أولاً: التحليل

السؤال الأول: احسب: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}$ ، $\int_{-3}^{1} \frac{x+7}{x^2+2x-8}$ ، $\int_{0}^{\pi} \sqrt{2+2Cos2x}\, dx$

السؤال الثاني: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعيّن بالعلاقة: $f(x) = x + \sqrt{|4x^2-4|}$

1. عيّن D_f .
2. أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = -x$ مقارب مائل لـ (C) في جوار $-\infty$ ، ثمّ ادرس وضع (C) بالنسبة لـ Δ .

السؤال الثالث: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x)$

1. أوجد ما للخط البياني من مقاربات أفقية أو شاقوليّة.
2. ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها ، ودلّ على قيمته الصغرى محليّاً.
3. اكتب معادلة المماس Δ للخط (C) في النقطة التي فاصلتها (2) ، ثمّ ادرس وضع (C) بالنسبة لـ Δ .
4. ارسم المماس Δ وما وجدته من مقاربات للخط (C) ، ثمّ ارسم (C) .
5. احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمحور $\acute{x}x$ والمستقيمين الذين معادلتاهما: $x = 1$, $x = e$

السؤال الرابع: $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة تدريجياً وفق: $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = -1 - \frac{1}{4u_n}$

1. أثبت أنّ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة $V_n = \frac{2}{2u_n+1}$ متتالية حسابية أساسها (-2) .
2. عبّر عن V_n بدلالة n ، ثمّ استنتج u_n بدلالة n .
3. احسب: $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

السؤال الخامس: المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق: $u_0 = 2$ ، وعند كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{2u_n}$

1. احسب u_1 , u_2 .
2. ليكن التابع f المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = \frac{x^2+2}{2x}$
   - ⓐ أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للخط (C) ، ثمّ ادرس وضع (C) بالنسبة لـ Δ .
   - ⓑ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
   - ⓒ ارسم مقاربات (C_f) ، ثمّ ارسم (C_f) .
   - ⓓ أثبت بالتدريج أنّ: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كان العدد الطبيعي n .
   - ⓔ استنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ، واحسب نهايتها.

السؤال السادس: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,3]$ وفق: $f(x) = x\sqrt{3-x}$

1. ادرس قابليّة اشتقاق التابع f عند (3) (من اليسار).
2. ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها ، ثمّ عيّن ما للتابع f من قيم كبرى وماله من قيم صغرى محليّاً.
3. ارسم (C) .
4. احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمحور $\acute{x}x$ والمستقيمين الذين معادلتاهما: $x = 0$, $x = 2$
5. احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح السابق دورة كاملة حول $\acute{x}x$.

السؤال السابع: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على R وفق: $f(x) = x \cdot 3^x$

1. ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
2. ارسم الخط (C) .
3. باستعمال التكامل بالتجزئة: احسب مساحة السطح المحصور بين (C) والمحور $\acute{x}x$ والمستقيم $x = -1$.

السؤال الثامن: ليكن التابع f المعرّفة على R^* وفق: $f(x)=\frac{1}{x}$

❶ أوجد: $f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ f'''(x)$.

❷ أثبت بالتدريج أنّه أياً كان: $n\in N^*$ فإنّ: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}$.

❸ أوجد $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)\right)^{\frac{x}{x-1}}$.

ثانياً: الهندسة

في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ ، لدينا (Δ_2) و (Δ_1) مستقيمان معرفان بتمثيليها الوسيطيين:

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\y=-2-2t\\z=1-t\end{cases}:(t\in R)\qquad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\y=-1-s\\z=4+2s\end{cases}:(s\in R)$$

❶ عيّن $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ شعاعا توجيه كل من $(\Delta_1),(\Delta_2)$ على الترتيب .

❷ أثبت أنّ $(\Delta_1),(\Delta_2)$ متقاطعان في نقطة B يُطلب تعيين إحداثياتها .

❸ اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (p) المعين بالمستقيمين المتقاطعين $(\Delta_1),(\Delta_2)$.

❹ أثبت أنّ النقطة $A(6,4,4)$ لا تنتمي للمستوي P .

❺ أثبت أنّ النقطة B هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (P) واحسب طول القطعة $[AB]$.

❻ اكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (Q) الذي يمر بالنقطة A , $\vec{n}(5,1,-7)$ شعاع ناظمي له .

❼ عيّن إحداثيات النقطة C (نقطة تقاطع المستقيم (Δ_1) مع المستوي (Q)) .

❽ عيّن إحداثيات النقطة D (نقطة تقاطع المستقيم (Δ_2) مع المستوي (Q)) .

❾ بين أنّ المثلث BCD قائم، واحسب مساحة سطحه، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

❿ استنتج مساحة سطح المثلث ACD .

ثالثاً: التحليل التوافقي

❶ (6) كرات مرقّمة $1,1,1,2,2,3$, نسمّي سحباً كل مجموعة جزئيّة تحتوي ثلاث كرات مأخوذة من الكرات الست السابقة,

ⓐ كم سحباً يحوي ثلاث كرات أرقامها فرديّة؟ ⓑ كم سحباً يحوي ثلاث كرات مجموع أرقامها عدداً فرديّاً؟

ⓒ كم سحباً يحوي كرتان تحملان الرقم ذاته؟ ⓓ كم سحباً يحوي ثلاث كرات مجموع أرقامها (5)

❷ رف يحتوي(7) كتب ثلاث كتب منها للمؤلّفA , وأربعة كتب للمؤلّفB, بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف في الحالات:

ⓐ الكتب الثلاثة الأولى للمؤلّفB. ⓑ كتاباً مُعيّناً للمؤلّف للمؤلّفB في البداية.

ⓒ كتب المؤلّف A متجاورة.

❸ مجموعة تضم خمسة أشخاص $\{a,b,c,d,e\}$, نريد تعيين مدير ونائباً له وأمين سر لهذه المجموعة, ماعدد اللجان في الحالات:

ⓐ المدير من المجموعة $\{a,b,c\}$. ⓑ (d) لا يمكن اختياره مديراً.

ⓒ (e) اعتذر عن المشاركة بأي منصب. ⓓ a,b متخاصمان لا يمكن أن يجتمعا في لجنة واحدة.

❹ تأمّل المجموعة $S=\{0,1,2,4,5,6\}$, وH مجموعة الأعداد المؤلّفة من ثلاثة منازل والمأخوذة من المجموعة S ,

ⓐ ما عدد عناصر H ؟ ⓑ ما عدد الأعداد الزوجيّة في H ؟

ⓒ ما عدد الأعداد مختلفة الأرقام وأكبر من 400 في H ؟ ⓓ ما عدد الأعداد الزوجيّة الأكبر من 400 في H ؟

❺ خمس بطاقات مرقّمة بالأرقام $1,2,3,4,5$, نختار منها ثلاث بطاقات بالتتالي مع الإعادة,

ⓐ ما عدد النتائج التي تشمل بطاقات مجموع أرقامها (6)؟ ⓑ ما عدد النتائج التي تشمل بطاقات أكبر رقم بين أرقامها هو (4) ؟

❻ جد العدد الطبيعي n الذي يحقّق: $\frac{1}{\binom{n}{2}}+\frac{1}{\binom{n+1}{2}}=\frac{1}{6}$

❼ جد العددين الطبيعيّين n,r إذا علمت أنّ: $3\binom{n+1}{r+1}=4\binom{n}{r}$ وَ $\binom{n+1}{r}=2\binom{n}{r-1}$

❽ ما هي أمثال الحد الذي يحتوي x^2y^2 في منشور $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$

❾ في منشور $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^9$: $x \in \mathbb{R}/\{0,1\}$:

ⓐ أوجد الحد الخامس.

ⓑ أوجد الحد الثابت المستقل عن x

❿ ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ على حد من الشكل: αx^3 ,
ثم عيّن ذلك الحد في حالة: $n=6$.

⓫ ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=cos^3(x)+sin^2(x)$,
اكتب $f(x)$ كمجموع نسب مثلّثيّة لمضاعفات الزاوية x ,
ثم احسب: $\mathbf{I}=\int_0^{\pi} f(x)\,.\,dx$

رابعاً: الاحتمالات

❶ يحتوي صندوق (ثلاث كرات حمراء وخمس كرات بيضاء), يسحب لاعب ثلاث كرات بالتتالي ومع الإعادة,
يخسر اللاعب نقطة واحدة عند سحب أي كرة بيضاء, وينال نقطتين عند سحب أي كرة حمراء,
احسب توقّع ما يحصّله اللاعب على المدى البعيد.

❷ أربع بطاقات مرقّمة $1,2,3,4$ نسحب عشوائيّاً بطاقتين بالتتالي دون إعادة, وبفرض:
X: المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين
Y: المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب أصغر رقمي الكرتين المسحوبتين

ⓐ اكتب جدول قانون احتمال Y واحسب توقّعه وتباينه.

ⓑ اكتب جدول قانون احتمال الزوج العشوائي (X,Y), أيكون المتحولان X,Y مستقلّان عشوائيّاً؟ علل.

❸ يحتوي صندوق (أربع كرات خضراء وn كرة حمراء) : $(n \geq 3)$, نسحب ثلاث كرات معاً وبصورة عشوائيّة,
وليكن: A: حدث (الكرات المسحوبة ليست جميعها من لون واحد)
B: حدث (الحصول على كرة واحدة على الأكثر حمراء)

ⓐ بفرض: $P(B|A)=\frac{3}{7}$ احسب قيمة (n).

ⓑ بفرض: $(n=5)$, نضع في الصندوق أيضاً كرة صفراء ثم نسحب منه ثلاث كرات في آنٍ معاً,
وليكن $\mathbf{X}$ المتحوّل العشوائي الدال على عدد الألوان في كل نتيجة ممكنة, اكتب جدول قانون احتمال X واحسب توقّعه وتباينه.

❹ نملأ كل خانة من الخانات الأربع في الشكل المجاور بأحد الأعداد: $(1\,,0\,,-1)$

ⓐ ما احتمال الحدث A(مجموع الأعداد الأربعة يساوي الصفر)؟

ⓑ ما احتمال الحدث B(إحدى الخانات على الأقل يظهر فيها العدد صفر)؟

ⓒ ليكن المتحوّل العشوائي $\mathbf{X}$ الذي يدل على عدد الخانات التي يظهر فيها العدد صفر,
اكتب جدول قانون احتمال $\mathbf{X}$, واحسب توقّعه وتباينه.