المملكة العربية السعودية
جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية
عمادة التعليم عن بعد

المادة بعنوان

الرياضيات المالية

المستوى الأول
كلية الإقتصاد وإدارة الأعمال

نِظَامُ الانْتِسَابِ الْمُطَوَّر
(١٤٣٤ هـ - ١٤٣٥هـ)

المحاضرة الأولى

بسم الله الرحمن الرحيم

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته

والصلاة والسلام على سيدنا محمد خاتم الأنبياء والمرسلين، اللهم اشرح لي صدري ويسر لي أمري واحلل عقدة من لساني يفقهوا قولي.

أقدم لكم سلسلة من الحلقات نشرح من خلالها مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وهذه الحلقة هي الحلقة الأولى.

هذا المقرر مكون من ثمانية فصول سنعرضها عليكم:

مفردات المقرر:

- الفصل الأول: أساسيات الجبر.
- الفصل الثاني: العبارات الجبرية.
- الفصل الثالث: المعادلات
- الفصل الرابع: الهندسة التحليلية
- الفصل الخامس: المتواليات
- الفصل السادس: الدوال
- الفصل السابع: التفاضل
- الفصل الثامن: التكامل

أما مراجع هذا المقرر فالمرجع الرئيسي لهذا المقرر هو كتاب مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

تأليف: د/ محمد القاضي. وأ. أحمد أبو بكر.

الفصل الأول

أساسيات الجبر

الدرس الأول المجموعات

عناصر الدرس:

- مفهوم المجموعة.
- بعض مجموعات الأعداد الشهيرة.
- مفاهيم: الانتماء، المجموعة الجزئية. المجموعة الخالية.
- طرق التعبير عن المجموعات وطرق كتابتها.
- جبر المجموعات: الاتحاد، التقاطع، المجموعة الشاملة، المجموعة المتممة.
- أشكال فن.

والآن سننتقل إلى شرح الدرس

المجموعات:

المجموعة هي مجموعة من الأشياء التي يمكن تحديدها بدقة وتسمى هذه الأشياء عناصر المجموعة.

تكتب عناصر المجموعة داخل أقواس على الشكل التالي: { }

ويرمز للمجموعة عادة بحروف إنجليزية كبيرة مثل: A, B, C,…… إلى آخره.

على سبيل المثال:

يمكن كتابة المجموعة التي عناصرها 1,2,3,4 بالشكل الآتي: $\{1,2,3,4\}$

وإذا أعطى لها الرمز A فإنها تكتب: $A = \{1,2,3,4\}$

بعض مجموعات الأعداد الشهيرة :

١- مجموعة الأعداد الطبيعية:

ويرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ ونضع خط إضافي حتى نميزها عن حرف N العادي وهي:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5,\ldots\ldots\}$

إذاً هذه مجموعة الأعداد الطبيعية وهذا رمز الأعداد الطبيعية وهو $\mathbb{N}$ أما أعداده فهي كما نراها.

٢- مجموعة الأعداد الكلية:

وهي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافًا إليها الصفر ويرمز لها $\mathbb{W}$ وتكون على الصورة:

$\mathbb{W} = \{0,1,2,3,4\ldots\ldots\}$

ويلاحظ أن تتكون من الأعداد الطبيعية مضافًا إليها الصفر وتسمى الأعداد الكلية.

٣- مجموعة الأعداد الصحيحة:

وتشمل مجموعة الأعداد الكلية $\mathbb{W}$ مضافًا إليها سالب الأعداد الطبيعية. ويرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ وتكون على الصورة:

$\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\ldots\}$

الانتماء:

للتعبير عن وجود عنصر في المجموعة نستخدم الرمز $\in$ ويقرأ ينتمي.

على سبيل المثال:

$2 \in \mathbb{N}$

ونقرأ ذلك: 2 ينتمي للمجموعة $\mathbb{N}$

أما نقيض الرمز ينتمي هو الرمز $\notin$ ويقرأ لا ينتمي. فمثلاً:

$-1 \notin \mathbb{N}$

وتقرأ العنصر 1- لا ينتمي للمجموعة $\mathbb{N}$

المجموعة الجزئية :

نقول عن المجموعة B أنها مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت عناصر B هي عناصر في A. ونعبر عن ذلك بالرمز $B \subseteq A$ ونقول في هذه الحالة أن A تحوي B.

وممكن أن لا نكتب رمز الانتماء كالتالي $\subseteq$ ونكتبه $\subset$ إذا كانت B مجموعة جزئية من A.

أي نقول أن B مجموعة جزئية فعلية من A إذا كانت A تحوي B ولا تساويها.

ونعبر عن ذلك بالرمز $B \subset A$.

<u>على سبيل المثال:</u>

إذا كانت $A=\{1,2,3,4\}$ ، $B = \{2,3\}$

فإن $B \subset A$

لاحظ أن لأي مجموعة A فإننا يمكن أن نقول أن $B \subset A$ لأن B مجموعة فعلية من المجموعة A. وفي نفس الوقت A مجموعة تحوي المجموعة B فيمكن الكتابة كالتالي : $B \subseteq A$.

<u>مثال:</u>

<u>أي من العبارات التالية صحيحة وأيها خاطئة:</u>

$(a)\ 0 \in \mathbb{W}$ صحيحة

$(b)\ -2 \in \mathbb{N}$ خاطئة

$(c)\ \mathbb{N} \subset \mathbb{W}$ صحيحة

$(d)\ -1.5 \in \mathbb{Z}$ خاطئة

لأن الأعداد الصحيحة فقط هي التي تنتمي لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ أما إذا كان هناك عدد عشري مثل 1.5- فلا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$.

المحاضرة الثانية

سنكمل في هذه الحلقة شرح لدرس المجموعات.

المجموعة الخالية:

وهي المجموعة التي لا تحوي على عناصر. ويرمز لها بالرمز ϕ وهي دائرة يتوسطها خط ويطلق عليه فاي. أو بالرمز { } وهي أقواس المجموعة ولكن خالية.

طرق التعبير عن المجموعة وكيفية كتابتها:

١) طريقة كتابة العناصر.

في هذه الطريقة يتم كتابة جميع عناصر المجموعة داخلها.

وتستخدم هذه الطريقة عدد العناصر محدود وقليل.

مثال:

اكتب عناصر المجموعات التالية:

١) A مجموعة أول خمسة أعداد صحيحة فردية موجبة.

$A = \{1,3,5,7,9\}$

٢) B هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين 2- ، 5

$B = \{-1,0,1,2,3,4\}$

ولم نذكر العددين 2- و 5 لأن المطلوب الأعداد المحصورة بين هذين العددين وليس العددين نفسهما ولا يساوي العددين نفسهما ولكن الأعداد المحصورة بينهما فقط.

٢) وهي طريقة الصفة المميزة:

وفي هذه الطريقة يتم كتابة صفة عناصر هذه المجموعة. إذاً نذكر فقط الصفة التي تميز هذه المجموعة عن غيرها ولا نذكر عناصرها وهذه الطريقة فعالة جدًا عندما تكون عناصر المجموعة كبيرة ولا نستطيع سردها.

والشكل العام لهذه الطريقة هو:

$A = \{x \mid x$ الصفات التي تحدد$\}$

وإذا كانت $A \subseteq T$ فإننا نكتب المجموعة بالشكل التالي:

$A = \{x \in T \mid x$ الخصائص التي تحدد$\}$

مثال:

اكتب المجموعات التالية بطريقة الصفة المميزة:

١) A هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.

فإذا أردنا أن نكتب الأعداد الطبيعية الفردية فلا نستطيع لأنها أعداد غير منتهية. فنكتبها بالطريقة الآتية:

A = { x ∈ ℕ | حيث x عدد فردي }

$A = \{ 2x - 1 \mid x \in \mathbb{N} \}$

فإذا عوضنا في المعادلتين السابقتين سنجد أنها تعطينا عدد فردي.

٢) B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية

B = { x ∈ ℕ | حيث x عدد زوجي }

$B = \{ 2x - 1 \mid x \in \mathbb{N} \}$

فمعادلة 2x تدل على جميع الأعداد الزوجية.

٣) C هي مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين العددين 20- و 55

$C = \{ x \in \mathbb{Z} \mid -20 < x < 55\}$

٣) طريقة التسلسل النمطي:

وفي هذه الطريقة يتم كتابة بعض العناصر على نمط معين والباقي يتم تخيله.

وهي من الطرق المهمة إذا كان عدد العناصر كبير جدًا وله نمط معين يمكن تخيله.

على سبيل المثال:

كتابة الأعداد الفردية الموجبة بطريقة التسلسل النمطي يكون على الصورة:

$A = \{1,3,5,7,9,\ldots\}$

والنقاط للدلالة على أن الأعداد ستمضي إلى ما لا نهاية على نفس النمط.

وإذا أردنا كتابة الأعداد الفردية المحصورة بين العددين 2 ، 100 بطريقة التسلسل النمطي وتكون:

$$A = \{3, 5,7, \dots , 97,99\}$$

نذكر مثال على هذا النمط وهذه الطريقة:

مثال:

اكتب المجموعات التالية بطريقة التسلسل النمطي.

1) $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid$ عدد زوجي $x\}$

2) $B = \{ 10\, x \mid x \in \mathbb{N}\}$

الحل:

1) $A = \{2,4,6,8,\dots\}$

2) $B = \{10,20,30,\dots\}$

وكما ذكرنا تدل الثلاث نقاط في نهاية هذه المجموعة على أن المجموعة تستمر على نفس النمط للعناصر المكتوبة.

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم من هذه الحلقة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته ونلتقي في حلقة أخرى إن شاء الله.

المحاضرة الثالثة

سنستمر في درس المجموعات وهذه الحلقة هي الحلقة الثالثة ونبدأ في شرح تكملة هذا الدرس.

سنقدم بعض العمليات الجبرية على المجموعات:

الاتحاد:

اتحاد المجموعتين A و B هي مجموعة جديدة تحتوي على عناصر المجموعتين.

نرمز لاتحاد مجموعتين A و B بالرمز

$A \cup B$

وبالتالي:

$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ أو $x \in B\}$

مثال:

إذا كان $A = \{1,2,4,7\}$ و $B = \{2,5,7,9\}$

أوجد ما يلي:

1) $A \cup B$ 2) $B \cup A$ 3) $A \cup A$ 4) $A \cup \phi$

الحل:

1) $A \cup B = \{1,2,4,5,7,9\}$

جميع عناصر A بالإضافة إلى عناصر B فإذا كان هناك عنصر مكرر نكتبه مرة واحدة فقط.

2) $B \cup A = \{1,2,4,5,7,9\}$

أيضًا هي المجموعة التي تحوي جميع عناصر A بالإضافة إلى عناصر B فإذا كان هناك عنصر مكرر نكتبه مرة واحدة فقط. فتكون هي نفس المجموعة السابقة.

3) $A \cup A = \{1,2,4,7\}$

هي مجموعة جديدة تحوي على العناصر A وعناصر A أي تحوي فقط عناصر A.

4) $A \cup \phi = \{1,2,4,7\}$

هي مجموعة تحوي على عناصر A وعناصر المجموعة ϕ وبما أن عناصر المجموعة ϕ خالية ولا توجد بها عناصر فإذا النتيجة هي مجموعة A فقط.

خصائص الاتحاد:

إذا كان A, B أي مجموعتين فإن:

1) $A \cup B = B \cup A$

2) $A \cup A = A$

3) $A \cup \phi = A$

التقاطع:

تقاطع المجموعتين A و B هي مجموعة جديدة أيضًا تحتوي على العناصر المشتركة من المجموعتين. ونرمز لتقاطع المجموعتين A و B بالرمز:

$A \cap B$

وبالتالي:

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ و $x \in B\}$

مثال: إذا كانت

$A = \{3,5,7,12,17\}$

$B = \{1,4,5,8,9,10,11,12\}$

أوجد:

1) $A \cap B$ 2) $B \cap A$ 3) $A \cap A$ 4) $A \cap \phi$

الحل:

1) $A \cap B = \{5,9,12\}$

وهي العناصر المشتركة بين A و B.

2) $B \cap A = \{5,9,12\}$

3) $A \cap A = \{3,5,7,12,17\}$

وهي الأعداد المشتركة بين المجموعتين A و A وهي نفس أعداد المجموعة A.

4) $A \cap \phi = \phi$

وهي الأعداد المشتركة بني المجموعتين A و ϕ ولكن المجموعة ϕ لا تحوي أي عناصر فلذلك الأعداد المشتركة هي ϕ.

<u>خصائص التقاطع:</u>

إذا كانت A و B مجموعتين فإن:

1) $A \cap B = B \cap A$
2) $A \cap A = A$
3) $A \cap \phi = \phi$

<u>مثال:</u>

إذا كانت $A = \{0,4,5,9\}$ و $B = \{-1,0,2,5\}$ و $C=\{-2,-1,-0,4\}$ أوجد:

1) $A \cup B$
2) $B \cap C$
3) $A \cap B \cap C$
4) $(A \cup B) \cap C$
5) $(B \cap C) \cup A$

<u>الحل:</u>

1) $A \cup B = \{-1,0,2,4,5,9\}$
2) $B \cap C = \{-1,0\}$
3) $A \cap B \cap C = \{0\}$
4) $A \cup B = \{-1,0,2,4,5,9\}$
   ➔ $(A \cup B) \cap C = \{-1,0,4\}$
5) $B \cap C = \{-1,0\}$
   ➔ $(B \cap C) \cup A = \{-1,0,4,5,9\}$

<u>المجموعة الشاملة:</u>

هي المجموعة التي تخضع لدراسة معينة لا نخرج عنها ونرمز لها بالرمز U

<u>على سبيل المثال:</u>

لو أردنا مجموعة خامات لأعداد لوحات السيارات. فالأرقام في لوحات السيارات هي فقط الأرقام من 0 وحتى 9.

المجموعة المتممة:

لتكن U مجموعة شاملة و $A \subseteq U$. أي A مجموعة جزئية من المجموعة U الشاملة. فإن متممة A هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى U ولا تنتمي إلى A. أي نأخذ جميع عناصر المجموعة الشاملة باستثناء عناصر المجموعة A لنقول أن هذه هي المجموعة متممة للمجموعة A.

ونرمز لمتممة A بالرمز A^c

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

مثال:

لتكن $U = \{1,2,3,4\ldots,10\}$ و $A = \{1,2,3,8,9,10\}$ أوجد:

1) $U \cup A$ 2) $U \cap A$

2) A^c 4) $(A^c)^c$

5) U^c 6) $Ac \cup A$

7) $A^c \cap A$

الحل:

1) $U \cup A = \{1,2,\ldots,10\}$

أي نريد أن نأخذ جميع عناصر U مع عناصر المجموعة A أي جميع عناصر المجموعة U

2) $U \cap A = \{1,2,3,8,9,10\} = A$

فجميع العناصر المشتركة بين المجموعة الشاملة U والمجموعة A هي عناصر المجموعة A. فيكون الحل هو جميع عناصر المجموعة A

3) $A^c = \{4,6,6,7\}$

المجموعة المتممة للمجموعة A فالعناصر الغير موجودة في المجموعة A وموجودة في المجموعة الشاملة U

4) $(A^c)^c = \{1,2,3,8,9,10\}=A$

فمتممة المجموعة A^c وهي العناصر الغير موجودة في A^c وهي العناصر الموجودة في المجموعة A.

5) $U^c = \{\ \} = \phi$

فهي المجموعة الخالية.

6) $A^c \cup A = \{1,2,\ldots,10\} = U$

وهي تساوي جميع العناصر في المجموعة A وهي عناصر المجموعة المتممة للمجموعة A وهي جميع عناصر المجموعة الشاملة.

7) $A^c \cap A = \{\ \} = \phi$

أي نريد العناصر المشتركة بين المجموعة A والمجموعة المتممة A^c. وهي المجموعة الخالية ϕ

<u>خصائص المجموعة الشاملة والمتممة:</u>

لتكن U مجموعة شاملة وأن $A \subseteq U$ فإن:

1) $U \cup A = U$

اتحاد أي مجموعة جزئية مع المجموعة الشاملة تساوي المجموعة الشاملة U

2) $U \cap A = A$

تقاطع أي مجموعة جزئية مع المجموعة الشاملة تساوي المجموعة الجزئية نفسها

3) $A^c \cap A = \phi$

تقاطع المجموعة الجزئية مع المجموعة المتممة لتلك المجموعة الجزئية تساوي ϕ

4) $A^c\, U\, A = U$

اتحاد المجموعة الجزئية مع متممة تلك المجموعة الجزئية تساوي المجموعة الشاملة U

5) $U^c = \phi$

متممة المجموعة الشاملة تساوي ϕ

6) $(A^c)^c = A$

المتممة لمتممة المجموعة الجزئية تساوي المجموعة الجزئية نفسها A أي متممة المتممة نعود بها إلى نفس المجموعة الجزئية مرة أخرى.

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها ونلقاكم في حلقة قادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الرابعة

بسم الله الرحمن الرحيم

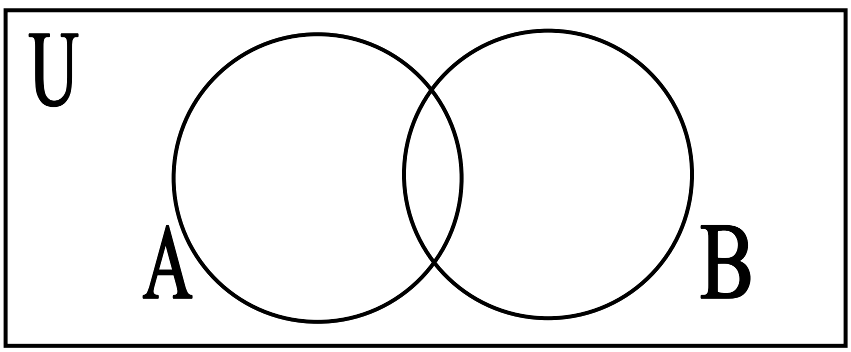
هذه الحلقة هي الحلقة الرابعة من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

أشكال فن:

وهي أشكال توضح توزيع المجموعات والعمليات عليها.

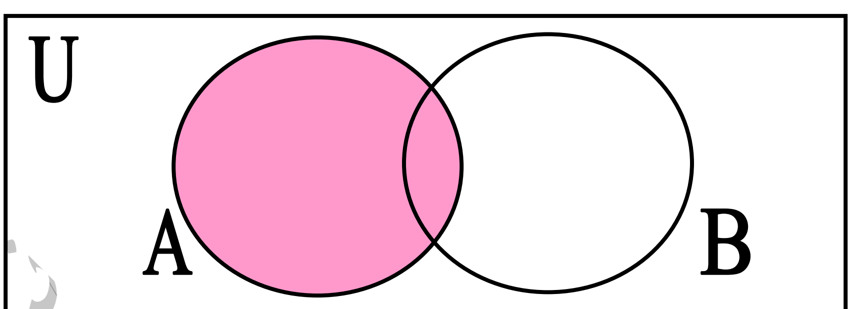
تمثل المجموعة الشاملة U بالمستطيل ونرسم داخله دوائر تمثل المجموعات الواقعة داخل المجموعة الشاملة U.

على سبيل المثال: المستطيل يمثل المجموعة الشاملة U أما الدائرتان الداخليتان المتقاطعتان إحداهما تمثل المجموعة A والأخرى تمثل المجموعة B.



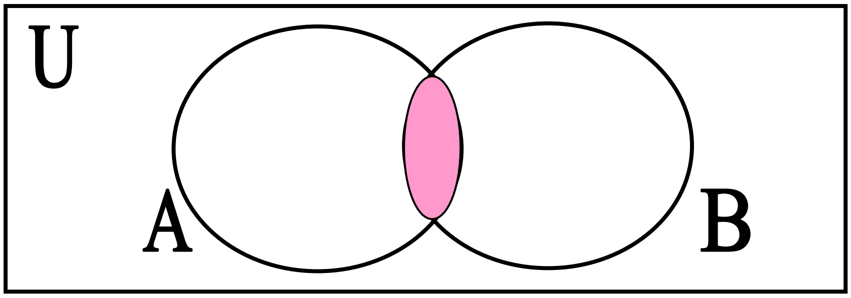
سنأخذ أشكال فن لبعض العمليات على المجموعات:

فعلى سبيل المثال بالموضح بالرسم الشكل الأول نريد تمثيل المجموعة A داخل هذا الشكل. إذا أردنا تعيين أو تحديد منطقة المجموعة A فهي تمثل كالتالي نظلل الدائرة التي تمثل المجموعة A كما نشاهد في الشكل التالي:



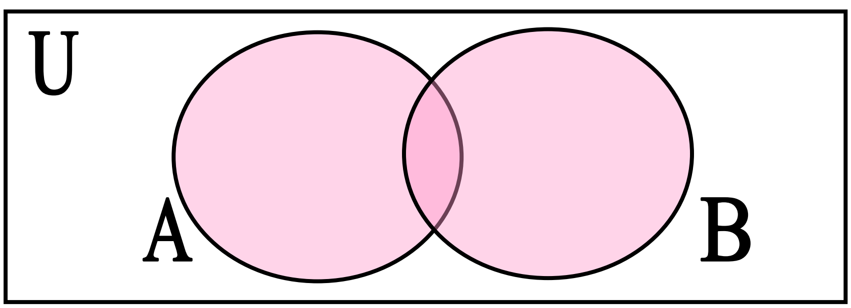
A

أما إذا أردنا تمثيل وتحديد منطقة التقاطع $A \cap B$ فإننا نظلل المنطقة التي تتقاطع فيها الدائرتين أي المجموعتين A و B كالتالي:



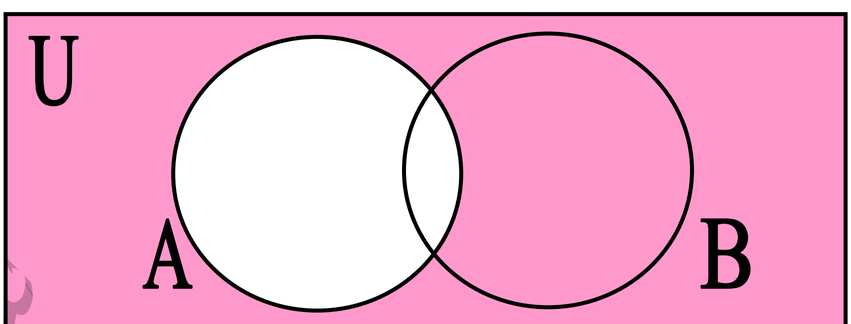
$A \cap B$

الشكل الثالث هو $A \cup B$ أي نريد أن نظلل منطقة A كاملة ومنطقة B كاملة أيضًا.
فنريد تحديد المنطقة $A \cup B$ أي نظلل جميع المنطقة داخل الدائرتين A و B كما نشاهد في الشكل التالي:



$A \cup B$

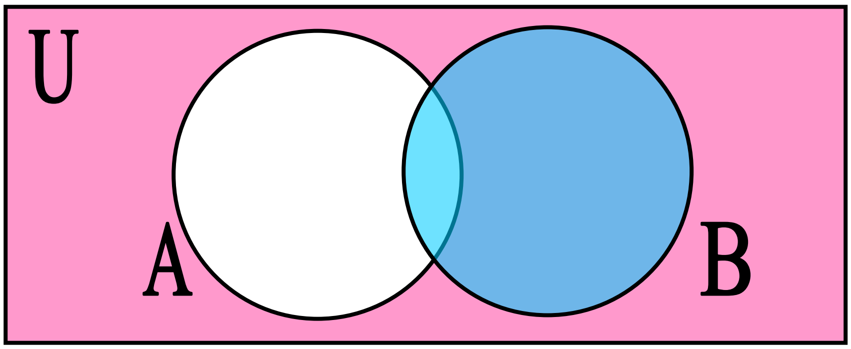
أما إذا أردنا في الشكل الرابع تحديد A^c فإننا نظلل جميع المنطقة داخل المستطيل ما عدا المنطقة A أي ما عدا الدائرة A أي ما عدا المجموعة A. كما نلاحظ في الشكل التالي:



A^c

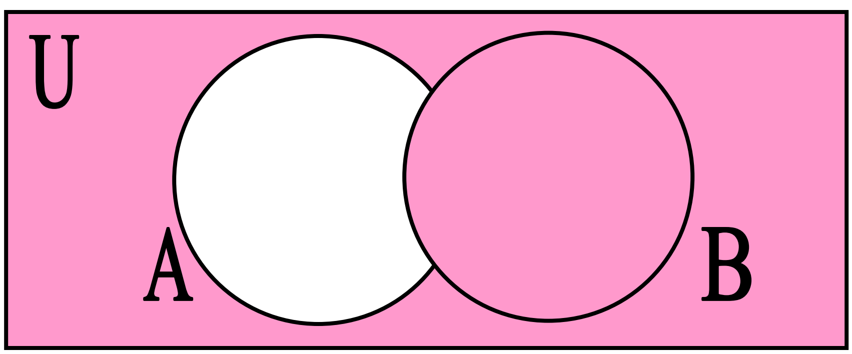
هذه الأشكال الأربعة هي تحديد لبعض العمليات على المجموعات في أشكال فن.

نأخذ أيضًا أشكال أخرى نريد تحديدها فإذا أردنا تحديد A^c فإننا نحددها باللون الأحمر. ونحدد المجموعة B باللون الأزرق.



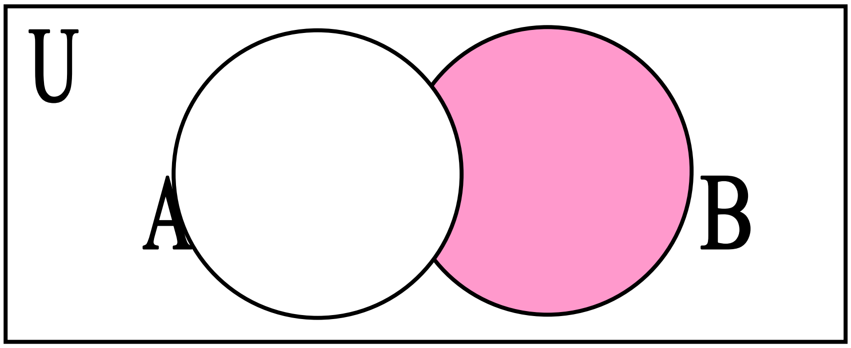
ونلاحظ الآتي من الشكل السابق:

المنطقة $A^c \cup B$ هي المنطقة الملونة باللون الأحمر والملونة باللون الأزرق كلاهما لأن الاتحاد تكون كل العناصر في المجموعة B وكل العناصر في المجموعة A^c. عندما نريد تحديد منطقة الاتحاد نأخذ كلا اللونين.



$A^c \cup B$

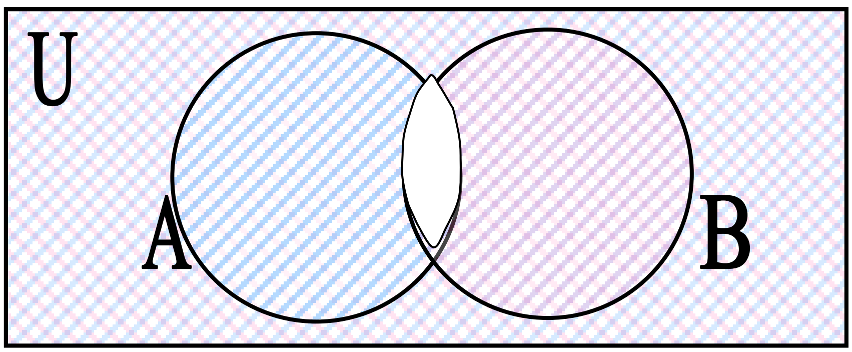
أما إذا أردنا $A^c \cap B$ فعندما نريد منطقة التقاطع نجد أن منطقة واحدة فقط هي التي تتقاطع فيها اللونين الأحمر والأزرق وهي العناصر المشتركة بينهما هي عناصر المجموعة B مطروحًا منها عناصر المجموعة $A \cap B$ كما في الشكل التالي:



$A^c \cap B$

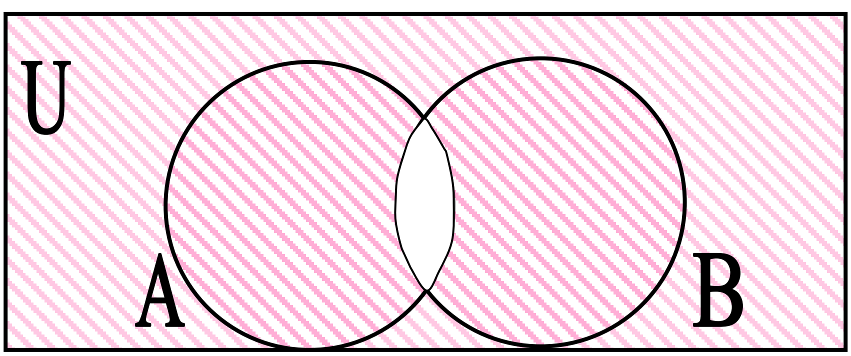
ففي التقاطع نأخذ المنطقة المشتركة بين اللونين. أما الاتحاد نأخذ جميع المناطق التي يكون فيها اللونين.

ننتقل إلى شكل آخر:



نلاحظ أن منطقة B^c ملونة باللون الأزرق المخطط وA^c ملونة باللون الأحمر المخطط.

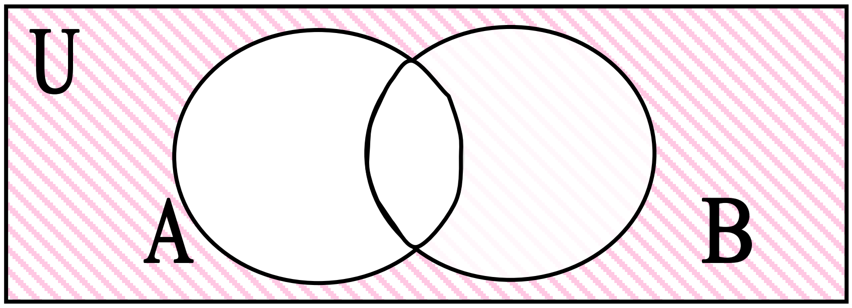
فإذا أردنا منطقة الاتحاد بين A^c وB^c أي $B^c \cup A^c$ فإننا نجدها هي كل المنطقة ما عدا منطقة التقاطع.



$A^c \cup B^c$

وإذا أردنا التقاطع بين A^c وB^c أي $A^c \cap B^c$ فإننا نجدها هي فقط المنطقة التي تشترك فيها اللونين الأزرق والأحمر معًا. فنأخذ فقط المنطقة التي تحوي على اللونين معًا. فنجد أنها هي المنطقة المستطيلة عدا منطقة الدائرتين. فتكون المنطقة كالتالي:

$A^c \cap B^c$



<u>نأخذ مثال آخر:</u>

لتكن $U = \{0,1,2, \dots, 9\}$ والمجموعة $A = \{0,1,2,3,5,7\}$ و $B= \{0,2,4,6,8\}$

المطلوب:

١) مثل هذه المجموعات معًا بأشكال فن.

٢) حدد منطقة $A \cap B$

٣) حدد منطقة $A \cap B^c$

٤) حدد منطقة $A^c \cup B^c$

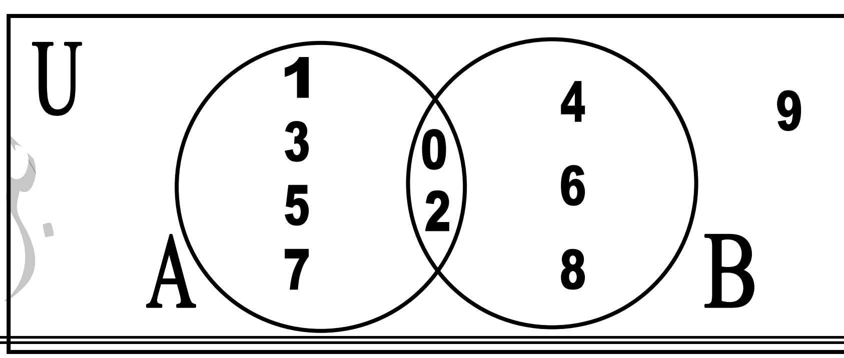
<u>الحل:</u>

في البداية نكتب المجموعات مرة أخرى:

$U = \{0,1,2, \dots, 9\}$, $A = \{0,1,2,3,5,7\}$, $B= \{0,2,4,6,8\}$

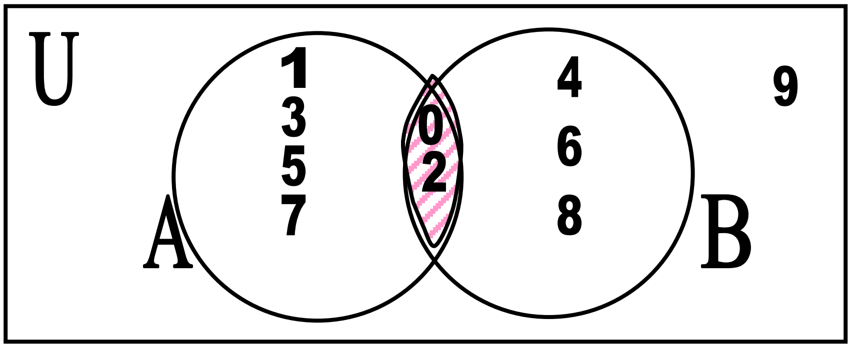
$A \cap B = \{0,2\}$

ونضع العناصر في أماكنها في الشكل فن كما يلي:



<u>المطلوب الثاني</u>: هو تحديد منطقة التقاطع $B \cap A$

وهي المنطقة المشتركة بين الدائرتين:



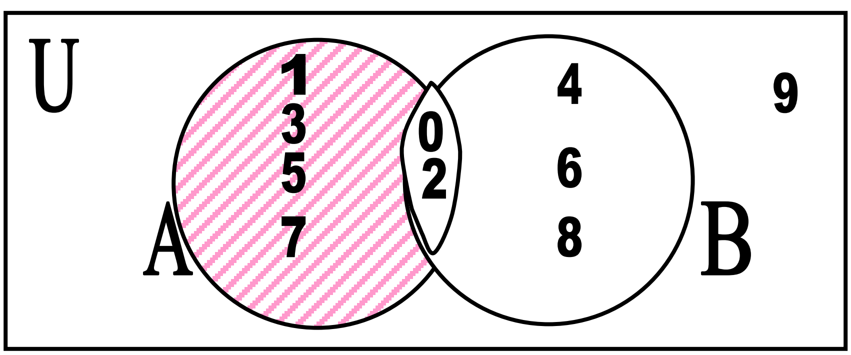
ويكون المطلوب هو نفس العناصر المظللة وهي العناصر المشتركة بين المجموعتين الواقعة في المنطقة المظللة بين الدائرتين.

$A \cap B = \{0,2\}$

<u>المطلوب الثالث</u>: تحديد منطقة $B^c \cap A$

بعد تعبئة العناصر داخل شكل فن كالتالي:

نجد أن منطقة B^c هي جميع المنطقة التي في المجموعة U عدا الدائرة التي تمثل المجموعة B. وهذه المنطقة تتقاطع مع المجموعة A في المنطقة المظللة في الشكل التالي:

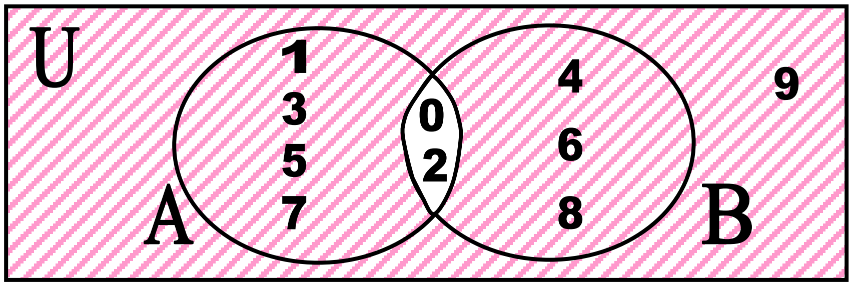


ومن الشكل نجد أن العناصر التي تمثل المطلوب الثالث:

$A \cap B^c = \{1,3,5,7\}$

المطلوب الرابع: تحديد منطقة $B^c \cup A^c$

أيضًا نضع الأرقام على الشكل. أما المنطقة المطلوبة فهي جميع المنطقة داخل منطقة المستطيل عدا منطقة التقاطع فتكون كالشكل التالي:



فتكون الإجابة هي العناصر التي في المنطقة المظللة وهي كالتالي:

$A^c \cup B^c = \{1,3,4,5,6,7,8,9\}$

مثال:

لتكن $U = \{0,1,2, \dots , 9\}$

$B = \{0,1,2,3,4\} \quad , \quad A = \{3,4,5,6,7\}$

مثل المجموعات بأشكال فن

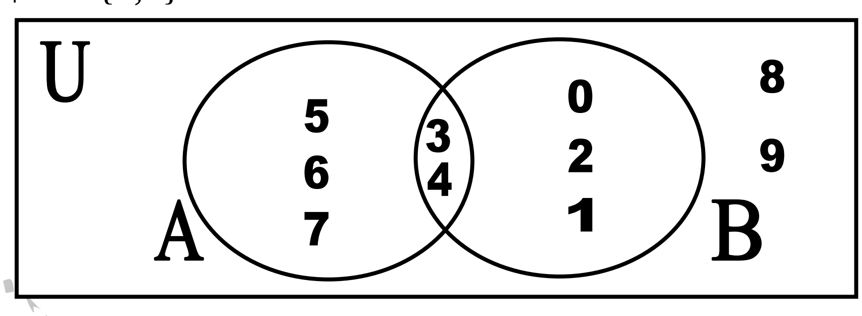
الحل:

نكتب المجموعات:

$U = \{0,1,2, \dots , 9\} \; , \quad B = \{0,1,2,3,4\} \quad , \quad A = \{3,4,5,6,7\}$

نحدد التقاطع:

$A \cap B = \{3,4\}$



ولا ننسى أن نكتب العنصرين المتبقيين اللذان لا ينتميان إلى المجموعتين A , B خارج الدائرتين ولكن داخل المستطيل. وبهذا ينتهي المثال

المحاضرة الخامسة

نلقاكم اليوم في حلقة جديدة وهي الحلقة الخامسة من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وعنوان هذه الحلقة هي: الخواص الحسابية لمجموعة الأعداد الصحيحة:

وعناصر هذا الدرس هي:

- مضاعف عدد صحيح ومجموعة مضاعفات عدد صحيح.
- قابلية القسمة ومجموعة قواسم عدد صحيح.
- اختبارات قابلية القسمة.
- الأعداد الأولية.
- القاسم المشترك الأكبر.
- المضاعف المشترك الأصغر.

وستأخذ هذه العناصر لهذا الدرس مجموعة من الحلقات وهذه هي الحلقة الأولى لهذا الدرس. الخواص الحسابية لمجموعة الأعداد الصحيحة

مضاعف عدد صحيح:

مثال:

إذا كان لدينا العدد 2 فإن أي عدد صحيح مضروب في العدد 2 يعتبر مضاعف للعدد 2.

على سبيل المثال:

من مضاعفات العدد 2 هو:

$$2 \times 3 = 6$$

لذلك العدد 6 من مضاعفات العدد 2

$$2 \times 0 = 0$$

لذلك العدد 0 من مضاعفات العدد 2

$$2 \times -4 = -8$$

لذلك العدد 8 – من مضاعفات العدد 2

تعريف:

إذا كان $n, k \in \mathbb{Z}$ فإن nk هو مضاعف للعدد k.

ويمكن اعتبار أن nk هو أيضًا مضاعف للعدد n كما n عدد صحيح.

تعريف مجموعة مضاعفات عدد صحيح:

لتكن $k \in \mathbb{Z}$. نعرف مضاعفات العدد الصحيح k بأنها المجموعة M_k وتعرف:

$$M_k = \{nk \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm k, \pm 2k, \pm 3k, \ldots\}$$

مثال:

اكتب كل من M_3 و M_5 و M_{-4} و M_0

الحل:

$$M_3 = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \ldots\}$$

$$M_5 = \{0, \pm 5, \pm 10, \pm 15, \pm 20, \ldots\}$$

$$M_{-4} = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16, \ldots\}$$

$$M_0 = \{0\}$$

خصائص مجموعة المضاعفات:

ليكن $k \in \mathbb{Z}$ عندئذ:

١) إذا كان $k \neq 0$ فإن M_k مجموعة غير منتهية.

٢) إذا كان $k = 0$ فإن $M_k = \{0\}$.

قابلية القسمة:

مثال للتوضيح:

العدد 20 من مضاعفات العدد 4 وبالتالي $\frac{20}{4} = 5$ وحاصل القسمة هو عدد صحيح دون باقي.

ونقول في هذه الحالة أن العدد 20 يقبل القسمة على 4.

أو نقول أن العدد 4 قاسم للعدد 20 أو عامل من عوامل العدد 20.

مركز نبــــراس
0114828957

<u>تعريف قابلية القسمة:</u>

نقول أن العدد b يقبل القسمة على العدد a أو بعبارة أخرى نقول أن العدد a قاسم للعدد b ونكتب ذلك رمزيًا $(a|b)$ إذا كان العدد b مضاعف للعدد a و $a \neq 0$ أو ناتج القسمة $\left(b \div a = \dfrac{b}{a}\right)$ هو عدد صحيح دون باقي.

وإذا لم يكن a يقسم العدد b فإننا نعبرعن ذلك رمزيًا $a \nmid b$. بأننا ننفي الخط الرامز للقسمة.

<u>على سبيل المثال:</u>

$2|8$ تعني أن العدد 2 قاسم للعدد 8 (أو 8 يقبل القسمة على 2).

السبب لأنه يوجد عدد صحيح وهو 4 بحيث $8 = 4 \times 2$.

أو لأن ناتج القسمة $\dfrac{8}{2} = 4$ هو عدد صحيح دون باقي.

بينما $5 \nmid 19$ تعني أن العدد 5 لا يعتبر للعدد 19 (أو العدد ١٩ لا يقبل القسمة على 5).

والسبب لأنه لا يوجد عدد صحيح n بحيث $19 = n \times 5$.

أو لأن ناتج القسمة $\dfrac{19}{5}$ هو العدد الصحيح 3 والباقي 4 (أي يوجد باقي).

فلذلك نقول 19 لا يقبل القسمة على 5. أي العدد 5 لا يقسم العدد 19.

<u>مجموعة قواسم عدد صحيح:</u>

نعرف مجموعة قواسم العدد الصحيح b بأنها المجموعة D_b وتعرف:

$$D_b = \{a \in Z \mid \ a|b\}$$

أي أن D_b تحتوي على كل قواسم العدد b

مثال:

أوجد كلا من: D_5 و D_6 و D_{-24} و D_0

أي نريد قواسم الأعداد السابقة.

الحل:

$$D_5 = \{\pm 1, \pm 5\}$$

$$D_6 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

$$D_{-24} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$$

ونلاحظ أن هذه الأعداد أنها كلها مجموعات منتهية أي عدد عناصرها معلومة.

$$D_0 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

ونلاحظ أن المجموعة D_0 مجموعة غير منتهية لأن 0 يقبل القسمة على أي عدد صحيح.

ونلاحظ أن العدد 1 يوجد في جميع الأعداد في هذا المثال.

خصائص مجموعة القواسم:

إذا كان $a \in \mathbb{Z}$ فإن:

١) إذا كان $a \neq 0$ فإن D_a مجموعة منتهية. (أي أن قواسم أي عدد صحيح لا يساوي 0 أي عدد قوسمها معلوم ومجموعة هذه القواسم منتهية)

٢) إذا كان $a = 0$ فإن $D_a = \mathbb{Z} - \{0\}$. (أي أن قواسم العدد 0 هي كل الأعداد الصحيحة عدا العدد 0، وبالتالي D_a حيث $a = 0$ مجموعة غير منتهية).

نظرية:

لتكن $a,b,c\in \mathbb{Z}$ فإن:

١) $1|a$ و $a|a$ و $a|0$ ولكن $0\not| a$ لأي عدد صحيح $a\neq 0$.

$1|a$ لاحظنا في المثال الماضي أن $\{\pm 1\}$ من ضمن أية مجموعة قواسم أي عدد صحيح لأن أي العدد الصحيح 1 يقسم عدد صحيح لأن:

$$1|a \quad \Rightarrow \frac{a}{1}=a$$

فالناتج من قسمة أي عدد صحيح على 1 ينتج نفس العدد الصحيح ولا يكون هناك باقي فإذاً يكون العدد الصحيح 1 يكون قاسم لأي عدد صحيح.

أيضًا $a|a$ a يقسم a أي a يقبل القسمة على نفسه لأن:

$$a|a \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{a}=1$$

فالناتج من قسمة أي عدد صحيح a على نفسه a ينتج العدد الصحيح 1 ولا يكون هناك باقي فإذاً يكون العدد الصحيح a يكون قاسم لنفس العدد الصحيح a.

$a|0$ أي أن أي عدد صحيح a هو قاسم للعدد 0.

$$a|0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{a}=0$$

أي أن ناتج القسمة هو 0 أي عدد صحيح دون باقي فيكون أي عدد صحيح a هو قاسم للعدد 0.

$0\not| a$ فالصفر لا يقسم أي عدد. فالصفر غير قاسم لأي عدد صحيح. لأن:

$\frac{a}{0}$ هو عدد غير معروف

٢) إذا كان $a|b$ فإن $a|-b$

على سبيل المثال: إذا كان:

$$2|8 \quad \Rightarrow \quad 2|-8$$

لأن: $\frac{-8}{2}=-4$

٣) إذا كان $a|b$ و $b|a$ فإما $a=b$ أو $a=-b$

أي أن إذا كان هناك عدد a لو عكسنا هذين العددين على طرفي إشارة القاسم فإنه يجب أن يكون هذين العددين إما متساويين أو متساويين مع اختلاف الإشارة.

٤) إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$.

إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a أيضًا يقسم c.

ونوضح ذلك بمثال:

$$2|4 \qquad 4|8 \qquad \Rightarrow \quad 2|8$$

أي إذا كان 2 قاسم للعدد 4، و 4 قاسم للعدد 8 فإن العدد 2 قاسم للعدد 8

٥) إذا كان $a|b$ فإن $ac|bc$ لكل $c\neq 0$.

أي أن:

$$2|4 \quad \Rightarrow \quad 2\times3|4\times3 \quad \Rightarrow \quad 6|12$$

٦) إذا كان $a|b$ و $a|c$ فإن $a|(b\pm c)$.

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة السادسة

هذه الحلقة هي الحلقة السادسة من سلسلة حلقات شرح مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وهذه الحلقة أيضًا هي التالية لشرح خواص الأعداد الصحيحة وعنوان الحلقة هو:

اختبارات قابلية القسمة:

قابلية القسمة على 2:

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 2 فقط عندما يكون رقم آحاده أحد الأرقام التالية:

$$0, 2, 4, 6, 8 \quad .$$

وفي هذه الحالة يمكن أن نقول أن العدد الصحيح هو عدد زوجي.

فمثلاً:

كلاً من الأعداد 365150 و 12782 و 528608 تقبل القسمة على العدد 2. لأن العدد الأول موجود في آحاده رقم 0، وفي العدد الثاني موجود في آحاده رقم 2 وفي العدد الثالث موجود في آحاده رقم 8. وهنا يتحقق الشرط فيها وهو أن رقم آحاد هذه الأعداد من الأرقام الموضحة سابقًا وهي أحد الأرقام التالية: $0,2,4,6,8$ فلذلك أي رقم آحاده زوجي فهي تقبل القسمة على 2.

بينما الأعداد 69051 و 743145 و 29893 لا تقبل القسمة على العدد 2.

فالعدد الأول يوجد في آحاده العدد 1، والعدد الثاني يوجد في آحاده العدد 5، والعدد الثالث يوجد في آحاده العدد 3. فلذلك الأعداد الثلاثة الأخيرة رقم الآحاد فيها ليس من الأعداد الزوجية التي هي: $0, 2, 4, 6, 8$ ولذلك لا تقبل القسمة على العدد 2.

قابلية القسمة على العدد 3:

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 3 فقط عندما يكون مجموع أرقامه يقبل القسمة على **العدد 3**.

مثال:

العدد 12432 يقبل القسمة على 3 لأن:

$$1+2+4+3+2=12=3\times4$$

أي أن مجموع أرقام العدد 12432 هو 12 يقبل القسمة على 3.

فنستنتج من ذلك أن العدد 12432 يقبل القسمة على العدد 3.

مثال:

العدد 1222 لا يقبل القسمة على 3 لأن:

$$1+2+2+2=7$$

أي أن مجموع أرقام العدد 1222 هو 7 لا يقبل القسمة على 3.

فلذلك العدد 1222 لا يقبل القسمة على 3.

قابلية القسمة على 4:

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 4 فقط عندما يكون العدد الناتج من رقمي آحاده وعشراته **يقبل القسمة على 4**.

أي نأخذ فقط خانتي الآحاد والعشرات فإذا كانا هاتين الخانتين يقبلان القسمة على 4 مهما كان باقي خانات العدد. لكن المهم هما خانتي الآحاد والعشرات فقط.

مثال:

العدد 512 يقبل القسمة على 4 لأن:

العدد الناتج من الآحاد والعشرات هو العدد 12 ويقبل القسمة على 4.

إذاً نقول أن 512 أيضًا يقبل القسمة على 4.

مثال:

العدد 122 لا يقبل القسمة على 4 لأن:

العدد الناتج من الآحاد والعشرات هو العدد 22 ولا يقبل القسمة على 4.

ولذلك العدد 122 لا يقبل القسمة على 4.

قابلية القسمة على 5:

يقبل العدد الصحيح القسمة على ٥ فقط عندما يكون رقم آحاده 0 أو 5.

فإذا كان في الآحاد 0 أو 5 فإن العدد بالكامل يقبل القسمة على 5.

مثال:

العدد 32195 والعدد 7830 يقبلان القسمة على 5 لأن:

آحاد العدد الأول 5 وآحاد العدد الثاني 0.

مثال:

العدد 204 لا يقبل القسمة على 5 لأن: آحاده الرقم 4.

فالعدد يقبل القسمة على 5 فقط عندما يكون آحاده 0 أو 5 و204 آحاده ليس الرقم 0 ولا الرقم 5 وإنما الرقم 4.

قابلية القسمة على 6:

يقبل العدد الصحيح القسمة على 6 فقط إذا كان يقبل القسمة على 2 و3 في آن واحد.

أي إذا كان زوجيًا ومجموع أرقامه يقبل القسمة على 3 ويكون ذلك في آن واحد ويتحقق الشرطان معًا.

مثال:

العدد 3654 يقبل القسمة على 6 لأن:

آحاده 4 أي عدد زوجي فهو يقبل القسمة على 2.

ومجموع أرقامه $(18 = 4 + 5 + 6 + 3)$ يقبل القسمة على 3.

وبالتالي فالعدد 3654 يقبل القسمة على 6 لأن الشرطان تحققا لقبول القسمة على 6.

مثال:

العدد 526 لا يقبل القسمة على 6 لأن:

لأن مجموع أرقامه $(13 = 6 + 2 + 5)$ لا يقبل القسمة على 3.

على الرغم من أن آحاده 6 أي يقبل القسمة على 2. فعلى الرغم من أنه عدد زوجي ويقبل القسمة على 2.

لكن لكي يقبل القسمة على 6 يجب أن يتحقق الشرطان معًا. ولكن العدد شرط قبول القسمة على 3 غير متحقق فلذلك العدد لا يقبل القسمة على 6.

قابلية القسمة على 7:

نوضح ذلك بمثال:

لنبحث قابلية قسمة العدد 4578 على العدد 7.

أول خطوة هو نحذف خانة الآحاد وهي العدد 8 لاحظ هنا حذفنا خانة الآحاد 8 فيكون كالتالي:

$$4578 \rightarrow 457-16=441$$

ثم نطرح العدد 457 من 16 وهو ضعف الآحاد أي نضرب الآحاد في 2 أي 8×2 فيكون الناتج 441

هذا الناتج ما زال كبيرًا ولذلك يمكن تطبيق الطريقة السابقة للحصول على عدد أصغر منه. أي نكرر نفس الطريقة فنحذف خانة الآحاد وهي العدد 1 فيصبح العدد هو 44 ونطرح ضعف الآحاد أي ضعف العدد 1 وهو العدد 2 فيكون الناتج 42. والعدد 42 يقبل القسمة على 7.

$$441 \rightarrow 44-2=42$$

أي أخيرًا حصلنا على العدد ٤٢ والذي يقبل القسمة على 7.

وبالتالي العدد 4578 يقبل القسمة على العدد 7.

وبهذه الطريقة من الطرق السهلة لبحث قابلية القسمة على العدد 7.

مثال:

اختبر قابلية قسمة العدد 556677 على العدد 7.

نبدأ في الحل بنفس الطريقة السابقة:

$$556677 \rightarrow 55667-14=55653$$

$$55653 \rightarrow 5565-6=5559$$

$$5559 \rightarrow 555-18=537$$

$$537 \rightarrow 53-14=39$$

وبما أن العدد 39 لا يقبل القسمة على 7 فإن العدد 556677 لا يقبل القسمة على العدد 7 أيضًا.

قال رَسُولِ اللّهِ صلي الله عليه وسلم: لأَرْجُو أَنْ أَلْقَي اللّهَ وَلاَ يَطْلُبُنِي أَحَدٌ بِمَظْلَمَةٍ ظَلَمْتُهَا إِيَّاهُ فِي دَمٍ وَلاَ مَالٍ

قابلية القسمة على العدد 8:

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 8 إذا كان العدد المكون من الخانات الثلاث اليمنى (أي الآحاد والعشرات والمئات) يقبل القسمة على 8.

مثال:

العدد 690112 يقبل القسمة على 8 لأن:

العدد المكون من الخانات الثلاث اليمنى هو العدد 112 وهو يقبل القسمة على 8.

مثال:

العدد 7129012 لا يقبل القسمة على 8 لأن:

العدد المكون من الخانات الثلاث اليمنى هو العدد 12 وهو لا يقبل القسمة على 8.

قابلية القسمة على 9:

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد ٩ فقط إذا كان مجموع خاناته تقبل القسمة على 9.

مثال:

العدد 34218 يقبل القسمة على 9 لأن:

مجموع خاناته $(18=8+1+2+4+3)$ يقبل القسمة على 9. ولذلك العدد 34218 يقبل القسمة على 9.

مثال:

العدد 66504 لا يقبل القسمة على 9 لأن:

مجموع خاناته $(21=4+0+5+6+6)$ لا يقبل القسمة على 9 ولذلك فإن العدد 66504 لا يقبل القسمة على 9.

قابلية القسمة على 10:

يقبل العدد الصحيح القسمة على العدد 10 إذا كان آحاده صفرًا.

مثال:

العدد 934560 يقبل القسمة على 10 لأن آحاده صفراً.

مثال:

العدد 546655 لا يقبل القسمة على 10 لأن:

آحاده 5 وهو عدد غير الصفر.

قابلية القسمة على 11:

نوضح هذه الخاصية بمثال:

نريد بحث قابلية قسمة العدد 3056812 على العدد 11.

نضع بين أرقام العدد 3056812 إشارة الطرح ثم إشارة الجمع من اليسار إلى اليمين كما يلي:

$$3056812 \rightarrow 3-0+5-6+8-1+2=11$$

والعدد الناتج 11 يقبل القسمة على العدد 11

وبالتالي العدد 3056812 يقبل القسمة على 11.

هنا ملاحظة بأننا نبدأ بعملية الطرح ثم عملية الجمع ونبدأ من اليسار إلى اليمين حتى يكون الناتج لدينا العدد الصحيح المراد اختباره لقابلية القسمة على العدد 11.

مثال:

اختبر قابلية قسمة العدد 98510620 على العدد 11.

الحل:

$$98510620 \rightarrow 9-8+5-1+0-6+2-0=1$$

وبما أن الناتج هو العدد 1 لا يقبل القسمة على 11

وبالتالي فإن العدد 98510520 لا يقبل القسمة على 11.

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا قد استفدتم من هذه الحلقة ونستودعكم الله والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته وإلى اللقاء في الحلقة القادمة.

المحاضرة السابعة

هذه الحلقة هي الحلقة السابعة من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وأيضًا هذه الحلقة هي التالية لشرح خواص الأعداد الصحيحة.

وتتكون من هذه الحلقة من عناوين الأعداد الأولية والقاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

الأعداد الأولية:

ليكن p عددًا طبيعيًا أكبر من واحد، يسمى p عددًا أوليًا إذا كان لا يقبل القسمة إلا على نفسه والواحد.

بمعنى آخر مجموعة قواسم العدد الأولي p هي: $D_p = \{\pm 1, \pm p\}$

ونلاحظ هنا أن العدد الأولي يجب أن يكون عدد طبيعي لا يكون عددًا سالبًا أبدًا. ويجب أن يكون أكبر من واحد.

بعض الأعداد الأولية:

$$2,3,5,7,11,13,17,19,23,...$$

فالأعداد السابقة كلها لا تقبل القسمة إلا على نفسها والواحد فقط. ونلاحظ أن العدد 2 هو العدد الزوجي الوحيد الذي يعتبر أولي.

نظرية:

كل عدد صحيح يمكن تحليله إلى حاصل ضرب أعداد أولية تسمى عوامله الأولية.

أي بالإمكان تحليل أي عدد صحيح ليكون هذا التحليل هو حاصل ضرب مجموعة من الأعداد الأولية.

مثال:

حلل الأعداد التالية إلى عواملها الأولية:

1. 120   2. 462

الحل:

1)

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

إذا وصلنا إلى العدد 1 نتوقف عن التحليل ونحصل على العوامل الأولية للعدد 120 هي:

$$2\times2\times2\times3\times5$$

ويمكن كتابتها أيضًا على الصورة: $2^3\times3\times5$

نحلل العدد الآخر وهو العدد 462.

2)

462	2
231	3
77	7
11	11
1	

العوامل الأولية للعدد 462 هي: $462=2\times3\times7\times11$

القاسم المشترك الأكبر:

القواسم الموجبة للعدد 18 هي: $1,2,3,6,9,18$

القواسم الموجبة للعدد 12 هي: $1,2,3,4,6,12$

نلاحظ أن هناك قواسم مشتركة بين العددين 18، 12 وهي: $1,2,3,6$ ولكن أكبر هذه القواسم هو العدد 6 مشترك بين العددين 18، 12.

وبالتالي فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين 18، 12 هو 6.

تعريف القاسم المشترك الأكبر:

أكبر قاسم مشترك موجب للعددين الصحيحين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ويرمز له بالرمز $gcd(a,b)$

ونلاحظ أن القاسم المشترك الأكبر دائمًا عدد موجب. وهو أكثر فاعلية إذا كانت القواسم كبيرة أو كثيرة فقد ننسى بعضها ولكن هناك طريقة فعالة أكثر باستخدام طريقة تحليل الأعداد الأولية.

طريقة إيجاد القاسم المشترك الأكبر:

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b وإيجاد $gcd(a,b)$ نتبع الخطوات التالية:

١) نحلل كلا من العددين a و b إلى عواملهما الأولية.

٢) نأخذ من كل عاملين مشتركين في a و b عاملاً واحدًا.

٣) نوجد حاصل ضرب هذه العوامل الأولية المأخوذة من الخطوة (٢) ويكون الناتج هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b.

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين:

1. $24 , 60$ 2. $-30 , -42$

الحل:

١) نحلل العددين 24 ، 60 إلى عواملهما الأولية:

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

وهناك عوامل مشتركة بين العدد 24 و 60 وهي: $2 \times 2 \times 3$

ونوجد حاصل ضرب الأرقام المأخوذة كما يلي: $2 \times 2 \times 3 = 12$

أي أن القاسم المشترك الأكبر هو: $gcd\,(24,60) = 12$

٢) القاسم المشترك الأكبر للعددين -42 و -30

نحلل الأعداد الأولية:

$$-42 = -(2 \times 3 \times 7)$$

$$-30 = -(2 \times 3 \times 5)$$

فنجد أن الأعداد الأولية المشتركة بين العددين هما: 2×3 وحاصل ضربهما هو: $2 \times 3 = 6$ فيكون القاسم المشترك الأكبر هو: $gcd(-42,-30) = 6$

المضاعف المشترك الأصغر:

المضاعفات الموجبة للعدد 8 هي:

$$8,16,24,32,40,48,56,64,72...$$

المضاعفات الموجبة للعدد 12 هي:

$$12,24,36,48,60,72...$$

ونلاحظ أن هناك مضاعفات مشتركة بين العددين 8 ، 12 وهي: $24,48,72$

ومن العنوان نحن نريد المضاعف المشترك الأصغر وهو: 24.

وبالتالي فإن المضاعف المشترك الأصغر للعددين 8 و 12 هو: 24.

تعريف المضاعف المشترك الأصغر:

أصغر مضاعف مشترك موجب للعددين الصحيحين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ويرمز له بالرمز $lcm(a,b)$.

طريقة إيجاد المضاعف المشترك الأصغر:

لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b الذي هو $lcm(a,b)$ نتبع الخطوات التالية:

١) نحلل كل من العددين a و b إلى عواملهما الأولية.

٢) نأخذ من كل عاملين مشتركين في a و b عاملاً واحدًا ثم نأخذ جميع العوامل المتبقية أيضًا.

٣) نوجد حاصل ضرب الأرقام المأخوذة من الخطوة (٢) ويكون الناتج هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b.

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين:

1. 24 , 30   2. -36 , 84

الحل:

١) المضاعف المشترك الأصغر للعددين: $24,30$

نحلل العددين كما يلي:

$$24=2\times2\times2\times3$$

$$30=2\times3\times5$$

ونأخذ من كل عامل مشتركين عاملاً واحدًا ونجدهما هما العدد 2 والعدد 3

ثم نجد أن هناك عوامل متبقية أيضًا وهي: 2 و 2 و 5

ثم نوجد حاصل ضرب جميع العوامل المشتركة والمتبقية التي أخذناهم كما يلي:

$$2\times3\times2\times2\times5=120$$

وبالتالي المضاعف المشترك الأصغر للعددين $24,30$ هو:

$$lcm(24,30)=120$$

مركز نبـــــراس
0114828957

٢) المضاعف المشترك الأصغر للعددين: $-36,84$

نحلل العددين كما يلي:

$$-36=-(2\times2\times3\times3)$$

$$84=2\times2\times3\times7$$

ونأخذ العوامل المشتركة بينهما وهي: $2\times2\times3$

ونجد هناك أيضًا عوامل متبقية أيضًا هي: 3×7

فنوجد نأخذ العوامل المشتركة ومعهم العوامل المتبقية ونوجد حاصل ضربهم كما يلي: $2\times2\times3\times3\times7=252$ فيكون المضاعف المشترك الأصغر هو:

$$lcm(-36,84)=252$$

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته ونلقاكم في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الثامنة

انتهينا في الحلقة الماضية من مجموعة الأعداد الصحيحة وسنبدأ اليوم في مجموعة الأعداد النسبية والتي ستأخذ بعض من الحلقات.

أما عناصر هذا الدرس فسنعرضها عليكم:

عناصر الدرس:

- تعريف مجموعة الأعداد النسبية.
- العمليات الحسابية على الأعداد النسبية.
- مقارنة الأعداد النسبية.
- تحويل الأعداد من الصورة الكسرية إلى الصروة العشرية والعكس.
- النسبة المئوية وبعض التطبيقات عليها.

مجموعة الأعداد النسبية

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام من أعداد صحيحة.

أي يمكن وضعها على الصورة $\frac{m}{n}$ حيث $m,n\in\mathbb{Z}$ و $n\neq 0$.

ويرمز لمجموعة الأعداد النسبية بالرمز $\mathbb{Q}$، وتعرف:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\,,n\neq 0\right\}$$

حيث n هو الرقم الصحيح الموجود في المقام.

العمليات الحسابية على الأعداد النسبية:

وكما شاهدنا في الأعداد الصحيحة يوجد أيضًا عمليات جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد النسبية وسنعرض عليكم هذه العمليات:

إذا كانتَ $a,b,c,d\in \mathbb{Q}$ بحيث $b\neq 0$ و $d\neq 0$ فإن:

1. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \quad ad=cb$ **(الضرب التبادلي)**

مثال:

أي من العبارات النسبية التالية صحيحة وأيها خاطئة:

a) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ b) $\frac{1}{2}=\frac{5}{15}$

الحل:

a) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$

إذا ضربنا ضرب تبادلي كما يلي:

$2\times 9=18$ $6\times 3=18$

ونلاحظ أن عمليتي الضرب السابقتين متساويتين في النتيجة وكلاهما: 18.

فنقول أن العبارة النسبية صحيحة.

b) $\frac{1}{2}=\frac{5}{15}$

إذا ضربنا ضرب تبادلي كما يلي:

$1\times 15=15$ $5\times 2=10$

ونلاحظ أن عمليتي الضرب السابقتين غير متساويتين في النتيجة فأحدهما يساوي: 15 والآخر يساوي 10 فنقول أن العبارة النسبية خاطئة.

خاصية الثانية: خاصية تبسيط العدد النسبي:

ونسميه أيضًا الكسر الاعتيادي أو الكسر العادي. فخاصية التبسيط تقول:

$$\frac{a.c}{b.c}=\frac{a}{b},c\neq 0$$

وهذه الخاصية تستخدم في تبسيط الكسور.

مثال:

ضع المقادير التالية في أبسط صورة:

a) $\frac{12}{4}$ b) $\frac{-4}{6}$

الحل:

a) $\frac{12}{4}=\frac{3\times 4}{4}$

فيمكن اختصار العدد 4 في البسط مع العدد 4 في المقام فيكون الجواب كما يلي:

$$\frac{12}{4}=\frac{3\times4}{4}=3$$

b) $$\frac{-4}{6}=\frac{-2\times2}{3\times2}$$

فنلاحظ وجود العدد 2 مشترك بين البسط والمقام فنحذف للعدد المشترك 2 الذي هو موجود في كل من البسط والمقام فتصبح النتيجة النهائية كما يلي:

$$\frac{-4}{6}=\frac{-2\times2}{3\times2}=\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

الخاصية الثالثة الجمع والطرح ممكن أن تكون كالتالي:

3. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{a.d\pm c.b}{b.d}$, $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$

فعند جمع كسرين أو عددين نسبيين أو طرحهما نضرب المقامين في بعضهما ويكون هو المقام المشترك هو حاصل ضربهما $b.d$ وأما في البسط فنفس خاصية الضرب التبادلي فيكون حاصل ضرب $a.d$ وإذا كانت عملية جمع نضع علامة + وإذا كانت عملية طرح نضع علامة − ثم نكتب حاصل ضرب $c.b$.

أما إذا كانت المقامات متساوية كما نلاحظ في الحالة الثانية فيمكن أن الجواب نفس المقام مع جمع أو طرح البسط.

مثال:

ضع المقادير التالية في أبسط صورة:

a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{6}-\frac{5}{6}$

c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}$

الحل:

a) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$

لاحظ أن المقامين متساويين فنجعله المقام المشترك بين الكسرين ونجمع البسطين مع بعضهما والمقام المتساوي هو مقام الكسر

b) $\frac{2}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2-5}{6}=\frac{-3}{6}$

لاحظ أن المقامين متساويين فنجعله المقام المشترك بين الكسرين ونطرح البسطين مع بعضهما والمقام المتساوي هو مقام الكسر

c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{(3\times 3)+(1\times 4)}{4\times 3}=\frac{9+4}{12}=\frac{13}{12}$

d) $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{(5\times 4)-(3\times 2)}{2\times 4}=\frac{20-6}{8}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

<u>العملية الحسابية الرابعة هي الضرب:</u>

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a.c}{b.d},\qquad a\times\frac{b}{a}=b$

إذا ضربنا عددين نسبيين يكون الجواب هو كسر بسطه هو حاصل ضرب البسطين ومقامه هو حاصل ضرب المقامين.

وإذا ضربنا العدد a في العدد النسبي $\frac{b}{a}$ ممكن أن نحذف العدد a مع العدد a الذي في المقام ويكون الباقي هو العدد b الذي في البسط.

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة ما يلي في أبسط صورة:

a) $2\times\frac{-5}{2}$ b) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$

<u>الحل:</u>

a) $2\times\frac{-5}{2}=-5$

وذلك بحذف العدد 2 مع العدد 2 الموجود في المقام فيكون الناتج -5

b) $\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{2\times 5}{3\times 4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

الناتج يساوي كسر جديد بسطه حاصل ضرب البسطين ومقامه حاصل ضرب المقامين. ثم نجد أننا يمكن أن نبسط هذا الكسر الناتج بقسمته على عدد مشترك بين البسط والمقام أي قسمة البسط والمقام على العدد 2.

العملية الحسابية الخامسة وهي القسمة:

$$\frac{a}{b} \text{لأي} \frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a.d}{b.c} \quad , \qquad c\neq 0$$

وذلك بأن نحول عملية القسمة إلى عملية ضرب بأن نترك العدد النسبي الأول كما هو ونقلب العدد النسبي الثاني بأن نجعل المقام بسطًا والبسط مقامًا ثم نكمل عملية الضرب كما سبق.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a.c}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b.c}$$

مثال:

أوجد قيمة كل مما يلي في أبسط صورة:

a) $\frac{4}{5}\div\frac{8}{7}$ b) $\frac{4/6}{5/3}$

c) $\frac{6/5}{9}$ d) $\frac{8}{2/3}$

الحل:

a) $\frac{4}{5}\div\frac{8}{7}=\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{28}{40}=\frac{7}{10}$

b) $\frac{4/6}{5/3}=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{30}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

c) $\frac{6/5}{9}=\frac{6}{5\times 9}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

d) $\frac{8}{2/3}=\frac{8\times 3}{2}=\frac{24}{2}=12$

ويمكن أن يكون هناك حل آخر للمثال كما يلي:

a) $\frac{4}{5}\div\frac{8}{7}=\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}=\frac{1}{5}\times\frac{7}{2}=\frac{7}{10}$

وذلك باختصار مباشرة

b) $\frac{4/6}{5/3}=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{1}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

c) $\frac{6/5}{9}=\frac{6}{5\times 9}=\frac{2}{5\times 3}=\frac{2}{15}$

d) $\frac{8}{2/3}=\frac{8\times 3}{2}=\frac{4\times 3}{1}=12$

إلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة التاسعة

هذه الحلقة هي الحلقة التاسعة من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

موضوع هذه الحلقة هو مقارنة الأعداد النسبية والكسر العشري.

مقارنة الأعداد النسبية:

للمقارنة بين عددين نسبيين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نتبع الخطوات التالية :

١) نجعل إشارة مقام كل كسر موجبة وذلك بضرب البسط والمقام في -1 إذا لزم الأمر. أي أن إذا كانت إشارة المقام في أي كسر سالبة نجعلها موجبة بضرب البسط والمقام في -1 بمعنى آخر نجعل إشارة المقام في البسط.

٢) نضرب مقام الثاني في بسط الأول.

٣) نضرب مقام الأول في بسط الثاني.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \quad ===> \quad a.d \ , \ c.b$$

٤) نقارن بين الناتجين:

- إذا كان $ad > cb$ فإن $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$
- إذا كان $ad < cb$ فإن $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
- إذا كان $ad = cb$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال:

قارن بين العددين النسبيين في كل مما يلي:

a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ b) $\frac{-4}{10}, \frac{-2}{6}$ c) $\frac{-2}{3}, \frac{7}{-10}$

الحل:

a) $\frac{3}{4}, \frac{5}{7}$

نجري عملية الضرب التبادلي كما يلي:

$3 \times 7 = 21 \quad > \quad 5 \times 4 = 20$

مركز نبـــــراس
0114828957

فعند المقارنة بين الناتجين نلاحظ أن العدد $21>20$ فإن: $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$

b) $\frac{-4}{10},\frac{-2}{6}$

نلاحظ أن المقامين موجبة فلا داعي أن نجعلهما موجبين. لأننا لو وجدناهما سالبين أو أحدهما سالب سنضرب الكسر في -1 لكي نجعل المقام موجب.

نعمل عملية الضرب التبادلي كما يلي:

$$-4\times6=-24 \qquad < \qquad 10\times-2=-20$$

وبما أن الناتج $-24<-20$

فيكون الناتج: $\frac{-4}{10}<\frac{-2}{6}$

c) $\frac{-2}{3},\frac{7}{-10}$

لاحظ أن العدد النسبي الثاني فيه المقام سالب فنضرب البسط والمقام في -1. أو بمعنى آخر نرفع الإشارة السالبة إلى البسط. فيصبح العددين

$$\frac{-2}{3},\frac{-7}{10}$$

ونقوم بعملية الضرب التبادلي كما يلي:

$$-2\times10=-20 \qquad > \qquad 3\times-7=-21$$

وبالمقارنة بين الناتجين نجد أن: $-20>-21$

فيكون الناتج النهائي: $\frac{-2}{3}>\frac{-7}{10}$

لكن إذا حلينا من غير أن ننقل الإشارة السالبة التي كانت في مقام العدد الثاني لاحظ الخطأ الذي سنجده: $\frac{-2}{3},\frac{7}{-10}$

وعملنا الضرب التبادلي فيكون كما يلي:

$$-2\times-10=20 \qquad < \qquad 3\times7=21$$

ونجد أن: $21<20$ **ونستنتج إجابة خاطئة** وليست صحيحة. ولذلك يجب أن نراعي أن يكون المقامات موجبة.

الكسر العشري:

كل كسر مقامه قوة للعشرة مثل 10، 100، 1000،... إلخ. يمكن كتابته على صورة أخرى تسمى الصورة العشرية.

على سبيل المثال: $\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$ يكتب بالصورة 0.5

مثال:

عبر عن الكسور التالية بالصورة العشرية

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{4}{125}$

فإذا حولنا المقام لأي كسر وجعلنا في صورة قوة للعشرة فيمكن أن نكتب بالصورة العشرية.

a) $\frac{1}{8}=\frac{1\times125}{8\times125}=\frac{125}{1000}$

وبالتالي فإن: $\frac{1}{8}=0.125$

فنضع الفاصلة العشرية بعد عدد الأصفار التي في المقام. ونكتب البسط ثم نضع الفاصلة بعد عدد الأصفار التي في المقام وهي في هذا الكسر ثلاثة أصفار (1000)

b) $\frac{4}{125}=\frac{4\times8}{125\times8}=\frac{32}{1000}=0.032$

ولاحظ أن عدد الأصفار في المقام ثلاثة أصفار فيجب أن نضع الفاصلة بعد ثلاثة أرقام من البسط ولكن البسط رقمين فقط ولذلك وضعنا 0 على يسار عدد البسط ليكون ثلاثة أرقام ثم نضع الفاصلة بعد ذلك فيكون الجواب: 0.032

ملاحظة مهمة:

معظم الكسور لا يمكن كتابتها بصورة كسر عشري منتهي.

الكسور الماضية كتبناها في المثال كانت كسور منتهية أي بعد الفاصلة العشرية كان عدد معين. لكن بعض الأحيان كتابة الكسر العادي في صورة كسر عشري منتهي.

على سبيل المثال: الكسر $\frac{1}{3}$ لا يمكن جعل مقامه قوة للعشرة لكن بالقسمة الاعتيادية وهي القسمة المطولة نلاحظ أن القسمة لا تنتهي وينتج لدينا:

$$\frac{1}{3}=0.333...$$

وهذا كسر عشري غير منتهي أي يعني بذلك بعد الفاصلة العشرية لا يمكن عد الخانات وتكون الخانات لا نهاية لها.

<u>تحويل العدد الكسري إلى عدد عشري:</u>

إذا أردنا تحويل العدد الكسري $\frac{a}{b}$ إلى الصورة العشرية فإننا نقسم البسط (وهو العدد a) على المقام (وهو العدد b) باستخدام القسمة المطولة. وسينتج لدينا إحدى الحالتين التاليتين:

١) تنتهي عملية القسمة بعد إجراء عدد معين من العمليات.

٢) تستمر عملية القسمة من غير نهاية مع تكرار الأعداد ويسمى (عدد دوريًا غير منتهي).

<u>مثال:</u>

حول الأعداد الكسرية التالية إلى الصورة العشرية:

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{13}{8}$

<u>الحل:</u>

a) $\frac{5}{6}$

$$\begin{array}{r} 0.833 \\ 6\overline{)50} \\ 48- \\ \hline 20 \\ 18- \\ \hline 20 \\ 18- \\ \hline 2 \end{array}$$

إذاً $\frac{5}{6}=0.833...$ ويمكن كتابة العدد الدائري كالتالي: $\frac{5}{6}=0.8\overline{3}$

والخط الذي فوق العدد الدائري 3 يعني أن ذلك العدد الدائري 3 سيتكرر إلى ما لا نهاية.

b) $\frac{13}{8}$

$$
\begin{array}{r}
1.625 \\
8\overline{)13} \\
8- \\
\hline
50 \\
48- \\
\hline
20 \\
16- \\
\hline
40 \\
40- \\
\hline
00
\end{array}
$$

إذاً: $\frac{13}{8}=1.625$

<u>تحويل العدد العشري إلى عدد كسري:</u>

إذا كان الكسر العشري منتهي أو دوري غير منتهي فإننا نستطيع تحويله إلى عدد كسري. أما إذا كان الكسر العشري غير منتهي وعشوائي غير دوري فلا نستطيع أن نحوله إلى عدد كسري.

<u>أولاً: تحويل العدد العشري المنتهي إلى عدد كسري:</u>

<u>مثال:</u>

حول الأعداد العشرية التالية إلى أعداد كسرية:

a) 0.235 b) 0.0013 c) 4.05

<u>الحل:</u>

العدد الكسري	مقام العدد الكسري	عدد الخانات بعد الفاصلة العشرية	العدد دون فاصلة عشرية	العدد العشري	
$\frac{235}{1000}$	1000	3	235	0.235	a)
$\frac{13}{10000}$	10000	4	13	0.0013	b)
	100	2	405	4.05	c)

وإلى هنا أعزائي نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة العاشرة

هذه الحلقة هي الحلقة العاشرة من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وموضوع هذه الحلقة هو تحويل الكسري العشري الدوري إلى كسر عادي وأيضًا سنشرح النسبة المئوية.

<u>ثانيًا: تحويل الكسر العشري الدوري غير المنتهي إلى عدد كسري:</u>

وهناك حالتين:

<u>أ) جميع أرقام العدد العشري الدوري تدور:</u>

<u>مثال:</u>

حول كلا من الكسور العشرية التالية إلى أعداد كسرية:

a) $0.\overline{3}$ b) $0.\overline{502}$ c) $0.\overline{14}$

العدد الكسري	مقام العدد الكسري	عدد الأرقام التي تدور	الرقم الذي يدور	العدد العشري	
$\frac{14}{99}$	9	1	3	$0.\overline{3}$	a)
$\frac{502}{999}$	999	3	3	$0.\overline{502}$	b)
$\frac{14}{99}$	99	2	14	$0.\overline{14}$	c)

ب) احتواء الكسر الدوري على جزء ثابت غير دوار وجزء آخر دوار:

مثال:

حول العدد العشري $0.4\overline{2}$ إلى عدد كسري:

الحل:

نفرض أن:

$$x = 0.4\overline{2} = 0.422...$$

نضرب المتساوية $\times 10$ فتصبح كالتالي:

$$10x = 4.22... \longrightarrow (2)$$

وبذلك يصبح رقم واحد فقط يدور وهو العدد 2 ولذلك نضرب المتساوية في عدد 10 ولو كان عددان يدوران نضرب المتساوية في 100 ولو كان ثلاثة أعداد تدور نضرب المتساوية في 1000 وهكذا.

وفي هذه الحالة نجد أن عدد واحد هو الذي يدور فنضرب المتساوية في 10

$$100x = 42.22... \longrightarrow (3)$$

نطرح المتساويتين من بعضهما وبذلك نتخلص من الجزء العشري الذي يدور كاملاً.

أي نطرح المتساوية (2) من المتساوية (3) كالتالي:

$$\begin{array}{r} 100x = 42.22... \\ 10x = 4.22.. \\ \hline \end{array}$$

$$90x = 38$$

$$x = \frac{38}{90}$$

فأصبح العدد العشري الدوري وجزء منه ثابت كما يلي:

$$0.4\overline{2} = \frac{38}{90}$$

النسبة المئوية:

النسبية المئوية لها تطبيقات عدة. فنسمع كثيرًا عن النسبة المئوية في الحياة العملية. فنرى مثلاً المحال التجارية نرى تخفيضات بنسبة مئوية معينة وخصومات بنسبة مئوية معينة، أو عند شراء بعض أنواع المنتجات، وهكذا لها تطبيقات شتى.

فالنسبة المئوية هي كل عدد كسري مقامه 100 وبسطه عدد كسري عشري على سبيل المثال $\frac{a}{100}$ حيث a كسر عشري فيكتب كنسبة مئوية على الصورة $a\%$.

تحويل النسبة المئوية إلى كسر اعتيادي:

لتحويل النسبة المئوية $a\%$ إلى كسر اعتيادي نضع العدد a في البسط وفي المقام العدد 100. ثم نقوم بعملية التبسيط إلى أبسط صورة.

مثال:

حول النسب المئوية التالية إلى كسر اعتيادي في أبسط صورة.

a) 25% b) 44% c) 7.5%

الحل:

a) $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b) $44\% = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

c) $7.5\% = \frac{7.5}{100} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40}$

تحويل النسبة المئوية إلى كسر عشري:

لتحويل النسبة المئوية $a\%$ إلى كسر عشري نحرك الفاصلة العشرية في العدد a خانتين باتجاه اليسار مع حذف الرمز %.

مثال:

حول النسب المئوية التالية إلى كسر عشري:

a) 64 % b) 3 % c) 1.7%

الحل:

a) 64 % = 0.64

b) 3 % = 0.03

c) 1.7 % = 0.017

تحويل الكسر الاعتيادي والعشري إلى نسب مئوية:

لتحويل الكسر الاعتيادي أو العشري إلى نسبة مئوية نضرب الكسر في العدد ١٠٠ ونضع رمز النسبة المئوية % بجوار الناتج بعد كتابته ككسر عشري.

مثال:

حول الكسور التالية إلى نسب مئوية:

a) $\frac{16}{25}$ b) $\frac{1}{8}$ c) 0.37 d) 0.028

الحل:

أي نضرب جميع هذه الأعداد في 100 ثم نضع رمز النسبة المئوية % ونكتب الناتج في صيغة كسر عشري.

a) $\frac{16}{25}\times100\%=64\%$

b) $\frac{1}{8}\times100\%=\frac{100}{8}\%=12.5\%$

c) $0.37 \times 100\% = 37\%$

d) $0.028\times100\%=2.8\%$

تطبيقات على النسبة المئوية:

مثال:

تقدم 150 طالبًا لأداء امتحان في أحد مقررات الرياضيات وكانت نسبة النجاح 76% . أوجد عدد الطلبة الناجحين في هذا المقرر.

الحل:

عدد الطلبة الناجحين = عدد الطلاب × نسبة النجاح

$$76\%\times150=0.76\times150=114$$ طالب

إذاً الجواب النهائي أن عدد الطلبة الناجحين = 114 طالب.

مثال:

إذا كان عدد الطلاب الكلي في إحدى المحاضرات هو ٨٠ وكان نسبة الغياب هي 15% فكم عدد الطلاب الحاضرين في المحاضرة.

الحل:

في البداية لدينا نسبة الغياب ونريد نسبة الحضور.

إذاً نسبة الحضور =

$$100\%-15\%=85\%$$

عدد الطلاب الحاضرين = عدد الطلاب × نسبة الحضور

$$85\%\times80=0.85\times80=68$$ طالب

مثال:

إذا دخلت محل تجاري لشراء سلعة ما مخفضة وكان سعرها الأصلي 50 رياض ثم خفضت بنسبة 16%. فاحسب ما يلي:

١) مقدار التخفيض بالريال.

٢) سعر السلعة بعد التخفيض.

الحل:

١) مقدار التخفيض بالريال = سعر السلعة × نسبة التخفيض

$$50\times 16\% = 50\times 0.16 = 8$$ ريال

٢) سعر السلعة بعد التخفيض = سعر السلعة قبل التخفيض – مقدار التخفيض

$$50 - 8 = 42$$ ريال

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الحادية عشرة

بسم الله الرحمن الرحيم

هذه الحلقة هي الحلقة الحادية عشر من سلسلة حلقات شرح مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

أما موضوع هذه الحلقة مجموعة الأعداد الغير نسبية وسنوضح مفهوم هذه الأعداد ومجموعة الأعداد وبعض الأمثلة على هذه الأعداد.

وسننتقل إلى الأعداد الحقيقية بعض مجموعة الأعداد الغير النسبية.

<u>مجموعة الأعداد الغير نسبية</u>

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة بسط ومقام من الأعداد الصحيحة. ويرمز لها بالرمز $\mathbb{I}$.

<u>أمثلة على الأعداد الغير نسبية:</u>

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{2}+1, 0.12571093..., \pi, e$$

<u>ملاحظة:</u>

بالرغم من أنه يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على صورة الكسر $\frac{\sqrt{2}}{1}$ إلا أنه ليس عدد نسبي حيث البسط $\sqrt{2}$ ليس عددًا صحيحًا.

<u>مجموعة الأعداد الحقيقية</u>

وهي تشمل مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعداد الغير نسبية ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.

أي أن $\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$

العلاقة بين مجموعات الأعداد:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية بالرمز $\mathbb{R}^*$ أي لا تحتوي على الصفر.

خصائص الأعداد الحقيقية:

إذا كان لدي ثلاثة أعداد $a,b,c\in\mathbb{R}$ فإن:

١) خاصية الإبدال:

في عملية الجمع: $a+b=b+a$

على سبيل المثال: $5+3=3+5=8$

في عملية الضرب: $a.b=b.a$

على سبيل المثال: $5\times3=3\times5=15$

٢) خاصية التجميع:

في عملية الجمع: $a+(b+c)=(a+b)+c$

على سبيل المثال: $5+(4+3)=5+7=12$

وهو أيضًا نفس الناتج: $(5+4)+3=9+3=12$

في عملية الضرب: $a.(b.c)=(a.b).c$

فعلى سبيل المثال: $5\times(4\times3)=5\times12=60$

وهو أيضًا نفس الناتج: $(5\times4)\times3=20\times3=60$

٣) خاصية التوزيع:

$$a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$$

على سبيل المثال:

$$5\times(4+3)=5\times7=35$$
$$(5\times4)+(5\times3)=20+15=35$$

وهو نفس الناتج.

٤) العنصر المحايد:

العنصر المحايد لعملية الجمع هو 0 أي أن:

$$a+0=0+a=a$$

على سبيل المثال:

$$5+0=0+5=5$$

أما العنصر المحايد لعملية الضرب هو 1 أي أن:

$$a.1=1.a=a$$

على سبيل المثال:

$$5\times1=1\times5=5$$

٥) المعكوس:

المعكوس الجمعي: لأي عدد $a\in\mathbb{R}$ فإن المعكوس الجمعي هو $-a$ ولدينا:

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

المعكوس الضربي: لأي $a\in\mathbb{R}^*$ عدد فإن المعكوس الضربي هو $\frac{1}{a}$ ولدينا:

$$a.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.a=1$$

مثال: أكمل الجدول التالي:

العدد	4	-2		$\sqrt{2}$	0
المعكوس الجمعي	-4	2	$-\frac{1}{6}$	$-\sqrt{2}$	0
المعكوس الضربي	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	غير معرف

خواص أخرى للأعداد الحقيقية:

إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ فإن:

1. $a.0=0.a=0$

أي عدد مضروب في 0 سيبقى 0

2. $(-1).a=-a$ $\qquad -1(5)=-5$
3. $-(-a)=a$ $\qquad -(-5)=5$
4. $-(a+b)=-a-b$ $\qquad -(5+2)=-5-2=-7$
5. $(-a).b=a.(-b)=-(a.b)$
6. $(-a).(-b)=a.b$

خاصية الحذف:

إذا كان لدينا: $a,b,c\in\mathbb{R}$

١) إذا كان $a+c=b+c$ فإن $a=b$.

$x+2=5 \qquad \Rightarrow \qquad x+2=3+2$

ويمكن حذف العدد 2 الموجود في الجهتين ويبقى: $x=3$

٢) إذا كان $c\neq 0$ وكان $a.c=b.c$ فإن $a=b$.

$2x=8 \qquad \Rightarrow \qquad 2x=2\times 4$

ويمكن حذف العدد 2 من الجهتين في المتساوية فينتج:

$x=4$

خط الأعداد الحقيقية:

خط الأعداد الحقيقية يمكن كما في الشكل التالي:

ونعني بالرمز ∞ (ونسميها ما لا نهاية) تزايد الأعداد إلى اليمين بدون توقف.

ونعني بالرمز $-\infty$ (ونسميها سالب ما لا نهاية) تناقص الأعداد إلى اليسار بدون توقف.

مقارنة الأعداد الحقيقية:

العدد الحقيقي a يكون أكبر من العدد الحقيقي b إذا كان العدد a يقع إلى يمين العدد b على خط الأعداد الحقيقية.

في هذه الحالة فإن $(a-b)$ أكبر من الصفر.

والعدد الحقيقي a يكون أصغر من العدد الحقيقي b إذا كان العدد a يقع إلى يسار العدد الحقيقي b على خط الأعداد الحقيقية.

في هذه الحالة فإن $(a-b)$ أصغر من الصفر.

رموز للمقارنة بين الأعداد:

العبارة الرياضية	المعنى
$a > b$	a أكبر من b
$a \geq b$	a أكبر من أو يساوي b
$a < b$	a أصغر من b
$a \leq b$	a أصغر من أو يساوي b

أي عبارة رياضية تحتوي على أي من هذه الرموز $\leq, >, \geq, <$ تسمى متباينة أو متراجحة.

مثال:

حدد أي من المتباينات التالية صحيحة وأيها خاطئة:

1. $4 < -8$ خاطئة $4 > -8$
2. $0 \leq -3$ خاطئة $0 \geq -3$
3. $-1 < -10$ خاطئة $-1 > -10$
4. $2 \leq 2$ صحيحة
5. $7 > 7$ خاطئة $7 = 7$, $7 \geq 7$

المحاضرة الثانية عشرة

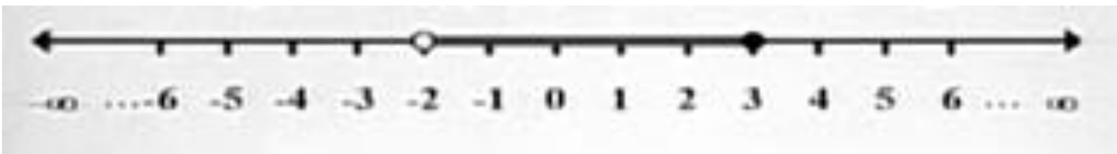
موضوع هذه الحلقة هي الفترات والقيم المطلقة وهي تابعة لمجموعة الأعداد الحقيقية.

الفترات الحقيقيـة:

لنعتبر المجموعة A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية حيث:

$$A=\{x\in\mathbb{R}|-2<x\le 3\}$$

ويمكن تمثيل هذه المجموعة على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل التالي:



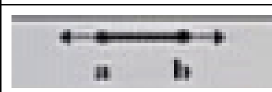
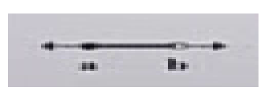
نلاحظ رسم خط الأعداد في المنتصف الصفر وعلى اليمين الأعداد الصحيحة الموجبة وعلى اليسار الأعداد الصحيحة السالبة.

وتمثل الفترة والمجموعة السابقة تكون المنطقة ما بين $2-$ و 3 ولقد وضعنا على العدد 3 للدلالة على أن العدد 3 من ضمن هذه المجموعة A ووضعنا دائرة بيضاء على العدد $2-$ للدلالة على أن العدد $2-$ ليس من ضمن المجموعة A.

وهذا يعني أن المجموعة A هي جميع الأعداد الحقيقية الواقعة العددين $2-$ و3 وتحوي العدد 3 ولا تحوي العدد $2-$

ونسمي A فترة نصف مغلقة من اليمين ونصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(-2,3]$.

أشكال الفترات وأنواعها وتمثيلها على خط الأعداد الحقيقية:

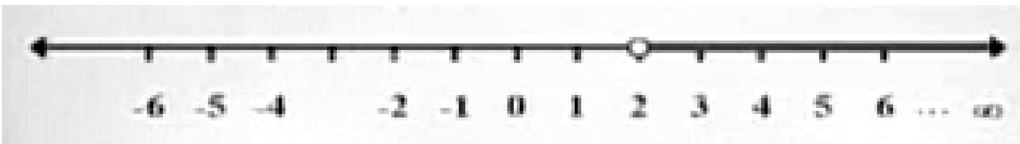
نوعها	خط الأعداد	المتباينة	الفترة
فترة مفتوحة		$a<x<b$	(a,b)
فترة مغلقة		$a\le x\le b$	$[a,b]$
فترة مفتوحة من اليسار ومغلقة من اليمين		$a<x\le b$	$(a,b]$
فترة مغلقة من اليسار ومفتوحة من اليمين		$a\le x\le b$	$[a,b)$

نصف الفترة:

لنعتبر المجموعة A مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية والتي هي أكبر من 2 حيث:

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x>2\}$$

وتمثل على خط الأعداد الحقيقية كما في الشكل:



لاحظ تظليل كل الخط الذي يمثل الأعداد الحقيقية التي تقع على يمين العدد 2 أي أكبر من العدد 2 وعلى العدد 2 دائرة بيضاء مفتوحة لأن الفترة لا تحوي على العدد 2

ونسمي A فترة نصف مفتوحة من اليسار ونرمز لها بالرمز $(2,\infty)$.

جدول أشكال نصف الفترات:

نوعها	خط الأعداد	المتباينة	الفترة
فترة مفتوحة	a	$x>a$	(a,∞)
فترة مغلقة	a	$x\geq a$	$[a,\infty)$
فترة مفتوحة	b	$x<b$	$(-\infty,b)$
فترة مغلقة	b	$x\leq b$	$(-\infty,b]$

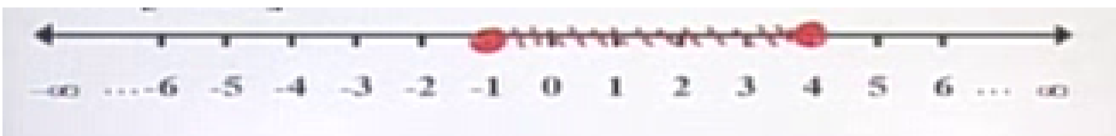
مثال:

مثل ما يلي من الفترات على خط الأعداد الحقيقية:

1. $[-1,4]$ 2. $[0,3)$ 3. $(-5,-2)$
4. $(-3,\infty)$ 5. $(-\infty,2]$

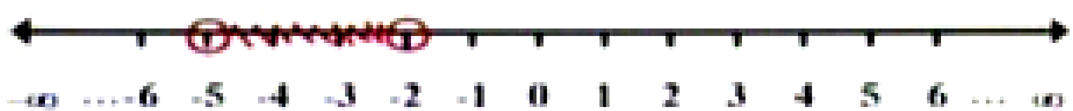
الحل:

1. $[-1,4]$



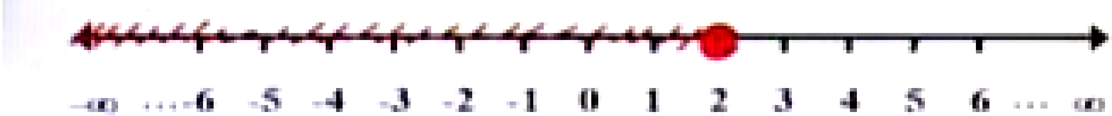
2. $[0,3)$

3. $(-5,-2)$



4. $(-3,\infty)$

5. $(-\infty,2]$



مثال:

اكتب المتباينات التالية على صورة فترات:

1. $-5 \leq x \leq 6$
2. $0 \leq x < 3$
3. $8 < x < -1$
4. $x \geq 5$
5. $x < 2$

الحل:

1. $-5 \le x \le 6$ $\qquad [-5,6]$
2. $0 \le x < 3$ $\qquad [0,3)$
3. $8 < x < -1$ $\qquad (-8,-1]$
4. $x \ge 5$ $\qquad [5,\infty)$
5. $x < 2$ $\qquad (-\infty,2)$

القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي a هي العدد a محذوفًا منه الإشارة السالبة إن وجدت.
يرمز لها بالرمز $|a|$ وتعرف كما يلي:

$$|a| = \begin{cases} a & a \ge 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

على سبيل المثال:

$|4| = 4 \qquad , \qquad |-3| = 3$

$|0| = 0 \qquad , \qquad |6-8| = |-2| = 2$

إذاً نلاحظ هنا حذفنا الإشارة السالبة في القيمة المطلقة للعددين $3-$ و $2-$.

أما خصائص القيمة المطلقة:

إذا كان لدينا $a,b \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $|a| \ge 0.$

أي دائمًا موجبة.

2. $|a| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$
3. $|a.b| = |a|.|b|$

مثال:

$$|-2\times 5| = |-10| = 10$$

$$|-2| \times |5| = 2\times 5 = 10$$

ويمكن أيضًا تقسيم القيمة المطلقة في حالة قسمة العددين a,b

4. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad , \qquad b \neq 0$

على سبيل المثال:

$$\left|\frac{-8}{2}\right| = |-4| = 4$$

$$\frac{|-8|}{|2|} = \frac{8}{2} = 4$$

ونلاحظ أنهما نفس الناتج.

5. $|a-b| = |b-a|$

على سبيل المثال:

$$|6-4| = |2| = 2$$

$$|4-6| = |-2| = 2$$

6. $|a+b| \leq |a| + |b|$

وهنا ملاحظة:

إذا كان a و b لهما نفس الإشارة أي موجبين معًا أو سالبين معًا فإن المساواة حاصلة وأما إذا كانا مختلفين في الإشارة فإن القيمة المطلقة لمجموعهما أقل قيمة من مجموع القيمة المطلقة لكل منهما.

<u>مثال:</u>

احسب قيمة كل مما يلي:

1. $-|6|$ 2. $-|-3|$ 3. $\left|\frac{-3}{2}\right|$

4. $\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|$ 5. $\frac{|4-10|}{2}$ 6. $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}$

<u>الحل:</u>

1. $-|6|=-6$

2. $-|-3|=-3$

3. $\left|\frac{-3}{2}\right|=\frac{3}{2}$

4. $\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1\times3-2\times2}{2\times3}\right|=\left|\frac{-1}{6}\right|=\frac{1}{6}$

5. $\frac{|4-10|}{2}=\frac{|-6|}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$

6. $\frac{5+|6-9|}{|7-3|}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة. والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الثالثة عشرة

بسم الله الرحمن الرحيم

هذه الحلقة هي الحلقة الثالثة عشر من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

القوة والأسس.

a^2 تمثل $a.a$ أو ممكن أن نكتبها $a \times a$ وممكن أن نكتب aa أو تكتب $a * a$

a^3 تمثل $a.a.a$

وبصورة عامة: إذا كان a عددًا حقيقيًا وكان n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a...a}_{n \text{ مرة}}$$

ونقول أن a^n هو القوة النونية للعدد a أو (a أس n)

ونسمي a الأساس و n الأس.

أمثلة توضيحية:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$(-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

ملاحظة:

$(-2)^2$ تعني $-2 \times -2 = 4$

-2^2 تعني $-4 = -(2 \times 2)$

لأي a فإن $a^1 = a$

قوانين الأسس:

إذا كان كل من $a,b\in\mathbb{R}$ وكان $m,n\in\mathbb{N}$ فإن:

1. $a^m.a^n=a^{m+n}$ $\qquad 5^6\times5^3=5^{6+3}=5^9$

2. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\,,a\neq0$ $\qquad \dfrac{6^4}{6^3}=6^{4-3}=6^1=6$

3. $\left(a^m\right)^n=a^{m\,n}$ $\qquad \left(7^2\right)^3=7^{2\times3}=7^6$

4. $\left(a.b\right)^n=a^n\,.b^n$ $\qquad \left(5\times3\right)^4=5^4\times3^4$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n},b\neq0$ $\qquad \left(\dfrac{6}{4}\right)^5=\dfrac{6^5}{4^5}$

مثال:

احسب كل مما يلي:

1. $-3^4=-\left(3\times3\times3\times3\right)=-81$
2. $\left(-4\right)^3=-4\times-4\times-4=-64$
3. $\left(\dfrac{2^3}{5}\right)^2=\dfrac{\left(2^3\right)^2}{5^2}=\dfrac{2^6}{25}=\dfrac{64}{25}$
4. $\dfrac{6\times6^4}{6^3}=\dfrac{6^{1+4}}{6^3}=\dfrac{6^5}{6^3}=6^2=36$
5. $\dfrac{5^5\times2^8}{5^3\times2^7}=\dfrac{5^5}{5^3}\times\dfrac{2^8}{2^7}=5^2\times2=25\times2=50$
6. $\dfrac{\left(10^2\times9\right)^2}{10^4\times9}=\dfrac{\left(10^2\right)^3\times9^3}{10^4\times9}=\dfrac{10^6\times9^3}{10^4\times9}=10^2\times9^2=100\times81=8100$

تعاريف:

١) لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ نعرف a^0 بأنه العدد 1 أي $a^0 = 1$.

٢) لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ولأي عدد طبيعي n نعرف a^{-n} بأنه:

$$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

استنتاج من التعريف:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{a/b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$$ حيث $a \neq 0, b \neq 0$

مثال:

أوجد ناتج ما يلي:

1. $-(-6)^0 = -1$

2. $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 \quad = 8$

4. $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

5. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{9}{16} \times 2^5 = \frac{9}{16} \times 32 = 18$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته إلى الحلقة القادمة بإذن الله.

المحاضرة الرابعة عشرة

بسم الله الرحمن الرحيم

هذه الحلقة هي الحلقة الرابعة عشر من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

الجذور:

العبارة $3^2 = 9$ تعني أن 9 هو القوة الثانية للعدد 3 بالمقابل نقول أن 3 هو الجذر التربيعي للعدد 9 ونكتب $\sqrt{9} = 3$.

أيضًا: $(-3)^2 = 9$ يعني أن -3 هو الجذر التربيعي السالب للعدد 9 ونكتب .

$$-\sqrt{9} = -3$$

تعميم: لأي عددين حقيقيين a و b بحيث $a^2 = b$ فإن a و $-a$ هما جذران للعدد b ونكتب:

$a = \sqrt{b}$ إذا كان a موجب.

أو $a = -\sqrt{b}$ إذا كان a سالب.

ويمكن تعميم ذلك للأسس الزوجية $4, 6, 8, ...$

فمثلاً: $(-2)^4 = 2^4 = 16$ يعني أن كلاً من $2, -2$ هما جذران من الرتبة الرابعة للعدد 16، ونكتب:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \qquad -\sqrt[4]{16} = -2$$

تعميم: لأي عدد زوجي n وعدد حقيقي a فإن a^n هو عدد حقيقي موجب b (حيث $a^n = b$) ونقول أن a هو جذر نوني للعدد b ونكتب:

$a = \sqrt[n]{b}$ إذا كان a موجب.

أو $a = -\sqrt[n]{b}$ إذا كان a سالب.

لو أخذنا الأسس الفردية ....,3,5,7 ، فنلاحظ مثلاً:

$4^3 = 64$ بينما $(-4)^3 \neq 64$

أي أن 46 له جذر تكعيبي واحد فقط هو $\sqrt[3]{64} = 4$

بينما $(-4)^3 = -64$ أي أن $\sqrt[3]{-64} = -4$

ونلاحظ أن إذا كان درجة الجذر زوجية لا ينبغي أن يكون داخل الجذر عدد سالب. أما إذا كان درجة الجذر فردية ممكن أن يكون داخل الجذر موجب أو سالب.

تعميم: لأي عدد فردي n ولأي عدد حقيقي a بحيث $a^n = b$ فإننا نقول أن a هو الجذر النوني الوحيد للعدد b.

نلاحظ في حالة n عدد فردي فإن لأي عدد حقيقي b سالب أو موجب له جذر نوني وحيد $\sqrt[n]{b}$.

اصطلاح:

إذا وجد الجذر النوني $\sqrt[n]{b}$ وليكن a فإننا نكتب $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ وللجذر النوني $b^{\frac{1}{n}}$ هناك حالتان:

الحالة الأولى:

عندما يكون n عدد زوجي و $b > 0$ فإن $\sqrt[n]{b} = a$ حيث a هو العدد الموجب الذي يحقق $a^n = b$.

فمثلاً: العدد 5 هو الجذر التربيعي للعدد 25 $(5 = \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}})$ لأن $(5^2 = 25)$.

أما إذا كان n عدد زوجي و $b < 0$ فإن $\sqrt[n]{b}$ عدد غير حقيقي. لأنه لا يمكن كتابة داخل الجذر عدد سالبًا إذا كان n عدد زوجي.

الحالة الثانية:

عندما تكون n عدد فردي فإن $\sqrt[n]{b} = a$ حيث a هو العدد الذي يحقق $a^n = b$، سواءً كان العدد b سالبًا أو موجبًا.

على سبيل المثال:

العدد 3 هو الجذر التكعيبي للعدد 27 $\quad (3 = \sqrt[3]{27} = 24^{\frac{1}{3}} \qquad 3^3 = 27)$

العدد $2-$ هو الجذر الخامس للعدد $32-$

$$(-2)^5 = -32 \qquad -2 = \sqrt[5]{-32} = (-32)^{\frac{1}{5}}$$

ملحوظات:

١) إذا كان $n = 2$ فنكتب $\sqrt{a}$ بدلاً من $\sqrt[2]{a}$.

٢) لأي عدد حقيقي a فإن: $\sqrt{a} = |a|$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \qquad \sqrt{5^2} = |5| = 5$$

٣) $-a^{\frac{1}{n}}$ تعني $-\sqrt[n]{a}$ ، بينما $(-a)^{\frac{1}{n}}$ تعني $\sqrt[n]{-a}$.

$-25^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{25} = -5$ $\qquad$ $(-25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-25}$ عدد غير حقيقي

$-8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = -2$ $\qquad$ $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

<u>قوانين الجذور:</u>

إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ أعداد حقيقية وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، بحيث أن $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ معرفان أي موجودان:

1. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b}$ $\qquad$ 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ,\ b \neq 0$

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة الجذور التالية:

1. $-16^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ 2. $(-27)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ 3. $8^{-\frac{1}{3}}$

4. $\sqrt{\frac{25}{9}}$ $\qquad$ 5. $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ $\qquad$ 6. $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}$

<u>الحل:</u>

1. $-16^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{16} = -4$ $\qquad$ 2. $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$

2. $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ 4. $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$

5. $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\qquad$ 6. $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته وإلى اللقاء إن شاء الله في الحلقة القادمة.

المحاضرة الخامسة عشرة

موضوع هذه الحلقة هو سنكمل درس الجذور ثم ندخل إلى درس اللوغاريتمات.

تعريف $a^{\frac{m}{n}}$:

إذا كان a عددًا حقيقيًا وكان n و m عددان طبيعيان فنعرف العدد $a^{\frac{m}{n}}$ بأنه:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ حيث $\sqrt[n]{a^m}$ معرف.

نلاحظ في هذه الحالة أن:

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ حيث $\sqrt[n]{a}$ معرف.

مثال:

أوجد قيمة الجذور التالية:

1. $\sqrt[4]{(-7)^4}$
2. $\sqrt[3]{(-6)^3}$
3. $\sqrt[3]{x^6}$
4. $4^{\frac{3}{2}}$
5. $27^{-\frac{2}{3}}$

الحل:

1. $\sqrt[4]{(-7)^4} = \sqrt[4]{7^4} = 7^{\frac{4}{4}} = 7$

2. $\sqrt[3]{(-6)^3} = (-6)^{\frac{3}{3}} = -6$

3. $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$

4. $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

5. $27^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{27}\right)^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

اللوغاريتمات:

لتكن a,b,c أعداد حقيقية حيث $a>0$ و $a\neq 1$ وليكن $a^b=c$ (بالطبع في هذه الحالة $c>0$). عندئذ نقول أن b هو لوغاريتم العدد c بالنسبة للأساس a، ونكتب ذلك رمزيًا بالصيغة: $\log_a c=b$

أي أن:

$c=a^b$ (الصورة الأسية)

تكافئ $\log_a c=b$ (الصورة اللوغاريتمية).

على سبيل المثال: $\log_2 8=3$ لأن $8=2^3$.

مثال: حول العبارات الأسية التالية إلى الصورة اللوغاريتمية:

1. $2^5=32$ 2. $3^4=81$

3. $6^0=1$ 4. $4^{-2}=\dfrac{1}{16}$

الحل:

1. $2^5=32 \Rightarrow \log_2 32=5$
2. $3^4=81 \Rightarrow \log_3 81=4$
3. $6^0=1 \Rightarrow \log_6 1=0$
4. $4^{-2}=\dfrac{1}{16} \Rightarrow \log_4\left(\dfrac{1}{16}\right)=-2$

مثال:

حول العبارات اللوغاريتمية التالية إلى الصورة الأسية:

1. $\log_6 36=2$ 2. $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)=-3$ 3. $\log_{10}10000=4$

الحل:

1. $\log_6 36=2 \Rightarrow 36=6^2$
2. $\log_3\left(\dfrac{1}{27}\right)=-3 \Rightarrow \dfrac{1}{27}=3^{-3}$
3. $\log_{10}10000=4 \Rightarrow 10000=10^4$

ملحوظات:

١) يمكن أن تكون قيمة اللوغاريتم b عددًا سالبًا أو موجبًا أو صفرًا، لكن الأساس a والعدد c داخل اللوغاريتم يكونان دائمًا عددين موجبين. أي أنه إذا كان $\log_a c = b$ فإن $c > 0$ و $a > 0$.

٢) اللوغاريتم للأساس واحد غير معروف أي لا يمكن كتابة $\log_1 c = b$ لأنه لجميع قيم b يكون $1^b = 1$.

$$\log_1 5 = b \qquad \Rightarrow \qquad 5 = 1^b = 1$$

وهذا استنتاج خاطئ ولذلك فالعبارة السابقة خاطئة.

٣) جرت العادة على كتابة $\log c = b$ ليعني $\log_{10} c = b$ ويسمى اللوغاريتم العشرين.

قوانين اللوغاريتمات:

لأي أعداد حقيقية موجبة a,b,c بحيث a عدد موجب لا يساوي الواحد ولأي عدد حقيقي r فإن:

1. $\log_a 1 = 0 \qquad \log_5 1 = 0 \quad , \quad \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$

2. $\log_a a = 1 \qquad \log_8 8 = 1 \quad , \quad \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1$

3. $\log_a (a.c) = \log_a b + \log_a c$

$$\log 5 + \log 2 = \log(5 \times 2) = \log 10 = 1$$

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة أما قوانين اللوغاريتمات فسنكملها في الحلقة القادمة وسنغطي أمثلة على اللوغاريتمات بشكل عام.

أرجو أن تكونوا قد استفدتم من هذه الحلقة وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة السادسة عشرة

موضوع هذه الحلقة هي تكملة لقوانين اللوغاريتمات وسنعرض أمثلة متنوعة على اللوغاريتمات وقوانينها.

4. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_c c, c\neq 0$

$$\log 20-\log 2=\log\left(\frac{20}{2}\right)=\log 10=1$$

5. $\log_a b^r = r\log_a b$

$$\log_2 8=\log_2 2^3=3\log_2 2=3\times 1=3$$

6. $\log_a b=\log_a c \iff \quad b=c$

أي إذا كان لوغاريتمين متساويين لأساس واحد يجب أن يكون داخل اللوغاريتمين يجب أن يتساويان.

$$\log_5 x=\log_5 2 \iff \quad x=2$$

مثال:

أوجد قيمة المقادير التالية بدون الآلة الحاسبة:

1. $\log_7 49$ 2. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)$

3. $\log\ 0.001$ 4. $\log\ 1000+\log 0.1$

الحل:

1. $\log_7 49=\log_7 7^2=2\log_7 7=2$
2. $\log_2\left(\frac{1}{16}\right)=\log_2\frac{1}{2^4}=\log_2 2^{-4}=-4\log_2 2=-4$
3. $\log\ 0.001=\log 10^{-3}=-3\log 10=-3$
4. $\log\ 1000+\log 0.1=\log 10^3+\log 10^{-1}=3\log 10+(-1)\log 10$

$$=3+(-1)=2$$

مثال:

أوجد قيمة x فيما يلي بدون الآلة الحاسبة:

1. $\log_3 x = 2$
2. $\log_5 x = -2$
3. $\log_2 16 = x$
4. $\log_x 1000 = 3$
5. $\log_x (5x-12) = 1$
6. $\log_{16} x = \frac{3}{2}$
7. $\log_2 (x+5) = 2\log_2 5$

الحل:

1. $\log_3 x = 2$

يجب تحويل الصيغة اللوغاريتمية إلى صورة أسية فتصبح:

$x = 3^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 9$

2. $\log_5 x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad \Rightarrow x = \frac{1}{25}$

3. $\log_2 16 = x \quad \Rightarrow \quad 16 = 2^x \quad \Rightarrow \quad 2^4 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x = 4$

لأنه لو تشابهت الأساسات في المتساوية تتساوى الأسس.

4. $\log_x 1000 = 3 \quad \Rightarrow \quad 1000 = x^3 \quad \Rightarrow \quad 10^3 = x^3 \Rightarrow \quad x = 10$

5. $\log_x (5x-12) = 1 \quad \Rightarrow \quad 5x - 12 = x$

$5x - x = 12 \quad \Rightarrow \quad 4x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

6. $\log_{16} x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 16^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 64$

7. $\log_2 (x+5) = 2\log_2 5 \quad \Rightarrow \quad \log_2 (x+5) = \log_2 5^2$

$\Rightarrow \quad x + 5 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 20$

مثال:

إذا كان $\log_a 2 = 0.69$ و $\log_a 3 = 1.1$ أوجد كل مما يلي:

1. $\log_a 6$ 2. $\log_a 12$ 3. $\log_a\left(\frac{9}{4}\right)$

الحل:

$$1.\ \log_a 6 = \log_a 2\times 3 = \log_a 2 \times \log_a 3 = 0.69 + 1.1 = 1.79$$

$$2.\ \log_a 12 = \log_a (4\times 3) = \log_a 4 + \log_a 3 = \log_a 2^2 + \log_a 3$$

$$= 2\log_a 2 + \log_a 3 = 2(0.69) + 1.1 = 1.38 + 1.1 = 2.48$$

$$3.\ \log_a\left(\frac{9}{4}\right) = \log_a 9 - \log_a 4 = \log_a 3^2 - \log_a 2^2 = 2\log_a 3 - 2\log_a 2$$

$$= 2\times(1.1) - 2\times(0.69) = 2.2 - 1.38 = 0.82$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة وأيضًا نصل إلى ختام الوحدة الأولى من مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية ونلقاكم بعون الله في الحلقة القادمة إن شاء الله ونرجو أن تكونوا استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة السابعة عشرة

سنبدأ في هذه الحلقة بالوحدة الثانية وهي العبارات الجبرية وسنأخذ فيها مفهوم العبارة الجبرية وكيفية جمع وطرح وضرب وقسمة العبارة الجبرية ونأخذ تحليل العبارة الجبرية.

العبارات الجبرية

تعاريف:

العمليات الجبرية

هي العمليات الأربعة الجمع والطرح والضرب والقسمة

المتغير:

هو عبارة عن رمز جبري يعبر عن أعداد حقيقية وعادة ما يرمز للمتغير بالأحرف $x, y, z, w, \ldots$ وأغلب المتغيرات تمثل بالأحرف الإنجليزية الصغيرة.

العبارة الجبرية:

هي صيغة مكونة من متغيرات وأعداد حقيقية مرتبطة فيما بينها بواسطة العمليات الجبرية والأسس والجذور.

أمثلة على العبارات الجبرية:

$$\frac{xy+z^{-2}}{y^2+\sqrt{x}} \qquad , \frac{2xy+\sqrt{2x}}{y-3} \qquad x^3+4x^2$$

الحدود الجبرية:

العبارة الجبرية ax^n حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $n \in \mathbb{N}$ ، تسمى بالحد الجبري في المتغير x والمعامل الثابت a .

على سبيل المثال: $\frac{5}{3}x^2 \quad , \quad -2x^5 \quad , \quad 3x$

أما العبارة الجبرية $ax^n y^m$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $n, m \in \mathbb{N}$، فتسمى بالحد الجبري في المتغيرين x, y والمعامل الثابت a .

على سبيل المثال: $\frac{6}{11}x^{10}y \quad , \quad -4x^3y^2 \quad , \quad 7xy$

والحد الجبري الخالي من المتغيرات يسمى بالحد المطلق.

على سبيل المثال: $0.43 \quad , \quad -6 \quad , \quad 32$

درجة الحد الجبري:

درجة الحد الجبري هي مجموع أسس متغيراته والحد المطلق درجته هي الصفر.

على سبيل المثال:

الحد الجبري	5	x	$-3x^2y^3$	$7xy^2z$
معامله	5	1	-3	7
درجته	0	1	5	4

العبارة الجبرية المركبة:

هي عبارة جبرية مكونة من حدين جبريين أو أكثر بينهم عملية جمع أو طرح.

على سبيل المثال:

$$2xy+z+3x^3 \quad , \quad 4x^2y^3-5xy^2 \quad , \quad x^3-x^2$$

كثيرة الحدود:

والعبارة الجبرية المركبة التي تحوي متغيرًا واحدًا فقط تسمى كثيرة حدود.

درجة العبارة الجبرية المركبة:

درجة العبارة الجبرية المركبة هي أعلى حد من حدودها الجبرية المكونة لها:

العبارة الجبرية	x^3-x^2	$4x^2y^2-5xy^2$	$2xy+z+3x^2$
درجتها	3	5	2

العمليات على العبارات الجبرية:

جمع وطرح العبارات الجبرية:

جمع وطرح العبارات الجبرية يتم عن طريق جمع وطرح الحدود المتشابهة.

والحدود المتشابهة هي الحدود التي لها نفس المتغيرات ونفس أسس المتغيرات للحدود.

على سبيل المثال:

$$5x^2+2x^2=7x^2$$

$$3xy^2-5xy^2=-2xy^2$$

لا يجوز جمع على سبيل المثال: $3x^2+x=4x^2$ فهذا خطأ لأنه يجب تشابه الأسس وليس تشابه المتغيرات فقط حتى يمكننا الجمع أو الطرح.

مثال:

أوجد حاصل جمع العبارات الجبرية التالية:

1. $6x^3-5x+2 \quad , \quad 2x^3+8x^2-3x$

2. $x-3y+5z \quad , \quad y-x+z$

3. $4x^2-3x+1 \quad , \quad 2x-2x^2 \quad , \quad 3x^2-5x-3$

الحل:

1. $6x^3-5x+2+2x^3+8x^2-3x$
$$=6x^3+2x^3+8x^2-5x-3x+2$$
$$=8x^3+8x^2-8x+2$$

2. $x-3y+5z+y-x+z$
$$=x-x-3y+y+5z+z$$
$$=-2y+6z$$

3. $4x^2-3x+1+2x-2x^2+3x^2-5x-3$
$$=4x^2-2x^2+3x^2-3x+2x-5x+1-3$$
$$=5x^2-6x-2$$

مثال:

أوجد حاصل طرح $5x^3+3x^2-6x+4$ من $8x^3-x^2-2x-1$.

الحل:

$$(8x^3-x^2-2x-1)-(5x^3+3x^2-6x+4)$$
$$=8x^3-x^2-2x-1-5x^3-3x^2+6x-4$$
$$=8x^3-5x^3-x^2-3x^2-2x+6x-1-4$$
$$=3x^3-4x^2+4x-5$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الثامنة عشرة

بسم الله الرحمن الرحيم

أخذنا في الحلقة الماضية العبارات الجبرية ومفهومها وأخذنا أيضًا بعض العمليات الجبرية عليها وهم الجمع والطرح.

أما في هذه الحلقة حاصل ضرب وقسمة العبارات الجبرية

ضرب حد جبري في آخر:

عند ضرب حد جبري في حد جبري آخر نضرب المعاملات معًا والمتغيرات معًا.

مع مراعاة جمع أسس الرموز المتشابهة حسب القاعدة:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

مثال:

أوجد ناتج عمليات الضرب التالية:

1. $5(4x^2)$ 2. $(3x^2)(6x^5)$

3. $(-2xy^2)(2x^3)$ 4. $(-4x^2y)(-3xy^3)$

الحل:

1. $5(4x^2) = (5\times 4)(x^2) = 20x^2$

2. $(3x^2)(6x^5) = (3*6)(x^2.x^5) = 18x^{2+5} = 18x^7$

3. $(-2xy^2)(2x^3) = (-2*4)(x \;.\; x^3)(y^2) = -8x^4y^2$

4. $(-4x^2y)(-3xy^3) = (-4*-3)(x^2.x)(y \;.\; y^3) = 12x^3y^4$

ضرب حد جبري في عبارة جبرية:

عند ضرب حد جبري في عبارة جبرية فإننا نضرب هذا الحد في كل حد من حدود العبارة الجبرية.

مثال:

أوجد ناتج عمليات الضرب التالية:

1. $4(2x-5y+3)$
2. $2x(3x+6)$
3. $-6x^2(x^4-3x+5)$
4. $3x^2y^3(2x^2-3xy-4y^2)$

الحل:

1. $4(2x-5y+3)=4(2x)+4(-5y)+4(3)$
   $=8x-20y+12$
2. $2x(3x+6)=2x(3x)+2x(6)=6x^2+12x$
3. $-6x^2(x^4-3x+5)=-6x^2(x^4)-6x^2(-3x)-6x^2(5)$
   $=-6x^6+18x^3-30x^2$
4. $3x^2y^3(2x^2-3xy-4y^2)=3x^2y^3(2x^2)-3x^2y^3(3xy)-3x^2y^3(4y^2)$
   $=6x^4y^3-9x^3y^4-12x^2y^5$

ضرب عبارة جبرية في أخرى:

عند ضرب عبارة جبرية في أخرى فإننا نضرب كل حد من العبارة الجبرية الأولى في العبارة الجبرية الثانية.

مثال:

أوجد ناتج عمليات الضرب التالية:

1. $(3x-2)(2x+4)$
2. $(5x^2+x)(3x-1)$
3. $(2x-2y)(3x+y)$

الحل:

1. $(3x-2)(2x+4)=3x(2x+4)-2(2x+4)$

$$=6x^2+12x-4x-8$$

$$=6x^2+8x-8$$

2. $(5x^2+x)(3x-1)=5x^2(3x-1)+x(3x-1)$

$$=15x^3-5x^2+3x^2-x$$

$$=15x^3-2x^2-x$$

3. $(2x-2y)(3x+y)=2x(3x+y)-2y(3x+y)$

$$=6x^2+2xy-6xy-2y^2$$

$$=6x^2-4xy-2y^2$$

بعض الحالات الشهيرة:

هناك بعض الحالات الشهيرة في عمليات الضرب والتي تتكرر كثيرًا ومنها:

$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ الفرق بين مربعين.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ المربع الكامل.

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ المربع الكامل.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى نهاية هذه الحلقة وسنأخذ في الحلقة القادمة أمثلة على هذه الحالات الشهيرة ونستودعكم الله والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته ونرجو أن تكونوا قد استفدتم من هذه الحلقة.

المحاضرة التاسعة عشرة

قد أخذنا في الحلقة الماضية بعض الحالات الشهيرة لضرب العبارات الجبرية وسنكمل هذه الحالات والأمثلة عليها وندخل إلى قسمة العبارات الجبرية.

مثال:

أوجد ناتج ما يلي باستخدام الحالات الخاصة السابقة:

1. $(2x-9y)(2x+9y)$
2. $(2x+3)^2$
3. $(x-5y)^2$

الحل:

1. $(2x-9y)(2x+9y)=(2x)^2-(9y)^2=2^2x^2-9^2y^2$
$=4x^2-81y^2$

وقد استخدمنا الحالة: $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ في حل الحالة السابقة

2. $(2x+3)^2=(2x)^2+2(2x)(3)+(3)^2$
$=4x^2+12x+9$

وقد استخدمنا الحالة: $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ في حل الحالة السابقة

3. $(x-5y)^2=(x)^2-2(x)(5y)+(5y)^2$
$=x^2-10xy+25y^2$

وقد استخدمنا الحالة: $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ في حل الحالة السابقة

قسمة حد جبري على آخر:

عند قسمة حد جبري على آخر نقسم المعاملات ونقسم المتغيرات المتشابهة مع مراعاة طرح الأسس حسب القاعدة:

$$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$$

مثال:

أوجد ناتج عمليات القسمة التالية:

1. $\frac{6x^2}{2}$ 2. $\frac{12x^3}{3x}$

3. $\frac{-6x^5}{8x^2}$ 4. $\frac{-15x^3y^6}{-3xy^2}$

الحل:

1. $\frac{6x^2}{2} = \frac{6}{2}x^2 = 3x^2$

2. $\frac{12x^3}{3x} = \frac{12}{3} \times \frac{x^3}{x} = 4x^2$

3. $\frac{-6x^5}{8x^2} = \frac{-6}{8} \times \frac{x^5}{x^2} = \frac{-3}{4}x^3$

4. $\frac{-15x^3y^6}{-3xy^2} = \frac{-15}{-3} \times \frac{x^3}{x} \times \frac{y^6}{y^2} = 5x^2y^4$

قسمة عبارة جبرية على حد جبري:

عند قسمة عبارة جبرية على حد جبري نقسم كل حد من حدود العبارة الجبرية على هذا الحد.

ونستخدم الخاصية. $\left(\frac{A \pm B}{C} = \frac{A}{C} \pm \frac{B}{C}\right)$

أي ممكن توزيع المقام على البسط.

مثال:

أوجد ناتج عمليات القسمة التالية:

1. $\frac{6x-10y+2}{2}$

2. $\frac{3x^4+12x^3}{6x^2}$

3. $\frac{4x^4y^3-10xy^5+8x^3y^3}{2xy^2}$

الحل:

1. $\frac{6x-10y+2}{2}=\frac{6x}{2}-\frac{10y}{2}+\frac{2}{2}=3x-5y+1$

2. $\frac{3x^4+12x^3}{6x^2}=\frac{3x^4}{6x^2}+\frac{12x^3}{6x^2}=\frac{3}{6}\times\frac{x^4}{x^3}+\frac{12}{6}\times\frac{x^3}{x^2}=\frac{1}{2}x^2+2x$

3. $\frac{4x^4y^3-10xy^5+8x^3y^3}{2xy^2}=\frac{4x^4y^3}{2xy^2}-\frac{10xy^5}{2xy^2}+\frac{8x^3y^3}{2xy^2}$
$=2x^3y-5y^3+4x^2y$

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة العشرون

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته، وهذه الحلقة العشرون من سلسلة حلقات شرح مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

تحليل العبارات الجبرية:

تحليل العبارة الجبرية هو تحويلها كحاصل ضرب عبارات جبرية أخرى.

وسنقتصر على تحليل العبارات الجبرية التي هي كثيرات الحدود.

فعلى سبيل المثال: ممكن كتابة x^2-1 كحاصل الضرب:

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

ونقول أن $(x-1)$ و $(x+1)$ عوامل لكثيرة الحدود x^2-1 .

التحليل بأخذ العامل المشترك الأكبر:

وتتم بإخراج العامل المشترك العددي الأكبر من كل حد وبإخراج الرمز الجبري المشترك بأكبر قوة من كل الحدود.

على سبيل المثال: إذا أردنا تحليل $8x^3+10x$ فإن:

$$8x^3=2\times2\times x\times x\times x$$

$$10x=2\times5\times x$$

وبالتالي العامل المشترك الأكبر هو $2x$ ويكون تحليل $8x^3+10x$ كالتالي:

$$8x^3+10x=(2x)(4x^2+5)$$

وكثير الحدود $4x^2+5$ ناتج قسمة كثير الحدود $8x^3+10x$ على المشترك الأكبر $2x$ ، كالتالي:

$$\frac{8x^3+10x}{2x}=\frac{8x^3}{2x}+\frac{10x}{2x}=4x^2+5$$

مثال:

حلل العبارات الجبرية التالية بأخذ العامل المشترك الأكبر:

1. $2x+x^2$
2. $3x^2-6xy$
3. $9x^2y^3-6x^3y^2+3x^4y$
4. $2x(y-z)-7(y-z)$

الحل:

1. $2x+x^2$

$$2x=2*x$$
$$x^2=x*x$$

العامل المشترك الأكبر هو x

$$\frac{2x+x^2}{x}=\frac{2x}{x}+\frac{x^2}{x}=2+x$$
$$\left(2x+x^2\right)=\left(x\right)\left(2+x\right)$$

2. $3x^2-6xy$

$$3x^2=3*x*x$$
$$6xy=2*3*x*y$$

العامل المشترك الأكبر هو $3x$

$$\frac{3x^2-6xy}{3x}=\frac{3x^2}{3x}-\frac{6xy}{3x}=x-2y$$
$$3x^2-6xy=\left(3x\right)\left(x-2y\right)$$

3. $9x^2y^3-6x^3y^2+3x^4y$

$$9x^2y^3=3*3*x*x*y*y*y$$
$$6x^3y^2=2*3*x*x*x*y*y$$
$$3x^4y=3*x*x*x*x*y$$

العامل المشترك هو $3x^2y$

$$\frac{9x^2y^3-6x^3y^2+3x^4y}{3x^2y}=3y^2-2xy+x^2$$
$$9x^2y^3-6x^3y^2+3x^4y=\left(3x^2y\right)\left(3y^2-2xy+x^2\right)$$

4. $2x(y-z)-7(y-z)$

$$2x(y-z)=2*x*(y-z)$$

$$7(y-z)=7*(y-z)$$

العامل المشترك الأكبر هو $(y-z)$

$$\frac{2x(y-z)-7(y-z)}{(y-z)}=2x-7$$

$$2x(y-z)-7(y-z)=(y-z)\,(2x-7)$$

التحليل بالتجزئة:

ومن الممكن أحيانًا عندما يكون هناك أربعة حدود أن نستخدم طريقة تسمى التحليل بالتجزئة. فنجزئ الحدود الأربعة إلى مجموعتين بحيث نضع كل حدان لهما عامل مشترك في مجموعة.

مثال: حلل ما يلي:

1. $2xy-4wx+yz-2wz$
2. $2xy+15zw-3xw-10yz$

الحل:

1. $2xy-4wx+yz-2wz=(2xy-4wx)+(4z-2wz)$

$$=2x(y-2w)+z(y-2w)$$

$$=(y-2w)\,(2x+z)$$

2. $2xy+15zw-3xw-10yz=(2xy-3xw)+(15zw-10yz)$

$$=x(2y-3w)+5z(3w-2y)=x(2y-3w)-5z(2y-3w)$$

$$=(2y-3w)\,(x-5z)$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا قد استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الحادية والعشرون

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته، وهذه الحلقة هي الحلقة الواحدة والعشرون من سلسلة حلقات مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

ونتابع أيضًا في وحدة العبارات الجبرية وموضوع حلقة اليوم هي ثلاثي الحدود أي كيفية تحليل ثلاثي الحدود.

ثلاثي الحدود:

هو أي كثيرة حدود من الدرجة الثانية في المتغير x وتكون على الصورة:

$$ax^2+bx+c$$

وسميت من الدرجة الثانية لأن أعلى حد هو x^2 .

حيث $a,b,c\in\mathbb{R}$ و $a\neq 0$.

لتحليل ثلاثي الحدود هناك حالتين إما $a=1$ أو $a\neq 1$.

الحالة الأولى:

إذا كان معامل x^2 هو الواحد $(a=1)$

ثلاثي الحدود يصبح على الصورة x^2+bx+c وخطوات تحليله هي:

١. ترتيب الحدود تنازليًا حسب قوى x .

٢. نبحث عن عددين d و e بحيث $c=d.e$ و $b=d+c$.

٣. ينتج لدينا $x^2+bx+c=(x+d)(x+e)$.

ملحوظات:

١. إذا كان الحد الأخير c موجبًا فإن العددين d و e لهما نفس الإشارة وإشارتهما هي نفس إشارة العدد b. أي إذا كان c موجبًا والعدد b موجبًا فإن العددين d و e يكونان موجبان. وإذا كان c موجبًا والعدد b سالبًا فإن العددين d و e يكونان سالبًا.

٢. أما إذا كان الحد الأخير c سالبًا فإن العددين d و e مختلفي الإشارة وأكبرهما قيمة عددية له نفس إشارة العدد b .

مثال:

حلل كل مما يلي:

1. x^2+5x+6
2. $x^2-7x+10$
3. x^2+2x-8
4. x^2-x-12

الحل:

1. x^2+5x+6

$$2\times3=6$$
$$2+3=5$$

ونلاحظ أن إشارة العدد 6 موجبة معنى ذلك أن العددين $2,3$ يكونان لهما نفس الإشارة ولأن العدد 5 إشارته موجبة فإن العددين $2,3$ يكونان موجبان.

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

2. $x^2-7x+10$

$$-5\times-2=10$$
$$-5+-2=-7$$

ونلاحظ أن إشارة العدد 10 موجبة معنى ذلك أن العددين $-5,-2$ يكونان لهما نفس الإشارة ولأن العدد -7 إشارته سالبة فإن العددين $-5,-2$ يكونان سالبان.

$$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$$

3. x^2+2x-8

$$4\times-2=-8$$
$$4+(-2)=2$$

ونلاحظ أن إشارة العدد -8 سالبة معنى ذلك أن العددين $4,-2$ يكونان لهما مختلفان في الإشارة ولأن العدد $+2$ إشارته موجبة فإن العددين $4,-2$ يكونان العدد الأكبر له نفس إشارة العدد $+2$ أي موجبة والعدد الآخر يخالفه في الإشارة أي سالبة.

$$x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$$

4. $x^2 - x - 12$

$$(-4)\times(3) = -12$$
$$(-4)+3 = -1$$

ونلاحظ أن إشارة العدد -12 سالبة معنى ذلك أن العددين $-4,3$ يكونان لهما مختلفان في الإشارة ولأن العدد -1 إشارته سالبة فإن العددين $-4,3$ يكونان العدد الأكبر له نفس إشارة العدد -1 أي سالبة والعدد الآخر يخالفه في الإشارة أي موجبة.

$$x^2 - x - 12 = (x-4)\,(x+3)$$

الحالة الثانية:

إذا كان معامل x^2 لا يساوي واحد $(a \neq 1)$ فإننا نستخدم طريقة المقص.

مثال: حلل ما يلي:

$$6x^2 + 11x - 10$$

الحل:

لتحليل $6x^2 + 11x - 10$ نحلل الحد الأول $(6x^2)$ إلى عاملين كلاهما يحتوي على المتغير x

إما $6x^2 = (6x)\,(x)$ أو $6x^2 = (3x)\,(2x)$

ونحلل الحد الأخير (-10) إلى عوامله الممكنة:

إما
$$-10 = (-10)\,(1)$$
$$= (10)\,(-1)$$

أو
$$-10 = (-5)\,(2)$$
$$= (5)\,(-2)$$

ثم نرسم سهمين متقاطعين ونضع كل تحليل لـ $(6x^2)$ مع كل تحليل للحد الأخير (-10) كالتالي:

$6x$ $\quad -10$ x $\quad 1$ $(6x+1)(x-10)$	$6x$ $\quad 10$ x $\quad -1$ $(6x-1)(x+10)$	$6x$ $\quad -5$ x $\quad 2$ $(6x+2)(x-5)$	$6x$ $\quad 5$ x $\quad -2$ $(6x-2)(x+5)$
$3x$ $\quad -10$ $2x$ $\quad 1$ $(3x+1)(2x-10)$	$3x$ $\quad 10$ $2x$ $\quad -1$ $(3x-1)(2x+10)$	$3x$ $\quad -5$ $2x$ $\quad 2$ $(3x+2)(2x-5)$	$3x$ $\quad 5$ $2x$ $\quad -2$ $(3x-2)(2x+5)$

ثم نضرب كل قوسين لنجد أيهما يكون حاصل ضربهما $6x^2+11x-10$. وبالتالي فإن بعد عمليات الضرب يكون:

$$6x^2+11x-10=(3x-2)(2x+5)$$

الفرق بين مربعين:

يقال للعبارة الجبرية $x^2 - y^2$ بأنها فرق بين مربعين. وتحليل على الصيغة:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

مثال:

حلل كل مما يلي:

1. $x^2 - 4$
2. $1 - 9x^2$
3. $4x^2 - 25y^2$
4. $16x^2y^2 - \frac{1}{36}$
5. $18x^3 - 8x$
6. $25x^4 - 49y^6$

الحل:

1. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

2. $1 - 9x^2 = (1)^2 - (3x)^2 = (1-3x)(1+3x)$

3. $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x-5y)(2x+5y)$

4. $16x^2y^2 - \frac{1}{36} = (4xy)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \left(4xy - \frac{1}{6}\right)\left(4xy + \frac{1}{6}\right)$

5. $18x^3 - 8x = 2x(9x^2 - 4) = 2x((3x)^2 - 2^2) = 2x(3x-2)(3x+2)$

6. $25x^4 - 49y^6 = (5x^2)^2 - (7y^3)^2 = (5x^2 - 7y^3)(5x^2 + 7y^3)$

والى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء إن شاء الله في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الثانية والعشرون

أعزائي الطلبة هذه الحلقة هي الحلقة الثانية والعشرين من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

نبقى في الوحدة الثانية وهي العبارات الجبرية وموضوع اليوم هو تحليل فرق مكعبين ومجموع مكعبين.

<u>فرق ومجموع مكعبين:</u>

يقال للعبارة الجبرية $x^3 - y^3$ بأنها فرق بين مكعبين وللعبارة الجبرية $x^3 + y^3$ بأنها مجموع مكعبين وتحليل هاتين العبارتين الجبريتين على الصيغتين:

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

<u>مثال:</u>

حلل كل مما يلي:

1. $x^3 - 8$
2. $27x^3 + 1$
3. $x^6 - 125y^3$
4. $3x^3 - 24$
5. $64x^3 + \frac{1}{27}y^3$
6. $2x^4 + 16xy^3$

<u>الحل:</u>

1. $x^3 - 8 = (x)^3 - (2)^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$

2. $27x^3 + 1 = (3x)^3 + (1)^3$
   $= (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$

3. $x^6 - 125y^3 = (x^2)^3 - (5y)^3 = (x^2 - 5y)(x^4 + 5x^2y + 25y^2)$

4. $3x^3 - 24 = 3(x^3 - 8) = 3((x)^3 - (2)^3) = 3(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

5. $64x^3 + \frac{1}{27}y^3 = (4x)^3 + \left(\frac{1}{3}y\right)^3 = \left(4x + \frac{1}{3}y\right)\left(16x^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{1}{9}y^2\right)$

6. $2x^4 + 16xy^3 = 2x(x^3 + 8y^3) = 2x((x)^3 + (2y)^3)$
   $= (2x)(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

مثال:

حلل كل مما يلي:

1. $x^3 - x^2 + x - 1$
2. $x^2 - 9x - 36$
3. $6x^2 + 7x + 2$
4. $x^2 - (2x + y)^2$
5. $6x^4 + 6000x$

الحل:

1. $x^3 - x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2) + (x - 1) = x^2(x-1) + (x-1)$

$= (x-1)(x^2+1)$

2. $x^2 - 9x - 36$

$-12 * 3 = -36$

$-12 + 3 = -9$

$x^2 - 9x - 36 = (x-12)(x+3)$

3. $6x^2 + 7x + 2$

بتحليل الحد الأول والحد الأخير:

$$2 = 2*1$$
$$6x^2 = 6x * x$$
$$= 3x * 2x$$

وبعد أن ننفذ طريقة المقص في أخذ جميع الحالات الممكنة نجد أن:

$6x^2 + 7x + 2 = (2x+1)(3x+2)$

4. $x^2 - (2x+y)^2 = (x - (2x+y))(x + (2x+y)) = (-x+y)(3x+y)$

5. $6x^4 + 6000x = (6x)(x^3 + 1000) = (6x)((x)^3 + (10)^3)$

$= (6x)(x+10)(x^2 - 10x + 100)$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الثالثة والعشرون

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته، هذه الحلقة هي الحلقة الثالثة والعشرون من سلسلة حلقات شرح مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

أما موضوع هذه الحلقة سنبدأ بالوحدة الثالثة وهي المعادلات وسنأخذ ثلاثة موضوعات من المعادلات وهي: حل معادلة خطية في متغير واحد وحل معادلة خطية في متغيرين وحل معادلة التربيعية أو من الدرجة الثانية.

سنبدأ في هذه الحلقة بالمعادلة الخطية في متغير واحد.

المعادلات

تعريف:

المعادلة في المجهول x عبارة عن صيغة جبرية تعبر عن علاقة التساوي بين عبارتين رياضيتين تحوي أحدهما أو كلاهما المجهول x .

ونذكر من أمثلة المعادلات:

$$2x+5=9 \longrightarrow (1)$$

عندما نعوض $x=1$ سنحصل على الآتي:

$$2x+5=9$$
$$2(1)+5=9$$

وهذه علاقة خاطئة لأن:

$$2(1)+5=7\neq 9$$

ولا تساوي العدد 9 وإنما تساوي العدد 7

ولكن إذا عوضنا عن x بالعدد 2 نجد التالي:

$$x=2$$
$$2x+5=9$$
$$2(2)+5=9$$
$$9=9$$

وبالفعل فإن الطرفين يصبحان متساويان فيصبح العدد 2 هو حل للمعادلة لأنه لو عوضنا عن x بالعدد 2 لحقق تساوي الطرفين للمعادلة.

$$x^2 = 9 \longrightarrow (2)$$

إذا كانت $x = 3$ فنعوض ونجد الآتي:

$$x^2 = 9$$

$$3^2 = 9$$

وأيضًا لو عوضنا $x = -3$ سنجد أن المعادلة تتحقق والمعادلة صحيحة كالآتي:

$$x^2 = 9$$

$$(-3)^2 = 9$$

وتكتب الحلول للمعادلة داخل مجموعة وتسمى مجموعة الحلول

مجموعة الحلول = $\{3,-3\}$

$$x + 3 = x + 4 \longrightarrow (3)$$

المعادلة الثالثة ليس لها حلول

وهذه ممكن أن تكون أنواع من المعادلات.

<u>حل معادلة خطية في مجهول واحد:</u>

المعادلة الخطية هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة:

$ax + b = 0$ حيث a, b أعداد حقيقية و $a \neq 0$

ولحل المعادلة الخطية نضع المجهول x في طرف وباقي القيم في طرف آخر، ونجري عمليات تبسيط على المعادلة للوصول إلى نتيجة الصورة $x = c$.

مثال:

حل المعادلات التالية:

1. $3x-1=5$
2. $4x-5=2x+3$
3. $2(x+10)+16=9-3(2x-1)$

الحل:

1. $3x-1=5$

$$3x=5+1$$

$$3x=6 \qquad \div 3$$

$$\frac{3x}{3}=\frac{6}{3}$$

$$x=2$$

وللتأكد أن العدد 2 أنه صحيح يمكن التعويض به في متغير المعادلة للتأكد من تساوي طرفي المعادلة كالآتي:

$$3x-1=3(2)-1=6-1=5$$

وفي النهاية وصلنا إلى الطرف الأيسر فتأكدنا أن العدد 2 يحقق تساوي طرفي المعادلة فالعدد 2 كحل للمعادلة هو صحيح.

2. $4x-5=2x+3$

$$4x-2x=3+5$$

$$2x=8 \qquad \div 2$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$$

$$x=4$$

للتحقق

$$x=4$$

الطرف الأيمن

$$2x+3=2(4)+3=11$$

الطرف الأيسر

$$4x-5=4(4)-5=11$$

وبذلك نجد أن الطرفين متساويان عندما نعوض بالعدد 4 في كلا الطرفين فيكون العدد 4 حل صحيح للمعادلة.

3. $2(x+10)+16=9-3(2x-1)$

$$2x+20+16=9-6x+3$$

$$2x+36=-6x+12$$

$$2x+6x=12-36$$

$$8x=24 \qquad \div 8$$

$$x=-3$$

للتحقق:

$$x=-3$$

الطرف الأيمن

$$9-3(2x-1)=9-3(2(-3)-1)=9-3(-7)=9+21=30$$

الطرف الأيسر

$$2(x+10)+16=2(-3+10)+16=2(7)+16=14+16=30$$

ونلاحظ تساوي الطرفين عند التعويض بالعدد $(3-)$ فيكون العدد $(3-)$ حل صحيح للمعادلة.

<u>مثال:</u>

حل المعادلة التالية:

$$3x+2(1-x)=4-3x$$

<u>الحل:</u>

$$3x+2(1-x)=4-3x$$

$$3x+2-2x=4-3x$$

$$x+2=4-3x$$

$$x+3x=4-2$$

$$4x=2 \qquad \div 4$$

$$x=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \qquad x=\frac{1}{2}$$

وللتحقق من صحة الحل نعوض عن قيمة x بالعدد $\frac{1}{2}$ في الطرفين فنجد أن القيمة الناتجة تساوي $\frac{5}{2}$ في كلا الطرفين ويكون العدد $\frac{1}{2}$ حل صحيح للمعادلة.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها ونلقاكم في الحلقة القادمة إن شاء الله والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الرابعة والعشرون

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته، هذه الحلقة هي الحلقة الرابعة والعشرون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وفي هذه الحلقة نستمر في الوحدة الثالثة وهي المعادلات

حل معادلتين خطيتين في مجهولين:

المعادلة الخطية في مجهولين $x\ ,\ y$ تكون على الصورة:

$$ax + by = c$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية وكلا من العددين a, b لا يساوي الصفر.

وإذا كان لدينا المعادلتين الخطيتين في مجهولين x, y :

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

نحتاج إلى تحديد قيم هذين المجهولين اللذين يحققان المعادلتين.

الطريقة الأولى:

استنتاج قيمة أحد المجهولين بدلالة المجهول الآخر من إحدى المعادلتين ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الثانية.

مثال:

أوجد قيمة x, y التي تحقق المعادلتين:

$$2x + 3y = 2 \longrightarrow (1)$$

$$x - y = 6 \longrightarrow (2)$$

الحل:

المعادلة (2)

$$x - y = 6$$

$$x = 6 + y$$

المعادلة (1)

$$2x + 3y = 2$$

$2(6+y)+3y=2$

$12+2y+3y=2$

$12+5y=2$

$5y=2-12$

$5y=-10 \qquad \div 5 \qquad \Rightarrow y=-2$

$x=6+y \qquad \Rightarrow y=-2$

$x=6+(-2)=4$

$x=4$

حل المعادلتين يتحقق عندما:

$y=-2 \qquad x=4$

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة x, y التي تحقق المعادلتين:

$3x+y=-7 \longrightarrow (1)$

$2x-3y=12 \longrightarrow (2)$

<u>الحل:</u>

من المعادلة الأولى نستنتج أن:

$3x+y=-7$

$y=-7-3x$

ومن المعادلة الثانية:

$2x-3y=12$

$2x-3(-7-3x)=-12$

$2x+21+9x=-12$

$11x+21=-12$

$11x=-12-21$

$11x = -33 \qquad \div 11$

$x = -3$

وبالتعويض في المعادلة الأولى لإيجاد قيمة y :

$$y = -7 - 3x$$
$$y = -7 - 3(-3)$$
$$= -7 + 9 = 2$$
$$y = 2$$

حل المعادلتين هو: $x = -3 \ , \ y = 2$

ويمكن التحقق من هذين الحلين بالتعويض بهما في المعادلتين فيتحقق صحة كل من المعادلتين فإذا عوضنا بهما في المعادلة الأولى نجد أن الجواب يساوي الطرف الآخر وهو $7-$ وإذا عوضنا بهما في المعادلة الثانية نجد أن الجواب يساوي الطرف الآخر للمعادلة وهو $12-$.

<u>الطريقة الثانية:</u>

استبعاد أحد المجهولين بطرح المعادلتين بعد توحيد كل من الإشارة الجبرية وقيمة معامل المجهول الذي نريد استبعاده.

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة x, y التي تحقق المعادلتين:

$$3x - y = 5 \qquad \longrightarrow (1)$$
$$x + 2y = 4 \qquad \longrightarrow (2)$$

<u>الحل:</u>

وهنا نريد استبعاد المجهول y فنضرب المعادلة الأولى في $2-$ فتصبح المعادلتين الآتيتين:

$$3x - y = 5 \qquad \longrightarrow (1) \qquad *(-2)$$
$$-6x + 2y = -10 \qquad \longrightarrow (3)$$

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (2)

$$-6x+2y=-10 \longrightarrow (3)$$
$$x+2y=4 \longrightarrow (2)$$

$$-7x=-14$$
$$\frac{-7x}{-7}=\frac{-14}{-7}=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=2}$$

ولإيجاد قيمة y نعوض عن قيمة x في المعادلة رقم (1) أو المعادلة رقم (2).

وبالتعويض في المعادلة رقم (1):

$$x=2$$
$$3x-y=5 \longrightarrow (1)$$
$$3(2)-y=5$$
$$6-y=5$$
$$-y=-1 \qquad \div(-1)$$
$$y=1$$

ويمكن التعويض أيضًا في المعادلة رقم (2) لإيجاد قيمة y كما يلي:

$$x=2$$
$$x+2y=4$$
$$2+2y=4$$
$$2y=4-2$$
$$2y=2 \qquad \div 2$$
$$y=1$$

مثال:

أوجد قيم x, y التي تحقق المعادلتين:

$$4x+3y=13 \longrightarrow (1)$$
$$3x+2y=9 \longrightarrow (2)$$

الحل:

وهنا نلاحظ لا يمكن ضرب المعادلة الأولى أو الثانية في أي قيمة ليكون أي من المجهولين متساوين في القيمة لاستبعاده ولذلك إذا أردنا أن نحذف المجهول x فالحل أن نضرب المعادلة الأولى في معامل x الذي في المعادلة الثانية ونضرب المعادلة الثانية في معامل x الذي في المعادلة الأولى كما يلي:

$$12x+9y=39 \longrightarrow (3)$$
$$12x+8y=36 \longrightarrow (4)$$

وبالطرح $(3)-(4)$ $\quad y=3$

ولإيجاد قيمة x نعوض عن قيمة y في المعادلة الأولى:

$$y=3$$
$$4x+3y=13 \longrightarrow (1)$$
$$4x+3(3)=13$$
$$4x+9=13$$
$$4x=13-9$$
$$4x=4 \qquad \div 4$$
$$x=1$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية

$$y=3$$
$$3x+2y=9 \longrightarrow (2)$$

$$3x+2(3)=9$$

$$3x+6=9$$

$$3x=9-6$$

$$3x=3 \qquad \div 3$$

$$x=1$$

ويمكن التحقق من صحة الحل في المعادلتين بالتعويض بهذه الحلول في المعادلتين.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الخامسة والعشرون

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته هذه الحلقة هي الحلقة الخامسة والعشرون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

ونتابع في الوحدة الثالثة وهي المعادلات وموضوع الحلقة هو حل المعادلة التربيعية أو حل المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد.

<u>حل معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد:</u>

معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد x هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ ، وتحل هذه المعادلة باستخدام القانون العام:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

نسمى المقدار $b^2 - 4ac$ بالمميز.

المميز يحدد هل للمعادلة جذور (حلول) وعددها إذا وجدت حسب القاعدة التالية:

١. $b^2 - 4ac > 0$ للمعادلة جذرين (حلان) حقيقيين.
٢. $b^2 - 4ac = 0$ للمعادلة (حل) حقيقي واحد.
٣. $b^2 - 4ac < 0$ فلا يوجد جذور (حلول) حقيقية للمعادلة.

مثال:

حل كل من المعادلات التالية:

1. $2x^2 = 3x + 2$
2. $x^2 - 6x + 9 = 0$
3. $3x^2 + 2x = -1$
4. $2x^2 + 7x + 3 = 2x + 6$

الحل:

1. $2x^2 = 3x + 2$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$a = 2 \qquad b = -3 \qquad c = -2$$

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

إذا يوجد حلان حقيقيان للمعادلة

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x = 2$$

$$x = \frac{3-5}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

حلان المعادلة هما:

$$\left\{-\frac{1}{2}\ ,\ 2\right\}$$

2. $x^2-6x+9=0$

$a=1 \qquad b=-6 \qquad c=9$

$b^2-4ac=(-6)^2-4(1)(9)=36-36=0$

وبالتالي بما أن قيمة المميز يساوي 0 فإن الجذر للمعادلة واحد فقط وهو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{=-(-6)\pm\sqrt{0}}{2(1)}=\frac{6}{2}=3 \qquad \Rightarrow x=3$$

3. $3x^2+2x=-1$

$3x^2+2x+1=0$

$a=3 \qquad b=2 \qquad c=1$

$b^2-4ac=(2)^2-4(3)(1)=4-12=-8$

ولاحظ هنا بما أن قيمة المميز سالبة فلا توجد للمعادلة جذور حقيقية.

ليس للمعادلة جذور حقيقية.

4. $2x^2+7x+3=2x+6$

$2x^2+7x+3-2x-6=0$

$2x^2+5x-3=0$

$a=2 \qquad b=5 \qquad c=-3$

$b^2-4ac=(5)^2-4(2)(-3)=25+24=49$

وقيمة المميز موجبة فيصبح هناك حلان للمعادلة.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(5)\pm\sqrt{49}}{2(2)}=\frac{-5\pm7}{4}$$

$$x=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

$$x=-3$$

$$x=\frac{-5+7}{4}=\frac{4}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2}$$

إذاً حلان المعادلة هما: $\left\{\frac{1}{2}\,,\,-3\right\}$

مثال:

حل كل من المعادلات التالية: (وسوف نتركه للطلاب حتى يتدربوا على حل المعادلات التربيعية من الدرجة الثانية في مجهول واحد)

1. $-11x^2=10x-1$
2. $5x^2+5x+4=2$
3. $x^2-4x+8=2x-2$

ويجب أن ننبه الطلاب في بداية الحل أن يضعوا المعادلة في الصورة العامة ونوجد قيمة المميز الذي يبين هل هناك حلول حقيقية أم لا أم يوجد حل واحد.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة وأيضًا نصل إلى ختام هذه الوحدة وهي وحدة المعادلات ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها ونلقاكم بعون الله في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة السادسة والعشرون

نصل إلى الحلقة السادسة والعشرون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وفي هذه الحلقة ستكون الوحدة الرابعة وهي عنوانها الهندسة التحليلية

الهندسة التحليلية

المستوى الديكارتي:

كما يتضح في الشكل الواضح أمامنا والذي يتكون من خطين متعامدين ممثلاً على كل منهما مجموعة الأعداد الحقيقية أحدهما أفقي ويسمى محور X والآخر عمودي ويسمى محور Y .

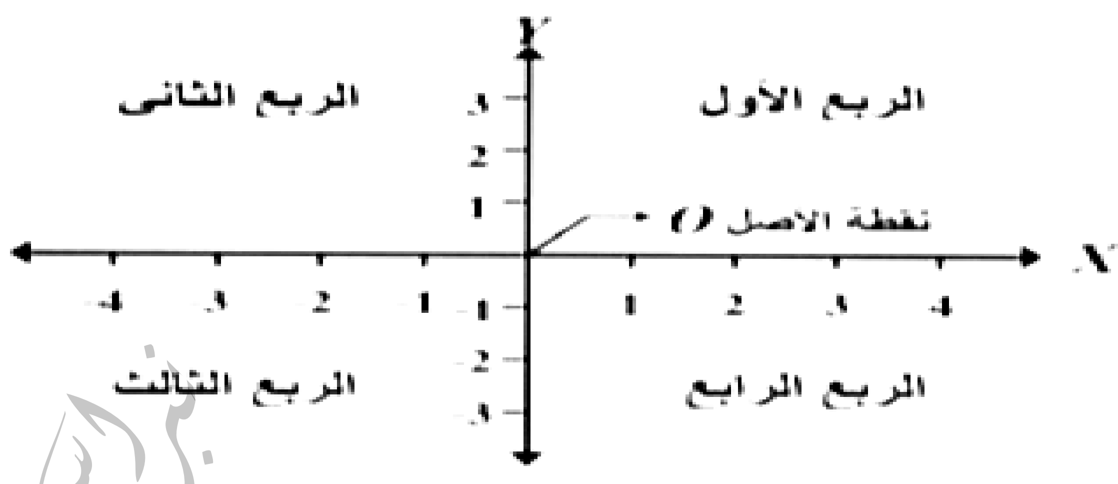
لاحظ هنا الأفقي وهو محور X والعمودي هو محور Y ويتقطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ونلاحظ أن هذه النقطة التي يتقاطع فيها الخطين هما نقطة الأصل وعادة نرمز لها بالرمز 0 ويسمى المحورين بالمحاور الإحداثية.

وتسمى الأعداد الواقعة على محور X بإحداثيات X . أو تسمى بالإحداثي السيني.

وتكون إحداثيات محور X الواقعة على يمين نقطة الأصل موجبة. وعلى يسار نقطة الأصل تكون سالبة.

والأعداد الواقعة على محور Y بالإحداثي Y أو بالإحداثيات الصادية كما نلاحظ هنا ونشاهد وتكون إحداثيات محور Y الواقعة فوق نقطة الأصل موجبة والواقعة تحت نقطة الأصل سالبة.

ومن الملاحظ أن المحاور الإحداثية تقسم المستوى الديكارتي إلى أربعة أقسام وكل قسم يسمى ربع. وترتيب الأربع أرباع هو عكس عقارب الساعة.



<u>الزوج المرتب:</u>

ليكن لدينا عددين حقيقيين مثل a , b نعرف (a,b) بالزوج المرتب. وذلك لترتيب الأعداد فالعدد الأول a والعدد الثاني b فالزوج المرتب (a,b) يختلف عن الزوج المرتب (b,a).

وفي هذه الحالة لأي زوجين (a,b) ، (c,d) فإن:

(a,b) لا يساوي (c,d) إلا في حالة أن $a=c$, $b=d$

(a,b) لا يساوي (b,a) إلا في حالة أن $a=b$

على سبيل المثال: $(2,3)\neq(3,2)$

<u>تمثيل نقطة في المستوى الديكارتي:</u>

النقطة P في المستوى الديكارتي عبارة عن زوج مرتب من الأعداد الحقيقية.

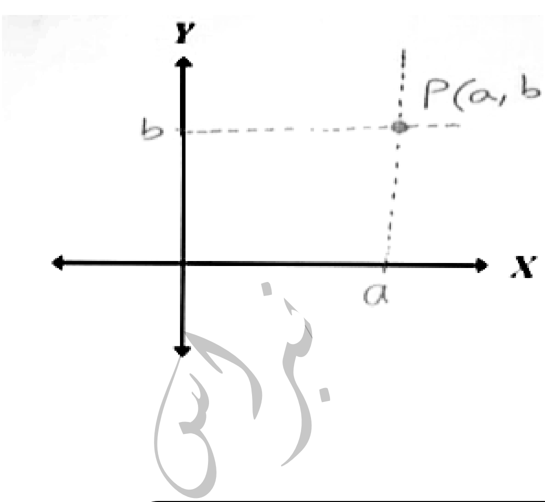
وللنقطة P (a,b) نسمي العدد الأول a الإحداثي السيني والعدد الثاني b الإحداثي الصادي.

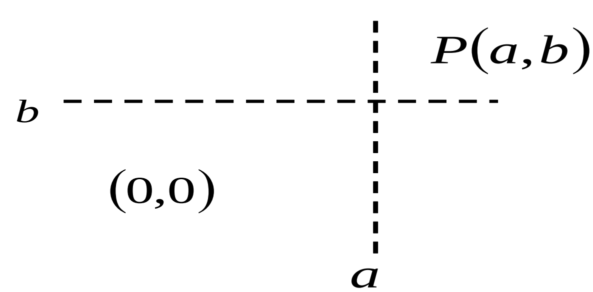
على سبيل المثال:

النقطة $P(3,1)$ لها الإحداثي السيني $x=3$ والإحداثي الصادي $y=1$.

تمثيل النقطة $P(a,b)$ هندسيًا على المستوى الديكارتي:

فنحدد العدد a على المحور X ونحدد العدد b على المحور Y ونرسم خطًا عموديًا على المحور X من النقطة a ونرسم أيضًا خطًا عموديًا على المحور Y فتكون نقطة تقاطع الخطين العمودين المرسومين هما النقطة $P(a,b)$.





مثال:

مثل النقاط التالية في المستوى الديكارتي:

$A(3,1)$ $B(-4,2)$ $C(-1,-2)$ $D(3,-3)$

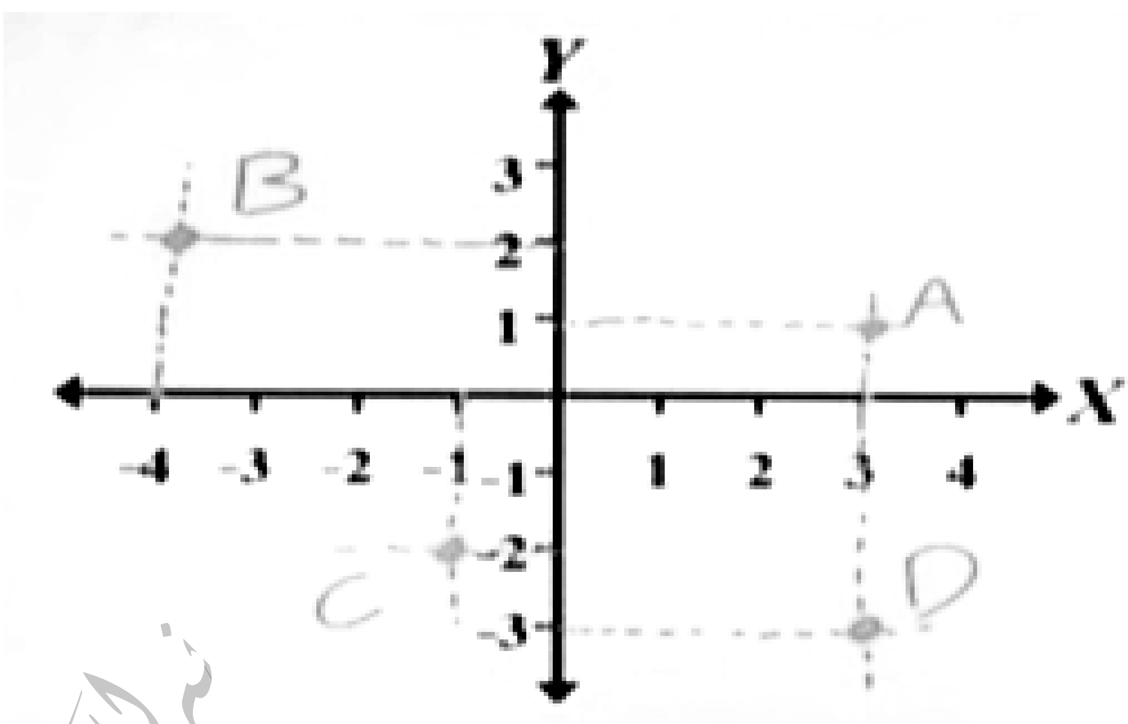
لتمثيل النقطة $A(3,1)$ نقيم عمود على المحور X من النقطة 3 ، ونقيم عمود على المحور Y من النقطة 1 وعند تقاطع العمودين تكون النقطة $A(3,1)$.

ولتمثيل النقطة $B(-4,2)$ نقيم عمود على المحور X من النقطة $4-$ ، ونقيم عمود على المحور Y من النقطة 2 وعند تقاطع العمودين تكون النقطة $B(-4,2)$.

ولتمثيل النقطة $C(-1,-2)$ نقيم عمود على المحور X من النقطة $1-$ ، ونقيم عمود على المحور Y من النقطة $2-$ وعند تقاطع العمودين تكون النقطة $C(-1,-2)$.

ولتمثيل النقطة $D(3,-3)$ نقيم عمود على المحور X من النقطة 3 ، ونقيم عمود على المحور Y من النقطة $3-$ وعند تقاطع العمودين تكون النقطة $D(3,-3)$.

ويكون التمثيل كما في الشكل التالي:

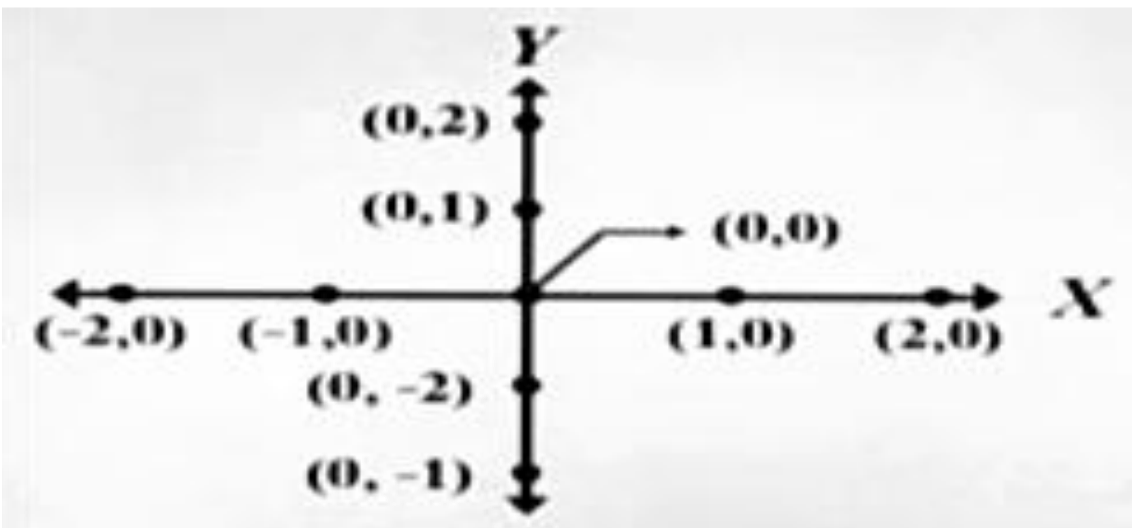


لاحظ هنا النقطة ممكن أن تكون في الربع الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع. فإذا كان الإحداثي السيني موجب والإحداثي الصادي موجب ستكون واقعة في الربع الأول. وإذا كان الإحداثي السيني سالب والإحداثي الصادي موجب ستكون واقعة في الربع الثاني. وإذا كان الإحداثي السيني سالب والإحداثي الصادي سالب تكون واقعة في الربع الثالث، وإذا كان الإحداثي السيني موجب والإحداثي الصادي سالب تكون واقعة في الربع الرابع.

أما النقاط التي تقع على محور X يكون الإحداثي الصادي لها يساوي صفر.

والنقاط التي تقع على محور Y يكون الإحداثي السيني لها يساوي صفر.

والشكل التالي يوضح تلك النقاط.



<u>مثال:</u>

حدد في أي ربع أو على أي محور تقع كل من النقاط التالية:

١. $(-4,2-)$

٢. $(3,1)$

٣. $(0,-4)$

٤. $(6,-5)$

٥. $(-7,-9)$

٦. $(0,0)$

الحل:

١. $(-4,2)$ في الربع الثاني

٢. $(3,1)$ في الربع الأول

٣. $(0,-4)$ على محور Y أو محور الصادات

٤. $(6,-5)$ في الربع الرابع

٥. $(-7,-9)$ في الربع الثالث

٦. $(0,0)$ نقطة الأصل وتقع على المحورين X , Y

معادلة المستقيم في المستوى الديكارتي:

أي معادلة على الصورة:

$$ax+by+c=0$$

حيث a,b,c أعداد حقيقية بحيث $a\neq 0$ أو $b\neq$، تمثل معادلة خط مستقيم في المستوى الديكارتي ويسمى الثابت a بمعامل x، والثابت b بمعامل y.

ونعني بمعادلة المستقيم أن أي نقطة $P(x_0,y_0)$ واقعة على المستقيم تحقق معادلته أي أن $ax+by+c=0$ والعكس صحيح، أي نقطة $Q(x_1,y_1)$ تحقق المعادلة تكون واقعة على المستقيم.

مثال:

المعادلة $x-y+1=0$ تمثل المستقيم المبين بالشكل:

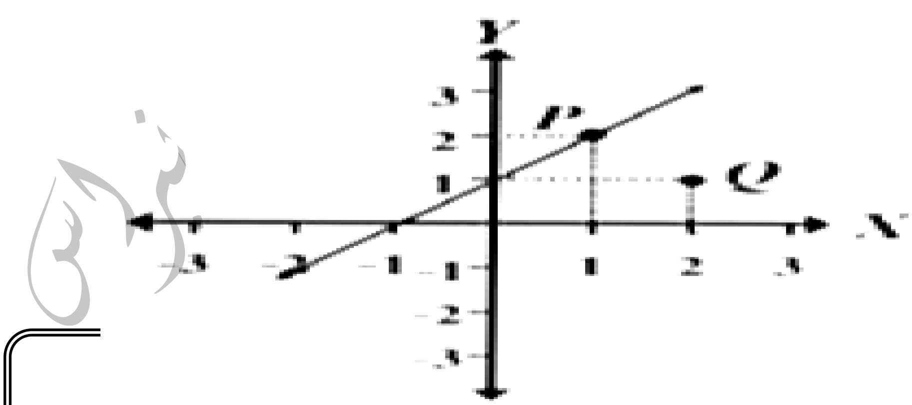
فنلاحظ أن النقطة $P\ (1,2)$ واقعة على المستقيم وتحقق المعادلة.

$$x-y+1=0$$

عند التعويض بقيمة x بالعدد 1 وهو الإحداثي السيني للنقطة P والتعويض بقيمة y بالعدد 2 وهو الإحداثي الصادي للنقطة P في المعادلة نحصل على النتيجة التالية:

$$1-2+1=0$$

وبالتالي نقول أن النقطة $P\ (1,2)$ تحقق المعادلة وتقع على المستقيم.



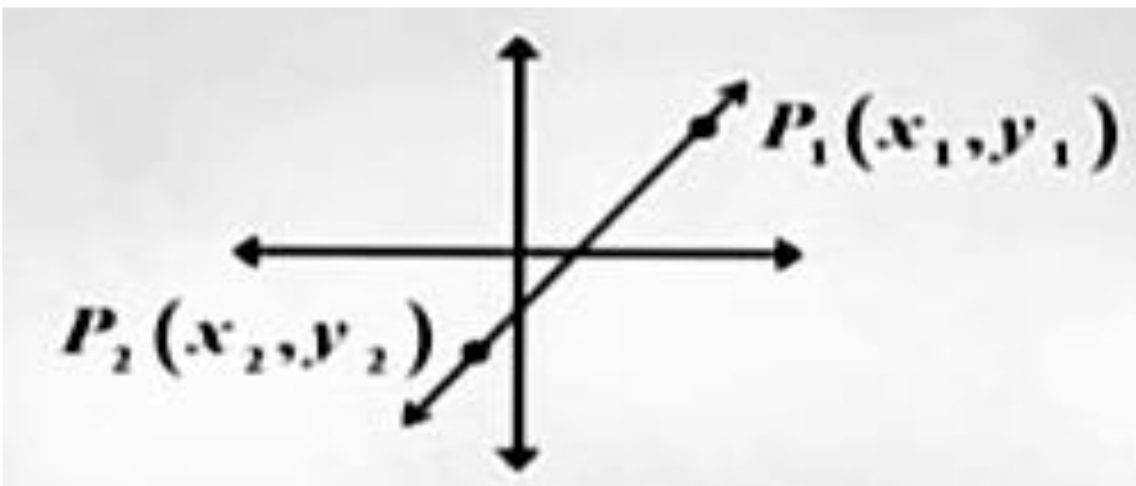
أما النقطة $Q\ (2,1)$ فليست واقعة على المستقيم ولا تحقق معادلته:
وعند التعويض بدلاً من x بالعدد 2 وهو الإحداثي السيني للنقطة Q والتعويض بدلاً من y بالعدد 1 وهو الإحداثي الصادي للنقطة Q نجد أن:

$$x-y+1=0$$
$$2-1+1\neq 0$$

وبالتالي النقطة Q لا تحقق المعادلة واختل شرط المعادلة ولم يتساوى طرفي المعادلة وأيضًا لا تقع على المستقيم.

<u>تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي:</u>

يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى الديكارتي بمعرفة نقطتين تقعان عليه. وذلك برسم المستقيم الواصل بين النقطتين والممتد من الجهتين. أنظر الشكل:



<u>مثال:</u>

ارسم الخط المستقيم الممثل بالمعادلة $2y-4x=6$

<u>الحل:</u>

يجب أن نوجد نقطتين تقعان على المستقيم $2y-4x=6$ وبعد إيجاد النقطتين نمثلهم على المستوى الديكارتي ثم نصل بينهم بخط مستقيم وبالتالي نكون قد رسمنا الخط المستقيم الممثل للمعادلة $2y-4x=6$.

نختار قيمتين لـ x ثم نوجد نقطتي y المناظرة لهما كما يلي:

$x=-1$ ==➔ $2y-4x=6$ ====➔ $2y-4(-1)=6$

$2y+4=6$ ===➔ $2y=6-4=2$ ====➔ $y=1$

إذا النقطة الأولى هي: $(-1,1)$

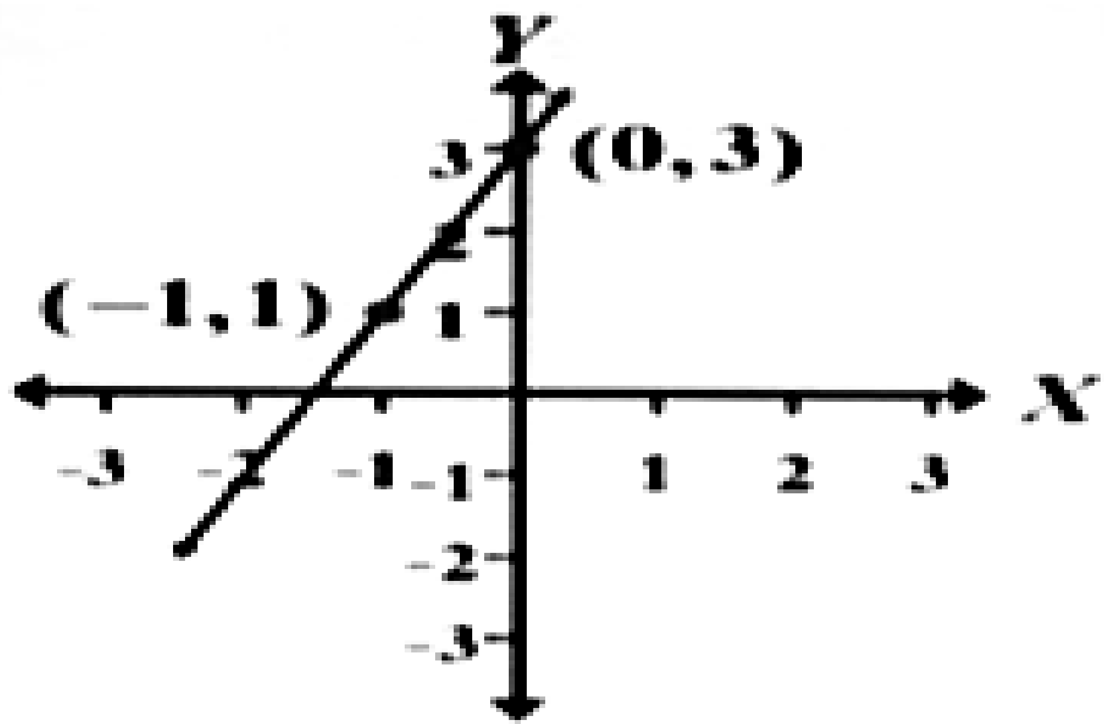
نوجد الثانية وكما ذكرنا يكفي نقطتين لتمثيل الخط المستقيم والنقطة الثانية بافتراض قيمة x هي العدد 0 ونوجد قيمة y المناظرة لها.

$x=0$ ==➔ $2y-4x=6$ ====➔ $2y-4(0)=6$

$2y=6$ ====➔ $y=3$

إذا النقطة الثانية للمعادلة هي: $(0,3)$

ويمكن تمثيل هذين النقطتين على المستوى الديكارتي وإذا وصلنا بينهما بمستقيم ممتد من الجهتين فيكون هذا المستقيم هو الذي يمثل المعادلة $2y-4x=6$



وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وبعون الله نلقاكم في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة السابعة والعشرون

هذه الحلقة هي الحلقة السابعة والعشرون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وسنكمل مثال على رسم معادلة المستقيم وتمثيلها على المستوى الديكارتي ومن ثم نأتي إلى ميل المستقيم.

مثال:

ارسم المستقيمات الممثلة للمعادلات التالية:

1. $y+2x=4$
2. $y=3$
3. $x=-2$

الحل:

1. $y+2x=4$

نختار قيمتين للمتغير x ونعوض عنها في المعادلة ونوجد القيمة المناظرة لهما للمتغير y كما يلي:

$x=1$

$y+2x=4$ ===➔ $y+2(1)=4$ ==➔ $y+2=4$

$y=4-2=2$ ====➔ $y=2$

إذا النقطة الأولى هي: $(1,2)$

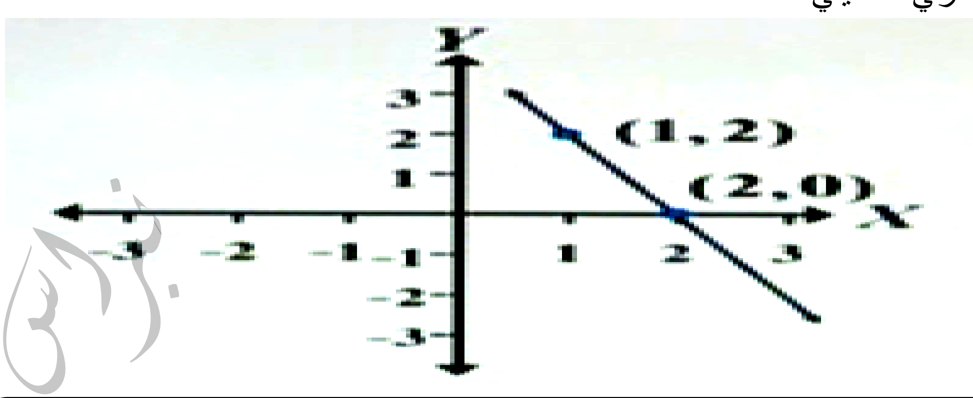
والنقطة الثانية هي:

$x=2$

$y+2x=4$ ===➔ $y+2(2)=4$ =====➔ $y+4=4$

$y=4-4=0$

وإذاً فالنقطة الثانية هي: $(2,0)$ ومن ذلك نعين النقطتين على المستوى الديكارتي ونصل بينهما بمستقيم ونمده من الجهتين فيكون ذلك المستقيم هو المعادلة $y+2x=4$ المطلوب تمثيلها على المستوى الديكارتي كما يلي:



2. $y = 3$

ولاحظ هنا أن أي قيمة x فإن قيمة y ستساوي العدد 3. فإذا أخذنا مثلاً:

$$x = 0$$
$$y = 3$$

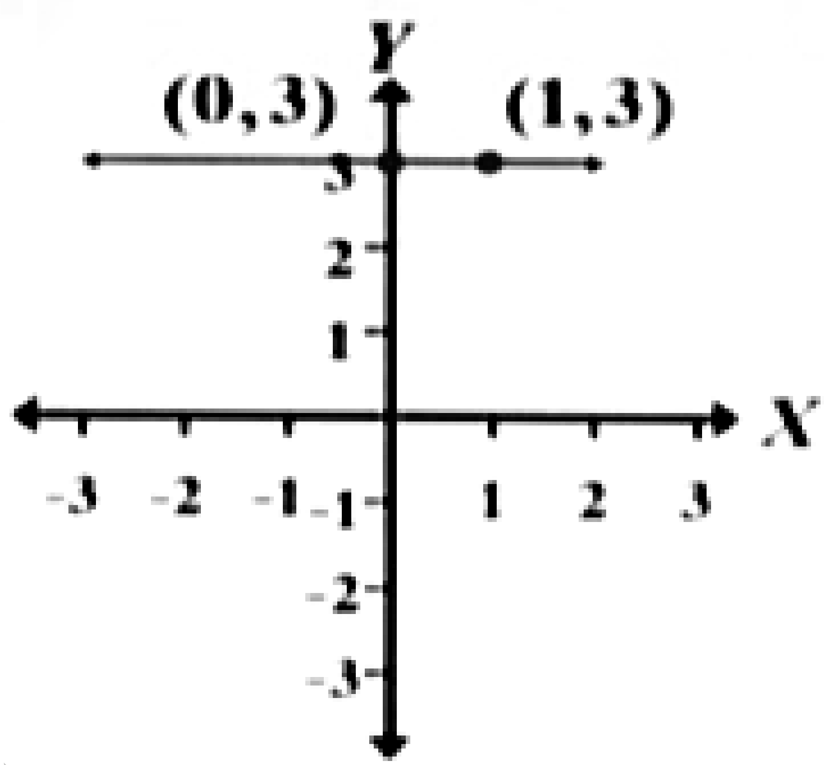
وإذا النقطة الأولى هي: $(0,3)$

وإذا أخذنا قيمة x بالعدد 1 وعوضنا في المعادلة:

$$x = 1$$
$$y = 3$$

فإذا النقطة الثانية هي: $(1,3)$

وبتمثيل النقطتين $(0,3)$ و $(1,3)$ على المستوى الديكارتي يكون موازي لمحور x ويكون أفقي كما بالشكل كالتالي:



3. $x=-2$

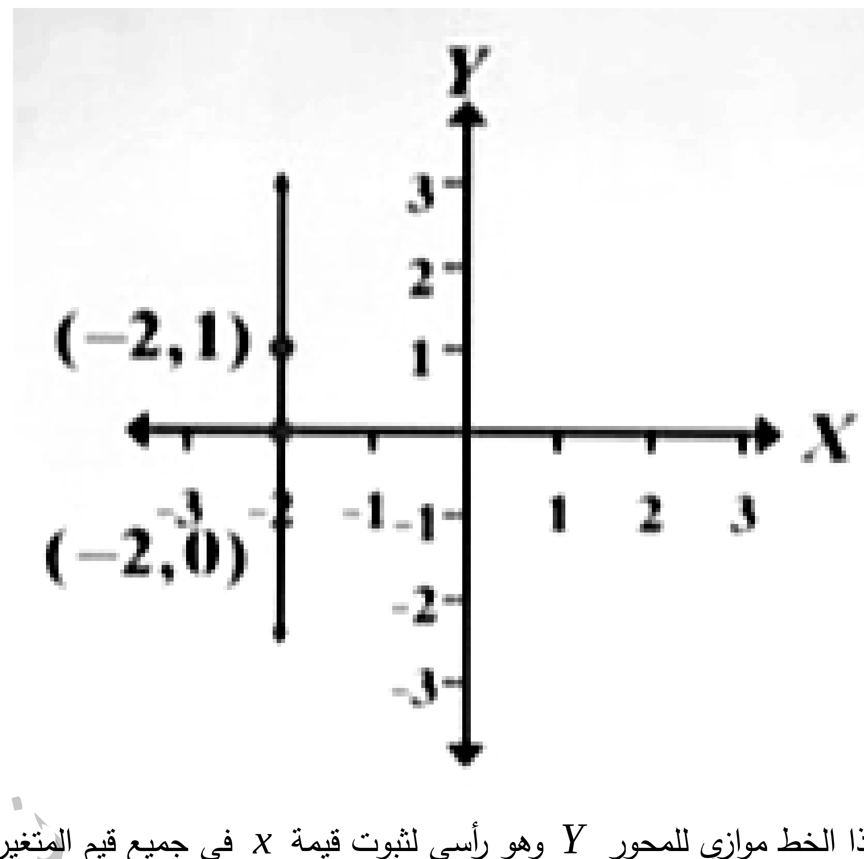
فإذا اخترنا أي قيمة للمتغير y يكون القيمة المناظرة له في x تساوي -2 ثابتة في جميع قيم y .

$y=0$
$x=-2$
$(-2,0)$

والقيمة الأخرى للمتغير y نفترض أن تكون كالآتي:

$y=1$
$x=-2$
$(-2,1)$

وإذا مثلنا النقطتان على المستوى الديكارتي ووصلنا بينهما بمستقيم ونمده من الجهتين إلى ما لا نهاية يمثل المعادلة المطلوبة على المستوى الديكارتي للمعادلة $x=-2$ فيكون ممثلاً كما بالشكل الآتي:



ونلاحظ أن هذا الخط موازي للمحور Y وهو رأسي لثبوت قيمة x في جميع قيم المتغير x .

ميل المستقيم:

المعادلة العامة للخط المستقيم هي:

$ax+by+c=0$ ويمكن وضعها على الصورة:

$by=-ax-c$ وبفرض $b\neq 0$ نجد أن:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

ونسمي العدد $\left(-\frac{a}{b}\right)$ ميل المستقيم ونرمز له بالرمز m فميل المستقيم هو: $m=-\frac{a}{b}$

- والعدد $\left(-\frac{c}{b}\right)$ يمثل الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور Y ونرمز له بالرمز d.
  وتكون نقطة تقاطع المستقيم مع محور Y هي $(0,d)$.
- في حالة $a\neq 0$ فإن نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات X هي $\left(-\frac{c}{a},0\right)$.
- يمكن كتابة معادلة المستقيم بدلالة ميله m ونقطة التقاطع d مع محور Y على الصورة:

$$y=mx+d$$

ملحوظات:

- في حالة $b=0$ فإن المعادلة تصبح على الصورة $x=-\frac{c}{a}$ وهو المستقيم الموازي لمحور Y والذي إحداثه السيني ثابت.
- في حالة $a=0$ فإن المعادلة تصبح على الصورة $y=-\frac{c}{b}$ وهو المستقيم الموازي لمحور X والذي إحداثه الصادي ثابت.

مثال:

اكتب معادلة المستقيمات التالية بدلالة الميل ونقطة التقاطع مع محور الصادات Y:

1. $3x+2y+6=0$
2. $5y-10x=5$
3. $9x=3y+12$

الحل:

1. $3x+2y+6=0$

ولكتابة المعادلة بدلالة الميل ونقطة التقاطع مع محور الصادات نضع y ومعاملها يجب أن يكون 1 وباقي المعادلة في الطرف الآخر.

$2y=-3x-6 \qquad \div 2$

$\frac{2y}{2}=\frac{-3x}{2}-\frac{6}{2}$ ======➔ $y=\frac{-3}{2}x-3$

وبالتالي يكون الميل m كالآتي:

$$m = -\frac{3}{2} \quad , \quad d = -3$$

2. $5y - 10x = 5$

$$5y = 5 + 10x \qquad \div 5$$

$$\frac{5y}{5} = \frac{10}{5}x + \frac{5}{5} \quad ===\!\!\rightarrow \quad y = 2x + 1$$

$$m = 2 \quad , \quad d = 1$$

3. $9x = 3y + 12$

$$-3y = -9x + 12 \qquad \div -3$$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-9x}{-3} + \frac{12}{-3} \quad ===\!\!\rightarrow \quad y = 3x - 4$$

$$m = 3 \quad , \quad d = -4$$

<u>مثال:</u>

إذا كانت معادلة المستقيم هي $4x + 2y = 12$ أوجد ما يلي:

١. ميل المستقيم.
٢. نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات Y.
٣. نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات X.
٤. اكتب معادلة الخط المستقيم بدلالة الميل ونقطة التقاطع مع محور Y.

<u>الحل:</u>

نضع المعادلة بالصورة العامة لها وكانت المعادلة هي

$$4x + 2y = 12$$
$$4x + 2y - 12 = 0$$
$$a = 4 \qquad b = 2 \qquad c = -12$$

1.) $m=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{4}{2}=-2$

2) $(0,d)$ $\quad d=-\dfrac{c}{b}=-\dfrac{-12}{2}=6$ $\quad (0,2)$

3) $\left(-\dfrac{c}{a},0\right)$ $\quad \dfrac{-c}{a}=-\dfrac{-12}{4}=3$ $\quad (3,0)$

4. $m=-2$ $\quad d=6$

$y=mx+d$

$y=-2x+6$

مثال:

اكتب معادلة المستقيم الذي:

١. ميله يساوي $3-$ ويقطع محور الصادات Y في 5 .

الحل:

$m=-3$ $\quad d=5$

$y=mx+d$

$y=-3x+5$

٢. ميله يساوي 4 ويقطع محور X في $2-$

الحل :

$m=4$

$y=mx+d$

$y=4x+d$

وبما أن الخط يقطع محور X في $2-$

فإن هناك نقطة تقع على مستقيم المعادلة هي: $(2,0-)$ وبالتعويض في المعادلة:

$0=4(-2)+d$ $\quad d=8$

$y=4x+8$

وهي معادلة المستقيم الذي ميله 4 ويقطع محور X في $2-$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الثامنة والعشرون

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، اللهم اشرح لي صدري ويسر لي أمري واحلل عقدة من لساني يفقهوا قولي.

ميل المستقيم بمعلومية نقطتين عليه:

إذا كانت $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين تقعان على مستقيم فإن ميله هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x}$$

مثال:

أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين الموضحتين في كل مما يلي:

1. $(0,4),(2,12)$
2. $(4,-6),(1,3)$
3. $(5,3),(5,-2)$
4. $(2,-1),(7,-1)$

الحل:

1. $(0,4),(2,12)$

ويمكن اعتبار أن $(0,4)$ هي النقطة (x_1, y_1) واعتبار أن $(2,12)$ هي النقطة (x_2, y_2) ولإيجاد الميل نقوم بتطبيق القانون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{12-4}{2-0} = \frac{8}{2} = 4$$

ويمكن اعتبار أن $(2,12)$ هي النقطة (x_1, y_1) واعتبار أن $(0,4)$ هي النقطة (x_2, y_2) ولإيجاد الميل نقوم بتطبيق القانون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-12}{0-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

إذا الميل في كلا الحالتين يساوي 4.

2. $(4,-6),(1,3)$

ويمكن اعتبار أن $(4,-6)$ هي النقطة (x_1, y_1) واعتبار أن $(1,3)$ هي النقطة (x_2, y_2) ولإيجاد الميل نقوم بتطبيق القانون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-(-6)}{1-4} = \frac{9}{-3} = -3$$

3. $(5,3),(5,-2)$

ويمكن اعتبار أن $(5,3)$ هي النقطة (x_1, y_1) واعتبار أن $(5,-2)$ هي النقطة (x_2, y_2)
ولإيجاد الميل نقوم بتطبيق القانون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{5-5} \rightarrow \frac{-5}{0}$$

وهنا أصبح المقام يساوي 0 وبالتالي يكون الميل غير معرف.

غير معرف m

4. $(2,-1),(7,-1)$

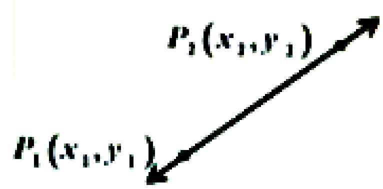
ويمكن اعتبار أن $(2,-1)$ هي النقطة (x_1, y_1) واعتبار أن $(7,-1)$ هي النقطة (x_2, y_2)
ولإيجاد الميل نقوم بتطبيق القانون:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-(-1)}{7-2} = \frac{0}{5} = 0$$

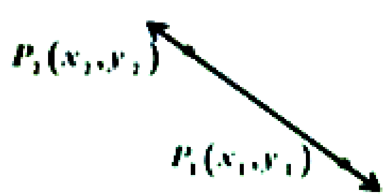
ومن هنا نجد أن الميل يكون العدد موجبًا وممكن أن يكون عددًا سالبًا وممكن أن يكون غير معرف وممكن أن يكون الميل 0.

<u>ملحوظات:</u>

- إذا كان ميل المستقيم موجبًا يكون صاعدًا من اليسار إلى اليمين والعكس صحيح.



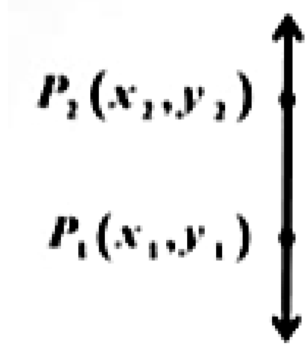
- وإذا كان ميل المستقيم سالبًا يكون نازلاً من اليسار إلى اليمين والعكس صحيح.



- وإذا كان ميل المستقيم غير معرف (أي لا يوجد ميل للخط المستقيم) يكون المستقيم رأسيًا لأنه في هذه الحالة يكون $x_1 = x_2$ ويكون موازيًا لمحور Y .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$

لأنه في هذه الحالة يكون المقام يساوي 0 وهذا محظور فيكون الميل غير معرف.



- وإذا كان ميل المستقيم يساوي صفرًا فإن المستقيم أفقيًا لأن في هذه الحالة يكون $y_1 = y_2$ ويكون موازيًا لمحور X .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

<u>معادلة المستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه:</u>

إذا كان لدينا الميل m لخط مستقيم ونقطة $P(x_1, y_1)$ واقعة عليه فإن معادلة المستقيم بمعلومية الميل وهذه النقطة الواقعة عليه هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال:

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله 4 ويمر بالنقطة $(2,-3)$.

الحل:

بما أن ميل الخط المستقيم m ويساوي 4 ويمر بالنقطة $(2,-3)$ وهي تمثل (x_1, y_1). ولذلك نعوض في معادلة المستقيم بدلالة نقطة وهي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y-(-3)=4(x-2) \implies y+3=4x-8 \implies y=4x-8-3$$

$$y=4x-11$$

ملحوظات:

- معادلة المستقيم الأفقي (أي الميل صفراً وموازي لمحور السينات) والمار بالنقطة $P(x_1, y_1)$ هي $y = y_1$.
- معادلة المستقيم الرأسي (أي الميل غير معرف وموازي لمحور الصادات) والمار بالنقطة $P(x_1, y_1)$ هي $x = x_1$.

مثال:

أوجد معادلة المستقيم في كل مما يلي:

١. يوازي المحور X ويقطع المحور Y في 2.

٢. يوازي المحور Y ويقطع المحور X في -1.

الحل:

١. بما أن مستقيم المعادلة يوازي المحور X فإن $m=0$

وبما أنه يقطع المحور Y في 2 فإنه يمر بالنقطة $(0,2)$

وبالتالي تكون المعادلة مباشرة حسب الملاحظة السابقة الأولى فإنه:

$$y=2$$

وهي معادلة المستقيم.

٢. بما أن مستقيم المعادلة يوازي المحور Y فإن m غير معرف

وبما أنه يقطع المحور X في -1 فإنه يمر بالنقطة $(-1,0)$

وبالتالي تكون المعادلة مباشرة حسب الملاحظة السابقة الثانية فإنه:

$$x=-1$$

معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين:

إذا كان لدينا مستقيم مار بنقطتين معلومتين $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,x_2)$ بحيث $x_1 \neq x_2$ فإن معادلة هذا المستقيم هي:

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \text{حيث} \quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

لاحظ عندما $x_1=x_2$ فإن المستقيم موازٍ للمحور Y.

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي:

١. يمر بالنقطتين $P_1(3,-5)$ و $P_2(-1,-1)$.

الحل:

في البداية نوجد الميل للنقطتين وباعتبار هنا $P_1(3,-5)$ هي (x_1,y_1) و $P_2(-1,-1)$ هي (x_2,y_2).

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-(-5)}{-1-3}=\frac{4}{-4}=-1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-5)=-1(x-3)$$

$$y+5=-x+3$$

$$y=-x+3-5$$

$$y=-x-2$$

٢. يمر بالنقطة $P(2,4)$ ويقطع المحور Y في $2-$.

الحل:

لدينا النقطة الأولى وهي $P(2,4)$

وبما أن المستقيم يقطع المحور Y في $2-$ فالنقطة الثانية تكون $(0,-2)$

$$m=\frac{-2-4}{0-2}=\frac{-6}{-2}=3$$

$$m=3 \qquad (2,4)$$

$$y-4=3(x-2)$$

$$y-4=3x-6$$

$$y=3x-2$$

وإلى هنا نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة التاسعة والعشرون

هذه الحلقة هي الحلقة التاسعة والعشرون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

ونبدأ في هذه الحلقة بالوحدة الخامسة وهي المتتاليات ومجموعها.

المتتاليات ومجموعها

المتتالية:

نعرف أنه في كتابة أي مجموعة من العناصر فلا يهم الترتيب الذي نكتب به عناصر المجموعة فمثلاً المجموعة:

$$\{6,3,4,7,1\}=\{1,3,7,6,4\}$$

ولكن في بعض الحالات نحتاج إلى دراسة مجموعة من العناصر مرتبة بطريقة معينة، فإذا فرضنا أن درجة الحرارة العظمى في مدينة ما خلال الأيام العشرة الأولى من شهر رمضان كالآتي:

$$26,27,27,28,30,31,29,29,27,28$$

هذه حسب الترتيب مأخوذة حسب ترتيب الأيام وهكذا.

هذه الأعداد مأخوذة بنفس الترتيب وتسمى بالمتتالية وكل عدد من هذه المتتالية يسمى بحد المتتالية.

إذاً إذا أخذنا الأعداد وكان الترتيب مهم فهذا الترتيب لهذه الأعداد تسمى بالمتتالية وكل عدد من هذه المتتالية نسميه حد المتتالية.

ففي المتتالية السابقة نقول أن الحد الأول للمتتالية هو العدد 26 وحدها الثاني هو 27 وحدها العاشر هو 28.

وقد تكون المتتالية منتهية أي عدد حدودها محدود كما في المتتالية السابقة.

وقد تكون المتتالية غير منتهية مثل متتالية الأعداد الطبيعية الفردية والتي تكون على الصورة:

$1 , 3, 5 , 7 , 9 , 11 , \ldots$

ونلاحظ أن هذه المتتالية غير منتهية أي عدد حدودها غير محدود.

وهذه المتتالية تعطى بالعلاقة $2n-1$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

وإذا رمزنا للعلاقة $(2n-1)$ بالرمز a_n تصبح العلاقة:

$$a_n=2n-1$$

وتسمى بالحد العام والذي يدل على بقية الحدود فنجد أن:

$a_1=2(1)-1=1$ وهو الحد الأول

$a_2=2(2)-1=3$ وهو الحد الثاني

$a_3=2(3)-1=5$ وهو الحد الثالث وهكذا.

متتالية مضاعفات الموجبة للعدد 5 يمكن كتابتها على الصورة:

$$5,10,15,20,25,\ldots$$

وحدها العام هي $a_n = 5n$ ، $n \in \mathbb{N}$

$a_1 = 5(1) = 5$ وهو الحد الأول

$a_2 = 5(2) = 10$ وهو الحد الثاني

$a_3 = 5(3) = 15$ وهو الحد الثالث

$a_4 = 5(4) = 20$ وهو الحد الرابع

تعريف المتتالية:

المتتالية المنتهية والغير منتهية هي ترتيب معين من الأعداد حيث تكتب المتتالية المنتهية لعدد n من الحدود على الصورة $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ أو على الصورة $\{a_k\}_{k=1}^{n}$.

وتكتب المتتالية الغير منتهية على الصورة $a_1, a_2, a_3, \ldots$ أو الصورة $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

يمكن تحديد لبعض المتتاليات حدها العام a_n بعبارة جبرية كما فعلنا سابقًا، وأحيانًا لا يمكن تحديد حد عام لبعض المتتاليات مثل متتالية الأعداد الأولية والتي تكتب على الصورة $2,3,5,7,11,\ldots$.

مثال:

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التالية:

1. $a_n = n^2 - 2n$
2. $a_n = (-1)^n + 2n$
3. $a_1 = 2\ ,\ a_n = a_{n-1} - n$

الحل:

1. $a_n = n^2 - 2n$

$n = 1 \qquad a_1 = (1)^2 - 2(1) = 1 - 2 = -1$

$n = 2 \qquad a_2 = (2)^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

$n = 3 \qquad a_3 = (3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$

$n = 4 \qquad a_4 = (4)^2 - 2(4) = 16 - 8 = 8$

$n = 5 \qquad a_5 = (5)^2 - 2(5) = 25 - 10 = 15$

وبذلك فإن الحدود الخمسة الأولى من المتتالية هي:

$$-1, 0, 3, 8, 15$$

2. $a_n = (-1)^n + 2n$

$n = 1 \qquad a_1 = (-1)^1 + 2(1) = -1 + 2 = 1$

$n = 2 \qquad a_2 = (-1)^2 + 2(2) = 1 + 4 = 5$

$n = 3 \qquad a_3 = (-1)^3 + 2(3) = -1 + 6 = 5$

$n = 4 \qquad a_4 = (-1)^4 + 2(4) = 1 + 8 = 9$

$n = 5 \qquad a_5 = (-1)^5 + 2(5) = -1 + 10 = 9$

إذا حدود المتتالية الخمسة الأولى هي: $1,5,5,9,9$

3. $a_1 = 2\ ,\ a_n = a_{n-1} - n$

لدينا الحد الأول معلوم وهو $a_1 = 2$.

والمتتالية هي: $a_n = a_{n-1} - n$ وهنا n تبدأ من العدد 2

$n=1 \qquad a_1 = 2$

$n=2 \qquad a_2 = a_{2-1} - 2 = a_1 - 2 = 2 - 2 = 0$

$n=3 \qquad a_3 = a_{3-1} - 3 = a_2 - 3 = 0 - 3 = -3$

$n=4 \qquad a_4 = a_{4-1} - 4 = a_3 - 4 = -3 - 4 = -7$

$n=5 \qquad a_5 = a_{5-1} - 5 = a_4 - 5 = -7 - 5 = -12$

فتكون الحدود الخمسة الأولى من المتتالية هي: $2,0,-3,-7,-12$

<u>مجموع المتتالية المنتهية:</u>

إذا كانت $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ تمثل متتالية منتهية، فإن مجموعها ويرمز له بالرمز S هو:

$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

ونسمي S في هذه الحالة متسلسلة منتهية عدد حدودها n . ويمكن للاختصار كتابة المجموع السابق على النحو التالي:

$$S = \sum^{n} a_k$$

الرمز Σ يرمز إلى حاصل جمع مجموعة من العناصر ويقرأ (سيجما).

<u>مثال:</u>

1. $S = \sum_{k=1}^{4} \left(k^2 - k\right)$ 2. $S = \sum_{k=1}^{5} \left(5 - 2k\right)^2$

<u>الحل:</u>

1. $S = \sum^{4} \left(k^2 - k\right)$

$$= \left((1)^2 - 1\right) + \left((2)^2 - 2\right) + \left((3)^2 - 3\right) + \left((4)^2 - 4\right)$$

$$= (0) + (2) + (6) + (12) = 20$$

$S = 20$

2. $S = \sum_{k=1}^{5} \left(5 - 2k\right)^2$

$$= \left(5 - 2(1)\right)^2 + \left(5 - 2(2)\right)^2 + \left(5 - 2(3)\right)^2 + \left(5 - 2(4)\right)^2 + \left(5 - 2(5)\right)^2$$

$$= (3)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-5)^2 = 9 + 1 + 1 + 9 + 25 = 45$$

$S = 45$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الثلاثون

هذه الحلقة هي الحلقة الثلاثون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وما زلنا في الوحدة الخامسة وهي المتتاليات وموضوع هذه الحلقة هي المتتاليات الحسابية.

<u>المتتاليات الحسابية:</u>

في المتتاليات التالية:

$$2,5,8,11,...$$

$$10,8,6,4,...$$

المتتالية الأولى يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بإضافة العدد 3 إلى الحد السابق له. هذه المتتالية مثال لمتتالية حسابية وتسمى هذه القيمة الثابتة بأساس المتتالية.

وكذلك المتتالية الثانية يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بإضافة العدد -2 إلى الحد السابق له.

<u>تعريف المتتالية الحسابية:</u>

نقول عن المتتالية $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ أنها متتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد والذي يسبقه عددًا ثابتًا أي أن $a_{k+1}-a_k=d$ لكل $k\in\mathbb{N}$ ويسمى العدد الثابت d بأساس المتتالية الحسابية.

<u>مثال:</u>

وضح أي المتتاليات التالية متتالية حسابية:

1. $-1,2,5,8,11,...$
2. $-2,2,-2,2,...$
3. $6,6,6,6,...$
4. $15,8,1,-6,-13,...$
5. $a_n=2n+1$
6. $a_n=n^2+1$

<u>الحل:</u>

1. $-1,2,5,8,11,...$

طبعاً العدد -1 يمثل الحد a_1، والعدد 2 يمثل الحد a_2، والعدد 5 يمثل الحد a_3 وهكذا.

$$a_2-a_1=2-(-1)=3$$
$$a_3-a_2=5-2=3$$
$$a_4-a_3=8-5=3$$
$$a_5-a_4=11-8=3$$

لاحظ هنا أنه الفرق دائمًا مقداره ثابت وهو العدد 3 .

إذا نحكم على هذه المتتالية $-1,2,5,8,11,...$ بأنها متتالية حسابية وأساسها العدد $d=3$.

2. $-2,2,-2,2,...$

العدد -2 يمثل الحد a_1، والعدد 2 يمثل الحد a_2، والعدد -2 يمثل الحد a_3 وهكذا.

$$a_2-a_1=2-(-2)=4$$
$$a_3-a_2=-2-2=-4$$
$$a_4-a_3=2-(-2)=4$$

وطبعًا الأساس اختلف وغير ثابت وبذلك فالمتتالية $-2,2,-2,2,...$ ليست متتالية حسابية.

3. $6,6,6,6,...$

العدد 6 يمثل الحد a_1، والعدد 6 يمثل الحد a_2، والعدد 6 يمثل الحد a_3 وهكذا.

$$a_2-a_1=6-6=0$$
$$a_3-a_2=6-6=0$$
$$a_4-a_3=6-6=0$$

وبما أن المقدار ثابت ويساوي 0 إذا تعتبر متتالية حسابية وأساسها $d=0$ وهذه المتتالية تسمى متتالية ثابتة.

إذا المتتالية $6,6,6,6,...$ متتالية حسابية وأساسها $d=0$.

4. $15,8,1,-6,-13,...$

العدد 15 يمثل الحد a_1، والعدد 8 يمثل الحد a_2، والعدد 1 يمثل الحد a_3 وهكذا.

$$a_2-a_1=8-15=-7$$
$$a_3-a_2=1-8=-7$$
$$a_4-a_3=-6-1=-7$$
$$a_5-a_4=-13-(-6)=-7$$

وبالتالي هذه المتتالية $15,8,1,-6,-13,...$ متتالية حسابية لأن أساسها ثابت ويساوي $d=-7$

5. $a_n=2n+1$

إذا كان الفرق بين الحد k والحد $k+1$ ثابتًا فإن المتتالية متتالية حسابية فنوجد الحدين $k+1\ ,\ k$ ونوجد الفرق بينهما وننظر هل الفرق ثابتًا أم لا حتى نحكم على المتتالية إذا كانت حسابية أم لا.

$$a_k=2k+1$$
$$a_{k+1}=2(k+1)+1$$
$$a_{k+1}-a_k=2(k+1)+1-(2k+1)$$
$$=2k+2+1-2k-1=2$$

وبما أن الناتج يساوي 2 وهو مقدار ثابت لا يعتمد على قيمة k فإن المتتالية حسابية.
إذاً $a_n = 2n+1$ متتالية حسابية وأساسها $d = 2$.

6. $a_n = n^2 + 1$

وهنا أيضًا نوجد الفرق بين الحد k والحد $k+1$ ثابتًا فإن المتتالية متتالية حسابية فنوجد الحدين k , $k+1$ ونوجد الفرق بينهما وننظر هل الفرق ثابتًا أم لا حتى نحكم على المتتالية إذا كانت حسابية أم لا.

$$a_k = k^2 + 1$$
$$a_{k+1} = (k+1)^2 + 1$$
$$= k^2 + 2k + 1 - k^2 - 1$$

ولاحظ أن الفرق هنا يعتمد على قيمة k وليس عددًا ثابتًا
ولذا فالمتتالية هنا $a_n = n^2 + 1$ ليست متتالية حسابية.

<u>الحد العام للمتتالية الحسابية (الحد النوني):</u>

الحد لعام a_n للمتتالية الحسابية المعلوم فيها الحد الأول a_1 والأساس d يعطى بالعلاقة التالية:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

<u>مثال:</u>

لدينا متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 3 أوجد ما يلي:
١. الحد العام للمتتالية الحسابية.
٢. الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الحسابية.
٣. الحد العشرين للمتتالية الحسابية.

<u>الحل:</u>

1. $a_n = a_1 + d(n-1)$

ولدينا أيضًا معلومات أن $a_1 = 4$ $\quad d = 3$

$$a_n = 4 + 3(n-1)$$
$$a_n = 4 + 3n - 3$$
$$a_n = 3n + 1$$

2. $a_n = 3n + 1$

$$a_1 = 4$$
$$a_2 = 3(2) + 1 = 7$$
$$a_3 = 3(3) + 1 = 10$$

$$a_4 = 3(4)+1 = 13$$
$$a_5 = 3(5)+1 = 16$$

وهذه الحدود الخمسة الأولى وهي $4,7,10,13,16$

ملاحظة:

يمكن تطبيق طريقة سهلة لحل الفرع الثاني من المثال السابق وهي أن نضع الحد الأول $a_1 = 4$ ثن نضيف له قيمة الأساس $d = 3$ لإيجاد الحد الثاني ولإيجاد الحد الثالث نضيف قيمة الأساس $d = 3$ للحد الثاني وهكذا:

$$\begin{array}{ccccccccc} & +d & & +d & & +d & & +d & \\ a_1 & \rightarrow & a_2 & \rightarrow & a_3 & \rightarrow & a_4 & \rightarrow & a_5 \\ 4 & \rightarrow & 7 & \rightarrow & 10 & \rightarrow & 13 & \rightarrow & 16 \\ & +3 & & +3 & & +3 & & +3 & \end{array}$$

3. $a_n = 3n+1$

ولإيجاد الحد رقم 20 أي أن:

$$n = 20$$
$$a_{20} = 3(20)+1 = 61$$

أي أن الحد $a_{20} = 61$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة

المحاضرة الواحدة والثلاثون

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وأصحابه أجمعين، اللهم اشرح لي صدري ويسر لي أمري واحلل عقدة من لساني يفقهوا قولي.

هذه الحلقة هي الحلقة الواحدة والثلاثون من سلسلة حلقات مقرر شرح مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

مثال:

أوجد الحد الواحد والخمسين من المتتالية الحسابية التي فيها الحد الثالث 5 وأساسها -3 .

الحل:

ونستخدم الحد النوني ونستخدم فيه الحد الأول والأساس ولكن هنا معطى الحد الثالث والأساس. ولذلك يجب معرفة الحد الأول a_1

$$a_1 \xleftarrow{-d} a_2 \xleftarrow{-d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4$$

$$a_2 = a_3 - d = 5 - (-3) = 8$$
$$a_1 = a_2 - d = 8 - (-3) = 11$$

فيكون $a_1 = 11$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$a_{51} = 11 + (-3)(51-1)$$
$$= 11 + (-3)(50)$$
$$= 11 - 150 = -139$$
$$a_{51} = 139$$

مجموع أول n حدًا من متتالية حسابية:

إذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية حسابية حدها الأول هو a_1 وأساسها d فإن مجموع الـ n حدًا الأولى للمتتالية ويرمز له بالرمز S_n يتحدد بأحد القانونين:

(1) $$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

(2) $$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))}$$

القانون الأول يستخدم إذا علم الحد الأول a_1 والحد الأخير a_n
بينما القانون الثاني إذا علم الحد الأول والأساس d وعدد الحدود المراد جمعها.

مثال:

أوجد مجموع أول عشرين حد من متتالية حسابية حدها الأول 12 وحدها العشرين -15 .

الحل:

$$a_1 = 12 \qquad a_{20} = -15 \quad n = 20 \qquad S_{20} = ???$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(12 + (-15))$$

$$= 10(-3) = -30$$

مثال:

أوجد مجموع أول عشرة حدود من متتالية حسابية حدها الأول 4 وأساسها 2 .

الحل:

$$a_1 = 4 \qquad d = 2 \qquad n = 10 \qquad S_{10} = ???$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(4) + 2(10-1))$$

$$= 5(8 + 18) = 5(2(26)) = 130$$

مثال:

إذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية حسابية حدها الأول 2 وحدها السابع $16-$ أوجد قيمة مجموع أول خمسة عشر حدًا.

الحل:

$a_1 = 2 \qquad a_7 = -16 \qquad n = 15 \qquad S_{15} = ??$

ولإيجاد الأساس حتى نطبق القانون الثاني من الحد السابع كما يلي:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$a_7 = 2 + d(7-1) \quad ====\rightarrow \quad -16 = 2 + 6d$$
$$-18 = 6d \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = -3}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$
$$S_{15} = \frac{15}{2}(2(2) + (-3)(15-1))$$
$$= \frac{15}{2}(4 - 42)$$
$$= \frac{15}{2}(-38) = -285$$

الوسط الحسابي:

إذا كان a و b أعداد حقيقية فإن الوسط الحسابي لهما هو العدد: $\boxed{c = \frac{a+b}{2}}$

في هذه الحالة تشكل a, c, b متتالية حسابية حدها الأول a وأساسها $d = \frac{b-a}{2}$.

مثال:

أوجد الوسط الحسابي للعددين 3 و 11.

الحل:

$$\frac{11+3}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

نلاحظ هنا متتالية حسابية إذا وضعنا الوسط الحسابي بين العددين 3 و 11 كالآتي:

$3,7,11 \quad \rightarrow \qquad d = \frac{11-3}{2} = 4$ وهو أساس تلك المتتالية

$11,7,3\rightarrow$ $d=\dfrac{3-11}{2}=-4$ وهو أساس تلك المتتالية

تعميم:

نسمي الأعداد $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ أوساطًا حسابية بين العددين a و b إذا كانت المتتالية:

$a, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, b$ متتالية حسابية أساسها $d=\dfrac{b-a}{n+1}$

أي أن عملية إدخال n من الأوساط الحسابية بين العددين a و b هي عبارة عن تكوين متتالية حسابية حدها الأول a وحدها الأخير b ويكون عدد حدودها يساوي $n+2$.

مثال:

أدخل أربعة أوساط حسابية بين العددين 2 و 17 .

الحل:

$2, c_1, c_2, c_3, c_4, 17$

فتكون المتتالية أساسها الأول a_1 يساوي 2 والحد الأخير السادس a_6 يساوي 17

$$d=\frac{b-a}{n+1}=\frac{17-2}{4+1}=\frac{15}{5}=3$$

$$d=3$$

$$c_1=a_1+d=2+3=5$$
$$c_2=c_1+d=5+3=8$$
$$c_3=c_2+d=8+3=11$$
$$c_4=c_3+d=11+3=14$$

مثال: (تدريب للطلاب)

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى لكل من المتتاليان الحسابية التالية:

1. $a_1=4$, $a_5=12$
2. $-15,-12,-9,-6,\ldots$

مثال: (تدريب الطلاب)

أوجد الوسط الحسابي لكل عددين في كل مما يلي:

1. $-21,15$ 2. $-7,0$ 3. $2.5,7.5$

مثال: (تدريب للطلاب)

أدخل خمسة أوساط حسابية بين العددين التاليين:

1. $2,14$
2. $0,3$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها

المحاضرة الثانية والثلاثون

فهذه الحلقة الثانية والثلاثون من سلسلة شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وما زلنا في الوحدة الخامسة وهي المتتاليات

المتتالية الهندسية:

في المتتالية التالية:

$$1,2,4,8,16,\ldots$$

$$81,27,9,3,\ldots$$

المتتالية الأولى يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بضرب الحد السابق له في العدد 2 ، هذه المتتالية مثال لمتتالية هندسية وتسمى هذه القيمة الثابتة بأساس المتتالية.

وكذلك المتتالية الثانية يمكن الحصول على كل حد (عدا الأول) بضرب الحد السابق له بالعدد $\frac{1}{3}$.

تعريف المتتالية الهندسية:

تكون المتتالية $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية هندسية إذا كان حاصل قسمة أي حد على الحد الذي يسبقه مباشرة عددًا ثابتًا أي أن $\frac{a_{k+1}}{a_k}=r$ لكل $k \in \mathbb{N}$ ويسمى العدد الثابت r بأساس المتتالية الهندسية.

مثال:

وضح أي المتتاليات التالية متتالية هندسية:

1. $2,6,18,54,\ldots$
2. $-5,5,-5,5,\ldots$
3. $8,4,2,1,0,\frac{1}{2},\ldots$
4. $1,2,4,12,24,\ldots$
5. $7,7,7,7,\ldots$
6. $a_n=3^n$

الحل:

1. $2,6,18,54,\ldots$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3 \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{18}{6}=3$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{54}{18}=3$$

ونلاحظ أن حاصل القسمة العدد نفسه وهو 3

ولذلك فإن المتتالية $2,6,18,54,...$ متتالية هندسية وأساسها 3 $r=3$.

2. $-5,5,-5,5,...$

نتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في الفرع الأول.

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{5}{-5}=-1 \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{-5}{5}=-1$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{5}{-5}=-1$$

ونلاحظ أن حاصل القسمة العدد نفسه وهو -1

ولذلك فإن المتتالية $-5,5,-5,5,...$ متتالية هندسية وأساسها -1 $r=-1$.

3. $8,4,2,1,0,\frac{1}{2},...$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{2} \qquad \frac{a_5}{a_4}=\frac{0}{1}=0$$

$\frac{a_6}{a_5}\rightarrow\frac{a_6}{0}$ غير معرف

ونلاحظ أن هذه المتتالية غير متتالية هندسية لسببين لأن أساسها r غير ثابت

فهناك $\frac{a_5}{a_4}=\frac{0}{1}=0$ وأيضًاحاصل قسمة الحد السادس على الحد الخامس غير معرف

وعمومًا أي متتالية هندسية لا يوجد فيها حد يساوي 0.

4. $1,2,4,12,24,...$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2 \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\frac{a_4}{a_3}=\frac{12}{4}=3$$

وأصبح حاصل قسمة آخر مرة هو 3 وهو مختلف عن حاصل قسمة المرتين السابقتين الذي كان 2 وبذلك لا تصبح المتتالية هندسية لأنه يجب لكي تكون متتالية هندسية أن يكون حاصل القسمة ثابتًا في جميع حدودها وأساسها r يكون ثابتًا في جميع حدودها.

إذاً المتتالية $1,2,4,12,24,...$ ليست متتالية هندسية

5. $7,7,7,7,...$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\frac{7}{7}=1$$

وبالتالي المتتالية $7,7,7,7,...$ فهي متتالية هندسية أساسها $r=1$

6. $a_n=3^n$

$$a_k=3^4$$

$$a_{k+1}=3^{k+1}$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{3^{k+1}}{3^k}=3^{k+1-k}=3$$

إذاً المتتالية $a_n=3^n$ متتالية هندسية وأساسها $r=3$.

الحد العام للمتتالية الهندسية (الحد النوني):

الحد العام a_n للمتتالية الهندسية المعلوم فيها الحد الأول a_1 والأساس r يعطى بالعلاقة التالية:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال:

لدينا متتالية هندسية حدها الأول 3 وأساسها 2 أوجد ما يلي:

١. الحد العام للمتتالية الهندسية.

٢. الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الهندسية.

٣. الحد العاشر.

الحل:

١. الحد العام هو $a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = 3 \qquad\qquad r = 2$

$a_n = 3(2)^{n-1}$

٢. الحدود الخمسة الأولى للمتتالية الهندسية

$a_n = 3(2)^{n-1}$

$n = 1 \qquad a_1 = 3$

$n = 2 \qquad a_2 = 3(2)^{2-1} = 3(2) = 6$

$n = 3 \qquad a_3 = 3(2)^{3-1} = 3(2)^2 = 12$

$n = 4 \qquad a_4 = 3(2)^{4-1} = 3(2)^3 = 24$

$n = 5 \qquad a_5 = 3(2)^{5-1} = 3(2)^4 = 48$

إذا الحدود الخمسة الأولى للمتتالية هي: 3,6,12,24,48

ملاحظة:

يمكن تطبيق طريقة سهلة لحل الفرع الثاني من المثال السابق وهي أن نضع الحد الأول $a_1 = 3$ ثم نضربه بقيمة الأساس $r = 2$ لإيجاد الحد الثاني ولإيجاد الحد الثالث نضرب الحد الثاني بقيمة الأساس $r = 2$ وهكذا كما يلي:

$$\begin{array}{ccccccccc} & r & & r & & r & & r & \\ a_1 & \rightarrow & a_2 & \rightarrow & a_3 & \rightarrow & a_4 & \rightarrow & a_5 \\ 3 & \rightarrow & 6 & \rightarrow & 12 & \rightarrow & 24 & \rightarrow & 48 \\ & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & \end{array}$$

٣. الحد العاشر كتطبيق للحد العام:

$$a_{10} = 3(2)^{n-1} = 3(2)^{10-1} = 3(2)^9 = 3(512) = 1536$$

$$a_{10} = 1536$$

مثال:

للمتتالية الهندسية التي فيها الحد الثالث 32 وأساسها $\frac{1}{2}$ أوجد الحد العاشر.

الحل:

في البداية نوجد الحد الأول عن طريق الحد الثالث.

$$a_3 = 32 \qquad r = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \div r & & \div r & & \times r & \\ a_1 & \leftarrow & a_2 & \leftarrow & a_3 & \rightarrow & a_4 \end{array}$$

$$a_2 = \frac{a_3}{r} = \frac{32}{1/2} = 64$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{64}{1/2} = 128$$

نوجد الحد العام (الحد النوني):

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{10} = 128\left(\frac{1}{2}\right)^9 = 128\left(\frac{1}{512}\right) = \frac{1}{4}$$

$$a_{10} = \frac{1}{4}$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونلقاكم إن شاء الله في الحلقة القادمة.

المحاضرة الثالثة والثلاثون

فهذه الحلقة الثالثة والثلاثون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وما زلنا في الوحدة الخامسة وهي المتتاليات

مجموع أول n حدًا من متتالية هندسية:

و إذا كانت $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية هندسية حدها الأول هو a_1 وأساسها $r \neq 1$ فإن مجموع الـ n حدًا الأولى S_n يتحدد بالقانون:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}}$$

إذاً يلزمني لإيجاد S_n إيجاد الحد الأول a_1 وقيمة r ويلزمني أيضًا قيمة n وهي عدد الحدود المراد جمعها.

مثال:

أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتالية الهندسية $8, -16, 32, \ldots$

الحل:

$$a_1 = 8 \qquad r = \frac{-16}{8} = -2$$

ولإيجاد مجموع الحدود الستة نستخدم القانون التالي:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_6 = 8\frac{(-2)^6 - 1}{-2 - 1} = 8\frac{64 - 1}{-3}$$

$$= 8\frac{63}{-3} = 8(-21) = -168$$

مثال:

أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{5} a_k$ حيث أن a_n متتالية هندسية حدها الثالث 18 وأساسها 3 .

الحل:

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

وبالتالي يمكن استخدام قانون مجموع أول خمس حدود حيث:

$$n = 5 \qquad r = 3 \qquad a_3 = 18$$

فلاستخدام القانون نوجد الحد الأول لاستخدام قانون المجموع للمتتالية الهندسية.

ولأنه لدينا الحد الثالث فنوجد الحد الثاني ثم نوجد الحد الأول وذلك بقسمة الحد الثالث على الأساس ثم قسمة الحد الثاني على الأساس فنوجد الحد الأول.

$$a_2 = \frac{a_3}{r} = \frac{18}{3} = 6$$

$$a_1 = \frac{a_2}{r} = \frac{6}{3} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a_1 = 2$$

ونستخدم القانون لإيجاد مجموع أول خمس حدود:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_5 = 2 \times \frac{(3)^5 - 1}{3 - 1} = 2 \times \frac{243 - 1}{2} = 2 \times \frac{242}{2} = 2 \times (121) = 242$$

$$S_5 = 242$$

مثال:

أوجد مجموع أول عشرة حدود لمتتالية هندسية حدها الأول 4 وحدها الثاني -4 .

الحل: لنوجد أساس المتتالية من قسمة الحد الثاني على الحد الأول

$$a_1 = 4 \qquad a_2 = -4 \qquad n = 10$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

$$S_{10} = a_1 \left(\frac{r^{10} - 1}{r - 1} \right) = 4 \left(\frac{(-1)^{10} - 1}{-1 - 1} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{1 - 1}{-2} \right) = 4 \left(\frac{0}{-2} \right) = 0$$

$$S_{10} = 0$$

<u>مثال:</u>

أوجد مجموع أول عشرة حدود لمتتالية هندسية حدها الأول 3 وحدها الثاني 3

<u>الحل:</u>

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3 \qquad n = 10$$

والأساس غير معلوم فيجب إيجاد قيمة الأساس بقسمة الحد الثاني على الحد الأول:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{3} = 1$$

ولأن الأساس يساوي 1 فلا يستخدم القانون لأن شرط القانون أن يكون $r \neq 1$

فالمتتالية ستكون في هذه الحالة لأن أساسها يساوي 1 يكون كالآتي:

$$3,3,3,\ldots,3$$

وبالتالي فإن مجموع أول عشرة حدود سيكون حاصل ضرب عدد الحدود التي نريد ضربها وهي 10 في الحد الأول وهو 3 فيكون كالتالي:

$$S_{10} = a_1 \times n = 3 \times 10 = 30$$

<u>الوسط الهندسي:</u>

إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين فإن الوسط الهندسي لهما c هو العدد $\sqrt{ab}$.

في هذه الحالة تشكل a,c,b متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها $r = \sqrt{\frac{b}{a}}$ كما أن $c^2 = ab$.

<u>مثال:</u>

أوجد الوسط الهندسي للعددين 3 و 12

<u>الحل:</u>

لدينا العددين 3 و 12 والوسط الهندسي لهما هو:

$$\sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

ونلاحظ إذا رتبنا الأعداد كالتالي: 3,6,12 فهذه الأعداد تمثل متتالية هندسية ونلاحظ أن الأساس يساوي 2 وقد تم استخراجه وإيجاده من القانون $r = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

وإذا رتبنا الأعداد كالتالي: 12,6,3 فهذه الأعداد تمثل متتالية هندسية ونلاحظ أن الأساس فيها يساوي $\frac{1}{2}$. وقد تم استخراجه وإيجاده من القانون $r = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

ومطلوب في هذا المثال فقط إيجاد الوسط الهندسي وقد أوجدناه ويساوي 6.

تعميم:

نسمي الأعداد $c_1,c_2,c_3,....,c_n \in \mathbb{R}$ ، n أوساطًا هندسية بين العددين الموجبين a و b إذا كانت المتتالية:

$a,c_1,c_2,c_3,....,c_n,b$ متتالية هندسية أساسها $r=\sqrt[n+1]{\dfrac{b}{a}}$

إن عملية إدخال n من الأوساط الهندسية بين العددين a و b هي عبارة عن تكوين متتالية هندسية حدها الأول a وحدها الأخير b ويكون عدد حدودها يساوي $n+2$.

مثال:

أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين 1 و 32 .

الحل:

ونريد إيجاد في البداية الأساس r ثم نوجد الأوساط الهندسية.

فنريد أن نوجد الأوساط الهندسية: c_1,c_2,c_3,c_4 بحيث يكونوا مع الحدين متتالية هندسية كالتالي:
$1,c_1,c_2,c_3,c_4,32$ فيكون $a_1=1$ و $a_6=32$

ويكون الأساس r كالتالي:

$$r=\sqrt[4+1]{\frac{32}{1}}=\sqrt[5]{32}=2$$

$$c_1=a_1\times r=1\times 2=2$$

$$c_2=c_1\times r=2\times 2=4$$

$$c_3=c_2\times r=4\times 2=8$$

$$c_4=c_3\times r=8\times 2=16$$

وممكن إيجاد c_1,c_2,c_3,c_4 كالتالي:

$$a_1=1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32$$

هذا هو الحد الأول والأخير وبينهما الأوساط الأربعة المطلوبة.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة نرجو أن تكونوا قد استفدتم منها ونلقاكم إن شاء الله في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الرابعة والثلاثون

أعزائي الطلبة السلام عليكم ورحمة الله وبركاته وهذه الحلقة هي الحلقة الرابعة والثلاثين من حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

سنبدأ في هذه الحلقة بالفصل السادس وعنوان هذا الفصل هو الدوال.

والدوال لها تطبيقات مذهلة في سائر العلوم وبالأخص في علم الاقتصاد والإدارة.

الدوال

تعريف الدالة:

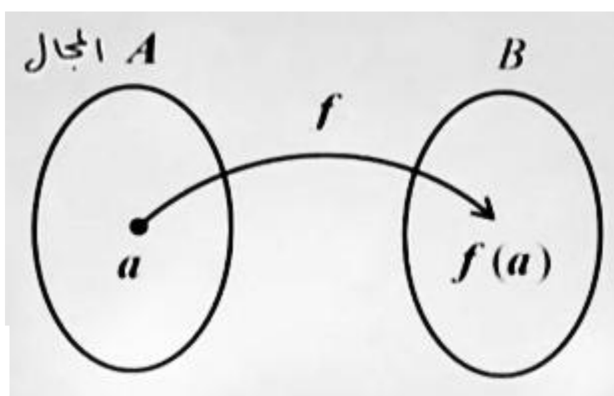
الدالة هي مجموعة A إلى المجموعة B وتكتب على الصورة $f : A \to B$ هي علاقة تربط كل عنصر $a \in A$ بعنصر وحيد $b \in B$ يسمى صورة a ويرمز له بالرمز $f(a)$. كما نسمي المجموعة A مجال تعريف الدالة f والمجموعة B المجال المقابل لها.

شرطا تعريف الدالة:

١. لكل $a \in A$ يوجد صورة $f(a) \in B$.

٢. الصورة $f(a)$ وحيدة بمعنى أنه لا يكون صورتين مختلفتين $b_1, b_2 \in B$ أو أكثر لنفس العنصر $a \in A$.

ويمكن للتوضيح تمثيل الدوال بأشكال فن:

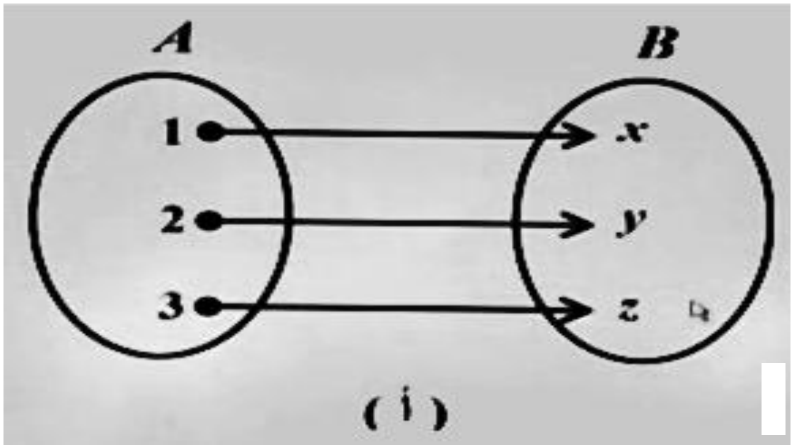


حيث A للدالة f تمثل المجال و B تمثل المجال المقابل للدالة f .

مثال:

أي من الأشكال التالية تمثل دالة أيها لا تمثل دالة.

الحل:



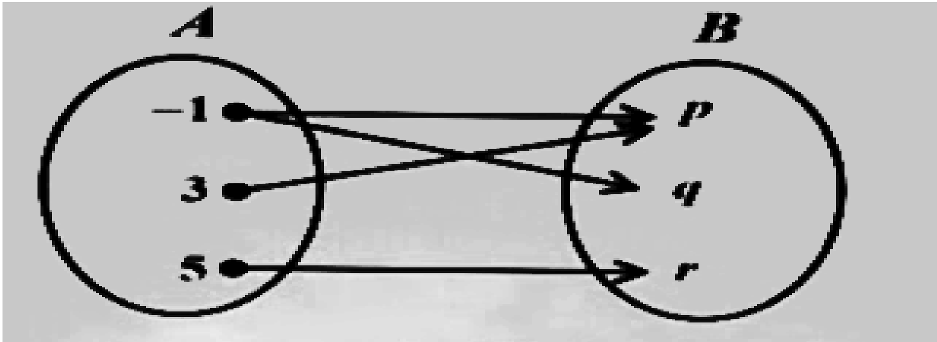
ونلاحظ هنا الأسهم تمثل الارتباط بين المجال والمجال المقابل. فهل في هذا الشكل يتحقق شرطي تعريف الدالة أم لا. فإذا تحقق الشرطان فإن الشكل تمثل دالة.

فالشرط الأول من تعريف الدالة أنها يجب أن كل عنصر في المجال أن يرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل. وهذا متحقق فنلاحظ أن العنصر 1 مرتبط بعنصر واحد وهو العنصر x . والعنصر 2 مرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل وهو y . والعنصر 3 مرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل وهو العنصر z .

أما الشرط الثاني وهو أن يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابل وهذا أيضًا متحقق فنلاحظ أن العنصر 1 مرتبط بعنصر واحد وهو العنصر x . والعنصر 2 مرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل وهو y . والعنصر 3 مرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل وهو العنصر z .

إذاً فإن هذا الشكل يشكل دالة.

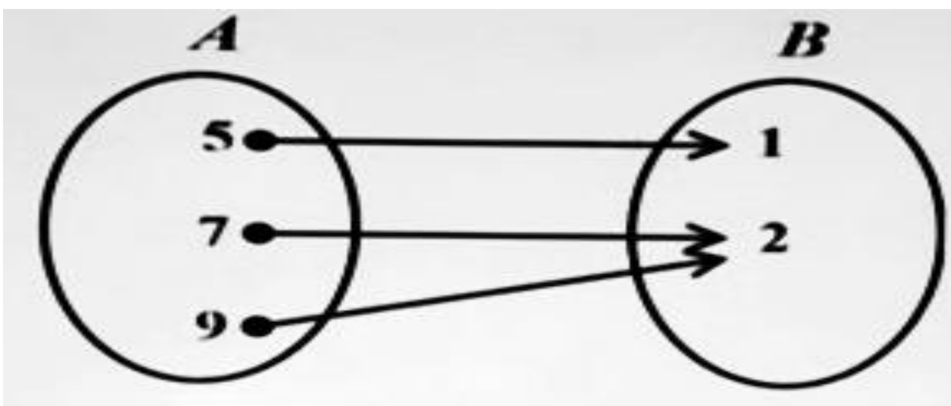
نأتي إلى الشكل الآخر وهو:



(ب)

هل شرطي تعريف الدالة متحقق. نلاحظ هنا في الشكل (ب) أن العنصر -1 وهو في المجال مرتبط بعنصرين في المجال المقابل وهو p,q وهذا منافي لتعريف الدالة وهو منافي للشرط الثاني للدالة وبالتالي فإن (ب) لا يمثل دالة.

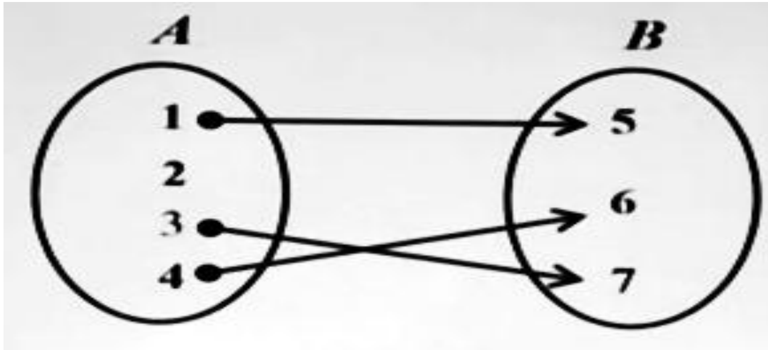
والشكل التالي هو كما يلي:



(جـ)

فنلاحظ أن كل عنصر من عناصر المجال مرتبط بعنصر في المجال المقابل فنلاحظ أن كل عنصر 5 مرتبط بعنصر 1 وعنصر 7 مرتبط بعنصر 2 وعنصر 9 مرتبط بعنصر 2 ونلاحظ هنا لا بأس أن يكون عنصرين في المجال أو أكثر مرتبطة بعنصر واحد في المجال المقابل كما في هذا الشكل نلاحظ أن العنصر 7 والعنصر 9 مرتبط بعنصر واحد في المجال المقابل وهو العنصر 2 وبذلك تصبح الشكل (جـ) يمثل دالة.

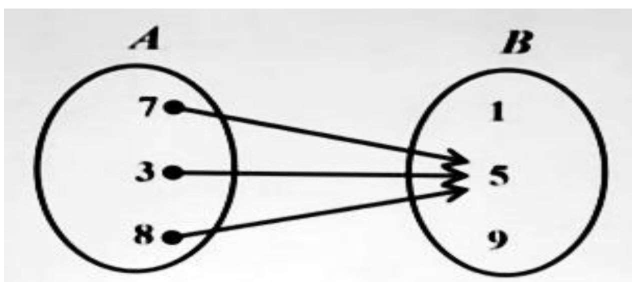
والشكل التالي:



(د)

نلاحظ في الشكل أن العنصر 2 في المجال لا يرتبط بأي عنصر في المجال المقابل وهذا ينافي الشرط الأول في تعريف الدالة فالشرط الأول يقول أن لكل عنصر في المجال يجب أن يرتبط بعنصر في المجال المقابل ولكن العنصر 2 لا يرتبط بعنصر في المجال المقابل ولذلك فالشكل (د) لا يمثل دالة.

وفي الشكل التالي:



(هـ)

هناك ثلاثة عناصر في المجال وهما 7,3,8 وثلاثة عناصر أخرى في المجال المقابل 1,5,9 ولكن عناصر المجال كلها مرتبطة بالعنصر 5 في المجال المقابل. ونلاحظ أن كل عنصر في المجال مرتبط ارتباط وحيد بالعنصر 5 وبذلك شرطي الدالة متحقق على الرغم من أنهم ارتبطوا بالعنصر واحد في المجال المقابل وهو العنصر 5 ولكن هذا لا ينافي الشرطان لتعريف الدالة فيصبح الشكل (هـ) يمثل الدالة.

الدالة كمجموعة أزواج مرتبة:

لتكن $f: A \to B$ دالة فيها B و A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ عندئذٍ يمكن كتابة f على الصورة:

$$f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

مثال:

لتكن $A = \{-1,1,2,3\}$ و $B\{1,4,5,7,9\}$ ولنعرف الدالة $f: A \to B$ بالقاعدة $f(a) = a^2$ لكل $a \in A$:

اكتب الدالة f كأزواج مرتبة ومثلها بأشكال فن.

الحل:

$f(a) = a^2 \qquad A = \{-1,1,2,3\}$

$a = -1 \qquad f(-1) = (-1)^2 = 1 \qquad (-1,1)$

$a = 1 \qquad f(1) = (1)^2 = 1 \qquad (1,1)$

$a = 2 \qquad f(2) = (2)^2 = 4 \qquad (2,4)$

$a = 3 \qquad f(3) = (3)^2 = 9 \qquad (3,9)$

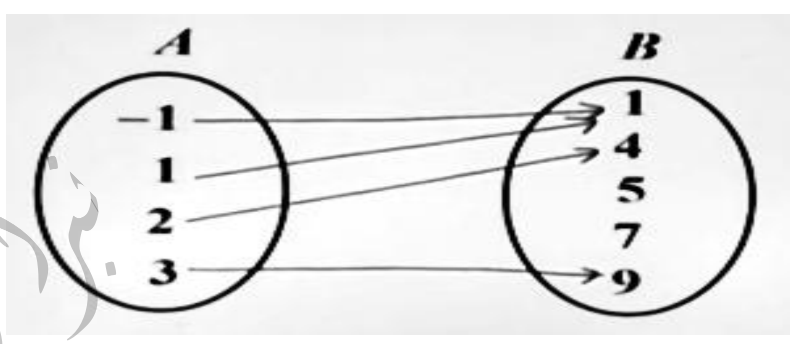
إذاً f كأزواج مرتبة تكون كالآتي:

$$f = \{(-1,1), (1,1), (2,4), (3,9)\}$$

نلاحظ أننا يجب أن نتأكد أن الصورة تكون في المجال المقابل. وإذا كانت الصورة لا تنتمي للمجال المقابل فإن الدالة f لا تكون دالة.

أما تمثيل الدالة بأشكال فن كالتالي:

فنريد ربط كل عنصر في المجال بصورته في المجال المقابل فيكون التمثيل كالتالي فعندما حسبنا الأزواج المرتبة فكانت التمثيل كالتالي:



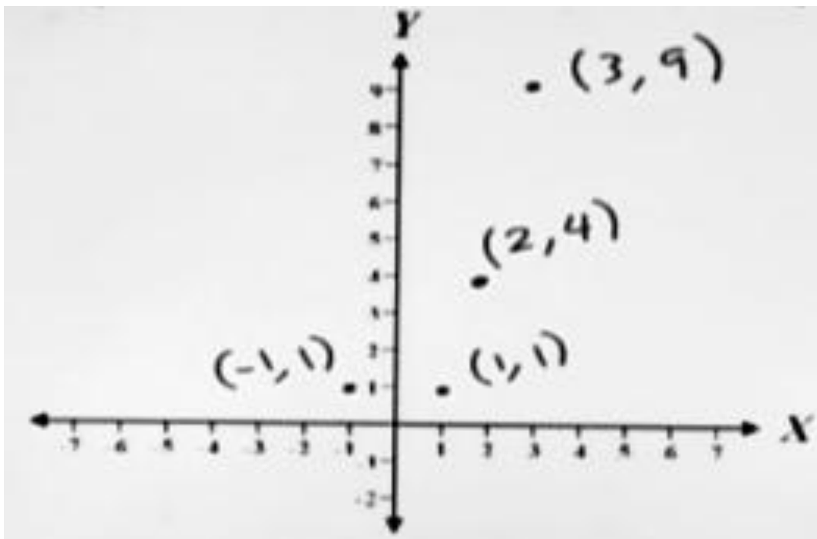
مثال:

مثل الدالة في المثال السابق في المستوى الديكارتي:

سنمثل الأزواج المرتبة في المثال السابق بالمستوى الديكارتي.

والأزواج المرتبة في الدالة كما كانت في المثال السابق كالآتي:

$$f = \{(-1,1),(1,1),(2,4),(3,9)\}$$



ويجب أن يكون لدينا أزواج مرتبة للدالة لتمثيلها بالنقاط في المستوى الديكارتي.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الخامسة والثلاثون

أعزائي الطلبة هذه الحلقة هي الحلقة الخامسة والثلاثون

ومازلنا في الفصل السادس وهو بعنوان الدوال وسنأخذ اليوم الدوال المعرفة على فترات حقيقية.

مثال على الدوال المعرفة على فترات حقيقية:

لنعرف الدالة $f:[0,4)\rightarrow \mathbb{R}$ بالقاعدة $f(x)=3x$ لكل $x\in[0,4)$:

١. أوجد الصورة $f(1),\ f(2),\ f(4)$.

٢. مثل الدالة بالمستوى الديكارتي.

الحل:

لدينا القاعدة التالية: $f(x)=3x$

الصور المراد إيجادها هي:

$$f(1)=3(1)=3$$

$$f(2)=3(2)=6$$

$f(4)$ غير معرفة

وصورة $f(4)$ غير معرفة لأن العنصر 4 غير موجود في الفترة $[0,4)$ لأن الفترة مفتوحة من ناحية الرقم 4 فالعنصر 4 ليست من ضمن المجال للدالة.

ولدينا الدالة في المطلوب الثاني $f(x)=3x$ لكل $x\in[0,4)$

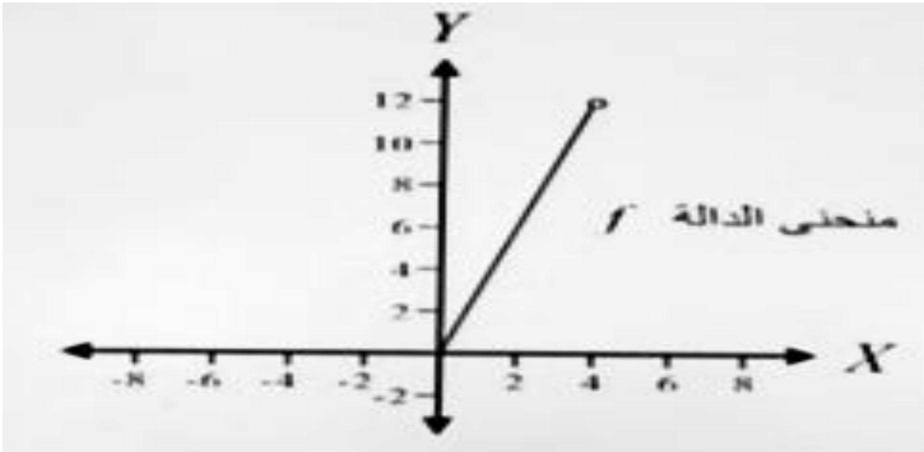
وبما أن الصورة $f(x)$ تقابل الإحداثي الصادي Y فيمكن التعبير عن الصورة $f(x)$ بالصورة التالية:

$$y=3x$$

ونعرف أن هذه المعادلة هي خط مستقيم ميله 3 ويمر بنقطة الأصل.

والشكل التالي يبين $f(x)=3x$ لكل $x\in[0,4)$ للفترة $[0,4)$ فنلاحظ أن العنصر 0 هو بداية الفترة ويدخل في الفترة والعنصر 4 هو نهاية الفترة ولا يدخل ضمن الفترة لأن الفترة مفتوحة من ناحيته ولذلك يمثل بدائرة مجوفة بيضاء من الداخل لتدل على أن العنصر 4 ليس من ضمن مجال الفترة.

مركز نبـــــراس
0114828957



فالمستقيم يمثل الدالة وكل النقط الواقعة على المستقيم هي من ضمن الدالة لأنها تنتمي إلى فترة مجال الدالة وهي $[0,4)$.

<u>الدالة الخطية:</u>

هي أي دالة على الصورة $f(x)=ax+b$ حيث a و b أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

<u>مثال:</u>

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ علاقة معرفة بالقاعدة:

$f(x)=|x|$ لجميع القيم $x \in \mathbb{R}$

١. أثبت أن f في الواقع دالة.

٢. أوجد الصور $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

٣. ما هي العلاقة بين $f(x)$ و $f(-x)$.

<u>الحل:</u>

١. سنثبت تحقق شرطي تعريف الدالة المذكورين أعلاه فنلاحظ:

أ) لأي $x \in \mathbb{R}$ فإن القيمة المطلقة $|x|$ دائمًا معرفة فأي عدد حقيقي يوجد له قيمة مطلقة.

ب) إن القيمة المطلقة $|x|$ وحيدة لذا فإن الصورة $f(x)=|x|$ وحيدة. فلا يوجد لأي عدد يوجد قيمة واحدة مطلقة لهذا العدد.

من تحقق (أ) و(ب) ينتج أن f دالة.

المطلوب الثاني يكون كما يلي:

$$f(x)=|x|$$
$$f(0)=|0|=0$$
$$f(1)=|1|=1$$
$$f(-1)=|-1|=1$$

المطلوب الثالث يكون كالتالي:

فنريد إيجاد العلاقة بين $f(x)$ و $f(-x)$

$$x=0$$
$$f(x)=|0|=f(-x)$$

وهذه تساوي القيمة المطلقة في كل من $f(x)$ و $f(-x)$ عندما يكون $x=0$

$$x>0$$
$$f(x)=|x|=x=|-x|=f(-x)$$

وهذه تساوي القيمة المطلقة في كل من $f(x)$ و $f(-x)$ عندما يكون $x>0$

$$x<0$$
$$f(x)=|x|=-x=f(-x)$$

وهذه تساوي القيمة المطلقة في كل من $f(x)$ و $f(-x)$ عندما يكون $x<0$

إذا فيكون في جميع الحالات يكون $f(x)$ و $f(-x)$

مثال:

لنعتبر العلاقة $g:[-1,1]\rightarrow\mathbb{R}$ حيث $g(x)=\sqrt{x}$ ناقش هل هذه العلاقة دالة أم لا؟

الحل:

من المعروف أن الجذر التربيعي يجب أن يكون موجب أو صفر ولا يكون هناك جذر لعدد سالب على وجه الخصوص.

فإذا $\sqrt{-1}$ غير معرف لأن العدد الذي يؤخذ جذره التربيعي لابد أن يكون موجبًا، أي أن الصورة $g(-1)$ غير موجودة لذلك فإن العلاقة g ليست دالة.

الدالة التربيعية:

تكون الدالة $y = f(x)$ دالة تربيعية أي دالة من الدرجة الثانية إذا كانت على الصيغة:

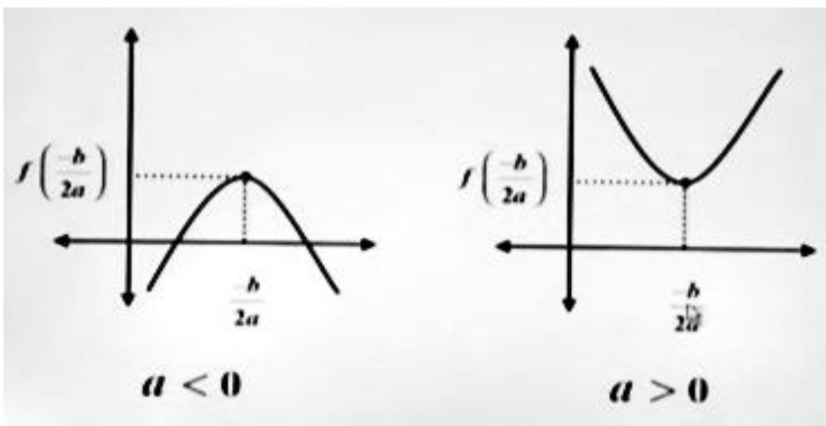
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

حيث $a,b,c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$

وسميت بذلك لأن أكبر أس للمتغير x هو العدد 2 ويسمى a هو معامل x^2 و b معامل x و c هو الحد المطلق.

ومجال الدالة التربيعية دائمًا هو مجموعة الأعداد الحقيقية إلا إذا تم تحديده مسبقًا.

وعندما تمثيل الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ بيانيًا على المستوى الديكارتي فإن الشكل الناتج يسمى قطع مكافئ فيكون على الصورة:



وهذا الرسم يسمى القطع المكافئ وقد يكون فتحته لأعلى وقد يكون فتحته لأسفل وذلك حسب إشارة a . فإذا كانت إشارة a موجبة أي أن معامل x^2 موجب فإنه سيكون فتحة القطع المكافئ تكون لأعلى. وإذا كانت إشارة a سالبة أي أن معامل x^2 سالب فإنه سيكون فتحة القطع المكافئ تكون لأسفل.

وإحداثي الرأس يكون السيني يكون $\frac{-b}{2a}$ والإحداثي الصادي $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ يكون ويمكن كتابته كزوج مرتب كالآتي:

$$\left(\frac{-b}{2a}\,,\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

مثال:

للدالة $f(x)=2x^2+8x-1$ أوجد:

١. معامل x^2 ومعامل x والحد المطلق.

٢. إحداثيات نقطة رأس القطع المكافئ.

الحل:

١. معامل x^2 هو 2.

معامل x هو 8

والحد المطلق هو -1

٢. أما إحداثيات رأس القطع هي:

$$a=2 \qquad b=8 \qquad c=-1$$

$$\left(\frac{-b}{2a}\,,\ f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

$$\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{2(2)}=\frac{-8}{4}=-2$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)= f(-2)=2(-2)^2+8(-2)-1$$

$$=8-16-1=-9$$

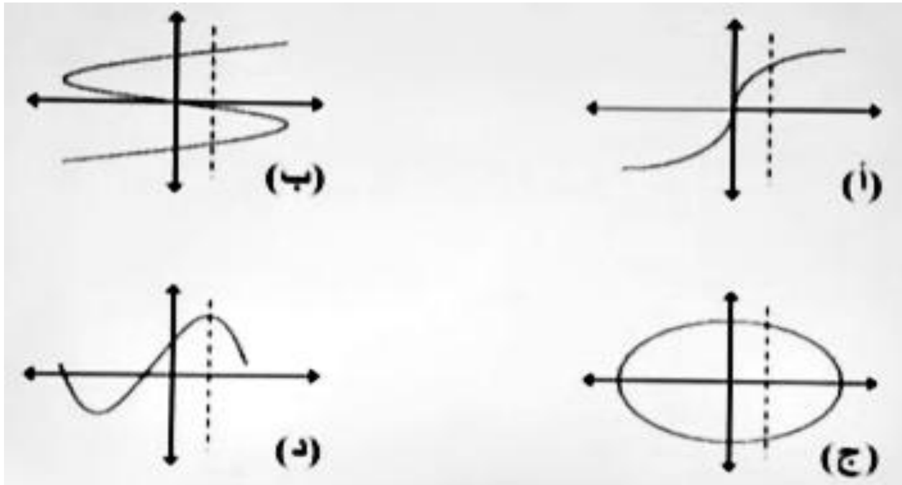
إذا إحداثيات نقطة الرأس هي: $(-2,-9)$

معيار تمثيل منحنى الدالة:

إذا أعطينا منحنى في المستوى الديكارتي فإنه يلزم ويكفي لنقول هذا المنحنى يمثل دالة أن يحقق الشرط التالي:

إذا أنشأنا عمودًا من أي نقطة على المحور السيني X فإنه يقطع المنحنى المعطى في نقطة واحدة على الأكثر.

ولتوضيح ذلك أنظر إلى الأشكال التالية:



في الشكل (أ) نلاحظ أننا لو أنشأنا أي عمود من أي نقطة على المحور السيني X فإنه يقطع نقطة واحدة على الأكثر ولذلك يمكن أن نقول أن المنحنى في الشكل (أ) يمثل دالة.

ولكن في الشكل (ب) إذا أقمنا أي عمودًا على محور السينات فنجد أن العمود قطع المنحنى في ثلاث نقاط ولذلك فإن المنحنى في الشكل (ب) ليس دالة.

وأيضًا في الشكل (ج) نجد أن أي عمود منشأ على محور السينات يقطع المنحنى في أكثر من نقطة واحدة فمعنى ذلك أن المنحنى في الشكل (ج) ليس دالة.

بينما في الشكل (د) نجد أن العمود المنشأ على محور السينات يقطع المنحنى في نقطة واحدة فقط فلذلك فإن المنحنى في الشكل (د) يمثل دالة.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة وإلى اللقاء إن شاء الله في الحلقة القادمة.

المحاضرة السادسة والثلاثون

فهذه الحلقة السادسة والثلاثون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وفي هذه الحلقة سبنبدأ في الفصل السابع وهو تفاضل الدالة.

وعلم التفاضل من أهم فروع الرياضيات وله تطبيقات عملية واسعة ومتنوعة في العلوم الطبيعية والاقتصادية والإدارية.

وقبل أن نبدأ في مفهوم التفاضل سنبدأ في مفهوم النهاية والاتصال أولاً.

مدخل لتفاضل الدوال

مفهوم النهاية:

لنعتبر الدالة: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ بحيث أن يكون $x\neq 1$.

ولنتتبع قيم الدالة $f(x)$ حول $x=1$ كما في الجدول التالي:

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999		2.001	2.01	2.1

ولقد أخذنا قيمة x على يسار 1 أي أقل من العدد 1 وأخذنا أيضًا قيم على يمين العدد أي أكبر من العدد 1 ونلاحظ أننا كلما اقتربنا من العدد 1 ولكن لا تأخذ القيمة 1 سواء من اليمين أو اليسار فإن قيمة $f(x)$ تقترب من العدد 2 وتشير هذه الحقيقة إلى:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من 1 هي 2 ويعبر عن هذا رمزيًا على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

أما الرمز $x\to 1$ يدل على أن x تقترب من 1 ولا تساويها.

وتكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أكبر من 1 على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$$

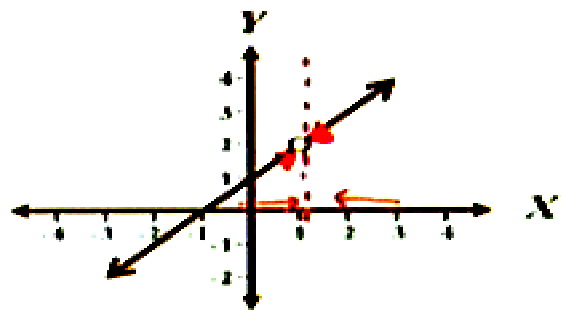
وتسمى نهاية الدالة من جهة اليمين حيث يدل الرمز $x\to 1^+$ على اقتراب x من يمين العدد 1.

وتكتب نهاية الدالة عندما يكون اقتراب x بقيم أصغر من 1 على النحو التالي:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=2$$

وتسمى نهاية الدالة من جهة اليسار، حيث يدل الرمز $x\to 1^-$ على اقتراب x من يسار العدد 1.

ويوضح الشكل التالي أن الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ غير معرفة عند النقطة $x=1$ إلا أن قيمة الدالة تقترب من 2 عندما تقترب x من 1 من جهة اليمين أو من جهة اليسار.



فقد وضعنا دائرة عند قيمة الدالة 1 على المحور السيني فلو أنشأنا على العدد 1 خط منقط فعندما تقترب قيم X من اليمين أو من اليسار إلى العدد 1 فإن $f(x)$ تقترب من العدد 2 على المحور الصادي Y. سواء من اليمين أو من اليسار.

<u>نهاية الدالة عند نقطة:</u>

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على جميع النقاط القريبة من النقطة $x=a$، وكانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من عدد معين L عندما تقترب x من العدد a سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار. عندئذٍ نقول إن نهاية الدالة عندما تقترب x من a هي L. ونعبر عن ذلك رمزيًا على الصورة:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

وهنا يجب أن نشير إلى بعض الملاحظات

<u>ملحوظات:</u>

١. إذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ فإن: $\lim_{x\to a} f(x)=L$

٢. إذا كانت $\lim_{x\to a^+} f(x)\neq\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ فإن: $\lim_{x\to a} f(x)=L$ غير موجودة

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 2} 2x+3$

<u>الحل:</u>

نكون الجدول التالي:

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	6.8	6.98	6.998	7	7.002	7.02	7.2

فنلاحظ من الجدول أن قيم x عندما تقترب من اليمين أو من اليسار إلى 2 فإن قيم $f(x)$ أيضًا تقترب إلى قيمة واحدة وهي 7

يبين لنا الجدول أن: $\lim\limits_{x\to a^+}(2x+3)=\lim\limits_{x\to a^-}(2x+3)=7$

وبما أن النهاية للدالة $2x+3$ من اليمين تساوي نهاية الدالة $2x+3$ من اليسار فإن النهاية للدالة $2x+3$ عندما x تقترب من العدد 2 تساوي العدد 7. أي أن:

$$\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$$

ونظرًا لاستخدام الجدول لبعض الدوال يكون غير دقيق فإنه لابد من خصائص وقوانين توضح لنا كيفية نهاية أكثر فاعلية وأكثر سرعة.

خصائص النهايات:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين في x وكان $c,a \in \mathbb{R}$ فإن:

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

أي أن نهاية الدالة لأي عدد ثابت تكون نهايته هي نفس العدد الثابت عندما دالته تقترب إليه.

2. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

3. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right].\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]$

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad , \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{10} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{10}$

ملاحظة:

إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة الحدود وكان a عدد حقيقي فإن:

$$\lim f(x) = f(a)$$

مثال:

إذا كانت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 3 \\ 2x - 3 & x > 3 \end{cases}$$

فأوجد ما يلي:

1. $\lim f(x)$
2. $\lim f(x)$
3. $\lim f(x)$

<u>الحل:</u>

1. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(2x-3) = 3$
2. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-x) = 6$
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

والسبب أن : $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة ما يلي:

1. $\lim\limits_{x\to 2} 5 = 5$

وهو نفس الثابت

2. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$
3. $\lim\limits_{x\to -2} -3x^3 = -3\lim\limits_{x\to -2} x^3 = -3(-2)^3 = 24$
4. $\lim\limits_{x\to -1}(2x^2+5x-4) = 2(-1)^2+5(-1)-4 = 2-5-4 = -7$
5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-8}{x+2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 4}(2x-8)}{\lim\limits_{x\to 4}(x+2)} = \dfrac{2(4)-8}{4+2} = \dfrac{0}{6} = 0$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+1}{2-x}\right)^5 = \left(\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2-x)}\right)^5 = \left(\dfrac{2}{1}\right)^5 = (2)^5 = 32$

<u>مثال:</u>

أوجد قيمة كل مما يلي:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x-3} = \dfrac{3^2-3(3)}{3-3} = \dfrac{9-9}{3-3} = \dfrac{0}{0}$

ونلاحظ أن النهاية ستكون قيمتها $\dfrac{0}{0}$ وهو غير معرف ولكن نحللها كما يلي:

$$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x = 3$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة السابعة والثلاثون

فهذه الحلقة السابعة والثلاثون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وما زلنا في الفصل السابع وهو مدخل للتفاضل.

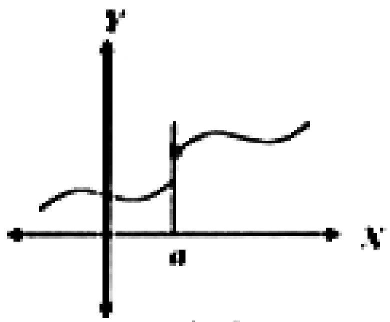
<u>اتصال الدالة:</u>

نقصد بقولنا أن الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ أن منحنى الدالة $f(x)$ متصل دون انقطاع خلال الفترة $[a,b]$ التي يتغير فيها x .

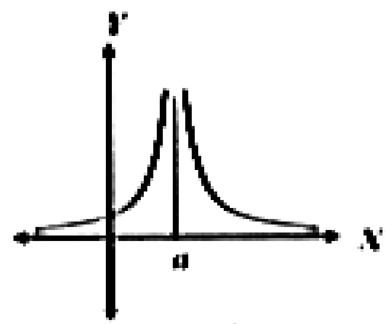
أي يكون منحنى الدالة في هذه الحالة خاليًا من الانقطاعات أو القفزات

وهذا يعني أن $f(x_0)$ معرفة عند كل نقطة x_0 في الفترة $[a,b]$ وأن $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

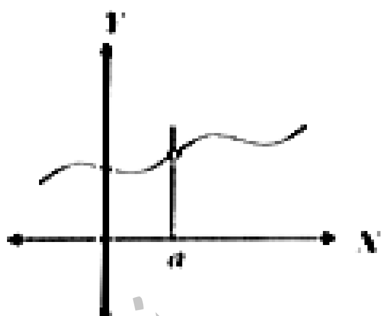
أما النقط التي يحدث عندها انقطاع في المنحنى الممثل للدالة فتسمى نقط عدم الاتصال (أي أن الدالة غير متصلة عندها).



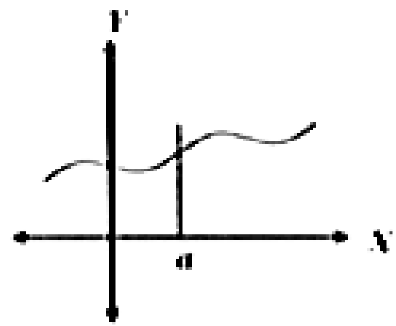
الشكل A



الشكل B



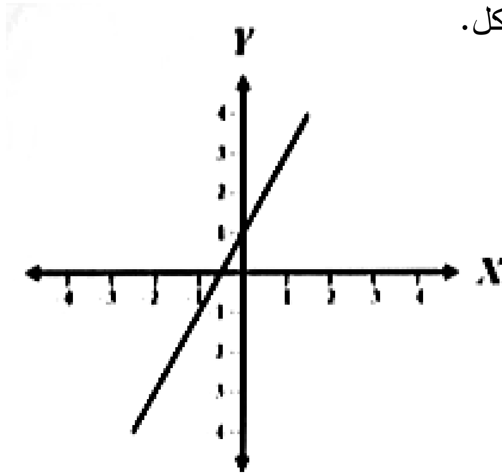
الشكل C



الشكل D

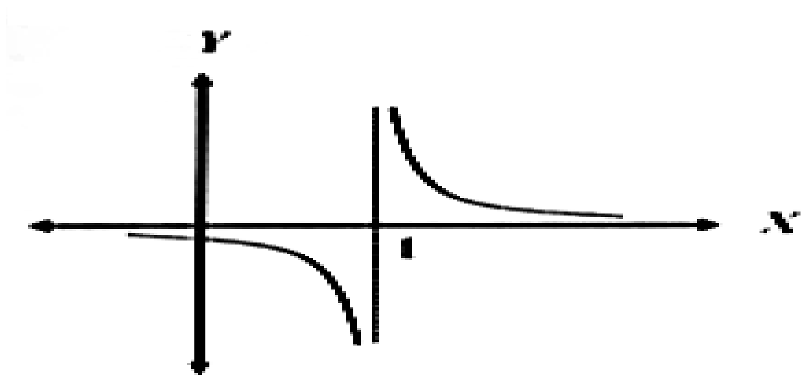
نلاحظ أن الشكل A,B,C وجود انقطاع عند منحنى الدالة أما الشكل D لا يوجد بها انقطاع في المنحنى ولذلك نستطيع القول أن المنحنى في الشكل D متصلة.

الدالة $f(x)=2x+1$ إذا رسمنا هذه الدالة نجد من الشكل أن منحنى الدالة متصلة عند أي قيمة منتمية إلى $\mathbb{R}$ كما هو موجود في الشكل.



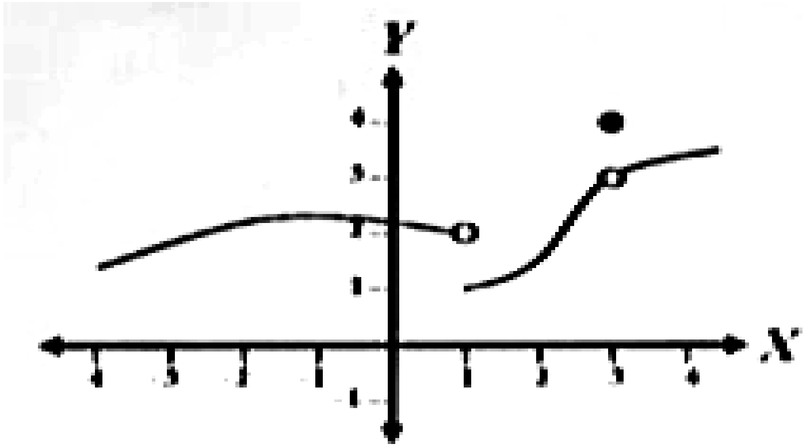
في هذه الحالة نستطيع القول أن الدالة $f(x)=2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$ ولا يوجد بها انقطاع.

أما الدالة $f(x)=\dfrac{2}{-1}$



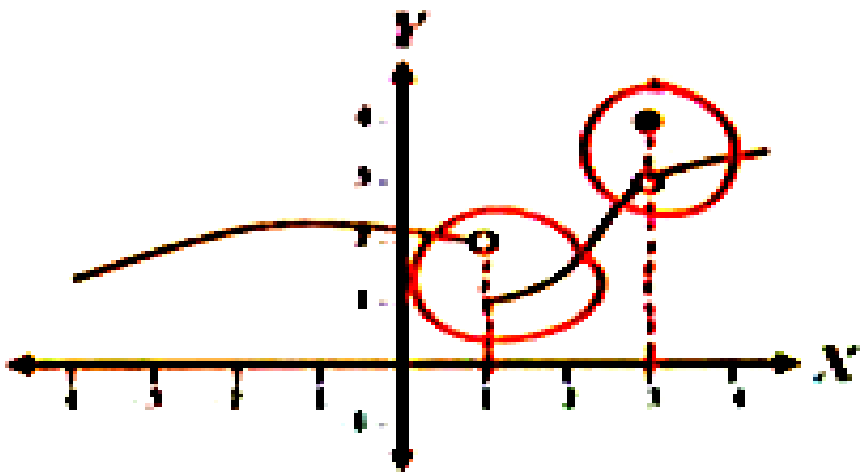
فهي غير متصلة كما في الشكل السابق ومنحنى الدالة منقطع وغير متصل عند $x=1$ لأن المقام عند $x=1$ يساوي 0 فهو غير معرف عند القيمة 1 فالمنحنى يكون غير متصل عند القيمة 1 ولذلك يكون الدالة $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ متصلة على $\mathbb{R}-\{1\}$ أي متصلة عدا عند القيمة 1 ويوجد انقطاع وقفزة عند القيمة 1 كما بالشكل السابق.

مثال:



أوجد نقاط عدم الاتصال للدالة الممثلة بالمنحنى في الشكل السابق

الحل:



إذا نظرنا إلى المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ فنجد أن هناك انقطاع في المنحنى عند النقطة التي تساوي 1 وأيضًا عند النقطة التي تساوي 3 .

والحل يكون نقاط عدم الاتصال للدالة $f(x)$ هي عند $x=1$ و $x=3$.

اتصال الدالة عند نقطة:

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $x=a$ إذا كان:

١. الدالة $f(x)$ معرفة عند النقطة $x=a$.
٢. نهاية الدالة $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من a .
٣. $\lim f(x) = f(a)$.

نتيجة:

دوال كثيرات الحدود ودوال القيمة المطلقة تكون متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

ذكرنا في مفهوم النهاية أن إذا أردنا حساب قيمة نهاية لدالة كثيرة حدود فإن النهاية تساوي النهاية عند x تقترب من a لـ $f(x) = f(a)$ إذا تحقق شرط الاتصال وبالتالي هذه النتيجة ذكرناها أي أن دوال كثيرات الحدود دائمًا متصلة ودوال القيمة المطلقة التي داخلها كثيرات الحدود دائمًا متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$

في الدوال النسبية تكون نقاط عدم الاتصال عند قيم x التي تجعل مقام الدالة النسبية مساويًا الصفر.

مثال:

ابحث اتصال الدوال التالية عند النقط المشار إليها:

1. $f(x) = 3x^2 + x - 6 \qquad , \qquad x = 2$

الحل:

هنا الدالة $f(x)$ هنا كثيرة حدود وقد ذكرنا أن كثيرة الحدود في النتيجة الأولى دائمًا متصلة عند أي قيمة $x \in \mathbb{R}$

ولذلك فإن $f(x) = 3x^2 + x - 6$ متصلة عند $x = 2$ نظرًا لأنها كثيرة حدود.

2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1} \qquad , \qquad x = -1$

الحل:

نلاحظ أن قيمة -1 غير معرف لأننا لو عوضنا عنه في المعادلة سينتج أن المقام سيصبح 0 ولذلك فإن منحنى الدالة $f(x)$ به نقط انقطاع عند -1 لأن:

$f(-1)$ غير معرف وغير متصل

ولذلك فإن $f(x)$ دالة غير متصلة عند $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-2} = \frac{-1}{2}$$

ولاحظ أنه يمكن أن يكون النهاية موجودة مع أن $f(x)$ غير معرف.

$$3.\quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ & \qquad , \qquad x=2 \\ 2x & x=2 \end{cases}$$

الحل:

أولاً نوجد النهاية ونحلل البسط لإيجاد القيمة.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} x+2=2+2=4$$

$$f(2)=2x=2(2)=4$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$$

وبذلك الدالة متصل أي الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=2$.

$$4.\quad f(x)=\begin{cases} 5x-1 & x<1 \\ & \qquad , \qquad x=1 \\ 2x-x^2 & x\geq 1 \end{cases}$$

الحل:

في البداية نوجد النهاية للدالة $f(x)$ من اليمين ومن اليسار.

فالنهاية للدالة $f(x)$ تقترب من اليمين أي أكبر من العدد 1 بالتعويض المباشر

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(2x-x^2\right)=2(1)-(1)^2=2-1=1$$

فالنهاية للدالة $f(x)$ تقترب من اليسار أي أقل من العدد 1 أو يساوي العدد 1 بالتعويض المباشر

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(5x-1)=5(1)-1=4-1=4$$

ولاحظ هنا أن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار فالنهاية من اليمين تساوي 1 والنهاية من اليسار تساوي 4 ولذلك فإن:

$\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة نظرًا لأن النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

وبالتالي $f(x)$ غير متصلة عند $x=1$.

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الثامنة والثلاثون

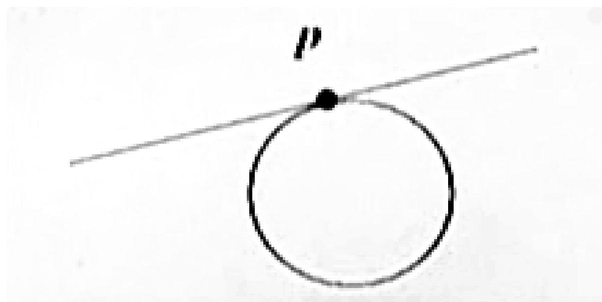
فهذه الحلقة الثامنة والثلاثون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وما زلنا في الفصل السابع وهو مدخل إلى تفاضل الدالة وموضوع اليوم هو:

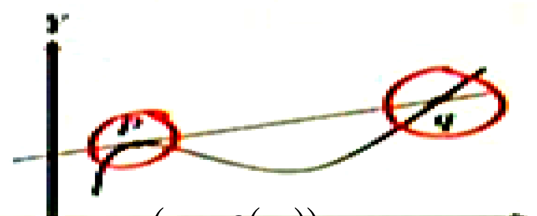
مشتقة الدالة عند نقطة وتفسيرها الهندسي

المماس لمنحنى عند نقطة:

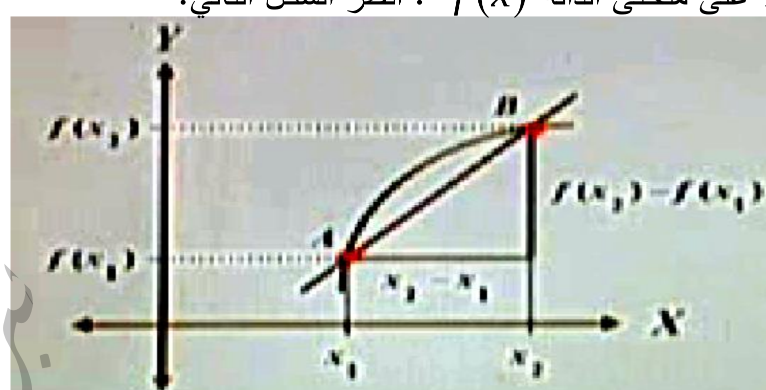
يعرف خط التماس لدائرة عند نقطة ما p واقعة عليه بأنه الخط الذي يتقاطع مع منحنى الدائرة في نقطة واحدة فقط هي النقطة p نفسها ويسمى هذا الخط بمماس الدائرة عند p .



وهذا لا يصلح أن يكون تعريفًا عامًا لجميع المنحنيات، إذ أنه لو نظرنا للمنحنى المبين بالشكل التالي لوجدنا أن خط التماس للمنحنى عند النقطة p يتقاطع مع المنحنى عند نقطة أخرى هي نقطة q.



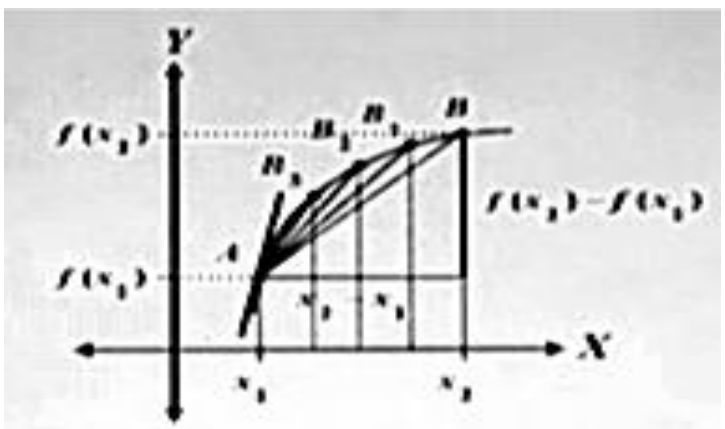
إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة $A(x_1 , f(x_1))$ وكان هناك نقطة أخرى $B(x_2 \ , \ f(x_2))$ على منحنى الدالة $f(x)$. أنظر الشكل التالي:



فإننا نحصل على الميل m للخط AB حسب القاعدة التي درسناها سابقًا:

$$m=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

وإذا جعلنا النقطة B تتحرك على منحنى الدالة في اتجاه النقطة A فإننا نلاحظ أنه كلما اقتربت النقطة B إلى النقطة A أي أن كلما اقتربت x_2 من x_1 متخذة الأوضاع B_1 و B_2 و B_3 وتقترب أكثر من النقطة A والتي تقع في الشكل التالي فإن الخط AB سيقترب من خط نهائي يسمى خط التماس أي المماس للمنحنى عند النقطة A كما هو بالشكل نلاحظ أنه كلما اقتربت B من A فإنه يمثل الخط AB خط التماس عند النقطة A وعند اقتراب النقطة B من A بدون توقف فإن أيضًا المسافة بين x_2 و x_1 تقترب من الصفر بدون توقف ولكن طبعًا x_2 لا تساوي x_1 وبذلك فهي تقترب من نهاية معينة هي ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة A



ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة A هو:

$$\boxed{m=\lim_{x_2\to x_1}\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}$$

فهذه النهاية تمثل المماس الموضح بالشكل السابق.

سنعيد كتابة هذه الصيغة بدلالة الفرق $h=x_2-x_1$.

فيكون $x_2=x_1+h$ ، وبالتالي $x_1\to x_1$ تعني $(x_2-x_1)\to 0$ أي أن $h\to 0$ ومنه:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h}$$

وهذا هو تعريف المشتقة الأولى لدالة عند نقطة. والنقطة هي x_1

المعنى الهندسي للمشتقة الأولى:

المعنى الهندسي للمشتقة الأولى عند النقطة $\left(x_1\,,y_1\right)$ يعبر عن ميل مماس المنحنى عند هذه النقطة وتكون معادلة المماس على الصورة:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

مثال:

أوجد ميل ومعادلة المماس لمنحنى الدالة $f\left(x\right)=x^2$ عند النقطة $\left(3,9\right)$.

الحل:

معطى من السؤال: $x_1=3$ و $y_1=9$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_1+h\right)-f\left(x_1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(3+h\right)-f\left(3\right)}{h}$$

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{\left(3+h\right)^2-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-9}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(6+h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(6+h\right)=6$$

$m=6 \qquad x_1=3 \qquad y_1=9$

ومعادلة خط المماس هي:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$$y-9=6\left(x-3\right)$$

$$y=6x-18+9$$

$$y=6x-9$$

المشتقة الأولى للدالة:

ميل المماس لمنحنى $f(x)$ عند x_1 تعطى بالعلاقة التالية:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

إذا أردنا إيجاد ميل مماس لمنحنى الدالة $f(x)$ لأي نقطة اختيارية على المنحنى فإننا سنكتب x بدلاً من x_1 في الصيغة السابقة، وبالتالي ستصبح كالتالي:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وهذه هي المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x

تعريف دالة المشتقة الأولى:

دالة المشتقة الأولى $f'(x)$ للدالة $f(x)$ تعرف بأنها:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتسمى المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x .

ومجال الدالة $f'(x)$ هو قيم x التي تكون هذه النهاية موجودة عندها.

ويستخدم الرمز $\frac{dy}{dx}$ أو $f'(x)$ أو y' للإشارة إلى المشتقة الأولى للدالة y بالنسبة للمتغير x .

مثال:

للدالة $f(x)=x^2+3$

١. أوجد دالة المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.
٢. أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x)$ عند النقطة $x=2$.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3-(x^2+3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3-x^2-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h$$

$$f'(x)=2x$$

ونريد الآن إيجاد ميل المماس عند $x=2$.

$$f(x)=x^2+3$$

$$m\Big|_{x=2}=f'(2)=2(2)=4$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة التاسعة والثلاثون

فهذه الحلقة الثالثة والثلاثون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

قوانين الاشتقاق

اشتقاق الدالة الثابتة:

إذا كانت $y=f(x)=k$ لجميع قيم x حيث k عدد حقيقي ثابت فإن المشتقة الأولى لهذه الدالة هي:

$$y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)=0$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $f(x)=1.2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$
2. $f(x)=-6 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$
3. $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=0$

اشتقاق دالة القوة:

إذا كانت $y=f(x)=x^a$ حيث a ثابت حقيقي و x تأخذ قيمًا موجبة فإن المشتقة الأولى للدالة هي:

$$y'=\frac{dy}{dx}=f'(x)=a\,x^{a-1}$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y=x \quad \Rightarrow \quad y'=1x^{1-1}=1x^0=1$
2. $y=x^3 \quad \Rightarrow \quad y'=3x^{3-1}=3x^2$
3. $y=x^{-8} \quad \Rightarrow \quad y'=-8x^{-8-1}=-8x^{-9}$
4. $y=\frac{1}{x^5} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{x^5}=x^{-5} \quad \Rightarrow \quad y'=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}$
5. $y=\sqrt[3]{x^4} \quad \Rightarrow \quad y=x^{\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$

اشتقاق الدالة المضروبة بعدد ثابت:

إذا كانت $y = kf(x)$ حيث k ثابت حقيقي فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = kf'(x)$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = 3x \quad \Rightarrow \quad y' = 3(1) = 3$
2. $y = -2x^4 \quad \Rightarrow \quad y' = -2(4x^3) = -8x^3$
3. $y = 5x^{-2} \quad \Rightarrow \quad y' = 5(-2x^{-3}) = -10x^{-3}$
4. $y = \frac{-6}{x^3} \quad \Rightarrow \quad y = -6x^{-3} \quad \Rightarrow \quad y' = -6(-3x^{-4}) = 18x^{-4} = \frac{18}{x^4}$

اشتقاق حاصل جمع أو طرح دالتين:

إذا كانت $y = f(x) \pm g(x)$ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y = 3x^2 - 4x - 6$
2. $y = 2\sqrt[3]{x} + 3x^5$
3. $y = x^9 - 2x^2 + 8x^{-3}$

الحل:

1. $y = 3x^2 - 4x - 6$

   $y' = 6x - 4$

2. $y = 2\sqrt[3]{x} + 3x^5 = 2x^{\frac{1}{3}} + 3x^5$

   $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 15x^4 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + 15x^4$

3. $y = x^9 - 2x^2 + 8x^{-3} \quad \Rightarrow \quad y' = 9x^8 - 4x - 24x^{-4}$

مثال:

أوجد قيمة المشتقة الأولى للدالة:

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 3$ عند النقطة $x_0 = 2$

الحل:

نوجد أولاً المشتقة الأولى ثم نعوض في المشتقة الأولى عن $x_0 = 2$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x$$
$$f'(2) = 4(2)^3 - 6(2)$$
$$= 4(8) - 12$$
$$= 20$$

مثال:

أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = 3x^2 - 2x$ عند النقطة $x_0 = 2$.

الحل:

لإيجاد ميل المماس أولاً للدالة $f(x) = 3x^2 - 2x$ عند النقطة $x_0 = 2$

نوجد المشتقة الأولى

$$f'(x) = 6x - 2$$
$$m\Big|_{x=2} = 6(2) - 2 = 10$$
$$x = 2$$
$$x_0 = 2 \qquad y_0 = f(2) = 3(2)^2 - 2(2)$$
$$= 8$$

والآن نوجد معادلة المماس الذي لديه النقطة $(2,8)$ وميله عند هذه النقطة يساوي 10

$x_0 = 2 \qquad y_0 = 8 \qquad m = 10$

ومعادلة المماس هي:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 8 = 10(x - 2)$$
$$y - 8 = 10x - 20$$
$$y = 10x - 12$$

اشتقاق حاصل ضرب دالتين:

إذا كانت $y = f(x)g(x)$ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = (2x^4 + x)(3x - 1)$$

الحل:

$$\begin{aligned} y' &= (2x^4 + x)(3) + (3x - 1)(8x^3 + 1) \\ &= 6x^4 + 3x + 24x^4 + 3x - 8x^3 - 1 \\ &= 30x^4 - 8x^3 + 6x - 1 \end{aligned}$$

اشتقاق قسمة دالتين:

إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ بحيث أن y معرفة دائمًا (أي أن $g(x) \neq 0$ فإن:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{4x^2 - x}{2x - 1}$.

الحل:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(2x-1)(8x-1) - (4x^2 - x)(2)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{16x^2 - 2x - 8x + 1 - 8x^2 + 2x}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 8x + 1}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها وإلى اللقاء في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الأربعون

فهذه الحلقة الأربعون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وما زلنا في الفصل السابع وهو مدخل إلى التفاضل وهذه الحلقة نتابع فيها قوانين الاشتقاق.

اشتقاق دالة مرفوعة لأس ثابت:

إذا $y=\left(f\left(x\right)\right)^{a}$ كانت حيث a ثابت حقيقي فإن:

$$y'=\frac{dy}{dx}=a\left(f\left(x\right)\right)^{a-1}f'\left(x\right)$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية:

1. $y=\left(4x^{5}-2x\right)^{3}$

$$y'=3\left(4x^{5}-2x\right)^{2}\left(20x^{4}-2\right)$$

2. $y=\sqrt{2x^{3}-6}$

$$y=\left(2x^{3}-6\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3x^{3}-6\right)^{-\frac{1}{2}}\left(9x^{2}\right)$$

$$=\frac{9x^{2}}{2\sqrt{3x^{3}-6}}$$

المشتقات من رتب أعلى:

إذا كان لدينا دالة $f\left(x\right)$ قابلة للاشتقاق على فترة معينة فإننا نحصل على دالة جديدة:

$$g\left(x\right)=f'\left(x\right)$$

وإذا كانت $g\left(x\right)$ قابلة للاشتقاق على الفترة نفسها نحصل على دالة ثالثة:

$$h\left(x\right)=g'\left(x\right)=f''\left(x\right)$$

وبنفس الطريقة يمكن اشتقاق الدالة $h\left(x\right)$ لنحصل على دالة جديدة:

$$e\left(x\right)=h'\left(x\right)=g''\left(x\right)=f'''\left(x\right)$$

على نفس النمط نحصل على المشتقة الرابعة.

للدلالة على المشتقة الثانية يستخدم الترميز:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ أو $f''(x)$ أو y''

وللدلالة على المشتقة الثالثة يستخدم الترميز:

$\frac{d^3y}{dx^3}$ أو $f'''(x)$ أو y'''

بينما للدلالة على المشتقة الرابعة يستخدم الترميز:

$\frac{d^4y}{dx^4}$ أو $f^{(4)}(x)$ أو $y^{(4)}$

وبشكل عام لدلالة على المشتقة النونية يستخدم الترميز:

$\frac{d^ny}{dx^n}$ أو $f^{(n)}(x)$ أو $y^{(n)}$

مثال:

أوجد المشتقة الثانية والثالثة للدالة:

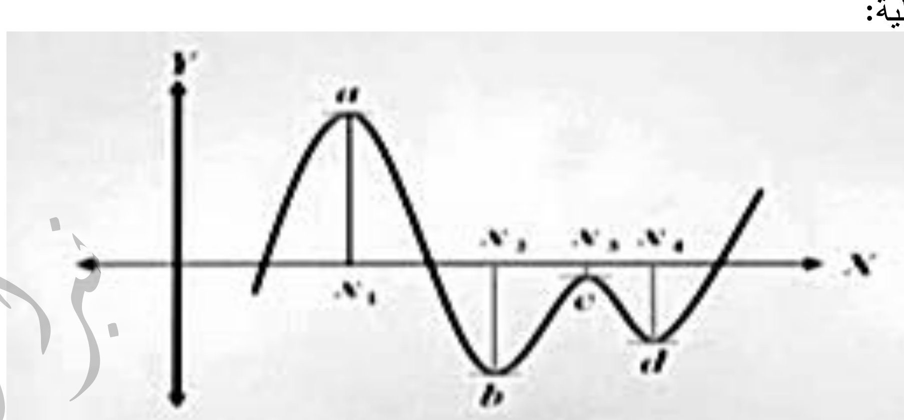
$$y = x^5 + 7x^2 - 2x^{-2}$$

الحل:

$$y' = 5x^4 + 14x + 4x^{-3}$$
$$y'' = 20x^3 + 14 - 12x^{-4}$$
$$y''' = 60x^2 + 48x^{-5}$$

القيم القصوى المحلية (العظمى والصغرى):

القيم القصوى المحلية للدالة تكون أعلى أو أدنى من قيم الدالة المجاورة لها في فترة صغيرة حولها. وتسمى هذه القيم بالقيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية. والرسم التالي يوضح بعض القيم القصوى المحلية:



من الرسم يتبين أن القيم a,b,c,d تمثل القيم القصوى والصغرى المحلية بالنسبة للقيم المجاورة لها. ولكن كل من القيمتين $a\ ,\ c$ كل منهما قيمتهما أعلى من القيم المجاورة لهما في المنحنى ولذلك فإنهما يعتبران قيمة قصوى محلية في المنحنى.

أما القيمتين $b\ ,d$ قيمة كل منهما يعتبر أدنى من القيم المجاورة لهما في المنحنى ولذلك يعتبران قيمة صغرى محلية في المنحنى.

ولذلك نقول أن هذا المنحنى له قيمة عظمى محلية عند x_1 و x_3 وله قيمة صغرى محلية عند كل من b و d .

نظرية:

إذا كانت $f\left(x\right)$ دالة قابلة للاشتقاق على فترة معينة وكانت x_0 قيمة حرجة داخل هذه الفترة فإن $f\,'\left(x_0\right)=0$ أي أن قيمة المشتقة الأولى عند القيمة الحرجة تساوي الصفر.

خطوات إيجاد القيم الحرجة:

١. نوجد المشتقة الأولى للدالة.
٢. نوجد قيم x التي تجعل $f\,'\left(x\right)=0$.
٣. نوجد قيم x التي تكون عندها $f\left(x\right)$ غير قابلة للاشتقاق – أي التي عندها $f\,'\left(x\right)$ غير معرفة –.
٤. تكون قيم x التي حصلنا عليها في الخطوتين (٢) و(٣) هي القيم الحرجة.

مثال:

أوجد القيم الحرجة للدالة:

$$f\left(x\right)=x^3-12x-1$$

الحل:

أولاً نوجد المشتقة الأولى:

$$f\,'\left(x\right)=3x^2-12$$

نساوي المشتقة بالصفر ونحل المعادلة

$$3x^2-12=0$$

$$3x^2=12 \qquad \div 3$$

$$x^2=4 \qquad \Rightarrow \qquad x=2,-2$$

القيم الحرجة هي : $x=2$ و $x=-2$

اختبار المشتقة الثانية:

إذا كانت $x=c$ قيمة حرجة للدالة $f(x)$ وأن $f'(c)=0$ فإن:

١. للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x=c$ إذا كانت $f''(c)<0$.

٢. للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند $x=c$ إذا كانت $f''(c)>0$.

مثال:

أوجد القيمة العظمى والصغرى المحلية للدالة:

$$f(x)=x^3-3x^2+5$$

الحل:

نوجد القيم الحرجة للدالة

$$f'(x)=3x^2-6x$$

ثم نساويها بالصفر

$$3x^2-6x=0$$

$$x(3x-6)=0$$

فإما $x=0$ أو $3x-6=0$

أي أن إما $x=0$ أو $x=2$

ثم نوجد المشتقة الثانية والتعويض بهاتين القيمتين في المشتقة الثانية.

$$f''(x)=6x-6$$

ثم نعوض في المشتقة الثانية عن القيم الحرجة التي استخرجناها سابقًا

$$x=0$$

$$f''(0)=6(0)-6=-6<0$$

إذاً للدالة قيمة عظمى محلية عند $x=0$ وهي:

$$f(0)=(0)^3-3(0)^2+5=5$$

أي القيمة العظمى تساوي 5 .

وعند القيمة الحرجة الثانية:

$$x = 2$$
$$f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$$

فإذاً للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ وهي:

$$f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 8 - 12 + 5 = 1$$

فالقيمة 1 هي القيمة الصغرى المحلية عند $x = 2$.

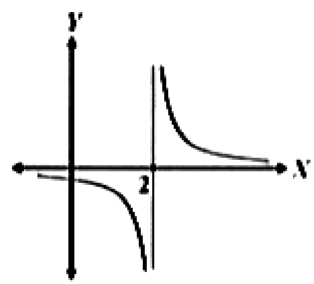
<u>الدوال غير القابلة للاشتقاق:</u>

الأسباب التي تجعل دالة ما $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق:

١. أن تكون الدالة $f(x)$ غير متصلة عند النقطة x_1.

فعلى سبيل المثال الدالة:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$



فعند القيمة $x = 2$ يوجد فصل وغير متصل لأن عندها يكون المقام يساوي صفر ولذلك فالدالة غير متصلة عند $x_1 = 2$.

ومشتقة الدالة $f(x)$ هي:

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

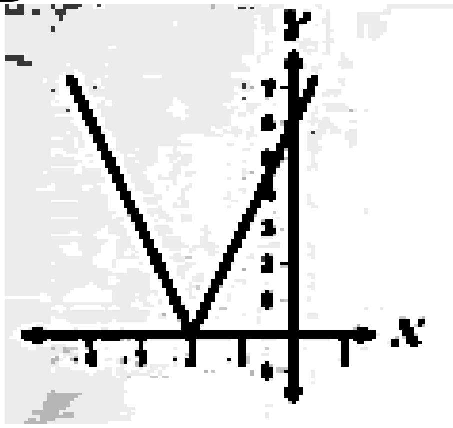
$f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_1 = 2$.

٢. أن تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند النقطة x_1 ولكن يكون خط التماس لمنحنى الدالة رأسيًا عند تلك النقطة أو لا يوجد خط تماس لمنحنى الدالة عند تكل النقطة مثل أن تكون رأس زاوية في منحنى الدالة.

فعلى سبيل المثال الدالة:

$$f(x) = |3x + 6|$$

متصلة لجميع قيم $x \in \mathbb{R}$ كما في الشكل التالي:



ولكن عند $x = -2$ غير معرفة.

وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ ليس لها مشتقة عند $x_1 = -2$ لأنه رأس زاوية وليس له خط مماس وبالتالي المشتقة عند هذه النقطة غير معرفة عند $x_1 = -2$

مثال:

هل الدالة التالية قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 المبينة وإذا كانت قابلة للاشتقاق أوجد قيم المشتقة عند تلك النقطة:

$$f(x) = \frac{10}{x^2 - 9} \quad , \quad x_0 = 3 \, , \, x_0 = 1$$

الحل:

$x_0 = 3$ الدالة غير معرفة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق.

وعند $x_0 = 1$ الدالة متصلة ولها مشتقة هي:

$$f'(x) = \frac{-20x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$f'(1) = \frac{-5}{16}$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة وختام هذه الوحدة والفصل ونلقاكم بعون الله في الحلقة القادمة والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته.

المحاضرة الواحدة والأربعون

فهذه الحلقة الواحدة والأربعون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

سنبدأ في هذه الحلقة بالوحدة الثامنة والأخيرة في المنهج وهي مدخل لتكامل الدوال.

مدخل لتكامل الدوال

إن عملية التكامل هي العملية العكسية للتفاضل.

الدالة الأصلية:

تسمى الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ إذا كان $F'(x)=f(x)$.

فعلى سبيل المثال:

إن الدالة $F_1(x)=x^3$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=3x^2$ لأن:

$$F_1'(x)=3x^2=f(x)$$

نلاحظ أن كلا من الدالتين:

$$F_2(x)=x^3+1 \quad \text{و} \quad F_3(x)=x^3-2$$

هي دالة أصلية للدالة المعطاة $f(x)$ لأن كلاهما يحققان $F_1'(x)=f(x)$.

نظرية:

إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ فإن جميع الدوال على الصورة $F(x)+c$ حيث c ثابت حقيقي اختياري هي أيضًا دوال أصلية لنفس الدالة $f(x)$.

مثال:

أوجد جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x)=2x$.

الحل:

نعرف أن مشتقة x^2 هي $2x$ وعليه فإن جميع الدوال الأصلية للدالة $f(x)=2x$ هي على الصورة التالية:

$F(x)=x^2+c$ حيث c ثابت حقيقي اختياري.

مثال:

تحقق من أن الدالة $F(x)=2x^4+3x^2+3x-1$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)=8x^3+6x+3$.

الحل:

نتحقق من الشرط وهو $F'(x)=f(x)$

إذا في البداية نشتق الدالة $F(x)$

$$F'(x)=8x^3+6x+3=f(x)$$

وبما أن لدينا أن $F'(x)=f(x)$ فيكون $F(x)$ هي دالة أصلية للدالة $f(x)$

التكامل غير المحدود:

إن عملية إيجاد جميع الدوال الأصلية لدالة $f(x)$ تسمى التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ ونرمز له بالرمز: $\int f(x)dx$.

ومن النظرية السابقة يكفي معرفة دالة أصلية واحدة $F(x)$ للدالة $f(x)$ فنجد أن:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

حيث c ثابت حقيقي اختياري و $F'(x)=f(x)$.

ويسمى الرمز $\int$ بالتكامل و dx تشير إلى أن هذه العملية يجب إجراؤها بالنسبة للمتغير x ويسمى الثابت c بثابت التكامل.

وسنوضح عملية التفاضل للدالة التالية والعملية العكسية لها وهي التكامل غير المحدود.

صيغة المشتقة $\frac{dy}{dx}\left[x^4\right]=4x^3$

صيغة التكامل غير المحدود $\int 4x^3\,dx=x^4+c$

اصطلاح:

- نكتب $\int dx$ بدلاً من $\int 1dx$
- نكتب $\int \frac{dx}{x^n}$ بدلاً من $\int \frac{1}{x^n}dx$

قوانين التكامل الغير محدود:

تكامل العدد الثابت:

إذا كان a عددًا حقيقيًا ثابتًا فإن:

$\int a\ dx = ax + c$ ، حيث c ثابت حقيقي اختياري.

على سبيل المثال:

1. $\int 2dx = 2x + c$
2. $\int -1dx = -x + c$
3. $\int dx = x + c$

تكامل دالة القوة:

إذا كان a عددًا حقيقيًا بحيث $a \neq -1$ فإن:

$\int x^a\ dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$ ، حيث c ثابت حقيقي اختياري.

مثال:

أوجد تكامل كل مما يلي:

1. $\int x^2\ dx = \dfrac{x^{2+1}}{2+1} = c = \dfrac{x^3}{3} + c$

2. $\int \dfrac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = \dfrac{x^{-2}}{-2} + c$

3. $\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{\frac{1}{2}}\ dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \dfrac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

تكامل الدلالة المضروبة بعدد ثابت:

إذا كان a ثابت حقيقي فإن:

$$\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال:

أوجد تكامل ما يلي:

1. $\int 12x^2dx = 12\int x^2dx = 12\dfrac{x^3}{3} + c = 4x^3 + c$

2. $\int \dfrac{9}{x^4}dx = \int 9x^{-4}dx = 9\dfrac{x^{-3}}{-3} + c = -3x^{-3} + c = \dfrac{-3}{x^3} + c$

3. $\int -4\sqrt[3]{x}dx = \int -4x^{\frac{1}{3}}dx = -4\dfrac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = -3\sqrt[3]{x^4} + c$

تكامل مجموع أو فرق دالتين:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل فإن:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

أوجد تكامل ما يلي:

1. $\int \left(x^{\frac{2}{3}} - 6x^2 + 4\right)dx$

الحل:

$$\int \left(x^{\frac{2}{3}} - 6x^2 + 4\right)dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx - \int 6x^2dx + \int 4dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - 6\frac{x^3}{3} + 4x + c$$

$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 2x^3 + 4x + c$$

2. $\int \left(\dfrac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^4}\right)dx$

الحل

$$= \int \frac{x^5}{x^4}dx + \int \frac{2x^2}{x^4}dx - \int \frac{1}{x^4}dx$$

$$= \int x\,dx + \int 2x^{-2}dx - \int x^{-4}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-3}}{-3}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + c$$

مثال:

أوجد الدالة $F(x)$ علمًا أن $F(0)=10$ وأن:

$$F(x)=\int (3x^2-6x-2)dx$$

الحل:

$$F(x)=3\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}-2x+c$$
$$=x^3-3x^2-2x+c$$

ولدينا معطى أن $F(0)=10$ ونريد أن نوجد قيمة الثابت c من الدالة:

$$F(0)=0^3-3(0)^2-2(0)+c=10$$
$$\Rightarrow c=10$$
$$F(x)=x^3-3x^2-2x+10$$

وإلى هنا أعزائي الطلبة نصل إلى ختام هذه الحلقة ونرجو أن تكونوا قد استفدتم منها والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته ونلقاكم في الحلقة القادمة إن شاء الله.

المحاضرة الثانية والأربعون

فهذه الحلقة الثانية والأربعون من سلسلة حلقات شرح مقرر مبادئ الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الإدارية.

وهذه الحلقة هي الحلقة الأخيرة لشرح هذا المقرر وسنبقى في الوحدة والفصل الثامن وعنوان هذه الحلقة هو:

التكامل المحدود وتطبيقاته

التكامل المحدود:

إذا كانت الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $F(x)$ على الفترة $[a,b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

نسمي العددين a و b بحدي التكامل المحدود.

الرمز $F(x)\Big|_a^b$ يعني التعويض عن x بالعددين a و b لإيجاد $F(b)$ مطروحًا منه $F(a)$.

خواص التكامل المحدود:

لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتين للتكامل ولتكن a و b أعداد حقيقية عندئذٍ:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

مثال:

أوجد قيمة ما يلي:

1. $\int_5^5 (10-x)^{10}dx = 0$
2. $\int_1^2 4x(x^2-1)dx$

$$= \int_1^2 (4x^3-4x)dx = x^4-2x^2\Big|_1^2$$

$$= \left(2^4-2(2)^2\right)-\left(1^4-2(1)^2\right)$$

$$= (16-8)-(1-2) = 8-(-1) = 9$$

مثال:

إذا كان $\int_0^3 f(x)dx = 4$ و $\int_0^3 g(x)dx = 3$

أوجد قيمة كل مما يلي:

1. $\int_3^0 5f(x)dx$

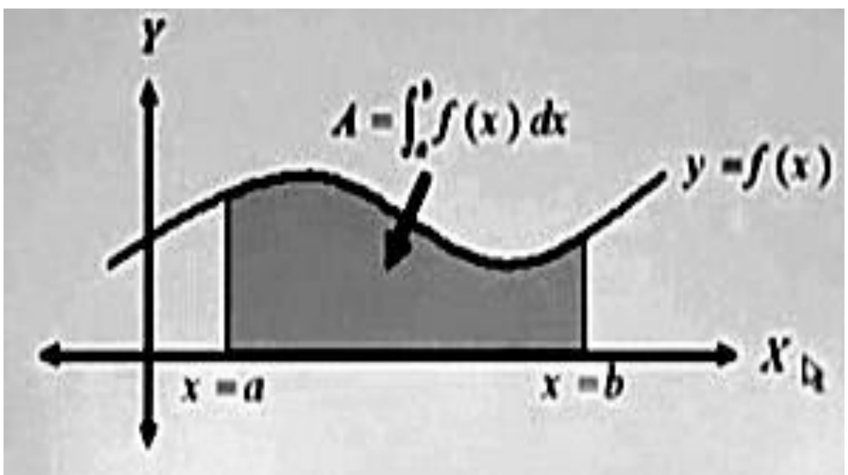
الحل:

$$\int_3^0 5f(x)dx = -\int_0^3 5f(x)dx$$
$$= -5\int_0^3 f(x)dx = -5(4) = -20$$

2. $\int_0^3 (3f(x) - 5g(x))dx$

$$= 3\int_0^3 f(x)dx - 5\int_0^3 g(x)dx = 3(4) - 5(3) = 12 - 15 = -3$$

المساحة تحت المنحنى:



المساحة المحصورة بين المنحنى $f(x)$ وما بين محور X والقيمتين $x = a$ و $x = b$ أي المنطقة المظللة في الشكل السابق. ونرمز لهذه المساحة بالرمز A .

تعريف المساحة تحت المنحنى:

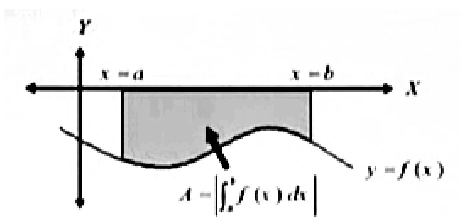
إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a,b]$ وكانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

حيث A هي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور X والمستقيمات $x = a$ و $x = b$.

ملاحظة:

إذا كان منحنى الدالة تحت محور X كما في الشكل.

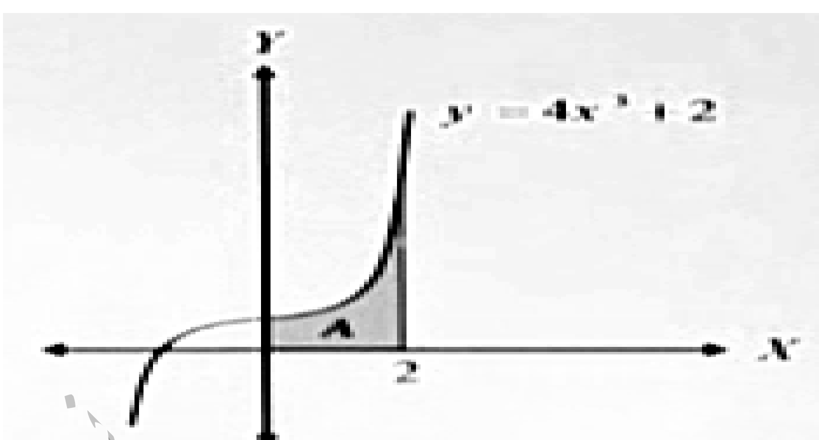


فإن المساحة A المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x والمستقيمات $x = a$ و $x = b$ تعطى كالتالي:

$$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$$

مثال:

في الشكل التالي أوجد مساحة المنطقة المظللة A .



الحل:

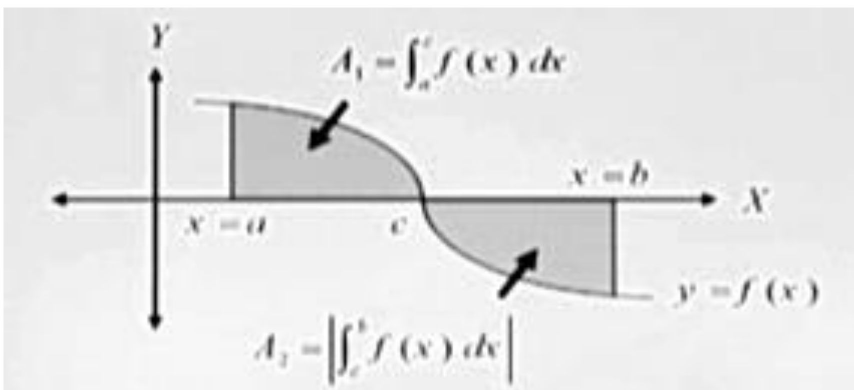
$$y = 4x^3 + 2$$

نوجد المساحة المظللة من $x=0$ إلى $x=2$ فتكون مساحة المنطقة A

$$A=\int_0^2\left(4x^3+2\right)dx$$
$$=x^4+2x\Big|_0^2$$
$$=\left(2^4+2(2)\right)-\left(0^4-2(0)\right)$$
$$=20-0=20$$

إذا المساحة تحت هذا المنحنى A في الشكل تساوي 20 .

إذا كانت المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها A مكونة من جزئين غير متداخلين أحدهم A_1 ويقع فوق محور X والآخر A_2 ويقع تحت محور X كما في الشكل أدناه.



فإن $A=A_1+A_2$

حيث قيمة المساحة الأولى A_1 هي:

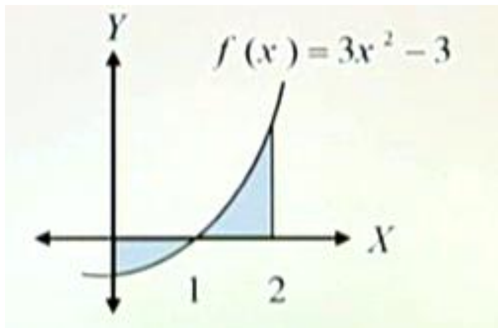
$$A_1=\int_0^c f(x)dx$$

وقيمة المساحة الثانية A_2 هي:

$$A_2=\left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

مثال:

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=3x^2-3$ ومحور x والمستقيمان $x=0$ و $x=2$ كما في الشكل التالي:



الحل:

لدينا منطقتين منطقة تكون أسفل المحور X ونسميها A_1 ولدينا المنطقة الأخرى وهي المنطقة أعلى المحور X ونسميها A_2 ومساحة المنطقة المحصورة كلها ونسميها A هي مجموع المنطقتين A_1 والمنطقة A_2

$$A_1=\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\int_0^1 (3x^2-3)dx\right|$$
$$=\left|x^3-3x\Big|_0^1\right|$$
$$=\left|\left(1^3-3(1)\right)-\left(0^3-3(0)\right)\right|$$
$$=|1-3|=|-2|=2$$
$$A_1=2$$

$$A_2=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 (3x^2-3)dx$$
$$=\left(x^3-3x\right)\Big|_1^2$$
$$=\left(2^3-3(2)\right)-\left(1^3-3(1)\right)$$
$$=(8-6)-(1-3)$$
$$=2-(-2)=4$$
$$A=A_1+A_2=2+4=6$$