#لاتقلقوا
AHMAD TKRORY
MATHEMATICS TEACHER
Ahmad Tkrory
MATHMATICS TEACHER
ماستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر ان تترك اثراً او ذكراً حسناً
Mathematics is a set of abstract knowledge resulting from logical deductions applied to various mathematical objects such as sets, numbers, shapes, structures and transformations, Mathematics is also concerned with the study of topics such as quantity, structure, space, and change. There is not yet an agreed general definition of the term.
أوراق الجلسة
التكرورية
JOIN US
JOIN US
600
COME AND
TAKE IT
PREPARED BY
AHMAD TKRORY
CONTACT US ON MOBILE
099 444 60 57
احمد تكروري
@Ahmad_Tkrory
احمد تكروري رياضيات
احمد تكروري رياضيات
@Ahmad_Tkrory
احمد تكروري

المتتاليات ونهايته:

المتتاليات
- الاستقراء الرياضي
- متتالية حسابية وهندسية
- دراسة اطراد المتتالية
  - u_{n+1}
    - إثبات u_n متناقصة ← $u_{n+1} \le u_n$ ونثبت على التدريج
    - إثبات u_n متزايدة ← $u_{n+1} \ge u_n$ ونثبت على التدريج
  - u_n
    - التابع ← $f(x) = u_n$
      - $f`(x) < 0$ ← متناقصة تماماً
      - $f`(x) > 0$ ← متزايدة تماماً
    - النسبة عندما يكون حدودها موجبة ← عند وجود عاملي او عدد اس n
      - $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ← متناقصة تماماً
      - $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ← متزايدة تماماً
    - الحالة العامة ← تستخدم في جميع الحالات
      - $u_{n+1} - u_n < 0$ ← متناقصة تماماً
      - $u_{n+1} - u_n > 0$ ← متزايدة تماماً

المتتالية الحسابية

كل حد ينتج عن الآخر بإضافة له r ويدعى r أساس المتتالية الحسابية

❶ **لإثبات أن المتتالية حسابية:**

$$u_{n+1} - u_n = r$$

❷ **لإيجاد الحد العام في المتتالية الحسابية أو إيجاد حد ما في المتتالية الحسابية :**

من أجل m , n

$$u_n = u_m + (n - m)r$$

❷ **حساب مجموع في المتتالية الحسابية:**

$$S = \frac{n(a+b)}{2}$$

$n =$ **دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول** $+ 1$

$a =$ **الحد الأول**

$b =$ **الحد الأخير**

المتتالية الهندسية

كل حد ينتج عن الآخر بضربه بـ q ويدعى q أساس المتتالية الهندسية

❶ **لإثبات أن المتتالية هندسية:**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

❷ **لإيجاد الحد العام في المتتالية الهندسية أوجد ما في المتتالية الهندسية**

من أجل m, n

$$u_n = u_m . q^{n-m}$$

❸ **حساب مجموع في متتالية هندسية:**

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$n =$ **دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول** $+ 1$

$a =$ **الحد الأول**

$b =$ **الحد الأخير**

الاستقراء الرياضي(البرهان بالتدريج): يستخدم لبرهان علاقة تحوي n

1. نرمز للقضية $E(n)$
2. نفرض صحة القضية من أجل $n = n_0$
3. نفرض صحة القضية من أجل n ℓ_1 * (فرضية الاستقراء)
4. نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$ $\ell_1 \Leftrightarrow \ell_2$

نهاية متتالية هندسية:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & ; \quad q > 1 \\ 0 & ; -1 < q < 1 \end{cases}$$

المتتاليتان المتجاورتان: يجب ان نبرهن شرطين

1) متتالية متزايدة وأخرى متناقصة

2) $\lim_{n\to+\infty} (\text{الأولى} - \text{الثانية}) = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\text{الأولى}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\text{الثانية}\right) = 0$$

المتتالية المحدودة:

حتى تكون المتتالية محدودة يجب أن تكون محدودة من الأعلى والأدنى

حد راجح $\le u_n \le$ حد قاصر

تابع u_n	جذر	سلسلة
نطرح من التابع العدد	نضرب بالمرافق	نبرهن على الاستقراء علاقة ثم نستفيد منها

تكرورية امتحانية : لدراسة تقارب المتتالية يوجد شكلين

الشكل الأول: عندما يكون معطى Un تابع ناخذ نهاية التابع اذا كان عدد متقاربة اذا كان لانهاية متباعدة

الشكل الثاني: عندما يكون معطى Un+1 يجب ان يتحقق

كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى (حد راجح) فهي متقاربة

او كل متتالية متناقصة ومحدودة من الاسفل (حد قاصر) فهي متقاربة

احمد تكروري رياضيات @Ahmad_Tkrory احمد تكروري 099 444 60 57

مخطط أفكار النهايات:

$\lim_{x\to\square} f(x)$

∞ — عدد

$\lim_{x\to عدد} f(x) = \square$

عدد — ∞

عدد = x مقارب شاقولي — نقطة مقاربة

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \square$

عدد — ∞

احتمال وجود مقارب مائل — عدد = y مقارب أفقي

تكرورية امتحانية هامة لهذا العام:

عندما يطلب إيجاد A عدداً حقيقياً يحقق الشرط $x \geq A$ حيث $f(x) \in]a, b[$ ماذا نفعل؟

مركز المجال:

$$c = \frac{a+b}{2} = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

نصف قطر المجال:

$$r = \frac{b-a}{2}$$

$$|f(x) - c| < r$$

اخراج x إلى خارج الجذر دائماً نسحب x^2 عامل مشترك من داخل الجذر مع الاستفادة من:

$$\sqrt{x^2 y} = |x|\sqrt{y}$$

$-\infty$ — $+\infty$

$-x$ — x

1) حالات عدم التعيين:

- حالة $\frac{\infty}{\infty}$:
  - تزال بإخراج عامل مشترك
- حالة $\infty - \infty$: تزال بإحدى الطريقتين:
  - إخراج الحد المسيطر عامل مشترك
  - الضرب والتقسيم بالمرافق مع الاستفادة من:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

- حالة $\frac{0}{0}$: تزال بإحدى ثلاث طرق:
  - إذا كان البسط والمقام كثيرات حدود نحلل البسط والمقام ونتخلص من القوس المسبب للصفر
  - إذا كان البسط أو المقام يحوي جذي نضرب ونقسم على المرافق ثم نتخلص من القوس المسبب للصفر
  - إذا كان البسط أو المقام يحوي sin أو cos أو tan نستخدم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{x}{\sin x} = 1$$

أو: $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \frac{x}{\tan x} = 1$$

2) قوانين مثلثات:

$$1 - \cos ax = 2\sin^2\frac{ax}{2}$$

$$\sin 2x = 2\sin x . \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

الجلسة التكرورية

3) مبرهنة الإحاطة الأولى:

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

وكان:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \ell \,,\, \lim_{x\to\infty} h(x) = \ell$$

حسب مبرهنة الإحاطة (1):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

حيث عدد $= \ell$

4) مبرهنة الإحاطة الثانية:

$$|f(x) - \ell| \le g(x)$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة (2):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$$

5) مبرهنة الإحاطة (3):

1. $f(x) \ge g(x)$

   $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

2. $g(x) \ge f(x)$

   $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

استخدام مبرهنات الإحاطة:

- إيجاد نهاية تابع يحقق متراجحة
- عند وجود $\sin \infty$ أو $\cos \infty$

$$-1 \le \begin{matrix} \sin \text{ شغلة} \\ \cos \text{ شغلة} \end{matrix} \le 1$$

$$0 \le \begin{matrix} \sin^2 \text{ شغلة} \\ \cos^2 \text{ شغلة} \end{matrix} \le 1$$

تكرورية: للتفريق بين الإحاطة (1) والإحاطة (3)

- الإحاطة (1): الناتج عدد
- الإحاطة (3) : الناتج ∞

6) نهاية التابع المركب:

عندما يطلب $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big)$:

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$
$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{x\to b} f(x) = \boxed{}$$

نحسب $\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big)$ بعد كتابة $f\big(g(x)\big)$ بدلالة x

نبدل كل x بـ $g(x)$

7) المقاربات:

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$

  $y = \ell$ مقارب أفقي للخط C في جوار ∞

- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

  $x = a$ مقارب شاقولي

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

  احتمال وجود مقارب مائل

8) المقارب المائل $y = ax + b$:

هو مستقيم شريف يقترب منه C ولا يمسه.

ويوجد ثلاث حالات

إثبات ، إيجاد ، الصيغة القانونية

a) الحالة الأولى: إثبات $y = ax + b$

نشكل الفرق: $\lim_{x\to\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

الجلسة التكرورية

b) الحالة الثانية: إذا طلب إيجاد المقارب المائل، ماذا نفعل؟

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$$

نعوض:

$$y=ax+b$$

c) الحالة الثالثة:

يطلب كتابة ما داخل الجذر بالصيغة القانونية ، ثم يطلب استنتاج وجود مقارب مائل

نكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية (إتمام إلى مربع كامل)

$$f(x)=\sqrt{(\text{شغلة})^2+\text{عدد}}$$

$$f(x)=\sqrt{(\text{شغلة})^2\left[1+\frac{\text{عدد}}{(\text{شغلة})^2}\right]}$$

$$=\underbrace{|\text{شغلة}|.\sqrt{1+\frac{\text{عدد}}{(\text{شغلة})^2}}}$$

$-\infty$ $+\infty$

شغلة −   شغلة +

$$\frac{f(x)}{\text{شغلة}}=\sqrt{1+\frac{\text{عدد}}{(\text{شغلة})^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\text{شغلة}}=1$$

شغلة $= y$ مقارب أفقي

دراسة الوضع النسبي: ندرس جدول $f(x)-y_\Delta$

9) الاستمرار:

حتى يكون التابع مستمر عند a يجب أن يتحقق:

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

10) تابع الجزء الصحيح: (بدون فواصل)

$$E(x)\le x<E(x)+1\Rightarrow \lim\frac{f(x)}{x}$$

$$x-1<E(x)\le x\Rightarrow \lim\frac{E(x)}{x}$$

مخطط أفكار الاشتقاق:

1) العدد المشتق: قابلية الاشتقاق

هل f قابل للاشتقاق عند a

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\square$$

عدد ∞

∞: نقول عن f أنه غير قابل للاشتقاق عند a

عدد: نقول عن f أنه قابل للاشتقاق عند a

الجلسة التكرارية

2) معادلة المماس:

يقترب من C ويمسه بنقطة واحدة (غير شريف)

- نقطة التماس (x_0, y_0) $f(x_0) = y_0$
- ميل m $f'(x_0) = m$
- معادلته: $y - y_0 = m(x - x_0)$
او: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

3) التقريب التالفي:

- تابع
- A عدد صحيح نقربه
- h

$h =$ القيمة المعطاة $- a$

- قانونه:

$$f(a+h) \simeq f(a) + f'(a).h$$

4) كيف ندرس تغيرات تابع:

a) نوجد مجموعة التعريف ونكتبه على شكل مجالات (أغلب الأحيان تكون موجودة)

b) نوجد النهايات عند الأطراف المفتوحة والصور عند الأطراف المغلقة.

c) نشتق ثم نعدم المشتق $f'(x) = 0$ نحل المعادلة وينتج قيمة $x = \ni$ مجموعة التعريف

d) نعوض القيمة العادية في التابع إذا انتمت إلى مجموعة التعريف

e) نشكل الجدول

x	مجموعة التعريف + القيم العادية				
f'		$-$	0	$+$	
f	نهايات	↘	صور	↗	نهايات

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}_{\text{المستقر الفعلي}}$

5) الرسم:

1. مقاربات + معادلة المماس:

$$y = ax + b$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \boxed{} \Rightarrow (0, \boxed{})$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \boxed{} \Rightarrow (\boxed{}, 0)$$

2. نقاط الجدول
3. نقاط مساعدة

$(x \in D_f)$ $x = 0 \Rightarrow f(0) = \boxed{}$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ نحل المعادلة

6) يرد سؤال: عين b, a حتى يحقق

$f'(x_0) = m \,, f(x_0) = y_0$

a) قيمة حدية أو مماس أفقي $m = 0$

b) $y = ax + b$ الميل أمثال x بعد عزل y

c) بالرسم $m = \dfrac{\text{فرق } y}{\text{فرق } x}$

7) المماس الشاقولي:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

- f غير قابل للاشتقاق عند a
- $x = a$ مماس شاقولي

ماستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً 💙💙

099 444 60 57 احمد تكروري @Ahmad_Tkrory احمد تكروري رياضيات

8) الاشتقاق من اليمين واليسار: (تعريف نصف المماس)

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{عدد}$$

- ميل نصف المماس من اليمين = عدد
- f اشتقاقي من اليمين

$$f(a^-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \text{عدد}$$

- ميل نصف المماس من اليسار= عدد
- f اشتقاقي من اليسار

في حالة $f'(a^-) = f'(a^+)$: f اشتقاقي عند a

نستخدم هذه الفقرة في دراسة توابع القيمة المطلقة

مخطط أفكار التابع اللوغاريتمي ln

1) لإيجاد مجموعة تعريف التابع اللوغاريتمي $f(x) = \ln(g(x))$

ما داخل اللوغاريتم أكبر تماماً من الصفر

$$g(x) > 0$$

- درجة أولى:

$x > a$, $]a, +\infty[$

$x < a$, $]-\infty, a[$

- درجة ثانية – ثالثة – كسر

دراسة إشارة

#لاتقلقوا

2) خواص التابع اللوغاريتمي:

1. $x > \ln x$
2. $\ln 0^+ = -\infty$
3. $\ln 1 = 0$
4. $\ln 2 \simeq 0.7$
5. $\ln 3 \simeq 1.1$
6. $\ln x^n = n.\ln x$
7. $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$
8. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b = -\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
9. $\ln(+\infty) = +\infty$
10. $e^{\ln(g(x))} = g(x)$
11. $(\ln x)^n = \ln^n x$
12. $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$
13. $\ln a \underset{\leq}{\geq} \ln b \Leftrightarrow a \underset{\leq}{\geq} b$
14. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) \begin{cases} > 0 \,;\, a > b \\ < 0 \,;\, a < b \end{cases}$

3) لحل المعادلات أو متراجحات من الشكل

$\ln(g(x)) = \ln(h(x))$ أو $\ln g(x) \underset{\leq}{\geq} \ln h(x)$

- حل المعادلة:

1. نوجد مجموعة تعريف g ومجموعة تعريف h
2. ثم نوجد $E = D_g \cap D_h$
3. نطبق الخاصة:

$$g(x) = h(x) \Leftarrow \ln(g(x)) = \ln(h(x))$$

4. نحل المعادلة الناتجة لنحصل على جذور، نرفض ونقبل حسب E

- حل المتراجحة:

1. نوجد مجموعة تعريف g ومجموعة تعريف h ثم نقاطعهما $E = D_g \cap D_h$
2. نوجد حلول المتراجحة الناتجة عن:

$$\ln g(x) \underset{\leq}{\geq} \ln h(x) \Rightarrow g(x) \underset{\leq}{\geq} h(x)$$

3. ولتكن حلول المتراجحة هي I عندئذ نوجد مجموعة حلول المتراجحة $S = E \cap I$

الجلسة التكرارية

4) مشتق التابع اللوغاريتمي

$$f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مشتق التابع اللوغاريتمي = $\frac{\text{مشتق ما داخل اللوغاريتم}}{\text{ما داخل اللوغاريتم}}$

5) نهايات التابع اللوغاريتمي:

1. $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$
5. $\lim_{x\to 0^+} (x.\ln x) = 0$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
8. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$

6) إزالة حالات عدم التعيين:

- إخراج عامل مشترك

$$\left[x, \sqrt{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x+1}\right]$$

- تفريق البسط على المقام

$$\frac{a\pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

- اعتماداً على خواص اللوغاريتم

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$$

- فرض متحول

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow x \to +\infty \Rightarrow t \to 0$$

$$x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

تكروريات هامة امتحانية:

- لإثبات أن التابع f فردي
  1. $\forall x \in D_f , -x \in D_f$
  2. $f(-x) = -f(x)$

◈ التابع الفردي متناظر للمبدأ

- لإثبات أن التابع f زوجي
  1. $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
  2. $f(-x) = f(x)$

◈ التابع الزوجي متناظر بالنسبة لـ yy'

- لإثبات أن (x_0, y_0) نقطة تناظر
  1. $\forall x \in D_f ; 2x_0 - x \in D_f$
  2. $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

- لإثبات أن f متزايد أو متناقص
  1. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ متزايد تماماً
  2. $f'(x) < 0 \Rightarrow$ متناقص تماماً

مخطط أفكار التابع الأسي

1) مجموعة التابع الأسي $e^{g(x)}$

معرف على نفس مجموعة تعريف $g(x)$ (يعني كأنو ما في e)

2) خواص التابع الأسي:

1. $e^0 = 1$
2. $e^a . e^b = e^{a+b}$
3. $\ln(e^{g(x)}) = g(x)$
4. $e^{+\infty} = +\infty$
5. $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$
6. $(e^a)^b = e^{a\,b}$
7. $e^{-\infty} = 0$
8. $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
9. دائماً $e^{g(x)} > 0$

3) حل المعادلات والمتراجحات الأسية:

يعطينا في نص السؤال

$$e^{h(x)} \underset{\leq}{\geq} e^{g(x)}$$

حيث $h(x), g(x)$ توابع.

- حل المعادلة:

1. نوجد مجموعة تعريف g ومجموعة تعريف h
2. ثم نوجد $E = D_g \cap D_h$
3. نطبق الخاصة:

$$e^{h(x)} = e^{g(x)} \Rightarrow h(x) = g(x)$$

4. نحل المعادلة الناتجة لنحصل على جذور، نرفض ونقبل حسب E

- حل المتراجحة:

1. نوجد مجموعة تعريف g ومجموعة تعريف h ثم نقاطعهما $E = D_g \cap D_h$
2. نوجد حلول المتراجحة الناتجة عن:

$$e^{h(x)} \underset{\leq}{\geq} e^{g(x)} \Rightarrow h(x) \underset{\leq}{\geq} g(x)$$

3. ولتكن حلول المتراجحة هي I عندئذ نوجد مجموعة حلول المتراجحة $S = E \cap I$

4) تكرورية اهم من حياتي:

عندما نرى e^{-ax}, e^{ax} بنفس المعادلة، نضرب الأطراف بـ e^{ax}

حيث $e^{ax}.e^{-ax} = 1$

5) نهايات التابع الأسي:

1. $\ln x < x < e^x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$
6. $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{ax}-1}{ax} = 1$

6) إزالة حالات عدم التعيين:

- إخراج عامل مشترك (e^{-x}, e^x, x)
- تفريق الكسور (تفريق البسط على المقام)

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$$

7) مشتق التابع الأسي:

$$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x).e^{g(x)}$$

مشتق التابع الأسي = مشتق الأس × التابع نفسه

$$\exp(g(x)) = e^{g(x)}$$

8) تحويل التابع الأسي من الشكل

$$f(x) = a^x \Rightarrow f(x) = e^{x.\ln a} \; ; a > 1$$

ماستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً

الجلسة التكرورية

9) المعادلات التفاضلية y'

$$y' = ay + b$$

حلها:

$$f(x) = k.e^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y' = ay$$

حلها:

$$f(x) = k.e^{ax}$$

10) استنتاج الخطوط البياني:

- $f_1(x) = f(x) + b$

نستنتج أن C_1 للتابع f_1 ينتج عن الخط البياني للتابع f بإجراء انسحاب متجهه $\vec{u}(0, b)$

- $f_{1(x)} = f(x + a)$

نستنتج أن C_1 للتابع f_1 ينتج عن الخط C للتابع f بإجراء انسحاب متجهه $\vec{u}(-a, 0)$

- $f_1(x) = f(-x)$

نستنتج أن C_1 للتابع f_1 ينتج عن الخط البياني C للتابع f بأخذ نظير C بالنسبة للمحور yy' (C_1 نظير C بالنسبة إلى yy')

- $f_1(x) = -f(x)$

نستنتج أن C_1 للتابع f_1 ينتج عن الخط البياني C للتابع f بأخذ نظير C بالنسبة للمحور xx' (C_1 نظير C بالنسبة إلى xx')

- $f_1(x) = -f(-x)$

نستنتج أن C_1 للتابع f_1 ينتج عن الخط البياني C للتابع f بأخذ نظير C بالنسبة للمبدأ (C_1 نظير C بالنسبة للمبدأ O)

- $f_1(x) = |f(x)|$

C_1 ينتج عن C بالمحافظة على النقاط ذات الترتيب الموجب، وأخذ نظائر النقاط ذات الترتيب السالب بالنسبة للمحور xx'

11) تكرورية امتحانية:

لدراسة الوضع النسبي بين f ومعادلة مماس y

نشكل الفرق $g(x) = f(x) - y_\Delta$

وندرس تغيرات g

12) عندما يطلب كتابة معادلة المماس:

- في نقطة تقاطع محور $yy' \Leftarrow x = 0$
- في نقطة تقاطع محور $xx' \Leftarrow y = 0$
- مماساً موازي لمحور الفواصل $\Leftarrow m = 0$

الجلسة التكرورية

مخطط أفكار التكامل:

1) قواعد التكامل:

$$\int a\,dx = ax$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int ax^n\,dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

قلبي يفاضل ويكامل وقلبك e^x لا يبالي

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)|$$

البسط مشتق المقام ← التابع الأصلي لوغاريتم القيمة المطلقة للمقام

$$\int H`.H^n\,dx = \frac{H^{n+1}}{n+1}$$

2) تكرورية هامة جداً:

تكامل المجموع = مجموع التكاملات

$$\int (g(x)+h(x))\,dx = \int g(x)\,dx + \int h(x)\,dx$$

إذا كان العدد مضروب بتركه ، إذا كان العدد مجموع أو مطروح منكامله

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$$

3) التكامل المحدد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

تكرورية :دراسة إشارة = تكامل + قيمة مطلقة تابع صحيح كسري

$$\int_a^b \left| \begin{array}{c} \text{صحيح تابع} \\ \text{كسري} \\ \text{جذري} \\ \vdots \end{array} \right| =$$

ندرس الإشارة وقد نضطر إلى تقسم الكاملة

$$\int_a^b \left| \begin{array}{c} \sin \\ \cos \end{array} \right| =$$

ننظر على الدائرة المثلثية وقد نضطر لتقسيم مجال للمكاملة

4) التكامل بالتجزئة

$$\int_a^b u.v'\,dx = [u.v]_a^b - \int_a^b v.u'\,dx$$

$$u \xrightarrow{\text{نشتق}} u' \qquad v' \xrightarrow{\int} v$$

- $$\int \text{كذا}\, x \,.\begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{array} dx$$

$$u = \text{كذا}\, x \;,\; v' = \begin{array}{c} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{array}$$

- $\int$ كذا $x . \ln x \, dx$

$u = \ln x \, , v' =$ كذا x

- $\int e^x . \dfrac{\sin x}{\cos x} \, dx$

$$u = e^x \, , v' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

قد نحتاج إلى تجزئة مرتين في بعض التوابع.

5) تكامل الكسور:

المقام من الدرجة الثانية والمعادلة قابلة للحل حصراً

$$(x \mp a)(x \mp b) \; \Delta > 0$$

$$(x \mp a)^2 \; \Delta = 0$$

هناك 3 حالات:

1. البسط إما ثابت أو من الدرجة الأولى
   a. المقام من الشكل $(x \mp a)(x \mp b)$
   b. نكتب الكسر بالشكل

$$\frac{A}{x \mp a} + \frac{B}{x \mp b}$$

نبحث عن A, B من خلال توحيد المقامات ثم نحذفها ثم نطابق

2. الحالة الثانية: البسط درجة ثانية أو ثالثة:

نطبق القسمة الإقليدية ثم نعود إلى الحالة الأولى

3. الحالة الثالثة:

المقام من الشكل $(x \mp a)^2$ نكتب الكسر بالشكل:

$$\frac{A}{(x \mp a)^2} + \frac{B}{x \mp a}$$

نبحث عن B, A بذات الطريقة

6) حساب مساحة سطح، دائماً الجواب موجب.

1. السطح ملزوق بـ xx' من فوق، يكون التكامل:

$$S = \int_a^b f(x) \, dx$$

2. السطح ملزوق بـ xx' من تحت:

$$S = -\int_a^b f(x) \, dx$$

3. السطح ملزوق بـ xx' مرة من فوق ومرة من تحت

$$S = \int_a^b f(x) \, dx - \int_b^c f(x) \, dx$$

4. السطح غير ملزوق بـ xx' محصور بين خطين أو بين خط بياني ومستقيم

$$S = \int_a^b \left(\text{فوق} - \text{تحت} \right) dx$$

قادمٌ باتجاه كل شيء أخبروني عنه بأنه مستحيل ..💙

الجلسة التكرورية

السؤال 1: ليكن C الخط البياني للتابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ كما في الشكل:

① احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه واستنتج المقاربات الأفقية والشاقولية.

② أوجد حل المتراجحة $f(x) \leq 0$

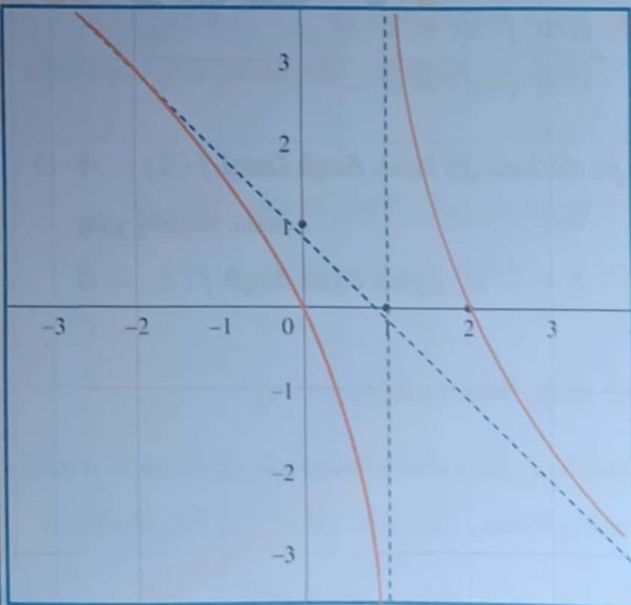
③ أوجد حل المتراجحة $f'(x) \leq 0$

④ أوجد $f(]1,2[)$

⑤ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

⑥ هل f اشتقاقي عند $x = 1$

⑦ عين نقطة التناظر.



الحل:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط في جوار $\pm\infty$

لا يوجد مقارب أفقي لوجود مقارب مائل في جوار $\pm\infty$

وجود مقارب مائل ينفي وجود أفقي

❷ حل المتراجحة $f(x) \leq 0$:

$[0,1[\cup[2,+\infty[$

❸ $f'(x) \leq 0$

$\mathbb{R}\backslash\{1\}$

❹ $f(]1,2[) =]0,+\infty[$

❺ يوجد حلين $x = 0\ ,x = 2$

❻ f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأنه غير مستمر.

❼ نقطة التناظر $(1,0)$ نقطة تقاطع المقارب المائل مع الشاقولي.

السؤال 2: ليكن f تابع معرف على $]1,+\infty[$ خطه البياني

① هل f اشتقاقي عند العدد 1؟ علل.

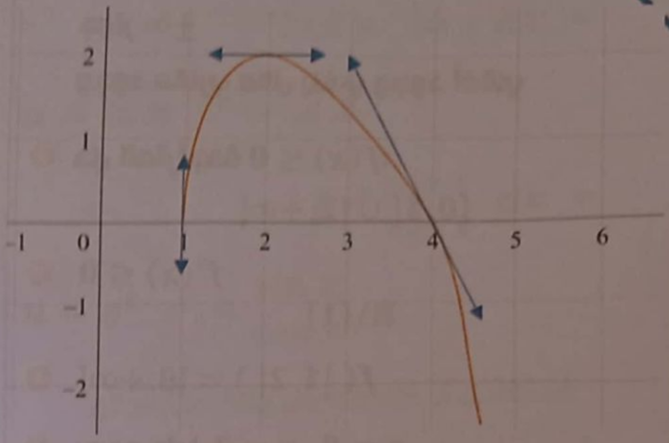
② احسب كلاً من $f'(4), f(4), f'(2), f(2)$

③ اكتب معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 4$.

④ ما مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$؟

⑤ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$؟

⑥ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$؟



الحل:

① f غير اشتقاقي عند $x = 1$ لأن المماس شاقولي عند هذه النقطة

② $f'(2) = 0 , f(2) = 2 , f'(4) = \frac{0-2}{4-3} = -2 , f(4) = 0$

③ $y - f(4) = f'(x)(x-4)$

$y = 2(x-4) + 0 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 8}$

④ C يقع فوق محور الفواصل $f(x) \geq 0$

$\Rightarrow x \in [1,4]$

⑤ f متناقص $f'(x) \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [2,+\infty[$

⑥ f متزايد $f'(x) \geq 0 \Rightarrow$

$x \in]1,2]$

f غير اشتقاقي عند 1

x	1		2		$+\infty$
f'	‖	+	0	−	
f	0	↗	2	↘	$+\infty$

السؤال 3: نجد جانباً جدول تغيرات f المعرف على $\mathbb{R}$

① جد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

② هل $f(5) = 4$ قيمة حدية؟ اذكر القيم الحدية وبيّن نوعها.

③ اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني.

④ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
f'		−	0	+	0	+	
f	2	↘	0	↗	4	↗	6

الحل:

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 6$

② $f(5) = 4$ ليست قيمة حدية لأن المشتق لم يغير إشارته عندها.

$f(2) = 0$ قيمة حدية صغرى

الجلسة التكرارية

السؤال 4: نجد جانباً جدول تغيرات f ، أجب عن الأسئلة:

① عين مجموعة تعريف التابع f.

② كم حلاً للمعادلة $f(x) = 2$؟

③ اكتب معادلة نصف المماس للخط C عند النقطة $x = 0$ من اليمين.

④ جد حلول المتراجحة $f'(x) < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	$-1 \Vert +1$	$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

الحل:

❶ $D_f =]-\infty, +\infty[$

التابع غير اشتقاقي عند الصفر لكن هو معرف عندها.

❷ يوجد حل وحيد ضمن المجال $]0, +\infty[$

❸ $f(0) = 0 , f'(0^+) = 1$

$y = x$

❹ حلول المتراجحة $]-\infty, 0[$

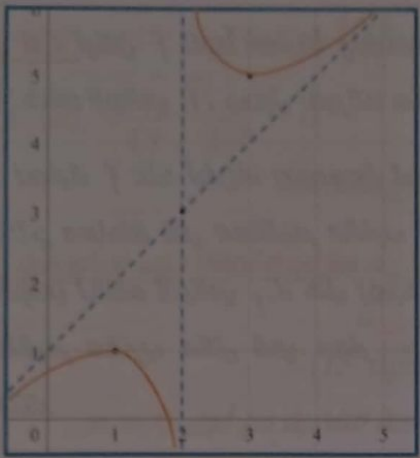
السؤال 5 : في الشكل المرسوم جانباً، ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ والمطلوب:

① جد $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$

③ اكتب معادلة المقارب المائل؟

④ اذكر احداثيات النقطة I مركز تناظر الخط البياني.



الحل:

❶ $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to2^+} f(x) + \infty$

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

$f(3) = 5$ قيمة حدية صغرى

❷ للمعادلة $f(x) = 0$ حلان.

❸ المقارب المائل يمر بنقطتين

$B(-1,0)$ $A(0,1)$ فيكون ميله

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-1}{-1-0} = 1$$

ومعادلته من الشكل

$$y - y_B = m(x - x_B)$$
$$y - 0 = (x+1) \Rightarrow y = x + 1$$

❹ $I(2,3)$ مركز تناظر الخط البياني C (نقطة تقاطع مقاربيه المائل والشاقولي الذي معادلته $x = 2$)

مهما إتسعت دائرة الصعاب ، تذكر أن قوة الله تغلب كل شيء

السؤال 6 : ليكن f تابعاً معرفاً واشتقاقياً على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ خطه البياني C ، جدول تغيراته هو الآتي:

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه ثم استنتج معادلة كل مستقيم مقارب افقي او شاقولي لخطه البياني C_f، هل يوجد للخط C مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$؟ علل إجابتك.

② استنتج حلول المتراجحات الآتية:

$$f(x)\ge 1\,,\,f(x)\ge 0$$
$$f(x)\le,f'(x)\le 0$$

③ جد كلاً من النهايات الآتية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}\,,\lim_{x\to 0}f\big(f(x)\big)$$
$$\lim_{x\to-\infty}\ln\big(f(x)\big)$$

④ قارن بين $f(2023),f(2022)$

x	$-\infty$				0		1	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$
f	e	$\searrow$	1	$\nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	0	$\searrow -\infty$

الحل:

❶ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=e\,,\,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty\,,\,\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$

$y=e$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C في جوار $\pm\infty$

لا يوجد للخط C مقارب مائل في جوار $-\infty$

لأنه يوجد مقارب أفقي $y=e$ في جوار $-\infty$

❷

$f(x)<0\Rightarrow x\in\,]1,3[\cup]4,+\infty[$

$f(x)\ge 0\Rightarrow x\in]-\infty,1\,[\cup\{3\}$

$f(x)\ge 1\Rightarrow x\in]-\infty,1[$

$f'(x)\le 0\Rightarrow x\in]-\infty,0[\cup\,[3,+\infty[$

❸

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to0}f(x)=1$$
$$\lim_{x\to0}f\big(f(x)\big)=\lim_{X\to1^+}f(X)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\ln\big(f(x)\big)=\ln(e)=1$$

❹ f متناقص تماماً على المجال $[3,+\infty[$

$$2022<2023\Rightarrow f(2022)>f(2023)$$

التمرين 1 هام لهذا العام: متتالية معرفة بالعلاقة:

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}$$

① اثبت أن $0<u_n\le\frac{1}{2}$ أياً كان العدد الطبيعي $n\ge1$

② أوجد a,b بحيث : $u_n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

③ ليكن في حالة n عدد طبيعي

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

عبر عن S_n بدلالة n ثم استنتج نهايته

الحل:

❶ من نص السؤال نعلم أن

$$n\ge1\Rightarrow n+1\ge2$$

نقلب

$$\frac{1}{n}\le1\Rightarrow\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow u_n\le\frac{1}{2}$$

واضح أن $u_n=\frac{1}{n(n+1)}>0$

بالتالي $0<u_n\le\frac{1}{2}$

❷

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

لوحد المقامات ونحذفها

$$1 = an + a + bn$$
$$1 = (a+b)n + a$$

بالمطابقة

$$a + b = 0 \quad \dots(1)$$
$$a = 1 \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow b = -1$$

❸

$$u_1 = 1 - \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$S_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)}$$
$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1$$

S_n متقاربة

التمرين 2: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2} \quad ; u_0 = 0$$

① اثبت أن المتتالية u_n متزايدة تماماً.

② اثبت أن المتتالية $-1 \leq u_n \leq 3$

③ استنتج تقارب المتتالية u_n ثم احسب نهايتها

الحل:

❶ **التابع** $f(x) = \frac{4x+3}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

f متزايدة تماماً

لإثبات أن u_n متزايدة تماماً يجب أن نبرهن

$$u_{n+1} > u_n$$

نرمز للقضية $E(n)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$u_1 > u_0$$
$$n = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2} > 0$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_{n+1} > u_n \quad (*)$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

من $(*)$

$$u_{n+1} > u_n$$

نأخذ f الأطراف لأن f متزايد تماماً

$$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$
$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

والقضية صحيحة من أجل $n+1$

حسب الاستقراء الرياضي u_n متزايدة تماماً

❷ **نرمز للقضية** $E(n)$

$$-1 \leq u_n \leq 3$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$-1 \leq u_0 \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 0 \leq 3$$

محقق

نفرض صحة القضية من أجل n

$$-1 \leq u_n \leq 3$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$$-1 \leq u_{n+1} \leq 3$$

من الفرض $-1 \leq u_n \leq 3$

نأخذ f الأطراف لأن f متزايد تماماً

$$f(-1) \le f(u_n) \le f(3)$$
$$-1 \le u_{n+1} \le 3$$

محقق

③ بما أن u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 3 فهي متقاربة.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3$$

لأن المتتالية متقاربة من 3

ط$_2$: نحل $f(x) = x$

التمرين 3: نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ كما يأتي:

$$u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}\,, u_0 = 1$$

① اثبت أن $0 \le u_n \le 4$ أياً كان العدد الطبيعي n

② اثبت أن المتتالية متزايدة.

③ استنتج أن المتتالية متقاربة.

الحل:

❶ نرمز للقضية: $E(n): 0 \le u_n \le 4$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$E(0):\ 0 \le u_0 \le 4 \Rightarrow 0 \le 1 \le 4$$

والقضية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$(*)\ E(n): 0 \le u_n \le 4$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$:

$$E(n+1): 0 \le u_{n+1} \le 4$$
$$0 \le \sqrt{12 + u_n} \le 4$$

من (*) نجد: $0 \le u_n \le 4$

نضيف 12:

$$12 \le 12 + u_n \le 16$$

نجذر الطرفين

$$0 < \sqrt{12} \le \sqrt{12 + u_n} \le 4$$

والقضية صحيحة من أجل $n + 1$

❷ لإثبات أن u_n متزايدة: $u_{n+1} - u_n \ge 0$

$$\Rightarrow (**):\ u_{n+1} \ge u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$
$$\sqrt{12 + u_{n+1}} \ge \sqrt{12 + u_n}$$

من (**) نجد: $u_{n+1} \ge u_n$

نضيف 12 للأطراف :

$$12 + u_{n+1} \ge 12 + u_n$$

نجذر

$$\sqrt{12 + u_{n+1}} \ge \sqrt{12 + u_n}$$
$$\Rightarrow u_{n+2} \ge u_{n+1}$$

u_{+n} متزايدة

❸ بما أن u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة.

التمرين 4: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بالعلاقة:

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}\ ; u_0 = \frac{1}{2}$$

① اثبت أن $0 < u_0 < 1$ أياً كانت $n \in \mathbb{N}$

② نعرف $(v_n)_{n\ge0}$ حيث $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ اثبت أن v_n هندسية واستنتج v_n بدلالة n

③ اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

❶ نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$$0 < u_0 < 1$$
$$0 < \frac{1}{2} < 1$$

نفرض صحة القضية من أجل n

$$(*):\ 0 < u_n < 1$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$0 < u_{n+1} < 1$$

من (*) نجد: $0 < u_n < 1$

نفرض $f(x) = u_{n+1} = \frac{x}{2-x}$

$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

f متزايد تماماً

$$f(0) < f(u_n) < f(1)$$

$$0 < 1 < \frac{u_n}{2-u_n} < 2$$

$$0 < u_{n+1} < 2$$

❷

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}} - 1$$

$$= \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2-u_n-u_n}{u_n}$$

$$= \frac{2(1-u_n)}{u_n} = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 2$$

v_n هندسية أساسها $q = 2$

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$v_n = 2^n$$

❸ $v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow 2^n + 1 = \frac{1}{u_n}$

$$u_n = \frac{1}{2^n + 1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

لأن $q = 2 > 1$

التمرين 5: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

① ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

② اثبت أن 2 راجح على u_n

③ احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n > n_0$ كان $u_n \in]1.9 , 2.1[$

الحل:

❶ دراسة اطراد المتتالية:

$$f(x) = u_n = \frac{2x-1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

f متزايد تماماً ومنه u_n متزايدة

❷ $u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$

$$= \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = \frac{-3}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0 \Rightarrow u_n < 2$$

فإن 2 عنصر راجح على u_n

❸ $|u_n - 2| < \frac{1}{10}$

$$\left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\frac{n+1}{3} > 10$$

$$n + 1 > 30 \Rightarrow n > 29$$

$$n_0 = 29$$

الجلسة التكرارية

التمرين 6: لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالتصريح: $u_0 = 1 , u_{n+1} = 3u_n - 4$

① احسب الحدود u_1, u_2 ثم ادرس اطراد u_n

② أثبت أن $v_n = u_{n+1} - u_n$ هندسية عيّن حدها الأول وأساسها.

③ اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

④ احسب نهاية المتتالية u_n هل هي متقاربة أم متباعدة؟

⑤ نعرف S_n بالعلاقة:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

عبر عن S_n بدلالة n

الحل:

❶ $u_1 = 3u_0 - 4 = 3 - 4 = -1$

$u_2 = 3u_1 - 4 = -3 - 4 = -7$

نخمن أن المتتالية u_n متناقصة

$u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow E(n): u_{n+1} \leq u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$u_1 \leq u_0 \Rightarrow -1 < 1$

نفرض صحة القضية من أجل n

$u_{n+1} \leq u_n \ (*)$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1} \Rightarrow 3u_{n+1} - 4 \leq 3u_n - 4$$

من (*) نجد: $u_{n+1} \leq u_n$

نضرب بـ 3:

$3u_{n+1} \leq 3u_n$

نطرح 4:

$3u_{n+1} - 4 \leq 3u_n - 4$

$u_{n+2} \leq u_{n+1}$

u_n متناقصة

❷ لإثبات أن v_n هندسية

$= 3u_{n+1} - 4 - 3u_n + 4$

$= 3(u_{n+1} - u_n)$

$v_{n+1} = 3v_n$

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 3 = q$

v_n هندسية أساها $q = 3$

$v_0 = u_1 - u_0 = -1 - 1 = -2$

❸ $v_n = v_0 . q^n = -2(3)^n$

لدينا $v_n = u_{n+1} - u_n$

$-2(3)^n = 3u_n - 4 - u_n$

$u_n = 2 - (3)^n$

❹ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 3^n = -\infty$

لأن $q = 3 > 1$

وبالتالي المتتالية u_n متباعدة إلى $-\infty$

❺

$S_n = a.\dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

$a = v_0 = 2$

$n = n + 1$

$q = 3$

$S_n = 2\left(\dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}\right) = 1 - 3^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$

تبدأ الحياة حيثما ينتهي الخوف.

الجلسة التكرارية

التمرين 7: لتكن المتتالية $u(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \,, u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

ولتكن $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

① أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n

② لتكن $(w_n)_{n\geq0}$ المتتالية المعرفة وفق:

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

نلاحظ أن

$$u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

أثبت أن $(w_n)_{n\geq0}$ حسابية، أساسها 2 ثم اكتب عبارة w_n بدلالة n

③ استنتج ان عبارة u_n بدلالة n تكتب بالشكل، ثم ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$

الحل:

❶

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n}{u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)}{u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n} = \frac{1}{2}$$

$$= const$$

v_n متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{1}{2}\right)$

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1$$

$$\Rightarrow v_n = v_0.\, q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

❷

$$w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n}$$

$$= \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{u_n}{v_n} = 2$$

$$w_{n+1} - w_n = 2 = r$$

$$w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$w_n - 2_0 = (n-0)r \Rightarrow w_n$$

$$= n.r + 2_0$$

$$\Rightarrow w_n = 2n - 1$$

❸

$$w_n = \frac{u_n}{v_n} \Rightarrow u_n = w_n.\, v_n$$

$$\Rightarrow u_n = (2n-1)\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2n-1}{2^n}$$

دراسة اطراد u_n:

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1) - 1}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)}$$

الجلسة التكرارية

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n-1}{2^n}}=\frac{2^n(2n+1)}{2^{n+1}(2n-1)}$$

$$=\frac{2n+1}{2(2n-1)}$$

$$n=0\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{-2}<1$$

$$n=1\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{2}>1$$

$$n=2\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{5}{6}<1$$

$$n=3\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{7}{10}<1$$

$(u_n)_{n\geq 2}$ **متناقصة**

سؤال 7 هام لهذا العام: أوجد نهاية التابع f المعطى بالعلاقة

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+1}$$

عند $+\infty$، ثم اعطِ عدداً حقيقياً A يحقق الشرط: إذا كان $x>A$ كان $f(x)\in$ $]2.9\,,3.1[$

الحل

تكرورية:

عندما يطلب "أعطِ عدداً يحقق الشرط $x>A$" نتبع ما يأتي: $]a,b[$

مركز: $c=\frac{a+b}{2}$

نصف القطر: $r=\frac{b-a}{2}$

القانون: $|f(x)-c|<r$

$$c=\frac{2.9+3.1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$r=\frac{3.1-2.9}{2}=0.1=\frac{1}{10}$$

$$|f(x)-3|<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{3x+4}{x+1}-3\right|<\frac{1}{10}$$

$$\left|\frac{3x+4-3x-3}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{1}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{|x+1|}<\frac{1}{10}$$

في جوار $+\infty$

$$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{10}$$

نقلب:

$$x+1>10\Rightarrow x>9$$
$$A=9$$

التمرين 8: ليكن f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ وفق

$$f(x)=\frac{2x^2-7x-3}{x-4}$$

① **اكتب $f(x)$ بالشكل**

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-4}$$

② **أثبت أن $y=ax+b$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لـ y مع C.**

الحل:

❶

$$\begin{array}{r|l} & 2x+1 \\ \hline x-4 & 2x^2-7x-3 \\ & \mp 2x^2 \pm 8x \\ \hline & +x-3 \\ & -x\pm 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-4}$$

❷ لإثبات أن $y = 2x+1$ مقارب مائل

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1+\frac{1}{x-4} - (2x+1)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-4} = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = 2x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي:

ط₁:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{1}{x-4}$$

$$x \in]-\infty, 4[\Rightarrow f(x) - y_\Delta < 0$$

C تحت المقارب

$$x \in]4, +\infty[\Rightarrow f(x) - y_\Delta > 0$$

C فوق المقارب

ط₂: تشكيل جدول

سؤال 8: ليكن التابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ; \ x \neq 0 \\ m & ; \ x = 0 \end{cases}$$

ما هي قيمة m التي تجعل f مستمر عند الصفر؟

الحل:

حتى يكون f مستمر عند الصفر:

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{0}{0} \text{ عدم تعيين}$$

نضرب ونقسم على مرافق البسط

$$\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} \times \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x^2-1}{(1+\sqrt{x^2+1})x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{2} = 0 = m$$

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0)$$

$$0 = 0$$

f مستمر عند الصفر

سؤال 9: التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x = 0 \\ x^2.\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & ; \ x \neq 0 \end{cases}$$

① **هل f اشتقاقي عند $a = 0$**

② **احسب f'**

الحل:

❶ لدراسة قابلية الاشتقاق

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2.\cos\frac{1}{x}}{x}$$

$$= x.\cos\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\Delta(x) = 0.\cos\infty$$

إحاطة

$$-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$$

نضرب بـ $x > 0$

$$-x \le x.\cos\frac{1}{x} \le x$$

$$\lim_{x\to0}(-x) = \lim_{x\to0}(x) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فانه حسب الإحاطة (1)

$$\lim_{x\to0} x.\cos\frac{1}{x} = 0$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر.

الجلسة التكرورية

❷

$$f'(x) = 2x.\cos\frac{1}{x}$$
$$-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right).x^2$$
$$= 2x.\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

التمرين 9: ليكن f التابع المعرف على $]2,+\infty[$ وفق: $f(x) = x - 4 + \sqrt{x-2}$

① ادرس تغيرات f على المجال $]2,+\infty[$ ونظم جدولاً بها.

② أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً.

③ اكتب معادلة المماس للخط C في $x = 3$.

الحل:

❶ f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]2,+\infty[$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = -2$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0$$

f متزايد تماماً

x	2	$+\infty$
f'	$\|$ $+$	
f	-2 $\nearrow$	$+\infty$

❷ f معرف ومستمر ومتزايد تماماً على المجال $]2,+\infty[$

$$f(\,]2,+\infty[\,) =]-2,+\infty[$$
$$0 \in]-2\,,+\infty[$$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

❸ **معادلة المماس تحتاج:**

- نقطة: $f(x_0) = y_0 \Rightarrow f(3) = 0 = y_0$
- ميل: $f'(x_0) = m \Rightarrow f'(3) = \frac{3}{2}$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y = \frac{3}{2}(x-3)$$

سؤال 10: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$9^x - 3^{x+1} + 2 = 0$$

الحل:

$$3^{2x} - 3.3^x + 2 = 0$$

نفرض $3^x = t$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$(t-1)(t-2) = 0$$
$$t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$t_2 = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \Rightarrow x.\ln 3 = \ln 2$$
$$x_2 = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

سؤال11 هام لهذا العام: حل المعادلة التفاضلية:

$$2y' + y = 1$$

ثم عين حلها f الذي يحقق $f(-1) = 2$

الحل:

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y$$
$$a = -\frac{1}{2}\,, \qquad b = \frac{1}{2}$$

حلها:

$$y = k.e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$$
$$y = k.e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

لحساب k:

$$f(-1) = 2 \Rightarrow x = -1\,, y = 2$$

الجلسة التكرورية

$$2 = k.e^{\frac{1}{2}} + 1$$
$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}}.e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$
$$\Rightarrow y = e^{-\frac{1}{2}(x+1)} + 1$$

التمرين 10: ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}^*$ وفق:

$$f(x) = \frac{(1-x)E(x)}{x}$$

① اكتب $f(x)$ بصيغة مستقلة عن $E(x)$ على المجال $]\frac{1}{2}, 2]$

② هل f مستمر عند $x = 1$؟ علل إجابتك.

③ هل f مستمر على المجال $]\frac{1}{2}, 2]$؟ علل.

④ ادرس نهاية f عند $+\infty$

الحل:

❶

$$E(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in]\frac{1}{2}, 1[\\ 1 & ; x \in [1, 2[\\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)(0)}{x} = 0 & ; x \in]\frac{1}{2}, 1[\\ \frac{1-x}{x} & ; x \in [1, 2[\\ \frac{(1-x)(2)}{x} = \frac{(1-2)^2}{2} = -\frac{2}{2} = -1 & ; x \neq 2 \end{cases}$$

❷

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 0 = 0$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1-1}{1} = 0 = f(1)$$

بالتالي f مستمر عند $x = 1$

❸ f مستمر عند $x = 1$ ولندرس الاستمرار عند $x = 2$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{1-x}{x} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(2) = -1$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to2^-} f(x) \neq f(2)$$

f غير مستمر عند $x = 2$ إذاً f غير مستمر على المجال $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

❹ $x - 1 < E(x) \leq x$

في جوار $+\infty$ فإن $(1-x)$ مقدار سالب

$$(1-x)(x-1) > (1-x)E(x) > (1-x)x$$

نقسم على $x > 0$ لأن x في جوار $+\infty$

$$\frac{(1-x)(x-1)}{x} > f(x) > (1-x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)(x-1)}{x} = -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

سؤال 12: جد الحل المشتركة لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$$

الحل:

شرط الحل: $x > 0, y > 0$

$$2\ln x + \ln y = 7 \quad \times 5$$
$$+\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \quad \times 1$$
$$13\ln x = 39$$
$$\ln x = \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow x = e^3$$

نعوض قيمة $\ln x$ في المعادلة الأولى

$$2(3) + \ln y = 7$$
$$\ln y = 1 \Rightarrow y = e$$
$$S = \{(e^3, e)\}$$

الجلسة التكرورية

سؤال 13: أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$$

الحل:

نفرض $X = e^x, Y = e^y$

$$\begin{cases} X - \frac{1}{e}Y = 1 \quad (1) \\ 2X + Y = 4 + e \quad (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) بـ -2 ونجمع

$$\left(\frac{2}{e}+1\right)Y = 2 + e \Rightarrow Y = e$$

$$X - \frac{1}{e}.e = 1$$

$$X = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = ln\,2$$

$$e^y = e \Rightarrow y = 1$$

تمرين 11: ليكن لدينا التابع المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$ **وفق:**

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - x - 2}$$

① عين الأعداد الحقيقية a, b, c التي تحقق:

$$f(x) = ax + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

② احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$

الحل:

❶ دائماً درجة البسط $\leq$ درجة المقام

$\Leftarrow$ قسمة اقليدية

$$\begin{array}{r|l} & x \\ x^2 - x - 2 & \mp x^3 \pm x^2 \pm 2x \\ & 0 + 0 + 3x - 3 \end{array}$$

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقام}}$$

$$f(x) = x + \frac{3x-3}{x^2-x-2}$$

$$\frac{3x-3}{(x-2)(x+1)} = \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

نوجد المقامات ونحذفها

$$3x - 3 = Bx - 2B + Cx + C$$

$$3x - 3 = (B + C)x - 2B + C$$

$$3 = B + C\,..(1)$$

$$\underline{-3 = -2B + C\,..(2)}$$

$$6 = 3B$$

$$B = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow 3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$$

$$f(x) = x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}$$

②

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right) d$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2\,ln(x+1) + ln(2-x)\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} + 2\,ln\,2\right] - [ln\,2]$$

$$= \frac{1}{2} + ln\,2$$

سؤال 14 مهم: احسب التكامل:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx$$

الحل:

$$I = \int x(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I = \int [(x+1) - 1].(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$I = \int \left((x+1)(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$I = \int \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}\right] dx$$

الحاسبة التكرورية

$$I=\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+c$$

السؤال 16 هام لهذا العام:

ليكن لدينا التابع: $f(x)=3^{x^2-2x}$

② **احسب** $f'(0), f'(x), f(0)$

② **ثم استنتج**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2-2x}-1}{x}$$

الحل:

❶ $f(x)=e^{(x^2-2x)\,ln\,3}$

$$f(0)=3^0=1$$
$$f'(x)=(2x-2)\,ln(3)\,e^{(x^2-2x)\,ln\,3}$$
$$f'(0)=-2\,ln\,3$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2-2x}-1}{x-0}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$
$$=f'(0)$$

❷

حسب تعريف العدد المشتق

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x^2-2x}-1}{x}=f'(0)=-2\,ln\,3$$

السؤال 15:

ليكن التابع المعرف وفق:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

اكتب ما داخل الجذر بالصيغة القانونية، ثم استنتج وجود مقارب في جوار $+\infty$

الحل:

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4-4+5}$$
$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2+1}$$

استنتاج المقارب:

$$f(x)=\sqrt{(x+2)^2\left(1+\frac{1}{(x+2)^2}\right)}$$
$$f(x)=|x+2|\sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}$$

في جوار $+\infty$: $|x+2|=x+2$

$$\frac{f(x)}{x+2}=\sqrt{1+\frac{1}{(x+2)^2}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+2}=\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}=1$$

$y=x+2$ **مقارب مائل في جوار** $+\infty$

التمرين 12 هام لهذا العام

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{2x}{|x|+1}$$

① **هل f قابل للاشتقاق عند الصفر؟**

② **اكتب معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها** $x=0$.

الحل:

❶

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1} & ;x>0\\[2mm] \dfrac{2x}{-x+1} & ;x<0\\[2mm] 0 & ;x=0\end{cases}$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ ;x<0$$

الجلسة التكرارية

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{2x}{-x+1}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{x(-x+1)}=2$$
$$=f'(0^-)$$

f قابل للاشتقاق من اليسار عند الصفر.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\,;x>0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x}{x+1}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{x(x+1)}=2$$
$$=f'(0^+)$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر لأن

$$f'(0^+)=f'(0^-)$$

② معادلة المماس:

$$f(0)=0$$
$$f'(0)=2$$
$$y-0=2(x-0)$$
$$\boxed{y=2x}$$

مسألة 1: ليكن C الخط البياني للتابع

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

① ادرس نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبين إذا كانت له نهاية حقيقية عند $x=-1$

② أوجد معادلة المقارب الأفقي للخط C وادرس الوضع النسبي لهذا المقارب مع C.

③ احسب $f'(x)$ ثم ادرس تغييرات f ونظم جدولاً بها وعين القيم الحدية.

④ أوجد معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها $x=-2$

⑤ ارسم C واحسب مساحة السطح المحصور بين محور الإحداثيات والملحني C والمستقيم $x=3$

الحل:

① $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

② $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $\pm\infty$

الوضع النسبي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f-0$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
الوضع النسبي		تحت C		فوق C			

③ $f'(x)=\frac{-x-3}{(x+1)^3}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال

$$]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -x-3\Rightarrow x=-3$$
$$f(-3)=-\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
f	0	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty \| +\infty$	$\searrow$	0

$f(-3)=-\frac{1}{4}$ قيمة حدية صغرى

④ $f(-2)=0\ ,\ f'(-2)=+1$

$$T: y-y_0=m(x-x_0)$$
$$T: y=x+2$$

⑤ الرسم:

مقاربات:

$y=0$ أفقي، $x=-1$ شاقولي

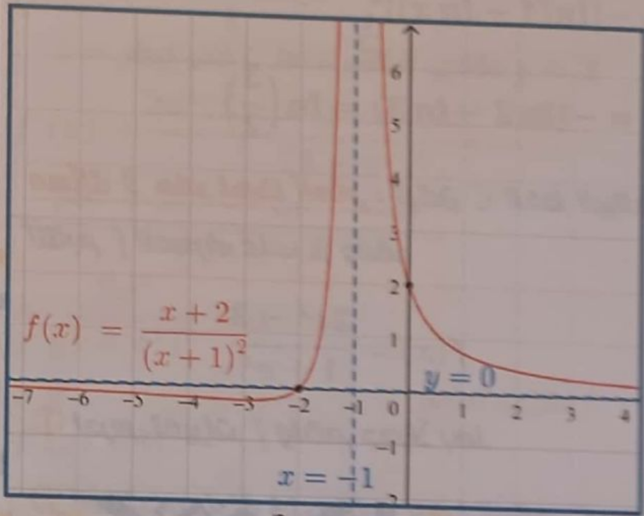
نقاط الجدول:

$$(-\infty,0)\ \left(-3,-\frac{1}{4}\right)\ (-1,+\infty)$$

$(-1,+\infty)\ (+\infty,0)$

نقاط مساعدة:

$x=0 \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow (0,2)$
$y=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow (-2,0)$



$$S=\int_0^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$$

مسألة 2 : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)}$$

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

② استنتج ما للخط C من مقاربات، وعين القيمة الحدية.

③ ارسم ما وجدته من مستقيمات، ثم ارسم C.

④ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين

$$x=\frac{1}{e^2}\ ,\ x=\frac{1}{e}$$

الحل:

❶ f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0,e[\cup]e,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-x.\ln x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^-} f(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to e^+} f(x)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$f'(x)=\frac{0-\left(1[1-\ln x]+x\left[-\frac{1}{x}\right]\right)}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{-1+\ln x+1}{x^2(1-\ln x)^2}=\frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1$
$f(1)=1$

الجلسة التكرورية

x	0		1		e		$+\infty$
f'	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

❷ $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

❷ **الرسم:**

مقاربات:

$x = e$ شاقولي و $x = 0$ شاقولي

$y = 0$ أفقي

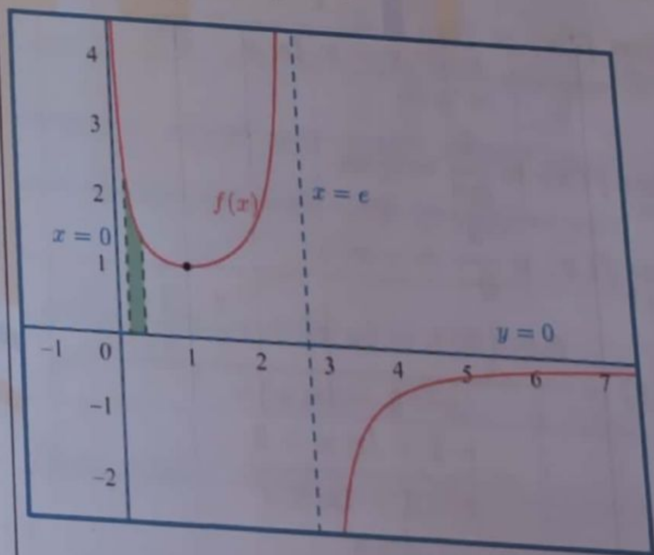
نقاط الجدول:

فرع(1): $(0,+\infty)\ (1,1)\ (e,+\infty)$

فرع (2): $(e,-\infty)\ (+\infty,0)$

نقاط مساعدة: لا يوجد

$x = 0 \notin D_f \,،\, f(x) \neq 0$



❸ $$S = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$$

$$\frac{u'}{u} \Rightarrow = -\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} \frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln x}\,dx$$

$$= -[\ln(1-\ln x)]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$S = -(\ln 2 - \ln 3) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

مسألة 3 هام لهذا العام : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{1 + e^x}$$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② استنتج معادلة كل مقارب للخط البياني C

③ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

④ ارسم كل مقارب والمماس T وارسم الخط البياني C

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الفواصل والمستقيمين $x = 2\,, x = 1$

⑥ عين العدد الحقيقي A الذي يحقق: $f(x) \in]1.9\,,2.1[$ عندما $x > A$

الحل:

❶ f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{1} = -3$$

$y = -3$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(2-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

$y = 2$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{2e^x(1+e^x) - e^x(2e^x-3)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{2e^x + 2e^{2x} - 2e^{2x} + 3e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{5e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

f متزايد تماماً

$f'(x) \neq 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	-3	$\nearrow$	2

2 $y = 2\,, y = -3$

3

نقطة التماس $f(0) = -\frac{1}{2}\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$f'(0) = \frac{5}{4} \quad m = \frac{5}{4}$

$T: y - y_0 = m(x - x_0)$

$T: y + \frac{1}{2} - \frac{5}{4}x$

$T: y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

4 الرسم:

مقاربات + معادلات المماس

$y = 2$ مقارب أفقي

$y = -3$ مقارب أفقي

$y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}, 0\right)$

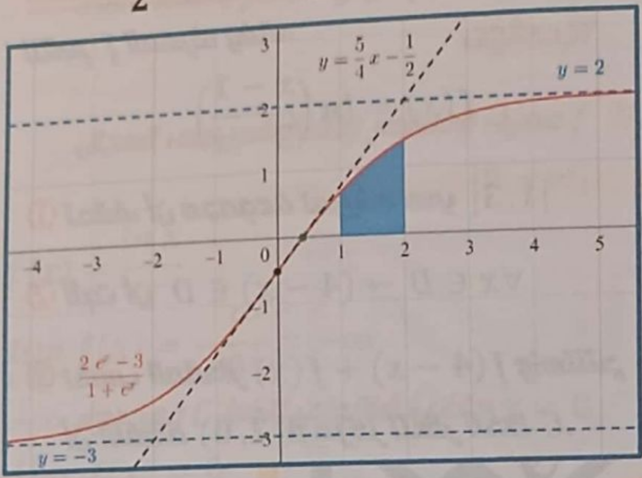
نقاط الجدول

$(-\infty, -3)\ (+\infty, 2)$

نقاط مساعدة:

$y = 0 \Rightarrow 2e^x - 3 = 0 \Rightarrow 2e^x = 3$

$\Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{3}{2}$



5

$$S = \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$S = \int_1^2 \frac{2e^x - 3}{1+e^x}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 1+e^x & 2e^x - 3 \\ & \mp 2e^x \mp 2 \\ \hline & -5 \end{array}$$

$$S = \int_1^2 \left(2 - \frac{5}{1+e^x}\right) dx$$

$$S = \int_1^2 \left(2 - \frac{5e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) dx$$

$$S = [2x + 5\ln(e^{-x}+1)]_1^2$$

$$S = 4 + 5\ln(e^{-2}+1) - (2 + 5\ln(e^{-1}+1))$$

$$S = 4 + 5\ln\left(\frac{1+e^2}{e^2}\right) - 2 - 5\ln\left(\frac{1+e}{e}\right)$$

$$S = 2 + 5\ln\left(\frac{1+e^2}{e^2}\cdot\frac{e}{1+e}\right)$$

$$S = 2 + 5\ln\left(\frac{e+e^3}{e^2+e^3}\right) > 0$$

مسألة 4 هام لهذا العام: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

① تحقق أن مجموعة تعريفه هي $]1,3[$

② أثبت أن $\forall x \in D \to (4-x) \in D$

③ احسب المقدار $f(4-x)+f(x)$ واستنتج أن النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C.

④ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

⑤ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

الحل:

① معرف بشرط $\frac{x-1}{3-x} > 0$

$(x-1)(3-x) > 0$

$x = 1\,, x = 3$

x	$-\infty$ 1 3 $+\infty$
$(x-1)(3-x)$	$-$ 0 $+$ 0 $-$

$D_f =]1,3[$

② $x \in]1,3[$

نضرب بـ -1

$-x \in]-3,-1[$

نضيف 4

$4-x \in]1,3[\Rightarrow 4-x \in D$

③ $f(4-x)+f(x) =$

$$\ln\left(\frac{4-x-1}{3-(4-x)}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3-x}{-1+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

حسب خواص اللوغاريتم

$$\ln a + \ln b = \ln(a.b)$$

$$= \ln\left(\frac{3-x}{-1+x} \times \frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$= \ln(1) = 0$$

لإثبات أن $A(2,0)$ مركز تناظر لـ C

$4-x \in D$ **وهذا محقق من الطلب الثاني**

$f(4-x)+f(x) = 0$ **محقق من الطلب الثالث**

$\Leftarrow A(2,0)$ **مركز تناظر لـ C**

④ f **معرف ومستمر واشتقاقي على المجال** $]1,3[$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ln\left(\frac{0}{2}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

$x = 1$ **مقارب شاقولي للخط C في جوار** $-\infty$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \ln\left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$x = 3$ **مقارب شاقولي للخط C في جوار** $+\infty$

$$f(x) = \ln(x-1) - \ln(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3-x}$$

$$f'(x) = \frac{x-1+3-x}{(x-1)(3-x)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)(3-x)} > 0$$ لا ينعدم

x	1		3
f'	‖	$+$	‖
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

⑤ **الرسم:**

$x = 1$ **شاقولي**، $x = 3$ **شاقولي**

نقاط الجدول:

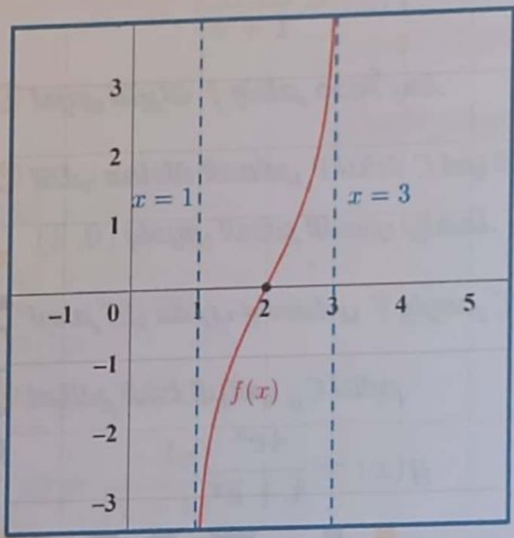
$(1,-\infty)\ \ (3,+\infty)$

نقاط مساعدة:

$x = 0 \notin D$

الجلسة التكرارية

$$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$
$$\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{3-x} = 1$$
$$3 - x = x - 1 \Rightarrow 2x \Rightarrow x = 2$$
$$\Rightarrow (2,0)$$



مسألة 5: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$$

① أثبت أن التابع f فردي وما الصفة الهندسية

② ادرس تغيرات f على المجال $]0,+\infty[$ دلّ على المقاربات والقيم الحدية لـ C؟

③ اكتب معادلة المماس لـ C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على D_f.

⑤ استنتج رسم الخط البياني للتابع

$$g(x) = \frac{\ln|x| + x}{x}$$

الحل:

❶ $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$;

$-x \in]-\infty, [\cup]0, +\infty$

$$f(-x) = \frac{\ln|-x|}{-x} = -\frac{\ln|x|}{x} = -f(x)$$

وبالتالي التابع فردي متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

❷ **f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال** $]0,+\infty[$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\infty}{0^+} = -\infty$$

$x = 0$ **مقارب شاقولي للخط C في جوار** $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

لأن $x > \ln x$

$y = 0$ **مقارب أفقي للخط C في جوار** $+\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$

$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$

$\Rightarrow x = e$

$$f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$$

x	0		e		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

$f(e) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى

❸ $f(1) = y_0$

$f'(1) = \frac{1}{1} = 1 = m$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y = 1(x - 1)$

$T: y = x - 1$

الجلسة التكرارية

④ **الرسم:**

مقاربات:

$x = 0$ **مقارب شاقولي**

$y = 0$ **مقارب أفقي**

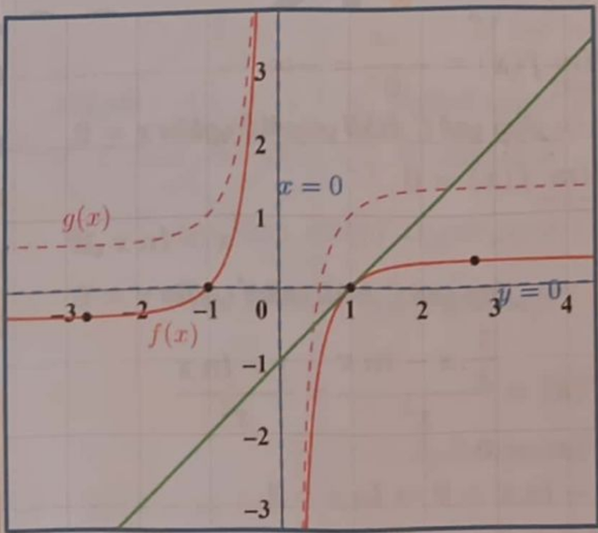
المماس:

$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$

$y = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$

نقاط الجدول:

$(0,-\infty)\ \left(e,\dfrac{1}{e}\right)\ (+\infty,0)$



⑤

$$g(x) = \frac{\ln|x|}{x} + \frac{x}{x}$$

$$g(x) = f(x) + 1$$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو انسحاب للخط f بمقدار 1 للأعلى.

مسألة 6:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة:

$$f(x) = \frac{4}{1+e^x}$$

① **ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.**

② **اكتب معادلة المماس T للخط C في النقطة $(0,2)$ وادرس الوضع النسبي بينهما.**

③ **ارسم كل مقارب والمماس T وارسم C**

④ **استنتج الخط البياني C_g للتابع**

$$g(x) = \frac{4e^x}{1+e^x}$$

⑤ **احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الاحداثيات والمستقيمين $x = 1$**

الحل:

① **f معرف ومستمر واشتقاقي على** $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{4}{1} = 4$$

$y = 4$ **مقارب أفقي للخط C في جوار** $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{4}{\infty} = 0$$

$y = 0$ **مقارب أفقي للخط C في جوار** $+\infty$

$$f'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

f متناقص تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$-$	
f	4	$\searrow$	0

$$f(0) = 2$$

$$f'(0) = \frac{-4}{4} = -1$$

$$y - 2 = -1(x - 0)$$
$$T: y = -x + 2$$

تكرورية امتحانية:

لدراسة الوضع النسبي بين تابع ومعادلة مماس ندرس تغيرات الفرق

دراسة الوضع النسبي

$$g(x) = f(x) - y_T$$
$$g(x) = \frac{4}{1+e^x} + x - 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$
$$g'(x) = \frac{-4e^x}{(1+e^x)^2} + 1$$
$$g'(x) = 0$$
$$\frac{-4e^x}{1+2e^x+e^{2x}} = -1$$
$$-4e^x = -1 - 2e^x - e^{2x}$$
$$e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$$
$$(e^x - 1)^2 = 0$$
$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$
$$g(0) = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
الوضع النسبي	تحت C			فوق C	

3 **الرسم:**

مقاربات: $y = 4$, $y = 0$ **أفقي**

$y = -x + 2$ **مائل**

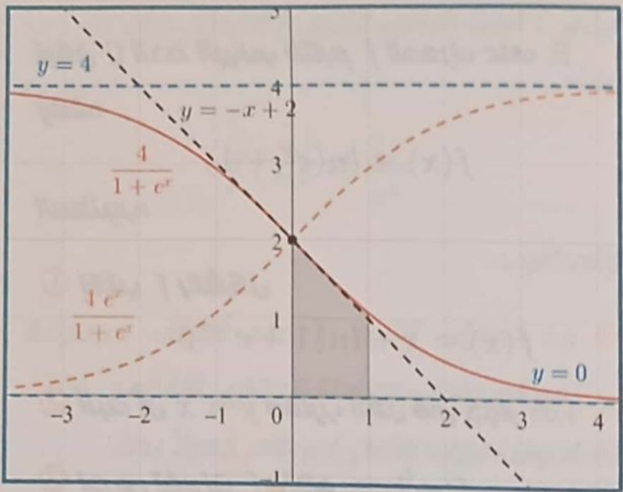
$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0,2)$$
$$y = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2,0)$$

نقاط الجدول:

$(-\infty, 4)$ $(+\infty, 6)$

نقاط مساعدة

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 2$$



4

$$f(-x) = \frac{4}{1+e^{-x}} = \frac{4}{1+\frac{1}{e^x}} = \frac{4}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$
$$= \frac{4e^x}{e^x+1} = g(x)$$

C_g **نظير** C_f **بالنسبة لـ** yy'

5

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\int_0^1 \frac{4}{1+e^x}\,dx$$
$$\int_0^1 \frac{-4e^{-x}}{e^{-x}+1}\,dx$$
$$[-4\ln(e^{-x}+1)]_0^1$$
$$= -4\ln(1+e) + 4 + 4\ln 2$$

الجلسة التكرورية

مسألة 7 : هام لهذا العام

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x) = ln(e^x + 1)$$

المطلوب:

① **اكتب f بالشكل** $f(x) = x + ln(1 + e^{-x})$

② **أثبت أن $y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$**

③ **ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.**

④ **ارسم Δ ثم ارسم C**

⑤ **استنتج رسم الخط البياني** $g(x) = x - ln(e^x + 1)$

⑥ **نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بالعلاقة التحريجية** $u_{n+1} = f(u_n)\ , u_0 = 1$ **أثبت أن u_n متزايدة تماماً.**

الحل:

❶ $$f(x) = ln\left(e^x\left[1 + \frac{1}{e^{-x}}\right]\right)$$
$$f(x) = ln\, e^x + ln(1 + e^{-x})$$
$$f(x) = x + ln(1 + e^{-x})$$

❷ **لإثبات أن $y = x$ مقارب مائل يجب أن نبرهن**

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}(x + ln(1 + e^{-x}) - x)$$
$$\lim_{x\to+\infty}(ln(1 + e^{-x})) = ln(1) = 0$$

بما أن نهاية الفرق تساوي الصفر فإن $y = x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

❸ **f معرف ومستمر واشتقاقي على** $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} ln(e^{-\infty} + 1) = ln(1) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

f متزايد تماماً

x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❹ **الرسم:**

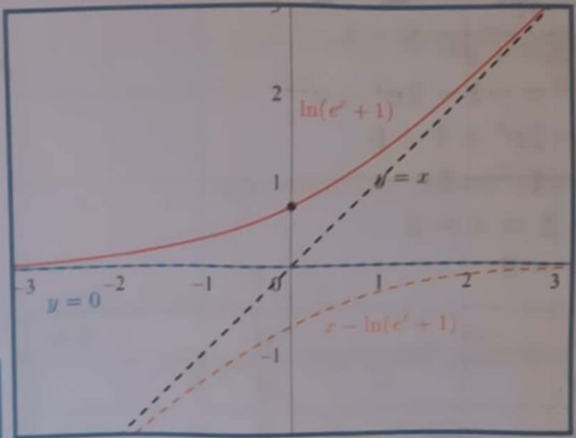
مقاربات:

- $y = 0$ **مقارب افقي في جوار** $-\infty$
- $y = x$ **مقارب مائل في جوار** $+\infty$

نقاط الجدول: $(-\infty, 0)(+\infty, +\infty)$

نقاط مساعدة:

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = ln\, 2 \Rightarrow (0, ln\, 2)$$



❺

$$g(x) = x - ln(e^x + 1)$$
$$f(-x) = ln(e^{-x} + 1)$$
$$= ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$$
$$= ln\left(\frac{1 + e^x}{e^x}\right)$$
$$= ln(1 + e^x) - ln\, e^x$$
$$= ln(1 + e^x) - x$$
$$f(-x) = -(x - ln(1 + e^x))$$
$$= g(-x)$$

الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة للمبدأ

6

$$u_{n+1} = f(u_n) = ln(e^{u_n} + 1)$$

نرمز للقضية $E(n)$

$$u_{n+1} > u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

$u_1 > u_2 \Rightarrow ln\, 2 > 0$ محققة

نفرض صحة القضية من أجل n

$$u_{n+1} > u_n$$

نبرهن صحة القضية من أجل $n + 1$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

نأخذ f الأطراف لـ * لأن f متزايد تماماً

$$f(u_{n+1}) > f(u_n)$$

$$u_{n+2} > u_{n+1}$$

والعلاقة محققة

مسألة 8 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$$f(x) = \frac{2x}{e^x}$$

والمطلوب:

1. جد نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة المقارب الأفقي.
2. ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
3. في معلم متجانس ارسم الخط C.
4. احسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحوري الإحداثيات والمستقيم $x = 1$.
5. استنتج رسم الخط C_1 للتابع g المعرف وفق $g(x) = 2xe^x$.
6. أثبت أن $f(x)$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y' + y = 2e^{-x}$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

2. f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2e^x - 2xe^x}{e^{2x}}$$

$$f'(x) = \frac{2 - 2x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \frac{2}{e}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0

③ الرسم:

مقاربات:

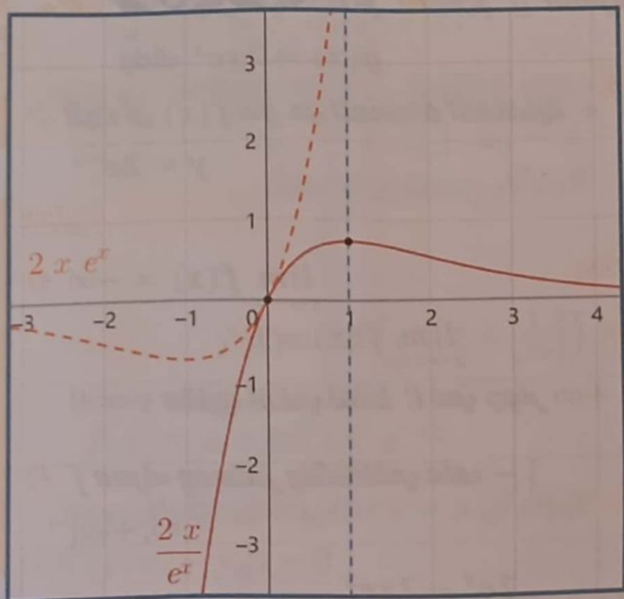
$y=0$ مقارب أفقي

نقاط الجدول:

$$(-\infty,-\infty)\ \left(1,\frac{2}{e}\right)\ (+\infty,0)$$

نقاط مساعدة:

$$x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$$



④ $S=\int_0^1 f(x)\,dx$

$$S=\int_0^1 2x.e^{-x}\,dx$$

تحتاج تجزئة

$$u=2x \Rightarrow u'=2$$
$$v'=e^{-x} \Rightarrow v=-e^{-x}$$
$$S=[-2x.e^{-x}]_0^1+\int_0^1 2e^{-x}\,dx$$

$$S=[-2x.e^{-x}]_0^1-[2e^{-x}]_0^1$$
$$S=\frac{2e-4}{e}$$

⑤
$$f(x)=2x.e^{-x}$$
$$\Rightarrow f(-x)=-2xe^{x}$$
$$\Rightarrow= f(-x)=2x.e^{x}$$
ومنه $g(x)=-f(-x)$

C' نظير C بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

⑥

$$y=f(x)=\frac{2x}{e^x}$$
$$y'=f'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$$
$$y'+y=\frac{2x}{e^x}+\frac{2-2x}{e^x}=\frac{2}{e^x}$$
$$y+y'=2e^{-x}$$

مسألة 9:هام لهذا العام

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $I=$ وفق $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f(x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

① أثبت أن المستقيم $d: y=2x-1$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$

② ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f

③ أثبت أن $f(x)+f(-x)=-2$

④ استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$

⑤ ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f

⑥ استنتج رسم C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x)=-2x+1-ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

الحل:

1

$$f(x)-y_d = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = ln\,1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d] = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = ln\,1 = 0$$

فالمستقيم $d : y = x-4$ **مقارب للخط** C **عند** $-\infty, +\infty$

الوضع النسبي: ندرس إشارة $f(x)-y_d = ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

لذا نقارن $\frac{x+1}{x-1}$ **مع** 1 **(باختيار رقم)**

عند $x\in\,]-\infty,-1[$ **نجد:** $\frac{x+1}{x-1} > 1$

بأخذ ln

$$ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < ln\,1$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0$$

$$\Rightarrow f(x)-y_d > 0$$

C **فوق** d

عندما $x\in\,]1,+\infty[$ **نجد:** $\frac{x+1}{x-1} < 1$

$$ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < ln\,1$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < 0$$

$$\Rightarrow f(x)-y_d < 0$$

C **تحت** d

2 f **مستمر واشتقاقي على كل من** $]-\infty,-1[\ ,\ ]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty - ln\,1 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty - ln\,1 = +\infty$$

حيث $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$

لإيجاد النهاية عند 1 **نضع:** $u(x) = \frac{x+1}{x-1}$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 1 - \lim_{u\to+\infty} ln\,u = -\infty$$

فالمستقيم $x=1$ **مقارب شاقولي لـ** C

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -3 - \lim_{u\to0^+} ln\,u = +\infty$$

فالمستقيم $x=-1$ **مقارب شاقولي لـ** C

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 2 - \frac{\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$= 2 - \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2(x+1)(x-1)+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2(x^2-1)+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \notin I$$

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
f'		$+$	‖	‖	‖	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖	‖	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3

$$\ell_1 = f(x) + f(-x)$$

$$= 2x - 1 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \left(-2x - 1 - ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)\right)$$

$$= -2 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$$

$$= -2 - \left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)\right)$$
$$= -2 - \left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$
$$= -2 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$= -2 - \ln(1) = -2 = \ell_2$$

④ تكون $A(0,-1)$ مركز تناظر للخط C إذا
تحقق الشرطان

1- أياً كانت $x \in D_f$ فإن $2x_0 - x \in D_f$

2- $f(x) + f(2x_0 - x) = 2y_0$

حيث $x_0 = 0 \, , y_0 = -1$

$2x_0 - x = -x$

فيكون الشرط (2) = $f(x) + f(-x)$

$2(-1)$ وهو ما برهناه في الطلب السابق

ولنتحقق من الشرط (1)

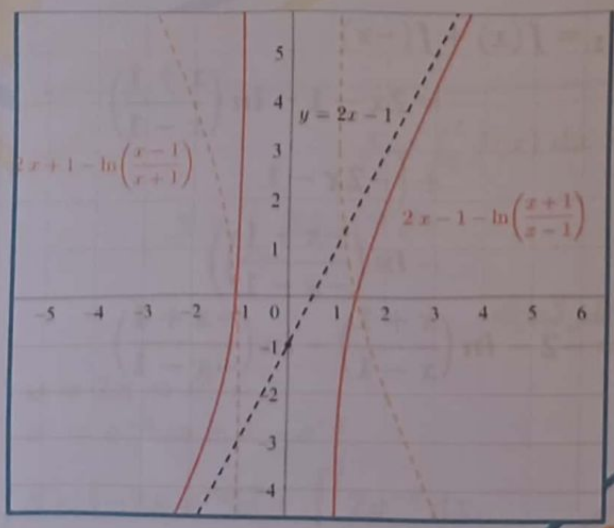
لدينا

$x \in D_f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$\Rightarrow -x \in$ مركز تناظر $A(0,-1)$

$]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[= D_f$

⑤ الرسم:



⑥
$$g(x) = -\left(2x - 1 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$
$$= -\left(2x - 1 - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$
$$= -f(x)$$

إذن C_g هو نظير C_f بالنسبة إلى المحور xx'

ماستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً

الجلسة التكرورية

مخطط أفكار الاشعة :

قانون البعد بين نقطتين: (طول قطعة مستقيمة)

ليكن $A(x_1, y_1, z_1)\ B(x_2, y_2, z_2)$

البعد بين A, B:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

احداثيات منتصف قطعة مستقيمة:

$B \quad I \quad A$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

طويلة الشعاع: (نظيم الشعاع)

$\vec{n}(a, b, c)$

يعني طول الشعاع ورمزه $\|\vec{n}\|$

قانونه:

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ليكن الشعاعان $\vec{u}(x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v}(x_v, y_v, z_v)$

الارتباط الخطي لشعاعين:

معنى الارتباط الخطي هو توازيهما

لإثبات أن شعاعين مرتبطين خطياً: لدينا طريقتين:

1) إما أحدهما ينتج عن الآخر بضربه بعدد $a \neq 0$

$$\vec{v} = a.\vec{u}$$

نستخدمها عندما يكون لدينا علاقة

2) أو تناسب مركبات الشعاعان أي أن:

$$\frac{x_v}{x_u} = \frac{y_v}{y_u} = \frac{z_v}{z_u}$$

نستخدمها عندما يكون لدينا مركبات

وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة:

كيف نثبت أن A, B, C على استقامة واحدة:

1) نشكل شعاعين من منطلق واحد
2) نثبت أنهما مرتبطان خطياً

تعامد الأشعة

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

$$(x_u, y_u, z_u).(x_v, y_v, z_v) = 0$$

$$x_u.x_v + y_u.y_v + z_u.z_v = 0$$

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

لإثبات أن $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ مرتبطة خطياً يجب أن نبرهن تحقق الشرطين:

1) نوجد شعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ ليسا مرتبطين خطياً.
2) نكتب الشعاع الثالث بدلالتهما أي أن:

$$\boxed{\vec{w} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v}\ ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

تكرورية أهم من حياتي:

عند حل جملة ثلاث معادلات بمجهولين:

1) نختار معادلتين فقط
2) نوجد قيمة المجهولين
3) نعوض قيمة المجهولين في المعادلة الثالثة

- فاذا تحققت المعادلة الثالثة فالأشعة مرتبطة خطـ
- وإذا لم تتحقق المعادلة فالأشعة غير مرتبطة خطيـ

الجلسة التكرورية

مركز الأبعاد المتناسبة (م-أ-م)

يعني مركز التوازن

كيف نحدد مركز الأبعاد المتناسبة:

لتكن النقطتان المثقلتان $(A,\alpha),(B,\beta)$ يكون $(G,\alpha+\beta)$ م-أ-م لـ A,B إذا تحقق:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

حيث $\alpha+\beta\neq 0$

لتحديد مكانه: نحتاج إلى نقطتين مثقلتين فقط

إما:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{(B\text{ ثقل})\ \beta}{(\text{ثقل م.أ.م})\ \alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

أو:

$$\overrightarrow{BG}=\frac{(A\text{ ثقل})\ \alpha}{(\text{ثقل م.أ.م})\ \alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$$

تكرورية: إذا كانت النقطتان $(A,\alpha),\ (B,\beta)$ وكان $\alpha=\beta$ فإن G منتصف AB

الخاصة التجميعية:

لتكن النقاط $(A,\alpha)\ (B,\beta)(C,\gamma)$

وكان $(D,\alpha+\beta)$ م-أ-م لـ A,B

فإن G م-أ-م لـ D,C هو م-أ-م لكل الثلاثي والعكس صحيح

تكرورية خطيرة:

عندما يذكر أو ذكر في نص السؤال أن G مركز ثقل المثلث ABC أو رباعي الوجوه $ABCD$ هذا يعني:

- مثلث: G م-أ-م للنقاط $(A,1)\ (B,1)\ (C,1)$
- رباعي: G م-أ-م للنقاط $(A,1)\ (B,1)\ (C,1)\ (D,1)$

كيف نثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة:

لدينا طريقتين:

3) نشكل شعاعين من منطلق واحد ونثبت أنهما مرتبطان خطياً.

(تستخدم عند وجود احداثيات النقاط)

4) أو أن نبرهن أن احدى النقاط هي م-أ-م للنقاط الباقية.

(تستخدم عند وجود أثقال للنقاط)

تكرورية:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{B\text{ ثقل}}{G\text{ ثقل}}\overrightarrow{AB}$$

G م-أ-م لـ A,B

$(G,\text{المقام})\quad(B,\text{البسط})\quad(A,\text{المقام}-\text{البسط})$

تكرورية امتحانية:

لإثبات أن نقطة ما M هي م-أ-م للنقاط $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ يجب أن نبرهن أن:

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}\ ;\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

إيجاد احداثيات مركز أبعاد متناسبة:

لتكن النقاط

$A(x_0, y_0, z_0)\ , \alpha$

$B(x_B, y_B, z_B)\ ; \beta$

$C(x_c, y_c, z_c)\ ; \gamma$

لإيجاد احداثيات G مركز أبعاد متناسبة لـ A, B, C

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

معادلة الكرة:

لكتابة معادلة الكرة نحتاج:

مركز الكرة (x_0, y_0, z_0)

نصف القطر R

شكل معادلة الكرة:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

أولاً: المعلم المتجانس:

هو $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

يستخدم لإيجاد احداثيات رؤوس المضلعات

حصراً مع الأشكال: المكعب

المكعب $ABCDEFGH$ فيه الضلع = الحرف

تكرورية: إذا لم يشير إلى طول ضلع المركب فهو 1

ثانياً: المعلم الكيفي:

ليس بالضرورة: أن تكون أطوال أضلاعه متساوي ولا متعامدة

يستخدم مع الأشكال:

متوازي المستطيلات

متوازي السطوح

رباعي الوجوه

تكرورية إمتحانية:

لإثبات أن $K \in$ إلى المستوي (BCG) يكفي أن نبرهن أن K م – ا – م لـ $B.C.G$

$$\alpha\overline{KB} + \beta\overline{KC} + \gamma\overline{KG} = \overline{0}$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

تكرورية:

إذا كان G م – ا – م لـ $(A.\alpha)\ (B.\beta)$

1- إذا كان لـ $\alpha.\beta$ نفس الإشارة $\Leftarrow G$ يقع ضمن $[A.B]$

2- إذا كان لـ $\alpha.\beta$ إشارتين مختلفتين $\Leftarrow G$ يقع خارج $[A.B]$

تكرورية قبل الحل:

إذا ورد أوجد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق الحالة الأولى:

نصف قطر $\|\overline{MA}\| = K$

تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها K

الحالة الثانية:

$$\|\overline{MA}\| = \|\overline{AB}\|$$

تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها AB

الحالة الثالثة:

$$\|\overline{MA}\| = \|\overline{MB}\|$$

تمثل مستوي محوري للقطعة AB

الجداء السلمي للأشعة في الفراغ:

الناتج هو عدد له ثلاث قوالب:

$$\overline{V}(x_1, y_1, z_1) \quad \overline{U}(x_2, y_2, z_2)$$

1- إذا علمنا إحداثيات الشعاعين:

$$\overline{V}.\overline{U} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

2- عند وجود زاوية بينهما θ

$$\overline{U}.\overline{V} = \|\overline{U}\|.\|\overline{V}\|.\cos\theta$$

حيث θ هي الزاوية بين الشعاعين $\overline{U}, \overline{V}$

تكرورية هامة: دائماً يجب أن يكون الشعاعين من منطلق واحد

3- مع وجود معطيات خاصة:

$$\|\overline{U}\| \text{ و } \|\overline{V}\| \text{ و } \|\overline{U} + \overline{V}\|$$

$$\bar{u}.\bar{v} = \frac{1}{2}\left[\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2\right]$$

تكرورية هامة:

1- لا يجوز استخدام الجداء السلمي في المعلم الكيفي.

2- يجوز استخدام الجداء السلمي في المعلم المتجانس.

المستوي: P, Q

هو سطح لا بداية له ولا نهية له يتألف من عدد لامتناه من النقاط

معادلة المستوي تحتاج :

1- نقطة $\in$ إليه (x_0, y_0, z_0)

2- (a, b, c) $\overline{n}$ شعاع عمودي على معادلة المستوي ندعوه الناظم

شكل معادلة المستوي:

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0)}$$

طريقة الاستنتاج:

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM}$$

حيث: $\overline{n}(a, b, c)$ و $A\ (x_0, y_0, z_0)$ و $M\ (x, y, z)$

$$\overline{AM}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + C(z - z_0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

تكرورية: عندما يمس مستوي كرة فإن $dist = R$

تكرورية هامة: المستويان المتوازيات يقبلان ناظماً مشترك

الجلسة التكرورية

الوضع النسبي لمستويين:

ليكن لدينا:

$$P_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\overline{n}_1(a_1, b_1, c_1)$$

$$P_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$\overline{n}_2(a_2, b_2, c_2)$$

ادرس الوضع النسبي بين P_1 و P_2

الحالة الأولى:

$\overline{n}_1, \overline{n}_2$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow$ P_1 و P_2 متوازيان

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

حالة خاصة:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

P_1 و P_2 متطابقان

الحالة الثانية:

$\overline{n}_1, \overline{n}_2$ مستقلان خطياً $\Leftarrow$ P_1 و P_2

1- متقاطعان ويوجد فصل مشترك

2- متعامدان $\overline{n}_1 . \overline{n}_2 = 0$

المستقيم d أو Δ:

هو خط يحوي عدد لا متناه من النقاط ولا بداية ولا نهاية له

معادلة المستقيم (المعادلات الوسيطية) تحتاج نقطة تنتمي إليه

$$(x_0, y_0, z_0)$$

وشعاع يوازيه ندعوه شعاع التوجيه $\vec{v}(a, b, c)$

شكل المعادلة الوسيطية:

مستقيم (AB)

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

حيث: $t \in R$

تكرورية عندما يعامد مستقيم مستوي ما فإن ناظم المستوي هو نفسه شعاع التوجيه

الوضع النسبي لمستقيمان:

ليكن المستقيم d_1 وشعاع التوجيه $\overrightarrow{v_1}(a_1, b_1, c_1)$

ليكن المستقيم d_2 وشعاع التوجيه $\overrightarrow{v_2}(a_2, b_2, c_2)$

الحالة الأولى: يقعان في مستوي واحد

إما متوازيان $\overline{v}_2$ و $\overline{v}_1$ مرتبطان خطياً

أو متقاطعان $\overline{v}_2$ و $\overline{v}_1$ مستقلان خطياً

الحالة الثانية: لا يقعان في مستوي واحد

متخالفان $\overline{v}_2$ و $\overline{v}_1$ مستقلان خطياً

للتميز بين حالات الاستقلال الخطي نقوم بالحل المشترك

الوضع النسبي بين مستوي ومستقيم:

ليكن المستوي

$$P: ax+by+cz+d=0$$

والمستقيم

$$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

حيث: $t\in R$

صيغة السؤال: ادرس الوضع النسبي بين d, P

لدراسة الوضع النسبي بين d, P نعوض إحداثيات d في P ونميز ثلاث حالات

1- عدد = عدد ⇐ d يقع ضمن P

2- قيمة = t

d يقطع P ولمعرفة نقطة التقاطع نعوض t في d

3- عدد ≠ عدد $d \| P$ متوازيان

بعد نقطة عن مستقيم (المسقط القائم)

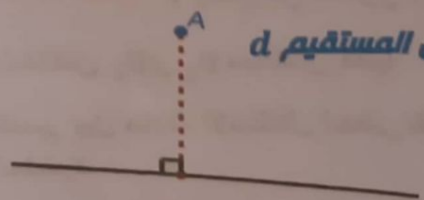
لتكن النقطة $A(x_1 y_1, z_1)$

وليكن المستقيم

$$d:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

حيث: $t\in R$

أحسب بعد A عن المستقيم d



1- نوجد $A_1(x,y,z)$ المسقط القائم لـ A على المستقيم d

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{v}_d$

تنتج معادلة شبه معادلة المستوي

ثانياً نعوض إحداثيات المستقيم d فينتج لدينا قيمة $t=$

نعوض قيمة الـ t في d حتى نحصل على

$A_1(x,y,z)$

يكفي أن نعوض

$$AA_1=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

هي بعد A عن d

مخطط أفكار العقدي و تطبيقاته

الشكل الجبري لعدد عقدي:

$\boxed{z=a+bi}$

نسمي z عدد عقدي ويقسم إلى قسمين:

- قسم حقيقي: $Re(z)=a$
- قسم تخيلي: $Im(z)=b$

مرافق عدد عقدي $\bar{z}$:

$\boxed{z=a+bi \Rightarrow \bar{z}=a-bi}$

نغير إشارة القسم التخيلي فقط.

العمليات على الأعداد العقدية:

الجمع والطرح:

نجمع ونطرح حقيقي مع حقيقي وتخيلي مع تخيلي.

العمليات على i:

ندعو i هو عدد تخيلي

قيمته: لا نعوض $i=\sqrt{-1}$

(لا يوجد جذر سالب)

الجلسة التكرارية

099 444 60 57 احمد تكروري @Ahmad_Tkrory احمد تكروري رياضيات

نعوض: $i^2 = -1$ دائماً.

$$i^a . i^b = i^{a+b}$$

$$\frac{i^a}{i^b} = i^{a-b}$$

$$(i^a)^b = i^{a.b}$$

ضرب الأعداد العقدية:

نضرب وننشر كما في الأعداد الحقيقية مع الانتباه أن $i^2 = -1$

قسمة الأعداد العقدية:

عند القسمة على عدد عقدي، نضرب البسط والمقام بمرافق المقام، لإزالة i من المقام.

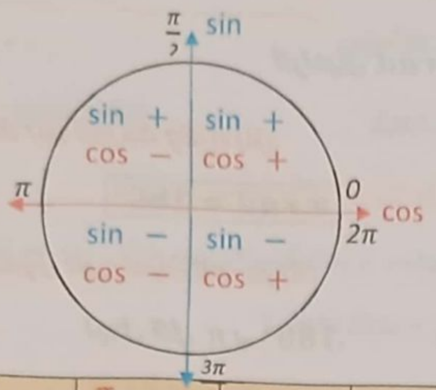
تكرورية هامة

$$(a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$$

زوايا شهيرة:

θ	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

الدائرة المثلثية:



θ	0	$\frac{\pi}{2} = 90°$	$\pi = 180°$	$\frac{3\pi}{2} = 270°$
sin	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0

الإرجاع إلى الربع الأول:

إذا وقعت الزاوية في الربع الثاني:

$90 \rightarrow 180$

نعطيها حتى تصبح $180°$ مع الانتباه إلى الإشارات

$cos(-)\ sin(+)$

إذا وقعت الزاوية في الربع الثالث:

$180 \rightarrow 270$

نأخذ منها 180 ثم نناقش الحالات:

$sin(-)\ cos(-)$

إذا وقعت الزاوية في الربع الرابع:

$270° \rightarrow 360°$

نعطيها حتى تصبح 360 ثم نناقش

$sin(-)\ cos(+)$

الزاوية تقاس ب:

الحرجة ° | **الراديان** rad

العلاقة بين الحرجة والراديان:

$$\boxed{\pi\, rad = 180°}$$

كيف نحول من راديان الى درجة:

نبدل كل π بـ $180°$.

كيف نحول من درجة الى راديان:

نضرب بـ $\frac{\pi}{180}$

الشكل المثلثي لعدد عقدي:

$$\boxed{z = r[\cos\theta + i\sin\theta]}$$

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \quad , \sin\theta = \frac{b}{r}$$

نحدد الربع

نحدد الزاوية θ

كيف نوجد θ:

1. **نحدد في أي ربع:**

$\sin +, \cos + \Leftarrow$ **الربع الأول** $\Leftarrow \theta$

$\sin +, \cos - \Leftarrow$ **الربع الثاني** $\Leftarrow \pi - \theta$

$\sin -, \cos - \Leftarrow$ **الربع الثالث** $\Leftarrow \pi + \theta$

$\sin -, \cos + \Leftarrow$ **الربع الرابع** $\Leftarrow -\theta$

2. **نحدد الزاوية حسب الزاوية الشهيرة** $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$

تكرورية:

$$\sin(-) = -\sin()$$
$$\cos(-) = \cos()$$

العمليات على الشكل المثلثي:

ليكن العددان العقديان:

$$z_1 = r_1[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1]$$
$$z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$$

الضرب:

نضرب الطويلة بالطويلة ثم نجمع الزاوية.

$$z_1 . z_2 = r_1 . r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

القسمة:

نقسم الطويلة على الطويلة ثم نطرح الزاوية:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

الأس:

$$z^n = r^n[\cos n.\theta + i\sin n.\theta]$$

عندما يكون $r = 1$ ندعو دستور دوموافر

تكرورية:

$$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$
$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

الشكل الأسي:

$$\boxed{z = r.e^{i\theta}}$$

حيث $e^{i\theta} = [\cos\theta + i\sin\theta]$

العمليات على الشكل الأسي:

$z_1 = r_1.e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2.e^{i\theta_2}$

الضرب:

نضرب الطويلة بالطويلة ونجمع الزاوية.

$$z_1.z_2 = r_1.r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

القسمة:

نقسم الطويلة على الطويلة ثم نطرح الزاوية.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

الأس:

$$z^n = r^n.e^{n\theta i}$$

المرافق:

$$z = r.e^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = r.e^{-\theta i}$$

علاقتا أويلر:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

تكرورية عالسريع:

$z = -1 \Rightarrow$ اسي $\Rightarrow z = e^{i\pi}$

$z = i \Rightarrow$ اسي $\Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$z = 1 \Rightarrow$ اسي $\Rightarrow z = e^{2\pi i}$

$z = -i \Rightarrow$ اسي $\Rightarrow z = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

جذر عدد عقدي:

يوجد حالتين:

شكل جبري **شكل أسي**

الحالة الأولى:

إذا أعطى z بالشكل الجبري $z = a + bi$ وطلب جذري z ماذا نفعل؟

1. نفرض $w = x + iy$ جذراً لـ z.
2. كونه جذر يجب أن يتحقق $w^2 = z$
3. نبحث عن x, y من خلال:

$x^2 - y^2 = a$

$x^2 + y^2 = r = \sqrt{a^2+b^2}$

$x.y = \frac{b}{2}$

$x.y > 0 \Leftarrow x, y$ من نفس الإشارة

$x.y < 0 \Leftarrow x, y$ مختلفين بالإشارة

الحالة الثانية:

إذا أعطى z بالشكل الأسي $z = re^{i\theta}$

1. نوجد صيغة الجذر العامة.

$$w = \sqrt{r}.e^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi k\right)i}$$

2. عندما $k = 0$ جذر أول:

$$w_1 = \sqrt{r}.e^{\frac{\theta}{2}i}$$

عندما $k = 1$ جذر ثاني:

$$w_2 = \sqrt{r}.e^{\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)i}$$

حل المعادلات في $\mathbb{C}$:

حل معادلة من الدرجة الأولى:

شكل أول: يحوي على z, z'

بالحذف بالتعويض.

شكل ثاني: يحوي على $\bar{z}, z$

نبدل بدل كل z بـ $x + iy$

ونبدل كل $\bar{z}$ بـ $x - iy$

حل معادلة من الدرجة الثانية:

الشكل العام:

$$az^2 + bz + c = 0$$

وتحل بـ $\Delta = b^2 - 4ac$ ونميز أربع حالات:

$\Delta > 0$ لها حلان:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$ جذر مضاعف

$$z = -\frac{b}{2a}$$

$\Delta < 0$ لها حلان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \, , \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

حيث أحدهما مرافق الثاني.

$\Delta =$ عدد عقدي للمعادلة حلان

لإيجادهما نتبع:

1. **نوجد جذري Δ**
2. **نختار أحد الجذرين : أحد الجذرين $= \sqrt{\Delta}$**
3. **الحلان هنا:**

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \, , z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

وهما مترافقان

حل معادلة من الدرجة الثالثة:

شكلها العام:

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0$$

تحل المعادلة من الدرجة الثالثة بالتجريب.

جميع أفكار بحث العقدية في ثمانية ملاحظات:

1. **كل نقطة $M(x, y)$ تمثل بعدد عقدي**

$$z_M = x + iy$$

2. **كل شعاع $\overrightarrow{w}(a, b)$ يمثل بعدد عقدي**

$$z_{\overrightarrow{w}} = a + bi$$

3. **الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يمثل بعدد عقدي**

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

4. **لتكن النقاط المثقلة**

(بس كان في نقاط مثقلة يوجد لدينا مركز أبعاد متناسبة)

$$z_A \ (A, \alpha) \, , z_B \ (B, \beta) \, , z_C \ (C, \gamma)$$

ليكن G مركز أبعاد متناسبة، نعبر عن G بالعدد العقدي:

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

5. **ليكن I منتصف القطعة $[AB]$، نعبر عن I بالعدد العقدي:**

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

6. **G مركز ثقل المثلث ABC نعبر عن G بالعدد العقدي:**

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

- حساب طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$|z_{AB}| = |z_B - z_A| = |\text{حقيقي} \pm i\,\text{تخيلي}|$$

$$|z_{AB}| = \sqrt{\text{حقيقي}^2 + \text{تخيلي}^2}$$

③ قياس الزاوية بين شعاعين، ولدينا ثلاث حالات:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}\right) = arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

الحالة الأولى: عدد عقدي:

$arg = \theta$

$\cos\theta = ??, \sin\theta = ?? \Rightarrow \theta = \cdots$

الحالة الثانية: عدد حقيقي (حقيقي بحت)

$\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً.

A, B, C, D على استقامة واحدة.

الحالة الثالثة: عدد تخيلي (تخيلي بحت)

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ متعامدان

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ أو } \theta = \frac{\pi}{2}$$

التحويلات الهندسية:

الانسحاب:

- رمزه T
- يحتاج إلى شعاع نعبر عنه بعدد عقدي.
- قانونه:

$$\boxed{z'_m = z_m + b}$$

شعاع الأصل صورة

التحاكي:

- يملي تكبير أو تصغير النقطة.
- رمزه H.
- يحتاج لمركز نعبر عنه بعدد عقدي b و نسبة k
- قانونه:

$$\boxed{z'_m - b = k(z_m - b)}$$

مركز الأصل نسبة مركز صورة

الدوران:

- رمزه R
- يحتاج لمركز نعبر عنه b وزاوية θ
- قانونه:

$$\boxed{z'_m - b = e^{i\theta}(z_m - b)}$$

مركز الأصل زاوية مركز صورة

تكرورية:

- لإثبات أن z عدد حقيقي نوجد مرافقه ونتأكد أن $z = \bar{z}$
- لإثبات أن z تخيلي بحت نتأكد أن $\bar{z} = -z$
- $z.\bar{z} = |z|^2$
- $|z| = 1$
- $z.\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{z.w} = \bar{z}.\bar{w}$
- $\bar{\bar{z}} = z$

مخطط أفكار التحليل التوافقي و الاحتمالات

المبدأ الأساسي في العد:

التجربة مكونة من طريقتين أو مرحلتين n, m

دلالته: بكم طريقة أو ما عدد

قانونه: عدد الطرق $= m \times n$

التباديل (العاملي):

دلالته: ما عدد التباديل

قانونه: ! عدد

التراتيب:

التجربة مكونة من مرحلة واحدة مع الاهتمام بالترتيب

يعني (أول – ثاني – ثالث)

دلالته: بكم طريقة أو ما عدد

قانونه:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

r, n أرقام طبيعية بدون فواصل، $n \geq r$

يستخدم في برهان العلاقات

التوافيق:

التجربة مكونة من مرحلة واحدة دون الاهتمام بالترتيب.

دلالته بكم طريقة أو ما عدد

قانونه:

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!}$$

تكرورية في التوافيق:

"الواو" تعني ضرب   "أو" تعني جمع

تكرورية:

$$\text{!شغلة} = \text{شغلة} \times (\text{شغلة} - 1) \times (\text{شغلة} - 2)\,!$$

تكرورية قبل الحل:

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} \qquad P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تكرورية قبل الحل:

$$\binom{\text{عدد}}{\text{شغلة}_1} = \binom{\text{عدد}}{\text{شغلة}_2}$$

إما عدد = شغلة$_1$ + شغلة$_2$ أو

أو: شغلة$_1$ = شغلة$_2$

منشور ذي الحدين:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1}.b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^{n-n}.b^n$$

تكروريات هامة:

- عدد حدود المنشور $n+1$
- إذا كان a, b موجبان أو سالبان (نفس الإشارة) فإن حدود المنشور موجبة.
- إذا كان a, b مختلفان بالإشارة تكون حدود المنشور متناوبة.

الحد ذو الدليل r: T_r

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r}.b^r$$

يستخدم:

الحد الذي يحوي x^n.

أمثال x^n.

العلاقة بين n, r

1. فضاء العينة:

كل العناصر الممكن ظهورها في التجربة ورمزه (Ω) أوميغا.

$n(\Omega)$ عدد عناصر فضاء العينة.

الفضاءات التي تهمنا في البكالوريا:

T كتابة $\qquad$ H شعار

- فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرة واحدة:

$$n(\Omega) = 2 \quad \Omega = \{T, H\}$$

- فضاء العيمة لرمي قطعة نقود مرتين:

$$n(\Omega) = 2^2 = 4$$

$$\Omega = \{(H,H), (T,T), (H,T), (T,H)\}$$

- فضاء العينة لرمي قطعة نقود 3 مرات:

$$n(\Omega) = 2^3 = 8$$

$$\Omega = \{(T,T,T), (T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), (H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (T,H,H)\}$$

- فضاء العينة لرمي حجر نرد مرة واحدة:

$$n(\Omega) = 6 \quad \Omega = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$$

- فضاء العينة لرمي حجر نرد مرتين

$$n(\Omega) = 6^2 = 36$$

Ω	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

الحدث:

هو جزء من فضاء العينة، رموزه أحرف كبيرة A, B

الاحتمال P

$A \cup B$:

العناصر المشتركة والغير مشتركة بين A, B

$A \cap B$:

العناصر المشتركة فقط بين A, B

$A \mid B$:

العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B

قوانين هامة:

- $0 \le P \le 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
- $P(A)' = 1 - P(A)$

إذا ورد كلمة ما احتمال وذكر

2. أولاً: مسائل حجر نرد أو قطع النقود أو ما شابه ذلك.

- نكتب فضاء العينة حتى لو ما طلب منا.
- نفرض أحداث في حال عدم وجودها.
- $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

الجلسة التكرارية

ثانياً: إذا ذكر في الصندوق + ما احتمال

نلاحظ ثلاث حالات:

1) السحب معاً: نستخدم توافيق

$$\frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r}}$$
خاصة بالنوع أو اللون
خاصة بفضاء العينة

- n عدد الشغلات الموجودة في الصندوق
- r عدد الشغلات المسحوبة من الصندوق

2) السحب على التتالي مع إعادة نستخدم n^r

$$x \times \frac{n^r}{n^r}$$
النوع أو اللون ←
فضاء العينة ←

سحب شيئين:

نوع أول لون $x = 1$

نوعين أولونين $x = 2$

سحب 3 أشياء:

نوع أولون $x = 1$

نوعين أولونين $x = 3$

3 أنواع أوألوان $x = 6$

3) السحب عل التتالي دون إعادة نستخدم التراتيب

n عدد الشغلات الموجودة في الصندوق.

r عدد الشغلات المسحوبة من الصندوق

$$x \times \frac{P_n^r}{P_n^r}$$
النوع أو اللون ←
فضاء العينة ←

سحب شيئين:

نوع أول لون $x = 1$

نوعين أولونين $x = 2$

سحب 3 أشياء:

نوع أولون $x = 1$

نوعين أولونين $x = 3$

3 أنواع أوألوان $x = 6$

الاحتمال المشروط:

دلائله: علماً أن ,إذا علمت , إذا كان , إذا كانت

هو احتمالين $\frac{\text{احتمال } 2}{\text{احتمال } 1}$

علماً أن الاحتمال 1 يحدث قبل الاحتمال 2

رمزه $P(A|B)$

احتمال A علماً أن B قد وقع

إما:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

أو:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

لحل مسائل الاحتمال المشروط:

- نوضع الجملة بعد الدلائل في المقام ونحسب أولاً.
- نضع الجملة التي بقية في البسط
- نحسبها يتقاطع مع المقام بوضع و

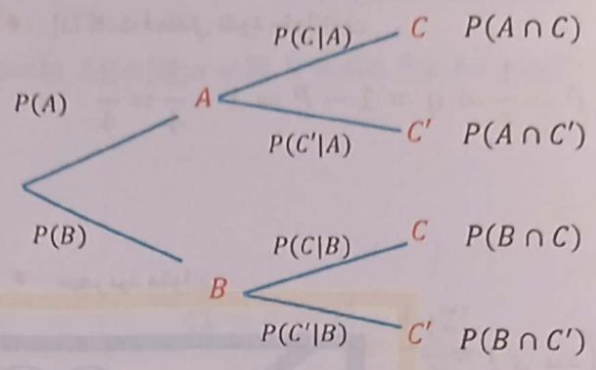
تكرورية: في مسائل الصندوقان:

- نضرب الجواب بـ $\frac{1}{2}$
- الاحتمال المشروط لا نضربه بأي عدد.

الجلسة التكرورية

التمثيل الشجري:

كل فرعين من منطلق واحد مجموعهما $= 1$



الاستقلال الاحتمالي:

إذا كان A, B مستقلان احتمالياً فإن:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين:

إذا كان x, y متحولين

قيم x: $X=\{x_1,x_2,\dots\}$

قيم y: $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$

ننظم هذه القيم في جدول:

X \ Y	y_1	y_2	قانون X
x_1	$P_{1,1}$	$P_{1,2}$	P_1
x_2	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	P_2
قانون Y	P'_1	P'_2	1

نقول عن X, Y أنهما مستقلان إذا تحقق:

$$P_{1,1}=P_1.P'_1$$

لمتحول العشوائي X:

- هو متحول يدل على قيم تدلنا على لون – نوع – مجموع
- قانونه الاحتمالي:

x	قيم x
$P(x)$	احتمالات هذه القيم

مجموع الاحتمالات $= 1$

التوقع الرياضي: $E(x)$

قانونه:

$$E(x)=\sum(x.P(x))$$

التباين: $V(x)$

قانونه:

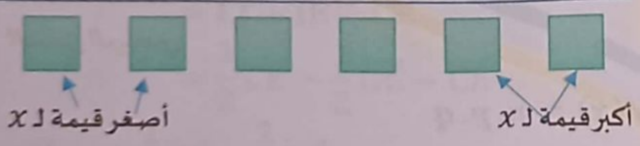
$$V(x)=\sum\left(x^2.P(x)-E(x)\right)^2$$

الانحراف المعياري: $\sigma(x)$

$$\sigma(x)=\sqrt{V(x)}$$

تكرورية: دائماً في هذه المسائل الكرات الملونة لمعرفة قيمة X نكتب جميع احتمالات السحب.

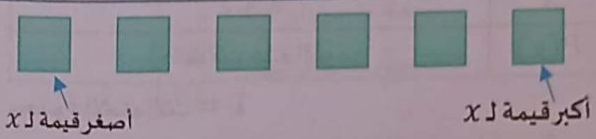
تكرورية: في مسائل البطاقات المرقمة. إذا كان السحب معاً أو على التتالي دون إعادة لمعرفة قيم X نتبع: نرتب تصاعدياً.



الجلسة التكرورية

تكرورية: في مسائل البطاقات المرقمة، إذا كان السحب على التتالي مع الإعادة، قيم X:

نرتب تصاعدياً.



التجربة البرنولية:

4 مجاهيل، نستخدم عند:

إذا أشاره إلى ذلك

رمي حجر نرد أو قطعة نقود من 3 مرات وما فوق.

قانونها:

$$P(x=k)=\binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$$

حيث:

- n: عدد مرات التجربة الكلي.
- k: عدد المرات التي مراد حساب احتمالها.
- p: احتمال الحدث من مرة واحدة
- $q=1-p$

التوقع الرياضي:

$$E(x)=n.p$$

التباين الرياضي:

$$V(x)=n.p.q$$

تكروريات:

- قطعة نقود متوازنة يعني $P(T)=P(H)=\frac{1}{2}$
- إذا كانت قطعتي نقود متوازنتين

$$P=\frac{1}{4}\Rightarrow q=1-P=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

- حجر نرد متوازن:

$$P\left(\text{أي عدد}\right)=\frac{1}{6}$$

سؤال 1: لتكن النقطة $A(1,-2,1)$ والمستوي
$P: x+2y+z=0$

① احسب بعد A عن P

② أوجد معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس P.

الحل:

❶

$$\text{dist}(A,P)=\frac{|1-4+1|}{\sqrt{6}}=\frac{|-2|}{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

❷ معادلة الكرة تحتاج:

- نصف قطر: $R=\text{dis}(A,P)=\frac{2}{\sqrt{6}}$

مركز: $A(1,-2,1)$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\frac{4}{6}$$

سؤال 2: ABCD رباعي وجوه، G مركز ثقله I منتصف $[AD]$ و J منتصف $[BC]$ اثبت أن I, J, G على استقامة واحدة.

الحل:

I منتصف $[AD]$ وثقل $A=1\,, D=1$
$(I,2)$ مركز أبعاد متناسبة لـ A, D

و J منتصف $[BC]$ وثقل $B=1\,, C=1$
$(J,2)$ مركز أبعاد متناسبة لـ B, C

وحسب الخاصة التجميعية فإن G مركز أبعاد متناسبة لـ IJ و $(G,4)$

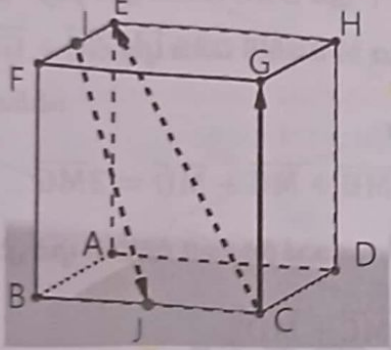
بما أن G مركز أبعاد متناسبة لـ I, J
فإن J, I, G على استقامة واحدة

سؤال 3

في الشكل المجاور مكعب، J, I منتصفات $[BC], [EF]$

① اثبت أن $2(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE})=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$

② اثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة خطياً.



❶

$$L_1=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FE}$$
$$=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GE}$$
$$L_2=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{GE}$$
$$L_1=L_2$$

❷

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{IE}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CJ}$$
$$=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}-\overrightarrow{CE}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{CE}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

اي ان الأشعة $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{CE}$ مرتبطة اولياً

سؤال 4: ABCD رباعي وجوه، G مركز ثقل المثلث BCD، جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث DBC فإن $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ وأياً كانت النقطة M من الفراغ فإنه يتحقق:

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$$

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

$$\Rightarrow \|(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|$$

$$\Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$$

$$\Rightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{MA}\|$$

$$\Rightarrow MG = GA$$

وبالتالي مجموعة النقاط M في الفراغ تمثل كرة مركزها النقطة G مركز ثقل المثلث ونصف قطرها $R = GA$

سؤال 5

سؤال 6

سؤال 7 هام لهذا العام: عين الحد الثابت المختلف عن x في منشور $\left(x^4+\frac{1}{x}\right)^{15}$ ثم احسب أمثال x^5 في هذا المنشور

$$a=x^4,\ b=\frac{1}{x},\ n=15$$

$$T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}.b^r$$

$$T_r=\binom{15}{r}(x^4)^{15-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$=\binom{15}{r}x^{60-4r}.x^{-r}$$

$$=\binom{15}{r}x^{60-5r}$$

الحد الثابت عن x:

$$60-5r=0\Rightarrow r=12$$

$$T_{12}=\binom{15}{12}=\binom{15}{3}=\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$$

أمثال x^5 تحقق:

$$60-5r=5\Rightarrow r=11$$

$$T_r=\binom{15}{11}x^5=1365\,x^5$$

سؤال 8: في احدى صفوف مدرسة 12 طالباً و 9 طالبات، نريد تأليف لجنة مكونة من 3 أشخاص

① بكم طريقة يمكن تأليف هذه اللجنة؟

② بكم طريقة يمكن تأليف لجنة مكونة من طالب واحد وطالبتين؟

③ بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة إذا علمت أنها مكونة من رئيس ونائب رئيس وأمين سر

الحل:

❶

$$\binom{21}{3}=\frac{21\times20\times19}{3\times2\times1}=1330$$

❷

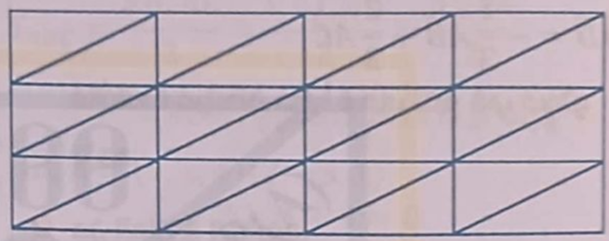
الجلسة التكرارية

$$\binom{12}{1}\binom{9}{2} = 12 \times \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 432$$

③

$$21 \times 20 \times 19 = 7980$$

سؤال 9: تأمل الشكل المجاور ثم أجب: ما عدد المستطيلات في هذا الشكل؟ ما عدد المثلثات؟



الحل:

عدد المستطيلات:

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2} = \frac{5 \times 4}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 60$$

كل مستطيل يعطي مثلثين بالتالي عدد المثلثات:

$$60 \times 2 = 120$$

سؤال 10: لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 3, 5, 8\}$

① بكم طريقة يمكن تشكيل رقم مكون من منزلتين من عناصر S؟

② بكم طريقة يمكن تشكيل عدد فردي مؤلف من منزلتين من عناصر S؟

الحل:

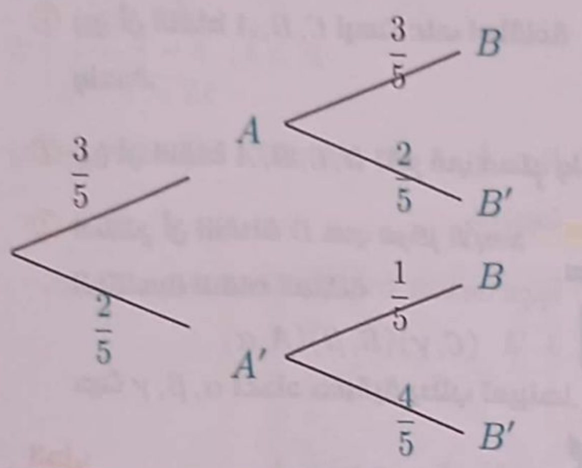
① $5 \times 4 = 20$

② $3 \times 4 = 12$

سؤال 11: أكمل مخطط الشجرة المجاور، ثم أجب:

① احسب احتمال كل من الحدثين $B, A \cap B$

② هل الحدثين B, A مستقلين؟ علل.



الحل:

①

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{9}{25} + \frac{2}{25} = \frac{11}{25}$$

②

$$P(A).P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{11}{25}$$

$$= \frac{33}{125} \neq \frac{9}{25} = P(A \cap B)$$

بالتالي الحدثين B, A غير مستقلين.

تمرين 1: تتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط:

$A(1,5,4)\ B(10,4,3)$
$C(4,3,5)\ D(0,4,5)$

① بين أن النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة.

② بين أن النقاط D,C,B,A تقع في مستوٍ واحد.

③ استنتج أن النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,\gamma)(B,\beta)(A,\alpha)$ حيث α,β,γ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)\ ,\overrightarrow{AC}(3,-2\,,1)$

$$\frac{9}{3}\neq\frac{-1}{-2}\neq\frac{-1}{1}$$

المركبات غير متناسبة فالأشعة $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً.

فالنقاط A,B,C تعين مستوي (ABC)

❷ $\overrightarrow{AD}(-1\,,-1\,,1)$

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$$
$$(-1,-1,1)=a(9,-1,-1)+b(3,-2,1)$$
$$(-1,-1,1)=(9a+3b,-a-2b,-a+b)$$
$$-1=9a+3b\ ..(1)$$
$$-1=-a-2b\ ..(2)$$
$$1=-a+b\ ..(3)$$

$$-1=-a-2b$$
$$\underline{1=-a+b}$$
$$-2=-3b$$
$$\Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

نعوض في (2):

$$a=-\frac{4}{3}+1=-\frac{1}{3}$$

نعوض b,a في (3) للتأكد:

$$-1=9\left(-\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$-1=-1$$

محققة

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

فالأشعة مرتبطة خطياً فهي تقع في مستو واحد.

❸ من العلاقة السابقة:

$$\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\ \times 3$$
$$3\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$$

ندخل D حسب شال:

$$3\overrightarrow{AD}=-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$$
$$3\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$$
$$-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-3\overrightarrow{AD}=\vec{0}$$
$$-2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$
$$2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

ومنه D مركز ابعاد متناسبة للنقاط $(C,2)\ (B,-1)\ (A,2)$

تمرين 2: في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)\ B(2,2,3)$
$C(3,1,-2)\ D(-4,-2,1)$

① اثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

② اثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ اظم المستوي (ABC) واستنتج معادلة المستوي (ABC)

③ احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

الجلسة التكرورية

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}(1,2,4)\ \overrightarrow{AC}(2,1,-1)$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (1,2,4)(2,1,-1)$$
$$= 2+2-4=0$$

فالمثلث قائم الزاوية في A

$$AB = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$
$$AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$
$$S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

❷ **إثبات أن $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC):**

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = (1,2,4)(2,-3,1)$$
$$= 2-6+4=0$$
$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$$
$$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (2,1,-1)(2,-3,1)$$
$$= 4-3-1=0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$$

ونلاحظ أن $\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

معادلة المستوي تحتاج

- ناظم $\vec{n}(2,-3,1)$

- نقطة تنتمي إليه: $A(1,0,-1)$

$$(ABC):\ a(x-x_0)+b(y-y_0) + c(z-z_0)=0$$
$$2(x-3)-3(y-0)+1(z+1)=0$$
$$(ABC): 2x-3y+z-1=0$$

❸ **بعد النقطة D عن المستوي (ABC)**

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|2(-4)-3(2)+1(1)-1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}} = \sqrt{14}$$ ❸

حجم الرباعي:

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.h =$$
$$\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\sqrt{14} = 7$$

تمرين 3هام لهذا العام: المستقيمان L', L معرفان وسيطياً وفق:

$$L':\begin{cases} x = 4-5s \\ y = 3-2s \quad ; s\in\mathbb{R} \\ z = -1+2s \end{cases}$$
$$L:\begin{cases} x = -1 \\ y = 1-t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = 1-2t \end{cases}$$

① **أثبت أن L', L متقاطعان في نقطة يطلب تعيينها.**

② **أوجد معادلة المستوي المحدد بالمستقيمين L', L**

الحل:

❶
$$4-5s=-1 \quad (1)$$
$$3-2s = 1-t \quad (2)$$
$$-1+2s = 1-2t \quad (3)$$

من (1) نجد: $s=1$

نعوض في (3) نجد: $t=0$

نعوض في (2) للتأكد $3-2=1-0$

محققة

نعوض t في L

$(-1,1,1)$

❷ **نفرض** $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{u}_1(0,-1,-2)\ \vec{u}_2(-4,-2,2)$$
$$\vec{n}.\vec{u}_1 = 0 \Rightarrow \quad -b-2c=0\ (3)$$
$$\vec{n}.\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow -5a-2b+2c=0\ (4)$$

بجمع (3) و (4) نجد:

$$-5a-3b=0$$

وبفرض $b=10$ منه

$$-5a=30 \Rightarrow a=-6 \Rightarrow c=-5$$
$$-6(x+1)+10(y-1)-5(z-1) = 0$$
$$P:\ -6x+6y-5z-11=0$$

تمرين 4: ليكن لدينا المستوي :

$$P: 3x - 4z = 1$$

والكرة:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 2z + 9 = 0$$

① عين I مركز S واحسب نصف قطرها، ثم أثبت أن P يمس S.

② اكتب معادلة المستوي Q الموازي لـ P ويمر من I.

الحل:

❶ $x^2 + y^2 + 6y + z^2 - 2z + 9 = 0$

$$x^2 + y^2 + 6y + 9 - 9 + z^2 - 2z + 1 - 1 + 9 = 0$$

$$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 1$$

مركز الكرة $I(0,-3,1)$

نصف قطرها: $R = 1$

$$dist(I,P) = \frac{|0-4-1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

وبالتالي P يمس الكرة S

❷ بما أن المستوي Q يوازي P فإن

$$\vec{n}_Q = \vec{n}_P(3,0,-4)$$

معادلته:

$$Q: 3x - 4z + 4 = 0$$

تمرين 6

تمرين 7

تمرين 8هام لهذا العام: ليكن العدد العقدي

$$z = \frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}$$

① اكتب العددين العقديين $z_2 = \sqrt{3} + i \, , z_1 = -1 + i$ بالشكل المثلثي

② اكتب العدد العقدي z بالشكل الجبري والمثلثي.

③ استنتج النسب المثلثية $\sin\frac{7\pi}{12}$

الحل:

❶ $z_1 = -1 + i$

$$r_1 = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}} \, , \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ربع ثاني

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$r_2 = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \, , \sin\theta_2 = \frac{1}{2}$$

ربع أول

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

❷

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$$

الشكل المثلثي:

$$z=\frac{-1+i}{\sqrt{3}+i}\times\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$z=\frac{-\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}+1}{3+1}$$

$$z=\frac{-\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

③

تكرورية: عند طلب استنتاج النسبة:

الشكل الجبري = الشكل المثلثي

$$\frac{-\sqrt{3}+1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right]$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

تمرين 9 هام: نتأمل في معلم متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقطتين B,A اللتين يمثلهما العددان العقديان $b=2e^{\frac{\pi}{4}i}$ $a=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$

وليكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

① ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة OAB

② استنتج قياس $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$

③ أوجد الشكل الجبري والأسي للعدد العقدي z_I الممثل للنقطة I.

④ استنتج $\sin\frac{\pi}{24}$, $\cos\frac{\pi}{24}$

الحل:

①

$$a=2e^{-\frac{\pi}{6}i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

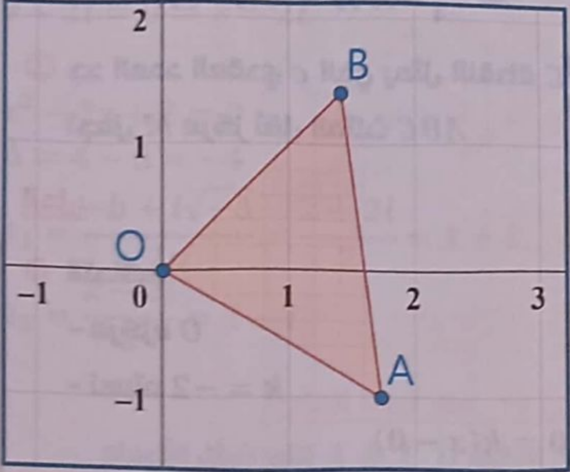
$$2\left[\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right]=\sqrt{3}-i$$

$$b=2e^{\frac{\pi}{4}i}=2\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right]=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$A(\sqrt{3},-1)$ $B(\sqrt{2},\sqrt{2})$



$OA=OB=|a|=|b|=2$

وبالتالي OAB متساوي الساقين

② $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=(\vec{u},\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})$

بما أن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ فإن OI متوسط في متساوي الساقين فهو منصف

$$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$$

$$=\frac{1}{2}(\arg b-\arg a)+\arg a$$

$$(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{1}{2}\arg a+\frac{1}{2}\arg b$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{6}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{-\pi}{12}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{24}$$

الجلسة التكرورية

③

$$z_I=\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt{3}-i+\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

تمرين 10: لتكن النقطة M التي تمثل العدد العقدي $z=2-i$

① أثبت أن a الذي يمثل النقطة A صورة M وفق تحاكي مركزه O ونسبته $k=-2$

② جد العدد العقدي b الذي يمثل B صورة M وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$

③ جد العدد العقدي c الذي يمثل النقطة C التي تجعل M مركز ثقل المثلث ABC

الحل:

① **التحاكي:**
- مركزه O
- نسبته $k=-2$

$$a-0=k(z-0)$$
$$a=-2z=-2(2-i)$$
$$a=-4+2i$$

② **الدوران:**
- مركزه A
- زاويته $\frac{\pi}{4}$

$$b-a=e^{\frac{\pi}{4}i}(z-a)$$
$$b=e^{\frac{\pi}{4}i}(z-a)+a$$
$$b=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right](2-i+4-2i)-4$$
$$b=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right](6-3i)-4+2i$$
$$=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i-4+2i$$

$$b=\frac{3\sqrt{2}-8}{2}+\frac{4-9\sqrt{2}}{2}i$$

③ **العدد العقدي c الذي يمثل**

$$z=\frac{a+b+c}{3}$$
$$c=3z-a-b$$
$$c=3(2-i)-(-4+2i)-\left(\frac{3\sqrt{2}-8}{2}+i\frac{4-9\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\left(6+4-\frac{3\sqrt{2}-8}{2}\right)+i\left(-3-2-\frac{4-9\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\frac{28-3\sqrt{2}}{2}+\frac{9\sqrt{2}-14}{2}i$$

تمرين 11: تأمل النقاط D,C,B,A الممثل للأعداد العقدية

$$a=-1,b=2+i\sqrt{3},c=2-i\sqrt{3},d=3$$

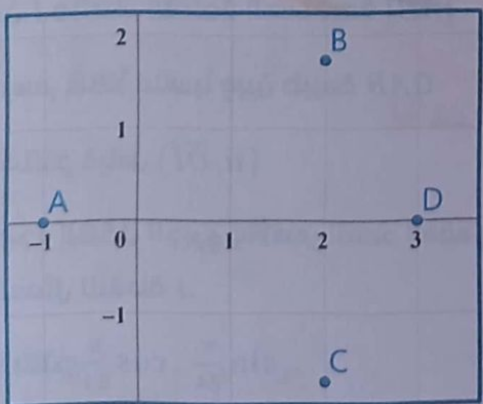
① ارسم النقاط D,C,B,A ثم احسب AB,BC,AC واستنتج طبيعة المثلث ABC

② عين $\arg\frac{a-c}{d-c}$ واستنتج طبيعة المثلث DAC

③ أثبت أن D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,2)(B,2)(A,-1)$

الحل:

①



$$AB=|b-a|=|3+i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$
$$BC=|c-b|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

$$AC = |c - a| = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

②

$$\arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$$

$$\arg\left(\frac{i\sqrt{3}(1+i\sqrt{3})}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

فالمثلث ADC قائم في C

③ **نفرض أن G مركز ابعاد متناسبة للنقاط** $(C,2)\ (B,2)\ (A,-1)$

$$z_G = \frac{(-1)z_A + 2z_B + 2z_C}{3} = \frac{-(-1) + 2(2+i\sqrt{3}) + 2(2-i\sqrt{3})}{3} = \frac{1+4+i2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}i}{3} = \frac{9}{3} = 3 = z_D$$

أي أن D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,2)\ (B,2)\ (A,-1)$

تمرين 12: ليكن كثير الحدود:

$$P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i$$

① **اثبت أن $z_0 = 2i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$**

② **عين كثير حدود من الدرجة الثانية $Q(z)$ يحقق:** $P(z) = (z-2i)Q(z)$

③ **حل المعادلة في $\mathbb{C}$ المعادلة:** $P(z) = 0$

الحل:

①

$$P(2i) = (2i)^3 - (2+2i)(2i)^2 + (2+4i)(2i) - 4i = 0$$

②

$z^2 - 2z + 2$

$z = 2i \;|\; z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i$

$z^3 \pm 2iz^2$

$-2z^2 + (2+4i)z - 4i$

$\pm 2z^2 \mp 4iz$

$\mp 2z + 4i$

$2z \mp 4i$

0

$$P(z) = (z-2i)(z^2-2z+2)$$

إما

$$z - 2i = 0 \Rightarrow z = 2i$$

أو:

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

$$z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

تمرين 13 هام لهذا العام:

لتكن النقاط A, B, C, D التي تمثل الأعداد العقدية

$a = -3 - 2i\,, b = 4 - i\,, c = 5 + 6i\,, d = 5 + 2i$

① **اثبت أن $\frac{d-a}{b-a} = \frac{c-a}{d-a}$ ، ماذا يمثل المستقيم (AD) في المثلث ABC ؟**

② **ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق:** $|z - 4 + i| = |z + 3 + 2i|$

①

$$\frac{d-a}{b-a} = \frac{c-a}{d-a}$$

$$\frac{5+2i+3+2i}{4-i+3+2i} = \frac{5+6i+3+2i}{5+2i+3+2i}$$

$$\frac{8+4i}{7+i}=\frac{8+8i}{8+4i}$$

$$\frac{8+4i}{7+i}=\frac{2+2i}{2+i}$$

نضرب بالمرافق

$$\frac{(8+4i)(7-i)}{49+1}=\frac{(2+2i)(2-i)}{4+1}$$

$$\frac{56-8i+28i+4}{50}=\frac{4-2i+4i+2}{5}$$

$$\frac{60+20i}{50}=\frac{6+2i}{5}$$

$$\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i$$

وبالتالي

$$\frac{d-a}{b-a}=\frac{c-a}{d-a}$$

$$\arg\left(\frac{d-a}{b-a}\right)=\arg\left(\frac{c-a}{d-a}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC})$$

وبالتالي المستقيم (AD) منصف داخلي للزاوية A في المثلث ABC

②

$$|z-4+i|=|z+3+2i|$$

$$|z-b|=|z-a|$$

$$MB=MA$$

وبالتالي مجموعة النقاط M تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

تمرين 14 ليكن X متحول عشوائي لتجربة برنولية، الجدول المجاور هو القانون الاحتمالي العشوائي لـ X والمطلوب:

① أكمل الجدول المجاور.

② احسب توقعه الرياضي وتباينه المتحول العشوائي

X	0	1	2	3
P(X)				$\frac{1}{27}$

الحل:

① $P(X=3)=\binom{3}{3}p^3.q^0$

$$P=\frac{2}{3},q=\frac{1}{3}$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}p^0.q^3=\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{27}$$

$$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}$$

② $E(X)=n.p=3\times\frac{2}{3}=2$

$$V(X)=n.p.q=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$V(X)=\frac{2}{3}$$

تمرين 15: يحوي صندوق 6 كرات مرقمة $(0,1,1,1,2,2)$، نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق وليكن X متحول عشوائي الذي يدلّ على جداء رقمي الكرتين المسحوبتين، اكتب مجموعة قيم X وقانونه الاحتمالي ثم احسب $V(x)$, $E(x)$

الحل:

099 444 60 57 احمد تكروري @Ahmad_Tkrory احمد تكروري رياضيات

تمرين هام 16: يحوي صندوق على خمس كرات ثلاث كرات سوداء وتحمل الأرقام 3, 2, 1 وكرتين حمراء تحملان 1 ، 2 نسحب معاً كرتين

① ما احتمال الحدث A (الحصول على كرتين لهما اللون ذاته) ؟

② ما احتمال الحدث B (الحصول على كرتين مجموعهما يساوي 3) ؟

③ ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع؟

الحل:

① إما 2 سوداء أو 2 حمراء

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3+1}{10}=\frac{4}{10}$$

② كرة رقمها 1 وكرة رقمها 2

$$P(B)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

③

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$\frac{\text{احتمال مجموع الكرتان ولهما ذات اللون}}{\text{احتمال الكرتان لهما اللون ذاته}}$$

$$\frac{\text{إما الكرتان حمراء أو كرة سوداء رقمها 1 و كرة سوداء 2}}{\frac{4}{10}}$$

$$=\frac{\frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}}{\frac{4}{10}}=\frac{\frac{1+1}{10}}{\frac{4}{10}}=\frac{2}{4}$$

$X=\{0,1,2,4\}$

$$P(X=0)=P(0,1)+P(0,2)$$

$$=\frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}+\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{3+2}{15}=\frac{1}{3}$$

$$P(X=1)+P(1,1)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2)=P(1,2)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$P(X=4)=P(2,2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{15}$$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$
E(X)				

❸

$$E(x)=0\left(\frac{1}{3}\right)+1\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{2}{5}\right)+3\left(\frac{1}{15}\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$$

$$E(x^2)=\frac{12}{5}$$

$$V(x)=E(x^2)-\left(E(x)\right)^2=\frac{12}{5}-1=\frac{7}{5}$$

الجلسة التكرارية

تمرين 17: يحوي صندوق 6 بطاقات مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ، نسحب عشوائياً بطاقتين على التالي دون إعادة، ليكن X متحول عشوائي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين

① عين مجموعة قيم المتحول العشوائي لـ X واكتب جدول قانونه الاحتمالي.

② احسب التوقع الرياضي والتباين.

الحل:

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2	1		2	2	2	2
3	1	2		3	3	3
4	1	2	3		4	4
5	1	2	3	4		5
6	1	2	3	4	5	

X	1	2	3	4	5
	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

$$E(X) = \frac{10}{30} + \frac{16}{30} + \frac{18}{30} + \frac{16}{30} + \frac{10}{30} = \frac{7}{30}$$

$$V(X) = \frac{14}{9}$$

التمرين 18

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء، نسحب عشوائياً معاً ثلاث كرات من الصندوق، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان الظاهرة بين الكرات المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

② احسب كلاً من $P(X = 1), P(X = 3)$ ثم استنتج قيمة $P(X = 2)$

③ احسب توقع X وتباينه.

الحل:

❶ مجموعة قيم المتحول هي: $I = X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

❷ القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي

$$P(X = x_1) = P_1'$$

$P(X = 1)$ هو احتمال سحب ثلاث كرات زرقاء أو ثلاث كرات خضراء.

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4 + 1}{56} = \frac{5}{56}$$

$P(X = 3)$ هو احتمال سحب كرة زرقاء وكرة خضراء وكرة صفراء

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{4 \times 3 \times 1}{56} = \frac{12}{56}$$

$$P(X = 2) = 1 - [P(X = 1) - P(X = 3)] = 1 - \left(\frac{5}{56} + \frac{12}{56}\right) = 1 - \frac{17}{56} = \frac{39}{56}$$

جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$
$x_i . P_i'$	$\frac{5}{56}$	$\frac{78}{56}$	$\frac{36}{56}$

❸ التوقع الرياضي للمتحول العشوائي:

الجلسة التكرورية

$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i . P'_i = \frac{5}{56} + \frac{78}{56} + \frac{36}{56} = \frac{119}{56}$$
$$= \frac{17}{8}$$

التباين:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 . P'_i - E^2(x)$$
$$= \frac{5}{56} + \frac{156}{56} + \frac{188}{56} - \frac{289}{64}$$
$$= \frac{269}{56} - \frac{289}{64}$$
$$= \frac{2152}{448} - \frac{2823}{448} = \frac{129}{448}$$

تمرين 20 : ليكن المثلث ABC في المستوي، ننشئ على ضلعيه $[BC], [AC]$ وخارجه المربعين $CBB'D, ACEA'$ كما في الشكل المجاور، تمثل الأعداد العقدية a, b, c, a', b' النقاط A, B, C, A', B'

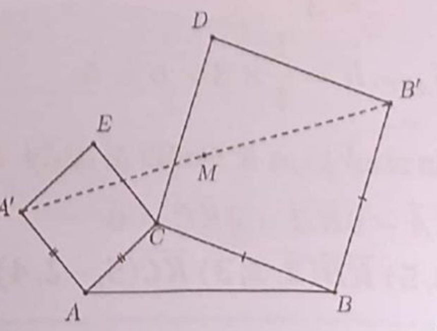
① B' هي صورة C وفق دوران مركزه B، عيّنه واكتب الصيغة العقدية للعدد b' بدلالة b, c

② أثبت أن $a' = i(c - a) + a$

③ عين العدد العقدي m الممثل للنقطة M منتصف $[A'B']$

④ كيف تتغير النقطة M عندما تتحول C في المستوي؟

الحل:



❶ بما أن B' هي صورة C وفق دوران مركزه B فإن:

$$B' = R_{B-\frac{\pi}{2}}(C) \Rightarrow b' - b$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{2}}(c - b) \Rightarrow b'$$
$$= -i(c - b) + b$$

❷ بما أن A' هي صورة C وفق دوران ربع دورة بالاتجاه المباشر مركزه A فإن:

$$a' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a)$$
$$\Rightarrow a' = i(c - a) + a$$

❸ بما أن M منتصف $[A'B']$ فإن:

$$m = \frac{a' + b'}{2}$$
$$= \frac{i(c - a) + a - i(c - b) + b}{2}$$

❹

$$m = \frac{ic - ia + a - ic + ib + b}{2}$$
$$= \frac{a + b}{2} + i\frac{b - a}{2}$$

إذاً قيمة m لا تتعلق بقيمة c وبالتالي موقع النقطة M في المستوي لا يتغير بتحول c في المستوي

الجلسة التكرارية

مسألة 1 هامة: نتأمل في معلم متجانس

النقاط: $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(3,2,6)\ B(1,2,4)$
$C(4,-2,5)\ \ D(1,1,-1)$

والمستوي P الذي معادلته

$$2x+y-2z=-4$$

① أثبت أن النقاط C,B,A تعين مستوياً، وبين أن هذا المستوي هو P.

② أثبت أن المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته.

③ عين تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D والعمودي على P واستنتج احداثيات K المسقط القائم لـ D على P.

④ احسب حجم الرباعي $ABCD$.

⑤ أثبت أن النقطة K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,7)(B,-9)\ (C,-2)$

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)\ ,\overrightarrow{AC}(1,-4,-1)$

$$-\frac{2}{1}\neq\frac{0}{-4}\neq-\frac{2}{-1}$$

المركبات غير متناسبة ⇐ الأشعة غير مرتبطة خطياً بالتالي C,B,A تعين مستوياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow -2a-2c=0\ \ (1)$
$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow a-4b-c=0\ \ (2)$

من (1) نجد: $a=-c$

نفرض $c=2 \Leftarrow a=-2$

نعوض في (2) : $b=-1$

$\vec{n}(-2,-1,2)$

معادلة المستوي P:

$-2(x-3)-1(y-2)+2(z-6)$
$=0$
$-2x+6-y+2+2z-12=0$
$P: 2x+y-2z=-4$

❷ حتى يكون المثلث ABC قائم :

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$
$(-2,0,-2)(1,0,-1)=0$
$-2+0+2=0$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A

$$S_{ABC}=\frac{AC.AB}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{4\times4}\times\sqrt{1+16+1}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{18}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=6$$

❸ بما أن المستقيم d عمودي على المستوي P فإن $\vec{u}_d=\vec{n}_P(2,1,-2)$ بالتالي:

$$d\begin{cases}x=2t+1\\ y=t+1\\ z=-2t-1\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

لإيجاد احداثيات K نعوض احداثيات d في P

$4t+2+t+1+4t+2=-4$
$t=-1$

نعوض قيمة t في d

$K(-1,0,1)$

❹

$$dist(D,P)=\frac{|2+1+2+4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{9}}$$
$$=3$$

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\times3\times6=6$$

❺ لإثبات أن النقطة K مركز أبعاد متناسبة

$(*)$: $7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$
$\overrightarrow{KA}(4,2,5)\ \overrightarrow{KB}(2,2,3)\ \overrightarrow{KC}(5,-2,4)$

الجلسة التكرورية

نعوض في (*)

$$7(4,2,5)-9(2,2,3)-2(5,-2,4)=0$$
$$(28,14,35)-(18,18,27)-(10,-4,8)=0$$
$$(28-18-10,14-18+4,35-27-8)=(0,0,0)$$
$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

مسألة 2 هامة لهذا العام: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AE=AD=2, AB=4$ ، ولتكن J منتصف $[HG]$، ونتأمل في معلم متجانس $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$

① أوجد احداثيات النقاط J,G,F,A

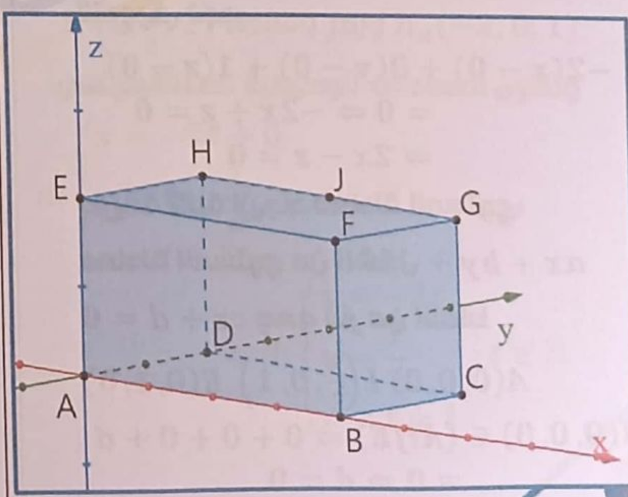
② احسب المسافتين $[JF],[AJ]$

③ أثبت أن المثلث AFJ قائم في J واحسب مساحته.

④ أثبت أن $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ ثم اكتب معادلته.

⑤ احسب بعد C عن المستوي AFJ، ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $AFJC$

⑥ أوجد احداثيات النقطة N المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF)



الحل:

❶ $A(0,0,0)\ F(4,0,2)\ C(4,2,0)\ J(2,2,2)$

❷ $\overrightarrow{JF}(2,-2,0)\ \overrightarrow{AJ}(2,2,2)$

$$\|\overrightarrow{AJ}\|=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$
$$\|\overrightarrow{JF}\|=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

❸ $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JF}=(2,2,2)(2,-2,0)$

$$=4-4+0=0$$

فالمثلث قائم في J

$$S_{AFJ}=\frac{AJ.JF}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$$

❹

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AJ}\Rightarrow\vec{n}\overrightarrow{AJ}=0$$
$$(1,1,-2)(2,2,2)=2+2-4$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{JF}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{JF}=0$$
$$(1,1,-2)(2,-2,0)=2-2=0$$

وبالتالي $n(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ ومعادلته:

$$x+y-2z=0$$

❺

$$dist(C,(AFJ))=\frac{|4+2+0|}{\sqrt{1+1+4}}$$
$$=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$
$$V=\frac{1}{3}S_{AFJ}.h=\frac{1}{3}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{6}$$
$$V=4$$

نفرض $N(x,y,z)$

نوجد التمثيل الوسيطي لـ $\overrightarrow{AF}$

$$\overrightarrow{AF}(4,0,2)$$
$$d:\begin{cases}x=4t\\ y=0\\ z=2t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

$E(0,0,2)$

$\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{AF}=0$

$(x,y,z-2)(4,0,2)=0$

$(*)\colon\ 4x+2z-4=0$

نعوض d في (*):

$16t+4t-4=0$

$20t=4\Rightarrow t=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

نعوض في d ينتج N

$x=\frac{4}{5}\,,y=0\,,z=\frac{2}{5}\ N\left(\frac{4}{5},0,\frac{2}{5}\right)$

مسألة 3:

نتأمل مكعباً $ABCDEFGH$ ، لتكن K,J,I منتصفات أضلاعه $[DH],[HG],[DC]$ بالترتيب نتخذ $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ معلماً متجانساً في الفراغ.

① أوجد إحداثيات النقاط A,I,E

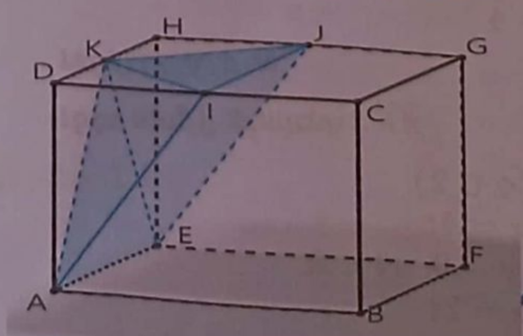
② اكتب معادلة المستوي $(AIJE)$

③ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

④ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.

⑤ احسب احداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$

⑥ اثبت أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha)\ (I,\beta)\ ,(E,\gamma)$ حيث α,β,γ هي أثقال يطلب تعيينها.



الحل:

① **من الشكل نجد:**

$$A(0,0,0)\,,I\left(\frac{1}{2},0,1\right),E(0,1,0)$$

②

$\overrightarrow{AE}(0-0,1-0,0-0)\Rightarrow\overrightarrow{AE}(0,1,0)$

$\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2}-0,0-0,1-0\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

وليكن الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي $(AIJE)$ فيكون:

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AE}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AE}=0$

$\Rightarrow(a,b,c).(0,1,0)=0$

$\Rightarrow b=0$

$\vec{n}\perp\overrightarrow{AI}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AI}=0$

$\Rightarrow(a,b,c)\left(\frac{1}{2},0,1\right)=0$

$\Rightarrow\frac{1}{2}a+c=0$

نفرض $c=1$ نجد:

$\frac{1}{2}a+1=0\Rightarrow a=-2$

وبالتالي نجد: $\vec{n}(-2,0,1)$

ومعادلة المستوي $(AIJE)$ من الشكل:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

التعويض نجد:

$-2(x-0)+0(y-0)+1(z-0)=0\Rightarrow -2x+z=0$

$\Rightarrow 2x-z=0$

طريقة ثانية لإيجاد معادلة المستوي:

معادلة المستوي من الشكل $ax+by+cz+d=0$ وهو مار من النقاط

$A(0,0,0)\ I\left(\frac{1}{2},0,1\right)\ E(0,1,0)$

$A(0,0,0)\in(AIJE)\Rightarrow 0+0+0+d=0\Rightarrow d=0$

الجلسة التكرارية

$I\left(\frac{1}{2},0,1\right)\in(AIJE)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a+0+c+0=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a+c=0$

$E(0,1,0)\in(AIJE)\Rightarrow 0+b+0+0=0\Rightarrow b=0$

نفرض $c=1$ نجد $\frac{1}{2}a+1=0\Rightarrow a=-2$

وبالتالي نجد معادلة المستوي $2x-z=0$

③ بعد K عن المستوي $(AIJE)$ من الشكل نجد:

$K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$

$h=dist\big(K,(AIJE)\big)$

$=\frac{\left|-2(0)+0\left(\frac{1}{2}\right)+1(1)\right|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

حجم الهرم $KAIJE$:

$IJ=AE=1\,,AI=\sqrt{AD^2+DI^2}$

$=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}$

$=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ المستقيم المطلوب عمودي على المستوي $(AIJE)$ فيكون موازياً للناظم على المستوي ونجد: شعاع توجيه المستقيم هو $\vec{n}_d(-2,0,1)$ ويمر بالنقطة $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ وتكون المعادلات الوسيطية للمستقيم هي:

$$d:\begin{cases}x=-2t+0\\ y=0+\frac{1}{2}\\ z=t+1\end{cases}\quad;t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=-2t\\ y=\frac{1}{2}\\ z=t+1\end{cases}\quad;t\in\mathbb{R}$$

⑤ لإيجاد احداثيات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$ نوجد الحل المشترك لمعادلات المستقيم مع معادلة المستوي

$-2(-2t)+0\left(\frac{1}{2}\right)+t+1=0$

$\Rightarrow 4t+t+1=0\Rightarrow 5t=-1\Rightarrow \boxed{t=-\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$

⑥

$\overrightarrow{AN}=x\,\overrightarrow{AI}+y\,\overrightarrow{AE}$

⑥ $\overrightarrow{AE}(0,1,0)$, $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $\overrightarrow{AN}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$;

$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=x\left(\frac{1}{2},0,1\right)+y(0,1,0)$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{1}{2}x,y,x\right)$

$\Rightarrow x=\frac{4}{5},y=\frac{1}{2}\Rightarrow \overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AI}+5\overrightarrow{AE}$

$\Rightarrow 10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{AN}+5\overrightarrow{NE}$

$\Rightarrow -3\overrightarrow{AN}-8\overrightarrow{NI}-5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{NA}-8\overrightarrow{NI}-5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$

أي أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)(I,-8)\ (E,-5)$

طريقة ثانية لإثبات أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha)\ (I,\beta),(E,\gamma)$

$\overrightarrow{AN}=x\,\overrightarrow{AI}+y\,\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE}(0,1,0)$, $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $\overrightarrow{AN}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)$;

$$\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = x\left(\frac{1}{2},0,1\right) + y(0,1,0)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right) = \left(\frac{1}{2}x, y, x\right)$$
$$\Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AN}$$
$$= \frac{4}{5}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

أي أن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً فهي تقع في مستوٍ واحد.

ومنه N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,\alpha)\ (E,\beta),(A,1-\alpha-\beta)$

أي:

$$\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{1}{2}, 1-\alpha-\beta = 1 - \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{3}{10}$$

وبالتالي نجد أن N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $\left(A,-\frac{3}{10}\right),\left(I,\frac{4}{5}\right),\left(E,\frac{1}{2}\right)$

مسألة 4: نتأمل النقطتين $B(3,2,0)$ $A(1,1,1)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، ليكن المستوي P المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً، وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$، وأخيراً لتكن S الكرة التي مركزها A ونصف قطرها AB.

① **أثبت أن $2x+y-z-8=0$ هي معادلة المستوي P.**

② **جد معادلة الكرة S.**

③ **أثبت أن المستوي Q مستوٍ مماس للكرة S.**

④ **أثبت أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q.**

⑤ **ليكن المستقيم d الذي يقبل تمثيلاً وسيطياً :**

$$d:\begin{cases} x = 1 \\ y = 12-5t\ ; t\in\mathbb{R} \\ z = 4-3t \end{cases}$$

أثبت أن المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين Q, P.

⑥ **أثبت أن المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.**

الحل:

①

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (3-1, 2-1, 0-1)$$
$$= (2,1,-1)$$
$$\Rightarrow P: 2x+y-z+4=0$$
$$B(3,2,0)\in P \Rightarrow 2(3)+2-0+d$$
$$= 0 \Rightarrow d = -8$$
$$\Rightarrow \boxed{P: 2x+y-z-8=0}$$

②

$$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$$
$$= R^2$$
$$R = AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{6}, A(x_0,y_0,z_0)$$
$$= (1,1,1)$$
$$\Rightarrow S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$
$$= 6$$

③ **يكون المستوي Q مستوٍ مماس للكرة S إذا كان بعد مركزها عنه يساوي طول نصف قطرها.**

$$d(A,Q) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\Rightarrow d(A,Q)$$
$$= \frac{|1(1)-1(1)+2(1)+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}}$$
$$= \sqrt{6} = R$$

④ **تكون النقطة $C(0,2,-1)$ مسقط النقطة $A(1,1,1)$ على المستوي Q إذا تحقق الشرطين:**

1) $C(0,2,-1)\in Q$ **2)** $(AC)\perp Q$

نعوض إحداثيات النقطة $C(0,2,-1)$ في معادلة المستوي Q نجد:

$1(0)-1(2)+2(-1)+4$
$=-2-2+4=0 \Rightarrow C \in Q$

$\vec{n}_Q=(1,-1,2)$

$\overrightarrow{AC}=(0-1,2-1,-1-1)$
$=(-1,1,-2)$
$=-(1,-1,2) \Rightarrow \overrightarrow{AC}$
$=-\vec{n}_Q \Rightarrow (AC)\perp Q$

مما سبق نجد أن النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q

5 يكون المستقيم d فصل مشترك للمستويين Q,P إذا حققت المعادلات الوسيطية للمستقيم كل من معادلتي المستويين

$2(t)+(12-5t)-(4-3t)-8$
$=2t+12-5t-4+3t$
$-8=0 \Rightarrow d\subset P$

$(t)-(12-5t)+2(4-3t)+4$
$=t-12+5t+8-6t$
$+4=0 \Rightarrow d\subset Q$

أي أن $d\subset P\cap Q$ وبالتالي d هو الفصل المشترك للمستويين Q,P

6 لنوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

لتكن N منتصف $[BC]$ فيكون:

$N\left(\frac{3+0}{2},\frac{2+2}{2},\frac{0-1}{2}\right)N\left(\frac{3}{2},2,-\frac{1}{2}\right)\in R$

$\vec{n}_R=\overrightarrow{BC}=(-3,0,-1)$
$\Rightarrow R:\ -3x-z+d=0$

$N\in R \Rightarrow -3\left(\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)+d=0$
$\Rightarrow -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+d=0 \Rightarrow d$
$=4 \Rightarrow R:\ -3x-z+4$
$=0$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد:

$-3(t)-(4-3t)+4$
$=-3t-4+3t+4=0$
$\Rightarrow d\subset R$

طريقة ثانية لإيجاد المعادلات الوسيطية:

$x-y+2z+4=0\ (1)$
$2x+y-z-8=0\ (2)$

من المعادلتين نجد:

$-y+2z=-x-4\ (1)'$
$y-z=-2x+8\quad (2)'$

بجمع المعادلتين نجد: $z=-x-4-2x+8 \Rightarrow \boxed{z=-3x+4}$ نعوض في $(2)'$ نجد:

$y+3z-4=-2x+8 \Rightarrow y$
$=-2x+8-3x+4 \Rightarrow y$
$=-55x+12$

بفرض $x=t$ نجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P,Q هي:

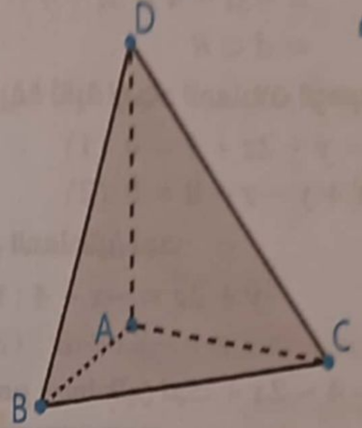
$$d:\begin{cases}x=t\\ y=12-5t\ ;t\in\mathbb{R}\\ z=4-3t\end{cases}$$

مسالة 5:هامة لهذا العام $DABC$ رباعي وجوه، قاعدته المثلث ABC القائم في A والمتساوي الساقين.

$[AD]$ عمودي على المستوي (ABC) و $DA=AC=AB=3$ نختار المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$ والمطلوب:

1. عين إحداثيات A,B,C,D
2. جد معادلة المستوي (DBC)
3. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويعامد المستوي (DBC)
4. بين أن المسقط القائم لـ A على المستوي (DBC) هو J مركز ثقل المثلث DBC.
5. احسب حجم رباعي الوجوه $D-ABC$

6 جد بعد A عن المستوي (DBC) بثلاث طرق مختلفة



الحل:

1 $A(0,0,0)\ B(3,0,0)$
$C(0,3,0)\ D(0,0,3)$

2 $\overrightarrow{DB}(3-0,0-0,0-3) \Rightarrow$
$\overrightarrow{DB}(3,0,-3)$
$\overrightarrow{DC}(0-0,3-0,0-3)$
$\Rightarrow \overrightarrow{DC}(0,3,-3)$

الشعاعان غير مرتبطان خطياً، نفرض $n(a,b,c)$ ناظم على المستوي (DBC) فيكون:

$\vec{n} \perp \overrightarrow{DB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{DB}=0$
$\Rightarrow (a,b,c).(3,0,-3)=0$
$\Rightarrow 3a-3c=0$
$\vec{n} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{DC}=0$
$\Rightarrow (a,b,c)(0,3,-1)=0$
$\Rightarrow 3b-3c=0$

نفرض $c=1$ نعوض في المعادلة الأولى نجد $3a-3=0 \Rightarrow a=1$ نعوض في الثانية نجد: $3b-3=0 \Rightarrow b=1$ بالتالي $\vec{n}(1,1,1)$

والنقطة $B(3,0,0)$ من المستوي (DBC) ومعادلة المستوي من الشكل $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ بالتعويض نجد:
$(x-3)+(y-4)+(z-0)=0 \Rightarrow$
$(DBC): x+y+z-3=0$

3 بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (DBC) فإن $\vec{n}(1,1,1)$ شعاع ناظم على المستوي هو شعاع توجيه المستقيم d. $\vec{n}$ شعاع موجه للمستقيم المار بالنقطة $A(0,0,0)$ فتكون المعادلات الوسيطية للمستقيم d:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=t\ ;t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

4 بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (DBC) فإن نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (DBC) هي المسقط القائم لـ A على (EBC) ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة المستوي نجد:

$t+t+t-3=0 \Rightarrow 3t=3 \Rightarrow t=1$

بالتالي نجد احداثيات المسقط القائم هي $(1,1,1)$

بما أن J مركز ثقل المثلث DBC فإن: $J\left(\frac{0+0+3}{3},\frac{0+3+0}{3},\frac{3+0+0}{3}\right)$ وبالتالي نقطة التقاطع هي $(1,1,1)$ أي أن $J(1,1,1)$ هي المسقط القائم لـ A على (DBC)

5 حساب حجم رباعي الوجوه $D-ABC$:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\times h\ ;h=dist\big(D,(ABC)\big)$$
$$=AD \Rightarrow V$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AB\times AC\times AD$$
$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 3\times 3=\frac{9}{2}$$

6

$$dist\big(A,(DBC)\big)$$
$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$\Rightarrow dist\big(A,(DBC)\big)$$
$$=\frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

المسألة التكرورية

في معلم متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقاط التالية:

$$A(1,0,-1)\ \ B(2,2,3)$$
$$C(3,1,-2)\ \ D(-4,2,1)$$

1. بين أن C,B,A ليست على استقامة واحدة (تعين مستوي)
2. اكتب معادلة المستوي (ABC).
3. أثبت أن (ABC) مثلث قائم واحسب مساحته.
4. عين بعد D عن المستوي (ABC).
5. احسب حجم الرباعي $DABC$.
6. عين W مركز الكرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$ وعين R.
7. هل (ABC) يمس الكرة؟
8. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من W ويعامد (ABC).
9. ليكن المستوي Q الذي معادلته: $Q: x+y-z-1=0$ هل $Q,(ABC)$ متعامدان؟
10. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ' الفصل المشترك لـ $(ABC),Q$
11. ادرس الوضع النسبي بين Δ',Δ.
12. اكتب معادلة المستوي المحوري P للقطعة $[MN]$ حيث $M(1,0,0)\ \ N(-1,0,2)$
13. ادرس الوضع النسبي بين Q ، P ، (ABC)
14. عين إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC.
15. عين إحداثيات G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)\ (B,-1)\ (C,1)$
16. عين مجموعة النقاط M : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=6$

الجلسة التكرورية

1. يجب ان نبرهن أن $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً.

$\overrightarrow{AB}(1,2,4)\ \overrightarrow{AC}(2,1,-1)$

$$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{4}{-1}$$

المركبات غير متناسبة

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مستقلان خطياً $\Leftarrow$ C,B,A ليست على استقامة واحدة.

2. معادلة المستوي (ABC)

نقطة تنتمي إليه (C,B,A) ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$A(1,0,-1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow(a,b\ c)(1,2,4)=0$

$\Rightarrow a+2b+4c=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow(a,b,c)(2,1,-1)=0$

$\Rightarrow 2a+b-c=0$

نختار قيمة لـ c:

$\boxed{c=1}$

$$\Rightarrow\begin{matrix}a+2b+4=0\\2a+b-1=0\end{matrix}$$

نضرب المعادلة الثانية بـ -2 ونجمعها مع الأولى

$$\Rightarrow\begin{matrix}a+2b+4=0\\-4a-2b+2=0\\\hline -3a+6=0\end{matrix}$$

$\Rightarrow\boxed{a=2}$

نعوض قيمة a في المعادلة الثانية:

$\Rightarrow 2+2b+4=0\Rightarrow\boxed{b=-3}$

$\Rightarrow \vec{n}(2,-3,1)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0$

$2x-2-3y+z+1=0$

$\boxed{(ABC):\ 2x-3y+z-1=0}$

3 طريقة (1): حسب عكس فيثاغورث

$(BC)^2=(AC)^2+(AB)^2$

طريقة (2): يجب ان نبرهن أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$(1,2,4).(2,1,-1)=0 \Rightarrow 2+2-4=0$
$\Rightarrow 0=0$

محققة بالتالي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ متعامدان في A

$\Leftarrow$ ABC مثلث قائم في A

$S_{ABC}=\frac{AB.AC}{2}$

$AB=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$

$AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$S_{ABC}=\frac{\sqrt{21}.\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{7\times3}\times\sqrt{3\times2}}{2}$
$=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

4 بعد D عن المستوي:

$D(-4,2,1)$,$(ABC): 2x-3y+z-1$
$=0$

$dist(D,(ABC))$
$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$

5

$V=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=7$

6

$x^2+y^2+z^2-6z+2y-15=0$

إتمام إلى مربع كامل:

$x^2+y^2+2y+z^2-6z-15=0$

$x^2+y^2+2y+1-1+z^2-6z+9-9$
$-15=0$

$x^2+(y+1)^2+(z-3)^2=25$

تمثل كرة مركزها $W(0,-1,3)$ ونصف قطرها
$R=5$

7

تكرورية:

لبرهان أن المستوي يمس الكرة يجب أن نبرهن:

$\boxed{dist(W,(ABC))=R}$

$dist(W,(ABC))=\frac{|0+3+3-1|}{\sqrt{14}}$

$=\frac{5}{\sqrt{14}}\neq 5$

8 معادلة المستقيم Δ

نقطة تنتمي إليه: $W(0,-1,3)$

شعاع توجيه، وبما أنه يعامد المستوي

فإن $\vec{n}=\vec{v}(2,-3\ ,1)$

الجلسة التكرورية

$$\Delta:\begin{cases}x = x_0 + a.t\\ y = y_0 + b.t \quad ; t \in \mathbb{R}\\ z = z_0 + c.t\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x = 2t\\ y = -1 - 3t \quad ; t \in \mathbb{R}\\ z = 3 + t\end{cases}$$

⑨

$Q: x + y - z - 1 = 0$

$\vec{n}_Q(1,1,-1)\,,\qquad \vec{n}_{ABC}(2,-3,1)$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-3} \neq -\frac{1}{1}$$

غير مرتبطان خطياً.

$\vec{n}_Q . \vec{n}_{ABC} = 0$

$2 - 3 - 1 \neq 0$

$\vec{n}_{ABC}, \vec{n}_Q$ غير متعامدين وهما متقاطعان في فصل مشترك.

⑩ **نحل جملة المعادلتين:**

$$2x - 3y + z - 1 = 0$$
$$x + y - z - 1 = 0$$

نفرض $x = 0$

$$-3y + z - 1 = 0$$
$$y - z - 1 = 0$$

بالجمع

$$-2y - 2 = 0$$

$\Rightarrow y = -1, z = -2 \Rightarrow E(0,-1,-2)$

نكرر العملية باختيار $y = 0$

$$2x + z - 1 = 0$$
$$x - z - 1 = 0$$

بالجمع

$$3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} - 1 = z \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right)$$

معادلة المستقيم Δ'

نقطة تنتمي إليه F, E

شعاع توجيه $\overrightarrow{EF}\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$

$$\Delta':\begin{cases}x = \frac{2}{3}s\\ y = -1 + s \quad ; s \in \mathbb{R}\\ z = -2 + \frac{5}{3}s\end{cases}$$

⑪ **دراسة الوضع النسبي بين Δ', Δ**

$\vec{v}_\Delta(2,-3,1)\ \ \vec{v}_{\Delta'}\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$

نلاحظ أن $\vec{v}_\Delta, \vec{v}_{\Delta'}$ مستقلان خطياً. فهما إما متقاطعان يقعان في مستو واحد أو متخالفان لا يقعان في مستو واحد.

بالحل المشترك.

$$\frac{2}{3}s = 2t$$
$$-1 + s = -1 - 3t$$
$$-2 + \frac{5}{3}s = 3 + t$$

من المعادلة الأولى نجد:

$2s = t \Rightarrow s = 3t$

نعوض في الثانية :

$-1 + 3t = -1 - 3t \Rightarrow t = 0$

نعوض في الثالثة :

$-2 \neq 3$

غير محققة

الجلسة التكرارية

المستقيمان مخالفان ولا يقعان في مستو واحد.

⑫ معادلة المستوي المحوري P:

نقطة تنتمي إليه: I منتصف $[MN]$

$I(0,0,1)$

شعاع توجيه $\overrightarrow{MN}(-2,0,2)$

$-2x+2z-2=0$

$\boxed{P: x-z+1=0}$

⑬

$x+y-z-1=0$
$2x-3y+z-1=0$
$x-z+1=0$

نضرب المعادلة الأولى بـ -2 ونجمعها مع الثانية

$x+y-z-1=0$
$-5y+3z+1=0$
$x-z+1=0$

نضرب المعادلة الأولى بـ -1 ونجمعها مع الثالثة

$x+y-z-1=0$
$-5y+3z+1=0$
$-y+2=0$

$\boxed{y=2}$

$-10+3z+1=0 \Rightarrow \boxed{z=3}$

$\Rightarrow x+2-3-1=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$

المستويات تتقاطع في نقطة واحدة

$(2,2,3)$

G مركز ثقل المثلث ABC

$A(1,0,-1)\ B(2,2,3)\ C(3,1,-2)$

$x_G=2\ , y_G=1\ , z_G=0$

$G(2,1,0)$

⑮

$$x'_G=\frac{3-2+3}{3}=\frac{4}{3}$$

$$y'_G=\frac{0-2+1}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$z'_G=\frac{-3-3-2}{3}=-\frac{8}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{8}{3}\right)$$

⑯

H مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A,1)\ (B,1)\ (C,1)$

$\|3\overrightarrow{MA}\|=6 \Rightarrow \|\overrightarrow{MH}\|=2$

تمثل كرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{2}$

دعواتي لكم بكامل التوفيق

باذن الله الجلسة التكرورية مريحة للطالب بايام الامتحان مع الجلسة يفضل دراسة الدورات الموجودين ع قناتي التلغرام و النماذج الوزارية

الأستاذ : احمد تكروري

ماستفعله اليوم سيقال عنك غداً... قرر أن تترك أثراً أو ذكراً حسناً 💙💙