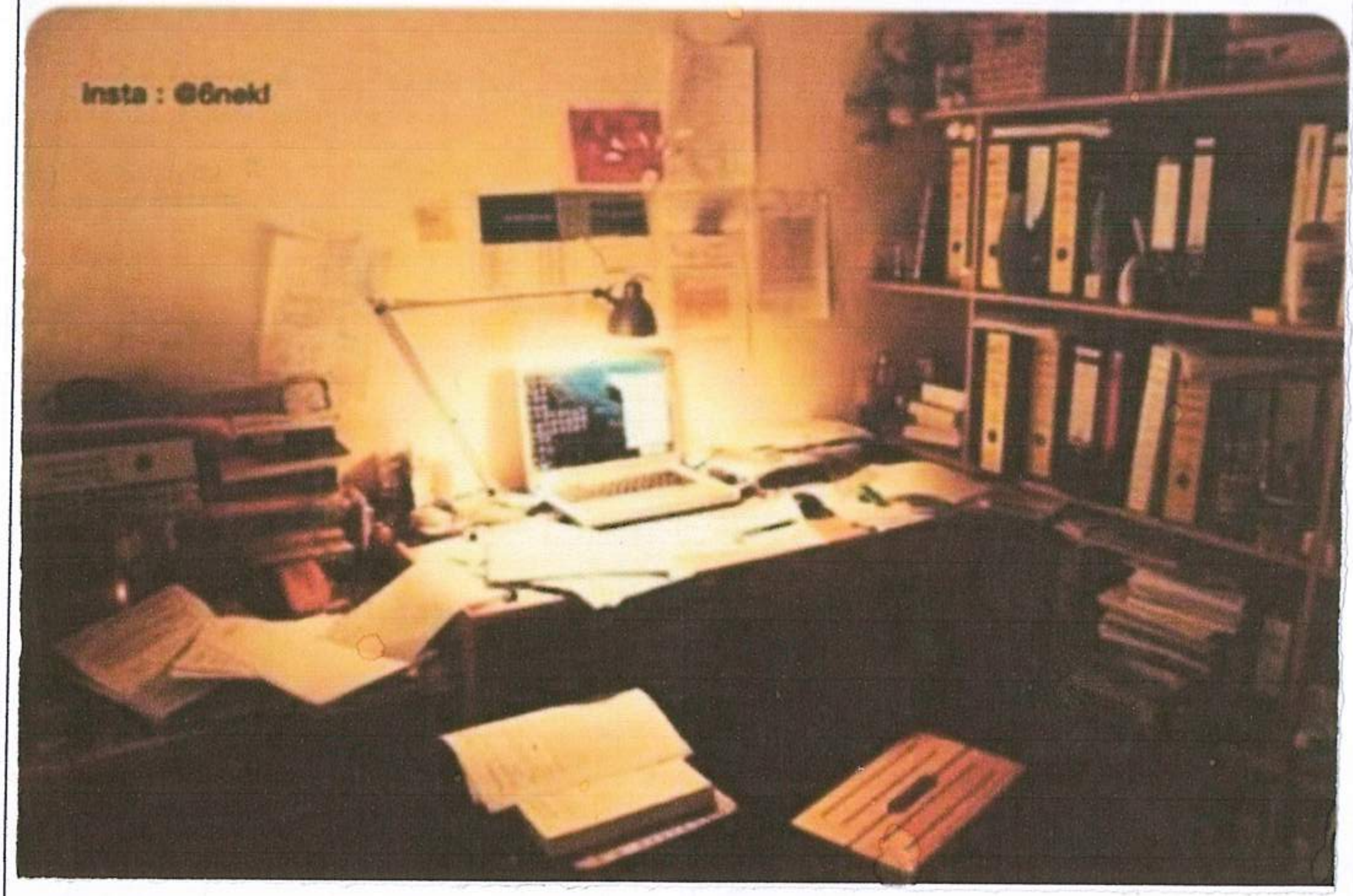
القسم: الوحدة:

- متتاليات + نهاية مثالية -

أوراق ذهبية .

قم فلا وقت للخيبة ،هناك جميل ينتظرك فاسعى إليه ،قم واكسر كل شعور سيء داخلك ،لم تخلق نفسك لتعذبها ،خلقت لتكون داعماً لها في صنع المستحيل ،فكن ذا أثر!

أنا لها .



عن العقبات إذ زادت فزالت ... عن الأزمان إذ شئت فلانت

هي الدنيا .. تقاسيها فتقسو ..... وإن هونتها بالإيمان هانت

للتواصل: 0991070187

متتاليات ♥ نهاية متتالية

* تصنيف المتتاليات:

⬅ حسب التعريف:

أ- إعطاء الحد العام: $U_n = f(n)$

ب- إعطاء علاقة تدرجية: $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = bU_n + c \end{cases}$

⬅ حسب الاسم:

أ- حسابية: كل حد ينتج عن الحد الذي قبله بعد إضافة عدد ثابت يسمى أساس المتتالية.
$U_{n+1} = U_n + r$

ب- هندسية: كل حد ينتج عن الحد الذي قبله بعد ضربه بعدد ثابت.
$U_{n+1} = U_n . q$

ج- ثابتة: كل حد يساوي الحد الذي قبله.
$U_{n+1} = U_n$

⬅ حسب الاطراد:

أ- متزايدة: كل حد أكبر من الحد الذي قبله
$U_{n+1} > U_n$

ب- متناقصة: كل حد أصغر من الحد الذي قبله
$U_{n+1} < U_n$

⬅ حسب المحدودية:

أ- من الأعلى: كل الحدود أصغر من عدد
$U_n < M$ (M عنصر راجح)

ب- من الأدنى: كل الحدود أكبر من عدد
$U_n > m$ (m عنصر قاصر)

ج- محدودة: $a < U_n < b$.

⬅ حسب التقارب:

أ- متقاربة: نهايتها عدد: $\lim_{n\to\infty} U_n = a$

ب- متباعدة: نهايتها لانهاية: $\lim_{n\to\infty} U_n = \infty$

المتتالية الحسابية:

• لإثبات أن المتتالية حسابية:
$U_{n+1} - U_n \overset{?}{=} r$

• المجموع: $S = \dfrac{n(a+l)}{2}$

حيث: S: المجموع

n: عدد الحدود

l: الحد الأخير في المجموع

a: الحد الأول في المجموع

حالة خاصة:

$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \dots + \frac{n}{2}$

نضرب الطرفين بـ 2 لنتخلص من المقام ثم نطبق القانون على الطرف الثاني:

$2S = 1 + 2 + \dots + n$

ولا ننسى نقسم على 2.

• خاصية الأوساط الحسابية: a و b و c ثلاث حدود متوالية من متتالية حسابية فهي تحقق:
$a + c = 2b$

أو $b = \dfrac{a+c}{2}$

المتتالية الهندسية

• إثبات أن المتتالية هندسية:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \overset{?}{=} q$$

• المجموع:

$$S = a.\frac{1-q^n}{1-q}$$

حيث: q: أساس المتتالية

n: عدد الحدود

a: الحد الأول في المجموع.

• حالة خاصة:

$$S_n = 1+q+q^2+\dots+q^n$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

• خاصية الأوساط الهندسية:

$$b^2 = a.c$$

• كيف نوجد عدد الحدود n؟؟

لحساب عدد الحدود لدينا حالتين:

① الحدود متتالية:

$$n = i - j + 1$$

" الدليل الأخير - الدليل الأول + واحد "

② هناك قفزة بين الحدود مقدارها b.

$$n = \frac{i-j}{b} + 1$$

" الدليل الأخير - الدليل الأول ÷ مقدار القفزة + واحد ".

* قانون هام:

في المتتالية الحسابية: $U_m = U_p + (m-p).r$

في الهندسية: $U_m = U_p . q^{m-p}$

الاستخدامات:

1- كتابة عبارة U_n بدلالة n.

2- تعيين أساس المتتالية.

3- إيجاد أي حد من حدود المتتالية.

دراسة الاطراد:

طرق دراسة الاطراد:

(أ) دراسة إشارة الفرق: "في حالة الكسر"

نحسب U_{n+1} ثم نحسب $U_{n+1}-U_n$ لدينا حالتين:

أ- $U_{n+1}-U_n>0 \Leftarrow U_n$ متزايدة.

ب- $U_{n+1}-U_n<0 \Leftarrow U_n$ متناقصة.

(ب) المقارنة: نشكل النسبة: $\frac{U_{n+1}}{U_n}$

لدينا حالتين: "في حالة وجود n في الأس".

أ- $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1 \Leftarrow U_n$ متزايدة.

ب- $\frac{U_{n+1}}{U_n}<1 \Leftarrow U_n$ متناقصة.

الاستقراء الرياضي:

* خطوات الإثبات:

① نثبت صحة القضية من أجل $n=n_0$ "إما 0 أو 1"

② نفرض صحة القضية من أجل n ونثبت صحتها من أجل $n+1$.

أشكال السؤال:

① علاقة رياضية:

EX: $1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

② متراجحة:

EX: $(1+x)^n \geq 1+nx$

③ جمل مضاعفات:

EX: 3^n-1 مضاعف للعدد 2.

كتابة عبارة u_n بدلالة n:

← متتالية هندسية: من القانون العام.

← متتالية حسابية: من القانون العام.

← تآلفية: $\begin{cases} u_0=a \\ u_{n+1}=bu_n+c \end{cases}$

لدينا طريقتين:

الطريقة العامة: الخطوات:

① نفرض $u_{n+1}=f(u_n)$ ثم نبدل مكان u_n بـ x ← $f(x)=bx+c$

② نحل المعادلة $f(x)=x$ والحل "l"

③ نفرض متتالية جديدة: $v_n=u_n-l$ ونثبت أنها هندسية ثم نكتب عبارة v_n بدلالة n

④ نستنتج أن: $u_n=v_n+l$

الطريقة الثانية: القانون:

$$u_n=b^n\left(u_0-\frac{c}{1-b}\right)+\frac{c}{1-b}$$

ثم نثبت صحة العلاقة بالاستقراء الرياضي.

المتتاليتان المتجاورتان

هما متتاليتان تحققان:

① إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

② نهاية الفرق = الصفر. $\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$

③ لهما نفس النهاية.

Note: • كل متتالية محدودة من الأدنى متناقصة فهي متقاربة.

• كل متتالية محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة.

Note$_2$: المتتالية الهندسية التي أساسها q نهايتها حسب قيمة q.

* $q>1$: $\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$ والمتتالية متباعدة.
* $-1<q<1$: $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ والمتتالية متقاربة.
* $q<-1$: ليس للمتتالية نهاية وهي غير مطردة.

التمثيل الهندسي لحدود المتتالية u_n:

نتبع الخطوات:

① نرسم الخط البياني للتابع f الممثل للمتتالية.

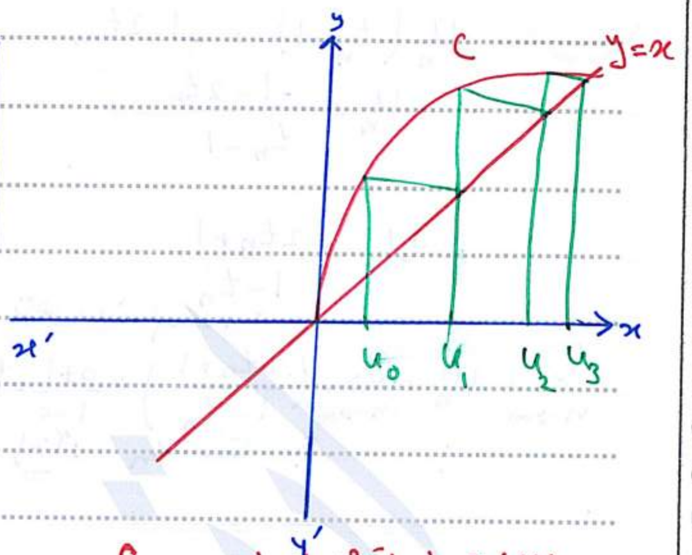
② نرسم المستقيم $y=x$ (منصف الربعين الأول والثالث)

③ نحدد على محور الفواصل الحد الأول u_0

④ من u_0 (نرسم مستقيم شاقولي ← الخط C) ونرسم مستقيم أفقي ← المستقيم $y=x$ (نرسم مستقيم شاقولي) ← على محور الفواصل u_1.

⑤ نعيد الخطوات السابقة لنحصل على حدود المتتالية.

القسم: الوحدة:



* ما الفائدة من التمثيل الهندسي ؟

1. معرفة جهة الاطراد.
2. معرفة محدودية المتتالية.
3. تحديد نهاية المتتالية.
4. تقارب المتتالية.

- انتهى القسم النظري -

ـ ماذا لو...

ماذا لو كان الذي تحلم به مقدر لك؟؟!

ماذا لو استسلمت وتغير هذا القدر

باستسلامك ؟!

تمسك بحلمك ... تمسك به ليكتمل واعمل

لأجله ... يكن ♥.

~

حتى وإن بدت السماء بعيدة

إن الذي فوق السماء قريب

فارفع يديك إلى الإله مناجياً

إن الجروح مع الدعاء تطيب

ما ضرنا بُعد السماء وإن علت...

ما دمتَ يارب السماء

قريب.

مسائل شاملة في المتتاليات

المسألة الأولى:

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n+1} \end{cases}$$

1. أثبت أن $u_n > 0$ أياً يكن n.
2. المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية. واحسب نهايتها
3. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

1. نفرض $E(n)$: « $u_n > 0$ »

• نثبت صحة القضية من أجل $n=0$:

$u_0 = 3 > 0 \Rightarrow E(0)$ صحيحة

• نفرض صحة القضية من أجل n:

« $u_n > 0$ » صحيحة

• ونثبت صحة القضية من أجل $n+1$:

$u_{n+1} \overset{?}{>} 0$

لدينا: $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n+1}$

لدينا: $u_n > 0 \Rightarrow u_n + 1 > 0$

$\dfrac{2}{u_n+1} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \Rightarrow E(n+1)$ صحيحة.

$\Rightarrow u_n > 0$ مهما تكن n من $\mathbb{N}$.

2. حتى تكون $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية يجب أن يتحقق: $t_{n+1} \div t_n = q$

نحسب t_{n+1}:

للتواصل: 0991070187

$$t_n = \frac{U_n-1}{U_n+2} \Longrightarrow t_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}$$

$$= \frac{\frac{2}{U_n+1}-\frac{1}{1}}{\frac{2}{U_n+1}+\frac{2}{1}} = \frac{\frac{2-U_n-1}{U_n+1}}{\frac{2+2U_n+2}{U_n+1}}$$

$$= \frac{1-U_n}{4+2U_n} = \frac{-(U_n-1)}{2(U_n+2)}$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{U_n-1}{U_n+2}$$

$$\Longrightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{U_n+2}\right)}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = -\frac{1}{2} = q$$

- المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=-\frac{1}{2}$
- عبارة t_n بدلالة n:

$$t_n = t_0 \cdot q^n$$

$$t_n = \left(\frac{U_0-1}{U_0+2}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$t_n = \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} t_n = 0 \quad :$$

لأنه $-1 < q = -\frac{1}{2} < 1$

③ نوجد عبارة U_n بدلالة n:

لدينا: $\frac{t_n}{1} = \frac{U_n-1}{U_n+2}$

$$t_n \cdot U_n + 2t_n = U_n - 1$$

$$t_n U_n - U_n = -1-2t_n$$

$$U_n(t_n-1) = -1-2t_n$$

$$U_n = \frac{-1-2t_n}{t_n-1}$$

$$U_n = \frac{2t_n+1}{1-t_n}$$

تنتهي عند $+\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2t_n+1}{1-t_n}\right) = \frac{0+1}{1-0} = 1$$

إذاً: U_n متقاربة.

المسألة الثانية:

تأمل المتتاليتين $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين تدريجياً وفق:

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = \frac{t_n+2S_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} S_0 = 12 \\ S_{n+1} = \frac{t_n+3S_n}{4} \end{cases}$$

① أثبت أن المتتالية $(S_n-t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها.

② أثبت أن المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متجاورتين.

③ أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $U_n = 3t_n + 8S_n$ ثابتة.

④ استنتج النهاية المشتركة لـ $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$.

الحل:

① نفرض $(h_n)_{n\geq 0}$ متتالية: $h_n = S_n - t_n$

نحسب h_{n+1}: $h_{n+1} = S_{n+1} - t_{n+1}$

$$= \frac{t_n+3S_n}{\underset{(3)}{4}} - \frac{t_n+2S_n}{\underset{(4)}{3}}$$

$$= \frac{3t_n+9S_n-4t_n-8S_n}{12}$$

$$= \frac{S_n-t_n}{12} = \frac{1}{12}(S_n-t_n)$$

للتواصل: 0991070187

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{\frac{1}{12}(S_n - t_n)}{S_n - t_n} = \frac{1}{12} = q$$

⇐ المتتالية $(h_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$

. نهاية h_n : $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$

لأن $-1<q=\frac{1}{12}<1$

② لدينا حسب الطلب السابق:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - h_n) = 0$$

فالشرط الأول محقق.

. ندرس اطراد المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$:

$$S_{n+1} - S_n = \frac{t_n+3S_n}{4} - \frac{S_n}{1}$$

$$= \frac{t_n+3S_n-4S_n}{4} = \frac{-(S_n-t_n)}{4} < 0$$

لأن $S_n > t_n$ «من البداية $S_0>t_0$»

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

. ندرس اطراد المتتالية $(t_n)_{n\geq0}$:

$$t_{n+1}-t_n = \frac{t_n+2S_n}{3} - \frac{t_n}{1}$$

$$= \frac{t_n+2S_n-3t_n}{3} = \frac{2(S_n-t_n)}{3} > 0$$

فالمتتالية متزايدة.

فالشرط الثاني محقق.

⇐ $(S_n)_{n\geq0}$ و $(t_n)_{n\geq0}$ متجاورتين.

③ لإثبات أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ ثابتة

يجب إثبات أن $u_{n+1} = u_n$.

$$u_{n+1} = 3t_{n+1} + 8S_{n+1}$$

$$= \cancel{3}\left(\frac{t_n+2S_n}{\cancel{3}}\right) + \cancel{8}^{2}\left(\frac{t_n+3S_n}{\cancel{4}}\right)$$

$$= t_n + 2S_n + 2t_n + 6S_n$$

$$= 3t_n + 8S_n$$

$u_{n+1} = u_n \Rightarrow$ $(u_n)_{n\geq0}$ ثابتة.

④ لدينا: $u_n = 3t_n + 8S_n$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(3t_n + 8S_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 3t_n + \lim_{n\to\infty} 8S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3\lim_{n\to\infty} t_n + 8\lim_{n\to\infty} S_n$$

وبما أن S_n و t_n متجاورتين فلهما النهاية ذاتها.

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \ell$$

ولدينا كذلك u_n ثابتة ⇐

$$u_n = u_1 = u_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = u_0$$

$$\Rightarrow u_0 = 3\ell + 8\ell$$

$$3t_0 + 8S_0 = 11\ell$$

$$99 = 11\ell \Rightarrow \ell = 9$$

وهي النهاية المشتركة.

المسألة الثالثة:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$

① ادرس اطراد المتتالية.

② أثبت أن العدد 3 راجح على $(u_n)_{n\geq0}$.

③ احسب $\lim_{n\to\infty} u_n$ ثم جد عدد طبيعي n_0 يحقق: أياً كان $n>n_0$ فإن u_n في المجال $]2.99, 3.01[$.

الحل:

① نشكل الفرق:

$$u_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{n+1+1}$$

$$= \frac{3n+3-1}{n+2} = \frac{3n+2}{n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1}$$

$(n+1)$ $(n+2)$

$$= \frac{3n^2+3n+2n+2-(3n^2+6n-n-2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{3n^2+5n+2-3n^2-5n+2}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{4}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$\Leftarrow$ فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

② حتى يكون العدد 3 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$ يجب أن يتحقق: $U_n < 3 \Leftarrow U_n - 3 < 0$.

$$U_n - 3 = \frac{3n-1}{n+1} - \frac{3}{1}$$

$$= \frac{3n-1-3n-3}{n+1}$$

$$= \frac{-4}{n+1} < 0$$

$U_n < 3 \Leftarrow U_n - 3 < 0 \Leftarrow$

فالعدد 3 عنصر راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$.

③ $\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{n+2}\right) = 3$

لدينا: $U_n \in]2.99, 3.01[\Leftarrow$

$$2.99 < U_n < 3.01$$

$$2.99 - 3 < U_n - 3 < 3.01 - 3$$

$$-0.01 < U_n - 3 < 0.01$$

$$|U_n - 3| < 0.01$$

$$\left|\frac{3n-1}{n+2} - 3\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{3n-1-3n-6}{n+2}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\left|\frac{-4}{n+1}\right| < \frac{1}{100}$$

$$\frac{4}{n+1} < \frac{1}{100}$$

$$\frac{n+1}{4} > 100$$

$$n+1 > 400$$

$$n > 399 \Rightarrow \boxed{n_0 = 399}$$

المسألة الرابعة "دورة 2019 ثانية"

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $U_n = \frac{2n-1}{n+1}$

والمطلوب:

① ادرس اطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$.

② أثبت أن العدد 2 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$.

③ احسب $\lim_{n\to\infty} U_n$، ثم عيّن عدد طبيعي n_0 يحقق: أيا يكن $n > n_0$ فإن: U_n من المجال $]1.9, 2.1[$.

المسألة الخامسة:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق:

$$U_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2^n}$$

① أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

② اكتب عبارة U_n بدلالة n، ثم احسب نهايتها.

③ استنتج تقارب المتتالية.

الحل:

نغير شكل المتتالية:

م.ع

$$U_n = 1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}$$

مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها

أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول : $a=\frac{1}{2}$

$$u_n = 1-\left(a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=1-\left(\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\cancel{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$=1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$=1-1+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow u_n=\frac{1}{2^n}$$

$$u_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}$$

طريقة (1): $u_{n+1}-u_n=\underset{(1)}{\frac{1}{2^{n+1}}}-\underset{(2)}{\frac{1}{2^n}}$

$$=\frac{1-2}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2^{n+1}}<0$$

⇐ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

طريقة (2): $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{2^n}{2^n\cdot2}$

$=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow$ متناقصة u_n

② $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$

③ نلاحظ أن العدد صفر هو عنصر حاد للمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ أي أن: $u_n>0$

فالمتتالية محدودة من الأدنى بالعدد صفر ومتناقصة فهي متقاربة.

المسألة السادسة: "دورة 2019 أولى"

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}$$

والمطلوب:

① أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

② أثبت أن $(S_n)_{n\geq0}$ تكتب بالشكل: $S_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$، وبيّن أنها متقاربة.

المسألة السابعة: "اختبار وزاري ثالث":

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية:

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n} \end{cases}$$

والمطلوب: ① أثبت أن $0<u_n<1$ مهما يكن n

② نعرف $(v_n)_{n\geq0}$ حيث: $v_n=\frac{1}{u_n}-1$ والمطلوب أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n.

③ اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim_{n\to\infty}u_n$.

④ احسب المجموع: $S=v_0+v_1+\dots+v_n$.

الحل:

① نفرض: « $0<u_n<1$ » : $E(n)$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$:

$0<u_0=\frac{1}{2}<1 \Rightarrow E(0)$ صحيحة.

② نفرض صحة القضية من أجل n :

" $0<u_n<1$ " صحيحة.

للتواصل: 0991070187

نثبت صحة القضية من أجل n+1:

$E(n+1): \; 0 < U_{n+1} < 1$

نغير شكل U_{n+1}: $\frac{U_n}{-U_n+2}$

$$\begin{array}{r|l} & -1 \\ \hline -U_n+2 & U_n \\ & \pm U_n \mp 2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = -1 + \frac{2}{2-U_n}$$

نبدأ من القضية الصحيحة "من الأمام"

$0 < U_n < 1$

$(-\times)$ $\quad 0 > -U_n > -1$

$(+2)$ $\quad 2 > 2-U_n > 1$

نعكس. $\quad \frac{1}{2} < \frac{1}{2-U_n} < 1$

$(\times 2)$ $\quad 1 < \frac{2}{2-U_n} < 2$

(-1) $\quad 0 < -1 + \frac{2}{2-U_n} < 1$

$0 < U_{n+1} < 1 \Rightarrow E(n+1)$ صحيحة.

$\Leftarrow$ $0 < U_n < 1$ صحيحة.

2) $v_n = \frac{1}{U_n} - 1$

$$v_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{U_n}{2-U_n}} - 1 = \frac{2-U_n}{U_n} - 1$$

$$= \frac{2-U_n-U_n}{U_n} = \frac{2-2U_n}{U_n} = \frac{2(1-U_n)}{U_n} = 2\left(\frac{1}{U_n}-1\right)$$

$\Rightarrow v_{n+1} \div v_n = 2 = q$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=2$.

عبارة v_n بدلالة n:

$v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

$v_n = \left(\frac{1}{u_0} - 1\right) \cdot 2^n$

$= (2-1) \cdot 2^n$

$\Rightarrow v_n = 2^n$

3) عبارة U_n بدلالة n:

$v_n = \frac{1}{U_n} - 1$

$v_n + 1 = \frac{1}{U_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{v_n+1} = \frac{1}{2^n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n+1}\right) = 0$$

4) $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$

عدد الحدود $n = 10 - 0 + 1 = 10 + 1 = 11$

$a = v_0 = 1$ & $q = 2$

$$\Rightarrow S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1$$

للتواصل: 0991070187

المسألة الثامنة: "دورة 2017 أولى"

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 2$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$v_n = u_n + 3$

(1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واوجد اساسها q.

(2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n.

(3) ليكن في حالة n عدد طبيعي:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

المسألة التاسعة: "دورة 2017 ثانية"

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(1) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

(2) أثبت أن: $0 < u_n < 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

(1) حتى تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة يجب أن يكون: $u_{n+1} < u_n \Leftarrow u_{n+1} - u_n < 0$

$* \ u_{n+1} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

نشكل الفرق:

$u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

طويل حل طريقة.

لكن لدينا:

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}}_{} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 0$$

الأصغر دوكل ما كبر المقام صغرت قيمته

$u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow (u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

(2) $E(n): \ll 0 < u_n < 1 \gg$

• يمكن إثباتها بالاستقراء الرياضي

• طريقة ثانية: لدينا:

$n + 1 > n$

$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$\Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0 \Rightarrow u_n > 0$

ومن جهة أخرى.

$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ (بعد الضرب والقسمة على المرافق)

$\Rightarrow u_n < 1$

$\Leftarrow 0 < u_n < 1$

مما سبق نجد أن المتتالية محدودة من الأدنى بالعدد صفر ومتناقصة فهي متقاربة

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

للتواصل: 0991070187

المسألة العاشرة:

لتكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفتان وفق:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

* أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين.

الحل:

* ندرس اطراد u_n:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}$$

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \underset{(1)}{\frac{1}{2(n+1)}} - \underset{(2)}{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1-2}{2(n+1)}$$

$$= \underset{2(n+1)}{\frac{1}{2n+1}} - \underset{(2n+1)}{\frac{1}{2(n+1)}}$$

$$= \frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}-1}{2(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

$\Leftarrow (u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

* ندرس اطراد v_n:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)(n+1)} + \frac{n-n-1}{n(n+1)}$$

$$= \underset{(n)}{\frac{1}{2(2n+1)(n+1)}} - \underset{2(2n+1)}{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{n-4n-2}{2n(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2n(2n+1)(n+1)} < 0$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

فالشرط الأول محقق.

لدينا:

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

فالشرط الثاني محقق.

فالمتتاليتان $(v_n)_{n\geq 1}$ و $(u_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

المسألة (11): "دورة 2018 أولى"

ليكن لدينا المتتاليتان: $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $(v_n)_{n\geq 1}$

المعرفتان وفق: $u_n = 5 - \frac{1}{n}$ ، $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$.

① أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

③ هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان؟ علل.

المسألة (12):

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية $(U_n)_{n\ge1}$ حيث: $(a>c)$

تحقق: $a+b+c=6$ —①

$a\cdot b^2\cdot c=-48$ —②

① احسب a , b , c

② اكتب عبارة U_n بدلالة n باعتبار $U_1=6$.

الحل:

① حسب خاصية الأوساط الحسابية:

$b=\frac{a+c}{2} \Rightarrow a+c=2b$ —③

نعوض في ①: $2b+b=6$

$\boxed{b=2}$

نعوض في ① ، ②:

$a+2+c=6 \Rightarrow a+c=4$ —①'

$a\cdot 4\cdot c=-48 \Rightarrow a\cdot c=-12$ —②'

من ①' نعزل a: $a=4-c$ —③'

نعوض في ②': $(4-c)\cdot c=-12$

$4c-c^2=-12$

$c^2-4c-12=0$

$(c-6)(c+2)=0$

إما: $c-6=0 \Rightarrow c=+6$ نعوض في ③ $a=-2$

أو: $c+2=0 \Rightarrow c=-2 \Rightarrow a=6$

وحسب الفرض $a>c$:

$a=6,\ b=2,\ c=-2$

② عبارة U_n بدلالة n:

$U_m=U_p+(m-p)\cdot r$

$U_n=U_1+(n-1)\cdot r$ ...(*)

$U_{n+1}-U_n=r$

حساب r: $r=b-a$

$=2-6=-4$

نعوض في (*):

$U_n=6-4(n-1)$

$U_n=6-4n+4$

$U_n=10-4n$

المسألة (13):

بفرض أن $(U_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية فيها: $U_{17}=82$ ، $U_3=12$. المطلوب:

① احسب U_0 و r ثم اكتب عبارة U_n بدلالة n.

② احسب المجموع: $S=U_0+U_1+\dots+U_n$ بدلالة n.

الحل:

① من القانون: $U_m=U_p+(m-p)\cdot r$

$U_{17}=U_3+(17-3)\cdot r$

$82=12+14r$

$14r=82-12 \Rightarrow 14r=70$

$\boxed{r=5}$

• حساب U_0: $U_m=U_p+(m-p)\cdot r$

$U_3=U_0+(3-0)(5)$

$12=U_0+15 \Rightarrow \boxed{U_0=-3}$

• عبارة U_n بدلالة n:

$S=U_0+U_1+\dots+U_n$

عدد الحدود $n=n-0+1=n+1$

للتواصل: 0991070187

$a = u_0 = -3$

$l = u_n = 5n-3$

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(-3+5n-3)}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)(5n-6)}{2}$$

المسألة (14):

بفرض أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها:

$u_0=3$ و $q=2$. والمطلوب:

(1) احسب u_2 و u_6 .

(2) احسب المجموع: $S_1=u_0+u_1+\dots+u_5$

(3) احسب المجموع: $S_2=u_3+u_6+\dots+u_{63}$

الحل:

(1) نكتب عبارة u_n بدلالة n:

$u_m = u_p \cdot q^{m-p}$

$u_n = u_0 \cdot q^n$

$u_n = 3 \times 2^n$ — (*)

$u_2 = 3 \times 2^2 = 12$

$u_6 = 3 \times 2^6 = 192$

(2) $S_1 = u_0+u_1+\dots+u_5$

$n = 5-0+1 = 6$

$q = 2$

$a = u_0 = 3$

$$S_1 = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$S_1 = 3\,\frac{1-2^6}{1-2} = 3\,(2^6-1)$$

$= 189$

(3) $S_2 = u_3+u_6+\dots+u_{63}$

$$n = \frac{63-3}{3}+1$$

$$= \frac{60}{3}+1 = 21$$

$q' = q^{(\text{مقدار القفزة})} = q^3 = 8$

$a = u_3 = 3\times 2^3 = 24$

$$S_2 = a \cdot \frac{1-q'^n}{1-q'}$$

$$= 24\,\frac{1-8^{21}}{1-8} = \boxed{}$$

المسألة (15): "دورة 2018 ثانية"،

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=2$ وفيها $u_1=1$. والمطلوب:

احسب u_3 ثم احسب المجموع:

$$S = u_3+u_4+\dots+u_7$$

المسألة (16):

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \end{cases}$

(1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ: $1 < u_n < 2$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$.

(2) a أثبت أن $u_{n+1}-u_n = (u_n-2)(u_n-1)$

b استنتج أن المتتالية متناقصة.

(3) أهي متقاربة؟

للتواصل: 0991070187

الحل:

① $E(n)$: « $1 \leq u_n \leq 2$ »

• نثبت صحة القضية من أجل $n=0$:

$1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2 \Leftarrow E(0)$ صحيحة

• نفرض صحة القضية من أجل n:

$E(n)$: « $1 \leq u_n \leq 2$ » صحيحة

• ولنثبت صحتها من أجل $n+1$:

$E(n+1)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ »

نصلح u_{n+1}:

$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

$= \underbrace{u_n^2 - 2u_n + 1} - 1 + 2$ إتمام

$u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

• نبدأ من القضية الصحيحة:

$1 \leq u_n \leq 2$

(-1) $\quad 0 \leq u_n - 1 \leq 1$

(نربع) $\quad 0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$

$(+1)$ $\quad 1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$

$1 \leq u_{n+1} \leq 2 \Leftarrow E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow$ القضية صحيحة مهما تكن $n \in \mathbb{N}$.

② a. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n$

$= u_n^2 - 3u_n + 2$

تحليل مباشر $= (u_n - 2)(u_n - 1)$

b. بما أن $1 \leq u_n \leq 2$ نجد:

$(u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0$

$\Leftarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة.

③ بما أن $(u_n)_{n \geq 0}$ محدودة من الأدنى بالعدد 1 ومتناقصة فهي متقاربة.

المسألة ⑰:

المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أنّ $n \leq 2^n$ مهما يكن العدد n من $\mathbb{N}$.

② أثبت أنّ العدد (2) راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$.

③ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

الحل:

1) $E(n)$: « $n \leq 2^n$ »

• نثبت صحة القضية من أجل $n=0$:

$0 \leq 2^0 \Rightarrow 0 \leq 1$ محققة

$E(0)$ صحيحة

• نفرض صحة القضية من أجل n:

$n \leq 2^n$ صحيحة.

• فنثبت صحة القضية من أجل $n+1$:

$E(n+1)$: $n+1 \leq 2^{n+1}$

نبدأ من القضية الصحيحة:

$n \leq 2^n$

$(2\times)$ $\quad 2n \leq 2 \cdot 2^n$

أكبر من $(n+1)$ $\quad n+1 \leq 2n \leq 2^{n+1}$

$n+1 \leq 2^{n+1} \Leftarrow E(n+1)$ صحيحة

$\Leftarrow$ القضية صحيحة مهما تكن n من $\mathbb{N}$

للتواصل: 0991070187

② $U_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}$

وحسب الطلب السابق $n < 2^n$

$$U_n < \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$$

$$U_n < \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $a = \frac{2}{3}$

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$= 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$= 2 - 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\Rightarrow U_n < 2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ لما نحسب نهايته تقترب من الصفر

$U_n < 2$

$\Leftarrow$ العدد 2 راجح على المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

③ ندرس اطراد المتتالية:

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$= U_n + \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

نشكل الفرق:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+1}{3^{n+1}} > 0$$

فالمتتالية متزايدة،

وبما أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى

فهي متقاربة.

المسألة 18:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ الحد العام هو: $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان:

$$U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

② في حالة n عدد طبيعي غير معدوم، لتكن:

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

الحل:

① $U_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

نوحد المقامات ونحذفها

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

(1) (n+1) (n)

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a(n+1) + bn}{n(n+1)}$$

$$1 = an + a + bn$$

$$1 = (a+b)n + a$$

بالمطابقة بين الطرفين نجد:

$a = 1$ & $a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \overbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}^{U_1} + \overbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}^{U_2} + \cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$* \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$

$(S_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من 1.

المسألة (15):

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة تدريجياً وفق:

$$\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n} \end{cases}$$

حيث $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

أثبت بالتدريج أن: $U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

الحل: $E(n): \ \text{%} \ U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

• نثبت صحة القضية من أجل $n=0$:

$l_1 = U_0 = 2\cos\theta$

$l_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2\cos\theta$

$l_1 = l_2 \Leftarrow E(0)$ صحيحة.

• نفرض صحة القضية من أجل n:

$U_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ صحيحة.

• نثبت صحة القضية من أجل $n+1$:

$U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

$l_1 = U_{n+1} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

$= \sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}$

م ٤

$= \sqrt{2\cdot\left(2\cos^2\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{2^n}\right)\right)}$

دستور
$1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2\cdot 2^n}\right)}$

$= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$

$= 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right|$

وبما أن $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftarrow$

$U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

$= l_2$

فالقضية صحيحة من أجل $n+1$.

مما سبق نستنتج أن القضية صحيحة من أجل n.

إرضاء الناس غاية لا تُدرك..
وإرضاء الله غاية لا تُترك..
فاترك ما لا يُدرك...
وادرك ما لا يُترك...

- بالتوفيق للجميع -

كل عمل بشري لا يخلو من الأخطاء.
ورحم الله امرئ اهدى إليّ عيوبي.

القسم: الوحدة:

للتواصل: 0991070187