الخلاصة

فى

التفاضل والتكامل

(المنهج الجديد ٢٠١٧)

للصف الثالث الثانوى

اعداد/ أ: رفعت سعيد عبد المجيد

معلم أول (أ) بمعهد شعشاع الازهرى

ملخص الوحدة الاولى

اذا كانت ص = جاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس

اذا كانت ص = جتاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ جاس

اذا كانت ص = ظاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا^2 س

اذا كانت ص = ظتاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ قتا^2 س

اذا كانت ص = قاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قاس ظاس

اذا كانت ص = قتاس فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ قتاس ظتاس

الاشتقاق الضمني

اذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{ص}^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\ \text{ص}^{\text{ن}-1}\ \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

الاشتقاق البارامتري

اذا كانت س = د(ن) ، ص = ر(ن)

فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \times \frac{\text{دن}}{\text{دس}}$

معادلتا المماس والعمودي للمنحنى :

ميل المماس للمنحنى = $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

معادلة المماس هي ص ـ ص١ = م (س ـ س١)

معادلة العمودي هي $ص - ص_1 = \frac{-1}{م} (س - س_1)$

المشتقات العليا للدالة :-

نسمي المشتقات بدءاً من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $ص''$ أو $\frac{د^2 ص}{د س^2}$

المعدلات الزمنية المرتبطة

اذا كانت $ص = د(س)$ ، س تتغير تبعاً لتغير الزمن ن ، فإن ص تتغير أيضاً تبعاً لتغير الزمن ن أي أن ص دالة الدالة في الزمن ن

ويكون $\frac{دص}{دن} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دن}$

وترتبط هذه العلاقة المعدل الزمني لتغير س بالمعدل الزمني لتغير ص

يكون المعدل موجباً اذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن

ويكون سالباً اذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

ملخص الوحدة الثانية

النهايات

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{هـ}$$

$$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \left(1 + \text{س}\right)^{\frac{1}{\text{س}}} = \text{هـ}$$

$$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{أ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{أ}$$

$$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = 1$$

$$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{لو}_{\text{أ}} (1 + \text{س})}{\text{س}} = \text{لو}_{\text{أ}} \text{هـ}$$

$$\underset{\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} (1 + \text{س})}{\text{س}} = 1$$

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{أس}} = \text{هـ}^{\text{أ}}$$

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \left(1 + \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{أ}}$$

مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

مشتقة $\text{ه}^{\text{س}}$ هي $\text{ه}^{\text{س}}$

مشتقة $\text{ه}^{\text{د(س)}}$ هي $\text{ه}^{\text{د(س)}} \cdot \text{دَ(س)}$

مشتقة $\text{أ}^{\text{س}}$ هي $\text{أ}^{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{ه}}\ \text{أ}$

مشتقة $\text{أ}^{\text{د(س)}}$ هي $\text{أ}^{\text{د(س)}} \cdot \text{دَ(س)}\ \text{لو}\ \text{أ}$

مشتقة $\text{لو}_{\text{ه}}\ \text{س} = \frac{1}{\text{س}}$

مشتقة $\text{لو}_{\text{ه}}\ \text{د(س)} = \frac{1}{\text{د(س)}} \cdot \text{دَ(س)}$

مشتقة $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{س} = \frac{1}{\text{س}\ \text{لو}_{\text{ه}}\ \text{أ}}$

مشتقة $\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{د(س)} = \frac{1}{\text{د(س)}\ \text{لو}_{\text{ه}}\ \text{أ}} \cdot \text{دَ(س)}$

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

$\int \text{ه}^{\text{س}}\ \text{ء س} = \text{ه}^{\text{س}} + \text{ث}$

$\int \text{ه}^{\text{د(س)}} \cdot \text{دَ(س)}\ \text{ء س} = \text{ه}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$

$\int \text{ه}^{\text{أس}}\ \text{ء س} = \frac{\text{ه}^{\text{أس}}}{\text{أ}} + \text{ث}$

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

$\int \frac{1}{س} ءس = لو_{هـ} |س| + ث$

$\int \frac{د'(س)}{د(س)} ءس = لو_{هـ} |د(س)| + ث$

$\int م^{س} ءس = م^{س} لو_{م} هـ + ث$

$\int م^{د(س)} \cdot د'(س) ءس = م^{د(س)} \cdot لو_{م} هـ + ث$

ملخص الوحدة الثالثة

النقط الحرجة :-

يكون للدالة د المتصلة على الفترة]أ، ب[نقطة حرجة (جـ، د(جـ)) حيث جـ ∈]أ، ب[إذا كان دَ(جـ) = صفر أو دَ(جـ) غير موجودة

خطوات بحث التزايد والتناقص للدالة

(١) نحدد مجال الدالة

(٢) نوجد دَ(س)

(٣) نوجد النقط الحرجة

(٤) نحدد الفترات التي ينقسم إليها مجال الدالة بهذه النقط

(٥) نعين إشارة دَ(س) في كل فترة حيث فترات التزايد فيها دَ(س) > ٠ وفترات التناقص فيها دَ(س) < ٠

خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المحلية

(١) نحدد مجال الدالة

(٢) نوجد دَ(س)

(٣) نوجد النقط الحرجة

(٤) نوجد إشارة دَ(س) حول النقطة الحرجة

إذا كانت تتغير من الموجب إلى السالب

تكون نقطة عظمى محلية

وإذا كانت تتغير من السالب إلى الموجب

تكون قيمة صغرى محلية

خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المطلقة

(١) نعين النقط الحرجة

(٢) نوجد قيم الدالة عند النقط الحرجة

وقيمتي النقط الحدية للفترة

(٣) نقارن بين القيم السابقة كلها فتكون

أكبر قيمة هي القيمة العظمى المطلقة

في الفترة وأصغر هذه القيم هي القيمة

الصغرى المطلقة

نقطة الانقلاب

اذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ، ب[، جـ ∈]أ، ب[
وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (جـ، د(جـ))
فإن هذه النقطة تسمى نقطة انقلاب اذا تغير تحدب منحنى الدالة عند هذه النقطة من تحدب لأسفل إلى تحدب لأعلى أو من تحدب لأعلى إلى تحدب لأسفل.

خطوات بحث فترات التحدب ونقط الانقلاب

(١) نوجد د''(س)

(٢) نوجد قيم س التي تجعل د''(س) = ٠ أو غير موجودة.

(٣) نعين اشارة د''(س) لتعيين فترات التحدب لأعلى حيث د''(س) < ٠ و فترات التحدب لأسفل حيث د''(س) > ٠.

(٤) نحدد نقط الانقلاب حيث تتغير اشارة د''(س) على يمين ويسار هذه النقط.

خطوات رسم منحنى الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة فأقل :-

(١) نحدد مجال الدالة ثم نحدد هل هي زوجية أم فردية

(٢) نوجد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت ونحدد كذلك مناطق التزايد والتناقص

(٣) نوجد مناطق التحدب لأعلى ولأسفل ونقط الانقلاب إن وجدت

(٤) نعين بعض النقط المساعدة إن أمكن مثل نقط التقاطع مع محور السينات ونقط التقاطع مع محور الصادات

ملخص الوحدة الرابعة

تكامل الدوال المثلثية

$\int$ جا س ء س = − جتا س + ث

$\int$ جتا س ء س = جا س + ث

$\int$ قا² س ء س = ظا س + ث

$\int$ قتا² س ء س = − ظتا س + ث

$\int$ قا س ظا س ء س = قا س + ث

$\int$ قتا س ظتا س ء س = − قتا س + ث

$\int$ جا (أ س + ب) ء س = $-\frac{1}{أ}$ جتا (أ س + ب) + ث

$\int$ جتا (أ س + ب) ء س = $\frac{1}{أ}$ جا (أ س + ب) + ث

$\int$ قا² (أ س + ب) ء س = $\frac{1}{أ}$ ظا (أ س + ب) + ث

$\int$ قتا² (أ س + ب) ء س = $-\frac{1}{أ}$ ظتا (أ س + ب) + ث

تفاضل الدالة

اذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوي س ، ص = د (س)

فإن ء ص = د̄ (س) ء س حيث

ء ص تفاضل ص ، ء س تفاضل س

التكامل بالتعويض

احدى طرق ايجاد التكامل وبه يحول التكامل المعطى الى تكامل قياسي معروف وغالبا يستخدم في الجذور

التكامل بالتجزيء

$$\int \text{ع}\ \text{د}\text{ص} = \text{ص}\ \text{ع} - \int \text{ص}\ \text{د}\text{ع}$$

أو بعبارة أخرى

$\int$ حاصل ضرب د النتيه = الاول × الثانية

$-\int$ تكامل الثانية × تفاضل الاولى

التكامل المحدد

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = \text{ت}(\text{ب}) - \text{ت}(\text{أ})$$

خواص التكامل المحدد

(1) $\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س}$

(2) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = \text{صفر}$

(3) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\ \text{د}\text{س}$

(٤) $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٠$ ، دالة فردية

(٥) $\int_{-\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢\int_{٠}^{\text{أ}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$ دالة زوجية

المساحات في المستوى

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة [أ، ب] والمستقيمين س = أ ، س = ب حيث د(س) ≥ ٠

هي $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\,\text{ءس}$

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على الفترة [أ ، ب] والمستقيمين س = أ ، س = ب حيث د(س) $\geq$ ر(س) ≥ ٠ هي :

$\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د}(\text{س}) - \text{ر}(\text{س})]\,\text{ءس}$

الحجوم الدورانية

ينشأ المجسم الدوراني من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم يسمى

محور الدوران .

* حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة المتصلة على الفترة [أ ، ب] ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث د(س) $\geq$ ٠ هو

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [\text{د(س)}]^2 \, \text{ءس}$$

* حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على الفترة [أ ، ب] والمستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث د(س) $\geq$ ر(س) $\geq$ ٠ هو

$$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left[(\text{د(س)})^2 - (\text{ر(س)})^2 \right] \text{ءس}$$

قواعد وقوانين سبق دراستها

$$\text{جتا}^2\text{هـ} + \text{جا}^2\text{هـ} = ١$$

$$١ + \text{ظا}^2\text{هـ} = \text{قا}^2\text{هـ}$$

$$١ + \text{ظتا}^2\text{هـ} = \text{قتا}^2\text{هـ}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} \quad ، \quad \text{ظتاهـ} = \frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}}$$

$$\text{قاهـ} = \frac{١}{\text{جتاهـ}} \quad ، \quad \text{قتاهـ} = \frac{١}{\text{جاهـ}}$$

$$\text{جا}\,٢\text{م} = ٢\,\text{جام}\,\text{جتام}$$

$$\text{جتا}\,٢\text{م} = ١ - ٢\,\text{جا}^2\text{م}$$

$$\text{ظا}\,٢\text{م} = \frac{٢\,\text{ظام}}{١ - \text{ظا}^2\text{م}}$$

$$\lim_{\text{س} \to \text{م}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{م}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{م}} = \text{ن}\,\text{م}^{\text{ن}-١}$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{س}} = ٠$$

قواعد الاشتقاق

مشتقة الثابت = صفر

مشتقة الجذر التربيعي للدالة

$= \frac{1}{٢(\text{الجذر})} \times$ مشتقة ما تحت الجذر

مشتقة خارج قسمة دالتين =

$$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الأولى × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولى

مشتقة $(\text{قوس})^{ن}$ = مشتقة القوس × مشتقة ما بداخل القوس

قواعد التكامل :-

$\int أ \, ءس = أس + ث$ (أ ثابت)

$$\int (أس + ب)^{ن} \, ءس = \frac{(أس + ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + ث$$

$$\int (د(س))^{ن} \cdot دَ(س) \, ءس = \frac{(د(س))^{ن+1}}{ن+1} + ث$$

تمارين عامة

① أوجد $\int \frac{1 - \text{ظا}\,س}{1 + \text{ظا}\,س}\,ء\,س$

الحل

$\int \frac{1 - \text{ظا}\,س}{1 + \text{ظا}\,س} \times \left(\frac{\text{جتا}\,س}{\text{جتا}\,س}\right) ء\,س$

$= \int \frac{\text{جتا}\,س - \text{جا}\,س}{\text{جتا}\,س + \text{جا}\,س}\,ء\,س$

البسط تفاضل المقام

$= \text{لو}_{هـ} |\text{جتا}\,س + \text{جا}\,س| + ث$

② $\int \text{ظا}\,٦س\,ء\,س$

الحل

$\int \text{ظا}\,٦س\,ء\,س$

$= \int \frac{\text{جا}\,٦س}{\text{جتا}\,٦س}\,ء\,س$

$= \frac{-1}{٦} \int \frac{-٦\,\text{جا}\,٦س}{\text{جتا}\,٦س}\,ء\,س$

$= -\frac{1}{٦}\,\text{لو}_{هـ} |\text{جتا}\,٦س| + ث$

٣) $\int \frac{س^٢ - ٢٥}{س^٢ - ٥س} \, دس$

الحل

$= \int \frac{(س + ٥)(س - ٥)}{س \, (س - ٥)} \, دس$

$= \int \frac{س + ٥}{س} \, دس$

$= \int \left(١ + \frac{٥}{س} \right) دس$

$= س + ٥ \, لو_{هـ} |س| + ث$

---

٤) $\int \frac{٦س}{\sqrt[٣]{٢س + ٣}} \, دس$

الحل

نفرض أن $ع = ٢س + ٣$

$س = \frac{ع - ٣}{٢} \Leftarrow دس = \frac{١}{٢} \, دع$

$\int \frac{٦س}{\sqrt[٣]{٢س + ٣}} \, دس = \int \frac{٣(ع - ٣)}{\sqrt[٣]{ع}} \times \frac{١}{٢} \, دع$

$= \frac{٣}{٢} \int \left(ع^{\frac{٢}{٣}} - ٣ \, ع^{-\frac{١}{٣}} \right) دع = \frac{٣}{٢} \left(\frac{٣}{٥} ع^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٩}{٢} ع^{\frac{٢}{٣}} \right) + ث$

$= \frac{٩}{١٠} ع^{\frac{٥}{٣}} - \frac{٢٧}{٤} ع^{\frac{٢}{٣}} + ث = \frac{٩}{٢٠} ع^{\frac{٢}{٣}} (٢ع - ١٥) + ث$

$= \frac{٩}{٢٠} (٢س + ٣)^{\frac{٢}{٣}} \left(٢(٢س + ٣) - ١٥ \right) + ث$

$= \frac{٩}{٢٠} (٢س + ٣)^{\frac{٢}{٣}} (٤س - ٩) + ث$

٥) $\int \text{س}\,(\text{س}+٢)^{٨}\,\text{دس}$

الحل

نفرض أن ع = س + ٢

$\text{س} = \text{ع} - ٢ \Leftarrow \text{دس} = \text{دع}$

$\int \text{س}\,(\text{س}+٢)^{٨} = \int (\text{ع}-٢) \times \text{ع}^{٨}\,\text{دع}$

$= \int (\text{ع}^{٩} - ٢\,\text{ع}^{٨})\,\text{دع}$

$= \frac{١}{١٠}\,\text{ع}^{١٠} - \frac{٢}{٩}\,\text{ع}^{٩} + \text{ث}$

$= \frac{١}{١٠}\,(\text{س}+٢)^{١٠} - \frac{٢}{٩}\,(\text{س}+٢)^{٩} + \text{ث}$

---

٦) $\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

الحل

$\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\int \text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\left[\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}\right]$

$= \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$

$\text{س}^{٢}$ $\text{هـ}^{\text{س}}$ س $\text{هـ}^{\text{س}}$

$٢\text{س} \rightarrow \text{هـ}^{\text{س}}$ $١ \rightarrow \text{هـ}^{\text{س}}$

⑦ أوجد مشتقة $\sqrt{٥ + \text{س}^٢}$ بالنسبة إلى $\frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$ عند س = ٢

الحل

بفرض $\text{ص} = \sqrt{٥ + \text{س}^٢}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٢}$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س}}{٢\sqrt{٥ + \text{س}^٢}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٥ + \text{س}^٢}}$$

$$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{\text{س} + ٢ - \text{س}}{(\text{س} + ٢)^٢} = \frac{٢}{(\text{س} + ٢)^٢}$$

$$\because \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \div \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$$

$$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دع}} = \frac{\text{س}}{\sqrt{٥ + \text{س}^٢}} \div \frac{٢}{(\text{س} + ٢)^٢}$$

$$= \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)^٢}{٢\sqrt{٥ + \text{س}^٢}}$$

$$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دع}}\right)_{\text{س}=٢} = \frac{١٦}{٣}$$

---

⑧ أوجد ميل المماس للمنحنى $٢\text{س}^٢ + ٣\text{ص}^٢ = ٥$

عند النقطة (-١ ، -١)

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$$٤\,س + ٦ص \frac{دص}{دس} = \text{صفر}$$

$$\frac{دص}{دس} = \frac{-٢\,س}{٣\,ص}$$

$$\left(\frac{دص}{دس}\right)_{(-١،-١)} = \frac{-٢}{٣}$$

---

⑨ اذا كان جا^{٢} س + جتا^{٢} ص = $\frac{١}{٤}$ اثبت أن

$$\frac{دس}{دص} = \text{جا ٢ص قتا ٢س}$$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ ص

$$٢\,\text{جا س جتا س}\,\frac{دس}{دص} - ٢\,\text{جتا ص جا ص} = \text{صفر}$$

$$\frac{دس}{دص} = \frac{٢\,\text{جتا ص جا ص}}{٢\,\text{جا س جتا س}}$$

$$= \frac{\text{جا ٢ص}}{\text{جا ٢س}}$$

$$= \text{جا ٢ص قتا ٢س}$$

(10) أوجد معادلة المماس للمنحنى

$\text{٣س}^2 + \text{٣ص}^2 - \text{٢س} = ٤$ عند النقطة $(١ ، -١)$

الحل

بالاشتقاق بالنسبة لـ س

$$\text{٦س} + \text{٦ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢ = ٠$$

$$\text{٦ص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢ - \text{٦س}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢ - \text{٦س}}{\text{٦ص}}$$

$$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)_{(١ ، -١)} = \frac{٢}{٣}$$

∵ معادلة المماس = $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

∴ المعادلة هي $\text{ص} + ١ = \frac{٢}{٣}(\text{س} - ١)$

---

(11) إذا كان $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{قتاس} - \text{ظتاس})$

أثبت أن

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قتاس}$$

الحل

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-\text{قتاس ظتاس} + \text{قتا}^2\text{س}}{\text{قتاس} - \text{ظتاس}}$$

$$= \frac{\text{قتاس}(-\text{ظتاس} + \text{قتاس})}{\text{قتاس} - \text{ظتاس}} = \text{قتاس}$$

١٢ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢} \right)^{\text{س} + ٣}$

الحل

بقسمة البسط والمقام على س

$$\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س} + ٤}{\text{س} - ٢} \right)^{\text{س} + ٣} = \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\left(١ + \frac{٤}{\text{س}}\right)^{\text{س} + ٣}}{\left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{\text{س} + ٣}}$$

$$= \frac{\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٤}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٤}{\text{س}}\right)^{٣}}{\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left(١ - \frac{٢}{\text{س}}\right)^{٣}}$$

$$= \frac{\text{هـ}^{٤} \times (١ + ٠)^{٣}}{\text{هـ}^{-٢} \times (١ - ٠)^{٣}} = \text{هـ}^{٦}$$

---

١٣ أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{جاس} - ١}{\text{س}}$

الحل

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \right)$$

$$= ١ - ١ = \text{صفر}$$

---

(١٤) أوجد $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{٥^{\text{س}} - ١}{٣^{\text{س}} - ١}$

الحل

$$= \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{٥^{\text{س}} - ١}{\text{س}}}{\frac{٣^{\text{س}} - ١}{\text{س}}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} ٥}{\text{لو}_{\text{هـ}} ٣}$$

---

(١٥) أوجد $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to \infty} \left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢\text{س}+٥}$

الحل

$$= \text{نها}_{\text{س} \to \infty} \left[\left(١ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}\right]^{٢} \times \left[١ + \frac{١}{\text{س}}\right]^{٥}$$

$$= \text{هـ}^{٢} \times ١^{٥} = \text{هـ}^{٢}$$

---

(١٦) أوجد $\displaystyle \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{س} - ١}{\text{س}}$

الحل

$$= \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{هـ}^{\text{س}} - ١) - \text{س}}{\text{س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}} - \text{نها}_{\text{س} \to ٠} ١$$

$$= ١ - ١ = \text{صفر}$$

١٧ أوجد النقط الحرجة ثم ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة $د(س) = س^{٢} - ٤س + ٥$

الحل

مجال الدالة = ح

$د'(س) = ٢س - ٤$

$٢س - ٤ = ٠$

$س = ٢$

$د(٢) = ١$

∴ النقطة الحرجة هي $(٢ ، ١)$

الدالة متزايدة في الفترة $]٢ ، \infty[$

و متناقصة في الفترة $]-\infty ، ٢[$

---

١٨ أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية

للدالة: $د(س) = ٢س^{٣} - ٣س^{٢} - ٣٦س + ١٤$

الحل مجال الدالة = ح

$د'(س) = ٦س^{٢} - ٦س - ٣٦$

$٦س^{٢} - ٦س - ٣٦ = ٠$

$س = -٢$ ، $س = ٣$

∴ النقط الحرجة هي $(-٢ ، ٥٨)$ ، $(٣ ، -٦٧)$

د(٣) = −٦٧ قيمة صغرى للدالة

د(−٢) = ٥٨ قيمة عظمى للدالة

---

(١٩) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة

د(س) = ٢س^{٤} − س^{٢} + ١ في الفترة [−١ ، ١]

الحل

د(١) = ٢ ، د(−١) = ٢

د'(س) = ٨س^{٣} − ٢س

٨س^{٣} − ٢س = ٠

٢س (٢س − ١)(٢س + ١) = ٠

∴ النقط الحرجة هي (٠ ، ١) ، ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٨}$) ، (−$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{٨}$)

مما سبق نجد أنه

القيمة العظمى المطلقة = ٢

القيمة الصغرى المطلقة = $\frac{٧}{٨}$

---

(٢٠) ابحث فترات التحدب ونقط الانقلاب

للدالة د(س) = س^{٤} + س^{٣} − ٣س^{٢} + ١

الحل

د'(س) = ٤س^{٣} + ٣س^{٢} − ٦س

د''(س) = ١٢س^{٢} + ٦س − ٦

١٢س^{٢} + ٦س − ٦ = ٠

٢س^{٢} + س − ١ = ٠

(٢س − ١)(س + ١) = ٠

س = $\frac{١}{٢}$ ، −١

∴ المنحنى محدب لأعلى في]−١ ، $\frac{١}{٢}$[

، محدب لأسفل في]−∞ ، −١[

، محدب لأسفل في]$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

د(−١) = −٢ ، د($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٧}{١٦}$

∴ نقط الانقلاب هي (−١ ، −٢) ، ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٧}{١٦}$)

---

(٢١) أوجد $\int_{-٢}^{٢}$ (س^{٤} − ١) ءس

الحل

$\int_{-٢}^{٢}$ (س^{٤} − ١) ءس = [$\frac{س^{٥}}{٥}$ − س]$_{-٢}^{٢}$

= $\frac{٢٢}{٥}$ + $\frac{٢٢}{٥}$

= $\frac{٤٤}{٥}$ = ٨٫٨

٢٢ اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها $= \frac{٧}{٦}$ طول قطر قاعدتها ، أوجد معدل تغير حجمها عندما يكون طول نصف قطر قاعدتها ٦ سم اذا كان ارتفاعها يتغير بمعدل ٠.١ سم / ثانية

الحل

نفرض أن طول نصف قطر قاعدتها = نق سم

وارتفاعها = ع سم

∵ $\text{ع} = \frac{٧}{٦} \times ٢\text{نق} = \frac{٧}{٣}\text{نق}$

∴ $\text{نق} = \frac{٣}{٧}\text{ع}$

∵ $\text{ح} = \text{ط نق}^{٢}\text{ع}$

$= \text{ط}\left(\frac{٣}{٧}\text{ع}\right)^{٢}\text{ع} = \frac{٩}{٤٩}\text{ط ع}^{٣}$

$\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{٢٧}{٤٩}\text{ط ع}^{٢} \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

عندما نق = ٦سم ∴ ع = ١٤سم

∴ $\frac{\text{دح}}{\text{دن}} = \frac{٢٧}{٤٩}\text{ط}(١٤)^{٢}(٠.١)$

$= ١.٠٨\text{ط}$ سم³/ث

(٢٣) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص١ = ١٢ − $س^٢$ ، ص٢ = ٢$س^٢$

الحل

١٢ − $س^٢$ = ٢$س^٢$

٣$س^٢$ = ١٢

$س^٢$ = ٤

س = ٢ ، −٢

المساحة = $\int_{-٢}^{٢}$ (١٢ − $س^٢$ − ٢$س^٢$) ء س

= ٣٢ وحدة مربعة

---

(٢٤) قطاع دائري محيطه ١٦ سم أوجد طول نصف قطر دائرته عندما تكون مساحة سطحه أكبر ما يمكن ثم أوجد هذه المساحة؟

الحل نفرض أن طول نصف قطر دائرة القطاع = نق

، طول قوس القطاع = ل

∵ محيط القطاع = ٢ نق + ل

∵ ٢ نق + ل = ١٦ ⟸ ل = ١٦ − ٢ نق

$\because$ مساحة القطاع $= \frac{1}{2}$ ل نق

م $= \frac{1}{2}$ نق (١٦ − ٢ نق)

م $=$ ٨ نق − نق^2

م$'$ $=$ ٨ − ٢ نق

٨ − ٢ نق $=$ ٠

نق $=$ ٤

$\because$ م$''$ $=$ −٢ $<$ ٠

$\therefore$ عند نق = ٤ تكون مساحة القطاع م أكبر ما يمكن

$\therefore$ ل $=$ ١٦ − ٢ × ٤ $=$ ٨ سم

$\therefore$ أكبر قيمة لمساحة القطاع $= \frac{1}{2}$ × ٨ × ٤ $=$ ١٦ سم^2

---

٥ أوجد قيمتي الثابتين أ ، ب بحيث يكون للمنحنى ص = س^{٣} + أ س^{٢} + ب س نقطة انقلاب عند النقطة (٣ ، −٩)

الحل

$\because$ النقطة (٣ ، −٩) تقع على المنحنى

(٣)^{٣} + أ (٣)^{٢} + ٣ ب = −٩

٣ أ + ب = −١٢ ⟵ $\boxed{١}$

$ص' = ٣س^2 + ٢أس + ب$

$ص'' = ٦س + ٢أ$

$ص'' = ٠$ عند $س = ٣$

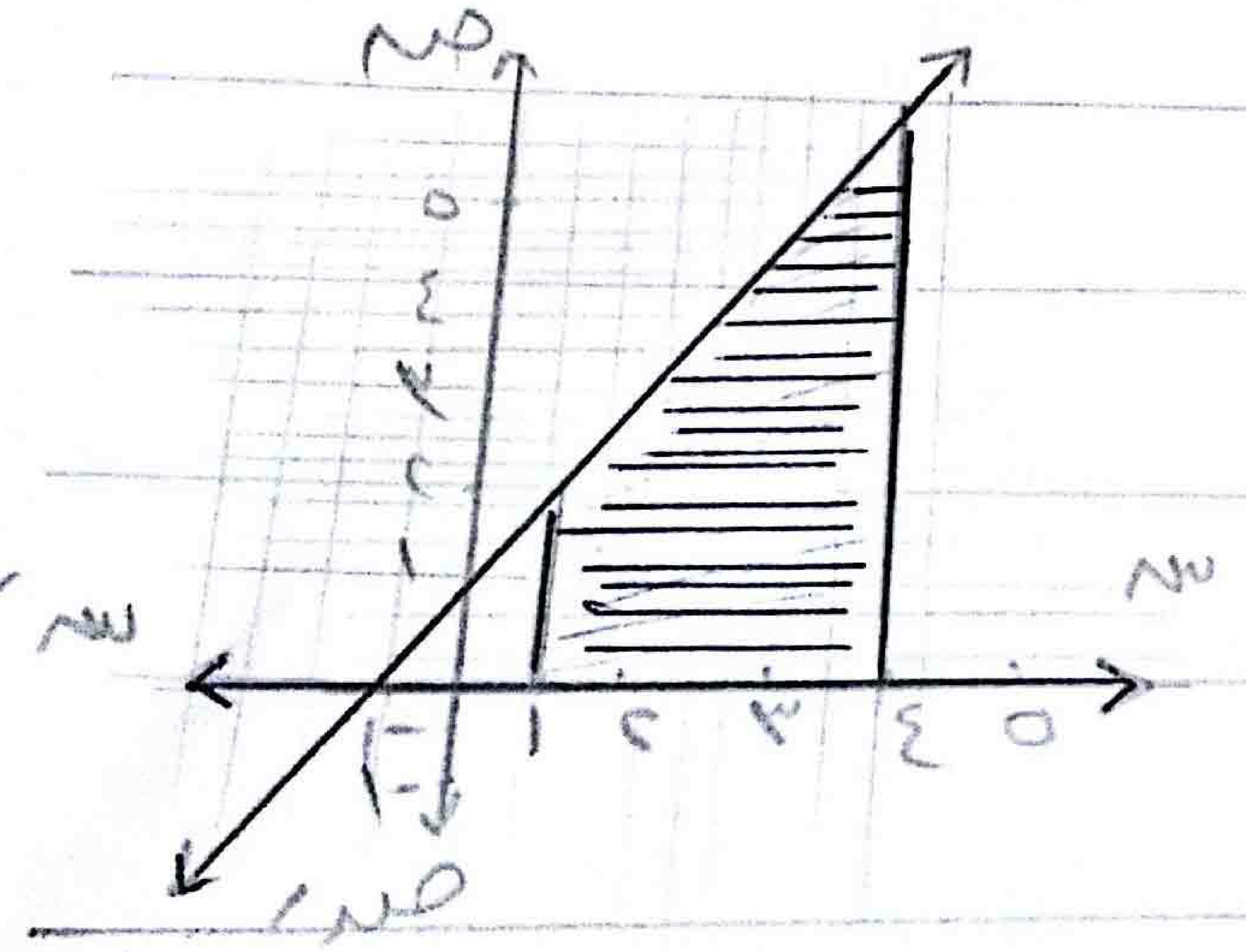
$٦(٣) + ٢أ = ٠$

$أ = -٩$

بالتعويض في ① $\Leftarrow$ ب = ١٥

---

(٢٦) أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمستقيمات: ص = س + ١ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٤ حول محور السينات



الحل

حجم الجسم الدوراني

$= \pi \int_{1}^{4} ص^2 \, دس$

$= \pi \int_{1}^{4} (س+1)^2 \, دس$

$= \pi \left[\frac{(س+1)^3}{3} \right]_{1}^{4} = 39\pi$ وحدة مكعبة

معلم أول أ
رفعت سعيد
رياضيات

(٢٧) $\int \left(\frac{هـ^{س} + ٦}{هـ^{س}} \right) د س$

الحل

$= \int (١ + ٦ هـ^{-س}) د س$

$= س - ٦ هـ^{-س} + ث$

---

(٢٨) $\int جاس \times هـ^{جتاس} \, د س$

الحل

$\int جاس \times هـ^{جتاس} \, د س = - \int - جاس \times هـ^{جتاس} \, د س$

$= - هـ^{جتاس} + ث$

---

(٢٩) $\int \frac{(٤س - ١)^{٢}}{٢س} \, د س$

الحل

$= \int \frac{١٦س^{٢} - ٨س + ١}{٢س} \, د س$

$= \int \left(٨س - ٤ + \frac{١}{٢س} \right) د س$

$= ٤س^{٢} - ٤س + \frac{١}{٢} لو_{هـ} |س| + ث$

---

(٣٠) $\int ظاس \, د س$

الحل

$\int ظاس \, د س = \int \frac{جاس}{جتاس} \, د س$

$= - لو_{هـ} |جتاس| + ث$

(٣١) ارسم شكلاً عاماً لمنحنى الدالة

$د(س) = (س + ٢)(س − ١)^٢$

الحل الدالة معرفة على ح وليست زوجية أو فردية

$د(س) = س^٣ − ٣س + ٢$

$د'(س) = ٣س^٢ − ٣$ ، $د''(س) = ٦س$

بوضع $د'(س) = ٠$

∴ $س = ١$ ، $س = −١$

الدالة متزايدة في $]−∞ ، −١[$ ، $]١ ، ∞[$

ومتناقصة في $]−١ ، ١[$

النقطة $(١ ، ٠)$ صغرى محلية ، $(−١ ، ٤)$ عظمى محلية

بوضع $د''(س) = ٠$

المنحنى محدب لأسفل في $]٠ ، ∞[$

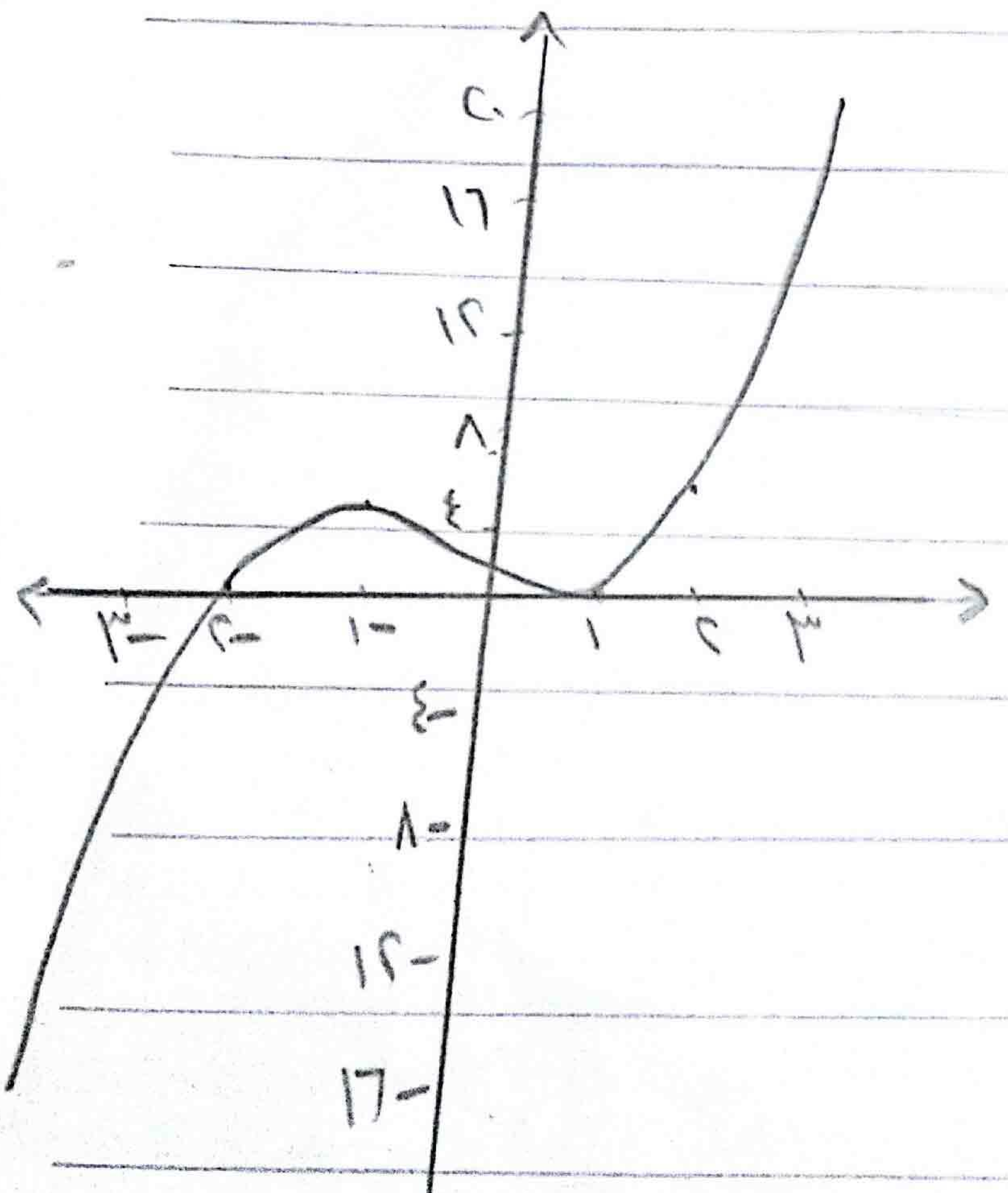
ولأعلى في $]−∞ ، ٠[$

، النقطة $(٠ ، ٢)$ نقطة انقلاب

نوجد بعض النقط المساعدة

$(٣ ، ٢٠)$ ، $(−٣ ، −١٦)$

، $(٢ ، ٤)$ ، $(−٢ ، ٠)$



(٣٢) $\int \text{هـ}^{\text{٧}-\text{٤س}} \, \text{ءس}$

الحل

$\int \text{هـ}^{\text{٧}-\text{٤س}} \, \text{ءس} = \frac{-\text{١}}{\text{٤}} \text{هـ}^{\text{٧}-\text{٤س}} + \text{ث}$

---

(٣٣) $\int \frac{\text{لوهـ} \, \text{٣}}{\text{س}} \, \text{ءس}$

الحل

$= \text{لوهـ}\,\text{٣} \cdot \text{لوهـ} |\text{س}| + \text{ث}$

---

(٣٤) $\int \left(\sqrt{\text{س}} - \frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{س}}}\right)^{\text{٢}} \text{ءس}$

الحل

$= \int \left(\text{س} - \text{٦} + \frac{\text{٩}}{\text{س}}\right) \text{ءس}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س}^{\text{٢}} - \text{٦س} + \text{٩} \, \text{لوهـ} |\text{س}| + \text{ث}$

---

(٣٥) $\int \frac{\text{٩} + \text{٦س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}} \, \text{ءس}$

الحل

$= \text{٣} \int \frac{\text{٢س} + \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}} \, \text{ءس}$

$= \text{٣} \, \text{لوهـ} |\text{س}^{\text{٢}} + \text{٣س}| + \text{ث}$