الملخص الشامل
لاجتياز الفحص الترشيحي

في مادة الرياضيات

مراجعة شاملة لأهم الأفكار اللي وردت

في صفوف العاشر والحادي عشر

إعداد:

المدرس المهندس عامر أسد

0935785176

مراجعة العمليات على الكسور

1) جمع وطرح الكسور:

نوحد المقامات ثم نجمع البسوط ونضع المقام الموحد.

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{(2)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{(3)}=\frac{2+3}{6}=\frac{5}{6}$$

2) ضرب الكسور:

عند ضرب الكسور نقوم بضرب البسط بالبسط والمقام بالمقام.

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times 1}{3\times 2}=\frac{1}{6}$$

3) قسمة الكسور:

عند قسمة الكسور نضرب بمقلوب المقام.

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{1\times 4}{3\times 3}=\frac{4}{9}$$

المقلوب

تنويه !! رسمتين يجب التركيز على شكلهما:

1) الرسمة الأولى:

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{c}} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{2\times 4}=\frac{3}{8}$$

ضرب ضرب

2) الرسمة الثانية:

$$\boxed{\frac{a}{\frac{b}{c}}} \Leftrightarrow \frac{3}{\frac{2}{5}}=\frac{3\times 5}{2}=\frac{15}{2}$$

ضرب ضرب

مراجعة العمليات على الجذور التربيعية

1) جمع الجذور التربيعية:

نستطيع جمع الجذور المتشابهة فقط أما الجذور الغير متشابهة لا نستطيع جمعها.

1) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

2) $\sqrt{3}+\sqrt{5}\neq\sqrt{8}$ (لا تُجمع)

3) $\sqrt{5}-3\sqrt{5}=-2\sqrt{5}$

2) ضرب الجذور التربيعية:

عند ضرب الجذور نضرب المضمون بالمضمون ونضع الناتج تحت الجذر:

$$\sqrt{a}.\sqrt{b}\Leftrightarrow\sqrt{a.b}$$

$$\sqrt{3}.\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{15}$$

$$\sqrt{3}.\sqrt{3}=\sqrt{9}=\left(\sqrt{3}\right)^2=3$$

3) متى نستطيع توزيع الجذر على العدد؟ وما الفائدة منها؟

نستطيع توزيع الجذر على الجداء فقط:

$$\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$$

ولا نستطيع توزيع الجذر على المجموع:

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

- الفائدة من توزيع الجذر على الجداء هو الحصول على جذر عدد غير مشهور:

- $\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
- $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

4) التربيع وعلاقته بالجذر:

- $\cancel{\sqrt{(a)^2}}=a \overset{\text{تعميم}}{\Longrightarrow} \cancel{\sqrt{(\text{عدد})^2}}=\text{عدد}$
- $\cancel{\sqrt{(x)^2}}=|x| \overset{\text{تعميم}}{\Longrightarrow} \cancel{\sqrt{(\text{المجهول})^2}}=|\text{المجهول}|$
- التربيع يبروح مع الجذر، ولكن انتبه إذا كان تحت الجذر مجهول نخرج المجهول بالقيمة المطلقة:

$$\sqrt{(\text{عدد})^2}=\text{عدد}\quad,\quad\sqrt{(\text{المجهول})^2}=|\text{المجهول}|$$

الأقواس وكيفية التعامل معها

1) $2\cdot(x+2)=2x+4$

مختلفة

2) $2+(x+2)=2+x+2=4+x$

متشابه

3) $2\cdot(x\cdot 2)=2.x.2=4.x=4x$

متشابه

❖ في المثال الأول تم نشر الأقواس وذلك لأن الأقواس فصلت بين عمليتين مختلفتين ولكن في المثالين الباقيين حُذفت الأقواس وكأنها غير موجودة.

ضرب وَ قسمة ← يتم النشر → جمع وَ طرح

(نهمل وجود الأقواس)

القيمة المطلقة وكيفية التعامل معها

1) القيمة المطلقة لعدد:

$$|+4|=+4\quad,\quad|-4|=+4$$

❖ دوماً ناتج القيمة المطلقة موجب.

2) القيمة المطلقة لمجهول:

$$|x|=\begin{cases}-x & , \quad x<0\\ +x & , \quad x\geq 0\end{cases}$$

مراجعة مجموعات الأعداد

1) مجموعة الأعداد الطبيعية ($\mathbb{N}$):

تضم الأعداد الموجبة فقط من غير الأعداد العشرية والكسور والجذور.

$$x_1=3\in\mathbb{N}\quad,\quad x_2=\frac{3}{2}\notin\mathbb{N}$$

(سترد معنا هذه المجموعة في بحث المتتاليات).

2) مجموعة الأعداد الصحيحة ($\mathbb{Z}$):

تضم الأعداد الموجبة والسالبة الصحيحة فقط من غير الكسور والجذور والأعداد العشرية:

$$x_1=+3\in\mathbb{Z}\quad,\quad x_2=-3\in\mathbb{Z}$$

$$x_3=\sqrt{5}\notin\mathbb{Z}\quad,\quad x_4=\frac{1}{4}\notin\mathbb{Z}$$

3) مجموعة الأعداد العادية ($\mathbb{Q}$):

تضم الأعداد الموجبة والسالبة والكسور (عدد عشري منتهي)، ولا تضم الأعداد غير النسبية (عدد عشري غير منتهي وغير دوري).

- هذه المجموعة غير مهمة لكتاب البكلوريا (مهمة فقط لكتاب التاسع).

4) مجموعة الأعداد الحقيقية ($\mathbb{R}$):

تضم الأعداد الموجبة والسالبة والكسور وتضم الأعداد الغير نسبية.

- هذه الأعداد هي الأكثر تكراراً واستخداماً في منهاج البكلوريا (مجموعات التعريف للتوابع الجبرية).

ملاحظة: يوجد مجموعة الأعداد العقدية تُسمى (Complex) وهي مشابهة لمجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أنها تمتاز عنها بحلها قضية عجزت عن حلها مجموعة الأعداد الحقيقة ($\mathbb{R}$).

$x^2=$ موجب ✓ $\mathbb{R}$, $x^2=$ سالب ✗ (مستحيلة الحل)

بينما في العقدية يوجد حل لكلا من المعادلتين السابقتين.

الفرق بين قوس المجموعة وقوس المجال

١) قوس المجموعة { }:

يضم فقط الأعداد الموجودة ضمن المجال

وفي منهاج البكلوريا يستخدم في أمرين:

1) مجموعة الحلول $S = \{\ \}$.

2) عند مجموعة تعريف التابع الكسري $\mathbb{R} \setminus \{\ \}$

٢) قوس المجال [ ]:

يضم جميع الأعداد الموجودة ضمن حدود المجال.

$$x \in]-1 , +5]$$

المجال مفتوح أي لا يضم القيمة $(x = -1)$

المجال مغلق أي يضم القيمة $(x = 5)$

الفرق بين الاجتماع والتقاطع ومتى يتم استخدامهم؟

١) الاجتماع (∪):

يضم العناصر المشتركة والغير مشتركة ويُستخدم في منهاجنا عند الحصول على المجالات من أي جدول إشارة.

- كبير $\mathbb{R}$ ∪ صغير أي شي = $\mathbb{R}$
- صغير ∪ كبير = كبير

٢) التقاطع (∩):

يضم العناصر المشتركة فقط ويستخدم في منهاجنا عند إيجاد مجموعة التعريف بين تابعين أو عند إيجاد شرط الحل.

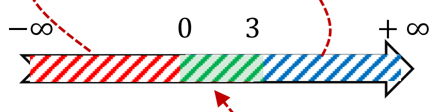
- $\mathbb{R}$ ∩ أي شي = أي شي
- كبير ∩ صغير = صغير

في حال تعقيد المجالات نستخدم مستقيم الأعداد للحصول على ناتج التقاطع.

مثال على مستقيم الأعداد:

$$]-\infty , 3[\ \cap\ [0 , +\infty[$$

$$D_1 \cap D_2$$



$$D = D_1 \cap D_2 = [0 ,\ 3[$$

متى يجوز الاختصار؟؟ ومتى لا يجوز الاختصار؟؟

يجوز الاختصار فقط في حالة الضرب ولا يجوز في حالة الجمع أو الطرح.

$\frac{2+x}{x}$: (لا يمكن الأختصار بسبب وجود الجمع)

$\frac{2*x}{x}$: (يمكن الأختصار بسبب وجود الضرب)

سؤال؟؟

أي من العبارتين الرياضيتين التاليتين صحيحة مع تعليل السبب؟؟

1) $\frac{3+x}{x} = \frac{3}{x} + \frac{x}{x}$

2) $\frac{x}{3+x} \neq \frac{x}{3} + \frac{x}{x}$

العبارة الأولى هي العبارة الصحيحة والعبارة الثانية هي العبارة الخاطئة. ويجب علينا دوماً اعتبار المقام كتلة واحدة لا يمكن تجزئتها.

المتطابقات التربيعية

١) الشكل الأول:

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

مثال:

- $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
- $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right).x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

٢) الشكل الثاني:

$$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$$

اجباري

لازم نحفظ المتطابقة بالشكلين وكثير مهمة بالمنهاج ورح نسميها مهضومة

مثال:

- $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$
- $x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$

ملاحظة هامة:

$x^2 + 25 \neq (x-5)(x+5)$

ما قدرنا نطبق المتطابقة المهضومة لأن في + بعد التربيع.

المعادلات الجبرية وطرق التعامل معها

١) معادلات الدرجة الأولى:

يتم حلها عن طريق نقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى الطرف الآخر ولكن انتبه !! إلى الخطوة الأخيرة.

$$2 . x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

$$2 + x = 4 \Rightarrow x = 4 - 2 = 2$$

الخطوة الأخيرة تكون دوماً عكس العملية الموجودة بين المجهول و العدد.

مثال (1): $3x - 2 = 4x - 3$

$3x - 4x = -3 + 2$

$-x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{-1} = +1$

$\Rightarrow$ مجموعة الحلول : $S = \{1\}$

مثال (2): $2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 3x + \sqrt{5}$

$2x - 1 = 3x + \sqrt{5}$

$2x - 3x = \sqrt{5} + 1$

$-x = \sqrt{5} + 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}+1}{-1}$

$\Rightarrow x = -\sqrt{5} - 1$ تم توزيع المقام على البسط

٢) معادلات الدرجة الثانية:

الشكل العام لمعادلة الدرجة الثانية:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

طرق حل معادلات الدرجة الثانية:

١) المميز(Δ):

تقوم بحل جميع أنواع معادلات الدرجة الثانية سواء كانت أمثال (x^2) واحد أو غير واحد.

$$\Delta = B^2 - 4A.C$$

1	2	3
$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
(حلين مختلفين)	(حل مضاعف)	(مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$)
$x_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$, $x_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$	$x_1=x_2=\frac{-B}{2A}$	

مثال (1): $\Delta > 0$

$$\boxed{x^2+6x-7=0}$$

$\Delta = B^2 - 4A.C = 36 - 4(1)(-7)$

$\Rightarrow \Delta = 36 + 28 = 64$

$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{64} = 8$

يوجد حلين:

$$x_1 = \frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-6+8}{2(1)} = 1$$

$$x_2 = \frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{-6-8}{2(1)} = -7$$

$\Rightarrow$ مجموعة الحلول: $S = \{1,-7\}$

مثال (2): $\Delta = 0$

$$\boxed{x^2-6x=-9}$$

$x^2-6x+9=0$

$\Delta = B^2 - 4A.C$

$\Delta = 36 - 4(1)(9) = 36 - 36 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-B}{2A} = \frac{+6}{2(1)} = 3$ (حل مضاعف)

مثال (3): $\Delta < 0$

$$\boxed{3x^2-2x+7=0}$$

$\Delta = B^2 - 4A.C$

$\Delta = 4 - 4(3)(7)$

$\Delta = 4 - 84 = -80 < 0$

$\Leftarrow$ مستحيلة الحل في $(\mathbb{R})$

---

2) التحليل المباشر:

نستخدم هذه الطريقة فقط عندما تكون أمثال (x^2) مساوية إلى الواحد.

حيث نبحث عن عددين مجموعهما هو أمثال (x) وجداءهما العدد الثابت.

مثال توضيحي (1):

$$\boxed{x^2+5x+6=0}$$

نبحث عن عددين مجموعهما (5) وجداءهما (6):

$(x+3)(x+2)=0$

$\Rightarrow$ إما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$
أو $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

مثال توضيحي (2):

$$\boxed{x^2+7x+6=0}$$

تنويه !! عندما تكون أمثال (x) والعدد الثابت متقاربان بالقيمة يكون إحدى العددين (1).

$(x+6)(x+1)=0$

$\Rightarrow$ إما $x+6=0 \Rightarrow x=-6$
أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

مثال توضيحي (3):

$$\boxed{2x^2+14x+12=0}$$

تنويه !! من شروط التحليل المباشر أن تكون أمثال (x^2) مساوية إلى (1) لذلك نقسم طرفي المعادلة على (2).

$2x^2+14x+12=0 \quad \boxed{\div 2}$

$x^2+7x+6=0$

$(x+6)(x+1)=0$

$\Rightarrow$ إما $x+6=0 \Rightarrow x=-6$
أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

ملاحظة هامة جداً

أي عملية رياضية سواء إضافة عدد أو الضرب بعدد على إحدى طرفي المعادلة. يجب تطبيقها على الطرف الآخر.

$9x^2+3x=1 \quad \boxed{\div 3}$

$$\Rightarrow \frac{9x^2}{3}+\frac{3x}{3}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2+x=\frac{1}{3}$$

---

3) سحب عامل مشترك:

تُستخدم هذه الطريقة عندما تكون (x) موجودة بكل حد من حدود المعادلة وتوجد عبارة شائعة بالرياضيات تقول: (لا توفر عامل مشترك) وأي عامل مشترك يتم سحبه يتم التقسيم عليه.

مثال توضيحي:

$$\boxed{x^2+3x=0}$$

نلاحظ وجود (x) بكل حد من حدود المعادلة:

$\Leftarrow$ نسحب (x) عامل مشترك:

$$x\left(\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}\right)=0$$

$x(x+3)=0 \Rightarrow$ إما $x=0$
أو $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

المدرس المهندس عامر أسد

0935785176

4) طريقة الجذور والمتطابقة:

تُستخدم لما يكون شكل المعادلة:

$(x^2 - \text{عدد})$ أو $((\ )^2 - \text{عدد})$

أمثلة توضيحية:

1) $\boxed{x^2-4=0}$

1) طريقة المتطابقة (المهضومة):

$x^2-4=(x-2)(x+2)=0$

إما $x-2=0 \Rightarrow x=2$
أو $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

2) طريقة الجذور:

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4$ ⇠ نجذر الطرفين

$\sqrt{x^2}=\sqrt{4} \Rightarrow |x|=2$ إما $x_1=+2$ أو $x_2=-2$

مجموعة الحلول: $S=\{-2,+2\}$

---

2) $\boxed{(x-3)^2-25=0}$

1) طريقة المتطابقة:

$((x-3)-5)((x-3)+5)=5$

إما $(x-3)-5=0 \Rightarrow x=8$
أو $(x-3)+5=0 \Rightarrow x=-2$

الأقواس ليس لها داعي

2) طريقة الجذور:

$(x-3)^2-25=0 \Rightarrow$

$(x-3)^2=25$ ⇠ نجذر الطرفين

$\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{25}$

$|x-3|=5$ إما $x-3=5 \Rightarrow x=8$
أو $x-3=-5 \Rightarrow x=-2$

---

5) طريقة الإتمام إلى مربع كامل:

تُستخدم طريقة الإتمام إلى مربع كامل عندما تكون أمثال (x^2) مساوية إلى (1).

خطوات الإتمام إلى مربع كامل:

1) نكتب الحدين الأول والثاني.

2) نضيف ثم نطرح $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ (مربع نصف أمثال (x))

3) نأخذ الحدود الثلاث الأولى متطابقة تربيعية (جذر الأول وإشارة الثاني وجذر الثالث).

4) نطبّق طريقة المتطابقة التي تعلمناها سابقاً (المهضومة).

مثال توضيحي (1):

$$\boxed{x^2+8x+12=0}$$

الحل:

$$\underbrace{x^2+8x+16}_{\text{متطابقة تربيعية}}-16+12=0$$

جذر، إشارة، جذر

$$\underbrace{(x+4)^2}_{\text{المطابقة التربيعية}}-4=0$$

$$\big((x+4)-2\big)\big((x+4)+2\big)=0$$

$$\begin{cases} \text{إما } (x+4)-2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2} \\ \text{أو } (x+4)+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-6} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموعة الحلول : $S=\{-2,-6\}$

مثال توضيحي (2):

$$\boxed{x^2+5x+4=0}$$

الحل:

$$\underbrace{x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2}_{\text{مطابقة تربيعية}}-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4=0$$

جذر، إشارة، جذر

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4=0$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$$

$$\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}\right)\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\begin{cases} \text{إما } \left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \boxed{x=-1} \\ \text{أو } \left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{3}{2}=0 \Rightarrow \boxed{x=-4} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموعة الحلول : $S=\{-1,-4\}$

مثال توضيحي (3):

$$\boxed{x^2+x+6=0}$$

الحل:

$$x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}=0$$

المعادلة مستحيلة الحل لأن التربيع خلفه إشارة موجب وبالتالي لا نستطيع تطبيق المتطابقة المهضومة.

ملاحظة:

$(\ )^2-$ عدد $\Rightarrow$ (متطابقة أو جذور)

$(\ )^2+$ عدد $\Rightarrow$ (مستحيلة الحل)

مخطط صندوقي يلخص طرق حل معادلات الدرجة الثانية

حل معادلات الدرجة الثانية
$$Ax^2+Bx+C=0$$

$A=1$

Yes:

- إتمام إلى مربع كامل

خطوات الحل:

1) نكتب الحدين الأول والثاني.

2) نضيف ثم نطرح $\left(\frac{B}{2}\right)^2$.

3) نأخذ الحدود الثلاث الأولى متطابقة تربيعية (جذر الأول وإشارة الثاني وجذر الثالث).

4) نطّبق طريقة المتطابقة التي تعلمناها سابقاً (المهضومة).

- تحليل مباشر

نبحث عن عددين مجموعهما (B) وجداءهما (C)

No:

- سحب عامل مشترك

كل حد يحوي على المجهول (x)

- المميز (Δ)

$$\Delta=B^2-4A.C$$

$(\Delta>0)$

$$x_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$x_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2A}$$

$(\Delta=0)$

$$x_1=x_2=\frac{-B}{2A}$$

$(\Delta<0)$

مستحيلة الحل في $(\mathbb{R})$

المعادلات الكسرية

تعتمد الطريقة في حل المعادلات الكسرية على قاعدة جداء الوسطين بالطرفين ولكن يجب أن يكون كل حد من المعادلة على جهة أو عن طريق قاعدة من يعدم الكسر هو بسطه.

مثال:

$$\frac{3x+1}{x}=1$$

الحل:

الطريقة (1) (الوسطين بالطرفين):

$\frac{3x+1}{x}=1$ نضرب الوسطين بالطرفين

$\Rightarrow 3x+1=x$

$3x-x=-1 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$

الطريقة (2) (توحيد المقامات):

$\frac{3x+1}{x}-1=0$ نوحد المقامات

$\frac{3x+1}{x}-\frac{x}{x}=0$

$\Rightarrow \frac{3x+1-x}{x}=0$

$\Rightarrow \frac{2x+1}{x}=0$ من يعدم الكسر هو بسطه

$\Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$

قاعدة هامة: لا تنسوا لما يكون عنا جداء قوسين فورا بنطّبق قاعدة (أما , أو)

مثال توضيحي:

$(3x+3)(x+2)=0$

إما $3x+3=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

أو $x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$

الحل المشترك لجملة معادلتين

قبل البدء بالحل المشترك لجملة معادلتين يجب علينا معرفة بأن عدد المعادلات يجب أن يكون مساوياً لعدد المجاهيل.

طرق الحل لجملة معادلتين:

١) لتعويض:

شرح خطوات الحل:

1) نذهب إلى إحدى المعادلتين ونكتب إحدى المجهولين بدلالة الآخر.
2) نعوض في المعادلة الثانية.
3) تصبح لدينا معادلة بمجهول واحد، عندها نوجد قيمة ذلك المجهول.
4) نعوض هذه القيمة بالمعادلة التي حصلنا عليها في (1).

مثال توضيحي:

$\boxed{2x-3y=2}$ ⇢ $\boxed{1}$

$\boxed{x+y=1}$ ⇢ $\boxed{2}$

الحل:

من $\boxed{2}$ نجد أن:

$\boxed{y=1-x}$ ⇢ $\boxed{3}$

نعوض $\boxed{3}$ في $\boxed{1}$:

$2x-3(1-x)=2 \Rightarrow$

$2x-3+3x=2$

$5x=5 \Rightarrow \boxed{x=1}$

نعوض $(x=1)$ في $\boxed{3}$:

$y=1-(1) \Rightarrow \boxed{y=0}$

$\Rightarrow S=\{\underbrace{1}_{x},\underbrace{0}_{y}\}$

٢) يقة والطرح:

شرح خطوات الحل:

1) نقوم بطرح المجاهيل ذات الأمثال المتساوية.
2) نحصل على قيمة المجهول المتبقي بعد الحذف.
3) نعوض في إحدى المعادلتين للحصول على المجهول الآخر.

مثال توضيحي:

$\boxed{x-3y=4}$ ⇢ $\boxed{1}$

$\boxed{x+y=-3}$ ⇢ $\boxed{2}$

الحل:

$\boxed{1}-\boxed{2} \Rightarrow -4y=7$

$\Rightarrow y=\frac{7}{-4}=-\frac{7}{4}$

نعوض $\left(y=-\frac{7}{4}\right)$ في المعادلة رقم $\boxed{2}$:

$x-\frac{7}{4}=-3 \Rightarrow x=-\underbrace{\frac{3}{1}}_{(4)}+\underbrace{\frac{7}{4}}_{(1)}=-\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x=-\frac{5}{4}}$, $\boxed{y=-\frac{7}{4}}$

$\Rightarrow S=\left\{\underbrace{-\frac{5}{4}}_{x},\underbrace{-\frac{7}{4}}_{y}\right\}$

شرح: تم طرح المعادلتين من أجل حذف (x) للحصول على قيمة (y).

ملاحظة: أحياناً لا تكون الأمثال متشابهة لذلك نقوم بضرب طرفي المعادلة (بعدد ما) لتحقيق التشابه.

$\boxed{x+2y-1=0}$ ⇢ $\boxed{1}$

$\boxed{4x+y+2=0}$ ⇢ $\boxed{2}$

إما نضرب المعادلة $\boxed{1}$ بـ (-4) ومن ثم نجمع $\boxed{1}+\boxed{2}$

أو نضرب المعادلة $\boxed{2}$ بـ (-2) ومن ثم نجمع $\boxed{1}+\boxed{2}$

متى نقلب جهة التراجح في المتراجحات العددية؟؟

نقلب جهة التراجح في الرياضيات بحالتين:

١) الحالة الأولى:

عندما نضرب أو نقسم طرفي المتراجحة على عدد سالب حصراً.

$x>4 \xRightarrow{\boxed{*-4}} -4x<-16$

قلبنا جهة التراجح

2) الحالة الثانية:

عندما نقلب حدود المتراجحة:

$$x \geq 4 \xrightarrow{\text{نأخذ المقلوب}} \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$$

قلبنا جهة التراجح

مثال توضيحي إضافي:

$$-x \leq 3 \Rightarrow x \geq \frac{3}{-1}$$

$$\Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, +\infty[$$

تبعاً للملاحظة (*)

ملاحظة هامة (*):

$$x \geq a \Leftrightarrow x \in [a, +\infty[$$

$$x \leq a \Leftrightarrow x \in]-\infty, a]$$

1) عند وجود المساواة نغلق المجال عند القيمة الموجودة بالمجال.

2) دوماً المجال مفتوح عند $(\pm\infty)$

المتراجحات العددية

١) متراجحات الدرجة الأولى:

الطريقة الأولى:

نقل المجاهيل إلى طرف والمعاليم إلى الطرف الآخر ولكن مع مراعاة القاعدة السابقة.
(متى نقلب جهة التراجح؟؟)

مثال توضيحي (1):

$$\boxed{3x + 1 < 4x - 4}$$

الحل:

$$3x - 4x < -4 - 1$$

$$-x < -5 \Rightarrow x > \frac{-5}{-1}$$

حسب القاعدة السابقة

$$x > +5 \Rightarrow x \in]+5, +\infty[$$

مثال توضيحي (2):

$$\boxed{2\left(\sqrt{3}\,x + \frac{1}{2}\right) \geq -\sqrt{3}\,x + 3}$$

الحل:

$$2\sqrt{3}\,x + 1 \geq -\sqrt{3}\,x + 3$$

$$2\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,x \geq 3 - 1$$

$$2\sqrt{3}\,x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x \in \left[\frac{2}{3\sqrt{3}}, +\infty\right[$$

الطريقة الثانية (جدول الإشارة):

خطوات الحل:

1) ننقل جميع الحدود إلى جهة واحدة.

2) نحوّلها إلى معادلة ونوجد الحل (x_0).

3) نرسم جدول الإشارة كما يلي:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
المتراجحة	تخالف إشارة أمثال (x)	0	توافق إشارة أمثال (x)

إشارة $(+)$ بالجدول $\Leftrightarrow$ $(\text{المتراجحة} > 0)$
(تكون محققة عند إشارة $(+)$ بالجدول).

إشارة $(-)$ بالجدول $\Leftrightarrow$ $(\text{المتراجحة} < 0)$
(تكون محققة عند إشارة $(-)$ بالجدول).

إعادة حل المتراجحات السابقة بالطريقة الثانية:

1) $\boxed{3x + 1 < 4x - 4}$

الحل:

$$3x + 1 - 4x + 4 < 0$$

$$3x + 1 - 4x + 4 = 0$$

$$-x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-x + 5$	$+$	0	$-$
	تخالف (غير محققة)		توافق (محققة)

$$x \in]5, +\infty[$$

2) $\boxed{2\left(\sqrt{3}\,x + \frac{1}{2}\right) \geq -\sqrt{3}\,x + 3}$

الحل:

$$2\sqrt{3}\,x + 1 + \sqrt{3}\,x - 3 \geq 0$$

$$+3\sqrt{3}\,x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$+\infty$
المتراجحة	$-$	0	$+$
	تخالف		توافق

$$x \in \left[\frac{2}{3\sqrt{3}}, +\infty\right[$$

2) متراجحات الدرجة الثانية:

يتم حلها فقط على الطريقة الثانية (جدول الإشارة) كما تعلمنا سابقاً مع اختلاف جدول الإشارة.

حالات جدول الإشارة:

1) $\boxed{\Delta > 0}$ (يوجد حلين)

يجب ترتيبهن بشكل صحيح

x	$-\infty$	x_0		x_1	$+\infty$
المتراجحة	توافق إشارة أمثال (x^2)	0	تخالف إشارة أمثال (x^2)	0	توافق إشارة أمثال (x^2)

2) $\boxed{\Delta = 0}$ (حل مضاعف)

x	$-\infty$	(x_0, x_1)	$+\infty$
المتراجحة	توافق إشارة أمثال (x^2)	0	توافق إشارة أمثال (x^2)

2) $\boxed{\Delta < 0}$ (مستحيل الحل)

x	$-\infty$	$+\infty$
المتراجحة	توافق إشارة أمثال (x^2)	

مثال توضيحي (1): $(\Delta > 0)$

$$\boxed{x^2 + 3x < -2}$$

الحل:

$$x^2 + 3x + 2 < 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x + 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{إما } x = -2 \\ \text{أو } x = -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	$\overset{\text{صغير}}{-2}$		$\overset{\text{كبير}}{-1}$	$+\infty$
المتراجحة	$+$ غير محققة	0	$-$ محققة	0	$+$ غير محققة

$$x \in]-2, -1[$$

فتحنا التراجح بسبب عدم وجود (=) بالتراجح

مثال توضيحي (2):

$$\boxed{x^2 + 9 \leq -6x}$$

الحل:

$$x^2 + 6x + 9 \leq 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = -3 \left(\text{حل مضاعف}\right)$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
المتراجحة	+ غير محققة	0	+ غير محققة

المتراجحة مستحيلة الحل.

مثال توضيحي (3):

$$2x^2+x+7>0$$

الحل:

$2x^2+x+7=0$

$\Delta = b^2-4a.c = 1-4(2)(7)$

$\Delta = 1-56=-55<0$

المعادلة مستحيلة الحل.

x	$-\infty$	$+\infty$
المتراجحة	+ محققة	

$x\in\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

3) المتراجحات الكسرية:

خطوات حل المتراجحات الكسرية:

1) ننقل جميع الحدود إلى جهة واحدة.
2) نعدم كل من البسط والمقام على حدى.
3) نرسم جدول الإشارة:

x	$-\infty$	x_0		x_1	$+\infty$
البسط		0			
المقام				0	
الكسر	نقسم الإشارات	0	نقسم الإشارات	▨	نقسم الإشارات

عدم تعيين نضعها عند صفر المقام

مثال توضيحي (1):

$$\frac{3x+1}{x+2}\le 0$$

الحل:

البسط: $3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

المقام: $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
البسط	− − − −	−	− − −	0	+ + +
المقام	− − − −	0	+ + +	+	+ + +
الكسر	+ (غير محققة)	▨	− (محققة)	0	+ (غير محققة)

$x\in\left]-2,-\frac{1}{3}\right]$

أغلقنا المجال بسبب وجود مساواة

فتحنا المجال بسبب وجود عدم تعيين

مثال توضيحي (2):

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}\ge 0$$

الحل:

البسط: $x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=+1\\x_2=-1\end{cases}$

المقام: $x^2+4x+4=0 \Rightarrow$

$(x+2)(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ (جذر مضاعف)

x	$-\infty$	-2		-1		$+1$	$+\infty$
البسط	+ + +	+	+	0	− −	0	+ + +
المقام	+ + +	0	+ +	+	+ +	+	+ + +
الكسر	+ (محققة)	▨	+ (محققة)	0	−	0	+ (محققة)

$x\in]-\infty,-2[\cup]-2,-1]\cup[1,+\infty[$

ملاحظات على المثال السابق:

1) بالسطر الثاني بالجدول تم وضع إشارة (+) بسبب وجود جذر مضاعف.
2) تم فتح المجال عند $(x=-2)$ بسبب وجود عدم تعيين ▨.

مثال توضيحي (3):

$$\frac{2x-2}{-x+4}\le 1$$

الحل:

$\frac{2x-2}{-x+4}-1\le 0$

نقوم بتوحيد المقامات:

$\frac{2x-2}{-x+4}+\frac{x-4}{-x+4}\le 0$

$\frac{3x-6}{-x+4}\le 0$

البسط: $3x-6=0 \Rightarrow x=2$

المقام: $-x+4=0 \Rightarrow x=4$

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
البسط	− − −	0	+ + +	+	+ + +
المقام	+ + +	+	+ + +	0	− − − − −
الكسر	− (محققة)	0	+	▨	− (محققة)

$x\in]-\infty,2]\cup]4,+\infty[$

أغلقنا المجال بسبب وجود مساواة

فتحنا المجال بسبب وجود عدم تعيين.

مخطط صندوقي يلخص المتراجحات العددية

- حل المتراجحات العددية
  - طريقة الجدول
    - درجة ثانية
    - درجة أولى
  - طريقة أولى
    - درجة أولى

أنواع التوابع الجبرية مع مجموعات التعريف والاشتقاق

1) التابع الصحيح:

هو كل تابع لا يحوي على جذر أو كسر أو حتى على تابع لوغاريتمي أو أسي ⇐ تكون مجموعة تعريفه $\mathbb{R}$.

$f(x)=2x+1 \;;\; x\in\mathbb{R}$ (صحيح)

$f(x)=\frac{2}{3}x+1 \;;\; x\in\mathbb{R}$ (صحيح)

$f(x)=\sqrt{3}\,x+1 \;;\; x\in\mathbb{R}$ (صحيح)

ملاحظة: يبقى التابع صحيح طالما لا يحوي على مجهول تحت الجذر أو على مجهول في المقام بالتابع الكسري

2) التابع الجذري التربيعي:

$$f(x)=\sqrt{g(x)}$$

مجموعة التعريف: $g(x)\ge 0$

ونحلها كما تعلمنا سابقاً في المتراجحات العددية

أمثلة هامة:

① $f(x)=\sqrt{3x+1}$

الحل: مجموعة التعريف: $(3x+1\ge 0)$

$\Rightarrow 3x\ge 1 \Rightarrow x\ge\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right[$

② $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

الحل:

مجموعة التعريف: $(x^2-4\ge 0)$

$x^2-4\ge 0 \Rightarrow x^2-4=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+2)=0$ إما $x=+2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$	-2		$+2$	$+\infty$
المتراجحة	$+$ محققة	0	$-$	0	$+$ محققة

مجموعة التعريف: $x\in\ ]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

③ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}$

الحل:

مجموعة التعريف: $\left(\frac{2x+1}{x}\ge 0\right)$

البسط: $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

المقام: $x=0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
البسط	$-\ -\ -$	0	$+\ +$	$+$	$+\ +$
المقام	$-\ -\ -$	$-$	$-\ -$	0	$+\ +\ +$
الكسر	$+$ (محققة)	0	$-$	$\Vert$	$+$ (محققة)

$x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\ ]0,+\infty[$

3) التابع الكسري:

تابع كسري صحيح: $x\in\mathbb{R}\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

تابع كسري غير صحيح: $(D_1\cap D_2)\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

D_1: مجموعة تعريف البسط

D_2: مجموعة تعريف المقام

1) جذور المقام: هي القيم التي تعدم المقام (المقام =0).

2) التابع الكسري الصحيح: هو كل تابع كسري بسطه ومقامه لا يحوي على جذر أو لوغاريتم أو أسي أو مثلثي.

أمثلة هامة:

① $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$

الحل: التابع الكسري صحيح:

$x\in\mathbb{R}\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

جذور المقام: $x-2=0 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

ملاحظة هامة:

(١)

$\mathbb{R}\setminus\{a\} \Leftrightarrow\ ]-\infty,a[\cup]a,+\infty[$

يعني كل $(\mathbb{R})$ ما عدا (a).

(٢)

$\mathbb{R}\setminus\{a,b\}=$

$=]-\infty,a[\cup]a,b[\cup]b,+\infty[$

دوماً عدد المجالات يزيد بمقدار (1) عن عدد القيم المحذوفة.

② $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$

الحل: التابع الكسري صحيح:

$x\in\mathbb{R}\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

جذور المقام: $x^2-9=0$

$\Rightarrow (x-3)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+3 \\ x=-3 \end{cases}$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,+3\}$

$x\in\ ]-\infty,-3[\cup]-3,+3[\cup]3,+\infty[$

③ $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$

الحل: التابع الكسري صحيح:

$x\in\mathbb{R}\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

جذور المقام: $x^2+4=0 \Rightarrow x^2\neq -4$ مستحيلة الحل

$x\in\mathbb{R}=\ ]-\infty,+\infty[$

④ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$

الحل: التابع الكسري صحيح:

$D=\left(\text{مجموعة تعريف التابع}\right)=(D_1\cap D_2)\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

$D_1: x+1\ge 0 \Rightarrow x\ge -1$ (تابع جذري)

$\Rightarrow x\in[+1,+\infty[$

$D_2: x\in\mathbb{R}$ ⋯> (تابع صحيح)

جذور المقام: $x-3=0 \Rightarrow x=3$

بالتعويض في العلاقة:

$D: ([-1,+\infty[\cap\mathbb{R})\setminus\{3\}$

$D: [-1,+\infty[\setminus\{3\}$

$D: [-1,3[\cup]3,+\infty[$

$x\in([-1,3[\cup]3,+\infty[)$

ملاحظة على المثال السابق:

كما تعلمنا سابقاً في فقرة التقاطع والاجتماع:

(أي شي $\cap\ \mathbb{R}\ =$ أي شي)

$[-1,+\infty[\cap\mathbb{R}=[-1,+\infty[$

ملاحظة هامة:

يجب علينا دوماً التفريق بين الشكلين التاليين:

$f(x)=\dfrac{\sqrt{g(x)}}{h(x)}$: $D:(D_1\cap D_2)\setminus\{\text{جذور المقام}\}$ — كما في المثال (4) في فقرة التابع الكسري الغير صحيح

$f(x)=\sqrt{\dfrac{g(x)}{h(x)}}$: $\dfrac{g(x)}{h(x)}\ge 0$ متراجحة كسرية — كما في المثال (3) في التابع الجذري التربيعي

يعني لما يكون عنا الجذر على كل الكسر نعتبر التابع جذري، ولما يكون الجذر فقط على البسط أو فقط على المقام نعتبر التابع كسري غير صحيح

4) التابع المثلثي:

$f(x)=\cos(g(x))$, $f(x)=\sin(g(x))$

مجموعة تعريف التابع المثلثي من مجموعة تعريف تابع الزاوية

$\begin{pmatrix}\cos(g(x))\\ \sin(g(x))\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\text{مجموعة تعريف}\\ g(x)\end{pmatrix}$

$f(x)=\sin\underbrace{(3x+1)}_{\text{تابع صحيح}}\ ;\ x\in\mathbb{R}$

$f(x)=\cos\underbrace{\left(\sqrt{x+2}\right)}_{\text{تابع جذري}}$

$;\ x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$

$\Rightarrow x\in[-2,+\infty[$

$f(x)=\cos\underbrace{\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)}_{\text{تابع كسري صحيح}}$

$x\in\mathbb{R}\setminus\{\text{جذور المقام}\}$

$\Rightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

ملاحظة هامة: دوماً نستخدم $(\cap)$ بين مجموعات التعريف عند وجود إشارة $(+)$ أو $(-)$ بين كل حد وآخر حيث يعتبر كل حد تابع مستقل.

مثال:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-3}$$

الحل:

$$f(x) = \underbrace{x+1}_{D_1} + \underbrace{\frac{1}{x-3}}_{D_2}$$

$D_1 : x \in \mathbb{R}$

$D_2 : x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$D : (D_1 \cap D_2)$

$D : \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$D : x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

اشتقاق التوابع الجبرية

ما هو الاشتقاق؟؟ ومتى نستخدمه؟؟

الاشتقاق هو التغير ومن أهم فوائد الاشتقاق معرفة التابع فيما إذا كان متزايد أم متناقص وإيجاد ميل مماس عند نقطة أو في الفيزياء الحصول على تابع السرعة أو التسارع.

قواعد الاشتقاق:

1) قاعدتين للحفظ:

- مشتق الثابت هو (0) $\Longleftarrow$ $\boxed{(a)' = 0}$
- مشتق (x) هو أمثالها $\Longleftarrow$ $\boxed{(ax)' = a}$

أمثلة:

$(3)' = 0 \quad , \quad (3x)' = 3$

$(-2x)' = -2 \quad , \quad (\sqrt{3}\,x)' = \sqrt{3}$

2) قاعدة القوة:

$$f(x) = (g(x))^n \Longrightarrow f'(x) = n.(g(x))^{n-1}.g(x)'$$

1) ننزل الأس إلى الأسفل.
2) نطرح من الأس واحد.
3) نشتق الأساس.

أمثلة هامة:

① $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2.x^1.1 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

لنحفظ دوماً: $\boxed{(x^2)' = 2x}$

② $f(x) = (3x+1)^2$

$f'(x) = 2.(3x+1)^1.3$

$f'(x) = 6(3x+1)$

③ $f(x) = (x^2+3x)^3$

$f'(x) = 3(x^2+3x)^2.(2x+3)$

$f'(x) = (6x+9)(x^2+3x)^2$

3) مشتق التابع الجذري التربيعي:

$$f(x) = \sqrt{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = \frac{\text{المضمون}}{\text{ضعف الجذر}}$$

أمثلة هامة:

① $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$$f'(x) = \frac{(3x+1)'}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

② $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

مشتق المضمون

ضعف الجذر

4) مشتق الجداء:

دوماً مشكلتنا في الاشتقاق هو الجداء وليس الجمع.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x).g(x))' \neq f'(x).g'(x)$$

❖ مشتق المجموع هو مجموع المشتقات ولكن انتبه!! مشتق الجداء ليس جداء المشتقات.

قاعدة التابع الجداءي:

$$(f.g)' = f'.g + g'.f$$

مشتق الجداء = (مشتق الأول) × الثاني + (مشتق الثاني) × الأول

تمارين هامة:

① $f(x) = 2x.(x+1)$

الحل:

طريقة أولى: (ننشر ثم نقوم بالاشتقاق)

$f(x) = 2x^2 + 2x$

$f'(x) = 4x + 2$

طريقة ثانية: نقوم بالاشتقاق بتعاً لقاعدة الجداء

$f'(x) = 2.(x+1) + 1.(2x)$

$f'(x) = 2x + 2 + 2x$

$f'(x) = 4x + 2$

② $f(x) = x.\sqrt{x+1}$

الحل:

$$f'(x) = 1.\sqrt{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}.x$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\underbrace{1}_{(2\sqrt{x+1})}} + \frac{x}{\underbrace{2\sqrt{x+1}}_{(1)}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)+x}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

5) مشتق التابع الكسري (صحيح أو غير صحيح):

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - h'(x).g(x)}{h^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\text{مشتق البسط}\right) * \text{المقام} - \left(\text{مشتق المقام}\right) * \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$$

أمثلة هامة:

① $f(x) = \dfrac{3x+1}{x}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{3.x - 1(3x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x - 3x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

② $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2+1)}{(2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{4x^2}$$

من أهم ملاحظات الرياضيات:

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

مثال:

- $(2x)^2 = 2^2 . x^2 = 4x^2$
- $\underbrace{(2+x)^2}_{\text{مطابقة تربيعية}} = 2^2 + 2(2)(x) + x^2$

$$\Rightarrow (2+x)^2 = 4 + 4x + x^2$$

---

6) مشتق التوابع المختلطة:

النوع الأول:

$$f(x) = \sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$$ (تابع جذري)

$$\boxed{f'(x) = \frac{\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)'}{2\sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}}}$$ (مشتق كسر)

مثال:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}} = \frac{\frac{1.\cancel{x} - \cancel{x} - 1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x^2 . \sqrt{\frac{x+1}{x}}}$$

النوع الثاني:

$$f(x) = \frac{\sqrt{g(x)}}{h(x)}$$ (تابع كسري غير صحيح)

$$\boxed{f'(x) = \frac{\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} . h(x) - h'(x) . \sqrt{g(x)}}{(h(x))^2}}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+1})' . x - 1\sqrt{x+1}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} . x - \sqrt{x+1}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{x - 2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x-2}{2x^2 . \sqrt{x+1}}$$

ملاحظة هامة:

في التوابع المختلطة عندما يكون الجذر على كامل الكسر نتعامل معه كتابع جذري.
أما عندما يكون الجذر على البسط فقط أو على المقام فقط $\Leftarrow$ نتعامل معه كتابع كسري.

---

7) مشتق التابع المثلثي:

$$f(x) = \sin(g(x))$$

$$\boxed{f'(x) = g'(x) . \cos(g(x))}$$

$$f(x) = \cos(g(x))$$

$$\boxed{f'(x) = -g'(x) . \sin(g(x))}$$

مثال هام:

1) $\boxed{f(x) = \sin(3x)}$

$$f'(x) = 3 . \cos(3x)$$

---

2) $\boxed{f(x) = \cos(x^2 + 1)}$

$$f'(x) = -2x . \sin(x^2 + 1)$$

---

3) $\boxed{f(x) = \sin(\sqrt{x+1})}$

$$f'(x) = (\sqrt{x+1})' . \cos(\sqrt{x+1})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} . \cos(\sqrt{x+1})$$

---

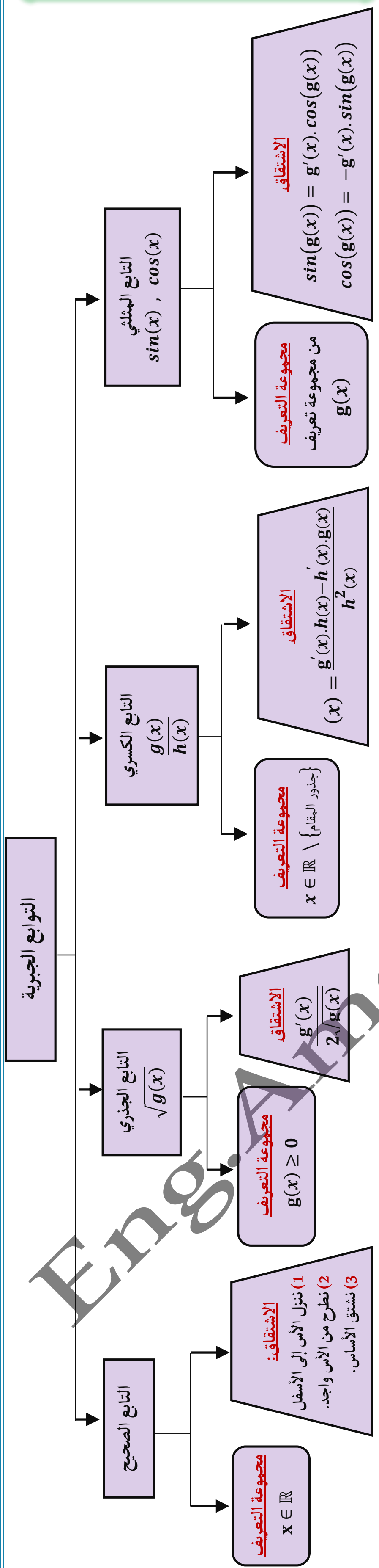
4) $\boxed{f(x) = \cos\left(\frac{x}{x+1}\right)}$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' . \left(-\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} . \left(-\sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} . \sin\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

مخطط صندوقي يلخص قواعد الاشتقاق ومجموعة التعريف للتوابع الجبرية



المماسات في الخطوط البيانية

الشكل العام لمعادلة المماس:

$$y - y_N = m(x - x_N)$$

نقطة التماس: $N(x_N, y_N)$.

ميل المماس (m).

كيف نحصل على ميل المماس؟؟

1) $m = f'(x_N)$

ميل المماس هو مشتق التابع عند نقطة التماس.

2) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

يستخدم في سؤال الرسمة عندما يكون المماس مار من نقطتين.

3) $m = tan(\theta)$

(θ): الزاوية بين المماس والمحور $x'x$.

ويستخدم عندما تكون الزاوية (θ) معروفة وفي سؤال الرسمة حصراً.

4) $d_1 \backslash\backslash d_2 : md_1 = md_2$

عندما يتوازى مستقيمان تتساوى الميول.

5) $d_1 \perp d_2 : md_1 = \frac{-1}{md_2}$

عندما تتعامد المستقيمات تُعطى الميول بالعلاقة

كيف نحصل على نقطة التماس؟؟

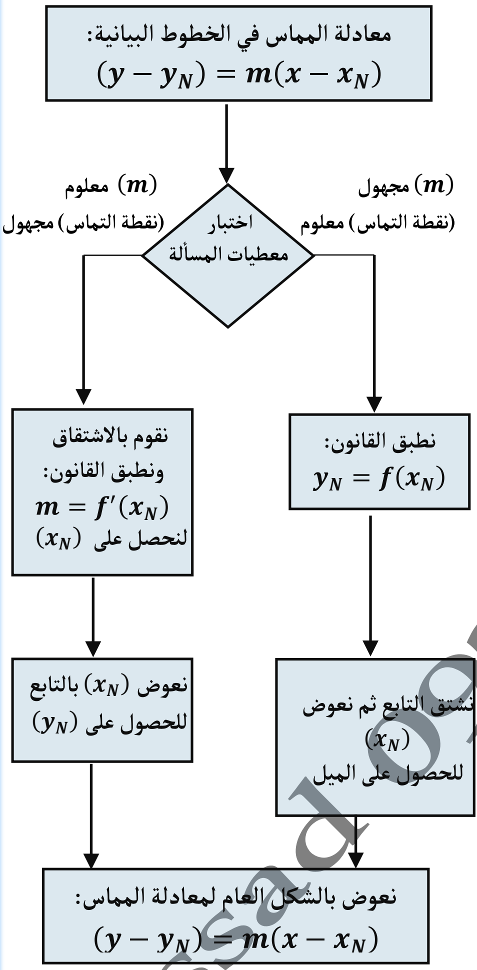
1) **حالة أولى:**

يكون ترتيب أو فاصلة نقطة ما معلوم في المسألة وعندها نطبّق القانون: $y_N = f(x_N)$

2) **حالة ثانية:**

يكون ترتيب أو فاصلة النقطة غير معلومين ولكن الميل معلوم عندها نطبق القانون: $m = f'(x)$

ملخص بالمخطط الصندوقي للمماسات



أربع مسائل لإنهاء المماسات بشكل كامل:

المسألة الأولى:

اكتب معادلة المماس للخط البياني (C) المُعطى بالعلاقة: $(f(x) = x^2 + 5)$ في نقطة تماس فاصلتها $(x_N = 1)$.

الحل:

تنويه !! دوماً نبدأ معادلة المماس بالشكل العام (أفضل بصيغة الكتابة)

معادلة المماس من الشكل:

$$y - y_N = m(x - x_N)$$

$$x_N = 1 \ , \ y_N = ?? \ , \ m = ??$$

$y_N = f(x_N) \quad ; \quad y_N = f(1)$

$y_N = (1)^2 + 5 = 6$

$m = f'(x_N) \quad ; \quad m = f'(1)$

$f'(x) = 2x \quad , \quad m = 2(1) = 2$

بالتعويض في الشكل العام:

$\Rightarrow y - 6 = 2(x - 1)$

$\Rightarrow \boxed{y = 2x + 4}$

المسألة الثانية:

اكتب معادلة المماس للخط البياني (C) المّعطى بالعلاقة: $(f(x) = 2x^2 + 3x)$ حيث أن ميل المماس المطلوب $(m = -3)$.

الحل: معادلة المماس من الشكل:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

نقطة التماس $A(x_A, y_A)$, $m = -3$

$x_A = ??$, $y_A = ??$

$m = f'(x_A) \Rightarrow -3 = f'(x_A)$

$f'(x) = 4x_A + 3 \quad ; \quad -3 = 4x_A + 3$

$\Rightarrow -6 = 4x_A \Rightarrow x_A = -\frac{6}{4}$

$\Rightarrow \boxed{x_A = -\frac{3}{2}}$

$y_A = f(x_A) = 2(x_A)^2 + 3x_A$

$y_A = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y_A = 0}$

نعوض في معادلة المماس:

$y - 0 = -3\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow \boxed{y = -3x - \frac{9}{2}}$

المسألة الثالثة:

اكتب معادلة المماسات للخط البياني (C) المعطى بالعلاقة التالية: $(f(x) = \sqrt{x^2 + 3x})$ حيث أن ترتيب نقطة التماس $(y_N = 2)$.

الحل: معادلة المماس من الشكل:

$$y - y_N = m(x - x_N)$$

$m = ??$, $x_N = ??$, $y_N = 2$

$y_N = f(x_N) \Rightarrow 2 = \sqrt{(x_N)^2 + 3x_N}$

نربع الطرفين:

$\Rightarrow 4 = (x_N)^2 + 3x_N$

$\Rightarrow (x_N)^2 + 3x_N - 4 = 0$

$(x_N + 4)(x_N - 1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{N_1} = -4 \ ; \ y_N = 2 & \text{إما} \\ x_{N_2} = 1 \ ; \ y_N = 2 & \text{أو} \end{cases}$

يوجد لدينا مماسين للخط البياني:

1) معادلة المماس الأول:

$x_{N_1} = -4$, $y_N = 2$

$m_1 = f'(x_{N_1}) \quad ; \quad f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$

$$m_1 = f'(-4) = \frac{2(-4)+3}{2\sqrt{16-12}} = \frac{-5}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y - 2 = -\frac{5}{4}(x+4)}$$

2) معادلة المماس الثاني:

$$x_{N_2} = 1 \quad , \quad y_N = 2$$

$$m_2 = f'(x_2) \ ; \ f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$$

$$m_2 = f'(1) = \frac{2(1)+3}{2\sqrt{1+3(1)}} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{y - 2 = \frac{5}{4}(x-1)}$$

ملاحظة هامة:

كيف نعرف ميل مستقيم من معادلته ؟؟

حتى نستطيع الحصول على ميل المماس أو مستقيم من معادلته:

1) نكتب المعادلة بالشكل: $(y = mx + c)$.

2) أمثال (x) هي ميل المستقيم.

مثال توضيحي:

اوجد ميل المستقيم المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{d: \ -2x + 3y - 1 = 0}$$

الحل:

تصلح المعادلة للشكل: $(y = mx + c)$

$$3y = +2x + 1 \quad \boxed{\div 3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{m_d = \frac{2}{3}}$$

المسألة الرابعة:

اكتب معادلة المماس للخط البياني (c) المُعطى بالعلاقة التالية: $\boxed{f(x) = x^2 + 4}$

حيث أن ميل المماس المطلوب يوازي المستقيم (d):

$$(d: 3x - 3y + 1 = 0)$$

الحل: معادلة المماس من الشكل:

$$y - y_N = m(x - x_N)$$

بما أن المماس المطلوب يوازي المستقيم (d):

$$\Rightarrow \underbrace{m}_{\text{مماس}} = m_d$$

الحصول على (m_d):

$$3y = 3x + 1 \quad \boxed{\div 3}$$

$$y = x + \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

$$m = f'(x_N) \ ; \ f'(x) = 2x$$

$$1 = 2x_N \Rightarrow \boxed{x_N = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y_N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{1}{4} + 4 \Rightarrow \boxed{y_N = \frac{17}{4}}$$

بالتعويض في معادلة المماس:

$$\Rightarrow \boxed{y - \frac{17}{4} = 1\left(x - \frac{1}{2}\right)}$$

النهايات في التوابع الجبرية

دوماً ندرس النهايات عند الأطراف المفتوحة

والصور عند الأطراف المغلقة.

$$x \in [a, b[$$

صورة ، نهاية

مثال توضيحي:

$$\boxed{f(x) = 2x + 3} \ ; \ x \in [0, 5[$$

الحل:

ندرس صورة عند $(x = 0)$ (المجال مغلق).

ندرس نهاية عند $(x = 5)$ (المجال مفتوح).

$$f(0) = 2(0) + 3 = +3$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (2x + 3) = 13$$

ملاحظة هامة:

$$x \in \ ]a, b[$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x)$$

ملاحظة هامة جداً (1)

إيجاد ناتج بعض النهايات:

1) حالات الجمع:

- $\pm\infty \pm \text{عدد} = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm \infty = \pm\infty$
- $\pm\infty \pm 0 = \pm\infty$
- $\pm 0 \pm \text{عدد} = \pm\text{عدد}$

(∞) تسيطر على الناتج في حالة الجمع.

(0) لا تسيطر على الناتج في حالة الجمع.

2) حالات الضرب والقسمة:

- $\pm\infty \times \text{عدد موجب} = \pm\infty$
- $0 \times \text{عدد موجب} = 0$
- $\frac{+\infty}{\text{عدد موجب}} = +\infty \ , \ \frac{\text{عدد موجب}}{+\infty} = 0$
- $\frac{\text{عدد موجب}}{0^{\pm}} = \pm\infty \ , \ \frac{0}{\text{عدد}} = 0$
- $\frac{\pm\infty}{0^{\pm}} = \pm\infty \ , \ \frac{0}{\pm\infty} = 0$

يجب علينا دراسة حالة الصفر

عند ورود (∞) بالبسط ⟸ الناتج (∞).

عند ورود (0) بالبسط ⟸ الناتج (0).

عند ورود (∞) بالمقام ⟸ الناتج (0).

عند ورود (0) بالمقام ⟸ الناتج (∞)

ملاحظة هامة جداً (2)

دوماً عند ورود (0) بالمقام يجب علينا دراسة إشارة (0) وذلك عن طريق تعويض قيمة بالمقام لاختبار إشارة المقام.

مثال توضيحي:

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x) = \frac{2x}{x+1}} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

ادرس نهاية التابع عند $(x = -1)$.

الحل:

نكتب مجموعة التعريف على شكل مجالات:

$$x \in \ ]-\infty, -1[\ \cup \ ]-1, +\infty[$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(\frac{2(-1)}{0^{??}}\right) = ??$$

لمعرفة إشارة المقام نعوض قيمة لـ (x) من المجال ($]-\infty, -1[$) في المقام حصراً.

$$x = -2 \Rightarrow -2 + 1 = -1 < 0$$

⟸ صفر المقام سالب (0^-)

$$\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{2(-1)}{0^-}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(\frac{2(-1)}{0^{??}}\right) = ??$$

اختبار إشارة (0) بالمقام نعوض قيمة بالمقام حصراً من المجال ($]-1, +\infty[$)

$$x = +3 \Rightarrow +3 + 1 = 4 > 0$$

⟸ صفر المقام موجبة (0^+)

$$\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$$

ملاحظة هامة جدا (3)

حالات عدم التعيين:

١) **قسمة المتشابه:** $\frac{0}{0}$ متشابه وَ $\frac{\infty}{\infty}$ متشابه

٢) **ضرب المختلف:** $\boxed{\infty \times 0}$ مختلف

٣) $\boxed{(+\infty - \infty)}$

٤) **التابع الأسي:** $\boxed{(1^{\infty})}$

المقاربات للخطوط البيانية

ما هي أنواع المقاربات للخطوط البيانية؟؟

يوجد ثلاث أنواع من المقاربات للخطوط البيانية:

① مقارب أفقي ($y_\Delta =$ عدد)

② مقارب شاقولي ($x =$ عدد)

③ مقارب مائل ($y_\Delta = ax + b$)

كيف يتم الحصول على المقاربات؟؟ وكيف يمكن استنتاج معادلاتها؟؟

١) المقارب الشاقولي والمقارب الأفقي:

يتم الحصول عليها من خلال دراسة النهايات:

1 $\boxed{\lim_{x\to \text{عدد}} f(x) = \pm\infty}$

($x =$ عدد) مقارب شاقولي والتقارب نحو $oy^{\pm}$.

2 $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \text{عدد}}$

($y =$ عدد) مقارب أفقي والتقارب نحو $ox^{\pm}$

٢) المقارب المائل:

تُعطى معادلته في نص المسألة وللتأكد من كونه مقارب مائل نطبق القانون:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - \underbrace{y_\Delta}_{\text{المقارب المائل}}) = 0}$$

ماذا يعني الوضع النسبي؟؟ وكيف تتم دراسته؟؟

الوضع النسبي:

هو معرفة وضع المقارب بالنسبة إلى الخط البياني (C)

(هل يقع فوق الخط البياني أم تحته ؟؟)

كيف تتم دراسته؟؟

١) نشكل التابع $g(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{g(x) = f(x) - y_\Delta}$$

٢) ندرس إشارة $g(x)$ تبعاً إلى طرق المتراجحات التي درسناها سابقاً (متراجحات درجة أولى أو متراجحات درجة ثانية أو كسرية).

$$\boxed{g(x) = f(x) - y_\Delta}$$

$g(x) > 0$: (C) يقع فوق المقارب (y_Δ)

$g(x) < 0$: (C) يقع تحت المقارب (y_Δ)

ملاحظة: المقاربات التي نشكل $g(x)$ من أجل دراسة وضعها النسبي هي المقارب الأفقي والمقارب المائل فقط.

مثال توضيحي (1):

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x) = \frac{3x-1}{x+1}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

1) ادرس النهايات عند الأطراف المفتوحة ثم حدد المقاربات إن وجدت.

2) ادرس الوضع النسبي بين المقارب الأفقي والخط البياني (C).

الحل: ①

$x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}\right) = 3$ أكبر أس / أكبر أس

$(y = 3)$ مقارب أفقي والتقارب نحو $ox^{\pm}$.

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{-4}{0^+}\right)$

$\Longrightarrow \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$

$(x = -1)$ مقارب شاقولي والتقارب نحو oy^-.

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right) = \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{-4}{0^-}\right)$

$\Longrightarrow \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$

$(x = -1)$ مقارب شاقولي والتقارب نحو oy^+.

②

دراسة الوضع النسبي بين المقارب الأفقي $(y_\Delta = 3)$ والخط البياني (C):

$$g(x) = f(x) - y_\Delta$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{x+1} - 3 = \frac{-4}{x+1}$$

(بعد توحيد المقامات)

$g(x) = \frac{-4}{x+1}$ ندرس الإشارة كمتراجحة كسرية

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
البسط	$-\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -$
المقام	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
الكسر	$+$	‖	$-$
	(c) فوق المقارب (y_Δ)	‖	(c) تحت المقارب (y_Δ)

مثال توضيحي (2):

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2}}$$

1) اوجد مجموعة التعريف.

2) اثبت أن المستقيم $(y_\Delta = x + 1)$ مقارب مائل عند $(+\infty)$.

3) ادرس الوضع النسبي بين المقارب المائل والخط البياني (C).

الحل: ①

$$f(x) = \underbrace{x + 1}_{D_1} + \underbrace{\frac{3}{x-2}}_{D_2}$$

$D: D_1 \cap D_2$

D_1: مجموعة تعريف $(x+1)$.

D_2: مجموعة تعريف $\left(\frac{3}{x-2}\right)$.

$D_1: x \in \mathbb{R} \quad , \quad D_2; x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\Longrightarrow D: \mathbb{R} \cap (\mathbb{R}\setminus\{2\})$

$\Longrightarrow \boxed{D:\ x \in (\mathbb{R}\setminus\{2\})}$

تذكرة

لما يكون عندي تابع مكّون من تابعيين، لازم قاطع مجموعات التعريف للحصول على مجموعة تعريف التابع الكلي.

②

حتى يكون المستقيم $(y_\Delta = x + 1)$ مقارب مائل عند $(+\infty)$ يجب أن يحقق:

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(f(x) - y_\Delta)}_{g(x)} = 0$$

$$g(x) = x + 1 + \frac{3}{x-2} - x - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{3}{x-2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x-2}\right) = 0$$

$\Leftarrow$ (y_Δ) مقارب مائل عند $(+\infty)$.

③ دراسة الوضع النسبي:

$$g(x) = f(x) - y_\Delta = \frac{3}{x-2}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
البسط	+ + +		+ + +
المقام	− − −	0	+ + +
الكسر	− تحت (c) المقارب (y_Δ)	‖	+ فوق (c) المقارب (y_Δ)

تنويه هام !!

في المقارب المائل عندما لا يذكر دراسة التقارب في أي جوار $\Leftarrow$ ندرس الجوار تبعاً إلى مجموعة التعريف.

مثال:

$$\boxed{f(x) = x + \frac{3}{x-2}} \; ; x \in [\,0\,, +\infty[$$

اثبت أن المستقيم $(y = x)$ مقارب مائل للخط البياني (C).

الحل:

الجوار حصراً عند $(+\infty)$ لأنه لم يُذكر بالسؤال ولكن بناءاً على مجموعة التعريف $\Leftarrow$ $(x \to +\infty)$:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ ....$$

ونتابع كما سبق.

مثال توضيحي (3):

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x^2+4}}$$

1) اوجد مجموعة تعريف التابع.
2) ادرس النهايات عند الأطراف المفتوحة.
3) اثبت أن المستقيم $(y_\Delta = x)$ مقارب مائل عند $(+\infty)$.

الحل: ①

مجموعة التعريف (تابع جذري تربيعي):

$$x^2 + 4 \geq 0 \;\; \Rightarrow x^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 \neq -4 \quad \text{(مستحيلة الحل)}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2+4		

$$\Rightarrow \boxed{x \in \,]-\infty, +\infty[}$$

②

مجموعة التعريف : $x \in \,]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+4}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}(x^2+4)} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty}(\infty+4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt{\infty} = \infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to+\infty}(x^2+4)} = \sqrt{\lim_{x\to+\infty}(\infty+4)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{\infty} = \infty}$$

③

حتى يكون المستقيم $(y_\Delta = x)$ مقارب مائل عند $(+\infty)$ يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(f(x) - y_\Delta)}_{g(x)} = 0$$

$$g(x) = f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+4} - x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}(+\infty - \infty)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $(+\infty - \infty)$:

تنويه!! تبعاً إلى القاعدة (*) التي تحدثنا عنها سابقا نضرب ونقسم على المرافق.

$$g(x) = \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) \cdot \frac{(\sqrt{x^2+4}+x)}{(\sqrt{x^2+4}+x)}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4}+x} = \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}$$

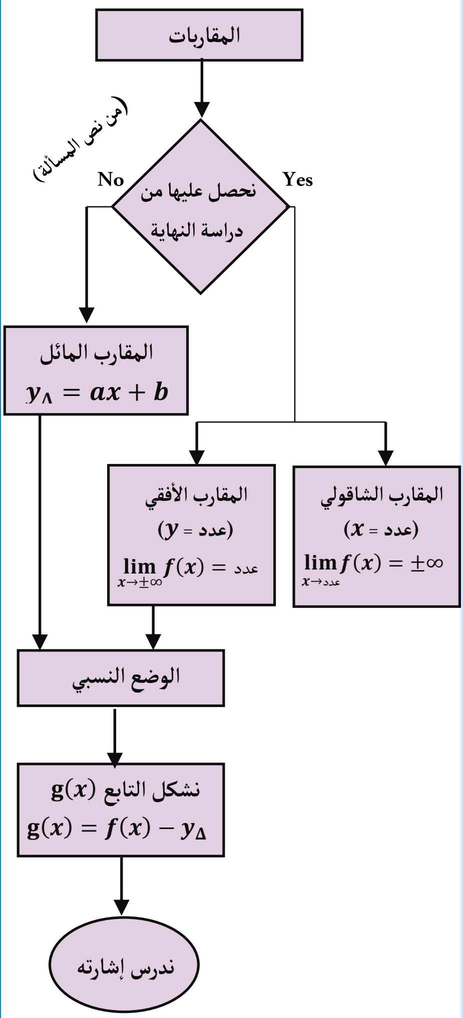
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}\right) = 0$$

$\Leftarrow$ $(y_\Delta = x)$ مقارب مائل عند $(+\infty)$.

أعظم متعة في الحياة أن تفعل ما يقول الناس إنك لا تستطيع أن تفعله.

The greatest pleasure in life is doing what people say you cannot do

ملخص بالمخطط الصندوقي للمقاربات



دراسة اطراد التابع العدد

خطوات اطراد التابع العددي:

١) نوجد مجموعة التعريف إذا لم تكن معطاة.

٢) ندرس النهايات عند الأطراف المفتوحة والصور عند الأطراف المغلقة.

٣) نشتق التابع $f(x)$ ثم نعدم المشتق $(f'(x) = 0)$.

٤) نرسم جدول الاطراد:

x	مجموعة التعريف
$f'(x)$	خاص بـ $f'(x)$
$f(x)$	خاص بـ $f(x)$

ما هي علاقة $f'(x)$ بتزايد و تناقص التابع $f(x)$؟

التابع متزايد $(f'(x) > 0)$

التابع متناقص $(f'(x) < 0)$

x	مجموعة التعريف	
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	متزايد ↗	متناقص ↘

مثال هام (1) :

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x)=x^2-3x}$$

1) ادرس تغيرات التابع $f(x)$ مع تحديد المقاربات الشاقولية والأفقية إن وجدت.

2) حدد قيم (x) التي يكون عندها $f(x)$ متزايد.

الحل: 1

دراسة اطراد تابع عددي:

التابع صحيح $\Leftarrow$ $(x\in\mathbb{R})$

$\mathbb{R}=\,]-\infty\,,+\infty\,[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x)$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}(x^2)}_{\text{التعويض بأكبر أس}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$$

$\Leftarrow$ لا يوجد مقاربات أفقية ولا حتى شاقولية.

$$f(x)=2x-3\quad;\quad f'(x)=0$$

$$\Rightarrow 2x-3=0\quad\Rightarrow x_0=\frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}=-\frac{9}{4}$$

تنويه!!

دوماً (x_0) التي نحصل عليها من إعدام $f'(x)$ يجب أن تنتمي إلى مجموعة التعريف حتى نستطيع حساب صورتها $f(x_0)$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\frac{9}{4}$	↗ $+\infty$

2

قيم (x) التي يكون عندها التابع متزايد: $(f'(x)>0)$

$$x\in\left]\frac{3}{2}\,,+\infty\right[$$

مثال هام (2) :

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x)=\frac{x+1}{x-2}}\quad;\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

أدرس تغيرات التابع $f(x)$.

الحل:

دراسة تغيرات التابع:

$$f(x)=\frac{x+1}{x-2}\quad;\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$$

$$x\in\,]-\infty\,,2\,[\,\cup\,]\,2\,,+\infty\,[$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)=1$$

تم التعويض بأكبر أس على أكبر أس.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)=1$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{0^-}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(\frac{3}{0^+}\right)=+\infty$$

درسنا إشارة (0) في المقام

$$f'(x)=\frac{1.(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}\quad;\quad f'(x)=0$$

من يعدم الكسر هو بسطه.

$(-3\neq0)$ لا ينعدم $\Leftarrow$ $f'(x)$ من إشارة واحدة

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	1 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 1

التابع $f(x)$ متناقص على كامل مجموعة التعريف.

مثال هام (3) :

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المُعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x+1}}$$

1) اوجد مجموعة التعريف.

2) ادرس تغيرات التابع مع تحديد المقاربات إن وجدت.

الحل: 1

تابع جذري تربيعي : $f(x)=\sqrt{x+1}$

$$x+1\geq0\quad\Rightarrow x\geq-1$$

$$\Rightarrow\boxed{x\in[-1\,,+\infty[}$$

2

$$f(x)=\sqrt{x+1}\quad;\quad x\in[-1\,,+\infty[$$

$$f(-1)=\sqrt{-1+1}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}(x+1)}=\sqrt{\infty}=\infty$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\quad;\quad f'(x)=0$$

$(1\neq0)$ لا ينعدم $\Leftarrow$ $f'(x)$ من إشارة واحدة.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0	↗ $+\infty$

لا يوجد مقاربات أفقية ولا حتى شاقولية.

تنويه!!

1) وضعنا ‖ لـ $f'(x)$ لأن التابع المشتق يرفض $(x=-1)$ $\Leftarrow$ التابع معرّف عند $(x=-1)$ ولكنه غير اشتقاقي.

2) لما يكون معي بالجدول (∞) عند (x) وَ (∞) عند $f(x)$ $\Leftarrow$ لا يوجد مقاربات أفقية أو شاقولية.

ملاحظة على المقاربات :

بيكون عنا مقارب أفقي لمي بنشوف (∞) عند محور (x) و (عدد) عند محور (y).

وبيكون عنا مقارب شاقولي لمي بنشوف (∞) عند محور (y) و (عدد) عند محور (x).

مراجعة في الدائرة المثلثية

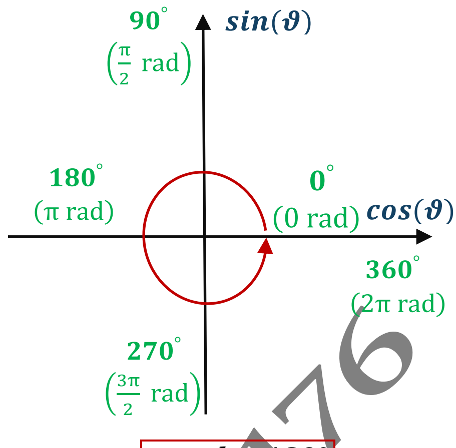
الدائرة المثلثية هي دائرة نصف قطرها (1) ويوجد فيها محوران:

2) $cos(\theta)$ المحور الأفقي

1) $sin(\theta)$ المحور الشاقولي

$cos(\theta)=$ المحور الجبان $=$ المحور الأفقي

$sin(\theta)=$ المحور المتكبر $=$ المحور الشاقولي



$\boxed{\pi\ rad = 180°}$

ما هو الدوران الموجب والدوران السالب؟

الدوران الموجب:

الدوران مع عقارب الساعة ويسمى الدوران المباشر.

الدوران السالب:

الدوران عكس عقارب الساعة ويسمى الدوران غير مباشر.

ما هو الراديان وكيف يتم التعامل معه؟

كل $180° \Leftrightarrow \pi(rad)$

$\vartheta°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
ϑrad	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

كيف نحسب بعض النسب الزاويّة لزوايا شهيرة؟

المحور الذي تقع عليه الزاوية $\Leftarrow$ تكون قيمته (1)

والمحور الآخر تكون قيمته (0).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

تقع على محور (sin)

$\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

لا تقع على محور (cos)

ϑ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\vartheta$	0	1	0	-1	0
$\cos\vartheta$	1	0	-1	0	1

المدرس المهندس عامر أسد

0935785176

زوايا يجب علينا حفظ نسبها الزاوية!!

ϑ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sin\vartheta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

قواعد الحصول على النسب المثلثية لزوايا غير شهيرة:

١) الزاويتان المتكاملتان: $(\pi - \theta)$

1- نقسم الزاوية المعطاة إلى قسمين إحداها (π) والثانية زاوية شهيرة وبينهما $(-)$.

2- نطبق قوانين الربع الثاني:

$$\sin(\pi - \theta) = +\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

الزاويتان المتكاملتان $\Leftrightarrow$ ربع ثاني

أمثلة توضيحية:

1) $\boxed{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$, 2) $\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$

الحل:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = +\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

٢) الزاويتان المتجاورتان: $(\pi + \theta)$

1- نقسم الزاوية المعطاة إلى قسمين إحداهما (π) والقسم الآخر (θ) وبينهما $(+)$.

2- نطبق قوانين الربع الثالث

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$

الزاويتان المتجاورتان $\Leftrightarrow$ ربع ثالث

أمثلة توضيحية:

1) $\boxed{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$, 2) $\boxed{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

الحل:

$$1)\ \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2)\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

٣) الزاويتان المتعاكستان: $(-\theta)$

نطبق فوراً قوانين الربع الرابع:

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = +\cos(\theta)$$

الزاويتان المتعاكستان $\Leftrightarrow$ ربع رابع

أمثلة توضيحية:

1) $\boxed{\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$, 2) $\boxed{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

الحل:

$$1)\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2)\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

ملاحظة هامة جدا

دوماً الأفضلية للتعاكس قبل التكامل والتجاور.

مثال توضيحي:

$$1)\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

تم تطبيق قاعدة التعاكس

$$= -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

تم تطبيق قاعدة التكامل

$$= -\left(+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$2)\ \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

تم تطبيق قاعدة التعاكس

$$= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

قاعدة التجاور

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

منبر شغف التعليمي

٤) القاعدة العامة:

$$\boxed{\left(\left(\pi\ \text{عدد زوجي}\right)+\theta\right)}$$

نقسم الزاوية المعطاة إلى قسمين إحداهما عدد زوجي من (π) وَ القسم الآخر زاوية شهيرة (θ) ثم نحذف ا لعدد الزوجي من (π) ونطبق القوانين:

$$\sin\left(\left(\pi\ \text{عدد زوجي}\right)\pm\theta\right)=+\sin(\pm\theta)$$

$$\cos\left(\left(\pi\ \text{عدد زوجي}\right)\pm\theta\right)=+\cos(\pm\theta)$$

أمثلة توضيحية:

1) $\boxed{\sin(17\pi)}=\sin(\underbrace{16\pi}_{=0}+\pi)$

$=+\sin(\pi)=\boxed{0}$

2) $\boxed{\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)}=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\underbrace{2\pi}_{=0}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3) $\boxed{\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)}=\cos\left(\frac{12\pi-\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\underbrace{2\pi}_{=0}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

تعاكس

ملاحظة هامة (1)

متى نقلب $(\cos\rightleftarrows\sin)$؟؟

نقلب $(\cos\rightleftarrows\sin)$ عندما ندخل $\left(\frac{\pi}{2}-\ \right)$ إلى داخل الزاوية:

$$\boxed{\sin(\theta)=+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$\boxed{\cos(\theta)=+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

أمثلة توضيحية:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$$

ملاحظة هامة (2)

يُرجى حفظ القاعدتين التاليتين:

$$\boxed{\sin(\theta)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

$$\boxed{\cos(\theta)=+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

بعض القوانين الهامة في النسب المثلثية:

١) $\boxed{\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1}$

يستخدم هذا القانون للحصول على $(\sin)$ إذا عُلم $(\cos)$ أو بالعكس.

مثال توضيحي:

أوجد $(\cos(\theta))$ إذا علمت أنَّ:

$$\boxed{\left(\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}\ ;\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

الحل:

$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\cos^2(\theta)=1$

$\Rightarrow\cos^2(\theta)=1-\frac{3}{4}$

$\Rightarrow\cos^2(\theta)=\frac{1}{4}$ ⇠ نجذر الطرفين

$\cos(\theta)=-\frac{1}{2}$ مرفوض في الربع الثاني والثالث

$\cos(\theta)=\frac{1}{2}$ مقبول في الربع الأول والرابع $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

٢) قوانين الحصول على $(\sin^2(\theta))$ وَ $(\cos^2(\theta))$

١) الحصول على $\sin^2(\theta)$: ضعف الزاوية

$$\boxed{\sin^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

من القانون السابق:

$$\boxed{\sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)}$$

٢) الحصول على $\cos^2(\theta)$ ضعف الزاوية

$$\boxed{\cos^2(\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}}$$

من القانون السابق:

$$\boxed{\cos^2(\theta)=1-\sin^2(\theta)}$$

٣) قانون $\sin(2\theta)$:

ضعف الزاوية

$$\boxed{\sin(2\theta)=2\sin(\theta).\cos(\theta)}$$

مثال توضيحي:

إذا كان $\left(\sin(x)=\frac{2}{3}\right)$ أوجد $(\sin(2x))$؟؟

الحل:

$$*\quad \sin(2x)=2\underbrace{\sin(x)}_{\text{معلوم}}.\underbrace{\cos(x)}_{\text{مجهول}}$$

$\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$

$\cos^2(x)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$\cos^2(x)=\frac{5}{9}\xRightarrow{\text{نجذر الطرفين}}\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

نعوض $\left(\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ في القانون $(*)$:

$\sin(2x)=2.\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\Rightarrow\boxed{\sin(2x)=\frac{4\sqrt{5}}{9}}$

المتتاليات العددية

$u_{(n)}$ دليل الحد: n — الحد الرياضي: $u_{(n)}$

في المتتاليات يوجد نمطين:

1) النمط الأول (الصريح):

$$\boxed{u_{(n)}=f(n)}$$

2) النمط الثاني (التدريجي)

$$\boxed{u_{(n+1)}=f(u_{(n)})}$$

كيف يتم التعامل مع كل نمط على حدى؟؟

١) النمط الصريح: $(u_{(n)}=f(n))$

في النمط الصريح تكون $(u_{(n)})$ بدلالة (n).

دليل الحد $u_{(n)}=3n+2$

$u_{(0)}=3(0)+2=2$

$u_{(1)}=3(1)+2=5$

$u_{(2)}=3(2)+2=8$

$u_{(3)}=3(3)+2=11$

٢) النمط التدريجي: $u_{(n+1)}=f(u_{(n)})$

في هذا الحد كل حد يرتبط بالحد الذي يسبقه لأنه نمط تدريجي.

$u_{(n+1)}=2u_{(n)}+3$

(دوما معلومه بالمسألة) $\Rightarrow(u_{(0)}=1)$

$\boxed{u_{(1)}=2u_{(0)}+3}$

(دليل يلي برا يزيد عن دليل يلي جوا بواحد)

$u_{(1)}=2(1)+3=5$

$\boxed{u_{(2)}=2u_{(1)}+3}$

يزيد بمقدار واحد

$u_{(2)}=2(5)+3=13$

أركان بحث المتتاليات العددية

1) **الركن الأوّل:** دراسة إطراد المتتالية.

2) **الركن الثاني:** تقارب المتتالية.

ملاحظة: سنطبق الأركان فقط على النمط الصريح وليس على النمط التدريجي (المطلوب للفحص الترشيحي).

١) الركن الأول: (دراسة إطراد المتتاليات)

$\boxed{u_{(n+1)} > u_{(n)}}$ المتتالية متزايدة.

$\boxed{u_{(n+1)} < u_{(n)}}$ المتتالية متناقصة.

ماهي طرق دراسة الاطراد:

1) نحول المتتالية إلى تابع عددي $f(x)$ وندرس اطراده.

2) عن طريق عملية الطرح:

المتتالية متزايدة $\Longrightarrow \boxed{u_{(n+1)} - u_{(n)} > 0}$

المتتالية متناقصة $\Longrightarrow \boxed{u_{(n+1)} - u_{(n)} < 0}$

3) عن طريق النسبة:

المتتالية متزايدة: $\boxed{\frac{u_{(n+1)}}{u_{(n)}} > 1}$

المتتالية متناقصة: $\boxed{\frac{u_{(n+1)}}{u_{(n)}} < 1}$

تنويه!! أشهر طريقة مستخدمة هي الطريقة الأولى (تحويلها إلى تابع عددي)

مثال توضيحي (1):

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$\boxed{u_{(n)} = \frac{3n-1}{n+2}} ; n \geq 0$$

أثبت أن المتتالية متزايدة؟

الحل: المتتالية من النمط الصريح $(u_n = f(n))$

تنويه!! بحل المتتاليات دوماً نبدأ بعبارة (المتتالية من النمط) سواء كانت من النمط الصريح أو التدريجي.

ط1: (تحويلها إلى تابع عددي):

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad ; \quad x \in [0, +\infty[$$

تتبع إلى (n) في مجالها

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - 1(3x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = +\frac{7}{(x+2)^2} > 0$$

التابع $f(x)$ متزايد $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{المتتالية متزايدة}}$

ط2: (طريقة الطرح):

حتى تكون المتتالية متزايدة $\Longleftarrow$ يجب أن يتحقق:

$$u_{(n+1)} - u_{(n)} > 0$$

$$u_{(n+1)} - u_{(n)} = \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+2} - \frac{(3n-1)}{(n+2)}$$

$$u_{(n+1)} - u_{(n)} = \frac{3n+3-1}{n+3} - \frac{(3n-1)}{n+2}$$

$$u_{(n+1)} - u_{(n)} = \frac{3n+2}{(n+3)} - \frac{(3n-1)}{(n+2)}$$

$$= \frac{(3n+2)(n+2) - (3n-1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{3n^2} + 2n + 6n + 4 - \cancel{3n^2} - 9n + n + 3}{(n+3)(n+2)}$$

$$u_{(n+1)} - u_{(n)} = \frac{+7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

$$u_{(n+1)} - u_{(n)} > 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_{(n+1)} > u_{(n)}}$$

مثال توضيحي (2):

ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$\boxed{u_{(n)} = n^2 - 10n + 26}$$

الحل:

المتتالية من النمط الصريح $(u_n = f(n))$

$$f(x) = x^2 - 10x + 26 \; ; \; \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in [0, +\infty[\end{cases}$$

$$f'(x) = 2x - 10 \quad ; \quad f'(x) = 0$$

$$\Longrightarrow 2x - 10 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 5}$$

$$f(5) = 25 - 50 + 26 \Longrightarrow \boxed{f(5) = +1}$$

x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

نلاحظ المتتالية متزايدة بدءاً من الحد ذو الدليل $(n = 5)$.

2) الركن الثاني (تقارب المتتاليات):

نقول عن متتالية أنها متقاربة إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = l = \text{عدد}$$

المتتالية متقاربة من (l)

$(n \to \infty)$ دوماً بالمتتاليات

ونقول عن متتالية أنها متباعدة إذا تحقق ما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \neq \text{عدد}$$

ملاحظة هامة جدا

يمكننا تطبيق جميع مبرهنات النهايات التي تعلمناها في الأوراق السابقة لإيجاد نهاية متتالية

مثال توضيحي (1):

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$\boxed{u_n = \frac{3n}{n+1}}$$

1) أحسب الحدود $u_{(1)}$ و u_2 و $u_{(n+1)}$.

2) أثبت أن المتتالية متقاربة.

الحل: ①

المتتالية من النمط الصريح $(u_n = f(n))$:

$$u_{(1)} = \frac{3(1)}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$u_{(2)} = \frac{3(2)}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$u_{(n+1)} = \frac{3(n+1)}{n+1+1} = \frac{3n+3}{n+2}$$

②

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

نعوض أكبر أس على أكبر أس

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{n}\right) = 3$$

$\Longleftarrow$ المتتالية متقاربة من العدد (3).

مثال توضيحي (2):

بين في كل من الحالتين التاليتين فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أم لا:

1) $\boxed{u_n = \frac{2n+1}{3n\sqrt{n}}}$

2) $\boxed{u_n = \frac{3n+1}{n} + \frac{5}{n^2}}$

الحل: ①

المتتالية من النمط الصريح $(u_n = f(n))$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{3n\sqrt{n}}\right)$$

حالة عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\cancel{n}\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{\cancel{n} 3\sqrt{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2+0}{\infty}\right) = 0$$

$\Longleftarrow$ المتتالية متقاربة من (0).

2

المتتالية من النمط الصريح $(u_n = f(n))$:

$$\lim_{n\to\infty}(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\cancel{n}}{\cancel{n}}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}(u_n) = 3+0 = 3}$$

المتتالية الحسابية

نقول عن متتالية إنها حسابية إذا كان كل حد يزيد أو ينقص عن الحد الذي يسبقه بمقدار ثابت يُسمى أساس المتتالية (r).

مثال:

$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8 \xrightarrow{+2} 10$$

نلاحظ أن كل حد يزيد عن سابقه بمقدار ثابت $(r=2)$

كيف تثبت أن متتالية ما هي متتالية حسابية؟؟

نقول عن متتالية أنها حسابية إذا تحقق:

$$\boxed{u_{(n+1)} - u_{(n)} = r = \text{ثابت}}$$

ما هو قانون الحد العام لمتتالية حسابية؟؟

$$\boxed{u_n = u_0 + n.r}$$

ما هو القانون العام للمتتالية الحسابية؟؟

$$\boxed{u_m = u_p + (m-p).r}$$

أساس (r) = (دليل الحد يلي برا) − (دليل الحد يلي جوا)

$(m-p) =$

ما هو قانون مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية؟؟

$$S_{(n)} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}.\left(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}\right)$$

$$\text{عدد الحدود} = 1 + \left(\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}\right)$$

المدرس المهندس عامر أسد
0935785176

مثال توضيحي (1):

أوجد الحد العام لمتتالية حسابية حيث أن: $(r=1)$ وَ $(u_{(2)}=4)$ ثم أثبت أن المتتالية متباعدة

الحل:

تُعطى عبارة الحد العام بالعلاقة:

$$u_n = u_0 + n.r \;;\; \begin{cases} u_0 = ?? \\ r = 1 \end{cases}$$

الحصول على (u_0): نطبق القانون العام:

$$\boxed{u_m = u_p + (m-p).r}$$

$$u_{(2)} = u_{(0)} + (2-0).r$$

$$4 = u_{(0)} + 2.(1) \Rightarrow \boxed{u_{(0)} = 4-2 = 2}$$

نعوض بالحد العام:

$$\Rightarrow \boxed{u_{(n)} = 2+n}$$

إثبات أن المتتالية متباعدة؟؟

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(2+n) = \infty$$

⟸ المتتالية متباعدة

مثال توضيحي (2):

لتكن لدينا المتتالية $((u_n)_{n\geq 0})$ إذا علمت أن:

$$\boxed{u_{(4)} = 12} \;;\; \boxed{u_{(2)} = 8}$$

1) أوجد الحد العام للمتتالية.
2) أثبت إنها متزايدة.
3) أوجد مجموع الحدود الخمسة الأولى.

الحل:

1

تعطى علاقة الحد العام: $\boxed{u_n = u_0 + n.r}$

للحصول على (r): نطبق القانون العام:

$$\boxed{u_m = u_p + (m-p).r}$$

$$u_{(4)} = u_{(2)} + (4-2).r$$

$$12 = 8 + 2.r \Rightarrow \boxed{r = \frac{12-8}{2} = 2}$$

الحصول على (u_0):

$$u_0 = u_{(2)} + (0-2).r$$

$$u_0 = 8 - 2.(2) \Rightarrow \boxed{u_0 = 8-4 = 4}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 4+2n}$$

2

إثبات أن المتتالية متزايدة:

المتتالية من النمط $(u_n = f(n))$:

$$f(x) = 4+2x \;;\; x \geq 0$$

$$f'(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{(التابع متزايد)}$$

⟸ المتتالية متزايدة

3

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4}$$

نلاحظ المجموع عبارة عن حدود متعاقبة من متتالية حسابية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}.\left(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}\right)$$

$$\text{عدد الحدود} = 1 + \left(\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}\right)$$

$$\text{عدد الحدود} = 1 + (4-0) = 5$$

بعد التعويض بالعلاقة (S_n) نجد أن:

$$\boxed{S = \frac{5}{2}(u_0 + u_4) = \frac{5}{2}(4+12) = 40}$$

مثال توضيحي (3):

لتكن لدينا المتتالية الحسابية $((u_n)_{n\geq 0})$ حيث أن:

$$u_{(10)} = -13 \;;\; u_{(7)} = -7$$

1) أحسب أساس المتتالية (r) ثم أكتب حدها العام.
2) أوجد $(u_7 + u_8 + u_9 + u_{10})$

الحل:

1

حساب أساس المتتالية (r): نطبق القانون العام:

$$\boxed{u_m = u_p + (m-p).r}$$

$$u_{(10)} = u_{(7)} + (10-7).r$$

$$-13 = -7 + 3.r \Rightarrow \boxed{r = -2}$$

الحد العام للمتتالية الحسابية:

$$\boxed{u_n = u_0 + n.r}$$

الحصول على (u_0) نطبق القانون العام:

$$\boxed{u_m = u_p + (m-p).r}$$

$$u_0 = u_7 + (0-7).r = -7 - 7(-2)$$

$$u_0 = -7 + 14 = +7 \Rightarrow \boxed{u_0 = +7}$$

نعوض كل من (r) وَ(u_0) بالحد العام:

$$\Rightarrow \boxed{u_n = 7-2n}$$

2

$$\boxed{S = (u_7 + u_8 + u_9 + u_{10})}$$

نلاحظ المجموع عبارة عن حدود متعاقبة من متتالية حسابية:

$$S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}.\left(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}\right)$$

$$\text{عدد الحدود} = 1 + \left(\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}\right)$$

$$\text{عدد الحدود} = 1 + (10-7) = 4$$

$$\boxed{S = \frac{4}{2}(u_7 + u_{10}) = 2(-7-13) = -40}$$

المتتالية الهندسية

نقول عن متتالية إنها هندسية إذا كان كل حد ينتج عن الحد الذي يسبقه بناتج ضربه بعدد ثابت يُسمى أساس المتتالية (q).

مثال (1)

$$2 \xrightarrow{*2} 4 \xrightarrow{*2} 8 \xrightarrow{*2} 16 \xrightarrow{*2} 32 \xrightarrow{*2} 64$$

$$q = 2$$

مثال (2)

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{*\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \xrightarrow{*\frac{1}{2}} \frac{1}{8} \xrightarrow{*\frac{1}{2}} \frac{1}{16} \xrightarrow{*\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

ما هو الفرق بين المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية؟؟

الحسابية	الهندسية
الجمع $(+)$	الضرب $(\times)$
الطرح $(-)$	القسمة $(\div)$
الأساس (r)	أس (q)

كيف تثبت أن متتالية ما هي متتالية هندسية؟

نقول عن متتالية إنها هندسية إذا تحقق:

$$\boxed{u_{(n+1)} - u_{(n)} = \text{ثابت} = q}$$

ما هو قانون الحد العام للمتتالية الهندسية؟

$$\boxed{u_{(n)} = u_{(0)} . q^n}$$

ما هو القانون العام للمتتالية الهندسية؟

$$\boxed{u_{(m)} = u_{(p)} . q^{(m-p)}}$$

الأس = (دليل الحد يلي برا − دليل الحد يلي جوا)

ما هو قانون مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية؟؟

$$S = \text{الحد الأول} . \left(\frac{1 - q^{(\text{عدد الحدود})}}{1 - q}\right)$$

$$\text{عدد الحدود} = 1 + \left(\text{دليل الحد الأخير} - \text{دليل الحد الأول}\right)$$

مثال توضيحي (1):

لتكن لدينا المتتالية $((u_n)_{n\ge0})$ المعرفة بالعلاقة:

$$\boxed{u_n = \frac{2}{3^n}}$$

أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية.

الحل:

حتى تكون المتتالية هندسية يجب أن تحقق:

$$\underbrace{\frac{u(n+1)}{u(n)}}_{l_1} = \underbrace{q = \text{ثابت}}_{l_2}$$

$$l_1: \frac{u(n+1)}{u(n)} = \frac{\frac{2}{3^{(n+1)}}}{\frac{2}{3^{(n)}}} = \frac{2}{3^{(n+1)}} \cdot \frac{3^n}{2}$$

$$l_1: \frac{u(n+1)}{u(n)} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3^n}.3^1} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{2}} = \frac{1}{3} = q = l_2$$

⟸ المتتالية (u_n) هندسية.

مثال توضيحي (2):

لتكن لدينا المتتالية الهندسية $((u_n)_{n\ge0})$ فيها: $(u_{(4)} = 12)$ وَ $(q = 3)$ أحسب المجموع التالي:

$$\boxed{u_{(4)} + u_{(5)} + u_{(6)} + u_{(7)} + u_{(8)}}$$

الحل:

$$\boxed{S = u_{(4)} + u_{(5)} + u_{(6)} + u_{(7)} + u_{(8)}}$$

نلاحظ المجموع عبارة عن حدود متعاقبة من متتالية هندسية.

$$S = \text{الحد الأول} . \left(\frac{1 - q^{(\text{عدد الحدود})}}{1 - q}\right)$$

من الفرض لدينا:

$$\boxed{\text{الحد الأول} = u_{(4)} = 12} \quad ; \quad \boxed{q = 3}$$

$$s = 12\left(\frac{1-(3)^{(8-4)+1}}{1-3}\right)$$

$$s = 12\left(\frac{1-(3)^5}{1-3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{s = -6\left(1-(3)^5\right)}$$

منبر شغف التعليمي

بحث الاحتمالات

شرح لبعض المفاهيم الأساسية في بحث الاحتمالات:

1) فضاء العينة (Ω):

هي المجموعة المكونة من كل عناصر التجربة:

$$\boxed{p(\Omega) = 1}$$

ونسمي كل مجموعة جزئية منها حدثاً.

$$\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \dots\dots, a_n\}$$

أحداث ضمن التجربة

2) القانون الأهم في بحث الاحتمالات:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } (A)}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

مثال:

$\boxed{A = \{1,3,5\}}$, $\boxed{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1$$

3) الحدث الأكيد والحدث المستحيل:

(1) الحدث الأكيد:

هو الحدث الذي يكون احتماله مساوياً إلى (1) أي لا يمكن أن لا يظهر في التجربة.

(2) الحدث المستحيل: $\emptyset$

هو الحدث الذي يكون احتماله مساوياً إلى الصفر (0) أي لا يمكن أن يظهر بالتجربة.

(3) ماهي قيم الاحتمال التي يمكن أن تظهر في التجربة؟؟

$$0 \le p(A) \le 1$$

$p(A) = \frac{2}{3}$ ✓ مقبول

$p(A) = \frac{3}{2}$ ✗ غير مقبول

$p(A) = -\frac{2}{3}$ ✗ غير مقبول

(4) الحدثان المنفصلان والحدثان المتعاكسان

1) الحدثان المنفصلان:

هما حدثان لا يشتركان بأي عنصر:

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cap B) = 0$$

2) الحدثان المتعاكسان:

هما حدثان عندما يقع أحدهما لا يقع الحدث الآخر

(5) ما هو الحدث المتمم وكيف يتم التعبير عنه؟

الحدث المتمم هو الحدث الذي تكون مجموع عناصره متممة إلى فضاء العينة مع حدث آخر.

$$A\cup B=\Omega \quad , \quad p(A\cup B)=1$$

$$\Rightarrow p(A)+p(B)=1$$

تنويه !!

عادةً رمز الحدث المتمم يكون الحدث ذاته مرفقاً بـ $(')$

$$A \xrightarrow{\text{الحدث المتمم}} A'$$

$$p(A')=1-p(A)$$

(احتمال الحدث المتمم = $1-$ احتمال الحدث الأساسي)

(6) ما هو الفرق بين الاجتماع والتقاطع وما قوانينها؟؟

1) الاجتماع: $(\cup)$

يدل رمز الاجتماع على الحدث (A) أو (B) أي يدل على الحدث الذي يقع عندما تقع (A) أو (B) على الأقل.

$$\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$$

وعندما يكون الحدثان منفصلين:

$$\boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)}$$

2) التقاطع: $(\cap)$

يدل رمز التقاطع على الحدث (A) و (B) أي يدل على الحدث عندما يقع (A) و (B) في آن معاً.

مسائل هامة على القواعد السابقة

مثال توضيحي:

لتكن لدينا المجموعة التالية:

$$\boxed{\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}}$$

وليكن (A) الحدث الدال على ظهور الأعداد الزوجية والحدث (B) على ظهور الأعداد الفردية والحدث (c) الدال على مضاعفات العدد (4).

أحسب كل من: $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$

$p(A\cap C)$, $p(A\cup C)$, $p(A\cup B)$

الحل:

$$A=\{2,4,6,8\} \Rightarrow n(A)=4$$

$$\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{p(A)=\frac{4}{9}<1}$$

$$B=\{1,3,5,7,9\} \Rightarrow n(B)=5$$

$$\Rightarrow p(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{p(B)=\frac{5}{9}<1}$$

$$c=\{4,8\} \Rightarrow n(C)=2$$

$$\Rightarrow p(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{p(C)=\frac{2}{9}<1}$$

$$A\cap C=\{4,8\}$$

$$\Rightarrow n(A\cap C)=n(C)=2$$

$$\Rightarrow p(A\cap C)=\frac{n(A\cap C)}{n(\Omega)}=\frac{2}{9}<1$$

$$\Rightarrow \boxed{p(A\cap C)=\frac{2}{9}<1}$$

الحصول على $(A\cup C)$:

ط1: (مجموعات):

$$A\cup C=\{2,4,6,8\}$$

$$n(A\cup C)=4 \Rightarrow \boxed{p(A\cup C)=\frac{4}{9}<1}$$

ط2: (قوانين):

$$p(A\cup C)=p(A)+p(C)-p(A\cap C)$$

$$p(A\cup C)=\frac{4}{9}+\cancel{\frac{2}{9}}-\cancel{\frac{2}{9}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p(A\cup C)=\frac{4}{9}<1}$$

الحصول على $(A\cup B)$:

ط1: (مجموعات):

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A\cup B=\Omega \Rightarrow n(A\cup B)=9$$

$$\Rightarrow \boxed{p(A\cup B)=p(\Omega)=\frac{9}{9}=1}$$ (حدث أكيد)

ط2: (القوانين):

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-P(A\cap B)$$

$$p(A\cup B)=\frac{4}{9}+\frac{5}{9}-\boxed{0}$$

$$\boxed{p(A\cup B)=\frac{9}{9}=1}$$ حدثان منفصلان (A) و (B)

ملاحظة هامة جدا

فيما يخص قطعة النقود

(T): الحدث الدال على ظهور وجه الكتابة.

(H): الحدث الدال على ظهور وجه الصورة.

$$\boxed{p(T)=\frac{1}{2}} , \boxed{p(H)=\frac{1}{2}}$$

1) رمي قطعة نقود مرة واحدة $\boxed{\Omega=\{T,H\}}$

2) رمي قطعتي النقود مرتين أو رمي قطعتي نقود:

$$\boxed{\Omega=\{(T,H),(T,T),(H,H)\}}$$

Ω: فضاء العينة

ملاحظة هامة جدا

فيما يخص حجر النرد

حجر النرد المتجانس يحتوي على (6) وجوه واحتمال كل وجه هو $\left(\frac{1}{6}\right)$

مثال توضيحي (1)

نلقي قطعة النقود مرتين أو نلقي قطعتي نقود.

1) اكتب فضاء العينة للتجربة.

2) احسب احتمال ظهور وجهين كتابة.

3) احسب احتمال ظهور إحدى الوجهين صورة على الأقل.

الحل:

1

$$\Omega=\{(T,H),(H,T),(T,T),(H,H)\}$$

2

(A): الحدث الدال على ظهور وجهين كتابة.

$$A=\{(T,T)\} \Rightarrow n(A)=1$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{1}{4}<1}$$

3

(B): الحدث الدال على ظهور صورة على إحدى الوجهين على الأقل.

$$B=\{(T,H),(H,T),(H,H)\}$$

تنويه!!

يعني يا إما تظهر الصورة (H) مرة واحدة أو أكثر.

$$n(B)=3 \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{3}{4}<1}$$

مثال توضيحي (2)

تحمل وجوه حجر نرد مثالي مكّعب الشكل الأعداد $(3,2,2,1,1,1)$ نلقيه مرة واحدة ونتأمل الأحداث التالية:

(A): العدد الظاهر هو (1)

(B): العدد الظاهر هو (2)

(C): العدد الظاهر مختلف عن (3)

احسب احتمالات (A) و(B) و (C)

الحل: $\Omega=\{3,2,2,1,1,1\}$

1 $A=\{1,1,1\} \Rightarrow n(A)=3$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}<1}$$

2 $B=\{2,2,\} \Rightarrow n(B)=2$

$(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

③ $C = \{2,2,1,1,1\} \Rightarrow n(C) = 5$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{5}{6} < 1}$

الاحتمال الشرطي

$$\boxed{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

حدث وقع | علماً أن | حدث لم يقع

$P(A\backslash B)$ تُقرأ "أحسب احتمال ظهور الحدث (A) علماً أن الحدث (B) قد وقع".

مثال توضيحي:

لدى عائلة طفلان، ما هو احتمال كونهما ذكرين إذا علمت أن احداهما ذكر.

الحل:

نفرض أن:

(A) الحدث الدال على أن الطفل ذكر. $\left(P(A) = \frac{1}{2}\right)$

(B) الحدث الدال على أن الطفلة أنثى. $\left(P(B) = \frac{1}{2}\right)$

نكتب فضاء العينة للتجربة:

$$\boxed{\Omega = \{(A,A),(B,A),(A,B),(B,B)\}}$$

(AA) الحدث الدال على ظهور ذكرين (لم يقع).

(C) الحدث الدال على ظهور إحداهما ذكر (وقع).

$$\boxed{P(AA\backslash C) = \frac{P(AA\cap C)}{P(C)}}$$

$C = \{(A,B),(B,A),(A,A)\}\ ;\ AA = \{(A,A)\}$

$AA\cap C = \{(A,A)\} \Rightarrow \boxed{P(AA\cap C) = \frac{1}{4}}$

$P(C) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \underset{\text{أو}}{+} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \underset{\text{أو}}{+} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{P(C) = \frac{3}{4}}$

بالتعويض في قانون الاحتمال الشرطي:

$P(AA\backslash C) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} * \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{P(AA\backslash C) = \frac{1}{3}}$

ملاحظة هامة جداً

الرمز	القراءة	الأرقام
$\cap$	وَ	(ضرب)*
$\cup$	أو	(جمع) +

الاستقلال الاحتمالي

نقول عن حدثين إنهما مستقلين إحتمالياً إذا كان إحتمال حدوث إحداهما غير مرتبط بالآخر.

$$\boxed{P(A\cap B) = P(A).P(B)}$$

وبالتعميم يظهر لدينا:

$$\boxed{P(A\cap B') = P(A).P(B')}$$

$$\boxed{P(A'\cap B) = P(A').P(B)}$$

$$\boxed{P(A'\cap B') = P(A').P(B')}$$

مثال توضيحي (1):

تقدم طالبان إلى امتحان اللغة الإنكليزية حيث أن احتمال نجاح الأول $\left(\frac{3}{4}\right)$ واحتمال نجاح الثاني $\left(\frac{4}{9}\right)$

1) احسب احتمال نجاحهما معاً

2) احسب احتمال نجاحهما على الأقل.

الحل: ①

(A): الحدث الدال على نجاح الطالب الأول

(B): الحدث الدال على نجاح الطالب الثاني

$P(A \overset{\text{و = معاً}}{\cap} B) = P(A).P(B)$

الحدثين مستقلين احتمالياً

$\Rightarrow P(A\cap B) = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9} = \frac{12}{36}$

$\Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = \frac{12}{36} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$

②

احتمال نجاحهما على الأقل ⟸ $(\cup)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(A\cup B) = \underset{(9)}{\frac{3}{4}} + \underset{(4)}{\frac{4}{9}} - \underset{(12)}{\frac{1}{3}}$

$$\boxed{P(A\cup B) = \frac{27+16-12}{36} = \frac{31}{36} < 1}$$

مثال توضيحي (2)

في تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة وليكن (A) الحدث الموافق لظهور وجه عدد نقاطه زوجي وليكن (B) الحدث الموافق لظهور وجه عدد نقاطه مربع لعدد صحيح.

برهن أن الحدثين (A) و (B) مستقلين احتماليا.

الحل:

حتى يكون الحدثين (A) و (B) مستقلين احتمالياً يجب أن يتحقق:

$$\underbrace{P(A\cap B)}_{l_1} = \underbrace{P(A).P(B)}_{l_2}$$

$l_2 = P(A).P(B)$

$\boxed{\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}}$

فضاء العينة

$A = \{2,4,6\} \Rightarrow n(A) = 3$

$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} < 1}$

$B = \{1,4\} \Rightarrow n(B) = 2$

$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{6} < 1}$

$l_2: P(A).P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$l_1: P(A\cap B) = ??$

$(A\cap B) = \{4\} \Rightarrow n(A\cap B) = 1$

$\Rightarrow \boxed{P(A\cap B) = \frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}} = l_1$

⟸ الحدثان (A) و(B) مستقلان احتمالياً.

السحب على التتالي:

(الترتيب مهم جداً)

مع إعادة: نعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق

دون إعادة: لا نعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق

$$\boxed{P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد الكرات المراد سحبها}}{\text{عدد الكرات الكلي بالصندوق}}}$$

ملاحظة هامة جداً (1)

في سحب الكرات على التتالي يوجد معامل الترتيب:

$a\times b \Rightarrow *2$ (حدين مختلفين)

$a\times a$ أو $b\times b$ أو $a\times a\times a$ $\Rightarrow *1$ (حدين أو 3 حدود متشابهة)

$a\times b\times c \Rightarrow *3!$ (ثلاث حدود مختلفة)

$a\times a\times c \Rightarrow *3$ (ثلاث حدود اثنان مختلفان)

$a\times b\times c$ أو $a\times b$ $\Rightarrow *1$ الترتيب محدد بالمسألة

معامل الترتيب

ملاحظة هامة جداً (2)

في السحب على التتالي كل كسر يعبر عن كرة واحدة فقط مسحوبة.

مسألة هامة:

ليكن لدينا صندوق يحوي على (5) كرات:
(2) **سوداء** و (2) **بيضاء** و (1) زرقاء
حيث نريد سحب كرتين من الصندوق على التالي:
1) احتمال سحب كرتين من اللون ذاته (مع إعادة + دون إعادة)
2) احتمال سحب كل كرة من لون (مع إعادة + دون إعادة)
3) احتمال سحب كرتين من اللون ذاته إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين **سوداء** اللون (دون إعادة)
4) احتمال سحب كرة **سوداء** واحدة على الأقل (مع إعادة)

الحل:

5 كرات
2 **بيضاء** ، 1 زرقاء ، 2 **سوداء**

①

(A): الحدث الدال على سحب كرتين من اللون ذاته.

1) مع إعادة:

$A = \{(\text{بيضاء} , \text{بيضاء}); (\text{سوداء} , \text{سوداء}); (\text{زرقاء} , \text{زرقاء})\}$

$P(A) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * 1 + \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * 1 + \frac{1}{5} * \frac{1}{5} * 1$

أو أو

معامل الترتيب

$\Rightarrow P(A) = \frac{4+4+1}{25} \Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{9}{25} < 1}$

2) دون إعادة:

$A = \{(\text{بيضاء} , \text{بيضاء}); (\text{سوداء} , \text{سوداء})\}$

$P(A) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} * 1 + \frac{2}{5} * \frac{1}{4} * 1$

$\Rightarrow \boxed{P(A) = \frac{2+2}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} < 1}$

②

(B): الحدث الدال على سحب كل كرة من لون.

1) مع إعادة:

$B = \{(\text{زرقاء} , \text{سوداء}) ; (\text{بيضاء} , \text{سوداء}) ; (\text{زرقاء} , \text{بيضاء})\}$

$P(B) = \frac{2}{5} * \frac{1}{5} * 2 + \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * 2 + \frac{2}{5} * \frac{1}{5} * 2$

معامل الترتيب

$\Rightarrow P(B) = \frac{4+8+4}{25} \Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{16}{25} < 1}$

2) دون إعادة:

$B = \{(\text{زرقاء} , \text{سوداء}) ; (\text{بيضاء} , \text{سوداء}) ; (\text{زرقاء} , \text{بيضاء})\}$

$P(B) = \frac{2}{5} * \frac{1}{4} * 2 + \frac{2}{5} * \frac{2}{4} * 2 + \frac{2}{5} * \frac{1}{4} * 2$

$\Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{4+8+4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} < 1}$

③

(A): الحدث الدال على سحب كرتين من اللون ذاته (لم يقع)

(C): الحدث الدال على سحب كرتين سوداء اللون (وقع)

$P(A \backslash C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$

$(A \cap C) = \{(\text{سوداء} , \text{سوداء})\}$

$P(A \cap C) = P(C) \Rightarrow$

$P(A \backslash C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(C)}{P(C)}$

$\Rightarrow \boxed{P(A \backslash C) = 1}$ (حدث أكيد)

④

(D): الحدث الدال على سحب كرة **سوداء** واحدة على الأقل

$(D) = \{(\text{سوداء} , \text{غير}), (\text{سوداء} , \text{سوداء})\}$

$P(D) = \frac{2}{5} * \frac{3}{5} * 2 + \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * 1$

$\Rightarrow \boxed{P(D) = \frac{12+4}{25} = \frac{16}{25} < 1}$

بحث الأشعة

1) العلاقة الشعاعية:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$$

مثال توضيحي:

لتكن لدينا النقطتين: $A(1,-1)$ ، $B(-2,-2)$
اكتب العبارة الشعاعية $\overrightarrow{AB}$

الحل:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

ملاحظة هامة جداً

في تشكيل الشعاع دوماً النهاية ناقص البداية:

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$$

2) قانون بعد نقطتين أو حساب طويلة شعاع:

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

مثال توضيحي (1):

حساب طويلة الشعاع $(\overrightarrow{AB})$ في المثال السابق

الحل:

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2+1)^2}$

$\boxed{AB = \sqrt{+9+1} = \sqrt{10}}$

مثال توضيحي (2):

أحسب بعد النقطة (O) عن النقطة (A) إذا علمت أن $A(-1,-1)$

الحل:

تنويه!! حساب بُعد النقطة (O) عن النقطة (A) ⇔ حساب طويلة (OA).

$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2}$

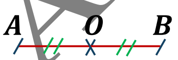
$OA = \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2}$

$\boxed{OA = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}}$

3) إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة:

$x_O = \frac{x_A + x_B}{2}$

$y_O = \frac{y_A + y_B}{2}$



مثال توضيحي

لتكن لدينا النقطتان $A(1,2)$ و $B(3,4)$ أوجد إحداثيات منتصف $[AB]$

الحل:

نفرض أن (O) منتصف $[AB]$ ⇐ $o(x_o, y_o)$

$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$

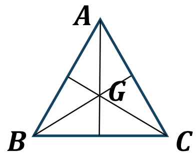
إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة ⇐ $\boxed{O(2,3)}$

٤) مركز الأبعاد المتناسبة ومركز ثقل المثلث:

١) مركز ثقل المثلث:

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3}$$



٢) مركز الأبعاد المتناسبة

$$x_G = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

(A,α) ، (B,β) ، (C,γ)

مثال توضيحي:

لتكن لدينا النقاط التالية:

$C(3,-2)$ ، $B(2,-2)$ ، $A(1,-1)$

1) أوجد مركز ثقل المثلث (ABC)

2) إذا كان لدينا النقاط A و B و C تم تثقيلها بـ $(A,1),(C,3),(B,1)$ أوجد احداثيات مركز الأبعاد.

الحل:

①

نفرض أن (G) مركز ثقل المثلث (ABC)

$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{1+2+3}{3} = 2$$

$$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{-1-2-2}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{G\left(2,-\frac{5}{3}\right)}$$

②

نفرض أن (G') مركز أبعاد متناسبة للنقاط: (A) و (B) و (C)

$$x_{G'} = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\Rightarrow x_{G'} = \frac{1.(1)+1.(2)+3(3)}{1+1+3} = \frac{12}{5}$$

$$y_{G'} = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\Rightarrow y_{G'} = \frac{1(-1)+1(-2)+3(-2)}{1+1+3} = -\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{G'\left(\frac{12}{5},-\frac{9}{5}\right)}$$

الارتباط الخطي (التوازي)

نقول عن شعاعين إنهما مرتبطين خطياً إذا كان إحداهما ناتج عن الآخر بضربه بعدد.

$\vec{AB}\,(x_1,y_1)$, $\vec{AC}\,(x_2,y_2)$

علاقة الارتباط الخطي:

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = K}$$

مثال توضيحي:

ليكن لدينا الشعاعين $(\vec{u})$ و $(\vec{v})$:

$\vec{v}(-3,6)$, $\vec{u}(-1,2)$

أثبت أن الشعاعين مرتبطين خطياً.

الحل:

حتى يكون الشعاعان مرتبطان خطياً يجب أن يتحقق:

$$\frac{x_{\vec v}}{x_{\vec u}} = \frac{y_{\vec v}}{y_{\vec u}} \Rightarrow \frac{-3}{-1} = \frac{6}{2} \Rightarrow 3 = 3$$

$\Leftarrow (\vec{v} = K.\vec{u}) \Leftarrow$ الشعاعان مرتبطان خطياً

ماهي فوائد الارتباط الخطي؟؟

١) الفائدة الأولى:

وقوع النقاط على استقامة واحدة (إذا كان الشعاعين مرتبطين خطياً) ⇐ نقاطها على استقامة واحدة.

مثال توضيحي:

لتكن لدينا النقاط الثلاث:

$A(2,1), B(3,1), C(1,1)$

أثبت أن النقاط على استقامة واحدة ؟

الحل: حتى تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $(\vec{AB})$ و $(\vec{AC})$ مرتبطان خطياً

$$\vec{AB} = (x_B - x_A\ ,\ y_B - y_A)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = (+1,0)$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A\ ,\ y_C - y_A)$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = (-1,0)$$

نلاحظ أن $(\vec{AC} = -\vec{AB})$

⇐ الشعاعان مرتبطان خطياً.

⇐ النقاط (A) و(B) و (C) على استقامة واحدة

تنويه!! عندما تحتوي مركبات الأشعة على (0) (صفر) لانطبق قانون النسبية وإنما قانون $\vec{AC} = K\vec{AB}$

٢) الفائدة الثانية: وقوع النقاط في مستوٍ واحد وذلك عندما يكون الشعاعان غير مرتبطين خطياً.

مثال توضيحي:

لتكن لدينا النقاط الثلاث:

$A(1,1)$, $B(4,0)$, $C(-1,2)$

أثبت أن النقاط تقع في مستوٍ واحد؟؟

الحل: حتى تكون النقاط في مستوٍ واحد يجب أن يكون الشعاعان $(\vec{AB})$ و $(\vec{AC})$ غير مرتبطان خطياً

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_{\vec{AB}}}{x_{\vec{AC}}} = \frac{y_{\vec{AB}}}{y_{\vec{AC}}} \Rightarrow \frac{3}{-2} =? \frac{-1}{1}$$

$\Rightarrow \frac{3}{-2} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow$ (الشعاعان غير مرتبطين خطياً)

⇐ النقاط ليست على استقامة واحدة.

⇐ النقاط تقع في مستوٍ واحد

تنويه!! ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة⇐ النقاط تقع في مستوٍ واحد حصراً.

الجداء الداخلي (السلمي): (التعامد)

يوجد قانونين للجداء السلمي:

١) القانون الأول:

$\vec{AB} = (x_1,y_1)$, $\vec{AC}\,(x_2,y_2)$

$$\boxed{\vec{AB}.\vec{AC} = x_1.x_2 + y_1.y_2}$$

مثال توضيحي:

في المثال التوضيحي السابق أوجد ناتج $(\vec{AB}.\vec{AC})$

الحل:

من الطلب السابق: $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{AB}.\vec{AC} = x_{\vec{AB}}.x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}}.y_{\vec{AC}}$$

$$\vec{AB}.\vec{AC} = 3.(-2) + (-1)(1)$$

$$\boxed{\vec{AB}.\vec{AC} = -6 - 1 = -7}$$

(دوماً ناتج الجداء الداخلي عدد)

٢) القانون الثاني:

$$\boxed{\vec{AB}.\vec{AC} = AB.AC.\cos(\theta)}$$

ملاحظة: $\theta\,(\vec{AB}\hat{,}\ \vec{AC})$

وبالتالي يجب أن تكون البداية بين الشعاعين موحّدة.

$$\vec{AB}.\vec{CA} = \vec{AB}.(-\vec{AC})$$

$$\Rightarrow \vec{AB}.\vec{CA} = -\vec{AB}.\vec{AC}$$

مثال توضيحي:

ليكن لدينا الشعاعين $(\vec{u})$ وَ $(\vec{v})$ حيث أن $(u=2)$ وَ $(v=1)$ حيث أن $\left(\theta(\vec{u};\vec{v})=\frac{2\pi}{3}\right)$:
أحسب ناتج الجداء الداخلي للشعاعين.

الحل:

$$\vec{u}.\vec{v}=u.v.\cos(\theta)$$

من الفرض لدينا:

$u=2$, $v=1$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=2*1*\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}_{\text{علاقة تكامل}}$

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=2.\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=-2.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=-2.\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v}=-1}$

ماهي فائدة الجداء السلمي؟؟

يُستخدم الجداء السلمي عندما نريد إثبات **تعامد شعاعين:**

الشعاعان متعامدان $\Leftarrow$ $\boxed{\vec{u}.\vec{v}=0}$

مثال توضيحي:

ليكن لدينا الشعاعين:
$\vec{u}\left(-\frac{4}{5},-2\right)$ وَ $\vec{v}=(-5,2)$
أثبت أن الشعاعين $(\vec{u})$ وَ $(\vec{v})$ متعامدين.

الحل:

حتى يكون الشعاعان متعامدين يجب أن يتحقق:

$\underbrace{\vec{u}.\vec{v}}_{l_1}\overset{?}{=}\underbrace{0}_{l_2}$

$l_1=\vec{u}.\vec{v}=x_{\vec{u}}.x_{\vec{v}}+y_{\vec{u}}.y_{\vec{v}}$

$l_1=\vec{u}.\vec{v}=-5\left(-\frac{4}{5}\right)+2(-2)$

$\Rightarrow l_1=\vec{u}.\vec{v}=+4-4=0=l_2$

$\Leftarrow$ الشعاعين $(\vec{u})$ وَ $(\vec{v})$ متعامدين

المستقيم ومعادلاته

ماهي أشكال معادلات المستقيم؟؟

١) **الشكل الأول:** $\boxed{y=\underbrace{m}_{\text{ميل المستقيم }(m)}x+c}$

٢) **الشكل الثاني:** $\boxed{ax+by+c=0}$

شعاع التوجيه: $\vec{u}(-b,a)$

ناظم المستقيم: $\vec{n}(a,b)$

الحالات حتى نكتب فيها معادلات المستقيم:

١) الحالة الأولى:

عُلمَ منه (ميل المستقيم وَ نقطة يمر منها)

$y=\underbrace{\boxed{m}}_{\text{معلوم}}x+\boxed{c}$

(نحصل عليه من خلال تعويض النقطة بالمستقيم)

مثال توضيحي:

اكتب معادلة المستقيم (d) الذي يمر من النقطة $A(1,2)$ وميله $(m=2)$.

الحل:

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل:

$\boxed{d: y=mx+c}$; $\begin{cases} m=2 \\ c=?? \end{cases}$

$A\in d \Rightarrow 2=2(1)+c \Rightarrow \boxed{c=0}$

$\Rightarrow \boxed{d: y=2x}$ (معادلة المستقيم المطلوب)

٢) الحالة الثانية:

عُلمَ منه نقطتين يمر منها المستقيم:

$y=m\,x+c$

$\left(m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right)$ (الحصول على (c) بتعويض نقطة)

مثال توضيحي:

أكتب معادلة المستقيم المار من النقطتين: $A(1,1)$ وَ $B(3,2)$.

الحل:

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل:

$\boxed{d: y=mx+c}$; $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-1}{3-1}\Rightarrow \boxed{m=\frac{1}{2}}$

للحصول على (c) نعوض إحدى النقاط: مثلاً (A)

$A\in d \Rightarrow 1=\frac{1}{2}(1)+c$

$\Rightarrow \boxed{c=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{d: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$ (معادلة المستقيم المطلوب)

٣) الحالة الثالثة:

عُلمَ منه ناظم $\vec{n}(a,b)$ ويمر بالنقطة $A(x,y)$.

مثال توضيحي:

أكتب معادلة المستقيم (d) الذي يقبل الناظم $\vec{n}(1,2)$ ويمر بالنقطة $A(-1,2)$.

الحل:

معادلة المستقيم من الشكل:

$\boxed{d: ax+by+c=0}$

$\vec{n}(1,2)=(a,b) \Rightarrow \boxed{a=1}$; $\boxed{b=2}$

الحصول على (c) نعوض النقطة (A):

$d: x+2y+c=0$

$A\in d \Rightarrow -1+2(2)+c=0$

$\Rightarrow \boxed{c=-3} \Rightarrow \boxed{d: x+2y-3=0}$

وهي معادلة المستقيم المطلوب.

٤) الحالة الرابعة:

عُلمَ منه شعاع توجيه $\vec{u}(-b,a)$ ويمر بالنقطة $A(x,y)$.

مثال توضيحي:

أكتب معادلة المستقيم الذي يقبل $\vec{u}(-3,2)$ شعاع توجيه له ويمر بالنقطة $A(1,1)$.

الحل:

معادلة المستقيم المطلوب من الشكل:

$\boxed{ax+by+c=0}$

$\vec{u}(-3,2)=(-b,a) \Rightarrow -b=-3$

$\Rightarrow \boxed{a=2}$; $\boxed{b=3}$

الحصول على (c) نعوض النقطة (A):

$d: 2x+3y+c=0$

$A\in d \Rightarrow 2(1)+3(1)+c=0$

$\Rightarrow \boxed{c=-5}$

$\Rightarrow \boxed{d: 2x+3y-5=0}$

وهي معادلة المستقيم المطلوب.

كيف نحصل على ميل مستقيم من معادلته؟؟

خطوات الحل:

1) نُصلح المعادلة إلى الشكل $\boxed{y=mx+c}$

2) أمثال (x) هي ميل المستقيم.

مثال: $\boxed{2x-3y+1=0}$
أوجد ميل المستقيم

الحل:

$+3y=2x+1$: $\boxed{\div 3}$

$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

$y=mx+c \Rightarrow \boxed{m=\frac{2}{3}}$ (ميل المستقيم)

ملاحظة هامة جدا

1) نقول عن مستقيمين إنهما متوازيين عندما تكون الميول متساوية.

$$\boxed{d_1 \| d_2 \iff m_1 = m_2}$$

مثال:

هل المستقيمين (d_1) و (d_2) متوازيين؟؟

$d_1: 2x-3y+1=0$

$d_2: 3x-y+2=0$

الحل: حتى يكون المستقيمين متوازيين يجب أن يتحقق: $(m_{d_1} \overset{?}{=} m_{d_2})$

$d_1: 2x-3y+1=0 \Rightarrow 3y = 2x+1$

$\div 3 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

$y = mx+c \Rightarrow m_{d_1} = \frac{2}{3}$

$d_2: 3x-y+2=0 \Rightarrow y=3x+2$

$\Rightarrow m_{d_2}=3 \Rightarrow m_{d_1}\neq m_{d_2}$

⟸ المستقيمان غير متوازيين

2) نقول عن مستقيمين إنهما متعامدين عندما يتحقق مايلي: $m_{d_1} = -\frac{1}{m_{d_2}}$

مثال:

أثبت أن المستقيمين (d_1) و (d_2) متعامدين:

$d_1: 2x-y+1=0$

$d_2: 2y+x-2=0$

الحل: حتى يكون المستقيمين متعامدين يجب أن يتحقق: $(m_{d_1}.m_{d_2} \overset{?}{=} -1)$

$d_1: 2x-y+1=0 \Rightarrow y=2x+1$

$y=mx+c \Rightarrow m_{d_1}=2$

$d_2: 2y+x-2=0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x+1$

$y=mx+c \Rightarrow m_{d_2} = -\frac{1}{2}$

$m_{d_1}.m_{d_2} = -1 \Rightarrow 2.\left(-\frac{1}{2}\right) \overset{?}{=} -1$

$\Rightarrow m_{d_1}.m_{d_2}=-1$ (محقق)

⟸ المستقيمان متعامدان

حل دورات فحص الترشيحي

١) القسم الأول: (اختيار الإجابة الصحيحة)

(١) مجموعة تعريف التابع (f) المعطى بالعلاقة: $f(x)=\frac{x^2-2x}{x+1}$

الحل: تابع كسري صحيح:

$x \in \mathbb{R}\backslash\{$جذور المقام$\}$

جذور المقام: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$\Rightarrow \boxed{x\in \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$

(2) المستقيم الذي معادلته $(2x-y+3=0)$ يقبل شعاع توجيه $(\vec{v})$.

الحل: المستقيم معادلته من الشكل:

$ax+by+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=+2\\ b=-1\end{cases}$

إحداثيات شعاع التوجيه: $\vec{v}\,(-b,a)$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(1,2) = \binom{1}{2}}$

(3) لتكن لدينا النقاط التالية: $A(4,5)$ و $B(2,1)$ و $C(\lambda,3)$ عين (λ) التي تجعل النقاط على استقامة واحدة.

الحل:

$\overrightarrow{AB} = \binom{x_B-x_A}{y_B-y_A} = \binom{-2}{-4}$

$\overrightarrow{AC} = \binom{x_C-x_A}{y_C-y_A} = \binom{\lambda-4}{-2}$

حتى تكون النقاط على استقامة واحدة يجب أن تتحقق النسبة:

$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \Rightarrow \frac{-2}{\lambda-4} = \frac{-4}{-2}$

$\Rightarrow -4\lambda+16 = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{-12}{-4} = 3$

$\Rightarrow \boxed{\lambda=3}$

(4) إذا كان (a) عدد حقيقي يحقق $(0<a<1)$:

تنويه!! لما يكون عنا (كسر < 1) في حال التربيع بيصغر الكسر.

الحل: $0<a<1 \Rightarrow \boxed{a^2 < a}$

التأكد: $a = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} < \frac{1}{2}}$

(5)

$\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = ??$

الحل:

$\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{4\pi+\pi}{2}\right)$

$= \sin\left(x+\cancel{2\pi}+\frac{\pi}{2}\right) = +\cos(x)$

$= 0$ (عدد زوجي من π)

$\Rightarrow \boxed{\sin\left(x+\frac{5\pi}{2}\right) = +\cos(x)}$

(6) إذا كان لدينا $(f(x)=x^3-2x)$ فإن: $f(\sqrt{3}) = ??$

الحل:

$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 2(\sqrt{3})$

$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2.\sqrt{3} - 2(\sqrt{3})$

$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 2(\sqrt{3}) = +\sqrt{3}$

$\Rightarrow \boxed{f(\sqrt{3})=+\sqrt{3}}$

(7) إن قيمة المقدار التالي: $\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(x)$

الحل:

$\underbrace{\cos(\pi-x)}_{\text{علاقة تكامل}}+\underbrace{\cos(\pi+x)}_{\text{علاقة تجاور}}+\cos(x)$

$\cancel{-\cos(x)} \quad -\cos(x) \quad \cancel{+\cos(x)}$

$\Rightarrow \boxed{\text{المقدار} = -\cos(x)}$

(8) حلول المتراجحة $(|x-1| \le 2)$

الحل:

$|x-1| \le 2 \Rightarrow |x-1|-2 \le 0$

نحول المتراجحة إلى معادلة $\Rightarrow |x-1|-2=0$

$\Rightarrow |x-1| = 2$

$x-1=2 \qquad x-1=-2$

$x=3 \qquad x=-1$

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
المتراجحة	$+$	0	$-$	0	

$\Rightarrow \boxed{x \in [-1,3]}$

(9)

صندوق يحتوي على (5) بطاقات مرقمة $\{1,2,3,4,5\}$ سحبنا من الصندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة فإن احتمال أن يكون مجموعهما فردي؟

الحل: حتى يكون مجموع البطاقتين فردي:

(زوجي $+$ فردي $\leftarrow$ فردي)

$\{1,3,5\} =$ فردي $\quad , \quad \{2,4\} =$ زوجي

(A): الحدث الدال على مجموع البطاقتين فردي.

$$P(A) = \frac{2}{5} * \frac{3}{4} * 2 = \frac{12 * 5}{20 * 5}$$

معامل ترتيب

$$P(A) = \frac{60}{100} = 0.6 \Longrightarrow \boxed{P(A) = 0.6}$$

(10)

ليكن لدينا الشعاع $(\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ أوجد نظم الشعاع (الطويلة).

الحل:

$$\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} \Longrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{u = \sqrt{3}}$$

(11)

مجموعة تعريف التابع (f) المعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}}$$

الحل:

مجموعة التعريف تُعطى بالعلاقة:

$x \in \mathbb{R} \backslash \{$جذور المقام$\}$

جذور المقام: $x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 \neq -1$ مستحيلة الحل

$\Longrightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}}$

(12)

مجموعة قيم التابع $(f(x) = x^2 - g)$.

الحل:

$f(x) = x^2 - 9 \quad ; \quad x \in \,]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;,\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{f'(x) = 2x} \;;\; f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0$

$\Longrightarrow x = \frac{0}{2} = 0 \in \mathbb{R}$

$f(0) = 0^2 - 9 = -9$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\infty \searrow$	(-9)	$\nearrow \infty$

$f(]-\infty,+\infty[) = [-9,+\infty[$

(13)

مجموع الحدود الخمسة الأولى من متتالية هندسية $((u_n)_{n\geq 0})$ فيها $(u_0 = -1)$ و $(q = 2)$ تساوي:

الحل: يُعطى قانون مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

$$S = \text{الحد الأول}\left(\frac{1 - q^{(\text{عدد الحدود})}}{1 - q}\right)$$

$$S = u_0\left(\frac{1 - (2)^5}{1 - 2}\right) \quad ; \quad u_0 = -1$$

$$S = -1(1 - (2)^5) = -(1 - 32) = 31$$

$$\Longrightarrow \boxed{S = 31}$$

(14)

إذا كان $\left(\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ فإن: $\sin(x) = ??$: (x) ربع أول

الحل:

تنويه هام: لما يكون معنا بالمسألة $(\cos)$ وبدو $(\sin)$ أو العكس نطبق القانون:

$$\boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2(x) + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Longrightarrow \sin^2(x) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

$\Longrightarrow \sin^2(x) = \frac{4}{9} \Longrightarrow$ نجذر الطرفين

$$\Longrightarrow \sqrt{\sin^2(x)} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\Longrightarrow |\sin(x)| = \frac{2}{3}$$

$\sin(x) = \frac{-2}{3}$ مرفوض

$\sin(x) = \frac{2}{3}$ ربع أول مقبول

(15)

ليكن لدينا كل من التابعين:

$$\boxed{f(x) = x - \frac{1}{x}} \text{ و } \boxed{g(x) = x^2 + \frac{1}{x}}$$

أوجد مجموعة تعريف $(f+g)$

الحل:

تنويه:

مجموعة التعريف

طرح تابعين — جمع تابعين — جداء تابعين

$D: D_1 \cap D_2$

$$D: \underbrace{D_1}_{\text{(مجموعة تعريف الأول)}} \cap \underbrace{D_2}_{\text{(مجموعة تعريف الثاني)}}$$

$$D: \underbrace{D_1}_{(f(x)\ \text{مجموعة تعريف})} \cap \underbrace{D_2}_{(g(x)\ \text{مجموعة تعريف})} ;$$

كسري صحيح: $D_1: x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

كسري صحيح: $D_2: x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$D: \mathbb{R}\backslash\{0\} \cap \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\boxed{D: x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*}$$

(16)

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)} = ؟؟$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(+\infty + \infty) = +\infty$$

(17)

ليكن لدينا الشعاعين التاليين: $\vec{u}(a,1)$ و $\vec{v}(3,2)$ أوجد قيمة العدد الحقيقي (a) ليكون الشعاعان مرتبطان خطياً.

الحل: حتى يكون الشعاعان مرتبطان خطياً:

$$\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} \Longrightarrow \frac{a}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow 2a = 3 \Longrightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

(18)

عين قيمة الوسيط الحقيقي (m) التي يكون عندها للمعادلة (جذر مضاعف):

$$\boxed{x^2 - 6x + m - 1 = 0}$$

الحل: حتى يكون للمعادلة حل مضاعف يجب أن يكون $(\Delta = 0)$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(1)(m-1)$$

$$\Delta = 36 - 4m + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow 40 - 4m = 0 \Longrightarrow \boxed{m = \frac{40}{4} = 10}$$

(19)

ليكن لدينا التابع (f) المعرف على $[0,+\infty[$ وفق العلاقة: $\boxed{f(x) = x + \sqrt{x}}$ أوجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}}$$

(20)

في تجربة إلقاء حجر النرد رباعي الوجوه، متوازن ومرقم من (1) إلى (4) فإن احتمال الحصول على عدد زوجي يساوي؟

الحل:

$\Omega = \{1,2,3,4\}$ فضاء العينة

(A): الحدث الدال على ظهور ذات عدد النقاط الزوجية

$$A = \{2,4\} \Longrightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

(21)

مجموعة حلول المعادلة:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \sqrt{2}x = 0}$$

الحل:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + \sqrt{2}x = 0$$

$x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}\right) = 0 \Longrightarrow$ إما $x_1 = 0$

أو $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$

$$\Longrightarrow \boxed{S = \{0,-2\}}$$

(22)

(ABC) مثلث فيه $(AB = 4)$ وَ $(AC = 4)$ وقياس الزاوية $(\hat{A} = 60°)$ فإن مساحته تساوي:

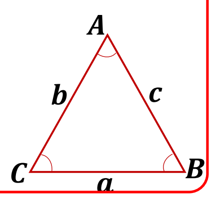
الحل:

تنويه: تذكرة في قوانين المساحة

$$S = \frac{1}{2}.a.c.\sin(B)$$

$$S = \frac{1}{2}.b.c.\sin(A)$$

$$S = \frac{1}{2}.a.b.\sin(C)$$



$$S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin(A)$$

$$S = \frac{1}{2}.(4).(3).\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$S = 2.3.\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \boxed{S = 3\sqrt{2}}$$

(23)

إذا كان $\left(\sin(x) = \frac{2}{3}\right)$ فإن $\sin(2x)$ يمكن أن تكون:

الحل:

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x).\cos(x)} \quad \boxed{*}$$

الحصول على $\cos(x)$:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{4}{9} + \cos^2(x) = 1 \Longrightarrow$$

$$\cos^2(x) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$|\cos(x)| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\Rightarrow$ إما $\cos(x) = +\frac{\sqrt{5}}{3}$ (مقبول) ✓

أو $\cos(x) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ (مرفوض) ✗

نعوض في قانون $(*)$:

$$\sin(2x) = 2\left(\frac{2}{3}\right).\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$\boxed{\sin(2x) = \frac{4\sqrt{5}}{9} < 1}$$

(24)

عين قيمة الوسيط الحقيقي (m) التي تجعل $(x = -1)$ حلاً للمعادلة:

$$\boxed{2x^2 - x - m = 0}$$

الحل:

بما أن $(x = -1)$ حل للمعادلة $\Longleftarrow$ يحقق المعادلة:

$$2(-1)^2 - (-1) - m = 0$$

$$2 + 1 - m = 0 \Longrightarrow \boxed{m = 3}$$

(25)

معادلة المستقيم الذي ميله $(m = 2)$ فيما يأتي هي:

الحل:

معادلة المستقيم من الشكل:

$$y = mx + c\,;(m = 2)$$

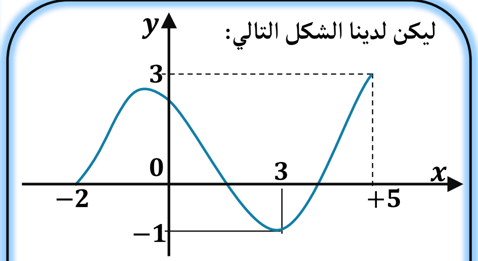
$$\Longrightarrow y = 2x + c \Longrightarrow y - 2x - c = 0$$

$$\Longrightarrow d: y - 2x - C = 0$$

(ممكن تكون أي عدد)

(26)

ليكن لدينا الشكل التالي:



1) أوجد مجموعة التعريف للتابع الممثل للخط البياني السابق.

2) عين مجموعة قيم $f(x)$ الممثل للخط البياني (c_f)

3) في الشكل السابق عين مجال (x) التي يكون عندها التابع متناقص.

الحل:

(1)

تنويه!! نسقط بداية الخط ونهاية الخط على المحور $(x'x)$

$$\boxed{x \in [-2,+5]}$$

(2)

تنويه!! للحصول على قيم $f(x)$ نأخذ أصغر قيمة وصل لها الخط البياني وأكبر قيمة أيضاً وصل لها (y)

$$\boxed{f(x) \in [-1,3]}$$

(3)

$$\boxed{x \in [0,3]}$$

(27)

اوجد احداثيات نقطة التقاطع بين المستقيمين

$(1)\quad d': 2x - y - 4 = 0$

$(2)\quad d: 2x + y - 4 = 0$

الحل:

تنويه!! لما تشوفوا كلمة تقاطع معناها الحل اوجد الحل المشترك بين المعادلتين.

$(1)\quad d': 2x - y - 4 = 0$

$(2)\quad d: 2x + y - 4 = 0$

$$(1) + (2) \Longrightarrow 4x - 8 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2}$$

نعوض $(x = 2)$ في إحدى المعادلتين:

$$2(2) + y - 4 = 0 \Longrightarrow \boxed{y = 0}$$

$\Longleftarrow$ نقطة التقاطع $\boxed{N(2,0)}$

(28)

أوجد مجموعة تعريف التابع $f(x)$ المعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{9 - x^2}}$$

الحل:

التابع الجذري التربيعي:

$$9 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow 9 - x^2 = 0$$

$\Rightarrow (3 - x)(3 + x) = 0 \Rightarrow$ إما $x_1 = +3$ أو $x_2 = -3$

x	$-\infty$	-3		$+3$	$+\infty$
$9 - x^2$	—	0	+	0	—

(محققة)

$$\Longrightarrow \boxed{x \in [-3,+3]}$$

(29)

تقدم طالبان لامتحان الرياضيات احتمال نجاح الأول (0.9) و احتمال نجاح الثاني (0.7) فإن احتمال نجاحهما معاً.

الحل:

نفرض كل من:

(A) : احتمال نجاح الطالب الأول

(B) : احتمال نجاح الطالب الثاني

تنويه: (كلمة معاً $\Leftarrow$ $(\cap)$)

وبما أن الحدثين (A) و (B) مستقلين احتمالياً تكتب العلاقة بالشكل:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$P(A\cap B)=(0.9).(0.7)$$

$$P(A\cap B)=9\times10^{-1}\times7\times10^{-1}$$

$$P(A\cap B)=63\times10^{-2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.63}$$

---

(30)

إذا كان تابع $f(x)$ معرف بالعلاقة $(f(x)=x^2)$ حدد قيم (x) التي يكون عندها التابع متناقص ومتزايد

الحل:

تنويه!! عندما يسأل عن تزايد أو تناقص التابع $\Leftarrow$ نقوم بالاشتقاق وندرس اشارته

موجب (متزايد) — سالب (متناقص)

$$f'(x)=2x \begin{cases} x\in[0,+\infty[& \text{متزايد} \\ x\in]-\infty,0[& \text{متناقص} \end{cases}$$

بعض المسائل الواردة في الدورات

المسألة الأولى

لدى عائلة ثلاثة أطفال، نفترض أن يكون هنالك فرصاً متساوية لأن يكون الطفل صبياً أو بنتاً والمطلوب:

1) احتمال أن يكون الأطفال الثلاث بنات.

2) احتمال أن يكون لدى العائلة طفلتان وصبي.

الحل: 1

نفرض كل مما يلي:

(A): الحدث الدال على أن يكون الطفل صبي.

(B): الحدث الدال على أن يكون الطفل بنت.

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3)=P(B_1).P(B_2).P(B_3)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(B_1\cap B_2\cap B_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}}$$

استخدمنا قانون الاستقلال الاحتمالي لأن احتمال الأحداث غير مرتبط ببعضه

2

(C): الحدث الدال على أن يكون لدى العائلة (طفلتان وصبي واحد).

$$P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(3)$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(C)=\frac{3}{8}<1}$$

معامل الترتيب بسبب عدم تحديد ترتيب انجاب الأطفال

المسألة الثانية

في معلم متجانس، لتكن النقاط التالية:

$$O(0,0) \quad \text{و} \quad M(2,5) \quad \text{و} \quad N(-1,1)$$

والمطلوب:

1) اوجد $(\overrightarrow{MN})$, ثم احسب $\|\overrightarrow{MN}\|$.

2) احسب إحداثيي مركز ثقل المثلث (OMN).

الحل: 1

$$\overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}x_N-x_M\\ y_N-y_M\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2\\ +1-5\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{MN}=\begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$$

حساب الطويلة:

$$\|\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\|\overrightarrow{MN}\|=\sqrt{25}=5}$$

2

نفرض أن (G) مركز ثقل المثلث:

$$x_G=\frac{x_O+x_M+x_N}{3}=\frac{0+2-1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$y_G=\frac{y_O+y_M+y_N}{3}=\frac{0+5+1}{3}=2$$

$$\Longrightarrow \boxed{G\left(\frac{1}{3}\ ,\ 2\right)}$$

المسألة الثالثة

ليكن لدينا التابعين (g) و (f) وفق:

$$\boxed{f(x)=x^2} \quad \text{و} \quad \boxed{g(x)=\frac{1}{x}}$$

1) اوجد مجموعة تعريف كل من (g) و (f).

2) اوجد كل من $g'(x)$ و $f'(x)$.

3) ادرس اطرد التابع $g(x)$.

الحل: 1

$$f(x)=x^2 \Longrightarrow \text{تابع صحيح} \Longrightarrow \boxed{x\in\mathbb{R}}$$

$$g(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow \text{تابع كسري صحيح}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

2

$$\boxed{f'(x)=2x} \dashrightarrow \text{مشتق التابع } f(x)$$

$$g'(x)=\frac{0.x-1.(1)}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{g'(x)=\frac{-1}{x^2}} \dashrightarrow \text{مشتق التابع } g(x)$$

3

$$g(x)=\frac{1}{x} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$x\in]-\infty\ ,\ 0[\ \cup\ ]\ 0\ ,+\infty[$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{0^+}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{0^-}\right)=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}<0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	‖	—
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

$x\in]-\infty,0[$: (التابع متناقص)

$x\in]\,0\,,+\infty[$: (التابع متناقص)

المسألة الرابعة

ليكن لدينا التابع المعطى بالعلاقة:

$$\boxed{f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}}$$

1) اوجد مجموعة تعريف (f).

2) اوجد $\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

الحل:

1

$f(x)=\frac{x-2}{x^2+1}$ ؛ (تابع كسري صحيح)

$x\in\mathbb{R}\setminus\{$جذور المقام$\}$

جذور المقام: $x^2+1=0 \Longrightarrow \underbrace{x^2\neq-1}_{\text{مستحيلة الحل}}$

$\Longrightarrow \boxed{x\in\mathbb{R}}$

2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

المسألة الخامسة

صندوق يحوي (5) بطاقات : (3) سوداء و (2) بيضاء نريد سحب بطاقتان على التتالي مع إعادة:

1) ما احتمال أن تكون البطاقتان المسحوبتان بيضاوتين ؟

2) ما احتمال أن تكون البطاقتان من نفس اللون ؟

الحل: (5) كرات

(2) بيضاء — (3) سوداء

1

(A): الحدث الدال على سحب بطاقتين بيضاوتين.

$$P(A)=\underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{الكرة الأولى بيضاء}}\times\underbrace{\frac{2}{5}}_{\text{الكرة الثانية بيضاء}}\times\underbrace{1}_{\text{معامل الترتيب}}=\frac{4}{25}$$

2

(B): الحدث الدال على سحب بطاقتين من نفس اللون.

(سوداء , سوداء) أو (بيضاء , بيضاء)

$$P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times1+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times1$$

$$P(B)=\frac{4+9}{25}\Longrightarrow \boxed{P(B)=\frac{13}{25}<1}$$

المسألة الخامسة

ليكن لدينا التابعان (f) وَ (g) المعرّفان على $(\mathbb{R})$:

$$\boxed{f(x)=x^2+1}\quad;\quad\boxed{g(x)=2x}$$

1) اوجد مجموعة قيم (f).

2) اوجد $fog(x)$.

الحل: **1**

تنويه !! لما يسألنا عن قيم $f(x)$ $\Longleftarrow$ يعني طالع المستقر الفعلي للتابع وبالتالي ادرس اطراده.

$f(x)=x^2+1 \quad ; \quad x\in]-\infty,+\infty]$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$

$f'(x)=2x \quad ; \quad f'(x)=0$

$\Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=\frac{0}{2}=0$

$f(0)=(0)^2+1=+1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

$f(]-\infty,+\infty])=[1,+\infty[$

$f(x)\in[1,+\infty[$: مجموعة قيم (x)

2

تنويه !! لما يسألني $fog(x)$ بشيل (0) وبحط مكانها قوس

$fog(x)=f(g(x))$

$fog(x)=f(g(x))=f(2x)$

معناها بدل كل (x) بـ $g(x)$

$fog(x)=f(2x)=(2x)^2+1$

$\Longrightarrow \boxed{fog(x)=4x^2+1}$

المسألة السابعة

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$\boxed{u_n=2n+3}$$

اثبت أن المتتالية حسابية مع تحديد أساس المتتالية (r).

الحل:

حتى تكون المتتالية حسابية يجب أن يتحقق:

$$\boxed{u_{(n+1)}-u_n=r=\text{ثابت}}$$

$2(n+1)+3-(2n+3)=\cancel{2n}+2+\cancel{3}-\cancel{2n}-\cancel{3}=2$

$\Longrightarrow \boxed{r=2}$ (أساس المتتالية)

لمحة عن منصة منبر شغف التعليمي

في ضوء أزمة فايروس كورونا والظروف الصعبة التي يمر فيها أبنائنا الطلبة وحرصا منا على تقديم محتوى علمي قيّم يساعد الطلاب على الوصول إلى مستوى التفوق والتميز وايماناً منا بأهمية التعليم الإلكتروني في المستقبل قمنا بإطلاق منصة منبر شغف التعليمي وهو منصة تعليمية موجهة لطلاب التعليم الثانوي بشكل عام وطلاب البكالوريا بشكل خاص , الهدف الرئيسي منها تقديم الدعم والمساعدة لجميع الطلاب ليتمكنوا من تجاوز جميع المشاكل والصعوبات والارتقاء لمستوى التفوق والتميز ، وذلك عن طريق نخبة من الاساتذة المميزين في مختلف المواد.