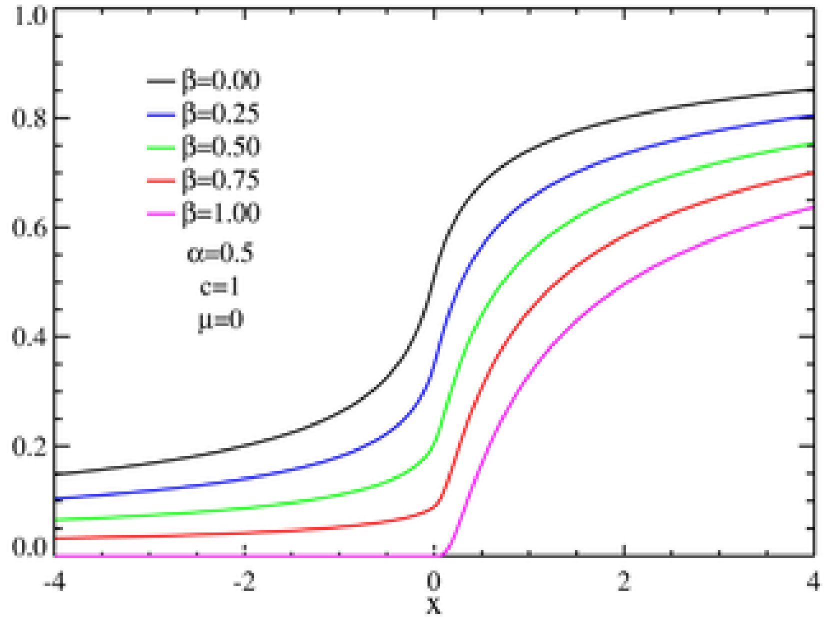
# المحاضرة الرابعة

# السنة الرابعة –إحصاء رياضي

# توزعات مستقرة




## Stationary Distributions

# الدوال المميزة في حال المتجهات العشوائية:

بفرض X متجه عشوائي، عندئذ الدالة المميزة لـ X تعطى بالعلاقة:

$$\psi_X(t) = E\, e^{i\langle t,X\rangle}\ ; t \in \mathbb{R}^d$$

علماً أن: $\acute{t}\, X = \sum_{i=1}^{d} t_i x_i$.

من هذا التعريف نجد أن:

$1 - \quad \psi_X(t)$ دالة مستمرة

$2 - \quad \psi_X(0) = 1$

$3 - \quad |\psi_X(t)| \leq 1$

$4 - \quad \psi_{aX+b}(t) = e^{i\langle t,b\rangle}\ \psi_X(at)\ ; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^d$

$5 - \quad \psi_{-X}(t) = \psi_X(-t) = \overline{\psi_X(t)}$

6– من الصيغة العكسية لفوريه يمكننا إيجاد دالة الكثافة في حالة المتجهات العشوائية، بفرض لدينا متجه عشوائي X بقيم في $\mathbb{R}^d$ وكان $\psi_X(t) \in L_d^1$ عندئذ لقانون X كثافة بالنسبة لقياس لوبيغ تعطى بالشكل:

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle}\, \psi_X(t)\, dt$$

**ملاحظة:**

إذا كان Y و X متغيران عشوائيان مستقلان فإن العلاقة التالية صحيحة :

$$\psi_{X+Y}(t) = \psi_X(t)\,.\,\psi_Y(t)$$

ولكن العكس غير صـــــحيح في الحالة العامة، ولكن فوربيه زاد شـــــروطاً من أجل أن يتحقق العكس.

**معيار استقلال فورييه:**

إذا كان $X_1, X_2, \dots, X_d$ متجهات عشوائية بقيم في $\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}, \dots, \mathbb{R}^{d_n}$ على الترتيب، فإن هذه المتجهات تكون مستقلة إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :

$$\forall t_1 \in \mathbb{R}^{d_1}, t_2 \in \mathbb{R}^{d_2}, \dots, t_n \in \mathbb{R}^{d_n}$$

$$: \psi_{X_1,X_2,\dots,X_d}(t) = \psi_{X_1}(t_1).\psi_{X_2}(t_2).\dots.\psi_{X_d}(t_n)$$

**المتجهات الغاوصية (الطبيعية):**

يكن لدينا $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)'$ متجه عشوائي بقيم في $\mathbb{R}^d$، عندئذ نقول عن هذا المتجه إنه غاوصي إذا كانت كل التركيبات الخطية المتشكلة من مساقطه تتبع توزيعاً طبيعياً على $\mathbb{R}$، بمعنى :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \ : \ \acute{\lambda} X = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j x_j \sim N(\mu, \sigma^2)$$

وبشكل خاص فإن كل مسقط $X_k$ يكون متغيراً عشوائياً طبيعياً حيث $1 \leq k \leq d$

**ملاحظة:**

إذا كان كل مســـقط $X_k$ يمثل متغيراً طبيعياً فإنه ليس بالضـــرورة أن يكون المتجه غاوصياً، لنبين ذلك بالمثال التالي:

**مثال:**

بفرض أن $Y$ و $\xi$ متغيران عشــوائيان مســتقلان، بحيث $Y \sim N(0,1)$ وقانون $\xi$ معطى بالشكل:

| | | |
|---|---|---|
| $\xi$ | $-1$ | $1$ |
| $P_\xi(x)$ | $1/2$ | $1/2$ |

ولنعرف المتغير التالي:

$$\omega = \xi . Y$$

والمطلوب:

1- بين أن $\omega$ يمثل طبيعي معياري.

2- ليكن $X$ هو عبارة عن $X = (Y, \omega)$ عندئذ بين أن هذا المتجه ليس متجه غاوصي.

**الحل:**

1- نوجد الدالة المميزة لـ ω :

$$\psi_\omega(t) = E\, e^{it\omega} = E\, e^{it\xi Y}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{itxy}\, P_Y(dy)\, P_\xi(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} E e^{itxy}\, P_\xi(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-t^2x^2}{2}}\, P_\xi(dx)$$

$$= E e^{\frac{-t^2\xi^2}{2}} = \sum_x e^{\frac{-t^2x^2}{2}}\, P(\xi = x)$$

$$= E\, e^{itY}\, P(\xi = 1) + E\, e^{-itY}\, P(\xi = -1)$$

$$= \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2} + \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{2} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

وهي دالة لطبيعي معياري، أي أن $\omega \sim N(0,1)$.

2- لنثبت أن $X = (Y, \omega)$ ليس متجه غاوصي، هذا الكلام صحيح لأنه لو أخذنا التركيب الخطي $Y + \omega$ نجد ما يلي:

$$Y + \omega = Y + \xi Y = (1 + \xi)Y$$

أي لنثبت أن $(1 + \xi)Y$ لا يخضع للتوزيع الغاوصي، نجد أنه من أجل قيم $\xi$ ما يلي:

$$P\big((Y + \omega) = 0\big) = P(Y + \xi Y = 0) = P\big((1 + \xi)Y = 0\big)$$

$$= P(Y = 0, 1 + \xi \neq 0) + P(Y \neq 0, 1 + \xi = 0)$$

$$= 0 + P(\xi = -1) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وهذا غير ممكن لأجل متغير عشوائي طبيعي، لأنه لو كان $Y + \omega$ طبيعي لكان الاحتمال السابق يساوي الصفر، أي وجدنا تركيب خطي مشكل من مساقطه ولا يخضع للتوزيع الطبيعي.

## أمثلة على المتجهات الغاوصية:

1- المتجه الصفري $O \in \mathbb{R}^d$ هو متجه غاوصي تافه (أو ابسط متجه غاوصي)، قانونه هو قياس ديراك $\delta_m$ وقد تم الحاقه بالمتجهات الغاوصية.

2- إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_d$ متغيرات طبيعية مستقلة ولها نفس التوزيع الاحتمالي الطبيعي، عندئذ المتجه $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)'$ هو متجه

غاوصي، نعلم أن مجموع متغيرات عشوائية طبيعية مستقلة هو متغير عشوائي طبيعي، وأيضاً أي تركيب خطي لمتغيرات عشوائية مستقلة هو أيضاً طبيعي جديد، وذلك لأنه بأخذ $\lambda \in \mathbb{R}^d$ عندها نجد أن:

$$N\left(\left(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j\right)\mu, \left(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j^2\right)\sigma^2\right) \sim \acute{\lambda}.X = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j X_j$$

يتم برهان ذلك بأخذ متغيرين عشوائيين مستقلين لنجد أن:

$$\boldsymbol{\psi_{\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2}(t) = \psi_{\lambda_1 X_1}(t).\psi_{\lambda_2 X_2}(t)}$$

$$\boldsymbol{= e^{i\mu\lambda_1 t_1 - \frac{\sigma^2 \lambda_1^2 t_1^2}{2}}.e^{i\mu\lambda_2 t_2 - \frac{\sigma^2 \lambda_2^2 t_2^2}{2}}}$$

$$\boldsymbol{= e^{i\mu(\lambda_1 t_1+\lambda_2 t_2) - \frac{\sigma^2}{2}(\lambda_1^2 t_1^2+\lambda_2^2 t_2^2)}}$$

-3 إذا كان $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)\acute{}$ متجه غاوصي و A مصفوفة غير عشوائية من المرتبة $d \times d$ وبفرض أن $B \in \mathbb{R}^d$، عندئذ المتجه: $Y = AX + B$ يمثل متجه غاوصي، لأن التراكيب الخطية من مركبات

Y هي تراكيب خطية لـــــ $X_1, X_2, \dots, X_d$ بالإضـافة إلى الثوابت ومنه

يكون :

$$EY = AEX + B$$

$$k(Y) = k(AX) = A.k(X).\acute{A}$$