاج أنّ (OQ) هو ارتفاع المثلث $OR'P'$:

لدينا:

$$\frac{r'-p'}{q} = \frac{r'-p'}{q-o} = \frac{z_{\overrightarrow{P'R'}}}{z_{\overrightarrow{OQ}}} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{P'R'}}}{z_{\overrightarrow{OQ}}}\right) = \arg(i)$$

$$(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{P'R'}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه (OQ) و $(P'R')$ متعامدان وبالتالي المستقيم (OQ) هو ارتفاع في المثلث $OR'P'$

إثبات أنّ $OQ = P'R'$:

لدينا:

$$\frac{r'-p'}{q} = \frac{r'-p'}{q-o} = \frac{z_{\overrightarrow{P'R'}}}{z_{\overrightarrow{OQ}}} = i$$

$$\left|\frac{z_{\overrightarrow{P'R'}}}{z_{\overrightarrow{OQ}}}\right| = |i|$$

$$\frac{P'R'}{OQ} = 1 \to OQ = P'R'$$

مجموعات النقاط:

المجموعة	الحالة	معناها
الأولى	$Re(z) =$ عدد	تمثل المستقيم الشاقولي الذي معادلته عدد $x =$
	$Im(z) =$ عدد	تمثل المستقيم الأفقي الذي معادلته عدد $y =$
الثانية	$\arg(z) = \alpha$	تمثل نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية α مع محور الفواصل
	$arg(z) = 0$	تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة
	$arg(z) = \pi$	تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة
	$arg(z) = \pi/2$	تمثل مجموعة الأعداد التخيلية البحتة الموجبة
	$arg(z) = 3\pi/2$	تمثل مجموعة الأعداد التخيلية البحتة السالبة
الثالثة	$\lvert z-a\rvert = k$	تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = K$
	$\lvert z-a\rvert = \lvert a-b\rvert$	تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = AB$
	$\lvert z-a\rvert = \lvert c-b\rvert$	تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = BC$
	$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$	تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

التمرين الأول:

في كل من الحالات الآتية عين مجموعة النقاط M التي يحقق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المعطى:

1. $Re(z) = -2$	2. $Im(z) = 1$
3. $\arg(z) = \pi$	4. $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$
5. $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$	6. $\lvert z\rvert = 1$

الحل:

١. تمثل المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = -2$

٢. تمثل المستقيم الأفقي الذي معادلته $y = 1$

٣. تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

٤. تمثل نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

٥. تمثل نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية مقدارها $\frac{-2\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

٦. تمثل دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $r = 1$

التمرين الثاني:

لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية $a = 1$ و $b = 3 + 2i$ عين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق التالي واكتب معادلته.

الحالة الأولى: $\lvert z - 1\rvert = \lvert z - 3 - 2i\rvert$

الحل:

تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

الحالة الثانية: $\lvert z - 3 - 2i\rvert = 1$

الحل:

تمثل دائرة مركزها $B(3,2)$ ونصف قطرها $r = 1$ ومعادلته تعطى وفق:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

التمرين الثالث:

عين في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى:

١. المقدار $(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقي.

الحل:

يكون المقدار $(z+1)(\bar{z}-2)$ حقيقياً إذا تحقق:

$$(z+1)(\bar{z}-2) = \overline{(z+1)(\bar{z}-2)}$$
$$(z+1)(\bar{z}-2) = (\bar{z}+1)(z-2)$$
$$z\bar{z} - 2z + \bar{z} - 2 = z\bar{z} - 2\bar{z} + z - 2$$
$$-2z + \bar{z} = -2\bar{z} + z$$
$$\bar{z} + 2\bar{z} = 2z + z$$
$$3\bar{z} = 3z$$
$$\bar{z} = z$$

ومنهُ مجموعة الأعداد العقدية z هي الأعداد الحقيقية.

٢. العدد z مختلف عن $4i$ و $\frac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي.

الحل:

يكون المقدار $\frac{z+2i}{z-4i}$ حقيقياً إذا تحقق:

$$\frac{z+2i}{z-4i} = \overline{\left(\frac{z+2i}{z-4i}\right)}$$
$$\frac{z+2i}{z-4i} = \frac{\bar{z}-2i}{\bar{z}+4i}$$
$$(z+2i)(\bar{z}+4i) = (z-4i)(\bar{z}-2i)$$
$$z\bar{z} + 4iz + 2i\bar{z} - 8 = z\bar{z} - 2iz - 4i\bar{z} - 8$$
$$4iz + 2i\bar{z} = -2iz - 4i\bar{z}$$
$$2i\bar{z} + 4i\bar{z} = -2iz - 4iz$$
$$6i\bar{z} = -6iz$$

نقسم على $(6i)$ ومنهُ:

$$\bar{z} = -z$$

ومنهُ مجموعة الأعداد العقدية z هي:

الأعداد التخيلية البحتة بشرط $z \neq 4i$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا العدد العقدي u حيث: $u=\frac{1+z}{2+z}$

و $z\neq -2$ ونفترض أنّ $z=x+iy$ و $u=X+iY$

الطلب الأول:

احسب X و Y بدلالة x و y .

الحل:

$$u=\frac{1+z}{2+z}$$

$$X+iY=\frac{1+x+iy}{2+x+iy}$$

$$X+iY=\frac{(1+x+iy)(2+x-iy)}{(2+x+iy)(2+x-iy)}$$

$$X+iY=\frac{2+x-iy+2x+x^2-ixy+2iy+ixy+y^2}{(2+x)2+y^2}$$

$$X+iY=\frac{2+3x+x^2+y^2+iy}{(2+x)^2+y^2}$$

$$X+iY=\frac{2+3x+x^2+y^2}{(2+x)^2+y^2}+i\frac{y}{(2+x)^2+y^2}$$

بالمطابقة نجد أنّ:

$$X=\frac{x^2+3x+y^2+2}{(2+x)^2+y^2}$$

$$Y=\frac{y}{(2+x)^2+y^2}$$

الطلب الثاني:

أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها u حقيقي هي مستقيم محذوف منهُ نقطة.

الحل:

يكون u حقيقياً عندما:

$$Im(z)=0\rightarrow Y=0$$

$$\frac{y}{(2+x)^2+y^2}=0$$

تكافئ:

$$y=0$$

وهي تمثل معادلة مستقيم محذوف منهُ نقطة $(-2,0)$

الطلب الثالث:

أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها u تخيلي بحت هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

بما أنّ u تخيلي بحت فإنّ:

$$Re(z)=0\rightarrow X=0$$

$$\frac{x^2+3x+y^2+2}{(2+x)^2+y^2}=0$$

تكافئ:

$$x^2+3x+y^2+2=0$$

بالإتمام إلى مربع كامل.

$$x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

ومنهُ تمثل معادلة دائرة مركزها $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $r=\frac{1}{2}$ محذوف منها نقطة $(-2,0)$

التمرين الخامس:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ليكن العدد العقدي $w=-12+16i$.

الطلب الأول:

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد w .

الحل:

ليكن $z=x+iy$ والمعادلة $z^2=w$ تكافئ:

$$\begin{cases}x^2+y^2=|w|\\x^2-y^2=Re(z)\\2xy=Im(z)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=20\ldots(1)\\x^2-y^2=-12\ldots(2)\\2xy=16\ldots(3)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نجد أنّ:

$$2x^2=8\rightarrow x^2=4$$

إما $x=2\rightarrow y=4$

$$z_1=2+4i$$

أو $x=-2\rightarrow y=-4$

$$z_2=-2-4i$$

الطلب الثاني:

أوجد العددين z_A و z_B حلي المعادلة:

$$z^2+(4+2i)z+6=0$$

الحل:

$$z^2+(4+2i)z+6=0$$

$$a=1\quad,\quad b=4+2i\quad,\quad c=6$$

$$\Delta=b^2-4(a)(c)$$

$$=(4+2i)^2-4(1)(6)$$

$$=16+16i-4-24$$

$$\Delta=-12+16i$$

إيجاد الجذور التربيعية لـ Δ وفق:

تم سابقاً حيث: $w^2=\Delta$ ومنهُ:

$$w_1=2+4i\quad,\quad w_2=-2-4i$$

ومنهُ حلول المعادلة هي:

$$z_A=\frac{-b+w_1}{2a}=\frac{-4-2i+2+4i}{2}$$

$$=\frac{-2+2i}{2}=\frac{-2}{2}+i\frac{2}{2}=-1+i$$

$$z_B = \frac{-b+w_2}{2a} = \frac{-4-2i-2-4i}{2}$$
$$= \frac{-6-6i}{2} = \frac{-6}{2} - i\frac{6}{2} = -3-3i$$

الطلب الثالث:

صف مجموعة Γ مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوى التي تحقق $|z+1-i| = 3$ واكتب معادلة للمجموعة Γ .

الحل:

تمثل دائرة مركزها $\Omega(-1,1)$

ونصف قطرها $r = 3$ ومعادلة الدائرة:

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$$

الدورات الامتحانية:

دورة 2017 امتحان نصفي 40 درجة:

ليكن العدد العقدي $z = 1+\sqrt{3}i$

اكتب العدد z بالشكل المثلثي وأثبت أن z^6 عدد حقيقي

دورة 2017 الأولى 60 درجة:

ليكن لدينا العددان العقديان

$z_1 = 1+\sqrt{3}i$	$z_2 = 1+i$

1. اكتب بالشكل المثلثي كلاً من z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$
2. اكتب بالشكل الجبري $\frac{z_1}{z_2}$ واستنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

دورة 2017 الثانية 60 درجة:

لتكن النقطة M التي يمثّلها العدد العقدي

$Z = -1+i$

1. أثبت أنّ Z^8 عدداً حقيقيّاً.
2. جد العدد العقدي Z' الممثّل للنقطة M' صورة M وفق دوران مركزه $A(1+i)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ واكتبه بالشكل الأسّي

دورة 2018 الأولى 60 درجة:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تأمّل النقاط A و B و C و M التي تمثّلها على الترتيب الأعداد العقديّة:

$a = -1-i$	$b = 1-i$
$c = 2i$	$m = -1+i$

1. مثّل الأعداد العقدية a و b و c و m في المستوي
2. احسب العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة النقطة C وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
3. أثبت أنّ النقاط M وO وB تقع على استقامة واحدة.
4. أحسب $arg\frac{c-d}{m}$، واستنتج أنّ (OM) و (DC) متعامدان

دورة 2018 الثانية 60 درجة:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ تتأمّل النقطتين A وB اللتين يمثلهما على الترتيب العددان العقديان:

$z_A = 4$	$z_B = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

ولتكن I منتصف $[AB]$ والمطلوب:

1. مثّل النقطتين A و B في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$، واكتب Z_B بالشكل الأسي.
2. بيّن طبيعة المثلّث OAB وأثبت أنّ قياس الزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$ هو $\frac{\pi}{8}$
3. اكتب العدد العقدي Z_1 الممثّل للنقطة I بالصّيغة الجبريّة والأسّيّة واستنتج $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

دورة 2019 الأولى 60 درجة:

لتكن النقطتان A و B اللتان تمثّلهما الأعداد العقديّة

$Z_A = -1+i$	$Z_B = -3i$

وليكن: $P(Z) = Z^2 + (1+2i)Z + 3 + 3i$

1. أثبت أنّ Z_A حلّاً للمعادلة و $P(Z) = 0$ ثمّ استنتج حلّ آخر للمعادلة.
2. حدّد العدد العقدي Z' الممثّل للنقطة A' صورة النقطة A وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
3. اكتب Z_A بالشّكل الأسّي.

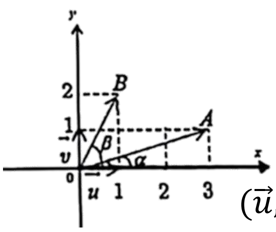
دورة 2019 الثانية 60 درجة:

تتأمّل في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط C و A و B التي تمثّلها الأعداد العقديّة:

$a = 6-i$	$b = -6+3i$
$c = -18+7i$	

1. احسب العدد $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أنّ النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.
2. بفرض $d = 1+6i$ العدد العقدي الممثّل للنقطة D صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته θ، احسب θ.
3. جد العدد العقدي الممثّل للنقطة n ليكون الرّباعي $OAND$ مربعاً.

دورة 2020 الأولى 80 درجة:



تتأمّل في المستوي العقدي المزوّد بالمعلم المتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ بفرض أنّ α القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$ و β القياس الأساسي للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OB})$،

1. اكتب بالشكل الجبري العددين العقديين Z_A و Z_B اللذين يمثلان النقطتين A و B
2. اكتب العدد العقدي $\frac{Z_B}{Z_A}$ بالشّكل الجبري والأسّي ثمّ استنتج قيمة $\beta - \alpha$.

دورة 2020 الثانية 80 درجة:

ليكن العدد العقدي $w = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} e^{i\frac{\pi}{3}}$

1. بيّن أنّ $|w| = 1$ ثمّ اكتب العدد w بالشكل الأسّي.
2. ليكن Z عدد عقدي ما، أثبت أنّ: $Z = \frac{Z - \bar{Z}w}{1-w}$ عدد حقيقي.

دورة 2021 الأولى 70 درجة:

في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ تتأمل النقاط A و B و C التي تمثّلها الأعداد العقديّة على الترتيب

$b = -4 + 4i$	$a = 8$
$c = -4i$	

1. احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج أنّ المثلّث ABC قائم ومتساوي السّاقين.
2. حدّد العدد العقدي d الممثّل للنقطة D صورة النقطة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.
3. جد العدد العقدي e الممثّل للنقطة E ليكون الرّباعي $ACBE$ مربّعاً.

دورة 2021 الثانية 100 درجة

أولاً:

ليكن $P(z)$ كثير حدود معرّف بالصّيغة:

$$P(Z) = z^3 - 2(\alpha + i\sqrt{3})z^2 - 4(\alpha - i\sqrt{3})z + 8$$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ والمطلوب:

1. احسب العدد α لكي يكون $Z = 2$ حلّاً للمعادلة: $P(Z) = 0$
2. بفرض $\alpha = 1$ جد كثير الحدود من الدّرجة الثّانية $Q(Z)$ يحقّق: $P(z) = (z-2)Q(z)$ ثمّ استنتج حلول المعادلة $P(z) = 0$

ثانياً:

لتكن A و B و C نقاط المستوي الّتي تمثل الأعداد العقديّة بالترتيب

$b = 1 + i\sqrt{3}$	$a = 2$
$c = -1 + i\sqrt{3}$	

1. أثبت أنّ $\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ واستنتج طبيعة المثلّث ABC.
2. ليكن المثلّث $A'B'C'$ صورة المثلّث ABC وفق تناظر بالنسبة لمحور الفواصل، عيّن a' و b' و c' التي تمثّلها نقاط المستوي A' و B' و C' على الترتيب.

دورة 2022 الأولى 60 درجة:

جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي $w = -3 + 4i$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + 2(1+i)z + i + \frac{3}{4} = 0$

دورة 2022 الثانية 70 درجة:

أجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

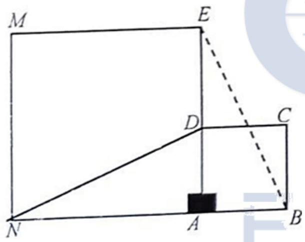
1. جد كل عدد عقدي J يحقق $J^3 = 1$ واكتبه بالشكل الجبري
2. إذا كان β عدداً حقيقياً وكان العدد العقدي $w = \frac{\beta + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\beta}$
   a) أثبت أنّ $|w| = 1$
   b) من أجل $\beta = 1$ أثبت أنّ $w^{12} = 1$
3. عيّن مجموع نقاط المستوي $M(z)$ التي تحقق أنّ $|z - 2 + i| = 5$

دورة 2023 الأولى 70 درجة:

تتأمل النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$b = \frac{1}{2}(-3 + i\sqrt{3})$	$a = -1 + i\sqrt{3}$
$d = 3 + i\sqrt{3}$	$c = 2$

1. اكتب العدد $\frac{a-c}{d-c}$ بالشكل الجبري والأسي واستنتج طبيعة المثلث DCA
2. جد العدد العقدي n الذي يمثل N صورة B وفق تحاك مركزه A ونسبته $k = 2$
3. أثبت أنّ النقطة B هي مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A, 2)$ و $(C, 1)$ و $(D, -1)$



دورة 2023 الثانية 60 درجة:

تأمل الشكل المرسوم جانباً $ABCD$ و $AEMN$ مربعان نختار معلم متجانس مباشر $(A, \vec{u}, \vec{v})$ ولتكن الأعداد العقدية a و b و c و d و e و m و n و s الممثلة للنقاط A و B و C و D و E و M و N و S والمطلوب:

1. أثبت أنّ $d = ib$ و $e = -in$
2. احسب $\frac{e-b}{d-n}$ واكتبهُ بالشكل الأسي واستنتج أنّ $ND = EB$ وأنّ $(EB) \perp (ND)$
3. إذا كانت S صورة D وفق انسحاب شعاعهُ $\overrightarrow{AC}$ اكتب S بدلالة c و d

التنظير سهل، الحَركة أصعب، دَوام الحَركة أشدّ صُعوبة، والثّبات لُبّ المسألة، ولكلّ مقام أهله.. 🤝💙

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

ليكن z عدداً عقدياً ما , وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد أثبت أنّ $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيّلي بحت.

التمرين الثاني:

عين العددين z_1 و z_2 :

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 + 2\sqrt{3}\, i \end{cases}$$

التمرين الثالث:

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 = 1 + 2\sqrt{2}i$

التمرين الرابع:

اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي: $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}$

التمرين الخامس:

ليكن كثير الحدود

$$P(z) = z^4 + 5z^3 + 10z^2 + 10z + 4$$

1. عين عددين a , b يحققان $P(z) = (z^2 + az + a)(z^2 + bz + a)$
2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

التمرين السادس:

اكتب العدد العقدي الآتي بالشكل الأسي.

$$z = (1-\sqrt{2})(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$$

التمرين السابع: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$Z^2 - 2(1+i)z - 4 + 2i = 0$$

التمرين الثامن: جد الجذرين التربيعيين للعدد العقدي

$$\omega = 8 - 6i$$

التمرين التاسع:

لتكن النقطتان A و B اللذان يمثلهما العددان العقديان

$Z_A = -\sqrt{3} + i$	$Z_B = -2i$

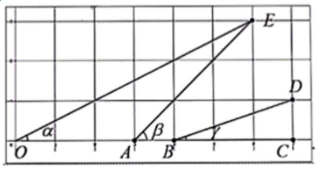
1. اكتب Z_A بالشكل الأسي ثم جد العدد العقدي Z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC
2. أثبت أنّ $Z_C - Z_A = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}(Z_B - Z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين العاشر:

1. جد المجموع $C = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6$ بدلالة α
2. ليكن $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, أثبت أنّ:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^6 = 0$$

التمرين الحادي عشر:



في الشكل المجاور α, β, γ هي القياسات الأساسيّة للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}), (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE})$ بالترتيب

1. اكتب كلّاً من الأعداد العقدية الآتية بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسي $Z_{\overrightarrow{BD}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{OE}}$
2. اكتب العدد العقدي $Z_{\overrightarrow{BD}}$ و $Z_{\overrightarrow{AE}}$ و $Z_{\overrightarrow{OE}}$ بالشكل الجبري ثمّ بالشكل الأسّي.
3. استنتج المجموع $\alpha + \beta + \gamma$

اختبارات الكتاب:

التمرين الأول: حل في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2 - (1+2i)z + 3 + 3i = 0$$

التمرين الثاني: حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية: $z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$

التمرين الثالث:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين:

$z_A = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$	$z_B = \bar{z}_A$

بيّن أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ واستنتج زاوية العدد العقدي z_A ثم استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

التمرين الرابع:

في المستوي المنسوب إلى معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

$z_A = \sqrt{3} + i$	$z_B = \sqrt{3} - i$
$z_C = 3\sqrt{3} + i$	

1. اكتب العدد العقدي $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
2. عيّن (ε) مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ تخيلياً بحتاً.
3. عيّن $(\mathcal{F})$ مجموعة النقاط $M \neq B$ التي تجعل $\frac{z_M - z_C}{z_M - z_B}$ حقيقياً.

التمرين الخامس:

تتأمل النقاط A و B و C و D الممثلة للأعداد العقدية

$b = 2 + i\sqrt{3}$	$a = -1$
$d = 3$	$c = 2 - i\sqrt{3}$

1. ارسم النقاط A و B و C و D ثم احسب AB و BC و AC واستنتج طبيعة المثلث ABC
2. عيّن $\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right)$ واستنتج طبيعة المثلث DAC
3. أثبت أنّ D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, -1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 2)$

فهرس بحث الأعداد العقدية:

١. الأشكال العقدية:

○ الشكل الجبري:
- الشكل: $z = x + iy$
- العمليات عليه:
  * المرافق $\bar{Z}$
  * الطويلة $|Z|$
  * القوة Z^n
  * الجمع $Z_1 + Z_2$
  * الضرب $Z_1.Z_2$
  * ضرب العدد العقدي بمرافقه $Z.\bar{Z}$
  * القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$

○ الشكل المثلثي:
- الشكل: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- شروط الشكل
- العمليات عليه:
  * المرافق $\bar{Z}$
  * الطويلة $|Z|$
  * القوة Z^n
  * الجمع $Z_1 + Z_2$
  * الضرب $Z_1.Z_2$
  * ضرب العدد العقدي بمرافقه $Z.\bar{Z}$
  * القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$

○ الشكل الأسي:
- الشكل: $z = re^{i\theta}$
- شروط الشكل
- العمليات عليه:
  * المرافق $\bar{Z}$
  * الطويلة $|Z|$
  * القوة Z^n
  * الجمع $Z_1 + Z_2$
  * الضرب $Z_1.Z_2$
  * ضرب العدد العقدي بمرافقه $Z.\bar{Z}$
  * القسمة $\frac{Z_1}{Z_2}$

٢. التحويلات بين الأشكال:

(اسأل نفسك شو عندي وشو بدي)
* التحويل من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي أو الأسي
* التحويل من الشكل المثلثي أو الأسي إلى الشكل الجبري

٣. التحويلات المباشرة

٤. حردات الشكل المثلثي وكيفية إرضائه:
* إشارة الـ sin سالبة
* الـ r عدد حقيقي سالب
* إشارة كل من الـ sin والـ cos سالبة
* الـ r يحوي i
* الـ i مع الـ cos
* الزاوية مختلفة
* النسب المثلثية نفسها

ملاحظة:
عند اندماج عدة حردات تكون الأولوية في الإرضاء وفق:
* الـ i رفيقة الـ cos
* الإشارة في المنتصف سالبة
* باقي الحردات.

٥. حردات الشكل الأسي وكيفية إرضائه:
* الـ r عدد حقيقي سالب
* الـ r يحوي i

٦. خفايا التحويلات:
* تحويلات ثم عمليات
* عندما يكون نص السؤال اكتب بالشكل المثلثي أو الأسي ويوجد عامل مشترك فإننا نخرج العامل المشترك أولاً
* عندما يكون نص السؤال اكتب بالشكل المثلثي أو الأسي وكانت الزاوية معلومة من طلب سابق فإننا فقط نوجد الطويلة ونكتب بالشكل المطلوب.

٧. تحديد (استنتاج) النسب المثلثية لزاوية:
* الزاوية شهيرة "جدول النسب المثلثية"
* الزاوية غير شهيرة "إصلاح وإرجاع"
* الزاوية غير شهيرة ولا يمكن إشهارها "نستخدم القوانين: $\cos\theta = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r}$ بحيث نأخذ الـ x والـ y من الشكل الجبري ونأخذ الـ r من الشكل المثلثي أو الأسي"

٨. قانون أويلر

٩. طويلة عدد عقدي:
* الرمز
* القانون
* الخواص

١٠. زاوية عدد عقدي:
* الرمز
* الخواص

١١. مرافق عدد عقدي:
* أثبت صحة العلاقة
* أثبت أن Z حقيقي
* أثبت أن Z تخيلي بحت

١٢. معادلات في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$:

○ أنواع المعادلات:
* المعادلات من الدرجة الأولى
* الجداء الصفري
* المعادلات التي تحوي $\bar{Z}$ فقط
* المعادلات التي تحوي $\bar{Z}$ و Z
* المعادلات من الدرجة الثانية:
  - تحوي Z^2 و Z فقط
  - تحوي Z^2 وعدد w :
    w لا يحوي i
    w يحوي i
  - تحوي Z^2 و Z وعدد:
    Δ يحوي i
    Δ لا يحوي i
* المعادلات من الدرجة الثالثة وما فوق
* جملة معادلتين تحوي Z_1 و Z_2
* الجذور من المرتبة n

○ تطبيقات المعادلات:
* إثبات حل
* استنتاج حل
* حل معادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً
* حل معادلة تقبل حلاً حقيقياً
* تحديد ثوابت

فهرس بحث تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

١. القسم الأول:
* العدد العقدي الممثل لنقطة
* العدد العقدي الممثل بشعاع
* العدد العقدي الممثل لنقطة منتصف القطعة المستقيمة
* العدد العقدي الممثل لنقطة مركز ثقل المثلث (نقطة تلاقي المتوسطات)
* العدد العقدي الممثل لنقطة مركز الأبعاد المتناسبة
* متوازي الأضلاع
* المسافة بين نقطتين
* تطبيقات المسافة:
* تحديد نوع المثلث
* انتماء نقطة إلى دائرة
* انتماء نقطة إلى محور قطعة مستقيمة

٢. القسم الثاني (النسبة الذهبية w):
* إثبات توازي مستقيمين
* إثبات تعامد مستقيمين
* إثبات وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة
* إثبات صحة علاقة تحوي أطوال أضلاع
* نسبة واستنتاج
* إثبات الأشكال:
  - المعين
  - المستطيل
  - المربع

شيفرة الـ 600

الجزء الثاني

٣. القسم الثالث (الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية):

التحويلات:

- الانسحاب
- التحاكي
- الدوران
- التناظر المحوري:
  - الذي محوره Ox
  - الذي محوره Oy
- التناظر المركزي:
  - الذي مركزه المبدأ O
  - الذي مركزه Ω

أنماط التمارين:

- ايجاد Z جديد
- تعين طبيعة التحويل

٤. القسم الرابع:

(أسلوب تسميع الكلام والشاطر يفهم):

- أولاً: كلمة ومعنى
- ثانياً: التحويل الهندسي والشكل الموافق
- ثالثاً: لأشكال ومعانيها (قراءة شكل):
  - المثلث متساوي لأضلاع
  - المثلث القائم ومتساوي الساقين
  - المثلث متساوي الساقين
  - المربع
  - متوازي لأضلاع وأولاده

٥. مجموعات النقاط:

لم تكن تجارُب فاشلة .. لولا ما مَضى ؛ ما كنتُ هُنا !
تِلك الطّرُق التي وقفتُ في مُنتصفها .. وذاكَ التردد الحائر ؛ علّمني صِناعة البَوصلة !
الذّكريات التي ألمِسها الآن بِسعادةٍ بعد أن نجوت ..الخُذلان الذي أوقد في داخلي قُوة التخلي .. الزهور التي قَطفتُها بعد أن تجذّرتْ في عُمري
حقائق الفَهم ؛ لا أوهامُ الخيال ..الأصوات التي عاتبتني ؛ أو رُبما آذتني .. بها تجاوزتُ عجزي !
اليوم ..أرخيتُ قَبضة يدي ، ولم أعُد أتشبّث بشيءٍ ؛ سوى سَلام روحي الذي قاتلتُ لأجلهِ طويلاً ! اليوم أنا هُنا .. و لديّ القُدرة أن أبتسمَ لكلّ الأيام الثّقيلة .. فقد مَنحتني انتصاراتٍ عَديدة ..مَنحتني ما أنا عليه هُنا !الِلّهِ الحَمد على يَده التي ساقَتني في كُل تلك الطّرُق ..
و اليوم أدركتُ تماماً ؛ أنها يَدٌ رَحيمة ! 💙

شيفرة الـ 600 في التحليل التوافقي

أولاً: الحسابات:

أولاً: العاملي:

الرمز	!	
القوانين	القانون	مثال
	القانون الأول: قانون الفك: هو ضرب تنازلي وصولاً إلى الواحد.	* $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ * $n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1$ * $(2n+1)! = (2n+1)(2n)(2n-1)\dots \times 2 \times 1$
	القانون الثاني: قانون التخفيض: هو ضرب تنازلي وعند الوقوف عند حد مختلف عن الواحد نضع الرمز !	* $5! = 5 \times 4 \times 3!$ * $7! = 7 \times 6 \times 5!$ * $n! = n(n-1)(n-2)!$ * $(2n+1)! = (2n+1)(2n)(2n-1)!$
	القانون الثالث: قانون اللم: (الحد الكبير)! = (حد يسبقه)! × (حد)	* $5 \times 4! = 5!$ * $n(n-1)! = n!$ * $(2n+1)(2n)! = (2n+1)!$ * $n!\,(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$
أنماط التمارين	النمط	فكرة الحل
	النمط الأول: الحساب	نطبق القانون المناسب.
	النمط الثاني: الاختزال	* نطبق القانون المناسب * نجري العمليات الحسابية المناسبة.

التمرين الأول:

احسب المقادير الآتية:

1. $2! = (2)(1) = 2$
2. $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$
3. $7! = (7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 5040$
4. $15! = (15)(14)(13)(12)\dots(3)(2)(1)$
   = الناتج مرة مرة كبير
5. $12! = (12)(11)(10)(9)\dots(3)(2)(1)$
   $= 479001600$
6. $10! = (10)(9)(8)(7)\dots(3)(2)(1)$
   $= 3628800$

التمرين الثاني:

اختزل المقادير الآتية:

1. $\dfrac{21!}{20!}$	2. $\dfrac{17!}{15!}$
3. $\dfrac{6!-5!}{5!}$	4. $\dfrac{6!\times4!}{5!}$
5. $\dfrac{7!\times5!}{10!}$	6. $\dfrac{1}{5!}-\dfrac{42}{7!}$
7. $\dfrac{6!}{(3!)^2}$	8. $\dfrac{9!}{5!\times4!}$
9. $\dfrac{9!}{6!\times3!}$	10. $\dfrac{6!+7!}{2!3!4!}$
11. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$	12. $\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
13. $\dfrac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$	14. $\dfrac{(n-1)!}{n!}-\dfrac{n!}{(n+1)!}$
15. $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$	16. $\dfrac{(2n)!}{1\times3\times5\times\dots(2n-1)}$

الحل:

١.
$$\frac{21!}{20!} = \frac{(21)(20)!}{(20)!} = 21$$

٢.
$$\frac{17!}{15!} = \frac{(17)(16)(15)!}{15!} = (17)(16) = 272$$

٣.
$$\frac{6!-5!}{5!} = \frac{(6)(5)!-5!}{5!} = \frac{5!\,(6-1)}{5!} = 6-1 = 5$$

٤.
$$\frac{6!\times4!}{5!} = \frac{6(5!)\times4!}{5!} = 6\times(4)(3)(2)(1) = 144$$

٥.
$$\frac{7!\times5!}{10!} = \frac{7!\times5!}{(10)(9)(8)(7)!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(10)(9)(8)} = \frac{1}{6}$$

٦.
$$\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!} = \frac{1}{5!}-\frac{42}{(7)(6)(5)!} = \frac{1}{5!}-\frac{1}{5!} = 0$$

٧.
$$\frac{6!}{(3!)^2} = \frac{(6)(5)(4)(3)!}{(3!)^2} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$$

٨.
$$\frac{9!}{5!\times4!} = \frac{(9)(8)(7)(6)(5)!}{5!\times4!} = \frac{(9)(8)(7)(6)}{(4)(3)(2)(1)} = 126$$

٩.
$$\frac{9!}{6!\times3!} = \frac{(9)(8)(7)(6)!}{6!\times3!} = \frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)} = 84$$

.١٠

$$\frac{6!+7!}{2!\times 3!\times 4!}=\frac{6!}{2!\times 3!\times 4!}+\frac{7!}{2!\times 3!\times 4!}$$
$$=\frac{(6)(5)(4)!}{2!\times 3!\times 4!}+\frac{(7)(6)(5)(4)!}{2!\times 3!\times 4!}$$
$$=\frac{(6)(5)}{(2)(1)\times(3)(2)(1)}+\frac{(7)(6)(5)}{(2)(1)\times(3)(2)(1)}$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{35}{2}=\frac{40}{2}=20$$

.١١

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}$$
$$=(n+1)(n)=n^2+n$$

.١٢

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}$$
$$=(2n+1)(2n)=4n^2+2n$$

.١٣

$$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n)!-(n-1)!}$$
$$=\frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2(n)(n-1)!-(n-1)!}$$
$$=\frac{(2n-1)!\,(2n-1)}{(n-1)!\,(2n-1)}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-2)\dots(n)(n-1)!}{(n-1)!}$$
$$=(2n-1)(2n-2)\dots(n)$$

.١٤

$$\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$$
$$=\frac{(n-1)!}{(n)(n-1)!}-\frac{n!}{(n+1)(n)!}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}$$

.١٥

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n+1-1}{(n+1)!}$$
$$=\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)(n)(n-1)!}$$
$$=\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

.١٦

$$\frac{(2n)!}{1\times 3\times 5\times \dots(2n-1)}$$
$$=\frac{((2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(5)(4)(3)(2)(1))}{1\times 3\times 5\times\dots(2n-1)}$$

نلاحظ أنّ البسط عبارة عن أعداد زوجية وأعداد فردية بينما المقام هو فقط أعداد فرديّة لذلك نختصر الأعداد الفردية من البسط مع الأعداد الفردية من المقام ومنهُ نجد أنّ:

$$=(2n)(2n-2)(2n-4)\dots(4)(2)$$
$$=2(n)\times 2(n-1)\times 2(n-2)\dots\times 2(2)\times 2(1)$$
$$=2\times 2\times\dots 2\times 2\times(n)(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$
$$=2^n\times n!$$

ثانياً: التراتيب:

الرمز	P_n^r حيث n : العدد الكلي (الكبير) و r : العدد الجزئي (الصغير) أيّ أنّ $1\le r\le n$	
القوانين	**القانون**	**مثال**
	القانون الأول: $P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$ **تعميم:** $P_{\text{كبير}}^{\text{صغير}}=\frac{(\text{كبير})!}{(\text{كبير}-\text{صغير})!}$	⁕ $P_7^5=\frac{7!}{(7-5)!}=\frac{7!}{2!}=\frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)!}{(2)!}=2520$ ⁕ $P_n^3=\frac{n!}{(n-3)!}=\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}=n^3-3n^2+2n$
	القانون الثاني: $P_n^r=n(n-1)\dots(n-r+1)$ ندرج العدد الكلي (الكبير) بعدد مرات العدد الجزئي (الصغير) أيّ أنّ عدد الحدود من قيمة العدد الصغير r **تنبيه:** في هذا القانون نحدد حد البدء (الكبير) وحد التوقف (الكبير) ناقص الصغير زائد واحد) ثم نملأ م بينهما.	⁕ $P_5^3=(5)(4)(3)=60$ ⁕ $P_7^2=(7)(6)=42$ ⁕ $P_n^3=(n)(n-1)(n-2)=n^3-3n^2+2n$

خليك فاهم إنو المتعشم في الله ح يكون دايماً في الأخر مجبور.. 💙

أنماط التمارين	النمط	فكرة الحل
	النمط الأول: الحساب	نطبق القانون المناسب.
	النمط الثاني: تعيين قيمة n (حل المعادلة)	* تحديد شرط الحل * نطبق القانون المناسب * نصلح للوصول إلى معادلة بالمجهول n * نحل هذه المعادلة * نحدد الحلول المقبولة والمرفوضة

التمرين الأول:

احسب المقادير الآتية:

1. P_2^1	2. P_9^3	3. P_7^5
4. $P_5^2 \times P_3^1$	5. P_5^2/P_4^2	

الحل:

1. $P_2^1 = 2$
2. $P_9^3 = (9)(8)(7) = 504$
3. $P_7^5 = (7)(6)(5)(4)(3) = 2520$
4. $P_5^2 \times P_3^1 = (5)(4) \times (3) = 60$
5. $\frac{P_5^2}{P_4^2} = \frac{(5)(4)}{(4)(3)} = \frac{5}{3}$

التمرين الثاني:

عيّن قيمة n في كل من الحالات الآتية:

1. $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$	2. $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$
3. $P_n^4 = 10P_{n-1}^3$	4. $P_n^6 = 12P_{n-1}^5$
5. $P_{n+1}^3 = 2P_{n+2}^2$	6. $2P_n^2 + 50 = 2P_{2n}^2$
7. $P_n^4 = 42P_n^2$	

الحل:

.1

$$P_{n+2}^4 = 14P_n^3$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

* P_{n+2}^4 معرّف بشرط: $n+2 \geq 4$ ومنهُ: $n \geq 2$
* P_n^3 معرف بشرط: $n \geq 3$ ومنهُ: $n \geq 3$
* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 3$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)$$
$$= 14(n)(n-1)(n-2)$$
$$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$$
$$n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$$
$$n^2 - 11n + 30 = 0$$
$$(n-6)(n-5) = 0$$

إما $n = 6 \rightarrow$ مقبول

أو $n = 5 \rightarrow$ مقبول

.٢

$$P_n^5 = 18P_{n-2}^4$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

* P_n^5 معرّف بشرط: $n \geq 5$ ومنهُ: $n \geq 5$
* P_{n-2}^4 معرف بشرط: $n-2 \geq 4$ ومنهُ: $n \geq 6$
* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 6$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$= 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$n(n-1) = 18(n-5)$$
$$n^2 - n = 18n - 90$$
$$n^2 - 19n + 90 = 0$$
$$(n-10)(n-9) = 0$$

إما $n = 10 \rightarrow$ مقبول

أو $n = 9 \rightarrow$ مقبول

.٣

$$P_n^4 = 10P_{n-1}^3$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

* P_n^4 معرّف بشرط: $n \geq 4$ ومنهُ: $n \geq 4$
* P_{n-1}^3 معرف بشرط: $n-1 \geq 3$ ومنهُ: $n \geq 4$
* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 4$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$= 10(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$n = 10 \rightarrow \text{مقبول}$$

.٤

$$P_n^6 = 12P_{n-1}^5$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

* P_n^6 معرّف بشرط: $n \geq 6$ ومنهُ: $n \geq 6$
* P_{n-1}^5 معرف بشرط: $n-1 \geq 5$ ومنهُ: $n \geq 6$
* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 6$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$= 12(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$
$$n = 12 \rightarrow \text{مقبول}$$

٥.

$$P^3_{n+1} = 2P^2_{n+2}$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

- P^3_{n+1} معرّف بشرط: $n+1 \geq 3$ ومنهُ: $n \geq 2$
- P^2_{n+2} معرف بشرط: $n+2 \geq 2$ ومنهُ: $n \geq 0$
- ومنهُ شرط الحل: $n \geq 2$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$(n+1)(n)(n-1) = 2(n+2)(n+1)$$
$$n^2 - n = 2n + 4$$
$$n^2 - 3n - 4 = 0$$
$$(n-4)(n+1) = 0$$

إما $n = 4 \rightarrow$ مقبول

أو $n = -1 \rightarrow$ مرفوض

٦.

$$2P^2_n + 50 = P^2_{2n}$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

- P^2_n معرّف بشرط: $n \geq 2$ ومنهُ: $n \geq 2$
- P^2_{2n} معرف بشرط: $2n \geq 2$ ومنهُ: $n \geq 1$
- ومنهُ شرط الحل: $n \geq 2$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$2(n)(n-1) + 50 = 2n(2n-1)$$
$$2(n^2 - n) + 50 = 4n^2 - 2n$$
$$2n^2 - 2n + 50 = 4n^2 - 2n$$
$$4n^2 - 2n^2 = 50$$
$$2n^2 = 50 \rightarrow n^2 = 25$$

إما $n = 5 \rightarrow$ مقبول

أو $n = -5 \rightarrow$ مرفوض

٧.

$$P^4_n = 42P^2_n$$

الخطوة الأولى: إيجاد شرط الحل وفق:

- P^4_n معرّف بشرط: $n \geq 4$ ومنهُ: $n \geq 4$
- P^2_n معرف بشرط: $n \geq 2$ ومنهُ: $n \geq 2$
- ومنهُ شرط الحل: $n \geq 4$

الخطوة الثانية: نحل المعادلة لتحديد قيمة n وفق:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$= 42(n)(n-1)$$
$$(n-2)(n-3) = 42$$
$$n^2 - 5n + 6 = 42$$
$$n^2 - 5n - 36 = 0$$
$$(n-9)(n+4) = 0$$

إما $n = 9 \rightarrow$ مقبول

أو $n = -4 \rightarrow$ مرفوض

ثالثاً: التوافيق:

الرمز	$\binom{n}{r}$ حيث n : العدد الكلي (الكبير) و r : العدد الجزئي (الصغير) أيّ أنَّ: $0 \le r \le n$		
القوانين	**القانون**	**الاستخدام**	**مثال**
	القانون الأول: الحساب $\binom{n}{r} = \frac{P^r_n}{r!}$	يُستخدم عندما يكون الصغير معلوم	⁕ $\binom{5}{2} = \frac{P^2_5}{2!} = \frac{(5)(4)}{(2)(1)} = \frac{20}{2} = 10$ ⁕ $\binom{n-1}{3} = \frac{P^3_{n-1}}{3!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(3)(2)(1)}$
	القانون الثاني: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ تعميم: $\binom{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{صغير})!\,(\text{كبير} - \text{صغير})!}$	يُستخدم عندما يكون الصغير مجهول	⁕ $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!\times4!} = \frac{(7)(6)(5)(4)!}{(3)(2)(1)\ (4)!} = 35$ ⁕ $\binom{n+1}{n-r} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!(1+r)!}$

كل ما أخرج من امتحان بحس إني عايزة أعيط، ببص للسما وبفتكر إن المؤمن أمرهُ كلهُ خير وإن كل المتاعب أجور عند الله، وربنا مش بيضيع تعب حد أبداً وأمشي .. 🙁💙💙💙💙

الخواص	الخاصة الأولى: تبسيط الحساب: $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ تعميم: $\binom{\text{كبير}}{\text{صغير}}=\binom{\text{كبير}}{\text{كبير}-\text{صغير}}$ مثلاً: * $\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{P_8^3}{3!}=\frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)}=56$ * $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=\frac{P_7^3}{3!}=\frac{(7)(6)(5)}{(3)(2)(1)}=35$ الخاصة الثانية: تفيد في حل المعادلات (تعيين قيمة n) $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تكافئ: إما $p=q$ أو $p+q=n$ مثلاً: $\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$ إما $3n=n+2\rightarrow 2n=2\rightarrow n=1$ أو $3n+n+2=10\rightarrow n=2$		
نتائج مباشرة	النتيجة	مثال	
	$\binom{n}{n}=1$	$\binom{7}{7}=1$	
	$\binom{n}{1}=n$	$\binom{7}{1}=7$	
	$\binom{n}{0}=1$	$\binom{7}{0}=1$	
ملاحظة	لإيجاد التقاطع في شرط الحل نميز الحالتين: ☝ الحالة الأولى: إذا كانت الشروط جميعها أكبر أو يساوي فإنّ التقاطع يكون أكبر أو يساوي العدد الكبير ✌ الحالة الثانية: إذا كانت الشروط جميعها أصغر أو يساوي فإنّ التقاطع يكون أصغر أو يساوي العدد الصغير		

التمرين الأول:

اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أو كسور غير قابلة للاختزال.

1. $\binom{6}{2}$	2. $\binom{12}{8}$	3. $\frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}$
4. $\frac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}$	5. $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}$	6. $\frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}}$

الحل:

.١

$$\binom{6}{2}=\frac{(6)(5)}{(2)(1)}=\frac{30}{2}=15$$

.٢

$$\binom{12}{8}=\binom{12}{4}$$
$$=\frac{(12)(11)(10)(9)}{(4)(3)(2)(1)}=495$$

.٣

$$\frac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{\frac{(7)(6)}{(2)(1)}}{\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)}}$$
$$=\frac{(7)(6)}{(3)(8)(7)}=\frac{1}{4}$$

.٤

$$\frac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}}$$
$$=\frac{\frac{(5)(4)}{(2)(1)}\times\frac{(6)(5)}{(2)(1)}}{\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)}}=\frac{25}{14}$$

.٥

$$\frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{\frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)}}{\frac{(9)(8)(7)}{(3)(2)(1)}}=\frac{(8)(7)(6)}{(9)(8)(7)}=\frac{2}{3}$$

.٦

$$\frac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}}=\frac{1}{10}$$

التمرين الثاني:

أثبت صحة العلاقات الآتية:

1.	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
2.	$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$
3.	$(n+1)\binom{n}{r-1} = r\binom{n+1}{r}$
4.	$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$

الحل:

.١

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\frac{n!}{r!.(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!.r!}$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

.٢

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

$$l_1 = \frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{\frac{(n+1)!}{(r)!\,(n+1-r)!}}{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(r)!\,(n+1-r)!} . \frac{r!\,(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)(n)!}{(r)!\,(n+1-r)(n-r)!} . \frac{(r)!\,(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{n+1-r} = l_2$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

.٣

$$(n+1)\binom{n}{r-1} = r\binom{n+1}{r}$$

$$l_1 = (n+1)\binom{n}{r-1}$$

$$= (n+1).\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$l_2 = r\binom{n+1}{r} = r.\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$= r.\frac{(n+1)!}{r(r-1)!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

.٤

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

$$l_1 = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r)!\,(n-1-r)!}$$

$$= \frac{(r)(n-1)! + (n-r)(n-1)!}{(r)(r-1)!\,(n-r)(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(r+n-r)}{(r)!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n)}{(r)!\,(n-r)!} = \frac{(n)!}{(r)!\,(n-r)!}$$

$$l_2 = \binom{n}{r} = \frac{(n)!}{(r)!\,(n-r)!}$$

$$l_1 = l_2 \rightarrow \text{محققة}$$

التمرين الثالث:

عين قيم n التي تحقق العلاقات الآتية:

1.	$\binom{n}{2} = 36$
2.	$2\binom{n}{2} = 72$
3.	$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$
4.	$2\binom{n+3}{2} = 3\binom{n+2}{3}$

الحل:

.١

$$\binom{n}{2} = 36$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط: $n \geq 2$
* ومنهُ شرط الحل $n \geq 2$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

$$\frac{(n)(n-1)}{(2)(1)} = 36$$

$$n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

إما $n = 9 \rightarrow$ مقبول

أو $n = -8 \rightarrow$ مرفوض

.٢

$$2\binom{n}{2} = 72$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط: $n \geq 2$
* ومنهُ شرط الحل $n \geq 2$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

التمرين الرابع:

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

1. $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$	2. $\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$

الحل:

١.

$$\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* $\binom{10}{3n}$ معرف بشرط: $10 \geq 3n$ ومنهُ $3n \leq 10$ ومنهُ $n \leq \frac{10}{3}$ ولكن انتبه أنّ n قيمة طبيعية لذلك يصبح شرط تعريف $\binom{10}{3n}$ هو $n \leq 3$

* $\binom{10}{n+2}$ معرف بشرط: $10 \geq n+2$ ومنهُ $n \leq 8$

* ومنهُ شرط الحل: $n \leq 3$.

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

إما $3n = n + 2 \to n = 1 \to$ مقبول

أو $3n + n + 2 = 10 \to n = 2 \to$ مقبول

٢.

$$\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* $\binom{15}{2n}$ معرف بشرط: $15 \geq 2n$ ومنهُ $2n \leq 15$ ومنهُ $n \leq \frac{15}{2}$ ولكن انتبه أنّ n قيمة طبيعية لذلك يصبح شرط تعريف $\binom{15}{2n}$ هو $n \leq 7$

* $\binom{15}{n+3}$ معرف بشرط: $15 \geq n+3$ ومنهُ $n + 3 \leq 15$ ومنهُ $n \leq 12$

* ومنهُ شرط الحل: $n \leq 7$.

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

إما $2n = n + 3 \to n = 3 \to$ مقبول

أو $2n + n + 3 = 15 \to n = 4 \to$ مقبول

التمرين الخامس:

عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

1. $P_n^3 = 6\binom{n}{4}$	2. $P_{n+3}^3 = 16\binom{n+2}{2}$

الحل:

١.

$$P_n^3 = 6\binom{n}{4}$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* P_n^3 معرف بشرط $n \geq 3$

* $\binom{n}{4}$ معرف بشرط $n \geq 4$

* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 4$

$$2.\frac{(n)(n-1)}{(2)(1)} = 72$$

$$n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

إما $n = 9 \to$ مقبول

أو $n = -8 \to$ مرفوض

٣.

$$3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* $\binom{n}{4}$ معرف بشرط: $n \geq 4$ ومنهُ $n \geq 4$

* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط: $n \geq 2$ ومنهُ $n \geq 2$

* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 4$.

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

$$3.\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{14((n)(n-1))}{(2)(1)}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{4} = 14$$

$$n^2 - 5n + 6 = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

إما $n = 10 \to$ مقبول

أو $n = -5 \to$ مرفوض

٤.

$$2\binom{n+3}{2} = 3\binom{n+2}{3}$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل.

* $\binom{n+3}{2}$ معرف بشرط: $n + 3 \geq 2$ ومنهُ $n \geq -1$ ولكن انتبه أنّ n قيمة طبيعية لذلك يصبح شرط تعريف $\binom{n+3}{2}$ هو $n \geq 0$

* $\binom{n+2}{3}$ معرف بشرط: $n + 2 \geq 3$ ومنهُ $n \geq 1$

* ومنهُ شرط الحل: $n \geq 1$.

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

$$2.\frac{(n+3)(n+2)}{(2)(1)} = 3.\frac{(n+2)(n+1)(n)}{(3)(2)(1)}$$

$$2(n+3) = (n+1)(n)$$

$$2n + 6 = n^2 + n$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0$$

إما $n = 3 \to$ مقبول

أو $n = -2 \to$ مرفوض

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

$$(n)(n-1)(n-2)=6.\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)(1)}$$

$$1=\frac{(n-3)}{4}\rightarrow 4=n-3$$

$n=7\rightarrow$ مقبول

٢.

$$P_{n+3}^{3}=16\binom{n+2}{2}$$

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل:

* P_{n+3}^{3} معرف بشرط $n\geq 0$
* $\binom{n+2}{2}$ معرف بشرط $n\geq 0$
* ومنهُ شرط الحل: $n\geq 0$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة n وفق:

$$(n+3)(n+2)(n+1)=16.\frac{(n+2)(n+1)}{(2)(1)}$$

$n+3=8\rightarrow n=5\rightarrow$ مقبول

التمرين السادس:

احسب قيمة r إذا علمت أنّ:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$

الحل:

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل:

* $\binom{4}{r}$ معرف بشرط $r\leq 4$
* $\binom{5}{r}$ معرف بشرط $r\leq 5$
* $\binom{6}{r}$ معرف بشرط $r\leq 6$
* ومنهُ شرط الحل: $r\leq 4$

الخطوة الثانية: إيجاد قيمة r وفق:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}}=\frac{1}{\binom{5}{r}}+\frac{1}{\binom{6}{r}}$$

$$\frac{1}{\frac{4!}{(r)!\,(4-r)!}}=\frac{1}{\frac{5!}{(r)!\,(5-r)!}}+\frac{1}{\frac{6!}{(r)!\,(6-r)!}}$$

$$\frac{(r)!\,(4-r)!}{4!}=\frac{(r)!\,(5-r)!}{5!}+\frac{(r)!\,(6-r)!}{6!}$$

$$\frac{(r)!\,(4-r)!}{4!}=\frac{(r)!\,(5-r)(4-r)!}{(5)(4)!}+\frac{(r)!\,(6-r)(5-r)(4-r)!}{(6)(5)(4)!}$$

$$\frac{(r)!\,(4-r)!}{4!}=\frac{(r)!\,(4-r)!}{4!}\left[\frac{5-r}{5}+\frac{(6-r)(5-r)}{(5)(6)}\right]$$

$$1=\frac{30-6r+30-6r-5r+r^2}{30}$$

$$30=60-17r+r^2$$

$$r^2-17r+30=0$$

$$(r-15)(r-2)=0$$

إما $r=15\rightarrow$ مرفوض

أو $r=2\rightarrow$ مقبول

التمرين السابع:

أوجد مجموعة حلول المتراجحة الآتية:

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n+1}{1}}-\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{2}}>\frac{1}{8}$$

الحل:

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل:

* $\binom{n}{1}$ معرف بشرط $n\geq 1$
* $\binom{n}{2}$ معرف بشرط $n\geq 2$
* $\binom{n+1}{2}$ معرف بشرط $n\geq 1$
* $\binom{n+1}{1}$ معرف بشرط $n\geq 0$
* ومنهُ شرط الحل: $n\geq 2$

الخطوة الثانية: إيجاد حلول المتراجحة وفق:

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n+1}{1}}-\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+1}{2}}>\frac{1}{8}$$

$$\frac{n}{n+1}-\frac{\frac{n(n-1)}{(2)(1)}}{\frac{(n+1)(n)}{(2)(1)}}>\frac{1}{8}$$

$$\frac{n}{n+1}-\frac{(n)(n-1)}{(n+1)(n)}>\frac{1}{8}$$

$$\frac{n}{n+1}-\frac{(n-1)}{n+1}>\frac{1}{8}$$

$$\frac{n-n+1}{n+1}>\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{n+1}>\frac{1}{8}$$

$$n+1<8$$

$$n<7$$

ومنهُ حلول المتراجحة.

$[2,3,4,5,6]$

التمرين الثامن:

احسب قيمة كل من n و r :

$$2\binom{n+1}{r+1}=5\binom{n+1}{r}$$

و

$$3\binom{n}{r}=8\binom{n}{r-1}$$

الحل:

الخطوة الأولى: تحديد شرط الحل:

شرط الحل هو $n \geq r$.

لدينا من جهة أولى:

$$2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$

$$2.\frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = 5.\frac{(n+1)!}{(r)!\,(n+1-r)!}$$

$$\frac{2}{(r+1)(r!)(n-r)!} = \frac{5}{(r)!\,(n+1-r)(n-r)!}$$

$$\frac{2}{r+1} = \frac{5}{n+1-r}$$

$$2n+2-2r = 5r+5$$

$$2n-7r-3 = 0 \ldots (1)$$

ولدينا من جهة ثانية:

$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1}$$

$$3.\frac{(n!)}{(r)!\,(n-r)!} = 8.\frac{(n)!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\frac{3}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{8}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1}$$

$$3n-3r+3 = 8r$$

$$3n-11r+3 = 0 \ldots (2)$$

حصلنا على جملة معادلتين بمجهولين:

$$\begin{cases} 2n-7r-3 = 0 \ldots (1) \\ 3n-11r+3 = 0 \ldots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ (3) والمعادلة الثانية بـ (-2)

$$\begin{cases} 6n-21r-9 = 0 \ldots (1)' \\ -6n+22r-6 = 0 \ldots (2)' \end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و $(2)'$ نجد أنّ:

$$r-15 = 0$$

$$r = 15$$

نعوض في (1) وفق:

$$2n-105-3 = 0$$

$$2n = 108$$

$$n = 54$$

رابعاً: منشور ذو الحدين:

القوانين	$(a+b)^n = \binom{n}{0}(a)^n(b)^0 + \binom{n}{1}(a)^{n-1}(b)^1 + \binom{n}{2}(a)^{n-2}(b)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(a)^0(b)^n$ $(a-b)^n = (a+(-b))^n = \binom{n}{0}(a)^n(-b)^0 + \binom{n}{1}(a)^{n-1}(-b)^1 + \binom{n}{2}(a)^{n-2}(-b)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(a)^0(-b)^n$	
أنماط التمارين	النمط	فكرة الحل
	النمط الأول: النشر والاختزال	نطبق القانون فوراً
	النمط الثاني: تعيين حد	※ نحدد a و b و n ※ نكتب القانون: $T_r = \binom{n}{r}(a)^{n-r}.(b)^r$ ※ نصلح (باستخدام خواص القوى) ※ بالاعتماد على نص السؤال نضع علاقة فنحصل على معادلة بالمجهول r وبحلها نحصل على المطلوب ☜ ملاحظة: ○ الحد المستقل عن x يعني x^0 ○ الحد الثابت يعني x^0 ○ الحد $\frac{1}{x^2}$ يعني x^{-2} ○ وهكذا...

التمرين الأول: انشر كلاً من العبارات الآتية:

1. $(2+x)^4$	2. $(1-x)^5$	3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$	4. $(1+2i)^3$

الحل:

$$(2+x)^4$$

$$= \binom{4}{0}(2)^4(x)^0 + \binom{4}{1}(2)^3(x)^1 + \binom{4}{2}(2)^2(x)^2 + \binom{4}{3}(2)^1(x)^3 + \binom{4}{4}(2)^0(x)^4$$

$$= (1)(16)(1) + (4)(8)(x) + (6)(4)(x^2) + (4)(2)(x^3) + (1)(1)(x^4)$$

$$= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

$$(1-x)^5=\big(1+(-x)\big)^5$$
$$=\binom{5}{0}(1)^5(-x)^0+\binom{5}{1}(1)^4(-x)^1+\binom{5}{2}(1)^3(-x)^2+\binom{5}{3}(1)^2(-x)^3+\binom{5}{4}(1)^1(-x)^4+\binom{5}{5}(1)^0(-x)^5$$
$$=(1)(1)(1)+(5)(1)(-x)+(10)(1)(x^2)+(10)(1)(-x^3)+(5)(1)(x^4)+(1)(1)(-x^5)$$
$$=-x^5+5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$$
$$=\binom{4}{0}(x)^4\left(\frac{1}{x}\right)^0+\binom{4}{1}(x)^3\left(\frac{1}{x}\right)^1+\binom{4}{2}(x)^2\left(\frac{1}{x}\right)^2+\binom{4}{3}(x)^1\left(\frac{1}{x}\right)^3+\binom{4}{4}(x)^0\left(\frac{1}{x}\right)^4$$
$$=(1)(x^4)(1)+(4)(x^3)\left(\frac{1}{x}\right)+(6)(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)+(4)(x)\left(\frac{1}{x^3}\right)+(1)(1)\left(\frac{1}{x^4}\right)$$
$$=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$

$$(1+2i)^3$$
$$=\binom{3}{0}(1)^3(2i)^0+\binom{3}{1}(1)^2(2i)^1+\binom{3}{2}(1)^1(2i)^2+\binom{3}{3}(1)^0(2i)^3$$
$$=(1)(1)(1)+(3)(1)(2i)+(3)(1)(-4)+(1)(1)(-8i)$$
$$=1+6i-12-8i=-11-2i$$

التمرين الثاني:

عين في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x .

الحل:

$$a=x\quad,\quad b=\frac{1}{x}\quad,\quad n=10$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{10}{r}.(x)^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$T_r=\binom{10}{r}.x^{10-r}.x^{-r}$$
$$T_r=\binom{10}{r}.x^{10-2r}$$

يظهر الحد الذي يحوي x^2 إذا تحقق:

$$10-2r=2\rightarrow r=4$$

ومنهُ:

$$T_4=\binom{10}{4}.x^2$$
$$=\frac{(10)(9)(8)(7)}{(4)(3)(2)(1)}.x^2=210.x^2$$

يظهر الحد الثابت إذا تحقق:

$$10-2r=0\rightarrow r=5$$

ومنهُ:

$$T_5=\binom{10}{5}x^0=\frac{(10)(9)(8)(7)(6)}{(5)(4)(3)(2)(1)}=252$$

التمرين الثالث:

ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$

الحل:

$$a=\frac{y^2}{x}\quad,\quad b=\frac{x}{y}\quad,\quad n=8$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{8}{r}.\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r$$
$$T_r=\binom{8}{r}.\left(\frac{y^{16-2r}}{x^{8-r}}\right).\left(\frac{x^r}{y^r}\right)$$
$$T_r=\binom{8}{r}.y^{16-2r}x^{-8+r}.x^r.y^{-r}$$
$$T_r=\binom{8}{r}.y^{16-3r}.x^{2r-8}$$

يظهر الحد $x^2.y$ إذا تحقق:

الطريقة الأولى:

$$2r-8=2\rightarrow r=5$$

ومنهُ:

$$T_5=\binom{8}{5}.x^2.y$$
$$T_5=\binom{8}{3}.x^2.y$$
$$=\frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)}.x^2.y$$
$$=56.x^2y$$

إذاً أمثال x^2y هي 56

الطريقة الثانية:

$$16-3r=1$$
$$3r=15$$
$$r=5$$
$$T_5=56.x^2y$$

التمرين الرابع:

احسب أمثال x^3 في منشور $(2+3x)^{15}$

الحل:

$$a=2\quad,\quad b=3x\quad,\quad n=15$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{15}{r}.(2)^{15-r}(3x)^r$$

يظهر الحد x^3 عندما $r=3$

ومنهُ:

$$T_3=\binom{15}{3}(2)^{12}.(3x)^3$$
$$=\binom{15}{3}(4096)(27)x^3$$
$$=\frac{(15)(14)(13)}{(3)(2)(1)}(110592)x^3$$
$$=50319360.x^3$$

التمرين الخامس:

في منشور $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^6$ عين الحد الثابت المستقل عن x

الحل:

$$a=x\quad,\quad b=-\frac{1}{x^2}\quad,\quad n=6$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{6}{r}.(x)^{6-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$$
$$T_r=\binom{6}{r}.x^{6-r}.x^{-2r}.(-1)^r$$
$$T_r=\binom{6}{r}.(-1)^r.x^{6-3r}$$

يظهر الحد المستقل عن x عندما:

$$6-3r=0\rightarrow r=2$$
$$T_2=\binom{6}{2}(-1)^2.x^0=\frac{(6)(5)}{(2)(1)}=15$$

التمرين السادس:

في منشور $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

١. عيّن أمثال x^2
٢. عيّن الحد الذي يحوي x^4
٣. عين الحد الثابت المستقل عن x
٤. هل يوجد حد يحوي x^3 بأمثال غير معدومة؟

الحل:

$$a=2x\quad,\quad b=\frac{1}{x}\quad,\quad n=10$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{10}{r}.(2x)^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$
$$T_r=\binom{10}{r}(2)^{10-r}.x^{10-r}.x^{-r}$$
$$T_r=\binom{10}{r}(2)^{10-r}.x^{10-2r}$$

١. تعيين أمثال الحد الذي يحوي x^2 وفق:

$$10-2r=2\rightarrow r=4$$

ومنهُ:

$$T_4=\binom{10}{4}(2)^{10-4}.x^{10-8}$$
$$=\frac{(10)(9)(8)(7)}{(4)(3)(2)(1)}.2^6.x^2$$
$$=13440.x^2$$

إذاً أمثال x^2 هي 13440

٢. تعيين الحد الذي يحوي x^4 :

يظهر الحد x^4 عندما:

$$10-2r=4\rightarrow r=3$$

ومنهُ:

$$T_3=\binom{10}{3}(2)^{10-3}.x^{10-6}$$
$$=\frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)}.2^7.x^4$$
$$=15360.x^4$$

٣. تعيين الحد الثابت المستقل عن x :

يظهر الحد الثابت المستقل عن x عندما:

$$10-2r=0\rightarrow r=5$$

ومنهُ:

$$T_5=\binom{10}{5}(2)^{10-5}.x^{10-10}$$
$$=\frac{(10)(9)(8)(7)(6)}{(5)(4)(3)(2)(1)}.2^5.x^0=8064$$

إذاً الحد المستقل عن x هو 8064

٤. نوجد دليل الحد الذي يحوي x^3 وفق:

$$10-2r=3\rightarrow r=\frac{7}{2}$$

وبما أنّ r ليس عدد طبيعي إذاً لا يمكن وجود حد يحوي x^3 بأمثال غير معدومة.

التمرين السابع:

انشر $(1+x)^5$ واستنتج قيمة المجموع

$$S=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots\binom{5}{5}$$

الحل:

نشر $(1+x)^5$:

$$a=1\ \ ,\ \ b=x\ \ ,\ \ n=5$$

$$(1+x)^5$$
$$=\binom{5}{0}(1)^5(x)^0+\binom{5}{1}(1)^4(x)^1$$
$$+\binom{5}{2}(1)^3(x)^2+\binom{5}{3}(1)^2(x)^3$$
$$+\binom{5}{4}(1)^1(x)^4+\binom{5}{5}(1)^0(x)^5$$
$$=1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

قيمة المجموع:

$$S=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots+\binom{5}{5}$$

عند تعويض $x=1$ في منشور $(1+x)^5$ نجد أنّ:

$$(1+1)^5=2^5=32$$

أيّ أنّ:

$$S=32$$

التمرين الثامن:

انشر $(1+2x)^n$ واستنتج قيمة المجموع:

$$S_n=\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+\cdots+2^r\binom{n}{r}+\cdots 2^n\binom{n}{n}$$

الحل:

استناداً إلى منشور ذو الحدين لدينا:

$$(1+2x)^n=1+\binom{n}{1}(2x)+\cdots\binom{n}{r}(2x)^r+\cdots\binom{n}{n}(2x)^n$$

المجموع S_n المطلوب يوافق الطرف الثاني بعد تعويض $x=1$ ومنهُ:

$$S_n=1+2\binom{n}{1}+\cdots+2^r\binom{n}{r}+\cdots 2^n\binom{n}{n}$$
$$S_n=(1+2)^n=3^n$$

التمرين التاسع:

ما آحاد وعشرات ومئات العدد 11^{11} :

$$11^{11}=(1+10)^{11}$$
$$a=1\ \ ,\ \ b=10\ \ ,\ \ n=11$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{11}{r}.(1)^{11-r}(10)^r$$

الحد الأول: $T_0=\binom{11}{0}(1)^{11}.(10)^0=1$

الحد الثاني: $T_1=\binom{11}{1}(1)^{10}.(10)^1=110$

الحد الثالث: $T_2=\binom{11}{2}(1)^9.(10)^2=5500$

الحد الرابع: $T_3=\binom{11}{3}(1)^8.(10)^3=165000$

ومنهُ باقي الحدود آحادها وعشراتها ومئاتها أصفار وبالتالي بجمع هذه الحدود نجد أنّ الآحاد (1) والعشرات (1) والمئات (6) .

التمرين العاشر:

ليكن كثير الحدود

$$F(x)=(1+ax)^5(1+bx)^4$$

حيث a و b عددان طبيعيان فإذا علمت أنّ أمثال x تساوي 62 فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$:

الحل:

$$(1+ax)^5=\binom{5}{0}+\binom{5}{1}(ax)+\binom{5}{2}(ax)^2$$
$$+\binom{5}{3}(ax)^3+\binom{5}{4}(ax)^4+\binom{5}{5}(ax)^5$$
$$=1+5ax+10a^2x^2+10a^3x^3+5a^4x^4+a^5x^5$$

$$(1+bx)^4=\binom{4}{0}+\binom{4}{1}(bx)$$
$$+\binom{4}{2}(bx)^2+\binom{4}{3}(bx)^3+\binom{4}{4}(bx)^4$$
$$=1+4bx+6b^2x^2+4b^3x^3+b^4x^4$$

بالنشر نجد أنّ أمثال الـ x هي $5a+4b$

لدينا:

$$5a+4b=62$$

من جهة أولى:

$$5a+4b\le 5a+4b+b$$
$$62\le 5a+5b$$
$$62\le 5(a+b)$$
$$\frac{62}{5}\le a+b$$

من جهة ثانية:

$$5a+4b\ge 5a+4b-a$$
$$62\ge 4a+4b$$
$$62\ge 4(a+b)$$
$$\frac{62}{4}\ge a+b$$

إذاً:

$$\frac{62}{5}\le a+b\le\frac{62}{4}$$
$$12.4\le a+b\le 15.5$$

وبما أنّ a و b عددان طبيعيان فإنّ قيم المجموع $a+b$ هي: $a+b\in\{13,14,15\}$

التمرين الحادي عشر:

ليكن A_n العدد المعرف بالصيغة:

$$A_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

1. تحقق أنّ A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان.
2. أثبت أنّ A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n

الحل:

الطلب الأول:

$$A_3=\left(2+\sqrt{3}\right)^3+\left(2-\sqrt{3}\right)^3$$
$$=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$
$$=\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4+4\sqrt{3}+3\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(4-4\sqrt{3}+3\right)$$
$$=8+8\sqrt{3}+6+4\sqrt{3}+12+3\sqrt{3}$$
$$+8-8\sqrt{3}+6-4\sqrt{3}+12-3\sqrt{3}=52$$

$$A_4=\left(2+\sqrt{3}\right)^4+\left(2-\sqrt{3}\right)^4$$
$$=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right)^2+\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^2\right)^2$$
$$=\left(4+4\sqrt{3}+3\right)^2+\left(4-4\sqrt{3}+3\right)^2$$
$$=\left(7+4\sqrt{3}\right)^2+\left(7-4\sqrt{3}\right)^2$$
$$=49+56\sqrt{3}+48+49-56\sqrt{3}+48$$
$= 194 \rightarrow$ طبيعي

الطلب الثاني:

لدينا T_r الحد ذو الدليل r من منشور $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$

$$a=2\ ,\ b=\sqrt{3}\ ,\ n=n$$
$$T_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T_r=\binom{n}{r}(2)^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^r$$

لدينا T'_r الحد ذو الدليل r من منشور $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$

$$a=2\ ,\ b=-\sqrt{3}\ ,\ n=n$$
$$T'_r=\binom{n}{r}.(a)^{n-r}.b^r$$
$$T'_r=\binom{n}{r}(2)^{n-r}\left(-\sqrt{3}\right)^r$$

ويكون:

$$T_r+T'_r$$
$$=\binom{n}{r}(2)^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^r+\binom{n}{r}(2)^{n-r}\left(-\sqrt{3}\right)^r$$
$$=\binom{n}{r}(2)^{n-r}\left[\left(\sqrt{3}\right)^r+\left(-\sqrt{3}\right)^r\right]$$
$$=\binom{n}{r}(2)^{n-r}\left[\left(\sqrt{3}\right)^r+(-1)^r\left(\sqrt{3}\right)^r\right]$$

- لدينا: $\binom{n}{r}(2)^{n-r}$ مقدار طبيعي.
- مناقشة $\left(\sqrt{3}\right)^r+(-1)^r\left(\sqrt{3}\right)^r$ وفق:
  - عندما r يكون زوجي: يكون $\left(\sqrt{3}\right)^r$ طبيعي ويكون $(-1)^r=1$ إذاً $\left(\sqrt{3}\right)^r+(-1)^r\left(\sqrt{3}\right)^r$ يكون طبيعي ومنهُ $T_r+T'_r\in\mathbb{N}$
  - عندما r يكون فردي: يكون: $(-1)^r=-1$ ومنهُ:

وبالتالي: $\left(\sqrt{3}\right)^r+(-1)^r\left(\sqrt{3}\right)^r=0$

$$T_r+T'_r=0$$
$$T_r+T'_r\in\mathbb{N}$$

مما سبق نستنتج أن $T_r+T'_r\in\mathbb{N}$ ولما كان A_n مجموع هذه الحدود إذاً يكون A_n طبيعي (لأن مجموع أعداد طبيعية يكون طبيعي)

التمرين الثاني عشر:

ليكن العدد $A_n=\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n$

والمطلوب:

1. احسب A_0 و A_1 و A_2
2. أثبت أنّ $A_n\in\mathbb{N}$ أياً كان العدد الطبيعي $n\geq 0$

الحل:

الطلب الأول:

$$A_0=1+1=2$$
$$A_1=1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}=2$$
$$A_2=\left(1+\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^2$$
$$=1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5=12$$

الطلب الثاني:

الحد ذو الدليل r في منشور $\left(1+\sqrt{5}\right)^n$:

$$T_r=\binom{n}{r}\left(\sqrt{5}\right)^r$$

الحد ذو الدليل r في منشور $\left(1-\sqrt{5}\right)^n$:

$$T'_r=\binom{n}{r}\left(-\sqrt{5}\right)^r$$

$$T_r+T'_r=\binom{n}{r}5^{\frac{r}{2}}+\binom{n}{r}(-1)^r5^{\frac{r}{2}}$$
$$=\left(1+(-1)^r\right)\binom{n}{r}5^{\frac{r}{2}}$$

مناقشة:

في حالة r عدد زوجي أيّ $r=2k$:

$$T_r+T'_r=(1+1)\binom{n}{2k}5^k=2\binom{n}{2k}5^k\in\mathbb{N}$$

في حالة r عدد فردي أيّ $r=2k+1$ نجد أنّ:

ومنهُ: $1+(-1)^r=0$

$$T_r+T'_r=0\ ;0\in\mathbb{N}$$

لكن A_n يساوي مجموع جميع هذه الحدود بمعنى:

$$A_n=\left(T_0+T'_0\right)+\left(T_1+T'_1\right)+\cdots+\left(T_n+T'_n\right)$$

ولأنها أعداد طبيعية كان مجموعها طبيعياً أيضاً ومنهُ أياً كان n كان $A_n\in\mathbb{N}$

ظننتُ أنها لن تمضي و برحمة الله مضت..

علاقتا أويلر:

أياً كان العدد الحقيقي θ فإنّ:

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \to e^{ix}+e^{-ix} = 2\cos x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \to e^{ix}-e^{-ix} = 2i\sin x$$

تمرين:

اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ثم أجب عن السؤال الموافق:

1. $\cos^3 x$ واستنتج قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \,.\, d(x)$
2. $\cos x \,.\, \sin^4 x$ واحسب $F(x) = \int_0^x \cos t \,.\, \sin^4 t \,.\, dt$ بطريقتين

الطلب الأول:

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{(e^{ix}+e^{-ix})^3}{8} = \frac{1}{8}[(e^{ix}+e^{-ix})^3]$$

$$a = e^{ix} \quad , \quad b = e^{-ix} \quad , \quad n = 3$$

$$= \frac{1}{8}\left[\begin{matrix}\binom{3}{0}(e^{ix})^3(e^{-ix})^0 + \binom{3}{1}(e^{ix})^2(e^{-ix})^1 \\ +\binom{3}{2}(e^{ix})^1(e^{-ix})^2 + \binom{3}{3}(e^{ix})^0(e^{-ix})^3\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{8}[e^{3ix} + 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} + e^{-3ix}]$$

$$= \frac{1}{8}[e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}]$$

$$= \frac{1}{8}[e^{3ix} + e^{-3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix}]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(2)(e^{3x}+e^{-3ix})}{2} + 3\frac{(2)(e^{ix}+e^{-ix})}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}[2\cos(3x) + 6\cos(x)]$$

$$\to \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

استنتاج قيمة:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \,.\, d(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)\right) d(x)$$

تذكر:

$$f(x) = \cos(\alpha x) \to F(x) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x)$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right).\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\frac{1}{12}.\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{-1}{12} + \frac{3}{4}\right) - (0) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

الطلب الثاني:

$$\cos x.\sin^4 x = \cos x\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{\cos x}{16}(e^{ix}-e^{-ix})^4$$

$$a = e^{ix} \quad , \quad b = -e^{-ix} \quad , \quad n = 4$$

$$= \frac{\cos x}{16}\left[\begin{matrix}\binom{4}{0}(e^{ix})^4(-e^{-ix})^0 + \binom{4}{1}(e^{ix})^3(-e^{-ix})^1 \\ +\binom{4}{2}(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2 + \binom{4}{3}(e^{ix})^1(-e^{-ix})^3 \\ +\binom{4}{4}(e^{ix})^0.(-e^{-ix})^4\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{\cos x}{16}\left[\begin{matrix}e^{4ix} - 4e^{3ix}.e^{-ix} + 6e^{2ix}.e^{-2ix} \\ -4e^{ix}.e^{-3ix} + e^{-4ix}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{16}.\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\left[\begin{matrix}e^{i4x} - 4e^{i3x}.e^{-ix} + 6e^{i2x}.e^{-2ix} \\ -4e^{ix}.e^{-3ix} + e^{-4ix}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\begin{matrix}e^{i5x} - 4e^{3ix} + 6e^{ix} - 4e^{-ix} + e^{-3ix} \\ e^{i3x} - 4e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{-3ix} + e^{-5ix}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\begin{matrix}e^{5ix} + e^{-5ix} - 4(e^{i3x} + e^{-i3x}) \\ +6(e^{ix} + e^{-ix}) - 4(e^{ix} + e^{-ix}) \\ +e^{i3x} + e^{-3ix}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{32}\left[\begin{matrix}2\cos 5x - 8\cos 3x + 12\cos x \\ -8\cos x + 2\cos 3x\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\cos 5x - \frac{3}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x$$

$$\int_0^x \cos t.\sin^4 t.dt = \int_0^x \left(\frac{1}{16}\cos 5t - \frac{3}{16}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{80}\sin 5t - \frac{1}{16}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin t\right]_0^x$$

$$\to \int_0^x \cos t.\sin^4 t.dt = \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$$

ثانياً: طرائق العد:

أسلوب الخانات	اختيار مجموعة كلية من مجموعة كلية	التجربة تتم على مراحل
المسائل: * ما عدد الكلمات * ما عدد الرمازات * ما عدد الأعداد * ترتيب الكتب	نستخدم التباديل $n!$	نستخدم المبدأ الأساسي بالعد مع مراعاة كل مرحلة كل مرحلة مثلاً: إذا كان لدينا تجربة تتم على مرحلتين حيث المرحلة الأولى تتم بـ n طريقة والمرحلة الثانية تتم بـ m طريقة فإن عدد طرق إنجاز المهمة هو $n.m$

اختيار مجموعة جزئية من مجموعة كلية		
مع الاهتمام بالترتيب		دون الاهتمام بالترتيب
التكرار غير مسموح	التكرار مسموح	نستخدم التوافيق $\binom{n}{r}$ المسائل: * عدد المصافحات * عدد القطع المستقيمة * اختيار لجان لا تحوي مناصب * اختيار أسئلة * سحب كرات معاً
نستخدم التراتيب P_n^r المسائل: * مسابقات تحوي مراكز أو ميداليات * لجان تحوي مناصب * سحب كرات على التتالي دون إعادة	نستخدم القوائم المكررة n^r المسائل: سحب الكرات على التتالي مع الإعادة	

التمرين الأول: لدينا حديقة لها أربعة أبواب:

١. بكم طريقة يمكن الدخول إلى الحديقة؟
٢. بكم طريقة يمكن الدخول والخروج من الحديقة؟
٣. بكم طريقة يمكن لـ لانا الدخول إلى الحديقة علماً أن أحد الأبواب عليه كلب؟ (حيث لانا تخاف من الكلاب)
٤. بكم طريقة يمكن لـ لانا الدخول والخروج من الحديقة؟
٥. بكم طريقة يمكن لـ لانا الدخول والخروج من الحديقة علماً أن الكلب راح مشوار بعد دخولها إلى الحديقة؟

الحل:

١. أربعة طرق
٢. مرحلة الدخول وتتم بأربعة طرق
مرحلة الخروج وتمم بأربعة طرق
$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 4 = 16$$
٣. ثلاثة طرق
٤. تسعة طرق
٥. مرحلة الخول وتتم بثلاثة طرق.
مرحلة الخروج وتمم بأربعة طرق
$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 3 = 12$$

التمرين الثاني:
في أحد الامتحانات يطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة
٢. بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية

الحل:

$$1.\quad \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)} = 120$$
$$2.\quad \binom{6}{3} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$$

التمرين الثالث:
في الامتحان يطلب من الطالب الإجابة عن ثلاث أسئلة من خمسة أسئلة والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟
٢. بكم طريقة يمكن الاختيار إذا كان السؤال الأول إجبارياً

الحل:

$$1.\quad \binom{5}{3} = \frac{(5)(4)(3)}{(3)(2)(1)} = 10$$
$$2.\quad \binom{4}{2} = \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = 6$$

التمرين الرابع:
يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الأخرين مرة واحدة فقط، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل؟؟
ملاحظة: إنّ عدد مصافحات n شخص يساوي $\binom{n}{2}$

الحل:
$$\binom{10}{2} = \frac{(10)(9)}{(2)(1)} = 45$$

التمرين الخامس:
يلتقي عشرة أشخاص في حفل منهم أربعة متخاصمين كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل؟؟
ملاحظة: إنّ عدد مصافحات n شخص منهم m شخص متخاصم يساوي
$$\binom{n}{2} - \binom{m}{2}$$

الحل:
$$\text{عدد المصافحات} = \binom{10}{2} - \binom{4}{2}$$
$$= \frac{(10)(9)}{(2)(1)} - \frac{(4)(3)}{(2)(1)} = \frac{90}{2} - \frac{12}{2} = 45 - 6 = 39$$

التمرين السادس:
يلتقي n صديقاً في حفل يصافح كل واحد منهم الآخرين مرة واحدة فقط فإذا كان عدد المصافحات التي جرت في الحفل 36 فكم شخصاً متواجداً في الحفل؟

الحل:
$$\binom{\text{عدد}}{\text{المصافحات}} = \binom{n}{2} \rightarrow 36 = \binom{n}{2}$$
$$36 = \frac{(n)(n-1)}{(2)(1)}$$
$$72 = n(n-1)$$
$$n^2 - n = 72$$
$$n^2 - n - 72 = 0$$
$$(n-9)(n+8) = 0$$
إما $n = 9 \rightarrow$ مقبول
أو $n = -8 \rightarrow$ مرفوض
إذاً عدد الأشخاص هو $n = 9$

التمرين السابع:

تتأمل مضلع محدب مكون من n رأس والمطلوب:

1. ما عدد القطع المستقيمة المشكلة من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد القطع المستقيمة} = \binom{n}{2} = \frac{(n)(n-1)}{(2)(1)}$$

2. ما عدد القطع المستقيمة التي تقبل A طرفاً لها حيث A رأس في المضلع؟

$$\text{عدد القطع المستقيمة} = \binom{n-1}{1} = n-1$$

3. ما عدد الأشعة (الغير صفرية) الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد الأشعة} = \binom{n}{2} \times 2 = \frac{n(n-1)}{(2)(1)} \times (2) = n^2 - n$$

4. ما عدد المثلثات الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{n}{3} = \frac{(n)(n-1)(n-2)}{(3)(2)(1)}$$

5. ما عدد المثلثات التي تقبل A رأساً لها حيث A رأس في المضلع

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{(2)(1)}$$

6. ما عدد المثلثات التي تقبل $[AB]$ ضلعاً فيها حيث A و B رأسين في المضلع؟

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{n-2}{1} = n-2$$

7. ما عدد المضلعات الرباعية الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد المضلعات} = \binom{n}{4} = \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4)(3)(2)(1)}$$

8. ما عدد المضلعات الرباعية التي تقبل $[AB]$ ضلعاً فيها؟

$$\text{عدد المضلعات} = \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{(2)(1)}$$

9. ما عدد المضلعات الرباعية التي تقبل ABC مثلث فيها؟

$$\text{عدد المضلعات} = \binom{n-3}{1} = n-3$$

10. ما عدد المضلعات السداسية التي تقبل $[AB]$ ضلع فيه؟

$$\text{عدد المسدسات} = \binom{n-2}{4} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(4)(3)(2)(1)}$$

11. ما عدد أقطار المضلع حيث $n \geq 4$ ؟

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n = \frac{(n)(n-1)}{(2)(1)} - n$$

12. ما عدد نقاط تقاطع الأقطار حيث $n \geq 4$ (يفترض في الحالة العامة لا يلتقي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة)

$$\text{عدد نقاط تقاطع الأقطار} = \binom{n}{4} + n$$
$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(4)(3)(2)(1)} + n$$

التمرين الثامن:

تتأمل مضلع مكون من 11 رأس والمطلوب:

1. ما عدد القطع المستقيمة المشكلة من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد القطع المستقيمة} = \binom{11}{2} = \frac{(11)(10)}{(2)(1)} = 55$$

2. ما عدد القطع المستقيمة التي تقبل A طرفاً لها حيث A رأس في المضلع؟

$$\text{عدد القطع المستقيمة} = \binom{10}{1} = 10$$

3. ما عدد الأشعة (الغير صفرية) الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد الأشعة} = \binom{11}{2} \times 2 = \frac{(11)(10)}{(2)(1)} \times (2) = 110$$

4. ما عدد المثلثات الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{11}{3} = \frac{(11)(10)(9)}{(3)(2)(1)} = 165$$

5. ما عدد المثلثات التي تقبل A رأساً لها حيث A رأس في المضلع

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{10}{2} = \frac{(10)(9)}{(2)(1)} = 45$$

6. ما عدد المثلثات التي تقبل $[AB]$ ضلعاً فيها حيث A و B رأسين في المضلع؟

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{9}{1} = 9$$

7. ما عدد المضلعات الرباعية الممكن تشكيلها من رؤوس المضلع؟

$$\text{عدد المضلعات} = \binom{11}{4} = \frac{(11)(10)(9)(8)}{(4)(3)(2)(1)} = 330$$

8. ما عدد المضلعات الرباعية التي تقبل $[AB]$ ضلعاً فيها؟

$$\text{عدد المضلعا} = \binom{9}{2} = \frac{(9)(8)}{(2)(1)} = 36$$

9. ما عدد المضلعات الرباعية التي تقبل ABC مثلث فيها؟

$$\text{عدد المضلعات} = \binom{8}{1} = 8$$

10. ما عدد المضلعات السداسية التي تقبل $[AB]$ ضلع فيه؟

$$\text{عدد المسدسات} = \binom{9}{4} = \frac{(9)(8)(7)(6)}{(4)(3)(2)(1)} = 126$$

11. ما عدد أقطار المضلع؟

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{11}{2} - 11 = \frac{(11)(10)}{(2)(1)} - 11 = 44$$

12. ما عدد نقاط تقاطع الأقطار (يفترض في الحالة العامة لا يلتقي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة)

$$\text{عدد نقاط تقاطع الأقطار} = \binom{11}{4} + 11$$
$$= \frac{(11)(10)(9)(8)}{(4)(3)(2)(1)} + 11 = 341$$

التمرين التاسع:

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$ يعطى بالعلاقة: $\frac{n(n-3)}{2}$

الحل:

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - \text{عدد الأضلاع}$$

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n$$

$$= \frac{n(n-1)}{(2)(1)} - n = \frac{n^2-n}{2} - n$$

$$= \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

التمرين العاشر:

إذا علمت أنّ عدد أقطار مضلع محدب هو 35 قطر فما هو عدد رؤوسه.

الحل:

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - \text{عدد الأضلاع}$$

$$35 = \binom{n}{2} - n$$

$$35 = \frac{n(n-1)}{(2)(1)} - n$$

$$35 = \frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$70 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n-10)(n+7) = 0$$

إما $n = 10 \rightarrow$ مقبول

أو $n = -7 \rightarrow$ مرفوض

التمرين الحادي عشر:

هل يوجد مضلع محدب عدد أقطاره 44 .

الحل:

في المضلع المحدب يتحقق:

$$\text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - \text{عدد الأضلاع}$$

$$44 = \binom{n}{2} - n$$

$$44 = \frac{n(n-1)}{(2)(1)} - n$$

$$44 = \frac{n(n-1)-2n}{2}$$

$$88 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 88 = 0$$

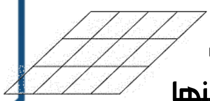
$$(n-11)(n+8) = 0$$

إما $n = 11 \rightarrow$ مقبول

أو $n = -8 \rightarrow$ مرفوض

ومنهُ يوجد مضلع محدب عدد أقطاره 44 .

التمرين الثاني عشر:



تتأمل في الشكل المجاور شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة.

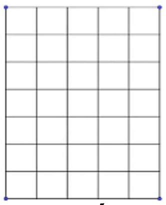
الحل:

يتشكّل متوازي الأضلاع من التقاء ضلعان أفقيّان ويتم ب $\binom{4}{2}$

والتقاء ضلعان شاقوليّان ويتم ب $\binom{5}{2}$.

$$\text{عدد متوازيات الأضلاع} = \binom{4}{2}.\binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

التمرين الثالث عشر:



في الشكل المجاور تتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مستطيل $ABCD$ والمطلوب:

1. ما عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة؟

$$\text{عدد متوازيات الأضلاع} = \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{56}{2} \times \frac{30}{2}$$

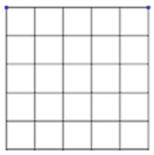
$$= 28 \times 15 = 420$$

2. ما عدد المستطيلات في الشبكة؟

$$\text{عدد المستطيلات} = \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{56}{2} \times \frac{30}{2}$$

$$= 28 \times 15 = 420$$

التمرين الرابع عشر:



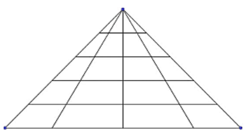
في الشكل المجاور تتأمل شبكة منتظمة مرسومة في مربع $ABCD$ والمطلوب:

ما عدد متوازيات الأضلاع أو المستطيلات المرسومة في الشبكة؟

$$\text{عدد متوازيات الأضلاع} = \binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = \frac{30}{2} \times \frac{30}{2}$$

$$= 15 \times 15 = 225$$

التمرين الخامس عشر:



تأمل الشكل المجاور شبكة مرسومة في مثلث ABC والمطلوب:

1. ما عدد جميع المثلثات في الشبكة؟

كل مثلث يتشكل من ضلعان شاقوّليان وضلع أفقي.

$$\text{عدد المثلثات} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{1} = 50$$

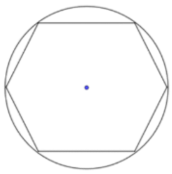
2. ما عدد أشباه المنحرفات في الشبكة؟

كل شبه منحرف يتشكل من التقاء ضلعان شاقوليان وضلعان أفقيان.

$$\text{عدد أشباه المنحرفات} = \binom{5}{2} \times \binom{5}{2} = 100$$

المستقبل ملك لأولئك الذين يؤمنون بروعة أحلامهم 😍💙

التمرين السادس عشر:



في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدس منتظم نجري التجربة الآتية نصل بين أي ثلاث نقاط لنحصل على مثلث.

١. ما عدد جميع المثلثات الممكن تشكيلها من الرؤوس؟

عدد المثلثات $= \binom{6}{3} = \dfrac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$

٢. ما عدد المثلثات القائمة الممكن تشكيلها من الرؤوس؟

ملاحظة: كل قطر من الدائرة يقابل 4 مثلث قائمة ولدينا 3 أقطار.

عدد المثلثات القائمة $= 4 \times 3 = 12$

٣. ما عدد المثلثات منفرجة الزاوية الممكن تشكيلها من الرؤوس؟

ملاحظة: الزوايا المنفرجة تكون حصراً على رؤوس المضلع المحدب ولدينا 6 رؤوس إذاً:

عدد المثلثات المنفرجة $= 6$

٤. ما عدد المثلثات الحادة الممكن تشكيلها من الرؤوس؟

(عدد المثلثات الحادة) $=$ (عدد المثلثات الكلي) $-$ (عدد المثلثات القائمة) $-$ (عدد المثلثات المنفرجة)

$= 20 - 12 - 6 = 2$

٥. ما عدد أقطار المسدس وما عدد نقاط تقاطع أقطاره؟

عدد الأقطار $= \binom{n}{2} - n \rightarrow$ عدد الأقطار $= \binom{6}{2} - 6 = 9$

عدد نقاط تقاطع أقطاره $= \binom{n}{4} + n \rightarrow \binom{6}{4} + 4 = 21$

التمرين السابع عشر:

لتكن C دائرة مركزها O وضعنا فيها ستة أقطار مختلفة ولتكن $S = \{A_1, A_2, \dots, A_{12}\}$ أطراف هذه الأقطار والمطلوب:

١. ما عدد المثلثات الممكن تشكيلها من رؤوس S ؟

عدد المثلثات $= \binom{12}{3} = \dfrac{(12)(11)(10)}{(3)(2)(1)} = 220$

٢. ما عدد المضلعات الرباعي التي رؤوسها من عناصر S ؟

عدد المضلعات الرباعية $= \binom{12}{4} = \dfrac{(12)(11)(10)(9)}{(4)(3)(2)(1)} = 495$

٣. كم مستطيل رؤوسه من عناصر S؟

كل مستطيل يحتاج قطران ولدينا ستة أقطار إذاً:

عدد المستطيلات $= \binom{6}{2} = \dfrac{(6)(5)}{(2)(1)} = 15$

التمرين الثامن عشر:

لتكن A و B و C و D و E نقاط متمايزة في الفراغ.

١. ما عدد المستقيمات التي يمكن تشكيلها من النقاط السابقة؟

٢. ما عدد المستويات التي يمكن تشكيلها من النقاط السابقة؟

الحل:

الطلب الأول:

(عدد المستقيمات) $= \binom{5}{2} = 10$

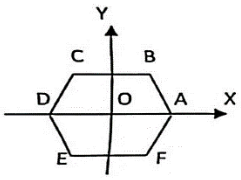
كل مستقيم يحتاج نقطتين.

الطلب الثاني:

(عدد المستويات) $= \binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$

كل مستوي يحتاج ثلاثة نقاط.

التمرين التاسع عشر:



$(ABCDEF)$ مسدس منتظم

طول ضلعة (1) والمطلوب:

١. اكتب العدد العقدي الممثل للنقطة B

○ نصل بين ثلاث نقاط لنحصل على مثلث والمطلوب:

٢. ما عدد المثلثات التي يمكن الحصول عليها؟

٣. ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها؟

٤. ما عدد القطع المستقيمة التي تصل بين رأسيين مختلفين من رؤوس المسدس السابق؟

الحل:

الطلب الأول:

نعلم أنه في المثلث متساوي الأضلاع الذي طول ضلعه a يكون طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ وهنا طول ضلع المثلث هو 1 ومنه طول الارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow Z_B = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

الطلب الثاني:

(عدد المثلثات) $= \binom{6}{3} = \dfrac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} = 20$

الطلب الثالث:

كل قطر يقابل أربعة مثلثات قائمة ولدينا ثلاثة أقطار إذاً:

(عدد المثلثات القائمة) $= 4 \times 3 = 12$

الطلب الرابع:

(عدد عدد المستقيمة) $= \binom{6}{2} = 15$

التمرين العشرون:

اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات يجري فيه توزيع ثلاثة ميداليات (ذهبية وفضية وبرونزية), كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟؟

$$\text{عدد النتائج} = P_{100}^{3}$$
$$= (100)(99)(98) = 970200$$

التمرين الواحد والعشرون:

1. بكم طريقة يمكن توزيع ثلاثة جوائز (ذهبية وفضية وبرونزية) على n شخص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟
2. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع n جائزة على n شخص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟
3. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع $n+1$ جائزة على n شخص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟

الحل:

1. $P_n^3 = (n)(n-1)(n-2)$
2. $\text{عدد الطرق} = n!$
3. تتم التجربة على مرحلتين:

المرحلة الأولى:

مرحلة اختيار (2) هدية منها ودمجها معاً وتتم بـ $\binom{n+1}{2}$

المرحلة الثانية:

مرحلة توزيع n هدية على n تلميذ وتتم بـ $n!$

$$\rightarrow \text{عدد الطرق} = \binom{n+1}{2}.n!$$

التمرين الثاني والعشرون:

1. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 3 جوائز (ذهبية وفضية وبرونزية) على 6 أشخاص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟
2. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 6 جوائز على 6 أشخاص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟
3. بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع 7 جوائز على 6 أشخاص بحيث يحصل كل شخص على جائزة واحدة فقط؟

الحل:

1. $P_6^3 = (6)(5)(4) = 120$
2. $\text{عدد الطرق} = 6! = 720$
3. تتم التجربة على مرحلتين:

المرحلة الأولى:

مرحلة اختيار (2) هدية منها ودمجها معاً وتتم بـ $\binom{7}{2}$

المرحلة الثانية:

مرحلة توزيع 6 هدية على 6 تلاميذ وتتم بـ $6!$

$$\rightarrow \text{عدد الطرق} = \binom{7}{2}.6!$$
$$= \frac{(7)(6)}{(2)(1)}.(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 15120$$

التمرين الثالث والعشرون:

يريد مدرس توزيع 6 حقائب مدرسية مختلفة على خمسة تلاميذ , بحيث يحصل كل تلميذ على حقيبة واحدة على الأقل ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية؟

الحل:

تتم على مرحلتين:

المرحلة الأولى: مرحلة اختيار 2 حقيبة مدرسية منها وتتم بـ $\binom{6}{2}$

المرحلة الثانية: مرحلة توزيع 5 حقيبة على 5 طالب وتتم بـ $5!$

إذاً:

$$\text{عدد الطرق} = \binom{6}{2} \times 5!$$
$$= (15) \times 120 = 1800$$

التمرين الرابع والعشرون:

يتألف مجلس إدارة نادي من سبعة أعضاء, بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين سر للنادي

الحل:

$$P_7^3 = (7)(6)(5) = 210$$

التمرين الخامس والعشرون:

نريد تأليف لجنة مكوّنة من (مدير ونائب مدير وأمين سرّ) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللّجنة علماً بأنّ من المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللّجنة ذاتها؟

الحل:

لدينا مجموعة الأشخاص: $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$

حيث a و b متخاصمان.

اللجان التي تحوي a و b معاً:

a, b, e	a, b, d	a, b, c
a, e, b	a, d, b	a, c, b
b, a, e	b, a, d	b, a, c
b, e, a	b, d, a	b, c, a
e, a, b	d, a, b	c, a, b
e, b, a	d, b, a	c, b, a

إذاً عدد اللجان التي تحوي متخاصمان تساوي 18 لجنة.

عدد اللجان الكلّي هو:

$$\text{عدد اللجان الكلي} = P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ لجنة}$$

ونعلم أن:

عدد اللجان المطلوب = عدد اللجان الكلي − عدد اللجان التي تحوي متخاصمين معاً

$$= 60 - 18 = 42$$

أهلاً بالصِّعاب ..ما دامَتِ النهاية ستكونُ مُثمِرَة 🌸 💙

التمرين السادس والعشرون:

نريد تأليف لجنة مكونة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة

١. كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها؟

$$\text{عدد اللجان} = \binom{29}{4} = \frac{P_{29}^{4}}{4!}$$
$$= \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23751$$

٢. كم لجنة مختلفة مكونة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها؟؟

$$\text{عدد اللجان} = \binom{14}{2} \times \binom{15}{2}$$
$$= \frac{P_{14}^{2}}{2!} \times \frac{P_{15}^{2}}{2!} = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} \times \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 9555$$

التمرين السابع والعشرون:

في أحد صفوف مدرسة 12 طالباً و 9 طالبات, نريد تأليف لجنة مكونة من ثلاث أشخاص , والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن تأليف هذه اللجنة

$$\text{عدد الطرق} = \binom{21}{3} = 1330$$

٢. بكم طريقة يمكن تأليف لجنة مكونة من طالب واحد وطالبتين

$$\text{عدد الطرق} = \binom{12}{1}\binom{9}{2} = 12 \times \frac{(9)(8)}{(2)(1)} = 432$$

٣. بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة إذا علمت أنها مكونة من رئيس ونائب للرئيس وأمين سر

$$\text{عدد الطرق} = P_{21}^{3} = 7980$$

التمرين الثامن والعشرون:

أراد صف فيه اثنا عشر طالباً وثماني طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة أشخاص, بكم لجنة مختلفة يمكن تأليفها في كل من الحالات الآتية:

١. اللجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب وطالبتين

$$\text{عدد اللجان} = \binom{12}{3}\binom{8}{2} = \frac{P_{12}^{3}}{3!} \times \frac{P_{8}^{2}}{2!}$$
$$= 220 \times 28 = 6160$$

٢. في اللجنة طالبتان على الأكثر أيّ:

- 3 طالب و 2 طالبة
- أو 4 طالب و 1 طالبة
- أو 5 طالب و 0 طالبة

$$\text{عدد اللجان} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{1}\binom{12}{4} + \binom{8}{0}\binom{12}{5}$$
$$= 6160 + 3960 + 792 = 10912$$

٣. في اللجنة طالبتان على الأقل أيّ:

- 3 طالب و 2 طالبة
- أو 2 طالب و 3 طالبة
- أو 1 طالب و 4 طالبة
- أو 0 طالب و 5 طالبة

$$\text{عدد اللجان} = \binom{8}{2}\binom{12}{3} + \binom{8}{3}\binom{12}{2} + \binom{8}{4}\binom{12}{1} + \binom{8}{5}\binom{12}{0}$$
$$= 6160 + 3696 + 480 + 840 + 56 = 10752$$

التمرين التاسع والعشرون:

في إحدى مراكز الخدمات ثلاثة مهندسين وخمس عمال، كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة.

$$\text{عدد اللجان} = \binom{3}{1} \times \binom{5}{2} = 3.\frac{(5)(4)}{(2)(1)} = 30$$

التمرين الثلاثون:

أعلنت إحدى الشركات عن وظيفتين شاغرتين فتقدم لملء هاتين الوظيفتين 3 رجال و 4 سيدات والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن ملء الوظيفتين الشاغرتين؟

$$\binom{7}{2} = 21$$

٢. بكم طريقة يمكن تعيين رجل وامرأة في هاتين الوظيفتين؟

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} = 12$$

التمرين الواحد والثلاثون:

لتكن لدينا مجموعة الأرقام $S = \{1,2,3,4,5\}$:

١. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من منزلتين؟

الخانة	احاد	عشرات
عدد الطرق	5 ط	5 ط

عدد الطرق $= 5 \times 5 = 25$ طريقة

٢. بكم طريقة يمكن اختيار عد مؤلف من منزلتين ومختلف الأرقام؟

الخانة	احاد	عشرات
عدد الطرق	5 ط	4ط

عدد الطرق $= 4 \times 5 = 20$ طريقة

٣. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من منزلتين وزوجي؟

الخانة	احاد	عشرات
عدد الطرق	2 ط	5 ط

عدد الطرق $= 5 \times 2 = 10$ طريقة

٤. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من منزلتين وزوجي ومختلف الأرقام؟

الخانة	احاد	عشرت
عدد الطرق	2 ط	4ط

عدد الطرق $= 4 \times 2 = 8$ طريقة

٥. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من ثلاثة منازل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	5 ط	5 ط	5 ط

عدد الطرق $= 5 \times 5 \times 5 = 125$ طريقة

٦. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من ثلاثة منازل ومختلف الأرقام؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	5 ط	4ط	3ط

عدد الطرق $= 3 \times 4 \times 5 = 60$ طريقة

٧. بكم طريقة يمكن اختيار عدد زوجي مختلف الأرقام ومؤلف من ثلاثة منازل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	2ط	4ط	3ط

عدد الطرق $= 3 \times 4 \times 2 = 24$ طريقة

٨. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	5 ط	4ط	3ط	2ط	1ط

عدد الطرق $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ طريقة

٩. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S وليس من مضاعفات الخمسة؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	4ط	3ط	2ط	1ط

عدد الطرق $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 4 = 96$ طريقة

١٠. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S ومن مضاعفات الخمسة؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	1ط	4ط	3ط	2ط	1ط

عدد الطرق $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 = 24$ طريقة

ملاحظة هامة جداً:

في شروط الأكبر والأصغر من عدد
ننظر إلى الخانة الأخيرة في هذا العدد ونميز:
الشروط أصغر:
نضع في الخانة الأخيرة الأعداد الأصغر تماماً من هذا العدد
الشروط أكبر:
نضع في الخانة الأخيرة الأعداد الأكبر أو التي تساوي هذا العدد.

١١. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S وأكبر من 20000 ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	4ط

عدد الطرق $= 4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 96$ طريقة

١٢. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل بحيث أرقامه مختلفة ومأخوذة من S وأصغر من 20000 ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	1ط

عدد الطرق $= 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ طريقة

١٣. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل مختلفة ومأخوذة من S وأصغر من 30000

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	2ط

عدد الطرق $= 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 48$ طريقة

١٤. بكم طريقة يمكن اختيار عدد مؤلف من خمسة منازل مختلفة الأرقام ومأخوذة من S , بحيث تكون من مضاعفات الـ 5 وأصغر من 20000 ؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	1ط	3ط	2ط	1ط	1ط

عدد الطرق $= 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 1 = 6$ طريقة

التمرين الثاني والثلاثون:

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ وليكن H مجموعة تتميز بالخصائص الآتية:
أرقامها مختلفة ومأخوذة من S ولا يوجد أي منها من مضاعفات الـ 5 وكل عدد منها أكبر من 20000 فما هو عدد عناصر H ؟

ناقش حالتين:

وجود العدد 5 في خانة عشرات الألوف.

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	1ط

عدد الطرق $= 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ طريقة

عدم وجود العدد 5 في خانة عشرات الألوف.

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف	عشرات الألوف
عدد الطرق	3ط	3ط	2ط	1ط	3ط

عدد الطرق $= 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 3 = 54$ طريقة

إذاً عدد الطرق:

$$54 + 24 = 78$$

التمرين الثالث والثلاثون:

لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$

١. ما عدد الأعداد المكوّنة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	6ط	5ط	4ط

عدد $6 \times 5 \times 4 = 120$ = عدد الأعداد

٢. ما عدد الأعداد المؤلّفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S، وكلّ عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات
عدد الطرق	1ط	4ط	2ط

عدد $1 \times 4 \times 2 = 8$ = عدد الأعداد

التمرين الرابع والثلاثون:

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ والمطلوب:

١. ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث منازل مختلفة التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

احاد	عشرات	مئات
6 ط	5 ط	4 ط

$(6)(5)(4) = 120$ = عدد الطرق

٢. ما عدد الأعداد الزوجية المؤلفة من ثلاث منازل وأصغر من 500 التي يمكن تشكيلها من عناصر S ؟

احاد	عشرات	مئات
3 ط	6 ط	4 ط

$(3)(6)(4) = 72$ = عدد الطرق

التمرين الخامس والثلاثون:

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسّرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأيٍّ منها أن يأخذ أيّاً من القيم: $\{0,1,2,3,4,5\}$

١. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل.

الخانة	خانة 1	خانة 2	خانة 3
عدد الطرق	6ط	6ط	6ط

طريقة $6 \times 6 \times 6 = 216$ = عدد الطرق

٢. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكوّنة من خانات مختلفة مثنى مثنى.

الخانة	خانة 1	خانة 2	خانة 3
عدد الطرق	6ط	5ط	4ط

طريقة $6 \times 5 \times 4 = 120$ = عدد الطرق

التمرين السادس والثلاثون:

رماز في سيارة مؤلف من 4 خانات يمكن لأي خانة أن تأخذ أحد الأرقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$:

١. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف
عدد الطرق	10ط	10ط	10ط	10 ط

طريقة $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ = عدد الطرق

٢. ينطلق الإنذار من السيارة إذا لم يجر إدخال أي خانة صحيحة في مكانها ما عدد الرمازات التي تسبب انطلاق الإنذار؟

الصحيح − الكلي = عدد الرمازات

$= 10000 - 1 = 9999$

٣. ما هو عدد الرمازات المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى تصلح للقفل؟

الخانة	احاد	عشرات	مئات	ألوف
عدد الطرق	10ط	9ط	8ط	7 ط

طريقة $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ = عدد الطرق

٤. تذكر المالك أن الرماز الصحيح مكون من الأرقام $\{1,2,9,9\}$, كم رماز مختلف يمكن للمالك أن يكون من هذه الأرقام؟

- يمكن وضع الرقم 1 بأربع طرق.
- يمكن وضع الرقم 2 بثلاث طرق
- يمكن وضع الرقم 9 بطريقة واحدة
- يمكن وضع الرقم 9 بطريقة واحدة

ومنه:

$4 \times 3 \times 1 \times 1 = 12$ = عدد الرمازات

التمرين السابع والثلاثون:

نتأمل كلمة DAMASCUS والمطلوب:

١. ما عدد الكلمات ذات الأربعة أحرف يمكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4
عدد الطرق	6ط	6ط	6ط	6 ط

$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$ = عدد الطرق

٢. ما عدد الكلمات مختلفة الأحرف المكونة من 5 أحرف ممكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5
عدد الطرق	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط

$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ = عدد الطرق

٣. ما عدد الكلمات مختلفة الأحرف المكونة من 3 أحرف بحيث الأول A والأخير S ؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3
عدد الطرق	1ط	4ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 4 \times 1 = 4$$

٤. ما عدد الكلمات المكونة من 3 أحرف ولا تحوي الحرف A ممكن تشكيلها؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3
عدد الطرق	5ط	5ط	5ط

$$\text{عدد الطرق} = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

التمرين الثامن والثلاثون:

يريد طالب أن يدرس 5 كتب بشكل متتابع والمطلوب:

١. ما عدد طرق ترتيب الكتب؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5
عدد الطرق	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

٢. ما عدد طرق ترتيب الكتب بشرط الأول رياضيات والأخير علوم

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5
عدد الطرق	1ط	3ط	2ط	1ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$$

التمرين التاسع والثلاثون:

رف يحوي 9 كتب لمؤلفين أربعة كتب للمؤلّف A وخمسة للمؤلّف B؟

١. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرّف إذا كانت الكتب الثّلاث الأولى للمؤلّف B؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7	خانة8	خانة9
عدد الطرق	5ط	4ط	3ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 3 \times 4 \times 5 = 43200$$

٢. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرّف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلّف B في البداية.

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7	خانة8	خانة9
عدد الطرق	1ط	8ط	7ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 8! = 40320$$

التمرين الأربعون:

لدينا سبعة كتب , ثلاثة كتب منها للمؤلف A وأربعة كتب للمؤلف B والمطلوب:

١. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	7ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 7! = 5040$$

ثق بالوصول ما دمت تكافح 😊🏆💙

٢. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول كتاب للمؤلف B ؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	4ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 6! = 2880$$

٣. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول كتاب (كتاب معين) للمؤلف B ؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	1ط	6ط	5ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 6! = 720$$

٤. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط لا يتجاور كتابان لنفس المؤلف؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	4ط	3ط	3ط	2ط	2ط	1ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144$$

٥. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط كتب كل مؤلف متجاورة؟

الحالة الأولى: إذا كانت كتب B من اليمين وكتب A من اليسار

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	1ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 = 144$$

الحالة الثانية: إذا كانت كتب A من اليمين وكتب B من اليسار

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	3ط	2ط	1ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2 \times 3 = 144$$

إذاً:

$$\text{عدد الطرق} = 144 + 144 = 288$$

٦. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط يتجاور كتابان معينان للمؤلف B

$$\text{عدد الطرق} = 2 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 1440$$

٧. ما عدد طرق ترتيب الكتب على الرف بشرط أول ثلاثة كتب للمؤلف B ؟

الخانة	خانة1	خانة2	خانة3	خانة4	خانة5	خانة6	خانة7
عدد الطرق	4ط	3ط	2ط	4ط	3ط	2ط	1ط

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 4 = 576$$

التمرين الواحد والأربعون:

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الستة الآتية بأحد العدد $+1$ و -1 والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن أن نملأ لخانات الستة؟

٢. بكم طريقة يمكن ملئ الخانات بحيث يكون مجموع الأعداد يساوي الصفر؟

٣. بكم طريقة يمكن ملئ الخانات بحيث يكون مجموع الأعداد يساوي 2 ؟

الحل:

الطلب الأول:

عدد الطرق:

2 ط	2 ط	2 ط	2 ط	2 ط	2 ط

عدد الطرق $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

الطلب الثاني:

عدد الطرق $= \dfrac{6!}{3! \times 3!} = 20$

الطلب الثالث:

عدد الطرق $= \dfrac{6!}{4! \times 2!} = 15$

التمرين الثاني والأربعون:

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3, \dots ,29,30\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث عناصر مجموعها من مضاعفات العدد 3 .

الحل:

نجزء المجموعة إلى ثلاث مجموعات تبعاً لباقي قسمة كل منها على (3)

* المجموعة التي يكون باقي القسمة هو صفر:

$A_0 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

* المجموعة التي يكون باقي القسمة هو واحد:

$A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$

* المجموعة التي يكون فيها باقي هو اثنين:

$A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$

ويتحقق المطلوب عندما:

3 عناصر من A_0 أو 3 عناصر من A_1 أو 3 عناصر من A_2

أو عنصر من A_0 وعنصر من A_1 وعنصر من A_2

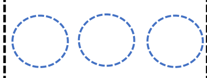
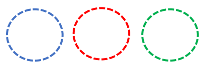
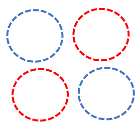
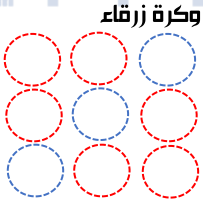
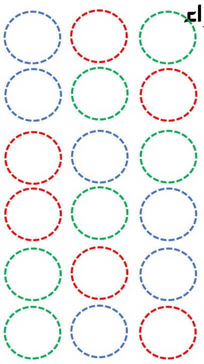
عدد النتائج $= \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{3} + \binom{10}{1}.\binom{10}{1}.\binom{10}{1}$

$= 1360$

مسائل سحب الكرات:

نوع السحب	معاً	على التتالي	
		مع إعادة	دون إعادة
القانون المستخدم	$\binom{n}{r}$	n^r	P_n^r
تباديل الحالة	لا يوجد تباديل للحالة	يوجد تباديل للحالة	

تباديل الحالة: عندما يكون السحب على التتالي يجب الضرب بتباديل الحالة حيث نميز:

حالات الضرب بتباديل الحالة				
حالة تماثل	حالة تخصيص	مقداران مختلفان	ثلاثة مقادير اثنان منها متشابهان	ثلاثة مقادير مختلفة
مثلا: ثلاث كرات زرقاء 	مثلا: الأولى زرقاء والثانية حمراء والثالثة خضراء 	مثلا: كرة زرقاء وكرة حمراء 	مثلا: كرتين حمراء وكرة زرقاء 	مثلا: كرة حمراء وكرة زرقاء وكرة خضراء 
لا يوجد تباديل للحالة		نضرب بالعدد 2	نضرب بالعدد 3	نضرب بالعدد 6

كيفية حل مسائل سحب الكرات:

☜ الخطوات:

* ننظر إلى نوع السحب ونحدد القانون المناسب
* نوجد $n(\Omega)$ حتى ولو لم يطلب إلينا ذلك
* نكتب عربي بالاعتماد على نص الطلب ثم نترجم مع مراعاة أن:
* أو $\leftarrow (+)$ ، و $\leftarrow (\times)$
* مع الانتباه في حال السحب على التتالي

(لا تنسى الضرب بتباديل الحالة)

اليوم ميدانك، والغرس قلبك، والإخلاص سِرُّك،
واللحظة إن فاتت لن تعود! لذلك عُدَّ نفسك واستعد..
بسم الله على الغايات حتّى نصل

التمرين الأول:

صندوق يحوي 10 كرات, 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء, نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة:

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟
2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟
3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟
4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟
5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟
6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل؟

الحل:

بما أنّ السحب على التالي مع إعادة فإنّ القانون المستخدم في حل المسألة هو n^r ولا ننسى أيضاً أنه يوجد تباديل للحالة.

الطلب الأول:

$$10^3 = 1000$$ = عدد النتائج المختلفة

الطلب الثاني:

النتائج التي تحوي على كرتين من اللون نفسه هي:

$2R$ و $1W$ أو $2R$ و $1B$ أو $2W$ و $1R$ أو $2W$ و $1B$

أو $2B$ و $1R$ أو $2B$ و $1W$

عدد النتائج $= 6^2.3^1.(3) + 6^2.1^1(3) + 3^2.6^1(3) + 1^2.6^1(3) + 1^2.3^1(3) = 648$

الطلب الثالث:

$1R$ و $1W$ و $1B$ $= 6^1.3^1.1^1(6) = 108$

ملاحظة:

يُنصح باستخدام طريقة المتمم عند:

* ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد فالمتمم لها: هو ثلاث كرات جميعها من لون واحد
* تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل فالمتمم لها: هو لا تشتمل على أي كرة حمراء

الطلب الرابع:

الطريقة الأولى: طريقة المتمم:

نوجد عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد وتتم وفق:

$3R$ أو $3W$ أو $3B$

عدد النتائج $= 6^3 + 3^3 + 1^3 = 244$

ومنهُ:

عدد الكرات التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد تساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد أيّ:

$$\rightarrow 1000 - 244 = 756$$

الطريقة الثانية: الترجمات

$2R$ و $1W$ أو $2R$ و $1B$ أو $2W$ و $1R$

أو $2W$ و $1B$ أو $2B$ و $1R$ أو $2B$ و $1W$

أو $1R$ و $1B$ و $1W$

بتروٍ بتحسبهم عزيزي الطالب مع الانتباه لوجود الضرب بتباديل الحالة فيطلع معك عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي: 756

الطلب الخامس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة حمراء:

$3W$ أو $3B$ أو $2B$ و $1W$ أو $2W$ و $1B$

عدد النتائج $= 3^3 + 1^3 + 1^2.3^1(3) + 3^2.1^1(3)$

$= 9 + 1 + 9 + 27 = 64$

ومنهُ:

عدد الكرات التي تشتمل على كرة حمراء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة حمراء أيّ:

$$\rightarrow 1000 - 64 = 936$$

الطلب السادس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة سوداء:

$3W$ أو $3R$ أو $2R$ و $1W$ أو $2W$ و $1R$

عدد النتائج $= 3^3 + 6^3 + 6^2.3^1(3) + 3^2.6^1(3)$

$= 27 + 216 + 324 + 162 = 729$

ومنهُ:

عدد الكرات التي تشتمل على كرة حمراء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة حمراء أيّ:

$$\rightarrow 1000 - 729 = 271$$

التمرين الثاني:

صندوق يحوي 10 كرات, 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء, نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة:

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟
2. كم عدد النتائج المختلفة التي تحوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه؟
3. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان؟
4. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد؟
5. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل؟
6. كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل؟

الحل:

بما أنّ السحب على التالي دون إعادة فإنّ القانون المستخدم في حل المسألة هو P_n^r ولا ننسى أيضاً أنه يوجد تباديل للحالة.

الطلب الأول:

$$\text{عدد النتائج} = P_{10}^3 = (10)(9)(8) = 720$$

الطلب الثاني:

$2R$ و $1W$ أو $2R$ و $1B$

أو $2w$ و $1R$ أو $2W$ و $1B$

$$\text{عدد النتائج} = P_6^2 . P_3^1(3) + P_6^2 . P_1^1(3)$$
$$+ P_3^2 . P_6^1(3) + P_3^2 . P_1^1(3) = 486$$

الطلب الثالث:

$1R$ و $1W$ و $1B$

$$\text{عدد النتائج} = P_6^1 . P_3^1 . P_1^1(6) = 108$$

الطلب الرابع:

نوجد عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد وتتم وفق:

$3R$ أو $3W$

$$\text{عدد النتائج} = P_6^3 + P_3^3 = 126$$

ومنه:

عدد الكرات التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد تساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد أيّ:

$$\rightarrow 720 - 126 = 594$$

الطلب الخامس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة حمراء:

$3W$ أو $2W$ و $1B$

$$\text{عدد النتائج} = P_3^3 + P_3^2 . P_1^1 . (3) = 24$$

ومنه:

عدد الكرات التي تشتمل على كرة حمراء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة حمراء أيّ:

$$\rightarrow 720 - 24 = 696$$

الطلب السادس:

إيجاد عدد النتائج التي لا تشتمل على أي كرة سوداء:

$3W$ أو $3R$ أو $2R$ و $1W$ أو $2W$ و $1R$

$$\text{عدد النتائج} = P_3^3 + P_6^3 + P_6^2 . P_3^1(3) + P_3^2 . P_6^1(3)$$
$$= 6 + 120 + 270 + 108 = 504$$

ومنه:

عدد الكرات التي تشتمل على كرة سوداء على الأقل يساوي عدد النتائج الممكنة للسحب ناقص عدد النتائج التي لا تشتمل على أيّة كرة سوداء أيّ:

$$\rightarrow 720 - 540 = 216$$

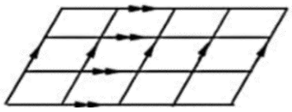
الدورات الامتحانية:

دورة 2017 الأولى 40 درجة:

في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة والمطلوب:

1. بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟
2. بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية؟

دورة 2018 الأولى 40 درجة:



في الشكل المجاور تتأمل شبكة منتظمة من المستقيمات المتوازية تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب:

احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة

دورة 2018 الثانية 40 درجة:

في إحدى مراكز الخدمة ثلاثة مهندسين وخمسة عمال , كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكننا تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة؟

دورة 2019 الأولى 40 درجة:

عيّن الحد المستقل عن x في منشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$

دورة 2019 الثانية 40 درجة:

عين قيم العدد n التي تحقق العلاقة:

$$\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3}$$

دورة 2020 الأولى 40 درجة:

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يُفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أي من القيم $\{0,1,2,3,4,5\}$ والمطلوب:

1. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل؟
2. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى؟

دورة 2020 الثانية 40 درجة:

يحتوي صندوق على خمسة كرات مرقمة من 1 إلى الـ 5 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة والمطلوب:

1. كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب؟
2. كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي؟

دورة 2021 الأولى 40 درجة:

جد قيمة الحد الثابت (المستقل عن x) في المنشور $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$

دورة 2021 الثانية 40 درجة:

عين قيمة n التي تحقق المعادلة: $P^3_{n+3} = 16\binom{n+2}{2}$

دورة 2022 الثانية 40 درجة:

لتكن C الدائرة التي مركزها O رسمنا فيها ستة أقطار مختلفة , لتكن $S = \{A_1, A_2, \dots A_{12}\}$ مجموعة أطراف هذه الأقطار والمطلوب:

١. ما عدد المثلثات التي رؤوسها من عناصر S ؟
٢. ما عدد المضلعات الرباعية التي رؤوسها من عناصر S ؟
٣. كم مستطيل رؤوسه من عناصر S ؟

دورة 2023 الأولى 40 درجة:

عيّن في منشور $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^4 وهل يوجد حد مستقل عن x ؟ علل ذلك.

دورة 2023 الثانية 40 درجة:

لتكن المجموعة $E = \{1,2,3,4,5\}$ والمطلوب:

١. كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من 4 منازل يمكن تشكيلهُ من عناصر المجموعة E
٢. كم عدداً زوجياً مختلف الأرقام ومؤلفاً من 4 منازل وكل عدد منها أكبر تماماً من 5000

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

ما هي أمثال الحد $x^2 . y$ في منشور $\left(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y}\right)^8$

التمرين الثاني:

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$

التمرين الثالث:

أوجد الحد المستقل عن x في منشور ذي الحدين $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

التمرين الرابع:

عين في منشور $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{12}$ الحد الذي يحوي x^{12} والحد المستقل عن x .

التمرين الخامس:

رف يحوي سبعة كتب لمؤلفين ثلاثة للمؤلف A وأربعة للمؤلف B

١. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلف B
٢. بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيناً للمؤلف B في البداية؟

التمرين السادس:

احسب أمثال x^4 في منشور $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

التمرين السابع:

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ والمطلوب

١. كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟
٢. كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من عناصر المجموعة S ؟

التمرين الثامن:

يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع.

١. بكم طريقة يمكن للطالب أن يرتب المواد لدراستها؟
٢. بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء؟

التمرين التاسع:

عين قيمة n في المعادلة الآتية: $P^5_{n+2} = 45P^3_{n+1}$

التمرين العاشر:

لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,8,9\}$ والمطلوب:

١. كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟
٢. كم عدداً من مضاعفات العدد 5 ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S ؟

اختبارات الكتاب:

التمرين الأول:

احسب قيمة r إذا علمت أنّ:

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$$

التمرين الثاني:

نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص , بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً أنّ في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها.

التمرين الثالث:

لتكن المجموعة $S = \{2,3,5,6,7,9\}$ والمطلوب:

١. ما عدد الأعداد المكونة من ثلاثة خانات مختلفة مثنى مثنى وقوامها مأخوذ من S
٢. ما عدد الأعداد المؤلفة من ثلاث خانات مختلفة وأرقامها مأخوذة من S وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

فهرس بحث التحليل التوافقي:

الحسابات:

١. العاملي:
- حساب
- اختزال

٢. التراتيب:
- حساب
- إثبات علاقة
- إيجاد قيمة n

٣. التوافيق:
- حساب
- إثبات علاقة
- إيجاد قيمة n
- إيجاد قيمة n و r

٤. منشور ذو الحدين:
- قانون
- قانون الحد ذو الدليل r
- النشر
- تعيين حد
- استنتاج قيمة مجموع
- تمرين 11^{11}
- تمرين المجموع $a+b$
- تمرين إثبات أنّ A_n طبيعي
- أويلر ومنشور ذو الحدين

طرائق العد:

٥. المبدأ الأساسي في العد(تجربة تتم على مراحل)

٦. التوافيق:

(اختيار مجموعة جزئية من كلية دون الاهتمام بالترتيب) ومسائلة:
- عدد المصافحات
- اختيار أسئلة
- لجان لا تحوي مناصب
- عدد القطع المستقيمة
- سحب كرات معاً

ملاحظة: عند استخدام التوافيق وتثبيت مقدار ما فإننا نطرح عددهُ من فوق ومن تحت

٧. التراتيب:

(اختيار مجموعة جزئية من كلية مع الاهتمام بالترتيب والتكرار غير مسموح) ومسائلة:
- مسابقات تحوي مراكز أو ميداليات
- لجان تحوي مناصب
- سحب كرات على التتالي بدون إعادة

٨. القوائم المكررة:

(اختيار مجموعة جزئية من كلية مع الاهتمام بالترتيب والتكرار مسموح) ومسائلة: سحب كرات على التتالي مع إعادة

٩. الخانات:
- (تشكيل كلمات – رمازات – أرقام)
- ترتيب كتب

مع الانتباه أنهُ يجب مراعاة الشروط أولاً.
وفي حال كان الشرط أن العناصر مختلفة فإننا نتعامل معه باسلوب كم عدد صفيان؟

ملاحظات:
- في مسائل اللجان إذا كانت اللجنة تحوي أكثر من نوع فإننا نكتب بالعربي ثم نترجم.
- في مسائل اللجان عند وجود متخاصمين فإننا نوجد عدد اللجان الكلي ونحذف منه عدد اللجان التي تحوي متخاصمين.
- في مسائل الهدايا نميز:
  - عدد الهدايا يساوي عدد الأشخاص نستخدم العاملي.
  - عدد الهدايا أكثر من عدد الأشخاص بواحد فإننا نحتاج إلى مرحلتين.

المرحلة الأولى:
مرحلة اختيار 2 هدية ودمجها في هدية واحدة وتتم ب $\binom{\text{عدد الهدايا}}{2}$

المرحلة الثانية:
مرحلة توزيع الهدايا على عدد الأشخاص وتتم بالعاملي
ثم نستخدم المبدأ الأساسي في العد.

ملاحظة: تباديل الحالة:

$$\text{عدد تباديل الحالة} = \frac{\text{الكلي عاملي}}{\text{جداء المكرر عاملي}}$$

حيث:
حالات خاصة:
- حالة تشابه: لا يوجد تباديل للحالة.
- حالة نسق: لا يوجد تباديل للحالة
- حالة ثلاثة مقادير اثنان منها متشابهان: نضرب بالعدد 3
- حالة ثلاثة مقادير مختلفة: نضرب بالعدد 6 .

قاعدة: في مسائل المصافحات:
- عدد المصافحات: $\binom{n}{2}$
- عدد المصافحات لـ n شخص بينهم m شخص متخاصم:

$$\text{عدد المصافحات} = \binom{n}{2} - \binom{m}{2}$$

في مسائل المضلعات المحدبة يتحقق:

$$\text{عدد أقطار مضلع محدب} = \binom{n}{2} - n$$

$$\text{عدد نقاط تقاطع الأقطار} = \binom{n}{4} + n$$

مخططات داعمة:

التراتيب P_n^r حيث: $1 \le r \le n$

المخطط الأول: قوانين التراتيب:

القانون الأول

$$P_{\text{كبير}}^{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{الفرق})!}$$

نستخدم هذا القانون عندما يكون الصغير مجهولاً

القانون الثاني

ضرب تنازلي بحيث عدد مرات الضرب تقابل الصغير.

$$P_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$P_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

التوافيق: $\binom{n}{r}$ حيث: $0 \le r \le n$

المخطط الثاني: قوانين التوافيق:

القانون الأول

$$\binom{\text{كبير}}{\text{صغير}} = \frac{(\text{كبير})!}{(\text{الفرق})!\,(\text{صغير})!}$$

نستخدم هذا القانون عندما يكون الصغير مجهولاً

القانون الثاني

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$$

يستخدم هذا القانون عندما يكون الصغير معلوم

هذه الأيام «فترة إنقاذ» تستدرك ما فات، وتدرك ما هو آت، وتعمل بجهدك ما استطعت، لا تكثر الشكوى، لا تُطِل الوقوف، لا تجلس على حافة الطريق .. وجّه قلبك نحو السماء، وقل:

«لَا أَبْرَحُ حَتَّى أَبْلُغَ» 💙

شيفرة الـ 600 في الاحتمالات:

مفاهيم أساسية:

فضاء العينة:

تعريف: هو جميع النتائج الممكنة لتجربة ما.

رمزه: Ω

رمز عدد عناصره: $n(\Omega)$

الحدث:

تعريف: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

رمزه: أحرف كبيرة $A, B, \dots$

رمز عدد عناصره: $n(A)$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة فالحصول على عدد فردي هو الحدث:

$$A = \{1,3,5\}$$

قانون الاحتمال (احتمال حدث):

ليكن A حدثاً من فضاء العينة إن احتمال الحدث A:

تعريفه:

هو عدد يعبر عن إمكانية وقوع الحدث A

رمزه: $P(A)$

يحقق: $0 \le P(A) \le 1$

قانونه:

- إذا كان الحدث A مؤلف من مرحلة واحدة نستخدم القانون:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث} A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

- إذا كان الحدث A مؤلف من عدة مراحل فإننا:

① نحسب احتمال كل مرحلة على حدا.

② يكون احتمال A هو:

$$P(A) = (\text{مجموع احتمالات المراحل المؤلفة للحدث } A)$$

أحداث مميزة:

الحدث البسيط:

تعريف: هو كل مجموعة جزئية من فضاء العينة مكونة من عنصر واحد.

رمزه: أحرف كبيرة $A, B \dots$

رمز عدد عناصره: $n(A)$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد

الحدث A: ≪الحصول على عدد زوجي وأولي≫

لدينا: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ومنه: $A = \{2\}$

إذاً A حدث بسيط.

الحدث الأكيد:

تعريف: هو الحدث المؤلف من جميع النتائج الممكنة أي (هو الحدث الأكيد وقوعه وهو نفسه فضاء العينة).

رمزه: Ω

رمز عدد عناصره: $n(\Omega)$

ملاحظة: احتمال الحدث الأكيد هو الواحد أيّ $P(\Omega) = 1$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة.

الحدث A ≪الحصول على عدد أصغر تماماً من 7≫

لدينا: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

ومنه: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A = \{\Omega\}$$

إذاً A هو حدث أكيد.

الحدث المستحيل:

تعريف: هو الحدث الذي لا يحتوي على أية نتيجة ويقابله المجموعة الخالية $\phi = \{\,\}$ أيّ (هو الدث الذي يمكن وقوعه)

رمزه: ϕ

رمز عدد عناصره: $n(\phi)$

ملاحظة:

احتمال الحدث المستحيل هو الصفر: $P(\phi) = 0$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد

الحدث A ≪الحصول على عدد أكبر تماماً من 7≫

لدينا: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ومنه: $A = \{\phi\}$

إذاً: A هو حدث مستحيل.

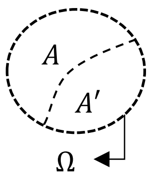
الحدث المعاكس (المتمم):

تعريف: الحدث المعاكس لـ A

هو الحدث الذي يقع عندما لا يقع الحدث A.

رمزه: A'

قانونه: $P(A) + P(A') = 1$



مثال: في تجربة لإلقاء حجر نرد:

الحدث A: ≪الحصول على عدد زوجي≫

الحدثA': ≪الحصول على عدد فردي≫

لدينا: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

ومنه: $A = \{2,4,6\}$

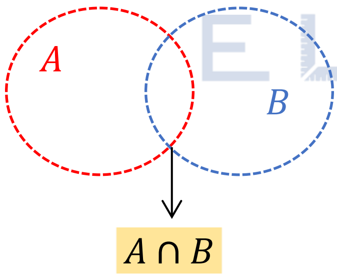
$$A' = \{1,3,5\}$$

إذا A و A' متعاكسان.

الحدث ≪ A و B ≫:

تعريف: هو الحدث الذي يقع عندما يقع الحدثان A و B في آن معاً وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئية $A \cap B$ أي مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى كل من A, B.

رمزه: $A \cap B$



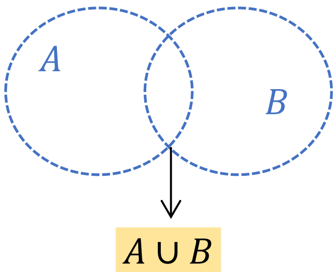
عندما يكون:

$A \cap B = \phi$ نقول إن الحدثين A, B منفصلان.

الحدث ≪ A أو B ≫:

تعريف: هو الحدث الذي يقع عندما يقع أحد الحدثين A أو B على الأقل وهذا الحدث يوافق المجموعة الجزئية $A \cup B$ أيّ مجموعة نتائج التجربة التي تنتمي إلى أيّ من المجموعتين A و B أو إلى كليهما.

رمزه: $A \cup B$



قانون يربط بين الحدثين $(A \cup B)$ و $(A \cap B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قانون دمورغان:

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

تنويه:

* التقاطع والاجتماع عمليات تبديله أي:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

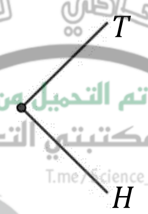
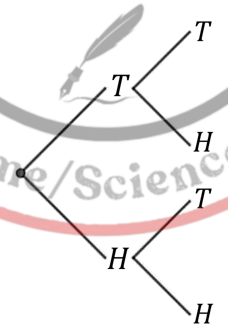
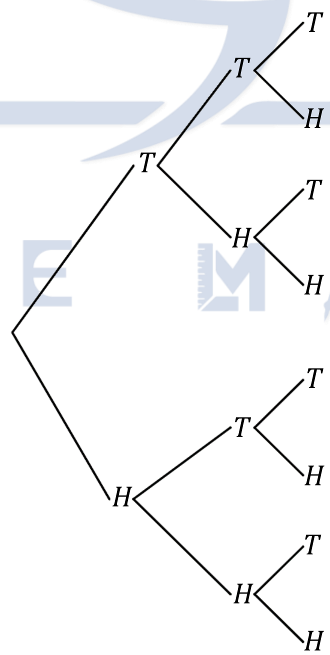
* أحد الحدثين على الأقل = اجتماع = $\cup$ = أو = + = جمع
* الحدثين معاً = تقاطع = $\cap$ = و = $\times$ = جداء

فضاءات عينة شهيرة:

فضاء العينة	كيفية التعامل معهُ
فضاء العينة	اسلوب العد
شبكة (جدول)	اسلوب العد
التمثيل شجري	خواص التمثيل الشجري
القوانين	نطبق القانون المناسب

أولاً	رمي قطع نقود متوازنة			
تمهيد	في القطع المتوازنة يكون: $P(T) = P(H)$ حيث T ترمز للكتابة و H ترمز للشعار			
كيفية التعامل معهُ	نستخدم فضاء العينة ثم نتابع بأسلوب العد			
نميز	الحالة	الفضاء المستخدم Ω	$n(\Omega)$	تمرين
	رمي قطعة نقود متوازنة	$\Omega = \{T, H\}$	$n(\Omega) = 2$	في تجربة رمي قطع نقود متوازنة ما احتمال الحدث A « الحصور على الوجه T »
	رمي قطعتي نقود متوازنة	$\Omega = \left\{TT, \begin{matrix} TH \\ HT \end{matrix}, HH\right\}$	$n(\Omega) = 4$	في تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنة 1. ما احتمال الحدث A «ظهور وجهين T » 2. ما احتمال الحدث B « الوجه الأول هو H » 3. ما احتمال الحدث C « الوجهين من نفس النوع » 4. ما احتمال الحدث D « الحصول على الوجه H مرة على الأقل » 5. ما احتمال الحدث E « الحصول على الوجه H مرة على الأكثر»
	رمي ثلاثة قطع نقود متوازنة	$\Omega = \left\{\begin{matrix} HHT\ TTH \\ HHH\ HTH\ THT\ TTT \\ THH\ HTT \end{matrix}\right\}$	$n(\Omega) = 8$	1. ما احتمال الحدث A « الحصول على ثلاثة أوجه متشابهة» 2. ما احتمال الحدث B « الحصول على وجهين H فقط» 3. ما احتمال الحدث C « الحصول على الوجه T مرة على الأقل» 4. ما احتمال الحدث D « الحصول على الوجه H مرة على الأكثر» 5. ما احتمال الحدث E « الحصول على وجهين H على الأقل»

ثانيا	رمي قطع نقود غير متوازنة
تمهيد	في قطع النقود غير المتوازنة يكون: $P(T) \neq P(H)$
كيفية التعامل معه	نستخدم التمثيل الشجري

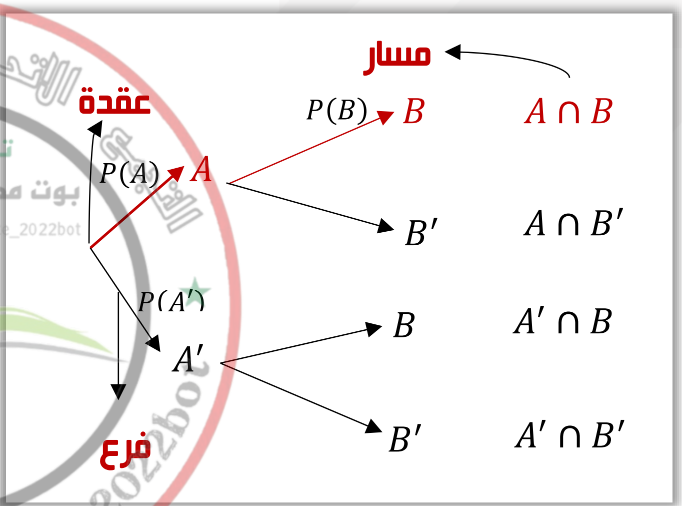
	الحالة	الفضاء	تمرين
نميز	رمي قطعة نقود غير متوازنة		في تجربة رمي قطعة نقود غير متوازنة بحيث يكون احتمال ظهور الكتابة T في كل رمية هو $\frac{1}{4}$, ما احتمال الحدث A «الحصول على الوجه H»
	رمي قطعتي نقود غير متوازنة		في تجربة إلقاء قطعتي نقود غير متوازنة بحيث يكون احتمال ظهور الشعار H في كل رمية هو $\frac{3}{5}$, ١. ما احتمال الحدث A « ظهور وجهين T » ٢. ما احتمال الحدث B « الوجه الأول هو H » ٣. ما احتمال الحدث C « الوجهين من نفس النوع » ٤. ما احتمال الحدث D « الحصول على الوجه H مرة على الأقل » ٥. ما احتمال الحدث E « الحصول على الوجه H مرة على الأكثر»
	رمي ثلاثة قطع نقود غير متوازنة		في تجربة إلقاء قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشعار H في كل رمية هو $\frac{1}{3}$, ١. ما احتمال الحدث A « الحصول على وجهين T» ٢. ما احتمال الحدث B « الحصول على الوجه H ثلاث مرات» ٣. ما احتمال الحدث C « الحصول على الوجه H مرتين على الأقل» ٤. ما احتمال الحدث D « الحصول على الوجه T مرة على الأكثر»

تذكر جيداً ..

أن أعظم انتصار لك أن تهزم هَواك، ولن يبلغ المجد إلا أهل التعب، ولن يَصل إلا من صَدَق «والنَّعيم لا يُدرَك بالنَّعيم» 💙

قواعد التعامل مع التمثيل الشجري:

ليكن لدينا التمثيل الشجري التالي:



- مجموع الاحتمالات المشكلة لعقدة يساوي الواحد دوماً: $P(A) + P(A') = 1$
- احتمال مسار: يساوي جداء احتمالات الفروع المشكلة لهذا المسار

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- احتمال حدث ونميز:

① الحدث ظهر مرة واحدة فإن احتماله يساوي احتمال الفروع المؤدية له: $P(A) = P(A)$

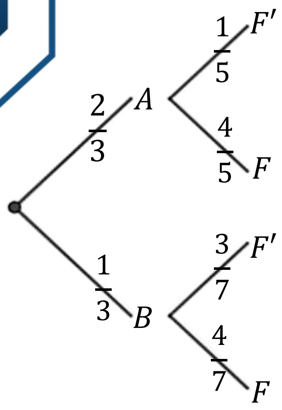
② الحدث ظهر أكثر من مرة فإن احتماله يساوي مجموع احتمالات المسارات المؤدية لهذا الحدث

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

تمرين:

تأمل التمثيل الشجري الآتي:

واحسب كلاً من الاحتمالات التالية:



١. $P(A) = \frac{2}{3}$

٢. $P(B) = \frac{1}{3}$

٣. $P(F') = P(A \cap F') + P(B \cap F')$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{2}{15} + \frac{1}{7} = \frac{29}{105}$$

٤. $P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F)$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{8}{15} + \frac{4}{21} = \frac{168+60}{315} = \frac{228}{315} = \frac{76}{105}$$

٥. $P(A \cap F') = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}$

٦. $P(A \cap F) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$

٧. $P(B \cap F') = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{21}$

٨. $P(B \cap F) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{4}{21}$

ثالثاً	الولادات والأطفال			
تمهيد	نرمز بالرمز M (للذكر-للصبي) ونرمز بالرمز F (للانثى-للبنت)			
كيفية التعامل معه	نستخدم فضاء العينة ثم نتابع بأسلوب العد			
نميز	الحالة	الفضاء المستخدم Ω	$n(\Omega)$	تمرين
	ولادة واحدة (طفل واحد)	$\Omega = \{F, M\}$	$n(\Omega) = 2$	لدى عائلة طفل واحد ما احتمال A «الطفل هو انثى»
	ولادتين (طفلين)	$\Omega = \left\{FF \begin{matrix} FM \\ MF \end{matrix} MM\right\}$	$n(\Omega) = 4$	لدى عائلة طفلان ١. ما احتمال A «للطفلان الجنس نفسه» ٢. ما احتمال B «الطفل الصغير هو انثى»

الحالة	الفضاء المستخدم Ω	$n(\Omega)$	تمرين
ثلاثة ولادات (ثلاثة أطفال)	$\Omega = \left\{\begin{matrix} FFM & MMF \\ FFF\ FMF & MFM\ MMM \\ MFF & FMM \end{matrix}\right\}$	$n(\Omega) = 8$	لدى عائلة ثلاث أطفال ١. ما احتمال A «الأطفال الثلاثة ذكور» ٢. ما احتمال B «الطفل الصغير هو ذكر» ٣. ما احتمال C «للأطفال الثلاثة الجنس نفسه»
أربعة ولادات (أربعة أطفال)	$\Omega = \left\{ MMMM\ \begin{matrix} MMFF \\ MMMF\ FFMM\ FFFM \\ MMFM\ FMMF\ FFMF \\ MFMM\ MFFM\ FMFF \\ FMMM\ FMFM\ MFFF \\ MFMF \end{matrix}\ FFFF \right\}$	$n(\Omega) = 16$	لدى عائلة أربعة أطفال ١. ما احتمال A «للأطفال الأربعة الجنس نفسه» ٢. ما احتمال B «هناك طفلان ذكران وطفلتان» ٣. ما احتمال C «الطفل الثالث انثى» ٤. احسب $P(A \cap B)$ ٥. احسب $P(B \cap C)$

رابعا	إلقاء أحجار نرد متوازنة	
نميز	إلقاء حجر نرد متوازن	إلقاء حجري نرد متوازنين
كيفية التعامل معه	نستخدم فضاء العينة ثم نتابع بأسلوب العد	نستخدم الشبكة (الجدول) ثم نتابع بأسلوب العد
فضاء العينة المستخدم	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$	(الجدول أدناه)
$n(\Omega)$	$n(\Omega) = 6$	$n(\Omega) = 36$
تمرين	في تجربة رمي حجر نرد متوازن ١. ما احتمال الحدث A «الحصول على عدد زوجي» ٢. ما احتمال الحدث B «الحصول على عدد أولي»	في تجربة رمي حجري نرد ١. ما احتمال الحدث A « ظهور وجهين يحملان الرقم نفسه» ٢. ما احتمال الحدث B «الوجه الثاني يحمل رقماً أكبر من الوجه الأول» ٣. ما احتمال الحدث C « مجموع الوجهين الظاهرين أكبر أو يساوي 4» ٤. ما احتمال الحدث D « مجموع الوجهين الظاهرين أصغر أو يساوي 4» ٥. احسب احتمال: $P(A \cap C)$ و $P(B \cap C)$ و $P(B \cap D)$ و $P(A \cap D)$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)					
2					(2,5)	
3				(3,4)		
4		(4,2)				
5					(5,5)	
6			(6,3)			

القطر الرئيسي

<table>
<tr><th colspan="6">خامسا: سحب الكرات أو البطاقات</th></tr>
<tr><th>كرة واحدة</th><th colspan="3">كرتين</th><th colspan="3">ثلاث كرات</th></tr>
<tr><td rowspan="4">نستخدم التمثيل الشجري</td><td colspan="3">يمكن استخدام القوانين لكن يُنصح باستخدام الشبكة ونميز الحالات الآتية وفقاً لنوع السحب:</td><td colspan="3">نستخدم الكتابة عربي ثم الترجمة إلى رياضي بالاستفادة من القوانين ونميز الحالات الآتية وفقاً لنوع السحب:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">معا</td><td colspan="2">على التتالي</td><td rowspan="2">معا</td><td colspan="2">على التتالي</td></tr>
<tr><td>مع إعادة</td><td>دون إعادة</td><td>مع إعادة</td><td>دون إعادة</td></tr>
<tr><td>فإننا نحذف القطر الرئيسي وما تحته</td><td>فإننا نحافظ على القطر الرئيس</td><td>فإننا نحذف القطر الرئيسي</td><td>فإننا نستخدم القانون $\binom{n}{r}$</td><td>فإننا نستخدم القانون n^r</td><td>فإننا نستخدم القانون P_n^r</td></tr>
</table>

التمرين الأول:

يحتوي صندوق على خمسة كرات ثلاثة حمراء اللون تحمل الأرقام $0,1,2$ وكرتان سوداء اللون تحمل الأرقام $0,1$ نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة والمطلوب:

1. احسب احتمال الحدث A ≪الحصول على كرتين من اللون نفسه≫
2. احسب احتمال الحدث B ≪مجموع رقمي الكرتين أكبر تماماً من 2≫

الحل:

	R_0	R_1	R_2	B_0	B_1
R_0		A	A		
R_1	A		$A\ \ B$		
R_2	A	$A\ \ B$			B
B_0					A
B_1			B	A	

$$n(\Omega) = 20$$

الطلب الأول:

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

الطلب الثاني:

$$P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

التمرين الثاني

يحتوي صندوق على ست كرات أربعة منها صفراء اللون واثنتان منها سوداء اللون, نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة والمطلوب: ما احتمال الحصول على كرتين من اللون نفسه

	y	y	y	y	B	B
y	E	E	E	E		
y	E	E	E	E		
y	E	E	E	E		
y	E	E	E	E		
B					E	E
B					E	E

$$n(\Omega) = 36$$

ليكن الحدث E الحصول على كرتين من اللون نفسه:

$$P(E) = \frac{20}{36}$$

التمرين الثالث:

صندوق يحوي 10 كرات: 6 كرات حمراء و 3 بيضاء وواحدة سوداء , نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً.

نوع السحب معاً لذلك القانون المناسب هو $\binom{n}{r}$.

$$n(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)} = 120$$

الطلب الأول:

احسب احتمال الحصول على ثلاثة كرات من اللون نفسه , ليكن A ≪ الحصول على ثلاث كرات من اللون نفسه ≫.

$$A: 3R \text{ أو } 3W$$

$$n(A) = \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = \frac{(6)(5)(4)}{(3)(2)(1)} + 1 = 21$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{21}{120}$$

الطلب الثاني:

احسب احتمال الحصول على كرتين من اللون نفسه ليكن B ≪ الحصول على كرتين من اللون نفسه≫.

$$B: 2R \text{ و } 1W \text{ أو } 2R \text{ و } 1B$$

$$\text{أو } 2W \text{ و } 1R \text{ أو } 2W \text{ و } 1B$$

$$n(B) = \binom{6}{2}\binom{3}{1} + \binom{6}{2}\binom{1}{1} + \binom{3}{2}\binom{6}{1} + \binom{3}{2}\binom{1}{1}$$

$$= (15)(3) + (15)(1) + (3)(6) + (3)(1) = 81$$

$$\rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{81}{120}$$

الطلب الثالث:

احسب احتمال الحصول على ثلاثة كرات مختلفة الألوان ليكن C ≪ الحصول على ثلاث كرات مختلفة الألوان≫ .

$$C: 1R \text{ و } 1W \text{ و } 1B$$

$$n(C) = \binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} = (6)(3)(1) = 18$$

$$\rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{18}{120}$$

الطلب الرابع:

احسب احتمال الحصول على ثلاثة كرات جميعها من لون واحد ليكن D ≪ الحصول على ثلاث كرات جميعها من لون واحد≫

$$D: 3R \text{ أو } 3W$$

$$n(D) = \binom{6}{3} + \binom{3}{3} = 20 + 1 = 21$$

$$\rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{21}{120}$$

الطلب الخامس:

احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ليكن E ≪ الحصول على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد≫

نلاحظ أنّ الحدث E هو الحدث المعاكس للحدث D إذاً:

$$P(E) + P(D) = 1$$

$$P(E) = 1 - P(D)$$

$$P(E) = 1 - \frac{21}{120}$$

$$\rightarrow P(E) = \frac{99}{120}$$

الطلب السادس:

احسب احتمال الحصول على كرة حمراء على الأقل ليكن F

≪ الحصول على كرة حمراء على الأقل≫.

الطريقة الأولى:

نوجد الحدث المعاكس للحدث F وليكن F' ≪ عدم ظهور كرة حمراء≫

F' : عدم ظهور كرة حمراء

$$n(F') = \binom{4}{3} = 4$$

$$\rightarrow P(F') = \frac{4}{120}$$

فيكون:

$$P(F) + P(F') = 1$$

$$P(F) = 1 - P(F')$$

$$\rightarrow P(F) = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120}$$

الطريقة الثانية: الترجمات

F: $3R$ أو $2R$ و $1W$ أو $2R$ و $1B$

أو $1R$ و $2W$ أو $1R$ و $1W$ و $1B$

الطلب السابع:

احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل

وليكن G ≪ الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل≫.

نوجد الحدث المعاكس للحدث G وليكن G' ≪ عدم ظهور كرة بيضاء≫

G' : عدم ظهور كرة بيضاء

$$n(G') = \binom{7}{3} = 35$$

$$\rightarrow P(G') = \frac{n(G')}{n(\Omega)} = \frac{35}{120}$$

فيكون:

$$P(G) + P(G') = 1$$

$$P(G) = 1 - P(G')$$

$$P(G) = 1 - \frac{35}{120}$$

$$\rightarrow P(G) = \frac{85}{120}$$

الطلب الثامن:

احسب احتمال الحصول على كرة حمراء على الأكثر وليكن H

≪ الحصول على كرة حمراء على الأكثر ≫

H: $1R$ و $2W$ أو $1R$ و $1W$ و $1B$

أو 3 كرات غير حمراء

$$n(H) = \binom{6}{1}\binom{3}{2} + \binom{6}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} + \binom{4}{3}$$

$$= (6)(3) + (6)(3)(1) + (4) = 40$$

$$\rightarrow P(H) = \frac{40}{120}$$

سادساً	سابعاً
المسائل التي تحوي نسب مئوية والمسائل التي تحوي عدة صناديق وباقي المسائل	برنولي
نستخدم التمثيل الشجري	كل شيء يزيد عن حده يقلب برنولي حيث الحد هو فضاءات العينة الشهيرة

الاستقلال الاحتمالي:

تعريف	إذا كان A و B حدثين في تجربة احتمالية وكان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر نقول إنّ A و B مستقلان احتمالاً وعندئذ يتحقق: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
نص السؤال	هل A و B مستقلان احتمالياً؟؟
فكرة الحل	☝ نوجد كلاً من: ⁕ $\boldsymbol{P(A)}$ ⁕ $\boldsymbol{P(B)}$ ⁕ $\boldsymbol{P(A \cap B)}$ ⁕ $P(A).P(B)$ ✌ ونميز الحالات الآتية: ① إذا تحقق: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ ومنه: يكون الحدثان A و B مستقلان احتمالياً ② إذا تحقق: $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$ ومنه: يكون الحدثان A و B غير مستقلان احتمالياً

التمرين الأول:

نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة ونتأمل:

الحدث A ≪ العدد الظاهر زوجي≫

الحدث B ≪ العدد الظاهر أولي ≫

أيكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً؟

الحل:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$n(\Omega) = 6$$

$$n(A) = 3 \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$n(B) = 3 \rightarrow P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A).P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

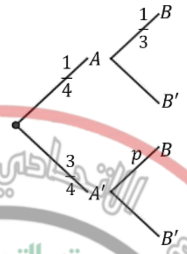
نلاحظ انّ:

$$P(A).P(B) \neq P(A \cap B)$$

إذاً الحدثان A و B غير مستقلين احتمالياً.

التمرين الثاني:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور كيف نختار قيمة p حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً؟



الحل:

بما أنّ A و B مستقلين احتمالياً فإنّ:

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(B|A) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

وبالاعتماد على المخطط الشجري:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4}p$$

$$\frac{3}{4}p = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$p = \frac{1}{3}$$

الاحتمال الشرطي:

الرمز	$P(A\|B)$
قراءة الرمز	* احتمال A علماً أن B قد وقع. * احتمال A بعد وقوع B * احتمال A مشروطاً بالحدث B.
تعريف	ليكن B حدثاً $P(B) \neq 0$ ولنفترض أننا نعلم أنه قد وقع عندئذٍ نعرّف الاحتمال لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع بالصيغة: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
كيفية معرفة وجود الاحتمال الشرطي	وجود إحدى الكلمات الآتية: * علماً أن * بعد وقوع * إذا علمت * إذا كان
كيفية حل المسائل التي تحوي احتمال شرطي	* نضع فضاء العينة الشهيرة المناسب. * نحدد وجود احتمال شرطي بالاعتماد على وجود إحدى دلالاته. * ترميز المطلوب بحيث: $P(\ \|\ )$ هو الحدث الذي يأتي بعد دلالات وجود الاحتمال الشرطي ← | → هو الحدث الذي يأتي بعد كلمة ما احتمال

الصيغة	الاحتمال المطلوب
إذا كان B ما احتمال A :	$P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
إذا علمت أن E ما احتمال C:	$P(C\|E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)}$
ما احتمال F علماً أن D:	$P(F\|D) = \frac{P(F \cap D)}{P(D)}$
احتمال G بعد وقوع H:	$P(G\|H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)}$

التمرين الأول:

يحتوي صندوق على خمس كرات ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان وتحمل الأرقام 1 و 2 , نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق , يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر

١. ما احتمال A » للكرتين المسحوبتين اللون ذاته»

٢. ما احتمال B » مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3 »

٣. ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع

الحل:

	B_1	B_2	B_3	R_1	R_2
B_1		$A\ \ B$	A		B
B_2			A	B	
B_3					
R_1					$A\ \ B$
R_2					

$$n(\Omega) = 10$$

الطلب الأول والثاني:

$$P(A) = \frac{4}{10} \quad , \quad P(B) = \frac{4}{10}$$

الطلب الثالث:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني:

تتألف عائلة من أربعة أطفال نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفل انثى ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً نرمز A و B و C إلى الأحداث:

A «للأطفال الأربعة الجنس ذاته»

B «هناك طفلان ذكران وطفلتان»

C «الطفل الثالث أنثى»

١. احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C

٢. احسب $P(A \cap C)$ ثم $P(C|A)$ أيكون الحدثان A و C مستقلان احتمالياً؟

٣. احسب $P(B \cap C)$ ثم $P(C|B)$ أيكون الحدثان B و C مستقلان احتمالياً؟

الحل:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{ccccc} & & MMFF & & \\ & MMMF & FFMM & FFFM & \\ MMMM & MMFM & FMMF & FFMF & FFFF \\ & MFMM & MFFM & FMFF & \\ & FMMM & FMFM & MFFF & \\ & & MFMF & & \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow n(\Omega) = 16$$

الطلب الأول:

$$P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(B) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{4}{8}$$

الطلب الثاني:

$$P(A \cap C) = \frac{1}{16}$$

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$$

اختبار الاستقلال الاحتمالي للحدثين A و C وفق:

$$P(A).P(C) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{1}{16}$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{16}$$

ومنهُ:

$$P(A).P(C) = P(A \cap C)$$

وبالتالي الحدثين A و C مستقلان احتمالياً.

الطلب الثالث:

$$P(B \cap C) = \frac{3}{16}$$

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$$

اختبار الاستقلال الاحتمالي للحدثين B و C وفق:

$$P(B).P(C) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

$$P(B \cap C) = \frac{3}{16}$$

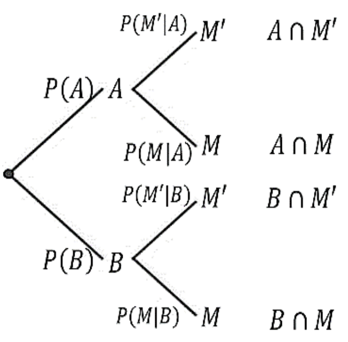
ومنهُ:

$$P(B).P(C) = P(B \cap C)$$

وبالتالي الحدثين B و C مستقلان احتمالياً.

التمثيل الشجري والاحتمال الشرطي:

كيفية التعامل معه	كما في قواعد التمثيل الشجري أيّ أنّ: $P(A \cap M) = P(A).P(M\|A)$ ، $P(M\|A) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)}$	
أنماط التمارين	النمط	فكرة الحل
	النمط الأول: معطيات الشجرة كاملة	❋ نضع الشجرة المناسبة ❋ نتابع كما تعلمنا في قوانين التعامل مع الشجرة
	النمط الثاني: معطيات الشجرة ناقصة	❋ نوجد جميع المجاهيل من أجل إكمال الشجرة ❋ نتابع كما في النمط الأول



التمرين الأول:

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح, صنعت الورشة A منها 1200 مصباحاً وصنعت البقية الورشة B, هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة, في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة, نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب ونرمز:

بالرمز A إلى الحدث≪ المصباح مصنوع في الورشة A ≫

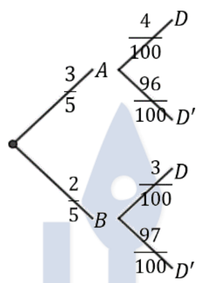
وبالرمز B إلى الحدث≪ المصباح مصنوع في الورشة B≫

وبالرمز D إلى الحدث≪ المصباح معطوب≫ والمطلوب:

1. أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة
2. احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً
3. إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

$$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)$$
$$=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{100}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{100}\right)$$
$$=\frac{12}{500}+\frac{6}{500}=\frac{18}{500}=\frac{9}{250}$$

الطلب الثالث:

$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}$$

حيث:

$$P(A\cap D)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{100}\right)=\frac{12}{500}=\frac{6}{250}$$
$$P(D)=\frac{9}{250}$$

ومنهُ:

$$P(A|D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{\frac{6}{250}}{\frac{9}{250}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

طلب إضافي:

إذا علمت انّ المصباح مصنوع في الورشة A فما احتمال أن يكون غير معطوب.

$$P(D'|A)=\frac{P(D'\cap A)}{P(A)}$$

حيث:

$$P(D'\cap A)=\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{96}{100}\right)=\frac{288}{500}$$
$$P(A)=\frac{3}{5}$$

ومنهُ:

$$P(D'|A)=\frac{P(D'\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{288}{500}}{\frac{3}{5}}=\frac{96}{100}$$

التمرين الثاني:

أجريت دراسة على عينة مكونة من 1000 شخص (600 ذكر و 400 أنثى) تبيّن أنّ 75% من الذكور مدخنون و 20% من الإناث مدخنون ونختار عشوائيّاً شخصاً من العينة.

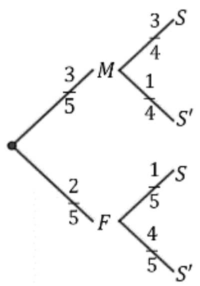
الرموز: M ذكر و F أنثى و S مدخن و S' غير مدخن.

المعطيات:

$$P(M)=\frac{600}{1000}=\frac{3}{5}$$
$$P(F)=\frac{400}{1000}=\frac{2}{5}$$
$$P(S|M)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$$
$$P(S|F)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$$

الطلب الأول:

ارسم مخططاً شجريّاً يمثل نتائج التجربة.



الطلب الثاني:

احسب احتمال كل من الحدثين:

A≪ الشخص ذكر مدخن≫

$$P(A)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$$

B ≪الشخص أنثى مدخنة≫

$$P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$$

الطلب الثالث:

ما احتمال أن يكون الشخص مدخناً؟

$$P(S)=\frac{9}{20}+\frac{2}{25}=\frac{53}{100}$$

الطلب الرابع:

إذا كان الشخص مدخن فما احتمال أن يكون أنثى ؟

$$P(F|S)=\frac{P(F\cap S)}{P(S)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{53}{100}}=\frac{8}{53}$$

شيفرة الـ 600

الجـزء الثاني

الطلب الخامس:

ما احتمال أن يكون الشخص ذكر علماً أنه من الأشخاص غير المدخنين؟

$$p(M|S') = \frac{P(M \cap S')}{P(S')}$$

حيث:

$$P(S') = 1 - P(S) = 1 - \frac{53}{100} = \frac{47}{100}$$

$$P(M \cap S') = \frac{3}{20}$$

ومنه:

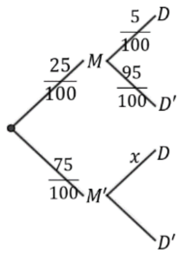
$$\rightarrow P(M|S') = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{47}{100}} = \frac{15}{47}$$

التمرين الثالث:

تبين دراسة إحصائية أجريت على مجموعة من الرياضيين أنه في أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يكون يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02 ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق ويتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء وبين هؤلاء يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً $0,05$ ليكن M الحدث «الرياضي يستعمل دواء الرشح » وليكن D الحدث «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية» يجري اختبار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً. احسب احتمال كل من الحدثين:

١. «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»

٢. «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنه لا يستعمل دواء الرشح»



حساب قيمة x :

لدينا:

$$P(D) = \frac{2}{100}$$

ومنه:

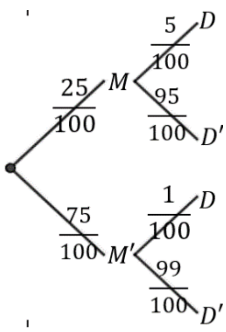
$$P(D) = P(M' \cap D) + P(M \cap D)$$

$$\frac{2}{100} = \left(\frac{75}{100}\right)x + \left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{5}{100}\right)$$

$$\frac{1}{50} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{80}$$

$$x = \frac{1}{100}$$

ومنه يصبح التمثيل الشجري:



حساب الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»

$$P(M \cap D) = \frac{25}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{5}{400}$$

حساب الحدث: «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنه لا يستعمل دواء الرشح»

$$P(D|M') = \frac{P(D \cap M')}{P(M')} = \frac{\frac{3}{400}}{\frac{75}{100}} = \frac{1}{100}$$

التمرين الرابع:

في أحد المجتمعات تظهر أعراض مرض كورونا على 70% من الأشخاص و 20% منهم مسحاتهم إيجابية و 70% من المسحات المأخوذة من أشخاص لا تظهر عليهم أعراض المرض تكون نتيجتها سلبية , نختار عشوائياً شخص من هذا المجتمع ونتأمل الحدثين: A «الشخص المختار تظهر عليه الأعراض» و B «مسحة الشخص المختار إيجابية»

والمطلوب:

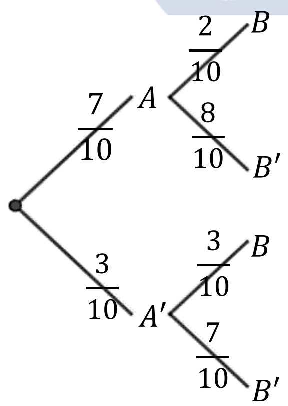
١. أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

٢. احسب احتمال أن تكون مسحة الشخص المختار إيجابية.

٣. إذا علمت أنّ الشخص المختار مسحته إيجابية فما احتمال أن تظهر عليه الأعراض.

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

$$= \left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{23}{100}$$

الطلب الثالث:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)}{\frac{23}{100}} = \frac{14}{23}$$

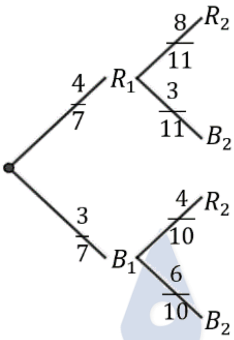
التمرين الخامس:

تتأمل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء، نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق وبعدئذٍ نسحب مجدداً كرة من الصندوق لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث ≪الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون≫ وليكن R_1 الحدث ≪الكرة المسحوبة في المر الأولى حمراء اللون≫

1. أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.
2. احسب احتمال الحدث R_2
3. إذا كان الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون في احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون؟

الحل:

الطلب الأول:



الطلب الثاني:

$$P(R_2) = P(R_1 \cap R_2) + P(B_1 \cap R_2)$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{8}{11}\right) + \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{32}{77} + \frac{12}{70} = \frac{226}{385}$$

الطلب الثالث:

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$$

حيث:

$$P(B_1 \cap R_2) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{12}{70}$$

$$P(R_2) = \frac{226}{385}$$

ومنهُ:

$$\to P(B_1|R_2) = \frac{\frac{12}{70}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

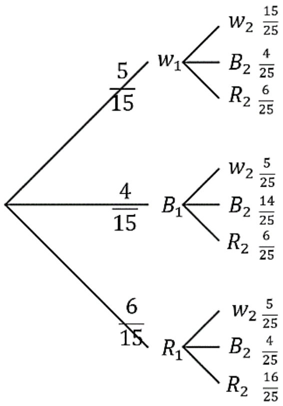
التمرين السادس:

صندوق يحوي 5 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 6 كرات حمراء , نسحب بشكل عشوائي كرة واحدة من الصندوق نسجل لونها ثم نعيدها بعد إضافة 10 كرات من اللون ذاته إلى الصندوق ثم نسحب كرة أخرى والمطلوب:

1. أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.
2. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في السحبة الثانية حمراء.

الحل:

الطلب الأول:



$$P(R_2) = P(R_2 \cap w_1) + P(R_2 \cap B_1) + P(R_2 \cap R_1)$$

$$= \frac{6}{25}\cdot\frac{5}{15} + \frac{6}{25}\cdot\frac{4}{15} + \frac{16}{25}\cdot\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

الطلب الثاني:

إذا علمت أن الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء فما احتمال أن تكون الأولى حمراء.

$$P(R_1|R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{25}}{\frac{2}{5}} = \frac{16}{25}$$

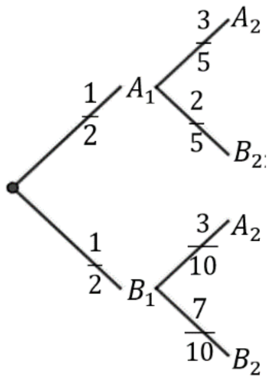
التمرين السابع:

يخضع الطالب سعيد لعدة اختبارات متتالية، وفق ما يلي:
احتمال نجاحه في الاختبار الأول يساوي احتمال رسوبه
إذا نجح سعيد في اختبار ما يكون احتمال رسوبه في الاختبار التالي $\frac{2}{5}$ وإذا رسب في ذلك الاختبار يكون احتمال نجاحه في الاختبار التالي هو $\frac{3}{10}$ ليكن A_n حدث نجاح الطالب سعيد في الاختبار n و B_n حيث رسوب الطالب سعيد في الاختبار n
نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$q_n = P(B_n) \text{ و } P_n = P(A_n) \ ; \ n \geq 1$$

الطلب الأول:

احسب P_2

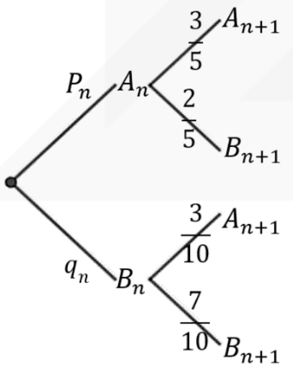


$$P_2 = P(A_2)$$

$$= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{9}{20}$$

الطلب الثاني: عبّر عن P_{n+1} بدلالة P_n



$$P_{n+1}=\frac{3}{5}P_n+\frac{3}{10}q_n$$

$$P_{n+1}=\frac{3}{5}P_n+\frac{3}{10}(1-P_n)$$

$$P_{n+1}=\frac{3}{5}P_n+\frac{3}{10}-\frac{3}{10}P_n$$

$$P_{n+1}=\frac{3}{10}P_n+\frac{3}{10}$$

الطلب الثالث:

نعرف المتتالية:

$$u_n=P_n-\frac{3}{7}$$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية وعيّن أساسها وحدها الأول ثم اكتب u_n بدلالة n

اثبات أن $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية:

$$u_{n+1}=P_{n+1}-\frac{3}{7}$$

$$=\frac{3}{10}P_n+\frac{3}{10}-\frac{3}{7}=\frac{3}{10}P_n-\frac{9}{70}$$

نشكل النسبة وفق:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{3}{10}P_n-\frac{9}{70}}{P_n-\frac{3}{7}}$$

$$=\frac{\frac{3}{10}\left(P_n-\frac{3}{7}\right)}{P_n-\frac{3}{7}}=\frac{3}{10}$$

إذاً المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها: $q=\frac{3}{10}$

وحدها الأول يُحسب وفق:

$$u_1=P_1-\frac{3}{7}=\frac{1}{2}-\frac{3}{7}=\frac{1}{14}$$

كتابة u_n بدلالة n:

$$\frac{u_n}{u_1}=q^{n-1}\Rightarrow u_n=u_1q^{n-1}$$

$$u_n=\frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}=\frac{1}{14}\left(\frac{3}{10}\right)^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)^{n}$$

$$=\frac{1}{14}\left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^{n}=\frac{5}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^{n}$$

استنتاج P_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n$

كتابة P_n بدلالة n:

$$u_n=P_n-\frac{3}{7}$$

$$P_n=u_n+\frac{3}{7}$$

$$P_n=\frac{5}{21}\left(\frac{3}{10}\right)^{n}+\frac{3}{7}$$

إيجاد $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$

بما أنّ $\frac{3}{10}<1$

فإنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^{n}=0$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty}P_n=\frac{5}{21}(0)+\frac{3}{7}=\frac{3}{7}$$

التمرين الثامن:

يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء , إذا صد ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8 وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإنّ احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6 ونفترض أنّ احتمال أنّ يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7 ليكن الحدث A_n "يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n " والمطلوب:

١. احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$

٢. استنتج أنّ $P(A_2)=0.74$

٣. نعرف $p_n=P(A_n)$:

(a برهن أنّ $p_{n+1}=0.2p_n+0.6$

(b نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة:

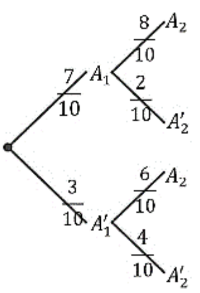
$$u_n=p_n-0.75$$

بيّن أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2 ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n$

الحل:

الطلب الأول:

حسب معطيات المسألة:



$$P(A_2|A_1')=0.6$$

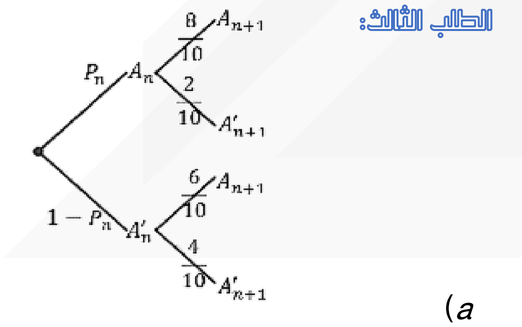
$$P(A_2|A_1)=0.8$$

الطلب الثاني:

$$P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1'\cap A_2)$$

$$=0.7\times 0.8+0.3\times 0.6=0.74$$

الطلب الثالث:



(a

$$p_{n+1} = 0.8p_n + 0.6(1-p_n)$$
$$p_{n+1} = 0.2.p_n + 0.6$$

(b

لدينا:

$$u_n = p_n - 0.75$$
$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.75$$
$$= 0.2p_n + 0.6 - 0.75 = 0.2p_n - 0.15$$
$$= 0.2(p_n - 0.75) = 0.2u_n = q.u_n$$

إذن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q = 0.2$ وحدها الأول:

$$u_1 = p_1 - 0.75 = 0.70 - 0.75 = -0.05$$

وبالتالي:

$$u_n = u_1(q)^{n-1}$$

ومنهُ:

$$u_n = -0.05(0.2)^{n-1} = -0.25(0.2)^n$$

استنتاج عبارة p_n بدلالة n :

$$p_n = 0.75 + u_n$$
$$= 0.75 - 0.25(0.2)^n$$

إيجاد $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$:

بما أنّ: $-1 < 0.2 < 1$ فإنّ:

$$\lim_{n\to+\infty} (0.2)^n = 0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.75$$

التمرين التاسع:

يمارس أحد الأشخاص الرياضة , احتمال أن يمارس الشخص الرياضة في اليوم الأول $\frac{1}{2}$, إذا مارس الشخص الرياضة في اليوم n فإنّ احتمال أن يمارسها في اليوم التالي $\frac{3}{4}$ وإذا لم يمارس الشخص الرياضة في اليوم n فإنّ احتمال ألا يمارسها في اليوم التالي $\frac{1}{2}$, نعرف $p_n = P(S_n)$ احتمال أن يمارس الشخص الرياضة في يوم n والمطلوب:

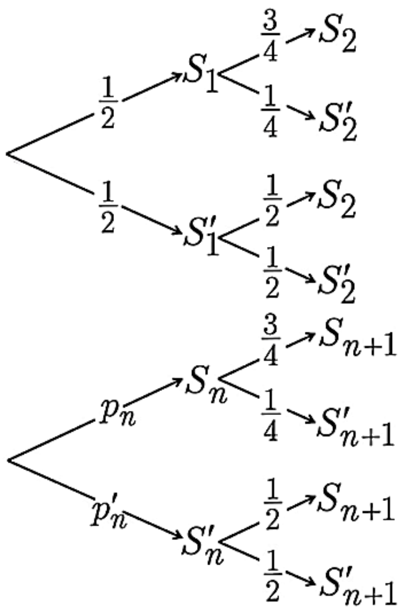
١. عين p_1 ثم أثبت أنّ $p_2 = \frac{5}{8}$

٢. أثبت أنّ $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$

٣. نعرف المتتالية $u_n = p_n - \frac{2}{3}$ هندسية , عين حدها الأول وأساسها

٤. اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

الحل:



الطلب الأول:

$$p_1 = P(S_1) = \frac{1}{2}$$
$$p_2 = P(S_2)$$
$$= P(S_1 \cap S_2) + P(S'_1 \cap S_2)$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$$

الطلب الثاني:

$$p_{n+1} = P(S_{n+1})$$
$$= P(S_n \cap S_{n+1}) + P(S'_n \cap S_{n+1})$$
$$= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2}p'_n = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n)$$
$$= \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

الطلب الثالث:

$$u_n = p_n - \frac{2}{3}$$
$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n$$

وبالتالي المتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول:

$$u_1 = p_1 - \frac{2}{3}$$
$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$$

الطلب الرابع:

$$u_n = u_1 . q^n$$
$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$p_n = u_n + \frac{2}{3}$$
$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$$

المتتالية $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هندسية أساسها

$-1 \le q = \frac{1}{4} \le 1$ ومنه:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

ومنهُ:

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$$

المتحولات العشوائية:

أولاً: القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي:

<table>
<tr><td>الطلب</td><td colspan="3">الأول</td></tr>
<tr><td>نص السؤال</td><td colspan="3">اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X</td></tr>
<tr><td>الخطوات</td><td colspan="3">١. نضع فضاء العينة الشهير المناسب
٢. نحدد قيم المتحول العشوائي وتكون معطاة صراحة أو تستنتج
٣. نوجد احتمالات قيم X
٤. ننظم جدول القانون الاحتمالي وفق:

المجموع	قيم X	x_i
1	احتمالات قيم X	p_i

</td></tr>
<tr><td>الطلب</td><td>الثاني</td><td>الثالث</td><td>الرابع</td></tr>
<tr><td>نص السؤال</td><td>احسب التوقع الرياضي</td><td>احسب التباين</td><td>احسب الانحراف المعياري</td></tr>
<tr><td>الخطوات</td><td>* نكتب القانون الاحتمالي
* نطبق القانون:
$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$</td><td>نطبق القانون:
$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$
حيث $E(X^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i$</td><td>نطبق القانون
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$</td></tr>
</table>

التمرين الأول:

نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 ، نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1 ونحصل على 6 درجات إذا ظهر الوجه 6 ونخسر درجتين في بقية الحالات ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها.

الطلب الأول:

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

الأحداث:

A «نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1 »

B «نحصل على 6 درجات إذا ظهر الوجه 6 »

C «نخسر درجتين في بقية الحالات»

فضاء العينة:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$n(\Omega) = 6$$

قيم X :

$$X = \{-2,1,6\}$$

احتمالات قيم X :

* $P(X = -2) = P(C) = \frac{4}{6}$
* $P(X = 1) = p(A) = \frac{1}{6}$
* $P(X = 6) = P(B) = \frac{1}{6}$

القانون الاحتمالي لـ X :

x_i	1	-2	6	المجموع
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

الطلب الثاني:

احسب كلاً من $E(X)$ و $V(X)$

حساب $E(x)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p_i = -2\left(\frac{4}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}$$

حساب $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(x)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, p_i = 4\left(\frac{4}{6}\right) + 1\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{53}{6}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\to V(x) = \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36}$$

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على خمس كرات، ثلاث منها سوداء اللون وكرتان بيضاوان نسحب من كرتين على التتالي بدون إعادة ونسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

1. عيّن مجموعة القيم X
2. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X
3. احسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

فضاء العينة:

	B	B	B	W	W
B		0	0	1	1
B	0		0	1	1
B	0	0		1	1
W	1	1	1		2
W	1	1	1	2	

$$n(\Omega) = 20$$

الطلب الأول:

مجموعة قيم X هي: $X = \{0,1,2\}$

الطلب الثاني:

احتمالات قيم X:

- $P(X = 0) = \frac{6}{20}$
- $P(X = 1) = \frac{12}{20}$
- $P(X = 2) = \frac{2}{20}$

القانون الاحتمالي لـ X:

x_i	0	1	2	المجموع
p_i	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{2}{20}$	1

الطلب الثالث:

التوقع الرياضي لـ X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \, p_i$$

$$= (0)\left(\frac{6}{20}\right) + (1)\left(\frac{12}{20}\right) + (2)\left(\frac{2}{20}\right) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

التباين لـ X :

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \, p_i$$

$$= 0\left(\frac{6}{20}\right) + 1\left(\frac{12}{20}\right) + 4\left(\frac{2}{20}\right) = \frac{20}{20} = 1$$

$$\left(E(X)\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\rightarrow V(X) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

الانحراف المعياري لـ X :

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

التمرين الثالث:

يحتوي صندوق على خمس كرات اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3 نسحب عشوائيّاً وفي آنٍ معاً كرتين من الصندوق ونسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين.

1. عيّن قيم X
2. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X
3. احسب توقعه الرياضي وتباينه

فضاء العينة:

	1	1	2	2	3
1		2	3	3	4
1			3	3	4
2				4	5
2					5
3					

$$n(\Omega) = 10$$

الطلب الأول:

قيم X هي: $X = \{2,3,4,5\}$

الطلب الثاني:

قيم احتمالات X :

- $P(X = 2) = \frac{1}{10}$
- $P(X = 3) = \frac{4}{10}$
- $P(X = 4) = \frac{3}{10}$
- $P(X = 5) = \frac{2}{10}$

القانون الاحتمالي لـ X :

x_i	2	3	4	5	المجموع
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

التوقع الرياضي لـ X:

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i \, p_i$$

$$= 2\left(\frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{4}{10}\right) + 4\left(\frac{3}{10}\right) + 5\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

التباين لـ X :

$$V(x) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \, p_i$$

$$= 4\left(\frac{1}{10}\right) + 9\left(\frac{4}{10}\right) + 16\left(\frac{3}{10}\right) + 25\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{138}{10}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 = \frac{324}{25}$$

$$\rightarrow V(X) = \frac{345}{25} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

التمرين الرابع:

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

١. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

الحل:

قيم X هي:

$$X = \{1,2,3\}$$

٢. احسب كلاًّ من $P(X=1)$ و $P(X=3)$

الحل:

السحب معاً لذلك القانون المناسب للحل هو $\binom{n}{r}$

فضاء العينة:

$$n(\Omega) = \binom{8}{3} = \frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)} = 56$$

حساب $P(X=1)$:

وهي تمثل سحب ثلاث كرات من اللون ذاته

$1: 3B$ أو $3G$

$$n(1) = \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 1 = 5$$

$$\rightarrow P(X=1) = \frac{5}{56}$$

حساب $P(X=3)$:

وهي تمثل سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان

$3: 1B$ و $1G$ و $1Y$

$$n(3) = \binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{1}{1} = 12$$

$$\rightarrow P(X=3) = \frac{12}{56}$$

٣. استنتج قيمة $P(X=2)$:

$$P(X=2)$$

$$= 1 - \left(P(X=1) + P(X=3)\right)$$

$$P(X=2) = 1 - \frac{17}{56} = \frac{39}{56}$$

٤. احسب توقع X وانحرافه المعياري.

القانون الاحتمالي لـ X:

x_i	1	2	3	المجموع
p_i	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$	1

التوقع الرياضي لـ X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\, p_i = (1)\left(\frac{5}{56}\right) + (2)\left(\frac{39}{56}\right) + 3\left(\frac{12}{56}\right)$$

$$= \frac{5 + 78 + 36}{56} = \frac{119}{56} = \frac{17}{8}$$

التباين لـ X:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2\, p_i = \frac{5}{56} + \frac{156}{56} + \frac{108}{56} = \frac{269}{56}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{289}{64}$$

ومنه:

$$\rightarrow V(X) = \frac{269}{56} - \frac{289}{64} = \frac{1032}{3584}$$

الانحراف المعياري لـ X:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1032}{3584}}$$

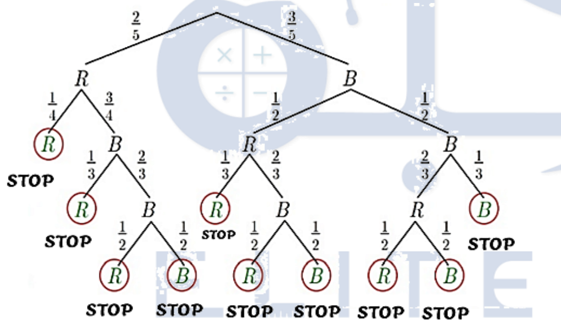
التمرين الخامس:

لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوتين وثلاث كرات زرقاء نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلّا كرات من اللون ذاته وليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة:

١. عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X.

٢. عيّن قانون X واحسب توقعه الرياضي.

حيث ما كتب باللون الأخضر يمثل عدد المسحوبات.



١. قيم X:

$$X = \{2,3,4\}$$

٢. احتمالات قيم X:

- $P(X=2) = \frac{2}{20}$
- $P(X=3) = \frac{6}{20}$
- $P(X=4) = \frac{12}{20}$

القانون الاحتمالي لـ X:

x_i	2	3	4	المجموع
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{12}{20}$	1

التوقع الرياضي لـ X:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i$$

$$= 2\left(\frac{2}{20}\right) + 3\left(\frac{6}{20}\right) + 4\left(\frac{12}{20}\right) = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}$$

التمرين السادس:

تتأمل صندوقين ، يحتوي الصندوق الأول على ثلاث كرات مرقمة بالأعداد 3,2,1 ويحتوي الصندوق الثاني على أربعة كرات مرقمة بالأعداد 5,4,3,2 نسحب عشوائياً كرة من الصندوق الأول ثم كرة من الصندوق الثاني والمطلوب:

1. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار

1 \ 2	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

$$n(\Omega) = 12$$

2. ليكن A الحدث «إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم 3 » وليكن B الحدث «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5 » هل الحدثان A و B مستقلان احتمالياً؟

الحل:

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(A).P(B) = \frac{1}{4}$$

نلاحظ أنّ:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

3. نعرف متحولاً عشوائيّاً X يدل على المجموع رقمي الكرتين المسحوبتين اكتب قيم X واكتب قانون جدوله الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$X = \{3,4,5,6,7,8\}$$

- $P(X = 3) = \frac{1}{12}$
- $P(X = 4) = \frac{2}{12}$
- $P(X = 5) = \frac{3}{12}$
- $P(X = 7) = \frac{2}{12}$
- $P(X = 8) = \frac{1}{12}$

x_i	3	4	5	6	7	8	Σ
p_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i\ p_i$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{8}{12} + \frac{15}{12} + \frac{24}{12} + \frac{14}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i$$

$$= \frac{9}{12} + \frac{32}{12} + \frac{75}{12} + \frac{108}{12} + \frac{98}{12} + \frac{64}{12} = \frac{322}{12}$$

$$(E(X)^2) = \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

$$\rightarrow V(X) = \frac{322}{12} - \frac{121}{12} = \frac{23}{12}$$

التمرين السابع:

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء وكرتين حمراوين وكرة خضراء, نسحب ثلاث كرات من الصندوق على التتالي دون إعادة وليكن X المتغيّر العشوائي الذي يرافق كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق والمطلوب:

1. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
2. احسب التوقع الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$.

الحل:

الطلب الأول:

بما أنّ السحب على التتالي دون إعادة فإننا نستخدم التراتيب.

$$n(\Omega) = P_6^3 = (6)(5)(4) = 120$$

قيم المتغير العشوائي X :

$$X = \{0,1,2,3\}$$

احتمالات قيم المتغير العشوائي X :

حيث:

$X = 0$ تدل على ظهور ثلاث كرات بيضاء.

$$P(X = 0) = \frac{P_3^3}{P_6^3} = \frac{(3)(2)(1)}{120} = \frac{1}{20}$$

$X = 1$ تدل على ظهور كرتين بيضاء وكرة غير بيضاء ومنهُ:

$$P(X = 1) = \frac{P_3^2 . P_3^1}{P_6^3} \times 3$$

$$= \frac{(3)(2)(1).(3).(3)}{120} = \frac{9}{20}$$

$X = 2$ تدل على ظهور كرة بيضاء وكرتين غير بيضاء ومنهُ:

$$P(X = 2) = \frac{P_3^1 . P_3^2}{P_6^3} \times 3$$

$$= \frac{(3).(3)(2).(3)}{120} = \frac{9}{20}$$

$X = 3$ تدل على عدم ظهور أيّ كرة بيضاء ومنهُ:

$$P(X = 3) = \frac{P_3^3}{P_6^3} = \frac{(3)(2)(1)}{120} = \frac{1}{20}$$

القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

الطلب الثاني:

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . p_i$$

$$= 0\left(\frac{1}{20}\right) + 1\left(\frac{9}{20}\right) + 2\left(\frac{9}{20}\right) + 3\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{9}{20} + \frac{18}{20} + \frac{3}{20} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . p_i$$

$$= 0\left(\frac{1}{20}\right) + 1\left(\frac{9}{20}\right) + 4\left(\frac{9}{20}\right) + 9\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$= \frac{9}{20} + \frac{36}{20} + \frac{9}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نعوض:

$$V(X) = \frac{27}{10} - \frac{9}{4} = \frac{54 - 45}{20} = \frac{9}{20}$$

حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

التمرين الثامن:

صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء , نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً , نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك , عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه.

الحل:

مجموعة قيم المتحول العشوائي X :

$$X = \{0,3,5\}$$

احتمالات قيم المتحول العشوائي X :

$$n(\Omega) = \binom{10}{3} = 120$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{4}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{6}{12}$$

قانون المتحول العشوائي X :

x_i	0	3	5	Σ
p_i	$\frac{6}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i . p_i$$

$$= 0\left(\frac{6}{12}\right) + 3\left(\frac{5}{12}\right) + 5\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{5}{3}$$

حساب التباين:

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 . p_i$$

$$= 0\left(\frac{6}{12}\right) + 9\left(\frac{5}{12}\right) + 25\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{35}{6}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

نعوض:

$$V(X) = \frac{35}{6} - \frac{25}{9} = \frac{55}{18}$$

التمرين التاسع:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء اللون , نسحب من الصندوق ثلاث كرات وفي آن معاً ليكن A ≪ الحصول على كراء حمراء على الأقل≫ وليكن B ≪ الحصول على كرتين سوداء على الأقل≫ والمطلوب:

1. احسب احتمالات كل من الأحداث A و B و $(A|B)$
2. ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة , اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

بما أنّ السحب في آن معاً فإننا نستخدم قانون التوافيق.

$$n(\Omega) = \binom{7}{3} = 35$$

الطلب الأول:

$A: 1R$ و $2B$ أو $2R$ و $1B$ أو $3R$

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1}.\binom{4}{2} + \binom{3}{2}\binom{4}{1} + \binom{3}{3}}{n(\Omega)} = \frac{18 + 12 + 1}{35} = \frac{31}{35}$$

$B: 2B$ و $1R$ أو $3B$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}.\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{n(\Omega)} = \frac{18 + 4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

سنعود بعد قليل..

$$A\cap B: 2B \text{ و } 1R$$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{n(\Omega)}=\frac{18}{35}$$

عدنا..

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}}=\frac{18}{22}=\frac{9}{11}$$

الطلب الثاني:

$$X=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{3}}{n(\Omega)}=\frac{4}{35}$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{n(\Omega)}=\frac{18}{35}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{n(\Omega)}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{3}}{n(\Omega)}=\frac{1}{35}$$

قانونه الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\,p_i$$

$$=0\left(\frac{4}{35}\right)+1\left(\frac{18}{35}\right)+2\left(\frac{12}{35}\right)+3\left(\frac{1}{35}\right)=\frac{45}{35}=\frac{9}{7}$$

التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{4}x_i^2p_i$$

$$=0\left(\frac{4}{35}\right)+1\left(\frac{18}{35}\right)+4\left(\frac{12}{35}\right)+9\left(\frac{1}{35}\right)=\frac{15}{7}$$

ومنه:

$$V(X)=\frac{15}{7}-\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{24}{49}$$

التمرين العاشر:

نتأمل جانباً جدول القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي والمطلوب:

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\alpha}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{\beta}{16}$	1

1. عين العددين الحقيقيين α و β إذا علمت أنّ $E(X)=2$
2. من أجل $\alpha=6$ و $\beta=1$ احسب تباين المتحول العشوائي $V(X)$

الحل:

الطلب الأول:

تعيين α و β :

نعلم أنّ مجموع قيم المتحول العشوائي X يساوي الواحد أيّ أنّ:

$$\Sigma x_i=1$$

$$\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{\alpha}{16}+\frac{4}{16}+\frac{\beta}{16}=1$$

$$\frac{9+\alpha+\beta}{16}=1$$

$$\alpha+\beta+9=16$$

$$\alpha+\beta=7\ldots(1)$$

وبما أنّ $E(X)=2$ فإنّ:

$$E(X)=2$$

$$\Sigma x_i=2$$

$$(0)\left(\frac{1}{16}\right)+1\left(\frac{4}{16}\right)+2\left(\frac{\alpha}{16}\right)+3\left(\frac{4}{16}\right)+4\left(\frac{\beta}{16}\right)=2$$

$$\frac{4}{16}+\frac{2\alpha}{16}+\frac{12}{16}+\frac{4\beta}{16}=2$$

$$\frac{16+2\alpha+4\beta}{16}=2$$

$$16+2\alpha+4\beta=32$$

$$2\alpha+4\beta=16$$

$$\alpha+2\beta=8\ldots(2)$$

لدينا الجملة:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=7\ldots(1)\\ \alpha+2\beta=8\ldots(2)\end{cases}$$

نضرب (1) بـ (-2) :

$$\begin{cases}-2\alpha-2\beta=-14\ldots(1)'\\ \alpha+2\beta=8\ldots(2)\end{cases}$$

بجمع $(1)'$ و (2) نجد أنّ:

$$-\alpha=-6\rightarrow\alpha=6$$

نعوض في (2) :

$$6+2\beta=8$$

$$2\beta=2\rightarrow\beta=1$$

فما نحن إلّا أيام، وما أعمارنا إلّا الأثر .. 😕💙

الطلب الثاني:

لدينا:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$$

x_i	0	1	2	3	4	Σ
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 . p_i$$

$$=0\left(\frac{1}{16}\right)+1\left(\frac{4}{16}\right)+4\left(\frac{6}{16}\right)+9\left(\frac{4}{16}\right)+16\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$=\frac{0+4+24+36+16}{16}=\frac{80}{16}=5$$

$$\left(E(X)\right)^2=(2)^2=4$$

نعوض:

$$V(X)=5-4=1$$

ثانياً: القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية:

نص السؤال	اكتب القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)
الخطوات	١. نضع فضاء العينة الشهير المناسب ٢. نحدد قيم المتحول العشوائي X ونوجد احتمالاتها ٣. نحدد قيم المتحول العشوائي Y ونوجد احتمالاتها ٤. ننظم جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

X \ Y	قيم Y	قانون X
قيم X	التقاطعات	احتمالات قيم X
قانون Y	احتمالات قيم Y	1

تمرين:

لدينا صندوق يحوي ثلاث كرات واحدة حمراء تحمل الرقم 1 واثنتان زرقاء تحمل الأرقام 2 و 3 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة ليكن X المتحول العشوائي الذي يعطي عدد الكرات الزرقاء المسحوبة وليكن Y المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين اكتب القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

فضاء العينة:

	R_1	B_2	B_3
R_1	0 2	1 3	1 4
B_2	1 3	2 4	2 5
B_3	1 4	2 5	2 6

$$n(\Omega)=9$$

قيم X هي:

$$X=\{0,1,2\}$$

احتمالات قيم X:

- $P(X=0)=\frac{1}{9}$
- $P(X=1)=\frac{4}{9}$
- $P(X=2)=\frac{4}{9}$

قيم Y هي:

$$Y=\{2,3,4,5,6\}$$

- $P(Y=2)=\frac{1}{9}$
- $P(Y=3)=\frac{2}{9}$
- $P(Y=4)=\frac{3}{9}$
- $P(Y=5)=\frac{2}{9}$
- $P(Y=6)=\frac{1}{9}$

القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) :

X \ Y	2	3	4	5	6	قانون X
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
قانون Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين:

تعريف	نقول عن X و Y أنهما مستقلان احتمالياً إذا تحقق: $P(X = x_i) \cap (Y = y_i) = P(X = x_i).P(Y = y_i)$ أي احتمال التقاطع يساوي جداء الاحتمالات	
أنماط التمارين	النمط الأول	النمط الثاني
نص السؤال	هل X و Y مستقلان احتمالياً	إكمال جدول القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية
فكرة الحل	١. نوجد كلاً من: ❋ $P(X = x_i)$ ❋ $P(Y = y_i)$ ❋ $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_i)\big)$ ❋ $P(X = x_i).P(Y = y_i)$ ٢. ونميز: ① إذا تحقق: $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_i)\big) = P(X = x_i).P(Y = y_i)$ وبالتالي يكون X و Y مستقلان احتمالياً ② إذا تحقق: $P\big((X = x_i) \cap (Y = y_i)\big) \neq P(X = x_i).P(Y = y_i)$ وبالتالي يكون X و Y غير مستقلان احتمالياً	١. نستخدم الجمع الشاقولي أو الأفقي (وهي طريقة تنفع دوماً) ٢. نستخدم القانون $P(X = x_i) \cap (Y = y_i) = P(X = x_i).P(Y = y_i)$ (نستخدمه فقط عندما يذكر لنا بنص السؤال بشكل صريح أنّ X و Y مستقلان احتمالياً) ملاحظة: عندما يكون X و Y مستقلان احتمالياً فإنّ: (إطار)(إطار) = الداخل $\frac{\text{الداخل}}{\text{اطار}}$ = الإطار

التمرين الأول:

نلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها , ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2 وليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4

١. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S
٢. عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y
٣. عين القانون الاحتمالي للزوج (X, Y)
٤. أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلان احتمالياً؟؟

الحل:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

$$n(\Omega) = 36$$

الطلب الأول:

$$S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

الطلب الثاني:

يمثل X باقي قسمة S على العدد 2 ومنهُ:

$$X = \{0,1\}$$

❋ $P(X = 0) = \frac{18}{36}$

❋ $P(X = 1) = \frac{18}{36}$

x_i	0	1	المجموع
p_i	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$	1

يمثل Y باقي قسمة S على العدد 4 ومنهُ:

$$Y = \{0,1,2,3\}$$

❋ $P(Y = 0) = \frac{9}{36}$

❋ $P(Y = 1) = \frac{8}{36}$

❋ $P(Y = 2) = \frac{9}{36}$

❋ $P(Y = 3) = \frac{10}{36}$

y_i	0	1	2	3	المجموع
p_i	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	10

الطلب الثالث:

تعيين القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) وفق:

	0	1	2	3	قانون X
0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
1	0	$\frac{8}{36}$	0	$\frac{10}{36}$	$\frac{18}{36}$
قانون Y	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	1

الطلب الرابع:

لدينا:

❋ $P\big((X = 0) \cap (Y = 2)\big) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

❋ $P(X = 0) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

❋ $P(Y = 2) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

❋ $P(X = 0).P(Y = 2) = \frac{1}{8}$

نلاحظ أنّ:

$$P\big((X = 0) \cap (Y = 2)\big) \neq P(X = 0).P(Y = 2)$$

ومنهُ X و Y غير مستقلان احتمالياً.

التمرين الثاني:

صندوق فيه خمس كرات ثلاثة منها حمراء تحمل الأرقام 0 و 1 و 1 وكرتان زرقاء تحملان الأرقام 0 و 2 نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة , ليكن X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة وليكن Y المتحول العشوائي الذي يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين:

1. اكتب القانون الاحتمالي للزوج(X,Y).
2. هل X و Y مستقلان احتمالياً؟

الحل:

	R_0	R_1	R_1	B_0	B_2
R_0		2 1	2 1	1 0	1 2
R_1	2 1		2 2	1 1	1 3
R_1	2 1	2 2		1 1	1 3
B_0	1 0	1 1	1 1		0 2
B_2	1 2	1 3	1 3	0 2	

$$n(\Omega)=20$$

قيم X هي: $X=\{0,1,2\}$

احتمالات قيم X:

- $P(X=0)=\frac{2}{20}$
- $P(X=1)=\frac{12}{20}$
- $P(X=2)=\frac{6}{20}$

قيم Y هي: $Y=\{0,1,2,3\}$

احتمالات قيم Y:

- $P(Y=0)=\frac{2}{20}$
- $P(Y=1)=\frac{8}{20}$
- $P(Y=2)=\frac{6}{20}$
- $P(Y=3)=\frac{4}{20}$

القانون الاحتمالي للزوج (X,Y):

Y \ X	0	1	2	قانون Y
0	0	$\frac{2}{20}$	0	$\frac{2}{20}$
1	0	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$
2	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
3	0	$\frac{4}{20}$	0	$\frac{4}{20}$
قانونX	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$	1

لدينا:

- $P\big((X=1)\cap(Y=2)\big)=\frac{2}{20}$
- $P(X=1)=\frac{12}{20}$
- $P(Y=2)=\frac{6}{20}$

نلاحظ أن:

$$P\big((X=1)\cap(Y=2)\big)\neq P(X=1).P(Y=2)$$

ومنه X و Y غير مستقلان احتمالياً.

التمرين الثالث:

نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية أكمله وبين إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً

Y \ X	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{20}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل:

نكمل الجدول وفق:

Y \ X	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

لدينا:

- $P\big((X=0)\cap P(Y=1)\big)=\frac{1}{8}$
- $P(X=0)=\frac{3}{10}$
- $P(Y=1)=\frac{1}{2}$
- $P(X=0).P(Y=1)=\frac{3}{20}$

نلاحظ أنّ:

$$P\big((X=0)\cap(Y=1)\big)\neq P(X=0).P(Y=1)$$

ومنه X و Y غير مستقلان احتمالياً.

التمرين الرابع:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً

Y \ X	0	1	2	قانون X
0				0,1
1			0,04	
2				0,1
قانون Y	0,3			

الحل:

Y \ X	0	1	2	قانون X
0				$\frac{1}{10}$
1			$\frac{4}{100}$	$\frac{8}{10}$
2				$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{3}{10}$			1

الخطوة الأولى: نحسب $P(Y=2)$ وفق:

بما أنّ (X,Y) مستقلان احتمالياً فإنّ احتمال التقاطع يساوي احتمال الجداء ومنهُ:

$$P\big((X=1)\cap(Y=2)\big) = P(X=1).P(Y=2)$$

$$\frac{4}{100} = \left(\frac{8}{10}\right)x$$

$$x = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{8}{10}} = \frac{4}{100}.\frac{10}{8} = \frac{1}{20}$$

ومنهُ: $P(Y=2) = \frac{1}{20}$

Y \ X	**0**	**1**	**2**	قانون X
0				$\frac{1}{10}$
1			$\frac{4}{100}$	$\frac{8}{10}$
2				$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

بما أنّ المتحولان (X,Y) مستقلان احتمالياً فإنّ احتمال التقاطع يساوي احتمال الجداء ومنهُ نجد أنّ:

Y \ X	**0**	**1**	**2**	قانون X
0	$\frac{3}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{10}$
1	$\frac{24}{100}$	$\frac{104}{200}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{8}{10}$
2	$\frac{3}{100}$	$\frac{13}{200}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

التمرين الخامس:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي للمتحولان العشوائيان (X,Y) إذا علمت أن المتحولان X و Y مستقلان احتمالياً

Y \ X	**0**	**1**	**2**	قانون X
0				**0,2**
1				
2	0,04			
قانون Y		0,1	0,5	

الحل:

Y \ X	**0**	**1**	**2**	قانون X
0				$\frac{2}{10}$
1				
2	$\frac{4}{100}$			
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

الخطوة الأولى: نحسب $P(X=2)$ وفق:

بما أنّ (X,Y) مستقلان احتمالياً فإنّ احتمال التقاطع يساوي احتمال الجداء ومنهُ:

$$P\big((X=2)\cap(Y=0)\big) = P(X=2).P(Y=0)$$

$$\frac{4}{100} = \left(\frac{4}{10}\right)x$$

$$x = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{4}{10}} = \frac{4}{100}.\frac{10}{4} = \frac{1}{10}$$

ومنهُ: $P(X=2) = \frac{1}{10}$

Y \ X	**0**	**1**	**2**	قانون X
0				$\frac{2}{10}$
1				$\frac{7}{10}$
2	$\frac{4}{100}$			$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

بما أنّ المتحولان (X,Y) مستقلان احتمالياً فإنّ احتمال التقاطع يساوي احتمال الجداء ومنهُ نجد أنّ:

Y \ X	**0**	**1**	**2**	قانون X
0	$\frac{8}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{2}{10}$
1	$\frac{28}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{35}{100}$	$\frac{7}{10}$
2	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{10}$
قانون Y	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{5}{10}$	1

مش مهم تسبق غيرك ..

الأهم إنك تمشي طريقك .. مش طريقهم 🤝💙

ثالثاً: المتحولات العشوائية الحدانيّة "برنولي":

حكمة	كل شي يزيد عن حده يقلب برنولي حيث الحد هو فضاءات العينة الشهيرة
مقدمة لا بدّ منها	هذه تجربة برنولية ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات الحصول على ... عند تكرار التجربة $n = \cdots$ مرة علماً أن احتمال الحصول على ... في المرة الواحدة هو $p = \cdots$
خطوات حل مسائل برنولي	* نحدد أنها تجربة برنولية * نحدد n (عدد مرات تكرار التجربة) * نوجد P حيث P هو احتمال الحدث الهدف في المرة الواحدة وذلك بالاعتماد على فضاءات عينة شهيرة * نوجد q حيث q يعطى بالعلاقة: $q = 1 - p$ * نضع القانون وفق: $P(X = K) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$ * نحدد قيمة K من نص الطلب ثم نعوض
ملاحظات	الملاحظة الأولى: في المسائل التي تحوي برنولي يكون: * التوقع الرياضي يعطى بالقانون: $E(X) = n.p$ * التباين يعطى بالقانون: $V(X) = n.p.q$ الملاحظة الثانية: * قيمة K تحقق $0 \leq K \leq n$ حيث n هو عدد مرات تكرار التجربة * قيمة K تتغير من طلب لآخر وتحدد وفق: ○ فقط $P(X = K)$ ○ على الأكثر $P(X \leq K)$ * ويكون الاحتمال المعاكس له معطى وفق: $P(X \leq K) = 1 - P(X > K)$ ○ على الأقل $P(X \geq K)$ * ويكون الاحتمال المعاكس له معطى وفق: $P(X \geq K) = 1 - P(X < K)$ انتبه يا صديقي الطالب: نستخدم الحدث المعاكس لتبسيط الحساب (يعني عشان راحتك) عند الصعود نصل إلى n وعند النزول نصل إلى الصفر.

أنماط التمارين:

النمط	فكرة الحل
النمط الأول: إيجاد احتمال حدث ما	* نضع قانون المسألة * نحدد المطلوب ونوجده من خلال التعويض في القانون المناسب للمسألة
النمط الثاني: برنولي ومتحول عشوائي	* نضع قانون مناسب * نحدد قيم X ونوجد احتمالات قيم X من خلال التعويض في المسألة.
النمط الثالث: إكمال جدول تجربة برنولية	* نضع قانون المسألة * نوجد المطلوب
النمط الرابع: إيجاد التوقع الرياضي والتباين	$E(X) = n.p$ $V(X) = n.p.q$

التمرين الأول:

نلقي حجر نرد متوازن خمس مرات متتالية والمطلوب:

1. ما احتمال الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات فقط؟
2. ما احتمال الحصول على عدد زوجي مرة على الأكثر؟
3. ما احتمال الحصول على عدد زوجي أربع مرات على الأقل؟
4. ما احتمال الحصول على عدد زوجي مرة على الأقل؟
5. ما احتمال الحصول على عدد زوجي أربع مرات على الأكثر؟
6. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات الحصول على عدد زوجي ما هي قيم X ؟
7. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ؟
8. احسب توقعه الرياضي وتباينه وانحرافه المعياري

الحل:

هذه تجربة برنولية , $n = 5$

إيجاد p : حيث p هو احتمال الحصول على عدد زوجي في المرة الواحدة , حيث فضاء العينة للمرة الواحدة هو:

$$n(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\to p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

إيجاد q وفق:

$$q = 1 - p \to q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

نطبق القانون:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$

$$\boxed{P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k . \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \binom{5}{k} . \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{k} . \frac{1}{32}}$$

الطلب الأول:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} . \frac{1}{32} = \frac{10}{32}$$

الطلب الثاني:

$$P(X \leq 1) = P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$= \binom{5}{1} . \frac{1}{32} + \binom{5}{0} . \frac{1}{32} = \frac{6}{32}$$

الطلب الثالث:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= \binom{5}{4}.\frac{1}{32} + \binom{5}{5}.\frac{1}{32} = \frac{6}{32}$$

الطلب الرابع:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}.\frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

الطلب الخامس:

$$P(X \leq 4) = 1 - P(X > 4)$$
$$= 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5}.\frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

الطلب السادس:

$$X = \{0,1,2,3,4,5\}$$

الطلب السابع:

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}.\frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$
$$P(X = 1) = \binom{5}{1}.\frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$
$$P(X = 2) = \binom{5}{2}.\frac{1}{32} = \frac{10}{32}$$
$$P(X = 3) = \binom{5}{3}.\frac{1}{32} = \frac{10}{32}$$
$$P(X = 4) = \binom{5}{4}.\frac{1}{32} = \frac{5}{32}$$
$$P(X = 5) = \binom{5}{5}.\frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

القانون الاحتمالي:

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

الطلب الثامن:

$$E(X) = n.p = 5\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$
$$V(X) = n.p.q = 5\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

التمرين الثاني:

نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات.

الحل:

هذه تجربة برنولية حيث $n = 6$

إيجاد p : حيث p هو احتمال الحصول على العدد 6 في المرة الواحدة , حيث فضاء العينة للمرة الواحدة هو:

$$n(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\rightarrow p = \frac{1}{6}$$

إيجاد q وفق:

$$q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

نطبق القانون:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$
$$\boxed{P(X = k) = \binom{6}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k . \left(\frac{5}{6}\right)^{6-k}}$$

الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات:

$$P(X = 3) = \binom{6}{3}.\left(\frac{1}{6}\right)^3 . \left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$= 20\left(\frac{1}{216}\right)\left(\frac{125}{216}\right) = \frac{2500}{46656}$$

طلب إضافي:

ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات على الأكثر.

الطريقة الأولى.

$$P(X \leq 3) = P(X = 3) + P(X = 2)$$
$$+ P(X = 1) + P(X = 0)$$

الطريقة الثانية:

$$P(X \leq 3) = 1 - P(X > 3)$$
$$= 1 - \big(P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)\big)$$

التمرين الثالث:

نلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية وليكن A الحدث » الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل« ما احتمال A ؟

الحل:

هذه تجربة برنولية لأنّ التجربة رمي حجر نرد 8 مرات.

إيجاد p : حيث p هو احتمال الحصول على عدد زوجي في المرة الواحدة , حيث فضاء العينة للمرة الواحدة هو:

$$n(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$\rightarrow p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

إيجاد q وفق:

$$q = 1 - p \rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

نطبق القانون:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{8}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{8-k}=\binom{8}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^8=\binom{8}{k}.\frac{1}{256}}$$

حساب $P(A)$ وفق:

الطريقة الأولى:

$$P(A)=P(x\geq 3)$$
$$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$$
$$=\frac{219}{256}$$

الطريقة الثانية:

$$P(A)=P(X\geq 3)=1-P(X<3)$$
$$=1-\big(P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)\big)$$
$$=1-\left(\frac{28}{256}+\frac{8}{256}+\frac{1}{256}\right)=\frac{219}{256}$$

التمرين الرابع:

يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار, يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0,6 ويربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار, ما احتمال أن يربح B المباراة.

الحل:

هذه تجربة برنولية حيث: $n=9$

إيجاد p : حيث p احتمال أن يكسب A الدور الواحد:

$$p=0.6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

إيجاد q وفق:

$$q=1-p=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

نطبق القانون:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{9}{k}\left(\frac{3}{5}\right)^k.\left(\frac{2}{5}\right)^{9-k}}$$

حيث القانون الخاص بعدد مرات ربح A .

يربح B المباراة عندما يخسر A ويخسر A عندما يكسب أربعة أدوار على الأكثر.

ومنهُ:

$$P(X\leq 4)=P(X=4)+P(X=3)$$
$$+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)$$

$=$ (الله يقويكم طالعو الجواب)^_^

التمرين الخامس:

نكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين احسب احتمال كل من الحدثين

- A ≫ الحصول ثلاث مرات على وجهين H ≪
- B ≫ الحصول على وجهين H مرة على الأقل≪

الحل:

هذه تجربة برنولية حيث: $n=10$

$$\Omega=\left\{TT\ \begin{matrix}TH\\HT\end{matrix}\ HH\right\}$$
$$n(\Omega)=4$$

إيجاد p :

حيث p هو الحصول على وجهين Hفي المرة الواحدة ومنهُ:

$$p=\frac{1}{4}$$

إيجاد q وفق:

$$q=1-p=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

نطبق القانون:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$$

$$\boxed{P(x=k)=\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k.\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}}$$

حساب احتمال الحدث A وفق:

$$P(x=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7$$
$$=\frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)}.\left(\frac{1}{64}\right)\left(\frac{27}{16384}\right)$$

حساب احتمال الحدث B وفق:

$$P(x\geq 1)=1-P(x<1)$$
$$=1-P(x=0)$$
$$=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

التمرين السادس:

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

1. نسحب عشوائياً كرة ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

$$\overbrace{\begin{matrix}R\\3n\end{matrix}\qquad\qquad\begin{matrix}W\\n\end{matrix}}^{4\text{ كرات}}\qquad P(R)=\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}$$

2. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عملية السحب الثلاث

هذه تجربة برنولية حيث: $n=3$

إيجاد p وفق:

حيث p احتمال الحصول على كرة حمراء في المرة الواحدة.

$$p = \frac{3}{4}$$

إيجاد q وفق:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

نطبق القانون:

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k}$$

$$\boxed{P(x = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}}$$

قيم X تمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

$$X = \{0,1,2,3\}$$

٣. ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

احتمالات القيم X:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

القانون الاحتمالي لـ X:

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

أوجد التوقع الرياضي والتباين:

$$E(X) = n.p = \frac{9}{4}$$

$$V(X) = n.p.q = \frac{9}{16}$$

التمرين السابع:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول الاتي غير مكتمل وهو القانون الاحتمالي لـ X الممثل لثلاث نجاحات فإذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$ وأنّ:

$$P(X = 1) = \frac{6}{27} \text{ و } P(X = 0) = \frac{1}{27}$$

k	0	1	2	3
$p(X = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$		

١. جد $P(X = 2)$ و $P(X = 3)$.

هذه تجربة برنولية ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد النجاحات في تجربة ما عند تكرار التجربة $n = 3$ مرات علماً أن احتمال النجاح في المرة الواحدة يساوي $p = \frac{2}{3}$

ومنهُ

$$q = \frac{1}{3}$$

نطبق القانون:

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$\boxed{P(x = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}}$$

ومنهُ:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{8}{27}$$

٢. ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X:

$$E(X) = n.p = 2$$

٣. ما التباين للمتحول العشوائي X:

$$V(X) = n.p.q = \frac{2}{3}$$

التمرين الثامن:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول الاتي غير مكتمل وهو القانون الاحتمالي لـ X

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$					$\frac{16}{81}$

١. ما عدد الاختبارات في التجربة؟

هذه تجربة برنولية حيث: عدد النجاحات هو $n = 4$

٢. أكمل الجدول السابق

لدينا:

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(x = k) = \binom{4}{k} p^k q^{4-k}$$

ونعلم أن:

$$P(X = 4) = \frac{16}{81}$$

$$\binom{4}{4} p^4 q^{4-4} = \frac{16}{81}$$

$$(1).(p)^4.(q)^0 = \frac{16}{81}$$

$$p^4 = \frac{16}{81} \rightarrow p = \frac{2}{3}$$

ومنهُ نجد أنّ q:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

ومنهُ القانون:

$$\boxed{p(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}}$$

حساب $P(X=0)$:

$$P(X=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}=\frac{1}{81}$$

حساب $P(X=1)$:

$$P(X=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{3}=\frac{8}{81}$$

حساب $P(X=2)$:

$$P(X=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}=\frac{24}{81}$$

حساب $P(X=3)$:

$$P(X=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{1}=\frac{32}{81}$$

ومنهُ: القانون الاحتمالي لـ X:

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

٣. ما التوقع الرياضي والتباين للمتحول العشوائي X ؟

$$E(X)=n.p=\frac{8}{3}$$

$$V(X)=n.p.q=\frac{8}{9}$$

التمرين التاسع:

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية الجدول المجاور غير المكتمل هو القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X والمطلوب:

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{64}$			

١. حدد وسيطي التجربة البرنولية n و p
٢. أكمل الجدول المجاور بحساب الاحتمالات $P(X=1)$ و $P(X=2)$ و $P(X=3)$
٣. احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X
٤. احسب $V(X)$ و $\sigma(X)$.

الحل:

الطلب الأول:

هذه تجربة برنولية حيث:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}.q^{n-k}$$

ونعلم أنّ عدد النجاحات بالتجربة هو $n=3$ ولدينا:

$$P(X=0)=\frac{1}{64}$$

$$\binom{3}{0}p^{0}.q^{3-0}=\frac{1}{64}$$

$$q^{3}=\frac{1}{64}\rightarrow q=\frac{1}{4}$$

ومنهُ:

$$p=1-q$$
$$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

وبالتالي القانون:

$$P(X=k)=\binom{3}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{k}.\left(\frac{1}{4}\right)^{3-k}$$

الطلب الثاني:

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{1}.\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=\frac{9}{64}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}.\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{27}{64}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=\frac{27}{64}$$

إكمال الجدول:

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

الطلب الثالث:

التوقع الرياضي:

$$E(X)=n.p=3\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$$

الطلب الرابع:

التباين:

$$V(X)=n.p.q=3\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{16}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$$

صندوق القوانين:

- $P(\Omega) = 1 \ , \ P(\phi) = 0 \ , \ 0 \le P(A) \le 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$
  $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ويسمى بقانونا دومورغان
- A و B مستقلان احتمالياً $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  A و B مستقلان احتمالياً $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$ أو $P(A|B) = P(A)$
- قانون الاحتمال الشرطي: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  $P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$ و $P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$
- التقاطع والاجتماع عملية تبديلية أيّ: $A \cup B = B \cup A$ و $A \cap B = B \cap A$

تمرين: أجب عن الأسئلة الآتية:

١. إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$
فاحسب $P(B|A)$ و $P(A|B)$

الحل:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

٢. إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$
فاحسب $P(B|A)$ و $P(A|B)$

الحل:

لنحسب أولاً $P(A \cap B)$ وفق:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

ومنهُ:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

٣. إذا كان $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B|A) = \frac{1}{4}$ و $P(B|A') = \frac{4}{5}$
و $P(A') = \frac{2}{3}$ فاحسب $P(B)$

الحل:

نعلم أنّ:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A') \dots (*)$$

إيجاد $P(B \cap A)$ وفق:

$$P(B \cap A) = P(A).P(B|A) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{12}$$

إيجاد $P(B \cap A')$ وفق:

$$P(B \cap A') = P(A').P(B|A') = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

نعوض في $(*)$ وفق:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{8}{15} = \frac{37}{60}$$

٤. إذا كان $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{3}{4}$ و $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$
فاحسب $P(B|A)$ و $P(A|B)$ و $P(A' \cap B')$ واستنتج $P(B'|A')$

الحل:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{15}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$

نحسب $P(A \cup B)$ وفق:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{17}{20}$$

$$\rightarrow P(A' \cap B') = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$$

$$P(B'|A') = \frac{P(B' \cap A')}{P(A')} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{10}$$

الدورات الامتحانية:

دورة 2017 الأولى 60 درجة:

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية بحيث يكون احتمال ظهور الشّعار في كلّ رمية يساوي $\frac{1}{3}$ نعرّف X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على عدد مرّات ظهور الشّعار،

١. اكتب مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X

٢. واكتب جدول قانونه الاحتمالي،

٣. واحسب توقّعه الرّياضي وتباينه.

دورة 2017 الثانية 100 درجة:

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام عندما ورد طلب عدد من الأقلام قدره 1000 قلم، صنّعت الورشة A منها 600 قلم، وصنّعت البقيّة الورشة B، هناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال، نسحب عشوائيّاً قلماً من الطّلب، نرمز بالرّمز A إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة A)، وبالرّمز B إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة B)، وبالرّمز D إلى الحدث (القلم غير صالح للاستعمال).

١. اعطِ تمثيلاً شجريّاً للتجربة.

٢. احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال.

٣. إذا كان القلم صالحاً للاستعمال،

٤. فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

٥. نسحب عشوائيّاً من الورشة A قلمين معاً وليكن X المتحوّل العشوائي الّذي يمثّل عدد الأرقام المسحوبة الصّالحة للاستعمال.

٦. احسب $P(x = 0)$

دورة 2018 الأولى 60 درجة:

ليكن X المتحوّل العشوائي يمثّل عدد النّجاحات في تجربة برنوليّة، الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحوّل X، الممثّل لثلاث نجاحات فإذا علمت أنّ احتمال النّجاح يساوي $\frac{2}{3}$ و $P(x = 0) = \frac{1}{27}$ و $P(x = 1) = \frac{6}{27}$

K	0	1	2	3
$P(X = K)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	...	...

١. جد $P(x = 2)$ و $P(x = 3)$.

٢. ما التوقّع الرّياضي للمتحوّل العشوائي X.

٣. ما التباين للمتحوّل العشوائي X.

دورة 2018 الثانية 60 درجة:

صندوق يحوي 9 كرات متماثلة منها أربع كرات خضراء وخمس كرات حمراء، نسحب عشوائيّاً من الصّندوق ثلاث كرات معاً، نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السّحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السّحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر، فما عدا ذلك، والمطلوب:

١. اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X،

٢. واحسب توقّعه الرّياضي.

دورة 2019 الأولى 60 درجة:

يحوي صندوق على خمس كرات، ثلاث حمراء اللّون وتحمل الأرقام $\{2,1,0\}$ وكرتين بيضاء اللون وتحمل الأرقام $\{1,0\}$، نسحب عشوائيّاً كرتين على التّالي دون إعادة من هذا الصّندوق.

١. الحدث A (الكرتان المسحوبتان لهما اللّون ذاته) احسب $P(A)$.

٢. نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً x يدلّ على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين، عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي x، واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثمّ احسب توقّعه الرّياضي.

دورة 2019 الثانية 60 درجة:

صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء نكرّر عمليّة سحب عشوائي لكرة من الصّندوق دون إعادة حتى لا يتبقّى في الصّندوق إلّا كرات من اللّون ذاته، ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد مرّات السّحب اللّازمة، عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X، واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحوّل X،

واحسب توقّعه الرّياضي

دورة 2021 الأولى 40 درجة:

تتأمّل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملوّنة بالأسود ووجهان ملوّنان بالأحمر، نلقي هذا الحجر خمس مرّات على التّالي.

نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدلّ على عدد الوجوه السّوداء الّتي نحصل عليها، والمطلوب:

١. اكتب قيم المتحوّل العشوائي X واحسب $P(x = 0)$

٢. احسب التوقّع الرّياضي للمتحوّل العشوائي X وتباينه.

دورة 2021 الثانية 40 درجة:

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء، عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

والمطلوب:

١. نسحب عشوائيّاً من الصّندوق كرة، ما احتمال أن تكون بيضاء اللّون؟

٢. نسحب من الصّندوق ثلاث كرات على التّالي مع الإعادة، نعرّف X المتحوّل العشوائي الّذي يدلّ على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليّات السّحب الثّلاث، اكتب مجموعة قيم X وجدول القانون الاحتمالي.

دورة 2022 الاولى 40 درجة:

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الستة الآتية بإحد العددين $+1$ و -1 والمطلوب:

١. بكم طريقة يمكن أن نملأ الخانات الستة؟

٢. بفرض X متحول عشوائي يدل على مجموع الأعداد في الخانات الستة بعد ملئها, عين مجموعة قيم X

٣. بكم طريقة يمكن ملأ الخانات الستة ليكون مجموع الأعداد فيها يساوي الصفر

دورة 2022 الأولى 40 درجة:

صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضيف كرتين من اللون ذاته إلى الصندوق ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق الحدث R_1 الكرة المسحوبة في المرة الاولى حمراء اللون الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون والمطلوب:

١. أعط تمثيلاً شجرياً مناسباً للتجربة واحسب احتمال الحدث R_2

٢. إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الاولى زرقاء

دورة 2022 الثانية 60 درجة:

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة , واحد زرقاء تحمل الرقم 2 وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين 0 و 1 نسحب بطاقتين على التتالي دون إعادة ونعرف المتحولان العشوائيين X و Y كالآتي:

X يدل على عدد البطاقات الحمراء المسحوبة.

Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين.

١. اكتب مجموعة قيم x وقانونه الاحتمالي.

٢. اكتب مجموعة قيم Y وقانونه الاحتمالي.

٣. اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

٤. أيكون المتحولان X و Y مستقلين احتمالياً ولماذا؟

دورة 2023 الأولى 40 درجة:

ندور القرص الدائري المرسوم جانباً ليستقر المؤشر على أحد الأجزاء ثم نكرر التجربة خمس مرات , نعرّف متحولاً عشوائياً X يدل على عدد المرات التي يستقر بها المؤشر على الجزء المظلل والمطلوب:

١. ما احتمال أن يستقر المؤشر على الجزء المظلل مرتين على الأقل

٢. احسب التوقع الرياضي والتباين للمتحول X .

دورة 2023 الثانية 40 درجة:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثّل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y) علماً أنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً.

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.3
1			0.14	
قانون Y		0.4		1

حاربوا من أجل الوصول لأحلامكم ..
فالعالم يحتاج الكثير من الشغوفين 💙

النماذج الوزارية:

التمرين الأول:

ليكن X متحوّل عشوائي يمثّل عدد النّجاحات في تجربة برنوليّة الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X

K	0	1	2	3	4
P(X = K)	...	...	...	...	$\frac{16}{81}$

١. ما عدد الاختبارات في التجربة؟

٢. أكمل الجدول المجاور؟

٣. ما التوقّع الرّياضي والتباين للمتحوّل العشوائي X؟

التمرين الثّاني:

يحتوي صندوق أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء، نسحب عشوائيّاً كرتين معاً من الصّندوق، ليكن X المتحوّل العشوائي الّذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة والمطلوب:

١. ما هي مجموعة القيم الّتي يأخذها x؟

٢. احسب كلّاً من $P(x=1)$ و $P(x=3)$، ثمّ استنتج قيمة $P(x=2)$

٣. احسب توقّع x وانحرافه المعياري.

التمرين الثّالث:

صندوق يحتوي على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء، نسحب عشوائيّاً من الصّندوق ثلاث كرات في آنٍ معاً، وليكن الحدث A "الحصول على كرة حمراء على الأقلّ"، والحدث B "الحصول على كرتين سوداوين على الأقل"

احسب الاحتمالات الآتية:

١. $P(A)$ و $P(B)$ و $P(A\backslash B)$.

٢. إذا كان X متحوّل عشوائي يدلّ على عدد الكرات المسحوبة.

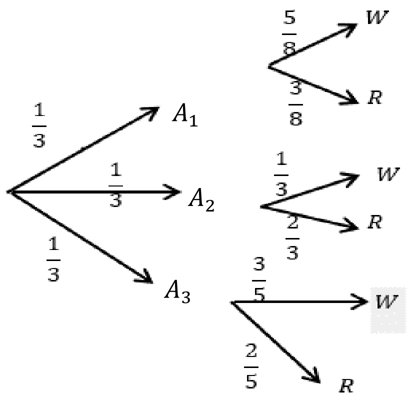
٣. اكتب جدول قانونه الاحتمالي، واحسب توقّعه الرّياضي وتباينه

التمرين الرّابع:

في المخطّط الشّجري المرسوم جانباً الرّمز w يدلّ على الكرات البيضاء والرّمز R على الكرات الحمراء، حيث يتمّ اختيار كرة واحدة عشوائيّاً.

١. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء؟

٢. إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء، فما احتمال أن تكون من الصّندوق الأوّل.



التمرين الخامس:

يشتري محلّ للأدوات الكهربائيّة 400 مصباح من المصنع A، و 200 مصباح من المصنع B، نعلم أنّ نسبة المصابيح المعطوبة من إنتاج المصنع A هي 4%، ومن إنتاج B هي 10%، نسحب مصباحاً بشكل عشوائي

1. ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً؟
2. إذا علمت أنّ المصباح معطوب، ما احتمال أن يكون من B.

التمرين السادس:

صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء، نسحب عشوائيّاً من الصّندوق ثلاث كرات معاً.
نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السّحب ثلاث كرات حمراء، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السّحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر في غير ذلك, عيّن القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X، واحسب توقّعه وتباينه.

التمرين السابع:

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربعة

بأحد العددين 0 و 3 والمطلوب:

1. ليكن الحدث A :« مجموع الأعداد التي كُتبت في الخانات يساوي 6 » وليكن الحدث B : « عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين» احسب $P(A)$ ثم $P(B|A)$
2. نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الخانات التي كُتب فيها العدد 3 , عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

اختبارات الكتاب:

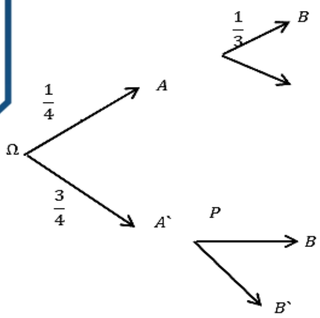
التمرين الأول:

يحوي صندوق 6 بطاقات مرقّمة بالأرقام:$\{1,2,3,4,5,6\}$ نسحب منه عشوائياً بطاقتين على التتالي دون إعادة، ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.

1. عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X، واكتب جدول قانونه الاحتمالي.
2. احسب التوقّع الرّياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

التمرين الثاني:

ليكن A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائيّة معروضة بالمخطط الشّجري المجاور, كيف نختار قيمة P حتى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً.



التمرين الثالث: يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء وخمس كرات بيضاء، عند سحب كرة سوداء يخسر الّلاعب نقطة واحدة وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين, يسحب الّلاعب كرتين على التّالي دون إعادة، ما احتمال أن يحصل الّلاعب على نقطة واحدة فقط؟

التمرين الرابع: نتأمّل الصّناديق التالية:

يحتوي الصّندوق الأوّل على 3 كرات مرقّمة بالأعداد 1 و 2 و 3 ويحوي الصّندوق الثّاني على 4 كرات مرقّمة بالأعداد 2 و 3 و 4 و 5 نسحب من الصّندوق الأوّل كرة عشوائيّاً، ثمّ نسحب كرة من الصّندوق الثّاني والمطلوب:

1. اكتب فضاء العيّنة المرتبط بهذا الاختبار.
2. ليكن A الحدث "إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقلّ تحمل رقم 3، وليكن B الحدث "مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من 5 "
3. هل الحدثان A وB مستقلّان احتماليّاً؟ علّل ذلك.
4. نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدلّ على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين،
   - اكتب مجموعة قيم X
   - واكتب جدول قانونه الاحتمالي
   - ثمّ احسب توقّعه الرّياضي وتباينه.

تتلاشى المستحيلات ..
عندما نخطو أول خطوة 😌💙

فهرس بحث الاحتمالات:

1. **تمهيد:**
   - فضاء العينة
   - الحدث
   - قانون الاحتمال
2. **الاستقلال الاحتمالي لحدثين**
3. **الاحتمال الشرطي**
4. **المسائل الكلامية:**
   - معطيات الشجرة كاملة
   - معطيات الشجرة غير كاملة
5. **المتحولات العشوائية:**
   - القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي
   - القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية
   - المتحولات العشوائية الحدانية "برنولي"
6. **صندوق القوانين:**
   - $P(\Omega)=1\ ,\ P(\phi)=0\ ,\ 0\le P(A)\le 1$
   - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
     $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
   - $P(A')=1-P(A)$
   - $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$
     $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A')$
   - $(A\cap B)'=A'\cup B'$ و $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ويسمى بقانوني دومورغان
   - A و B مستقلان احتمالياً

     $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

     A و B مستقلان احتمالياً

     $P(A|B)=P(A)$ أو $P(B|A)=P(B)$
   - قانون الاحتمال الشرطي:

     $$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

     و $P(A\cap B)=P(B|A).P(A)$

     $P(A\cap B)=P(A|B).P(B)$
   - التقاطع والاجتماع عملية تبديلية أيّ:

     $A\cap B=B\cap A$ و $A\cup B=B\cup A$

مخططات داعمة:

المخطط الأول:

فضاء العينة
نضع فضاء العينة المناسب للتجربة "نتعامل بإسلوب العد".
المسائل:
- قطع نقود متوازنة
- الولادات والأطفال
- حجر نرد واحد

الجدول "الشبكة"
نضع الجدول المناسب للتجربة "نتعامل بإسلوب العد".
المسائل:
- سحب كرتين
- سحب بطاقتين
- رمي حجري نرد
- صندوقان وسحب كرتين من الصندوق

الشجرة "التمثيل الشجري"
نضع الشجرة المناسبة "نتعامل معها حسب قوانين التمثيل الشجري"
المسائل:
- قطع نقود غير متوازنة
- مسائل النسب المئوية
- باقي المسائل تكون شجرة

قوانين
كتابة بالعربي ثم ترجمة.
المسائل:
- سحب ثلاث كرات
- سحب ثلاث بطاقات

برنولي
يتم بناء قانون المسألة ثم إيجاد المطلوب
المسائل:
كل شي يزيد عن حده يقلب برنولي

المخطط الثاني: متحول عشوائي واحد:

النمط الأول:
اكتب القانون الاحتمالي لمتحول عشوائي X:
- نضع فضاء العينة المناسب
- نحدد قيم X "معطاة صراحة أو تحسب"
- نوجد احتمالات قيم X
- نكتب القانون الاحتمالي لـ X

x_i	
p_i	

النمط الثاني:
أوجد التوقع الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i.p_i$$

النمط الثالث:
أوجد التباين:

$$V(X)=E(X^2)-\big(E(X)\big)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2.p_i$$

النمط الرابع:
أوجد الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

المخطط الثالث: القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) :

اكتب القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)	هل X و Y مستقلان	اكمال جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)
* نضع فضاء العينة الشهير المناسب. * نحدد قيم X ونوجد احتمالاتها * نحدد قيم Y ونوجد احتمالاتها * ننظم جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) حيث: الإطارات: هي قانون X و Y الداخل: هي التقاطعات	* نوجد: $P((X=x_i)\cap(Y=y_i))$ * نحدد: $P(X=x_i)$ و $P(Y=y_i)$ ونوجد $P(X=x_i).P(Y=y_i)$ * ويكون X و Y مستقلان احتمالياً إذا تحقق: $P((X=x_i)\cap(Y=y_i))$ $=P(X=x_i).P(Y=y_i)$	* نستخدم الجمع الأفقي والشاقولي. * في حال كان X و Y مستقلان احتمالياً فإننا نستفيد من: الداخل $=$ (إطار)(إطار) $\dfrac{\text{الداخل}}{\square}=$ إطار

المخطط الرابع: التعامل مع مسائل برنولي:

أولاً: يجب بناء قانون للمسألة وفق:

نحدد n

نحدد p "وهي احتمال الحدث الهدف في المرة الواحدة ويتم تحديد p بالاعتماد على فضاءات عينة شهيرة"

نحدد q حيث: $q=1-p$

نضع قانون المسألة وفق: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$

ثانياً: نتابع حسب نمط التمرين حيث الأنماط هي:

إيجاد احتمال حدث ما	القانون الاحتمالي وبرنولي	إكمال جدول	إيجاد التوقع الرياضي والتباين
* نحدد المطلوب * نوجد المطلوب بحيث نعوض في قانون المسألة	* نحدد قيم X "بحيث قيم X من 0 إلى n " * نوجد احتمالات قيم X من خلال التعويض في قانون المسألة * نضع جدول القانون الاحتمالي	نوجد المطلوب	$E(X)=n.p$ $V(X)=n.p.q$

و هكذا نكون قد وصلنا للختام ..

بعد أيام من التعب والجهد والمحاولة، ومكابدة الأفكار، وإسقاطها على التمارين، وترتيب العقول بما فيها!

اللهم لك الحمد..

امتنان عظيم لكل مَن ثبّتَ وثبّت معنا، لكلّ من اجتهد على نفسه ولَم يتركنا في المنتصف، لكل من سهر الليالي وتعب طول الأيام في التدريب والعمل..

نبلغكم أنها كانت رحلة عظيمة مليئة بالتّعب والصّبر والفِكر، بفضل الله..

يا نخبة.. 😟💙

لا تنسوا ساعةً، أننا اجتمعنا لله، وأن كلّ محاولاتنا العظيمة، لله!

وأنّ كل شخص تعرّفنا عليه هنا هو جزء منّا لا ينفصل، يأخذ شيئاً من تفاصيلنا وقلبنا والكثير من حبنا 💙

وإن باعدت بيننا المسافات تجمعنا السّجَدات، لا تتركوا يداً وقلباً، شدّوا الوثاق اليوم وغداً، هناك هدف، هناك شغف، هناك 600 💙💙💙💙💙

الحمد لله على نعمة العلم والعمل🤍

#شيفرة_الـ 600 🥇

#مسك_الختام 😍

#ختام_المسك 🤍

#Elite_Math 🔥🤍

في وداع النُخبة 🥇

طلابي / طالباتي 💙

لقد جرت العادة أن يشكر الطلاب معلمهم أن كان معهم، ولكني اليوم أجد نفسي شاكراً ربي أولاً ثم طلابي وطالباتي ثانياً أن كنت معلمهم، ولربما ملهمهم بما قذف الله في قلبي من إسقاطات وأفكار.
هي محبة من الله وحرقة تعتري القلب أخذت بزمام قلبي ليكون رابط الجأش ليسطر هذه الكلمات التي هي أغلى من ماء العيون.
فعلاً، أشكركم يا من كنتم خير مثال لحملة العلم والأخلاق، فأنتم ورثة الأنبياء، بما سلكتم من طريق تلتمسون فيه علماً، وتنهلون به معرفة.

قد كانت أياماً لا تنسى، وعلى فراقها يؤسى بؤساً، ذكريات أكاديمية وأخوية قد خلدت نفسها لتترك بصمة أبدية على جبين الدهر، فيمر من بعدكم فيناله عبق تلك الذكرى العطرة، فينهل منها، ويقف لها إجلالاً وإكباراً.
وحيث إني لا أحب لحظات الوداع، فهي ترهق النفس، وتدمي القلب لأناس قدروا مخاطبهم، وأذهلوا معلمهم، إلا أن عبراتي لا تجد مسلكاً إلا أن تنسج هذه الديباجة التي أشهد بارئها أنها كتبت من القلب في أقدس وقت ينزل الله فيه إلى السماء الدنيا نزولاً يليق بجلاله، في الثلث الأخير من الليل، في وقت السحر.

ألتمس منكم -أحبتي- أن تسامحوني إن قسوت يوماً، فوالذي نفسي بيده ما كانت إلا رحمة بكم كالباب الذي ورد في الكتاب [بابٌ باطِنُهُ فيهِ الرَّحمَةُ وَظاهِرُهُ مِن قِبَلِهِ العَذابُ] فإن من خوّفك حتى تلقى الأمن خيرٌ ممن أمنك حتى تلقى الخوف، فالأعمال بخواتيمها، سائلاً المولى تعالى أن يكون ختامها مسكاً وبركةً ونوراً وهدى.
سأبقى مخلصاً لكم بدعائي وصلاتي، وجهري وسري، فأنتم أمانة في عنقي، وعهدة في رقبتي، وإخوة في قلبي.
سأحدث عنكم القاصي والداني، سأروي حكايتكم للأجيال القادمة، فأنتم جيل التحدي الذي ثبت ثبات الجبال؛ لأنه وطن قلبه بذكر الله والتوكل عليه، [وَمَن يَتَوَكَّل عَلَى اللَّهِ فَهُوَ حَسبُهُ].

وإني من مقامي هذا، أرى نور توفيق الله لكم، أراكم بأعلى المراتب وقد أشرق مستقبلكم، وزالت آلامكم، فأبشروا بما قدمتم لأنفسكم، "وآتوا حقه يوم حصاده"[وَآتوا حَقَّهُ يَومَ حَصادِهِ]، فعليكم بزكاة العلم أن تعملوا لآخرتكم، [وَالآخِرَةُ خَيرٌ وَأَبقى].

اذكروني ..

محبكم خالد عامر و فريقه 💙

العام الدراسي 2024 🥇

2024

شيفرة الـ 600

1
أوراق تم ترتيب الكتاب فيها بهيئة أسئلة بالصيـغ المحتملـة لورودهـا وفقـاً للتوصيف الوزاري و خطوات الإجابة عنها

2
مخطـطـات وجـداول لخصت الأفكار بطريقة احترافية مساعدة

3
مسائل امتحانية جزئية و شاملة محلولة

ELITE MATH

by:Hisham Labanieh