
الدرس
3

القطوع الزائدة

HYPERBOLAS


Welcome

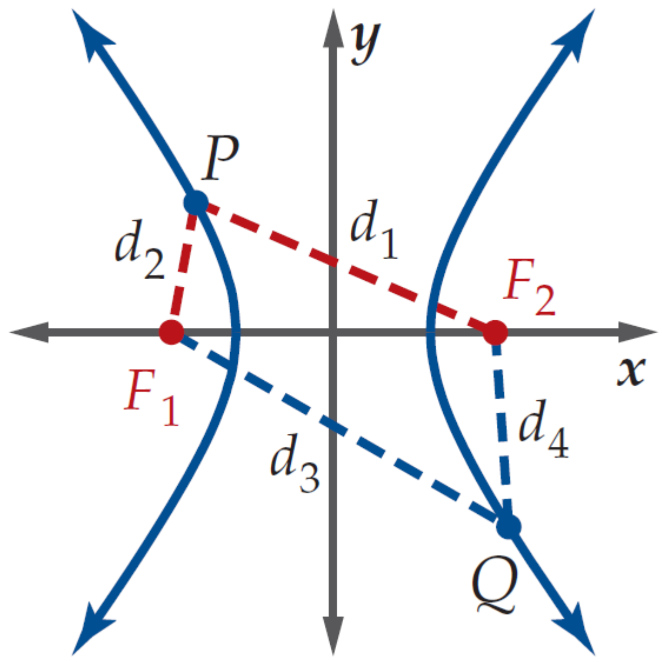
لماذا ؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشترى مثلاً، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتَيه ، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانية، ومثل هذه المسارات تُسمّى قطوعًا زائدةً.

تحليل القطع الزائد و تمثيله بيانياً :

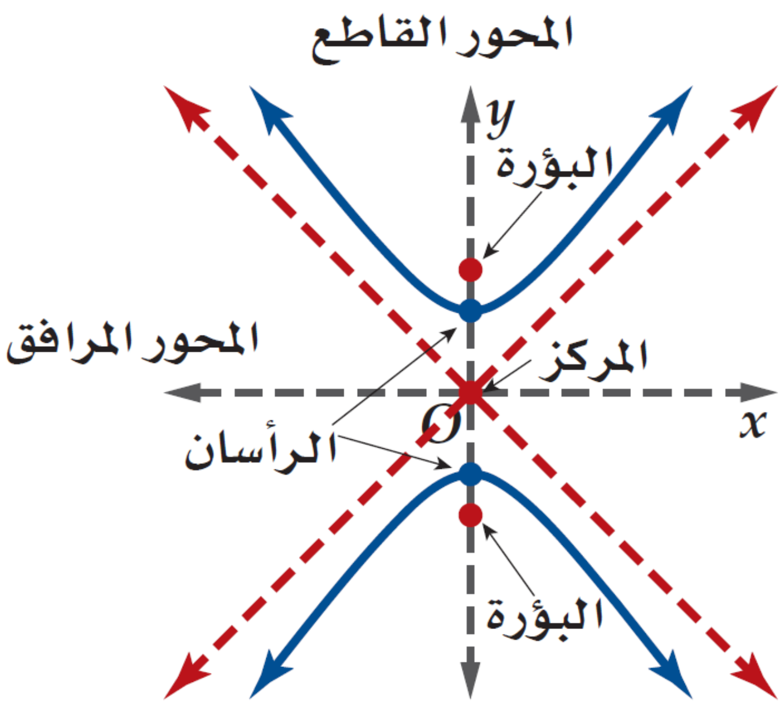
القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$



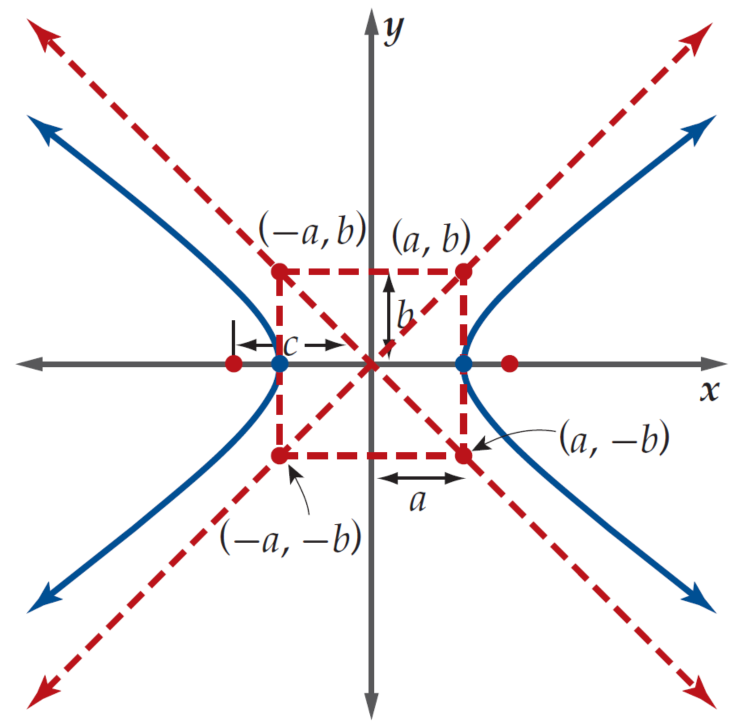
يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يجاذبان خطي تقارب، ومركز القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، ورأسا القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

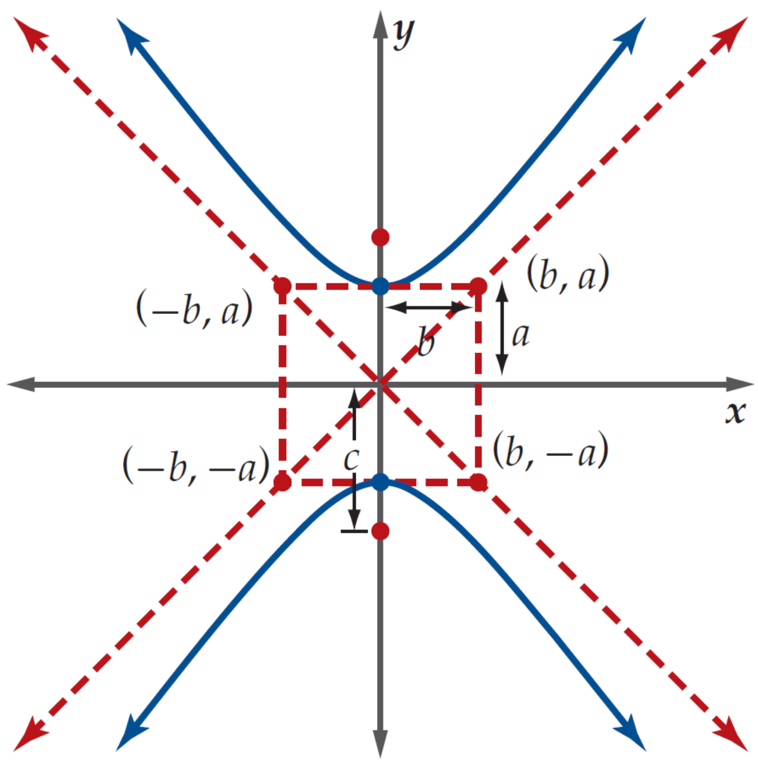
للقطع الزائد محورا تماثل هما : المحور القاطع و هو يمر بالرأسين، والمحور المرافق و هو عمودي علي المحور القاطع و يمر بالمركز .



لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضع في الشكل أدناه، بحيث $c^2 = a^2 + b^2$,

وتختلف عمّا في القطع الناقص بالإضافة إلى أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد والبؤرتين هو 2a.





يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع .

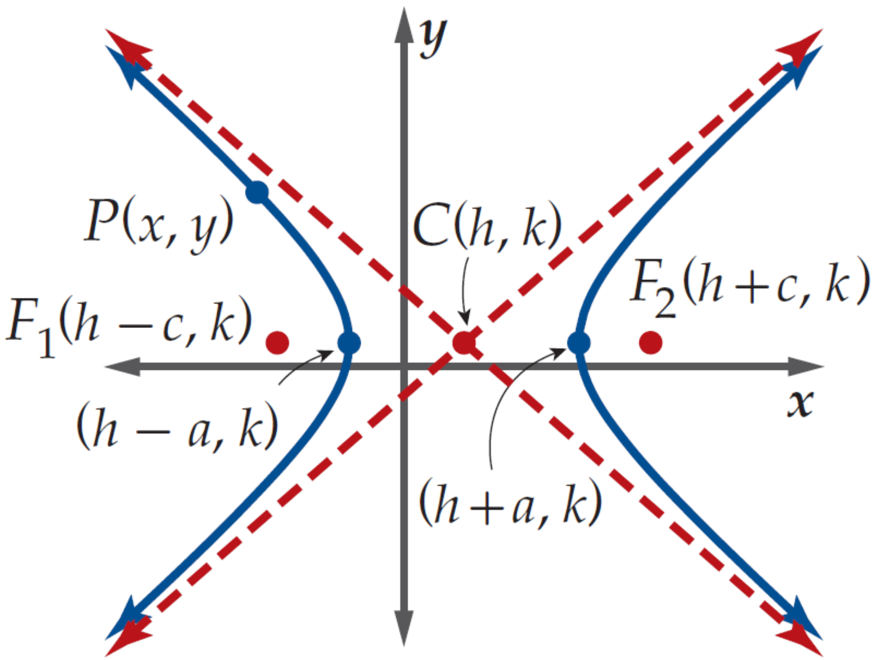
المخروطية الأخرى ، افترض أن $P\left(x\,,y\right)$ نقطة علي منحني القطع الزائد .

الذي مركزه $C\left(h\,,k\right)$ يوضح الشكل المجاور ، إحداثيات البؤرتين و الرأسين

و بحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة علي المنحني

عن البؤرتين هو مقدار ثابت ، لذا فإن $\left|PF_1 - PF_2\right| = 2a$ و هذا .

يعني أما $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$



تعريف القطع الزائد
$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

صيغة المسافة
$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

الخاصية التجميعية
$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=2a$$

بالجمع
$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$

بالجمع
$$(x-h)^2+2c+(x-h)^2+c^2+(y-k)^2=4a^2+4a-\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$
$$+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$

بالتبسيط
$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=-4a^2-4c(x-h)$$

بقسمة كلا الطرفين علي 4 -
$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=-a^2-c(x-h)$$

بتربيع الطرفين

$$a^2\left[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2\right]+(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

خاصية التوزيعية

$$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2+(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$

بالتبسيط

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

خاصية التوزيعية

$$\left(a^2-c^2\right)(x-h)^2+a^2(y-k)^2+a^2(y-k)^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

$a^2-c^2=b^2$

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2\left(-b^2\right)$$

بقسمة كلا الطرفين علي a^2b^2

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)

، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

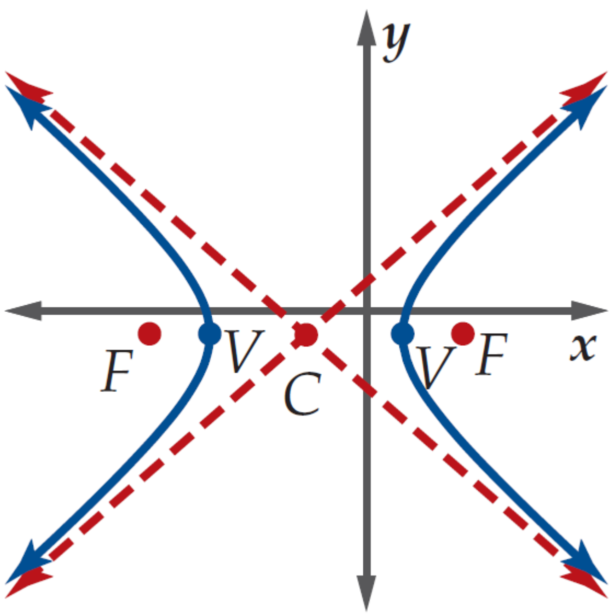
عندما يكون المحور القاطع أفقياً ، $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

يكون المحور القاطع رأسياً .

مفهوم أساسي

خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية : $$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه : المحور القاطع أفقي

المركز : (h,k)

الرأسان : $(h\pm a,k)$

البؤرتان : $(h\pm c,k)$

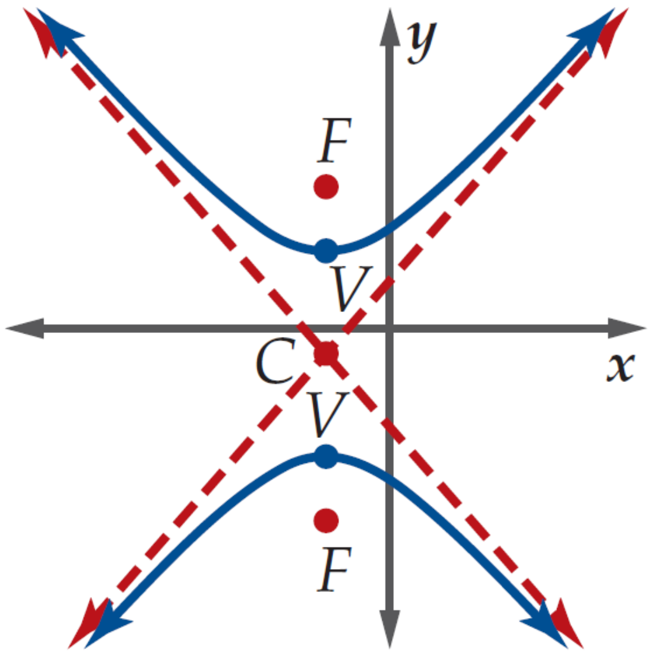
المحور القاطع : $y=k$

المحور المرافق : $x=h$

خط التقارب : $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

العلاقة بين : a,b,c : $c^2=a^2+b^2$ **أو** $c=\sqrt{a^2+b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية : $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



الاتجاه : المحور القاطع أفقي

المركز : (h,k)

الرأسان : $(h\pm k,a)$

البؤرتان : $(h\pm k,c)$

المحور القاطع : $x=h$

المحور المرافق : $y=k$

خط التقارب : $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

العلاقة بين : a,b,c : $c^2=a^2+b^2$ أو $c=\sqrt{a^2+b^2}$

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة علي الصورة القياسية

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلّ مما يأتي، ثم مثل منحناه بيانيًّا :

a) $$\frac{(x-3)^2}{36} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث $h = 3, k = -1, a = \sqrt{36} = 6, b = \sqrt{9} = 3, c = 3\sqrt{3}$

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص :

الاتجاه :	أفقي	$(x-h)^2$ مقسوماً علي a^2
المركز :	$(3,-1)$	(h,k)
البؤرتان:	$(3\pm 3\sqrt{3},-1)$	$(h\pm c,k)$
الرأسان :	$(9,-1),(-3,-1)$	$(h\pm a,k)$
الرأسان المرافقان :	$(3,2),(3,-4)$	$(h,k\pm b)$
المحور الأكبر :	$y=-1$	$y=k$
المحور الأصغر :	$x=3$	$x=h$

مثال 1

تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة علي الصورة القياسية

حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته : $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث $h=-1, k=-2, a=\sqrt{9}=3, b=\sqrt{16}=4, c=\sqrt{9+16}=5$

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص :

المطروح منه هو الحد الذي يحتوي

الاتجاه : أفقي

المركز : $(3,-1)$ — (h,k)

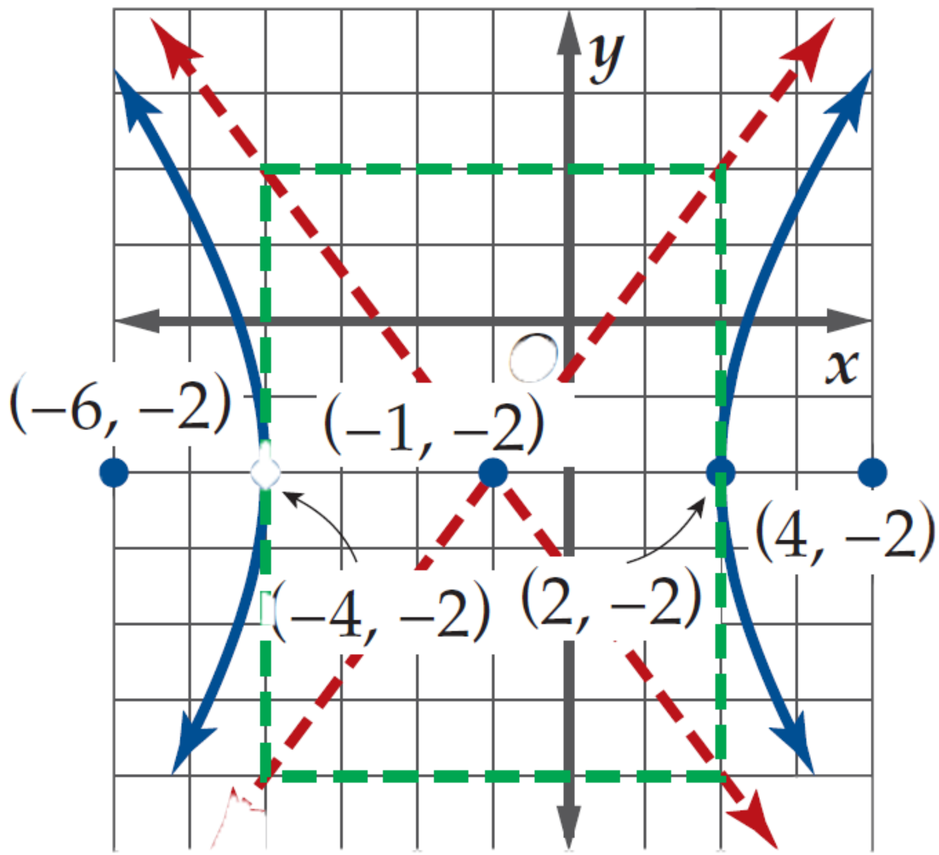
الرأسان $(2,-2),(-4,-2)$ — $(h\pm a,k)$

البؤرتان : $(4,-2),(-6,-2)$ — $(h\pm c,k)$

خطا التقارب : $y+2=\frac{4}{3}(x+1), y+2=-\frac{4}{3}(x+1),$ — $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

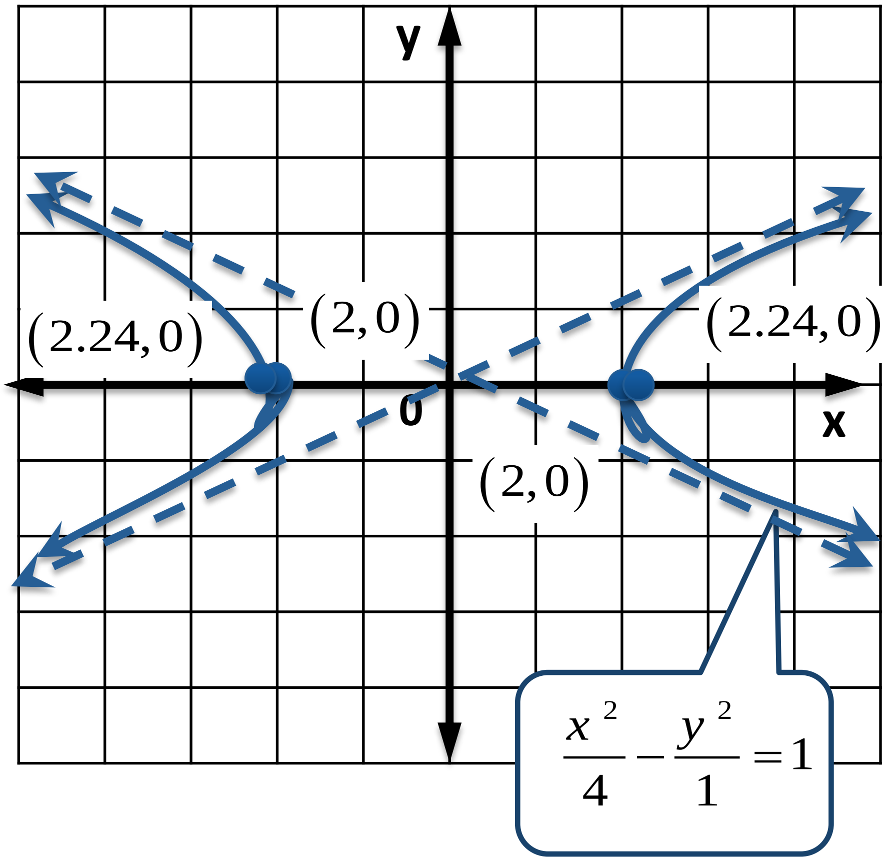
$$y=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3}$$

عيّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه (-1, -2) وأحد بعديه 2a = 6، والبعد الآخر 2 b = 8، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2 c = 10. ثم مثّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تحقق من نفسك

(1A $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$



الاتجاه : أفقي

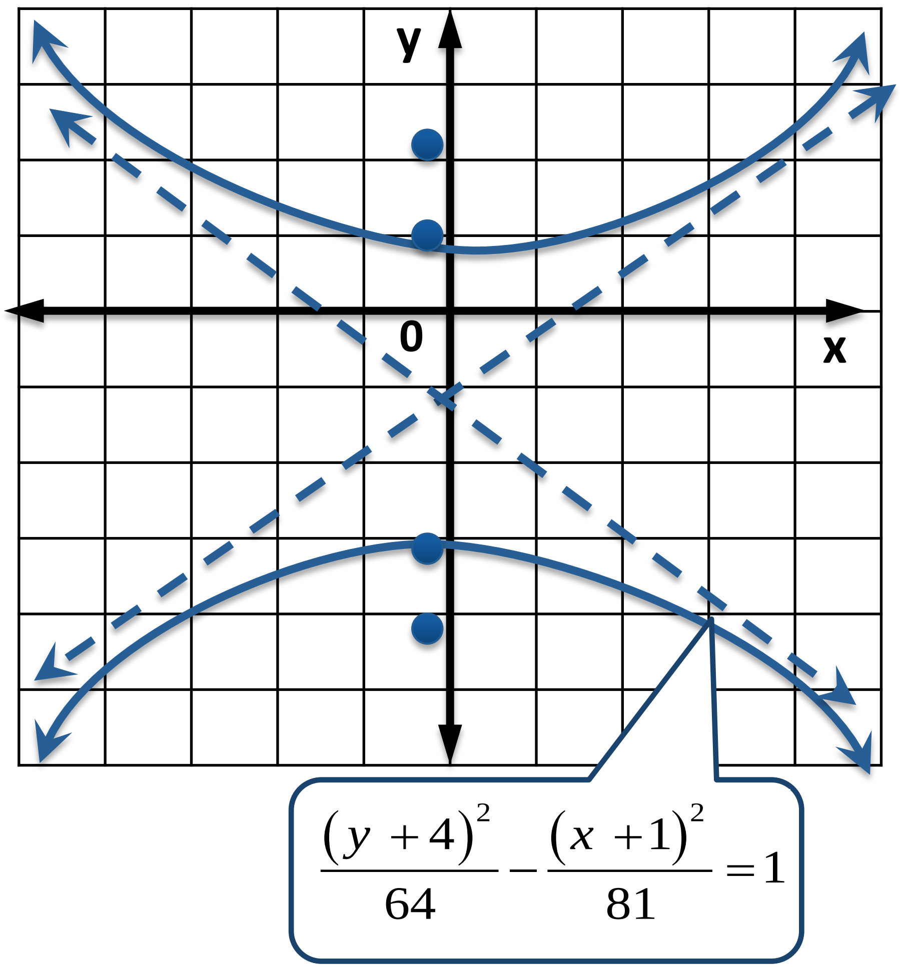
المركز : $(0,0)$

الرأسان $(\pm 2,0)$

البؤرتان : $(\pm\sqrt{5},0)$

خطا التقارب : $y=\pm\frac{1}{2}x$

$$\frac{(y+4)^2}{64}-\frac{(x+1)^2}{81}=1 \quad \text{(1B}$$



الاتجاه : رأسي

المركز : $(-1,-4)$

الرأسان $(-1,-12),(-1,4)$

البؤرتان : $\left(-1,-4\pm\sqrt{145}\right)$

خطا التقارب : $y+4=\pm\frac{8}{9}(x+1)$

مثال 2

كتابة معادلة قطع زائد علي الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$ علي الصورة القياسية ، ثم حدد خصائصه ، ومثل منحناه بيانياً .

اكتب المعادلة علي الصورة القياسية أولاً :

$$25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y = 444$$ المعادلة الأصلية

$$\left(25x^2 + 100x\right) - \left(16y^2 + 96y\right) = 444$$ بتجميع الحدود المتشابهة

$$25\left(x^2 + 4x\right) - 16\left(y^2 + 6y\right) = 444$$ بالتحليل

$$25\left(x^2 + 4x + 4\right) - 16\left(y^2 + 6y + 9\right) = 444 + 25(4) - 16(9)$$ بإكمال المربع

$$25(x+2)^2 - 16(y-3)^2 = 400$$ بالتحليل و التبسيط

$$25(x+2)^2 - 16(y-3)^2 = 400$$ بقسمة كلا الطرفين علي 400

المعادلة مكتوبة علي الصورة القياسية ، حيث :

$$h = -2, k = 3, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد .

الاتجاه : أفقي

المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x

المركز : $(-2,3)$ $\quad (h,k)$

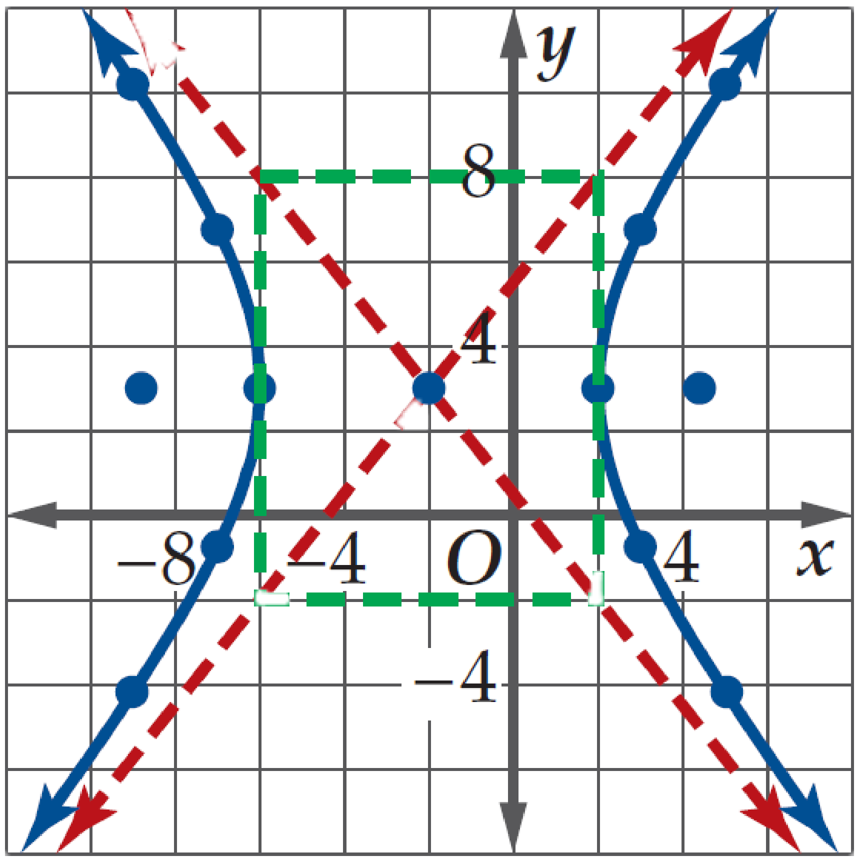
الرأسان $(-6,3),(2,3)$ $\quad (h\pm a,k)$

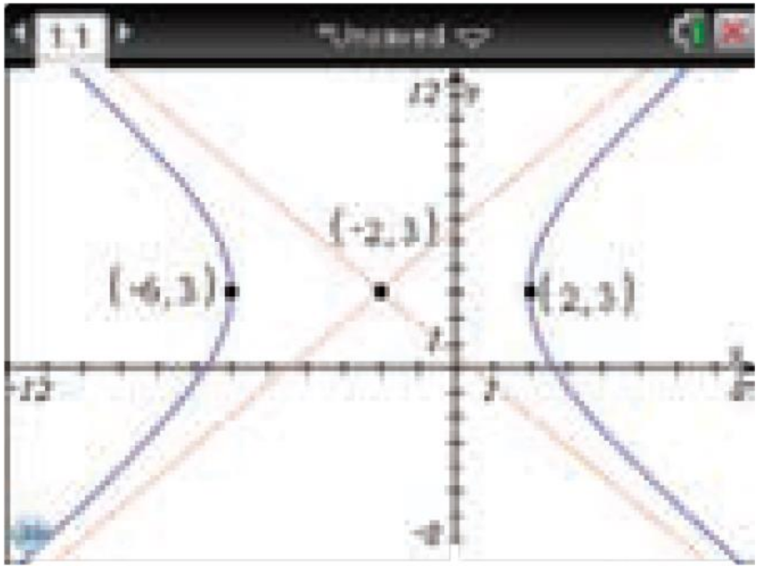
البؤرتان : $(-8.4,3),(4.4,3)$ $\quad (h\pm c,k)$

خطا التقارب : $y-2=-\frac{5}{4}(x+2), y-3=-\frac{5}{4}(x+2),$ $\quad y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$

$$y=\frac{5}{3}x+\frac{11}{2}, y=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعديه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$ وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطّي التقارب $2c = 12.8$ ، ثم مثّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.





<u>التحقق :</u>

حل المعادلة بالنسبة لـ y لتحصل علي دالتين في x :

$$y=3+\sqrt{-25+\frac{25(x+2)^2}{16}},y=3-\sqrt{-25+\frac{25(x+2)^2}{16}}$$

مثل المعادلتين باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire بيانياً علي الشاشة نفسها مع خطي التقارب ، و قارن بين الناتج و تمثيلك السابق ، و ذلك باختبار النقاط .

تحقق من نفسك

(2A $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 68$

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

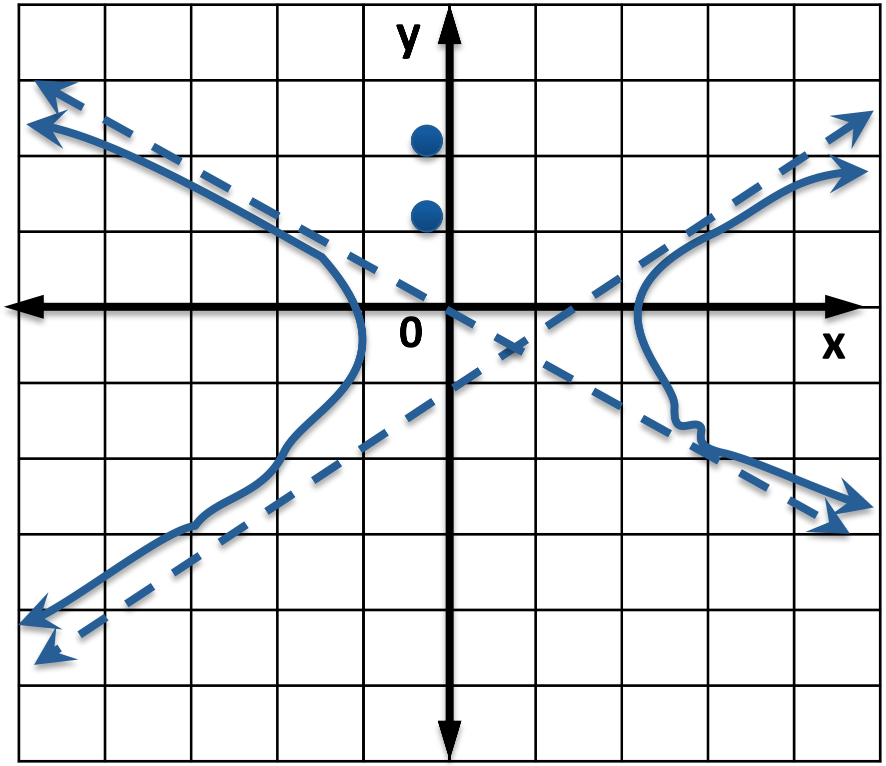
الاتجاه : أفقي

المركز : $(1, -2)$

الرأسان $(-2, -2), (4, -2)$

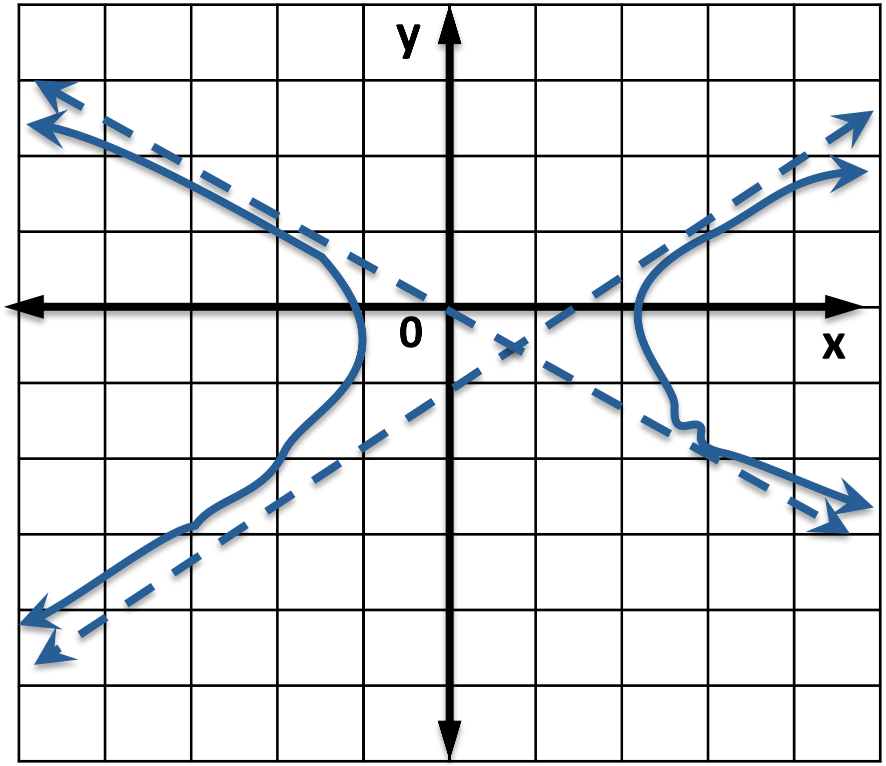
البؤرتان : $\left(1 \pm \sqrt{13}, -2\right)$

خطا التقارب : $y + 2 = \pm \frac{2}{3}(x - 1)$



$$2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0 \quad \text{(2B}$$

$$\frac{(x-3)^2}{27} - \frac{y^2}{18} = 1$$



الاتجاه : أفقي

المركز : $(1,-2)$

الرأسان : $(-2,-2),(4,-2)$

البؤرتان : $\left(1\pm\sqrt{13},-2\right)$

خطا التقارب : $y+2=\pm\frac{2}{3}(x-1)$

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافية.

مثال 3

كتابة معادلة قطع زائد إذا علمت بعض خصائصه

a) الرأسان: (2 ,3-) ,(6- ,3-) ، والبؤرتان (3 ,3-) ,(7- ,3-).

بما أن إحداثيّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي، أوجد المركز وقيم a, b, c.

المركز $\left(-3,-2\right)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين

$a=4$ المسافة بين أي من الرأسين و المركز

$c=5$ المسافة بين أي من البؤرتين و المركز

$b=3$ $c^2=a^2+b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 لذا معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{(y+2)^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$$

b) الرأسان $(-9, 0), (-3, 0)$، وخطا التقارب $y = 2x - 12, y = -2x + 12$

بما أن إحداثيّي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي .

المركز $(-6,0)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين و المركز

ميلا خطي التقارب $\pm\frac{b}{a}$ ، استعمل الميل الموجب لتجد b

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $a = 3$

$b = 6$ بالتبسيط

بما إن المحور القاطع أفقي ، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2

لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

تحقق من نفسك

3A) الرأسان $(3,2),(3,6)$ و طول المحور المرافق 10 وحدات .

$$\frac{(y-4)^2}{4}+\frac{(x-3)^2}{25}=1$$

3B) البؤرتان $(2,-2),(12,2)$ وخط التقارب $y=\frac{3}{4}x-\frac{29}{y}=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$

$$\frac{(x-7)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$$

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e=\frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكّر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع

مثال 4

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48}+\frac{(x+5)^2}{36}=1$

حدّد أولاً قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2=a^2-b^2$ العلاقة a , b , c

$e=\frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$c^2=48-36$

$a^2=48, b^2=36$

$e=\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$

$a=\sqrt{48}, c=\sqrt{84}$

$c=\sqrt{84}$ بالتبسيط

≈ 1.32 بالتبسيط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من نفسك

4A) $$\frac{(y+8)^2}{64}+\frac{(y-4)^2}{80}=1$$

1.5

4B) $$\frac{(y-2)^2}{15}+\frac{(x+9)^2}{75}=1$$

2.45

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد .

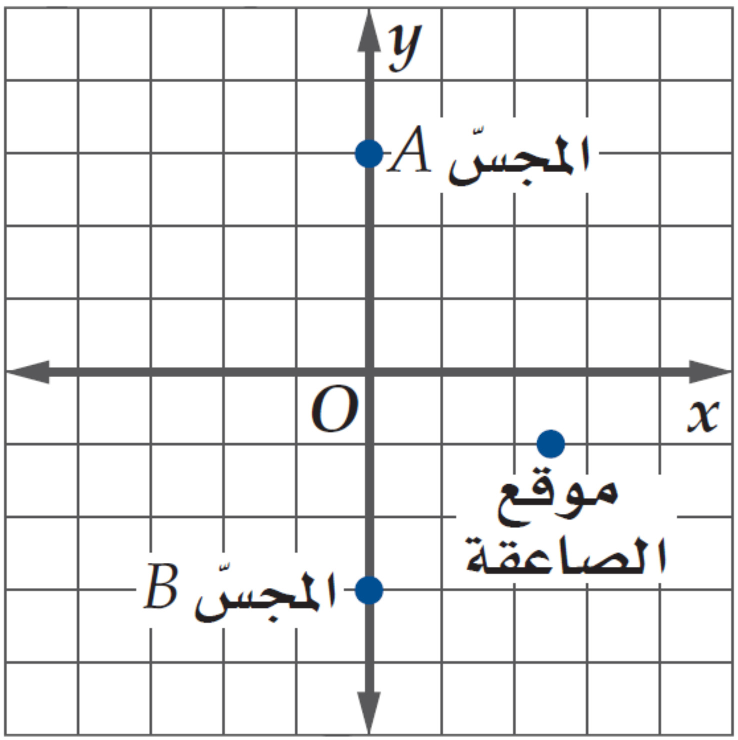
تطبيقات علي القطع الزائد

مثال 5 من واقع الحياة

أرصاد : يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسمين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6km، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B. ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5km على بعده عن المجسّ B.

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.

حدّد موقع المجسَّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف العلاقة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسّين، وأقرب إلى المجس B، فإن موقعها في الربع الرابع. المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا c = 3، تذكّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو 2a، وبما أن بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5km على بعدها عن المجس B، فإن 2a = 1.5 أي أن a= 0.75.
استعمل قيمتي a و c لتجد b.

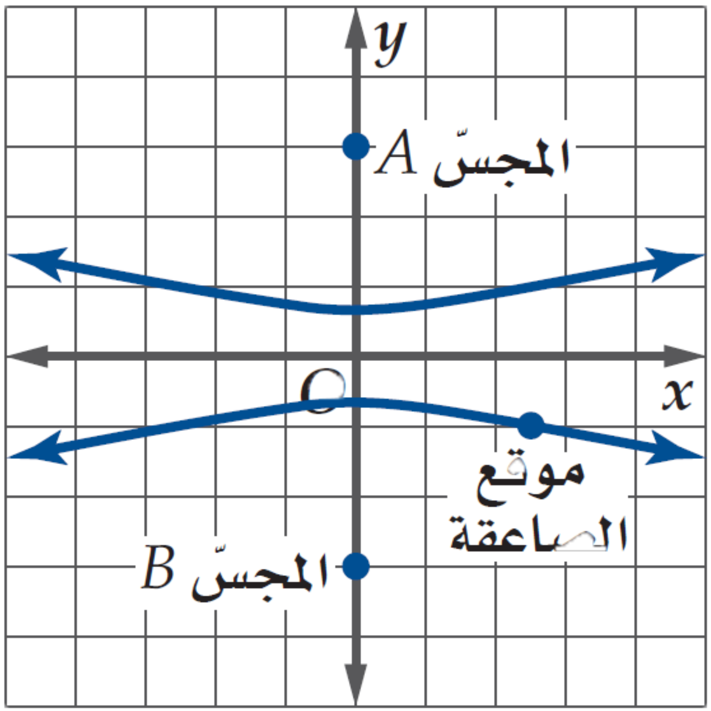


العلاقة a , b , c $\quad c^2 = a^2 - b^2$

$c = 3, a = 0.75 \quad c^2 = 0.75^2 - b^2$

بالتبسيط $\quad 8.4375 = b^2$

المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل، لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



و عند التعويض قيمتي a^2, b^2

تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$

b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين .

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5km شرق المجسين فإن x = 2.5، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي، عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y.

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$$

المعادلة الأصلية

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1$$

$x = 2.5$

$$y \approx -0.99$$

بالحل بالنسبة لـ y

قيمة y هي 0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة (2.5, -0.99).

تحقق من نفسك

4) ملاحة البحرية : تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلاً بحريًّا.

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين (100, 0) , (-100, 0).

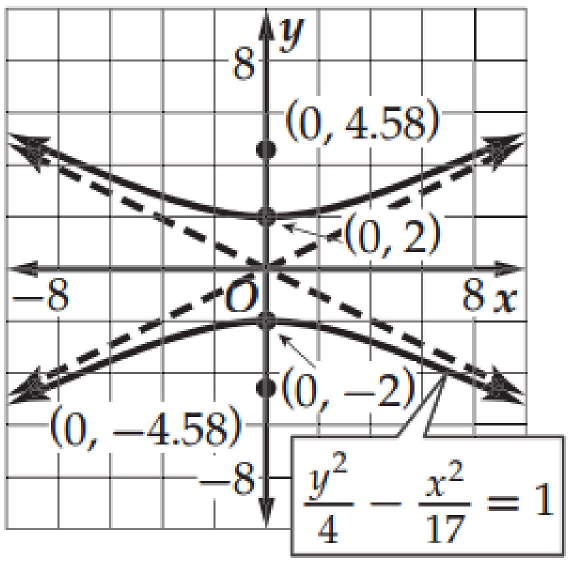
$$\frac{x^2}{1600}-\frac{y^2}{8400}=1$$

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها (100, 0).

$$(40,0)$$

حدد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

(1 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$



الاتجاه: رأسي

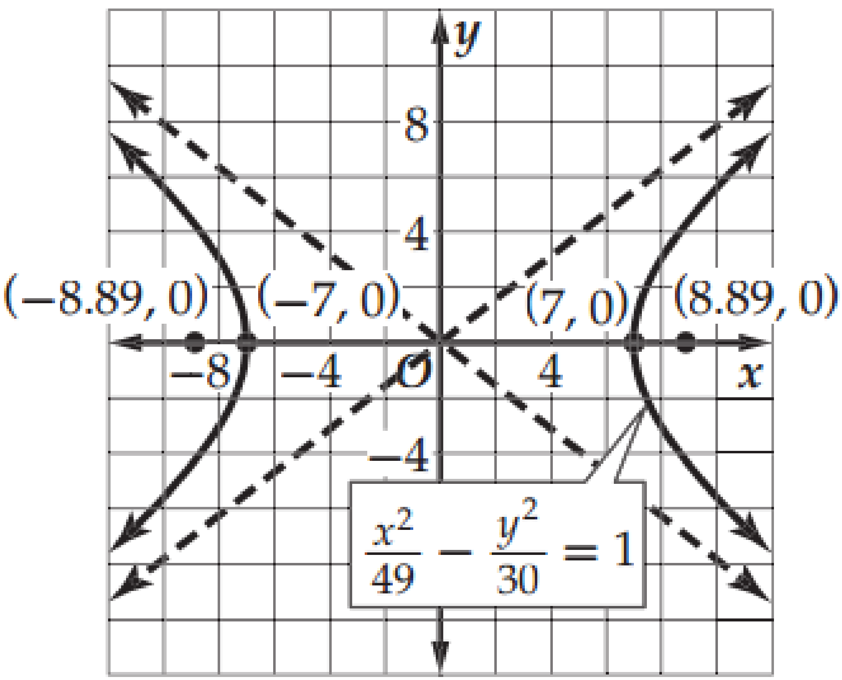
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0, \mp 2)$

البؤرتان: $(0, \mp \sqrt{21})$

خطا التقارب: $y = \mp 2\frac{\sqrt{17}}{17}x$

$$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1 \quad (2$$



الاتجاه: أفقي

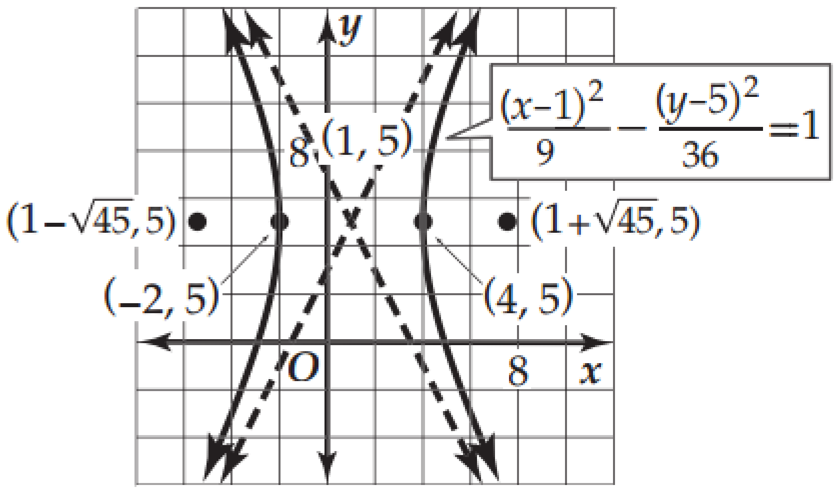
المركز: $(0,0)$؛

الرأسان: $(\mp 7, 0)$

البؤرتان: $(\mp \sqrt{79}, 0)$

خطا التقارب: $y = \mp \frac{\sqrt{30}}{7} x$

3) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{21} = 1$



الاتجاه: أفقي

المركز: $(1,5)$

الرأسان: $(4, 5), (-2, 5)$

البؤرتان: $(1+\sqrt{45}, 5), (1-\sqrt{45}, 5)$

خطا التقارب: $y-5 = \mp 2(x-1)$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{14} = 1 \quad (4$$

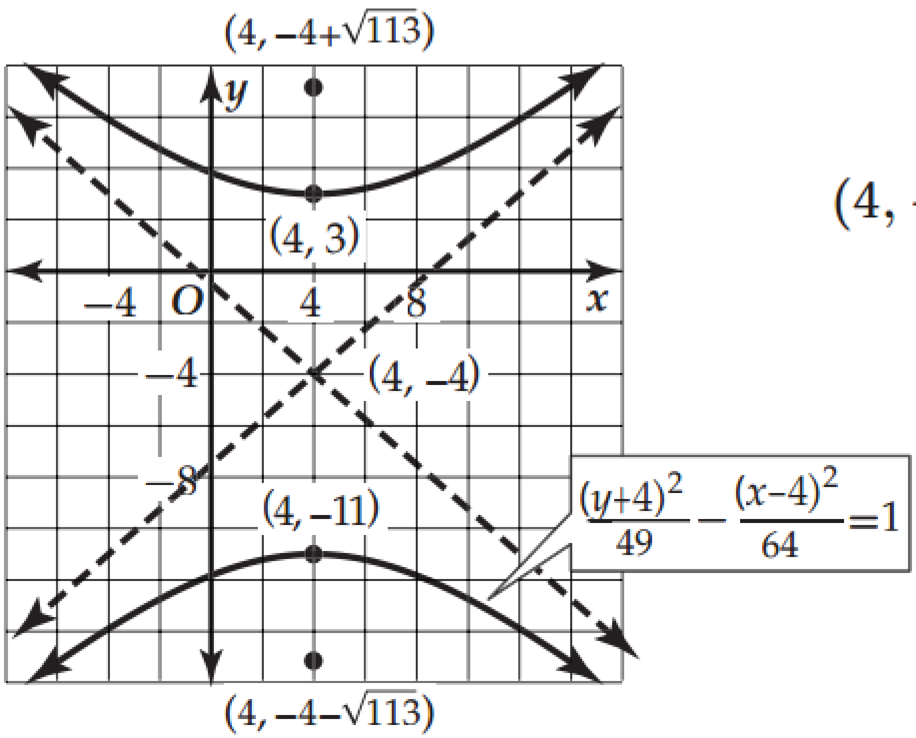
الاتجاه: رأسي

المركز: $(4,-4)$

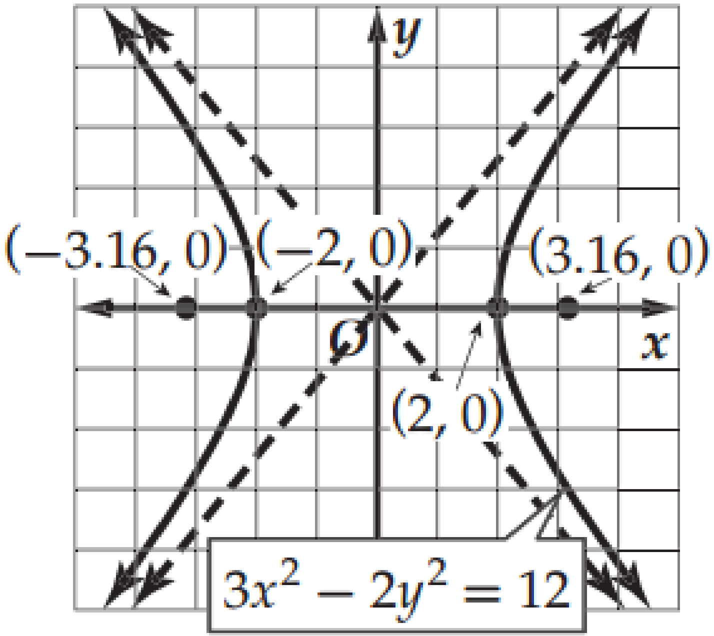
الرأسان: $(4, 3), (4, -11)$

البؤرتان: $(4, -4 + \sqrt{113}), (4, -4 - \sqrt{113})$

خطا التقارب: $y + 4 = \mp \frac{8}{7}(x - 4)$



(5 $3x^2 - 2y^2 = 12$



الاتجاه: أفقي

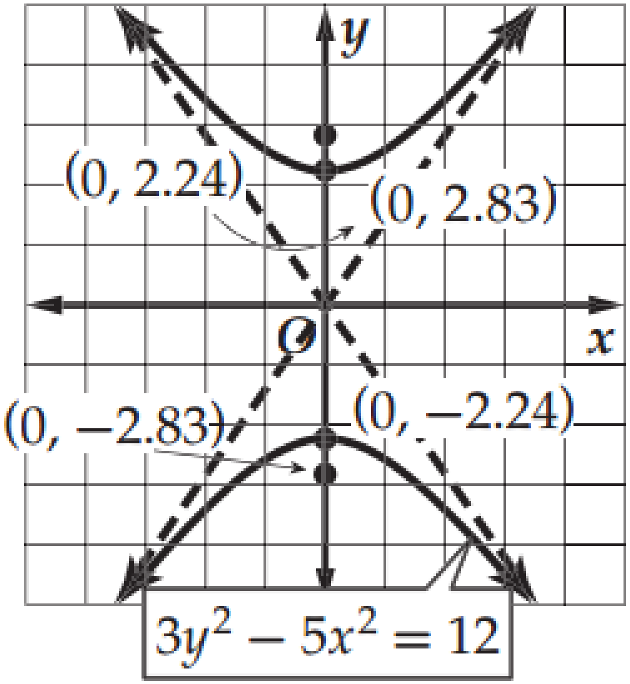
المركز: (0,0)

الرأسان: $(\mp 2, 0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{10}, 0)$

خطا التقارب: $y = \mp \dfrac{\sqrt{6}}{2} x$

(6 $3y^2 - 5x^2 = 15$



الاتجاه: رأسي

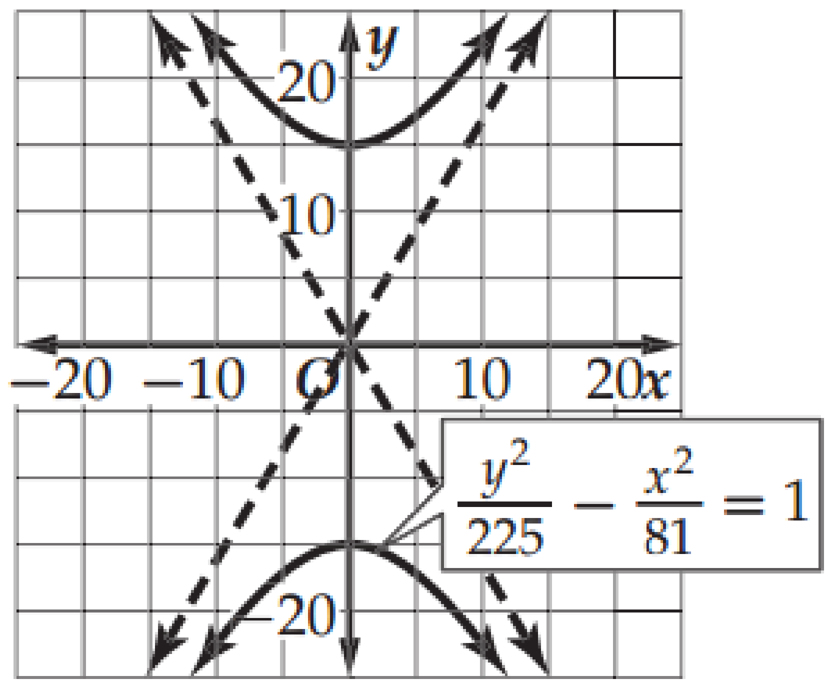
المركز: $(0,0)$

الرأسان: $(0, \mp\sqrt{5})$

البؤرتان: $(0, \mp 2\sqrt{2})$

خطا التقارب: $y = \mp \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

7) إضاءة: يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1)



اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2)

(8 $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

$$\frac{(x-3)^2}{32} - \frac{(y+1)^2}{8} = 1$$

الاتجاه: أفقي

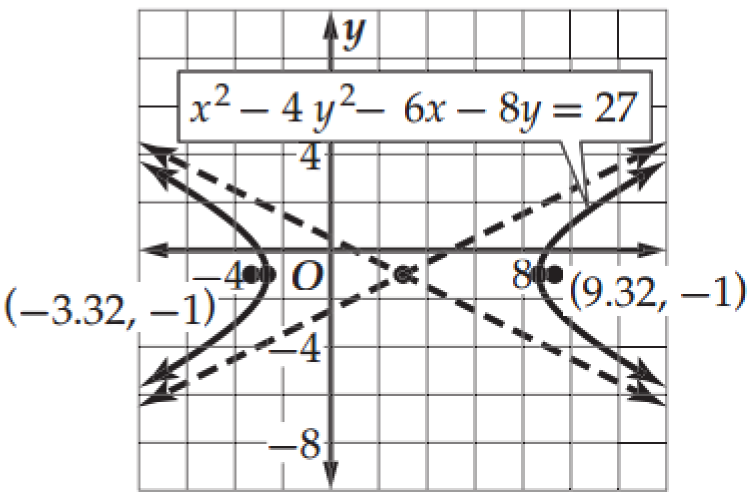
المركز: $(3, -1)$

الرأسان: $(3 \mp 4\sqrt{2}, -1)$

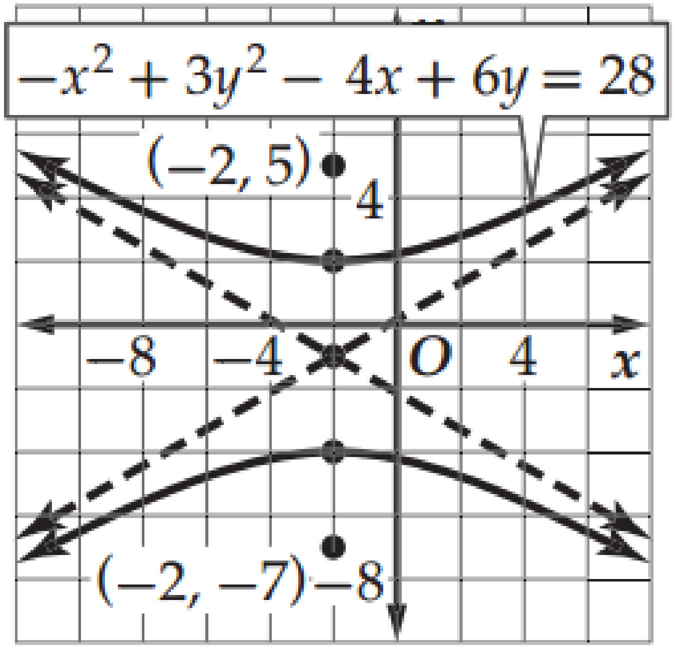
البؤرتان: $(3 \mp 2\sqrt{10}, -1)$

خطا التقارب:

$$y + 1 = \mp \frac{1}{2}(x - 3)$$



(9 $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$



$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{27} = 1$$

الاتجاه: رأسي

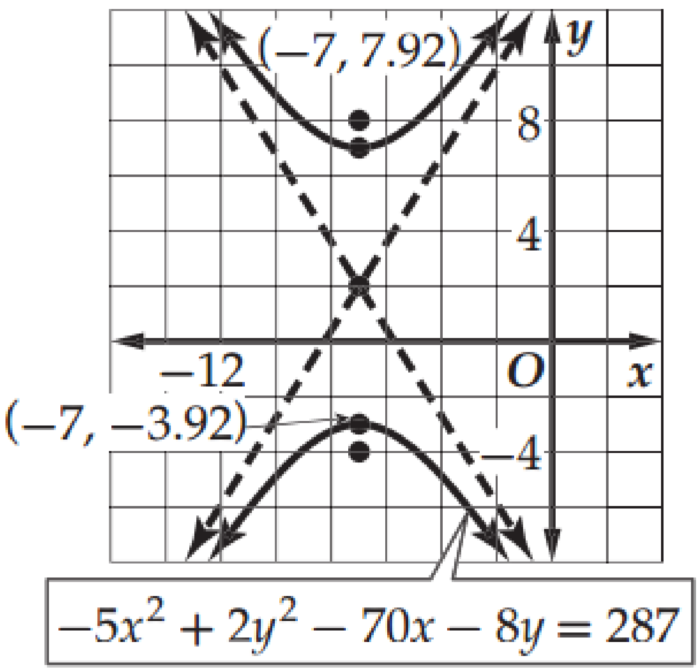
المركز: $(-2,-1)$

الرأسان: $(-2,-4)$, $(-2,2)$

البؤرتان: $(-2,-7)$, $(-2,5)$

خطا التقارب: $y + 1 = \mp \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$

$-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$ **(10**



$$\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+7)^2}{10} = 1$$

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-7, 2)$

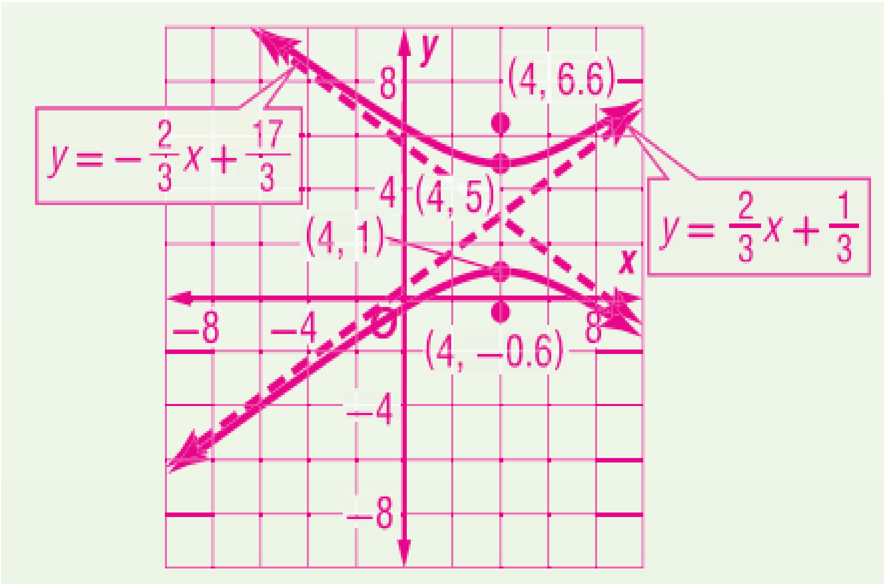
الرأسان: $(-7, 7)$, $(-7, -3)$

البؤرتان: $(-7, 2 \mp \sqrt{35})$

خطا التقارب:

$$y - 2 = \mp \frac{\sqrt{10}}{2}(x + 7)$$

$9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$ **(11**



$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

الاتجاه: رأسي

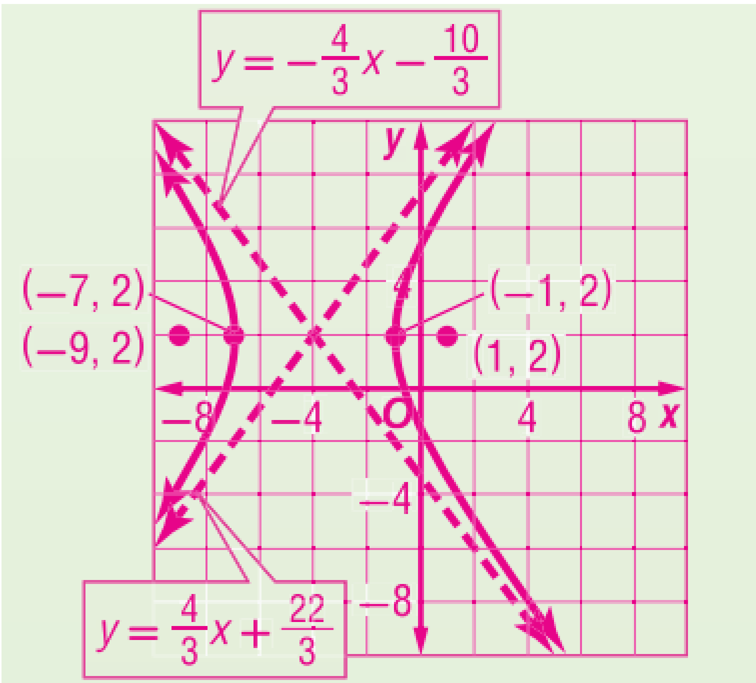
المركز: $(4, 3)$

الرأسان: $(4, 1)$, $(4, 5)$

البؤرتان: $(4, 3 \pm \sqrt{13})$

خطا التقارب $y - 3 = \pm \frac{2}{3}(x - 4)$

$$16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0 \quad (12$$



$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4, 2)$

الرأسان: $(-1, 2), (-7, 2)$

البؤرتان: $(-9, -2), (+1, 2)$

خطا التقارب $y-2 = \pm \frac{4}{3}(x+4)$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

13) البؤرتان $(-1, -7)$, $(-1, 9)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

$$\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$$

14) الرأسان $(-5, 5)$, $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$, $(11, 5)$.

$$\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1$$

15) الرأسان $(-1, 3)$, $(-1, 9)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$

$$\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$$

16) البؤرتان $(-17, 7)$, $(9, 7)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

$$\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$$

17) المركز $(-7, 2)$، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

$$\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{49} = 1$$

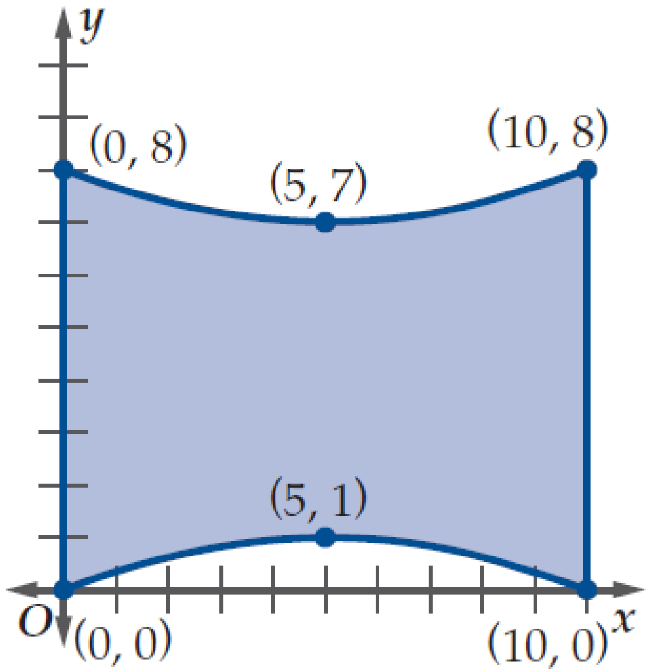
18) الرأسان $(2, -2)$, $(2, 10)$، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1$$

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-1, -2)$, $(13, -2)$.

$$\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1$$

20) **هندسة معمارية :** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثل فرعي المنحنى في الشكل.

$$\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{\frac{225}{7}} = 1$$

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 15 ft . فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

90 ft

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

21) $\frac{(y-1)^2}{10} - \frac{(x-6)^2}{13} = 1$

1.52

22) $\frac{(x+4)^2}{24} - \frac{(y+1)^2}{15} = 1$

1.27

23) $\frac{(x-3)^2}{38} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$

1.06

24) $\frac{(y+2)^2}{32} - \frac{(x+5)^2}{25} = 1$

1.33

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

1.58

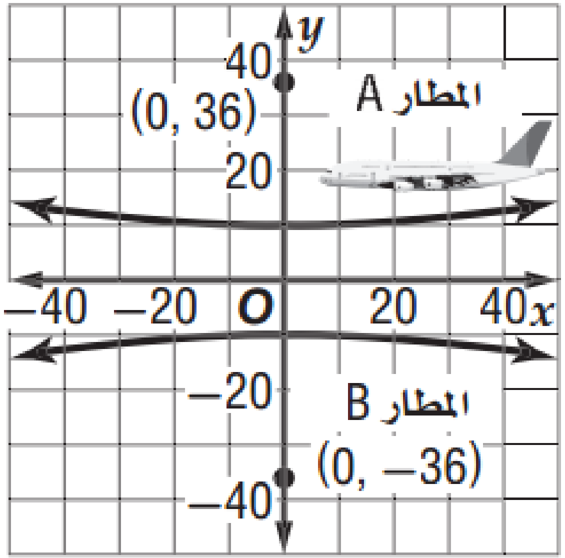
26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

2.83

27) **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

$$\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1$$



b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

(40,13.7)

28) هندسة معمارية: يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو $8\,\text{m}$، فما معادلة القطع الزائد؟

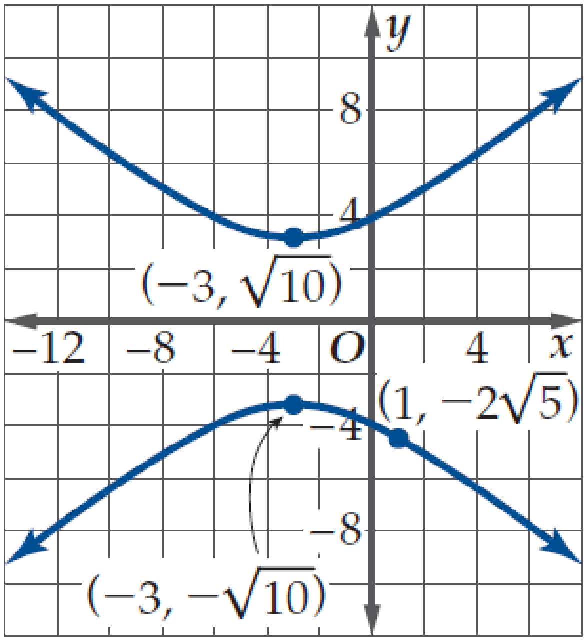
$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{5760}=1$$

b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو $32\,\text{m}$، وانخفاض القاعدة عن المركز هو $76\,\text{m}$، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

نصف قطر القمة 4.3 م تقريبًا
نصف قطر القاعدة 5.7 م تقريبًا

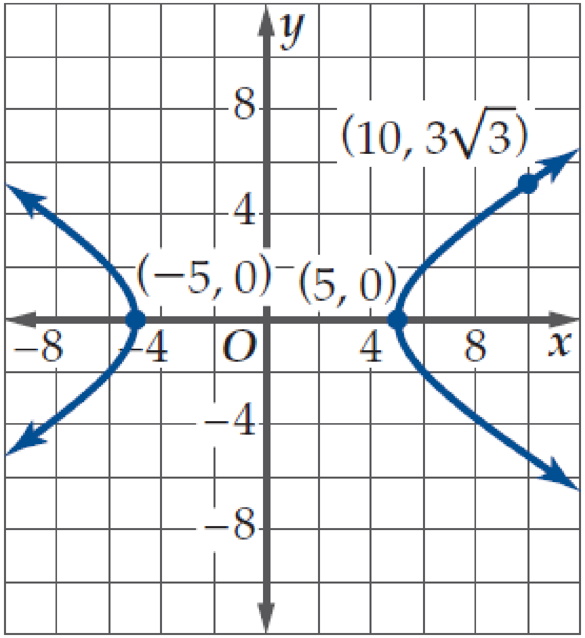
اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًّا في كل مما يأتي:

(29



$$\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$$

(30

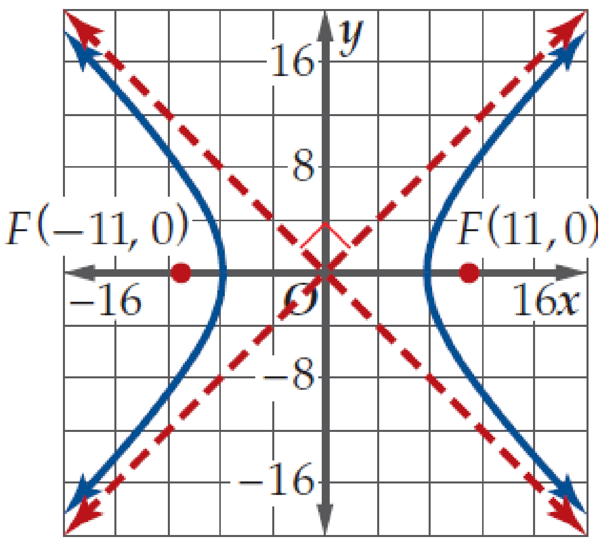


$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$$

31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec ، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec ، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

$$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$$

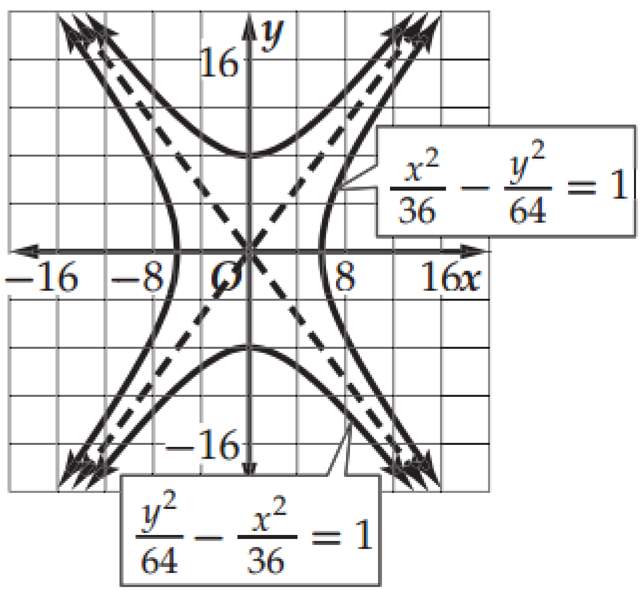
32) يتشكل القطع الزائد المتساوي الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد الممثل بيانيًّا أدناه.



$$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$$

33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًا:** مثِّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.



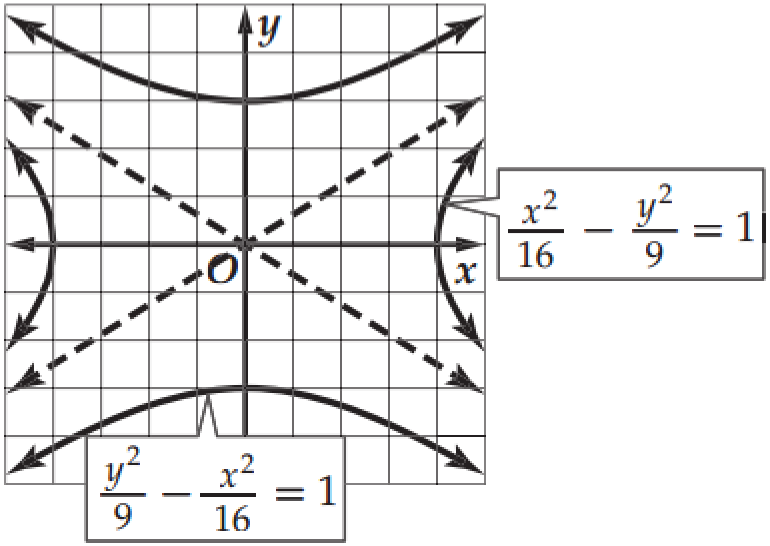
b) **تحليليًّا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

البؤرتان للمنحنى الأول هما:
$(-10, 0)$ و $(10, 0)$. والبؤرتان للمنحنى الثاني هما $(0, -10)$
و $(0, 10)$. والرأسان للمنحنى الأول هما: $(-6, 0)$ و $(6, 0)$.
والرأسان للمنحنى الثاني هما: $(0, -8)$ و$(0, 8)$. والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

c) **تحليليًّا :** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

d) **بيانيًا:** مثل منحنيي القطعين.



e) **لفظيًا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

إجابة ممكنة: القطعان الزائدان المترافقان لهما نفس خطوط التقارب، ولهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين في كلٍّ منهما.