كتاب

الوافي للرياضيات

تأليـــف

الأستاذ

احمد حماد شعبان سعد

مدرس رياضيات

Hamad70t@gmail.com

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم، والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين؛ نبينا محمد عليه وعلى آلــه وصــحبه أفضل الصلاة وأتم التسليم أما بعد:

لاشك في أن لا شي يعادل الرياضيات فهي بتركيبها الدقيق غنية بصورة لا تضاهيها أي مادة فــي دقتهــا وقــوة منطقها وشدة تناسقها، والنظرية المبرهنة رياضيا تكون بمثابة يقين عقلي مطلق بصرف النظر إذا كان منطبقــا على الواقع أم غير منطبق .. الأهم أن يتسق البناء المنطقي مع نفــسه .. معطيــات القــضية مــع تواليهــا .. فرضياتها مع نتائجها .. المبرهنة الرياضياتية مكتملة مطلقاً في صحتها وترابطها ولا يعنيها بعد ذلــك انطباقهــا على الواقع أو تصديقها له .. أما في العلوم الإخبارية والتجريبية فوسائلها الحواس والتصورات ومدى التنــاغم والصدق مع الواقع .. لذا رأينا علوم الفلك والفيزياء تتعرض للتصديق والتكــذيب، فتبطــل النظريــات الجديــدة القديمة والشواهد على ذلك في تاريخ العلوم تكاد لا تحصى.. مثل كيفية الإبصار وطبيعة الكهرباء وعلوم الفلــك والتصورات حول الكون و الخ. لهذه الأسباب سميت المبرهنة الرياضية للدلالة على يقينها .. أمــا فــي العلــوم التجريبية والإخبارية فالنظرية .. مجرد تصور.. لا يرقى لليقين المطلق الذي تحظى به المبرهنة الرياضاتية، لهذا السبب سميت الرياضيات بلقب " ملكة العلوم " .. وهذا يعني تماما أن مهمة تكوين العقل الناقــد وتمليكــه أدوات ومقاييس

الحكم ومفاهيم الصح والخطأ المجردة – هي مهمة تتعلق مباشرة وبالضرورة بــالمنطق الرياضــي المجــرد ولا تتعلق بالحساب أو بالرياضيات التطبيقية والفيزياء فكلها لا تعدو أمثلة، وذلك لا ينفي بأي حال أن التطور الــذي حققه الإنسان هو " ثمرة اتحاد الاستدلال الرياضي (بشقيه الاستقرائي والاستنتاجي) مع التجريــب (الفيزيــاء وعلوم الفلك بشكل خاص)٠

إضاءة

يتمتع علم الرياضيات بجاذبية خاصة وسحر أخّاذ وبريق مبهر فهو مادة إيقاظ الفكر وشحذ المواهب وبناء العقول ، أن مادة الرياضيات هي مادة البناء في أبحاث الفضاء والفلك والأجهزة الإلكترونية التي دخلت جميــع مجــالات الحياة وتغلغلت بها وانتقلت بالناس من عالم إلى عالم آخر ...

وبالرغم من أن الرياضيات مادة مشوقة ، تميل النفس إلى دراستها والبحث فيها إلا أنها في كثير مــن الأحيــان تكون حجر عثرة أمام الكثيرين منا . وذلك بسبب عدم استيعابنا لأصولها ونظريتها وقوانينها .

ومما لاشك فيه أن هذا العجز عن الفهم لم يكن عيباً في ذات المادة ولكنه نابع من ذاتنا نحن !!

المبحث الأول / تعريف علم الرياضيات

عرّف علماء الرياضيات هذا العلم بعدة تعريفات هي على النحو التالي:

• عرّفه بعضهم فقال : هو علم تراكمي البنيان (المعرفة التالية تعتمد على معرفة سابقة) يتعامل مع العقل البشري بصورة مباشرة وغير مباشرة ويتكون من أسس ومفاهيم - قواعد ونظريات – عمليات – حل مسائل (حل مشكلات) وبرهان يتعامل مع الأرقام والرموز ويعتبر رياضة للعقل البشري . حيث تتم المعرفة فيه وفقا لاقتناع منطقي للعقل يتم قبل أو بعد حفظ القاعدة ، ويقاس تمكن لدارس من علم الرياضيات بقدرته ونجاحه في حل المسالة (المشكلة) وتقديم البرهان المناسب

• وعرّفها بعضهم فقال:تعرف '''[[الرياضيات]]''' على أنها دراسة البنية، الفضاء، و التغير، و بشكل عام على أنها دراسة البنية المجردة باستخدام المنطق و التدوين الرياضي. و بشكل أكثر عمومية، تعرف الرياضيات على أنها دراسة الأعداد و أنماطها.

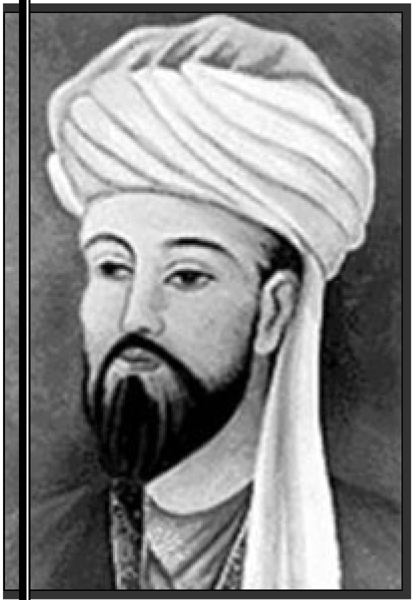
• وعرفه بعضهم فقال:إنه علم تراكمي البنيان (المعرفة التالية تعتمد على معرفة سابقه) ... .يتعامل مع العقل البشري بصورة مباشرة وغير مباشرة.. ويتكون من :أسس ومفاهيم – قواعد ونظريات – عمليات –حل مسائل (حل مشكلات) وبرهان .. ويتعامل مع الأرقام والرموز . ويعتبر رياضة للعقل البشري

حيث تتم المعرفة فيه وفقا لاقتناع منطقي للعقل . .. يتم قبل أو بعد حفظ القاعدة ويقاس تمكن الدارس من علم الرياضيات بقدرته ونجاحه في حل المسألة (المشكلة) وتقديم البرهان المناسب ".

الفصل الأول

علماء الرياضيات إلى الرياضيات عبر العصور

أبو جعفر محمد بن الحسن نصر الدين الطوسي



هو العلامة أبو جعفر محمد بن الحسن نصر الدين الطوسي عاش وتُوفيّ في بغداد أيام آخر خلفاء بني العباس المعتصم وذلك فيما بين (٥٩٧ ـ٦٧٢هجرية)
الموافق (١٢٠١ـ١٢٧٤ ميلادية) .
كان عالماً فذاً في الرياضيات والفلك ، فقد عُرف بين أصدقائه وذويه وعلماء المشرق والمغرب بلقب (علاّمة) والجدير بالذكر أنه كان يجيد اللغات اللاتينية والفارسية والتركية مما أعطته القدرة على السيطرة على شتّى المعارف .

أعماله :-

تلقى نصر الدين علمه عن العالم الكبير(كمال الدين بن يونس الموصلي) فغرس فيه حب الكتب وقد أبدع في علم الرياضيات بجميع فروعه .
ـ فكان له فضل كبير في تعريف الأعداد الصم .
ـ أشتهر بعلمي الهندسة حساب المثلثات فكتب أول كتاب فيهماكان متداولاً في جميع أنحاء المعمورة وأسم هذا الكتاب (شكل القطاعات) وهو يحوي على حساب المثلثات فقط .
ـ نقل كتاب إقليدس إلى اللغة العربية ونشر بحثاً يتركز حول موضوعات إقليدس .
ـ أولى أهتماماً ملموساً بالهندسة الفوقية أو الهندسة الآإقليديسية التي بُنيت على أسس تناقض هندسة إقليدس التي كان يقتقد بأنها ليست قابلة للتغيير والإنتقاد عبر العصور .

مؤلفاته :-

ألف نصر الدين طوسي أكثر من ١٤٥مؤلفاً في حقول مختلفة منها علم حساب المثلثات والجبر والجغرافيا والطبيعيات والمنطق

عمرالخيّام

هو أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيّام النيستابوري عاش فيما بين(٤٤٠ ـ٥٢٥هجرية(
الموافق (١٠٤٨ـ١١٣١ميلادية) . كان يشتغل في صغره بصنع وبيع الخيام ولذا كنيّ(بالخيّام(
وقد أكثر من التنقل في طلب العلم منذ نعومة أظفاره حتى أستقر في بغداد عاد ٤٦٦ هجرية.
أبدع في كثير من فنون المعرفة مثل الرياضيات والفلك واللغة والفقه والتاريخ والأدب

أعماله :-

ـ أهتم الخيّام اهتماماً خاصاً بالقدار الجبري وهو يبحث في علم الجبر ، وكان إقليدس قد حل فقط المقدار الجبري ذا حدين مرفوعاً إلى قوة أسه أثنان فأبتكر الخيّام نظرية ذات الحدين

المرفوعة إلى أس أي عدد صحيح موجب .
ـ حل كثير من معادلات الدرجة الثانية والتي على صيغة ا س + ب س = ج.
ـ كما عكف على البحث في علم الجبر فدرس المعادلات الجبرية من الدرجة الأولى والثانية والثالثة.
وعالج المعادلات التكعيبية معالجة منهجية منتظمة نادرة في نوعها عبر العصور وأستخر الجذور لأية درجة.
ـ أهتم بتصنيف المعادلات ذات الدرجة الثالثة حسب درجاتها وحسب عدد حدودها فأبدع في ذلك إبداعاً كبيراً.
ـ كذلك قام بإدخال علم الجبر على علم حساب المثلثات لذا نجد الخيّام حل الكثير من المسائل المستعصية في علم حساب المثلثات مستعملاً معادلات جبرية ذات الدرجة الثالثة والرابعة.
ـ تشعب اهتمامه حتى حوى علم الفلك .
ـ ركز على دراسة هندسة إقليدس المشروحة والمعلق عليها من طرف علماء الرياضيات المسلمين

الخوارزمي

الخوارزمي أبو عبد الله محمد بن موسى (أبو جعفر) (حوالي ٧٨١- حوالي ٨٤٥)، كان من اوائل علماء الرياضيات المسلمين حيث ساهمت اعماله بدور كبير في تقدم الرياضيات في عصره. انتقلت عائلته من مدينة خوارزم في خراسان إلى بغداد في العراق، انجز الخوارزمي معظم ابحاثه بين عامي ٨١٣ و ٨٣٣ في دار الحكمة، التي أسسها الخليفة المأمون. و نشر اعماله باللغة العربية، التي كانت لغة العلم في ذلك العصر. ويسميه الطبري في تاريخه: محمد بن موسى الخوارزمي المجوسي القطربلّي ، نسبة إلى قرية قُطْرُبُلّ من ضواحي بغداد. اللقب مجوسي يتناقض مع بدء الخوارزمي لكتابه (الجبر والمقابلة) بالبسملة. ابتكر الخوارزمي مفهوم الخوارزمية في الرياضيات و علم الحاسوب، (مما اعطاه لقب ابو علم الحاسوب)عند البعض، حتى ان كلمة خوارزمية في العديد من اللغات (و منها algorithm بالانكليزية) اشتقت من اسمه، بالاضافة لذلك، قام الخوارزمي باعمال هامة في حقول الجبر و المثلثات والفلك و الجغرافية و رسم الخرائط. ادت اعماله المنهجية و المنطقية في حل المعادلات من الدرجة الثانية إلى نشوء علم الجبر، حتى ان العلم اخذ اسمه من كتابه حساب الجبر و المقابلة، الذي نشره عام ٨٣٠، و انتقلت هذه الكلمة إلى العديد من اللغات (Algebra في الانكليزية).

ليونارد أويلر

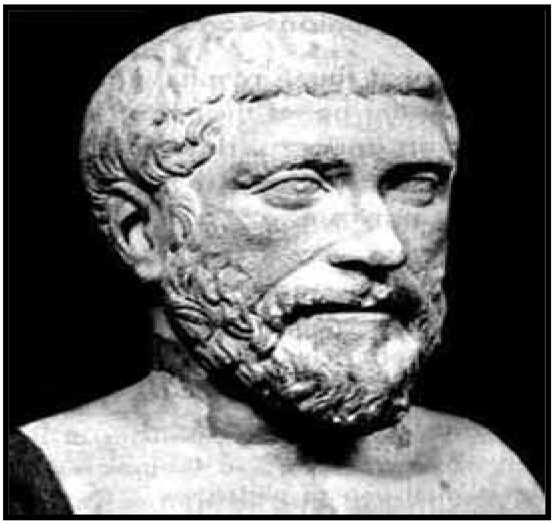
عالم رياضيات و فيزياء سويسري المولد عاش من ١٧٠٧ حتى ١٧٨٣ ، و قد عمل معظم الوقت في سان بطرسبرغ حيث تبع آل برنوللي ، ثم في برلين بدعوة من فريدريك الأكبر ، و لقد اشتهر بقدرته على إنجاز

العمليات المعقدة ذهنيا ، و واصل عمله حتى بعد فقد بصره ، و يعتبر واحدا من أعظم الرياضيين عبر التاريخ ، فقد نشر أكثر من ٤٠٠ ورقة بحثية و كتابا منهجيا اهتمت بكل فروع الرياضيات تقريبا هذا بالإضافة إلى ٣٥٠ ورقة ظهرت بعد وفاته ، و كانت أهم إسهاماته في الهندسة التحليلية و الحساب و حساب المثلثات و بالتالي إسهامه في توحيد كل الرياضيات

إقليدس

عالم رياضيات إغريقي من اسكندرية القرن الثالث قبل الميلاد ، تنسب إليه أول معالجة موضوعية للهندسة في كتابه الأصول أو العناصر ، و يعالج هذا الكتاب كذلك التناسب و العدد بما في ذلك الأعداد اللامنطقية ، و لقد كتب إقليدس أعمالا في علم الفلك و القطوع المخروطية ، و قد وصل كتاب الأصول إلى الغرب مترجما عن العربية ، و أحدث تغييرا عميقا ، و لم تكن كتب الهندسة المدرسية ، و حتى وقت قريب إلا ترجمات لإقليدس

فيتاغورس



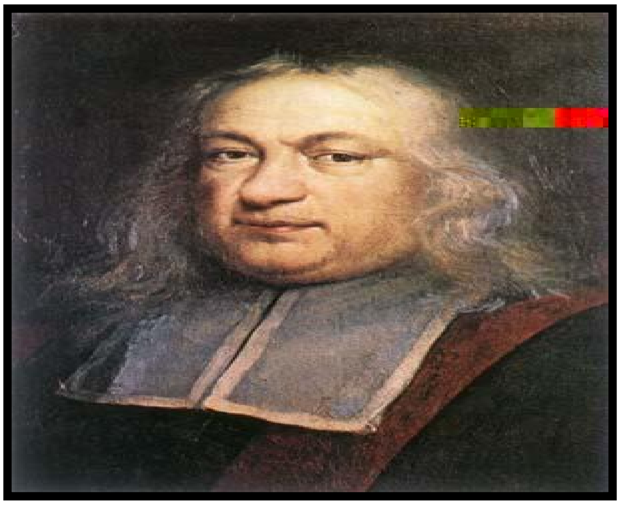
فيلسوف و عالم رياضيات و ناسك إغريقي عاش نحو ٣٠٠ - ٣٨٠ قبل الميلاد، و أسس مدرسة فكرية أثرت على أفلاطون ، و كان فيثاغورس و أتباعه يعتقدون بأن كل شيء عدد معترفين بالطبيعة

هنري لوكاس

عالم رياضيات إنكليزي عاش في الفترة بين ١٨٤٢ و ١٨٩١

أندريان ماري ليجاندر

عالم رياضيات فرنسي عاش بين ١٧٥٢ و ١٨٣٣ ، أوجد نتائج مهمة عديدة و بخاصة في نظرية الأعداد الأولية ، و قانون التعاكس التربيعي ، و نشر كتابا منهجيا في مبادئ الهندسة ، كما نشر أعمالا حول المذنبات و المسح الأرضي ، و عين في عدد من المناصب الرسمية



بيير دي فيرمات

محام و عالم رياضيات هاو فرنسي عاش بين ١٦٠١ و ١٦٦٥ و ينسب إليه تأسيس نظرية الأعداد الحديثة ، و حساب الإحتمالات باستقلالية عن باسكال ، و كذلك اكتشاف الهندسة التحليلية باستقلالية عن ديكارت ، و قد تحصل على نتائج متطورة في مجالي أسس الهندسة التحليلية و حساب التفاضل ، و لكنه لم يتمكن من نشرها ، و أعلن أنه برهن المسألة غير المحلولة الشهيرة المعروفة باسم مبرهنة فيرما الأخيرة

أوغستين لويس كوشي

عالم رياضيات و فيزياء فرنسي عاش في الفترة من ١٧٨٩ إلى ١٨٥٧ ، كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات ، و بخاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الإستمرار ، و طور نظرية الدوال في متغيرات عقدية ، و بعد انتهاء خدماته كمهندس في القوة التي كانت تعد لغزو نابليون لبريطانيا و التي لم تتم ، و شجعه على متابعة نشاطه في

الرياضيات العالم لابلاس و العالم لاغرانج و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك ، و السوربون ، و كلية فرنسا ، و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة ١٨٣٠ فنفي مع حفيد تشارلز العاشر ، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي استاذيه أنشئ من أجله ، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر ، و لقد نشر ما مجموعه ٧٨٩ عملا ، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراق بحثية في الهندسة و نظرية الأعداد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء

كريستيان هيجنز

عالم فلك و جبر و رياضيات هولندي عاش في الفترة من ١٦٢٩ إلى ١٦٩٥ و قد ساهمت أعماله في التحليل إلى اكتشاف الحسبان

ماران ميرسين

عالم نظرية الأعداد و فيلسوف و لاهوتي و راهب فرنسي عاش في الفترة بين ١٥٨٨ و ١٦٤٨ مكنه ترحاله الكثير أن يكون قناة اتصال بين أكاديميين أوروبيين أمثال ديكارت و غاليليو و فيرما و باسكال و هيغنز ، كما أوحى باختراع ساعة البندول

ابن باجّه

هو أبو بكر محمد بن يحيى بن الصائغ التُجيبي، السرقسطي، المعروف بابن باجّه، أول مشاهير الفلاسفة العرب في الأندلس، كما انصرف في حياته، فضلاً عن الفلسفة، إلى السياسة، والعلوم الطبيعية، والفلك، والرياضيات، والموسيقى والطب. وبرز في الطب خاصة حتى أثار حفيظة زملائه في تلك الصنعة، فدسوا له السم، فتوفي في فاس (المغرب) سنة ٥٢٩ هـ. ويسرد ابن أبي أصيبعة لائحة بثمانية وعشرين مؤلفاً ينسبها إلى ابن باجّه، تقع في ثلاث فئات مختلفة: شروح أرسطوطاليس، تأليف اشراقية، ومصنفات طبية. فمن تأليفه في الطب: (كلام على شيء من كتاب الأدوية المفردة لجالينوس)، (كتاب التجربتين على أدوية بن وافد)، (كتاب اختصار الحاوي للرازي)، و (كلام في المزاج بما هو طبي)

ابن برغوث

هو محمد بن عمر بن محمد، المعروف بابن برغوث، من علماء الأندلس في الرياضيات والهيئة، في القرن الخامس الهجري، توفي سنة ٤٤٤ هـ. ذكره ابن صاعد الأندلسي وقال أنه كان (متحققاً بالعلوم الرياضية، مختصاً منها بإيثار علم الأفلاك، وحركات الكواكب وأرصادها). وكان يشتغل بالأرصاد مع عدد من أصدقائه وزملائه، منهم ابن الليث، وابن الجلاب، وابن حيّ

ابن عراق

هو أبو نصر منصور بن علي بن عراق، رياضي وفلكي من أهل خوارزم، وكان من أساتذة أبي الريحان البيروني. لا نكاد نعرف من حياته سوى أنه رافق البيروني إلى غزنة سنة ٤٠٨ هـ وأرسل إليه بضع عشرة رسالة، وقد توفي في حدود السنة ٤٢٥ هـ. من آثاره (رسالة في إصلاح شكر من كتاب منلاوس في الكريات)، طبعها (كراوس) في برلين سنة ١٩٣٦ م. وذكر من مؤلفاته: (المجسطي الشاهي) و (الدوائر التي تحد الساعات الزمانية)

ابن البنَّاء

هو أبو العباس أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المراكشي. عرف بابن البناء لأن أباه كان بنّاءً، كما اشتهر بلقب المراكشي لأنه أقام في مراكش ودرّس فيها، وفيها مات سنة ٧٢١ أو ٧٢٣ هـ. ولد في غرناطة، وقيل في مراكش، ويختلف مترجموه في سنة ولادته، فيجعلونها بين ٦٣٩ هـ و ٦٥٦ هـ.

تبحّر ابن البنَّاء في علوم متنوّعة، إلا أنه اشتهر خاصة في الرياضيات وما إليها. وكان عالماً مثمراً، وضع أكثر من سبعين كتاباً ورسالة في العدد، والحساب، والهندسة، والجبر، والفلك، ضاع معظمها، ولم يعثر العلماء الإفرنج إلا على عدد قليل منها نقلوا بعضه إلى لغاتهم. وقد تجلّى لهم فضل ابن البناء على بعض البحوث والنظريات في الحساب والجبر والفلك.

قامت شهرة ابن البنَّاء على كتابه المعروف باسم (كتاب تلخيص أعمال الحساب) الذي يُعد من أشهر مؤلفاته وأنفسها. وقد بقي معمولاً به في المغرب حتى نهاية القرن السادس عشر للميلاد، كما فاز باهتمام علماء القرن التاسع عشر والقرن العشرين. فضلاً عن هذا الكتاب وضع ابن البنَّاء كتابين، أحدهما يسمى كتاب الأصول والمقدمات في الجبر والمقابلة، والثاني كتاب الجبر والمقابلة. ولابن البنَّاء كذلك رسالة في الهندسة، وأزياج في الفلك، كما له كتاب باسم (كتاب المناخ) ويتناول الجداول الفلكية وكيفية عملها

ابن اللجائي

هو أبو زيد عبد الرحمن بن أبي الربيع اللجائي، الفاسي، اشتغل بالفلك والرياضيات. وجاء عن أبن قنفذ: (كان للجائي آية في فنونه، ومن بعض أعماله أنه اخترع إسطرلاباً ملصوقاً بالجدار، والماء يدير شبكته، فيأتي الناظر فينظر إلى ارتفاع الشمس، وكم مضى من النهار، وكذلك ينظر ارتفاع الكواكب بالليل...). وقد توفي سنة ٧٧٣ هـ

ابن الخوام

هو عماد الدين أبو علي عبد الله بن محمد بن عبد الرزّاق الحربوي، المعروف بابن الخوام، طبيب ورياضي، ولد سنة ٦٤٣ هـ وعاش في بغداد فكان رئيس أطبائها، وفيها توفي سنة ٧٣٦ هـ. وذكر من تصانيفه (رسالة الفراسة)، (مقدّمة في الطب)، و (القواعد البهائية) في الحساب

ابن المجدي

هو أبو العباس شهاب الدين أحمد بن رجب بن طنبغا، المعروف بابن المجدي، عالم رياضي وفلكي، ولد بالقاهرة سنة ٧٦٠ هـ، وفيها توفي في ١٠ ذي القعدة سنة ٨٥٠ هـ. قال السخاوي في ترجمته أنه (صار رأس الناس في أنواع الحساب، والهندسة، والهيئة، والفرائض، وعلم الوقت بلا منازع). وقال السيوطي: (اشتغل، وبرع في الفقه، والنحو، والفرائض، والحساب، والهيئة، والهندسة...). ترك آثاراً عديدة وصلنا بعضها في مكتبات القاهرة وليدن وأكسفورد، وأشهرها: (الدر اليتيم في صناعة التقويم)، (إرشاد الحائر إلى تخطيط فضل الدوائر) في علم الهيئة، (تعديل القمر)، (تعديل زحل)

ابن الخياط

هو أبو بكر يحيى بن أحمد المعروف بابن الخياط، طبيب، رياضي، مهندس وفلكي، من علماء الأندلس في القرن الخامس الهجري. ذكره صاعد في (طبقات الأمم)، ولخص عنه ترجمته ابن أبي أصيبعة. قال صاعد أنه كان أحد تلاميذ أبي القاسم المجريطي في علم العدد والهندسة. ثم مال إلى أحكام النجوم فبرع فيها. وكانت وفاته بطليطلة سنة ٤٤٧ هـ

ابن السمح

هو أبو القاسم اصبغ بن محمد بن السَمْح المهدي الغرناطي، من علماء الأندلس. أخذ فيها عن أبي القاسم المجريطي، وبرع في الرياضيات، والهيئة، وعني بالطب. وردت ترجمته في كتاب (طبقات الأمم) لصاعد الأندلسي، وعن صاعد نقل ابن أبي أصيبعة في كتاب (عيون الأنباء). وتوفي ابن السمح في غرناطة عام ٤٢٦ هـ ومن مؤلفات ابن السمح (المدخل إلى الهندسة) في تفسير كتاب إقليدس، كتاب (ثمار العدد) في الأعمال التجارية، (كتاب طبيعة العدد)، كتاب (في صنعة الإسطرلاب)، (كتاب العمل بالإسطرلاب)، (زيج على مذهب السندهند)

ابن مسعود

هو جمشيد بن محمود بن مسعود الملقب بغياث الدين، ولد في النصف الثاني من القرن الثامن للهجرة في مدينة كاشان، ولذلك يعرف بالكاشاني وبالكاشي. انتقل إلى سمرقند بدعوة من (أولغ بك) وفيها ظهر نبوغه في علوم الحساب والفلك والطبيعة. وفي سمرقند ألف معظم كتبه. وقد توفي ابن مسعود في أوائل القرن التاسع للهجرة، تاركاً مجموعة من المؤلفات، أهمها: (كتاب زيج الخاقاني في تكميل الايلخاني)، (نزهة الحدائق) في علم الفلك، (الرسالة المحيطية) في تعيين نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، (رسالة الجيب والوتر) في المثلثات، (مفتاح الحساب) الذي استخدم فيه الكسور العشرية وفائدة الصفر

أبو بكر بن أبي عيسى

هو أحمد بن عمر بن أبي عيسى الأنصاري، رياضي وحاسب، من علماء الأندلس في القرن الرابع الهجري، ذكره ابن صاعدة في (طبقات الأمم) وقال: كان متقدماً في العدد والهندسة والنجوم، فكان يجلس لتعليم ذلك أيام الحكم

ابن سينا

هو أبو على الحسين بن عبد الله بن الحسن بن على بن سينا، الملقب بالشيخ الرئيس، فيلسوف، طبيب وعالم، ومن عظام رجال الفكر في الإسلام ومن أشهر فلاسفة الشرق وأطبائه. ولد في قرية (أفشنة) الفارسية في صفر من سنة ٣٧٠ هـ. ثم انتقل به أهله إلى بخارى حيث كانت الفارسية لغة البلاط، والعربية لغة الديوان والمراسلات. وفي بخارى تعمق في العلوم المتنوعة من فقه وفلسفة وطب، وبقي في تلك المدينة حتى بلوغه العشرين. ثم انتقل إلى خوارزم حيث مكث نحواً من عشر سنوات (٣٩٢ - ٤٠٢ هـ)، ومنها إلى جرجان فإلى الري. وبعد ذلك رحل إلى همذان وبقي فيها تسع سنوات، ومن ثم دخل في خدمة علاء الدولة بأصفهان. وهكذا أمضى حياته متنقلاً حتى وفاته في همذان، في شهر شعبان سنة ٤٢٧ هـ

أبو جعفر الخازن

هو أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن الخراساني، عالم رياضي فلكي من أبناء القرن الرابع الهجري. لا نكاد نعرف شيئاً يذكر من حياته سوى أنه خدم ابن العميد، وزير ركن الدولة البويهي. ولد من الكتب: (كتاب زيج الصفائح) و (كتاب المسائل العددية). قيل أنه أول عالم حلّ المعادلات التكعيبية هندسياً بواسطة قطوع المخروط، كما بحث في المثلثات على أنواعها

ابن الصفّار

هو أبو القاسم أحمد بن عبد الله بن عمر القرطبي، من رياضيي الأندلس في القرن الخامس الهجري، ومن تلامذة أبي القاسم المجريطي. ترجم له ابن صاعد الأندلسي في (طبقات الأمم)، وقال: (كان متحققاً بعلم العدد والهندسة والنجوم، وقعد في قرطبة لتعليم ذلك، فتخرج عليه عدد من مشاهير العلماء). ومن آثار ابن الصفّار زيج مختصر على مذهب السندهند، وكتاب في العمل بالإسطرلاب. وقد خرج من قرطبة على أثر الفتنة، فانتقل إلى دانية، وفيها كانت وفاته حوالي السنة ٤٢٦ هـ

ابن الشاطر

هو أبو الحسن بن علي بن إبراهيم بن محمد بن المطعم، المعروف بابن الشاطر، أحد رياضيي القرن الثامن للهجرة. ولد بدمشق سنة ٧٠٤ هـ وتوفي فيها سنة ٧٧٧ هـ. كان موقّتاً في الجامع الأموي، عالماً بآلات الرصد وبعلم الفلك، وألف بهذين العلمين

أبو الحسن بن العطار

هو أبو الحسن علاء الدين علي ابن إبراهيم، المعروف بابن العطار، نسبة لأبيه الذي كان عطاراً بدمشق. ولد سنة ٦٥٤ هـ، وكان نشيطاً في الحساب، وتوفي سنة ٧٢٤ هـ

البتَّاني

هو ابن عبد الله محمد بن سنان بن جابر الحراني المعروف باسم البتاني، ولد في حران، وتوفي في العراق، وهو ينتمي إلى أواخر القرن الثاني وأوائل القرن الثالث للهجرة. وهو من أعظم فلكيي العالم، إذ وضع في هذا الميدان نظريات مهمة، كما له نظريات في علمي الجبر وحساب المثلثات

البغدادي

هو موفق الدين أبو محمد عبد اللطيف البغدادي، ولد في بغداد سنة ٥٥٧ هـ ودرس فيها الأدب والفقه، والقرآن، والحديث، والحساب، والفلك. ثم رحل إلى مصر حيث تعمق في الفلسفة والكيمياء، على يد يس السيميائي (الكيميائي)، كما تخصص في الطب على يد موسى بن ميمون الطبيب. انتقل إلى دمشق ليشتغل بدراسة العلوم الطبية مدة من الزمن، ثم عاد إلى مصر ليتسلم إحدى وظائف التدريس في الأزهر الشريف أيام العزيز ابن صلاح الدين. وكان التدريس بالأزهر شرفاً لا يناله إلا من يناله الحظ من العلماء. وفي أواخر حياته عاد البغدادي إلى دمشق وحلب حيث توفي سنة ٦٢٩ هـ

من أهم ما وصلنا من مؤلفات البغدادي كتاب (الإفادة والاعتبار) وفيه تحدث عن أحوال مصر وما شاهده فيها. كما يتضمن الكتاب وصفاً للنباتات والحيوانات التي رآها في مصر، مع ذكر التفاصيل الدقيقة، والإشارة إلى الخصائص الطبية للأعشاب

أبو الرشيد الرازي

هو أبو الرشيد مُبَشِّر بن أحمد بن علي، رازي الأصل، بغدادي المولد والدار، ولد سنة ٥٣٠ هـ. اشتغل بالرياضيات وبرع فيها، ولاسيما في الحساب وخواص الأعداد، والجبر، والمقابلة، والهيئة، وقسمة التركات. اعتمده الخليفة الناصر لدين الله في اختيار الكتب لخزائن الكتب بالدار الخليفية، وأرسله موفداً إلى الملك العادل بن أبي بكر الأيوبي إلى بلاد الموصل. فلقيه في نصيبين وتوفي هناك سنة ٥٨٩ هـ

أبو سهل الكوهي

هو أبو سهل وَيْجَن بن وشم الكوهي، من العلماء الذين اشتغلوا في الرياضيات والفلك ومراكز الأثقال، في عهد الدولة البويهية. أصله من طبرستان، قدم بغداد وبرز في النصف الثاني من القرن الرابع الهجري، (وكان حسن المعرفة بالهندسة وعلم الهيئة، متقدماً فيهما إلى الغاية المتناهية) على قول ابن العبري. واشتهر بصنع الآلات الرصدية، وإجراء الأرصاد الدقيقة.
وقد عهد إليه شرف الدولة الرصد في المرصد الذي بناه في بستان داره ببغداد. فرصد فيه الكوهي الكواكب السبعة تنقلها وأبراجها. كما بحث في مراكز الأثقال، فتوسع فيها واستعمل البراهين الهندسية لحل بعض مسائلها. وللكوهي رسائل ومؤلفات في الرياضيات والفلك نذكر بعضها: (كتاب مراكز الأكر)، (كتاب صفة الإسطرلاب)، (كتاب الأصول في تحريكات كتاب إقليدس)، (البركار التام والعمل به). وكانت وفاة الكوهي حوالي السنة ٣٩٠ هـ

البوزجَاني

هو أبو الوفاء محمد بن يحيى بن إسماعيل بن العباس البوزجاني، من أعظم رياضيي العرب، ومن الذين لهم فضل كبير في تقدم العلوم الرياضية. ولد في بوزجان، وهي بلدة صغيرة بين هراة ونيسابور، في مستهل رمضان سنة ٣٢٨ هـ. قرأ على عمه المعروف بأبي عمرو المغازلي، وعلى خاله المعروف بأبي عبد الله محمد بن عنبسة، ما كان من العدديّات والحسابيات. ولما بلغ العشرين من العمر انتقل إلى بغداد حيث فاضت قريحته ولمع اسمه وظهر للناس إنتاجه في كتبه ورسائله وشروحه لمؤلفات إقليدس وديوفنطس والخوارزمي وفي بغداد قدم أبو الوفاء سنة ٣٧٠ هـ أبا حيان التوحيدي إلى الوزير ابن سعدان. فباشر في داره مجالسه الشهيرة التي دوّن أحداثها في كتاب (الامتاع والمؤانسة) وقدمه إلى أبي الوفاء وفي بغداد قضى البوزجاني حياته في التأليف والرصد والتدريس. وقد انتخب ليكون أحد أعضاء المرصد الذي أ،شأه شرف الدولة، في سراية، سنة ٣٧٧ هـ. وكانت وفاته في ٣

رجب ٣٨٨ هـ على الأرجح.
يعتبر أبو الوفاء أحد الأئمة المعدودين في الفلك والرياضيات، وله فيها مؤلفات قيمة، وكان من أشهر الذين برعوا في الهندسة، أما في الجبر فقد زاد على بحوث الخوارزمي زيادات تعتبر أساساً لعلاقة الجبر بالهندسة، وهو أول من وضع النسبة المثلثية (ظلّ) وهو أول من استعملها في حلول المسائل الرياضية، وأدخل البوزجاني القاطع والقاطع تمام، ووضع الجداول الرياضية للماس، وأوجد طريقة جديدة لحساب جدول الجيب، وكانت جداوله دقيقة، حتى أن جيب زاوية ٣٠ درجة كان صحيحاً إلى ثمانية أرقام عشرية، ووضع البوزجاني بعض المعادلات التي تتعلق بجيب زاويتين، وكشف بعض العلاقات بين الجيب والمماس والقاطع ونظائرها
وظهرت عبقرية البوزجاني في نواح أخرى كان لها الأثر الكبير في فن الرسم. فوضع كتاباً عنوانه (كتاب في عمل المسطرة والبركار والكونيا) ويقصد بالكونيا المثلث القائم الزاوية.
وفي هذا الكتاب طرق خاصة مبتكرة لكيفية الرسم واستعمال الآلات ذلك
ولأبي الوفاء، غير ما ذكر، مؤلفات قيمة، ورسائل نفيسة، منها: كتاب ما يحتاج إليه العمال والكتاب من صناعة الحساب وقد اشتهر باسم كتاب منازل الحساب، كتاب فيما يحتاج إيه الصناع من أعمال الهندسة، كتاب إقامة البراهين على الدائر من الفلك من قوس النهار، كتاب تفسير كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة، كتاب المدخل إلى الأرتماطيقي، كتاب معرفة الدائر من الفلك، كتاب الكامل، كتاب استخراج الأوتار، كتاب المجسطي
وخلاصة القول أن البوزجاني أبرع علماء العرب الذين كان لبحوثهم ومؤلفاتهم الأثر الكبير في تقدم العلوم، ولا سيما الفلك، والمثلثات، وأصول الرسم. كما كان من الذين مهّدوا السبيل لإيجاد الهندسة التحليلية، بوضعه حلولاً هندسية لبعض المعادلات، والأعمال الجبرية العالية

المجريطي

ولد أبو القاسم سلمة بن أحمد بمدينة مجريط (مدريد) في الأندلس، في سنة ٣٤٠ هـ، وتوفي في سنة ٣٩٧ هـ عن سبعة وخمسين عاماً. اهتم بدراسة العلوم الرياضية، فتعمق بها حتى صار إمام الرياضيين في الأندلس. كما أنه اشتغل بالعلوم الفلكية وكانت له فيها مواقف وآراء، فضلاً عن الكيمياء وسائر العلوم المعروفة
ترك المجريطي مؤلفات علمية متنوعة أهمها: رتبة الحكم (في الكيمياء)، غاية الحكيم (في الكيمياء) وقد نُقل إلى اللاتينية
عني المجريطي بزيج الخوارزمي وزاد عليه، وله رسالة في آلة الرصد، وبالإسطرلاب. وقد ترك أبحاثاً قيمة في مختلف فروع الرياضيات كالحساب والهندسة، فضلاً عن مؤلفاته في الكيمياء. واهتم المجريطي كذلك بتتبع تاريخ الحضارات القديمة. ومن الدراسات المهمة التي ركز عليها المجريطي علم البيئة
وفي الخاتمة نقول أن المجريطي يع صاحب مدرسة مهمة في حقل العلوم، تأثر بآرائها العديد من العلماء اللاحقين، أمثال الزهراوي الطبيب الأندلسي المشهور، والغرناطي، والكرماني، وابن خلدون الذي نقل عن المجريطي بعض الآراء التي أدرجها في مقدمته

أحمد بن السراج

هو أحمد بن أبي بكر بن علي بن السراج، عالم رياضي من أبناء القرن الثامن الهجري.
يعرف من مصنفاته: (مسائل هندسية)، (رسالة في الربع المجنّح في معرفة جيب القوس وقوس الجيب)، و (رسالة في تسطيح الكرة)

أبو معشر البلخي

هو أبو معشر جعفر بن محمد بن عمر البلخي، من كبار علماء النجوم في الإسلام، ومن أوسعهم شهرة في أوروبا منذ القرون الوسطى، وهو يعرف باسم (ألبوماسر). ولد في بَلْخ، شرقي خراسان، وقدم بغداد طلباً للعلم، فكان منزله في الجانب الغربي منها بباب خراسان، على ما جاء في (الفهرست). وكان أولاً من أصحاب الحديث، ثم دخل في علم الحساب والهندسة، وعدل إلى علم أحكام النجوم. سكن واسط وفيها مات في ٢٨ رمضان سنة ٢٧٢ هـ.

ترك أبو معشر مصنّفات جمّة في النجوم، وذكر منها ابن النديم بضعة وثلاثين كتاباً، ومن الآثار التي وصلتنا منه: كتاب المدخل الكبير الذي ترجم وطبع عدة مرات، كتاب أحكام تحاويل سني المواليد الذي ترجم أيضاً وطبع عدة مرات، كتاب مواليد الرجال والنساء، كتاب الألوف في بيوت العبادات، كتاب الزيج الكبير، كتاب الزيج الصغير، كتاب المواليد الكبير، كتاب المواليد الصغير، كتاب الجمهرة، كتاب الاختيارات، كتاب الأنوار، كتاب الأمطار والرياح وتغير الأهوية، كتاب السهمين وأعمار الملوك والدول، كتاب اقتران النحسين في برج السرطان، كتاب المزاجات، كتاب تفسير المنامات من النجوم، كتاب الأقاليم

أبو كامل الحاسب

هو أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع، الحاسب، المصري، مهندس وعالم بالحساب. عاش في القرن الثالث للهجرة، ولم تذكر عنه المصادر العربية القديمة ما يزيل الغموض المحيط بتاريخ حياته. جاء في كتاب (أخبار العلماء بأخبار الحكماء): (وكان فاضل وقته، وعالم زمانه، وحاسب أوانه. وله تلاميذ تخرجوا بعلمه). وذكره ابن النديم في (الفهرست) ابن حجر في (لسان الميزان). ويعتبر من أعظم علماء الحساب في العصر الذي تبع عصر الخوارزمي

ذكر للحاسب عدة مؤلفات في الرياضيات والفلك وغير ذلك، منها: كتاب الجمع والتفريق، كتاب الخطأين، كتاب كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله ويعرف بكتاب الكامل، كتاب الوصايا بالجبر والمقابلة، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب الوصايا بالجذور، كتاب الشامل. ويمكن القول أن أبا كامل قد اعتمد كثيراً على كتب الخوارزمي، وأوضح بعض القضايا فيها. وكذلك أوضح في مؤلفاته مسائل كثيرة حلّها بطريقة مبتكرة لم يسبق إليها. وله كتب أخرى مثل: كتاب الكفاية، كتاب المساحة والهندسة، كتاب الطير (درس فيه أساليب الطيران)، كتاب مفتاح الفلاحة. واشتهر برسالة المخمس والمعشر، وكذلك بكتبه في الجبر والحساب. وكان وحيد عصره في حلّ المعادلات الجبرية، وفي استعمالها لحلّ المسائل الهندسية، وقد بقي أبو كامل الحاسب مرجعاً لبعض علماء أوروبا حتى القرن الثالث عشر للميلاد

ثابت بن قرَّه

هو ثابت بن قرّه وكنيته أبو الحسن، ولد في حرّان سنة ٢٢١ هـ، وامتهن الصيرفة، كما اعتنق مذهب الصائبة. نزح من حرّان إلى كفرتوما حيث التقى الخوارزمي الذي أعجب بعلم ثابت الواسع وذكائه النادر. وقد قدمه الخوارزمي إلى الخليفة المعتضد، وكان المعتضد يميل إلى أهل المواهب ويخص أصحابها بعطفه وعطاياه، ويعتبرهم من المقربين إليه. ويروى أنه أقطع ثابت بن قره، كما أقطع سواه من ذوي النبوغ، ضباعاً كثيرة. وقد توفي في بغداد سنة ٢٨٨ هـ

أحب ثابت العلم، لا طمعاً في كسب يجنيه ولا سعياً وراء شهرة تعليه، إنما أحبّه لأنه رأى في المعرفة مصدر سعادة كانت تتوق نفسه إليها. ولما كانت المعرفة غير محصورة في حقل من

حقول النشاط الإنساني، ولما كانت حقول النشاط الإنساني منفتحة على بعضها بعضاً، فإن فضول ثابت بن قره حمله على ارتيادها كلها، ومضيفاً إلى تراث القدامى ثمار عبقريته الخلاقة مهّد ثابت بن قره لحساب التكامل ولحساب التفاضل. وفي مضمار علم الفلك يؤثر أنه لم يخطئ في حساب السنة النجمية إلا بنصف ثانية، كما يؤثر اكتشافه حركتين لنقطتي الاعتدال إحداهما مستقيمة والأخرى متقهقرة

ولثابت أعمال جلية وابتكارات مهمة في الهندسة التحليلية التي تطبق الجبر على الهندسة، ويعزى إليه العثور على قاعدة تستخدم في إيجاد الأعداد المتحابة، كما يعزى إليه تقسيم الزاوية ثلاثة أقسام متساوية بطريقة تختلف عن الطرق المعروفة عند رياضيي اليونان

وقد ظهرت عبقرية ثابت بن قره، فضلاً عن العلوم الرياضية والفلكية، في مجال العلوم الطبية أيضاً

ترك ثابت بن قرّه عدة مؤلفات شملت علوم العصر، وذكرها كتاب عيون الأنباء، أشهرها: كتاب في المخروط المكافئ، كتاب في الشكل الملقب بالقطاع، كتاب في قطع الاسطوانة، كتاب في العمل بالكرة، كتاب في قطوع الاسطوانة وبسيطها، كتاب في مساحة الأشكال وسائر البسط والأشكال المجسمة، كتاب في المسائل الهندسية، كتاب في المربع، كتاب في أن الخطين المستقيمين إذا خرجا على أقلّ من زاويتين قائمتين التقيا، كتاب في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية، كتاب في الهيأة، كتاب في تركيب الأفلاك، كتاب المختصر في علم الهندسة، كتاب في تسهيل المجسطي، كتاب في الموسيقى، كتاب في المثلث القائم الزاوية، كتاب في حركة الفلك، كتاب في ما يظهر من القمر من آثار الكسوف وعلاماته، كتاب المدخل إلى إقليدس، كتاب المدخل إلى المنطق، كتاب في الأنواء، مقالة في حساب خسوف الشمس والقمر، كتاب في مختصر علم النجوم، كتاب للمولودين في سبعة أشهر، كتاب في أوجاع الكلى والمثاني، كتاب المدخل إلى علم العدد الذي ألفه نيقوماخوس الجاراسيني ونقله ثابت إلى العربية

أبو القاسم الإنطاكي

هو أبو القاسم علي بن أحمد الإنطاكي، الملقب (بالمجتبي)، رياضي ومهندس، ومن أعلام مهندسي القرن الرابع للهجرة. ولد في إنطاكية، وانتقل إلى بغداد، فاستوطنها حتى وفاته حوالي السنة ٣٧٦ هـ، وكان من أصحاب عضد الدولة البويهي والمقدمين عنه. وكان على نبوغه في الهندسة والعدد، مشاركاً في علوم الأوائل. وأشار القفطي وابن النديم إلى عدد من آثاره، منها: (التخت الكبير في الحساب الهندي)، (تفسير الأرثماطيقي)، (شرح إقليدس)، (كتاب في المكعبات)، (الموازين العددية) يبحث في الموازين التي تعمل لتحقيق صحة أعمال الحساب

أبو الفضل الحارثي

هو مؤيد الدين أبو الفضل بن عبد الكريم بن عبد الرحمن الحارثي، طبيب، رياضي، مهندس، أديب ونحوي وشاعر. ولد في دمشق سنة ٥٢٩ هـ وتوفي سنة ٥٩٩ هـ. كان في أول أمره نجاراً ثم تعلم هندسة إقليدس ليزداد تعمقاً في صناعة النجارة. واشتغل بعلم الهيئة وعمل الأزياج، ثم درس الطب، كما أتقن عمل الساعات. وله كتب ورسائل في الطب والفلك وغيرها، منها (كتاب في معرفة رمز التقويم)، (كتاب في الأدوية)

البيروني

هو محمد بن أحمد المكنى بأبي الريحان البيروني، ولد في خوارزم عام ٣٦٢ هـ. ويروى أنه ارتحل عن خوارزم إلى كوركنج، على أثر حادث مهم لم تعرف ماهيته، ثم انتقل إلى جرجان. والتحق هناك بشمس المعالي قابوس، من سلالة بني زياد. ومن جرجان عاد إلى كوركنج حيث تقرب من بني مأمون، ملوك خوارزم، ونال لديهم حظوة كبيرة. ولكن وقوع خوازم بيد الغازي سبكتكين اضطر البيروني إلى الارتحال باتجاه بلاد الهند، حيث مكث أربعين سنة، على ما يروى. وقد جاب البيروني بلاد الهند، باحثاً منقباً، مما أتاح له أن يترك مؤلفات قيمة لها شأنها في حقول العلم. وقد عاد من الهند إلى غزنة ومنها إلى خوارزم حيث توفي في حدود عام ٤٤٠ هـ

ترك البيروني ما يقارب المائة مؤلف شملت حقول التاريخ والرياضيات والفلك وسوى ذلك، وأهم آثاره: كتاب الآثار الباقية عن القرون الخالية، كتاب تاريخ الهند، كتاب مقاليد علم الهيئة وما يحدث في بسيطة الكرة، كتاب القانون المسعودي في الهيئة والنجوم، كتاب استخراج الأوتار في الدائرة، كتاب استيعاب الوجوه الممكنة في صفة الإسطرلاب، كتاب العمل بالإسطرلاب، كتاب التطبيق إلى حركة الشمس، كتاب كيفية رسوم الهند في تعلم الحساب، كتاب في تحقيق منازل القمر، كتاب جلاء الأذهان في زيج البتاني، كتاب الصيدلية في الطب، كتاب رؤية الأهلة، كتاب جدول التقويم، كتاب مفتاح علم الهيئة، كتاب تهذيب فصول الفرغاني، مقالة في تصحيح الطول والعرض لمساكن المعمورة من الأرض، كتاب إيضاح الأدلة على كيفية سمت القبلة، كتاب تصور أمر الفجر والشفق في جهة الشرق والغرب من الأفق، كتاب التفهيم لأوائل صناعة التنجيم، كتاب المسائل الهندسية.

ساهم البيروني في تقسيم الزاوية ثلاثة أقسام متساوية، وكان متعمقاً في معرفة قانون تناسب الجيوب. وقد اشتغل بالجداول الرياضية للجيب والظل بالاستناد إلى الجداول التي كان قد وضعها أبو الوفاء البوزجاني. واكتشف طريقة لتعيين الوزن النوعي. فضلاً عن ذلك قام البيروني بدراسات نظرية وتطبيقية على ضغط السوائل، وعلى توازن هذه السوائل. كما شرح كيفية صعود مياه الفوارات والينابيع من تحت إلى فوق، وكيفية ارتفاع السوائل في الأوعية المتصلة إلى مستوى واحد، على الرغم من اختلاف أشكال هذه الأوعية وأحجامها. وقد نبّه إلى أن الأرض تدور حول محورها، ووضع نظرية لاستخراج محيط الأرض

الباب الثاني
علم الهندسة

علم الهندسة هو دراسة مختلف أنواع الأشكال وصفاتها ، كما أنها دراسة علاقة الأشكال والزوايا والمسافات ببعضها ، وتنقسم الهندسة البسيطة إلى جزأين : الهندسة المستوية والهندسة الفراغية ، وفي الهندسة المستوية تدرس الأشكال التي لها بعدين فقط ، أي التي لها طول وعرض ، أما الهندسة الفراغية فتدرس الهندسة في ثلاثة أبعاد ، وتتعامل مع مفرغات مثل متوازيات المستطيلات ، والمجسمات الأسطوانية ، والأجسام مخروطية الشكل ، والأجسام الكروية ، الخ ... أي مع الأشكال التي لها طول وعرض وسمك ، ويمكن وضع تقسيم لأنواع هذا العلم بالترتيب أدناه:

١) الهندسة Geometry : فرع من الرياضيات يبحث في النقط والخطوط والزوايا والسطوح والمجسمات من حيث قياسها وخصائصها وعلاقة بعضها ببعضها الآخر . أقسامها كثيرة منها :الهندسة المستوية، الهندسة الفراغية، الهندسة الكروية، الهندسة التحليلية. يضاف إلى هذه الأقسام الهندسة الوصفية وهي تعنى بإعادة تمثيل الأشكال الفراغية بأخرى مستوية وتعتبر ذات أهمية خاصة بالنسبة إلى فن العمارة.

٢) الهندسة التحليلية Analytic Geometry : فرع من الهندسة تجري فيه دراسة العلاقات الهندسية بين المنحنيات المختلفة عن طريق علاقات جبرية بين معادلات تمثل تلك المنحنيات منسوبة إلى إحداثيات معينة .اكتشفها كل من رينيه ديكارت وبيير دو فيرما بمعزل عن الآخر

٣) الهندسة الفراغية Solid Geometry : فرع من الهندسة يبحث في الأشكال المجسمة كالمخاريط والمكعبات.

٤) الهندسة الكروية Spherical Geometry : فرع من الهندسة يعنى بدراسة الأشكال المرسومة على سطح كرة.

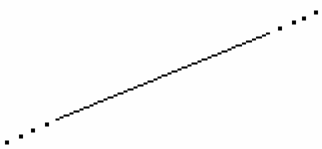
٥) الهندسة المستوية Plane Geometry : فرع من الهندسة يبحث في الأشكال الواقعة في مستوى Plane واحد .وهذه الأشكال قد تكون خطوطا أو زوايا أو مثلثات مستوية أو دوائر أو مضلعات إلخ.

٦) إذن فالهندسة كعلم هي عملية رياضية تتعلق بالزوايا والخطوط وحساباتها. أما المصطلح الحديث للهندسة والخاص بتطبيقات التقانات والصناعات فقد تعمق بشكل مفصل وأصبح يخص حقول الفيزياء والكيمياء المختلفة، كالكهرباء والإلكترون والذرة والميكانيك والطاقة وغيرها.

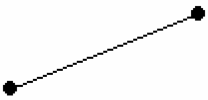
الفصل الأول
الهندسة المستوية

النقطة : تشير إلى مكان في الفراغ ولا يوجد لها سمك ولا عرض ولا طول . (لا يوجد لها أبعاد).

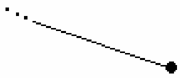
صفات المستقيم : ليس له بداية وليس له نهاية
من نقطة واحدة يمر ما لا نهاية من المستقيمات
في نقطتين مختلفتين يمر مستقيم واحد فقط
على المستقيم ما لا نهاية من النقاط

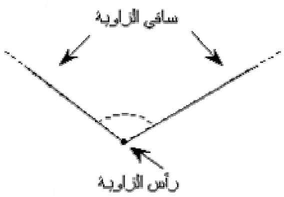


القطعة المستقيمة : هي جزء من مستقيم محدود بنقطتين (أي يوجد لها بداية



الشعاع : هو جزء من مستقيم له بداية وليس له

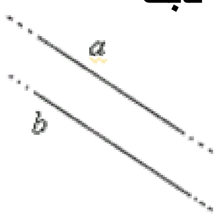




الزاوية : تنتج عن شعاعين يخرجان من رأس مشترك

الخط المنكسر : مبني من قطع مستقيمة تتصل ببعضها البعض في سلسلة ليست على استقامة واحدة.

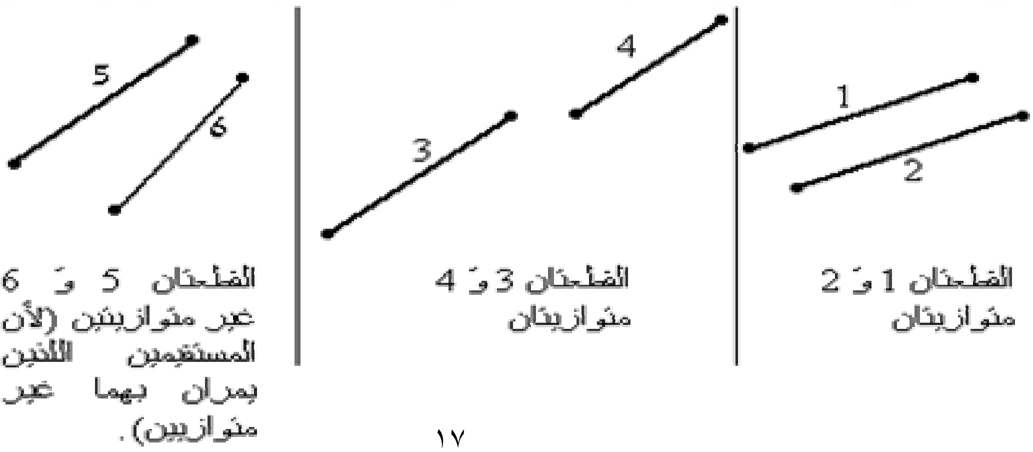
المستقيمان المتوازيان :هما المستقيمان اللذان لا يلتقيان أبداً أي البعد بينهما ثابت



اشارة التوازي هي: ||

a || b يعني أن المستقيمين a وَ b متوازيان

القطعتان المتوازيتان :هما قطعتان واقعتان على مستقيمين متوازيين

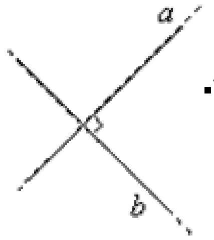


المستقيمان المتعامدان:

هما مستقيمان متقاطعان يُكونان بينهما زاوية قائمة

إنتبهوا:

المستقيمان قد يقعان في كل اتجاه، شرط أن تكون الزاوية بينهما قائمة.



إشارة التعامد هي: ⊥

$a \perp b$ يعني أن "المستقيمين a وَ b متعامدان".

المضلع :

التعريف : هو خط منكسر مغلق

في كل مضلع يوجد :

1. **أضلاع : هي القطع المستقيمة التي تركب المضلع**
2. **رؤوس : هي نقاط الإلتقاء بين كل ضلعين .**
3. **زوايا : تتكون في كل رأس من رؤوس المضلع .**
4. **قطر : هو قطعة تصل بين رأسين غير متجاورين في المضلع.**

(إنتبه : طبعا المثلث هو مضلع لكنه لا يحتوي على اقطار)

5. **عدد الأضلاع = عدد الرؤوس = عدد الزوايا**

تصنف المضلعات حسب عدد الأضلاع :

1. **المثلثات : ولها ٣ أضلاع ٣ رؤوس ٣ زوايا**
2. **الأشكال الرباعية : ولها ٤ أضلاع ٤ رؤوس ٤ زوايا**
3. **الأشكال الخماسية : ولها ٥ أضلاع ٥ رؤوس ٥ زوايا**
4. **الأشكال السداسية : ولها ٦ أضلاع ٦ رؤوس ٦ زوايا**
5. **الأشكال السباعية : ولها ٧ أضلاع ٧ رؤوس ٧ زوايا**

وهكذا ....

القانون لعدد أقطار المضلع :

(بحيث ان n هو عدد أضلاع المضلع) $\frac{n \times (n - 3)}{٢}$

مثال : مضلع ذو ٦ أضلاع له ٩ أقطار $\frac{6 \times (6 - 3)}{2} = ٩$

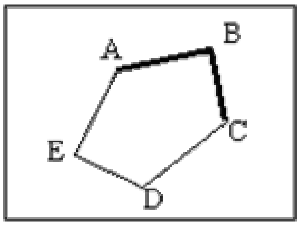
القانون لعدد الاقطار من الرأس الواحد :

(بحيث ان n هو عدد أضلاع المضلع) n - 3

مثال : مضلع ذو ٧ أضلاع له ٤ أقطار من كل رأس 7 - 3 = 4

الضلعان المتجاوران (في المضلع) :

هما ضلعان في المضلع لهما رأس مُشترك.
مثال: الضلعان A B وَ B C في الشكل الخماسي هذا هما متجاوران لأن لهما رأسًا مشتركًا B.

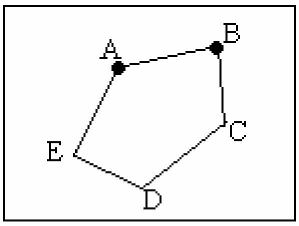


الرأسان المتجاوران (في المضلع) :

هما رأسان في المضلع ينتميان إلى نفس الضلع (أي يربط بينهما ضلع مشترك)
في كل رأس من رؤوس المضلع تتكوّن زاوية للمضلع.
عندما نتحدّث عن زوايا المضلع فإننا نقصد فقط لزواياه الداخلية.

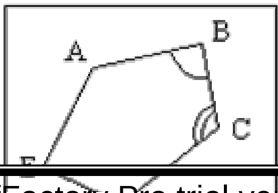
مثال: الرأس A والرأس B هما رأسان متجاوران ينتميان إلى نفس الضلع AB

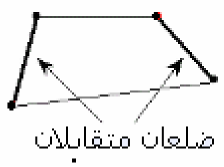
بكلمات أخرى الرأس B يجاور الرأس A



الزاويتان المتجاورتان (في المضلع) :

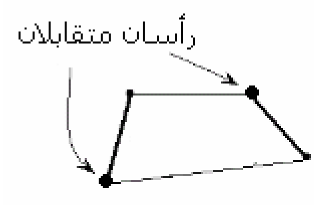
هما زاويتان في المضلع رأساهما متجاوران (يربط بينهما ضلع مشترك) .
في المضلع في الرسمة، الزاويتان المعلّمتان (∡B وَ ∡C) هما زاويتان متجاورتان
بكلمات أخرى : الزاوية B تجاور الزاوية C





الضلعان المتقابلان فى الشكل الرباعى :

هما ضلعان لا يوجد بينهما رأس مشترك (غير متجاورين).



الرأسان المتقابلان في الشكل الرباعي :

هما رأسان لا ينتميان إلى نفس الضلع (غير متجاورين)

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي :

هما زاويتان رأساهما متقابلان (غير متجاورين)

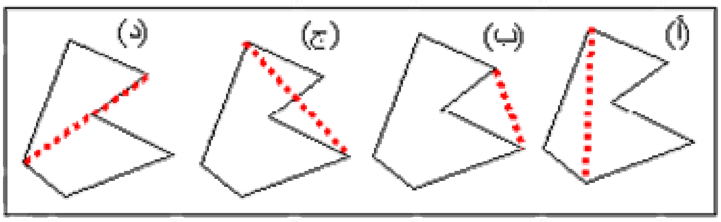
القطر في المضلع :

هو قطعة تصل بين رأسين غير متجاورين في المضلع.

هناك أربع إمكانيات لموقع القطر في المضلع:

- **أن يقع بكامله في المضلع (الرسمة أ).**
- **أن يقع بكامله خارج المضلع (الرسمة ب).**
- **أن يقع قسمٌ منه في الداخل وقسمٌ منه في الخارج (الرسمة ج).**
- **أن يقع قسم منه على ضلع (الرسمة د).**

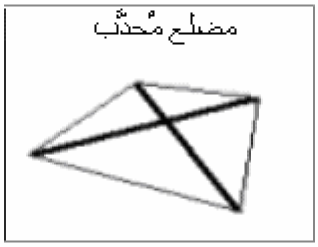
أمثلة: (القطع المتقطعة هي أمثلة لأقطار).



في المثلث لا يوجد أقطار لأن كل رأسين فيه هما متجاوران.

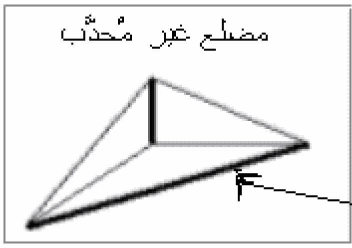
المضلع المُحدَّب:

هو مضلع يحوي في داخله كلَّ أقطاره وهو مضلع كل زاوية داخلية فيه أصغر من ١٨٠°.



(المضلع الغير محدب المقعّر) :

(هو مضلع يقع أحد أقطاره خارجه (فيه زاوية منعكسة أكبر من ١٨٠°)



المضلع المنتظِم :

هو مضلع كل أضلاعه متساوية وكل زواياه متساوية.

أمثلة:

قانون لحساب قيمة الزاوية الداخلية في المضلع المنتظم :

$$\frac{180 \times (n-2)}{n}$$ **(بحيث أن n عدد أضلاع المضلع)**

قانون لحساب قيمة الزاوية الخارجية في المضلع المنتظم (تذكر : جميع أضلاعه وزواياه متساوية)

$$\frac{360}{N}$$ **(بحيث أن n عدد أضلاع المضلع)**

مثال ١ :

في المثلث المتساوي الأضلاع قيمة الزاوية الداخلية = $60° = \frac{180 \times (3-2)}{3}$

في المثلث المتساوي الأضلاع قيمة الزاوية الخارجية = $120° = \frac{360}{3}$

مثال 2 :

في المربع قيمة الزاوية الداخلية = $90° = \frac{180 \times (4-2)}{4}$

في المربع قيمة الزاوية الخارجية = $90° = \frac{360}{٤}$

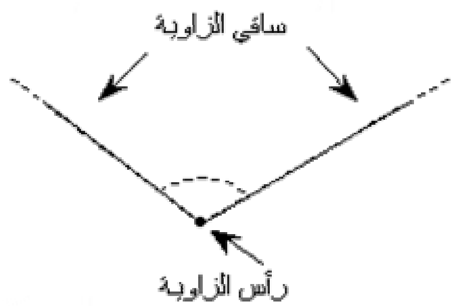
في المخمس قيمة الزاوية الداخلية = $108° = \frac{180 \times (5-2)}{5}$

الزوايا

تعريف الزاوية : تتكوّن من شعاعَين خارجين من نقطة مشتركة.

نُسمي الشعاعين ساقي الزاوية.

النقطة التي يخرج منها الشعاعان تُسمى رأس الزاوية.
الشعاعان الخارجان من رأس مُشترك يكونان زاويتين.
يشير رسم القوس عادة إلى الزاوية التي نقصدها.



كُبْر الزاوية يُحدَّد بحسب مقدار دوران أحد الشعاعين بالنسبة للآخر («الفتحة» بين الساقين).

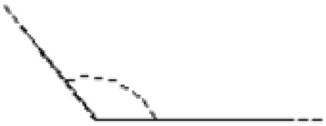
نُصنّف الزوايا إلى أنواع مختلفة:

الزاوية الحادّة :

هي زاوية أصغر من زاوية قائمة.

مقدار الزاوية الحادة أصغر من 90°.

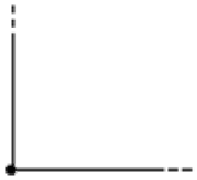
الزاوية المنفرجة :



هي زاوية أكبر من الزاوية القائمة وأصغر من الزاوية المستقيمة.

مقدار الزاوية المنفرجة هو بين 90° و 180° (لا يشملهما).

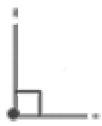
الزاوية القائمة :



هي كل زاوية من الزاويتين الناتجتين من تنصيف زاوية مستقيمة.

مقدار الزاوية القائمة: 90°.

في الرسم نُشير عادة إلى الزاوية القائمة هكذا:



يمكن فحص الزاوية القائمة بواسطة قُرنة مستطيلة أيّا كانت (مثلا، بطاقة مستطيلة) هكذا:

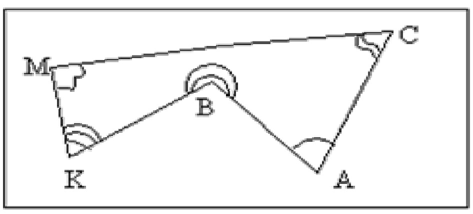
الزاوية المستقيمة :

هي الزاوية التي يُشكّل ساقاها مستقيمًا.

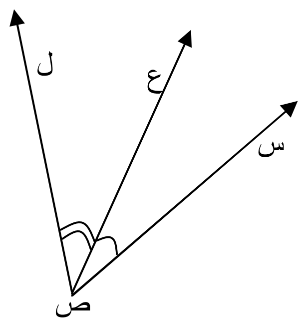
مقدار الزاوية المستقيمة: 180° (لأن الدورة الكاملة فيها 360°).

الزاوية المنعكسة :

زاوية المضلع التي رأسها B هي زاوية أكبر من 180° (منعكسة).



الزاويتان المتجاورتان :



تكون الزاويتان س صَ ع ، ع صَ ل متجاورتان إذا كان :

لهما رأس واحدة (ص) ، ولهما ضلع مشترك ($\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$).

الضلعان المتطرفان ($\overleftrightarrow{\text{ص س}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ص ل}}$) في جهتين

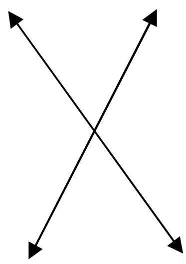
مختلفتين من الضلع المشترك ($\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$) .

الزاويتان المتجاورتان الحادثتان من تقاطع مستقيم وشعاع نقطه بدايته تقع على هذا المستقيم متكاملتان
اذا كانت الزاويتان متجاورتان متكاملتان فان ضلعيهما المتطرفين يكونان على استقامه واحدة
اذا كانت الزاويتان المتجاورتان متتامتين فان ضلعيهما المتطرفين يكونان متعامدين

مجموع قياس الزوايا المتجاورة على مستقيم يساوي ١٨٠° .

مجموع قياس الزوايا المجتمعة حول نقطة يساوي ٣٦٠° .

الزاويتان المتقابلتان بالرأس :



إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتان متقابلتان بالرأس متطابقتان

(متساويتان في القياس).

الزاويتان المتتامتان :

تكون الزاويتان متتامتان إذا كان مجموع قياسهما ٩٠° .

الزاويتان المتكاملتان :

تكون الزاويتان متكاملتان إذا كان مجموع قياسهما ١٨٠° .

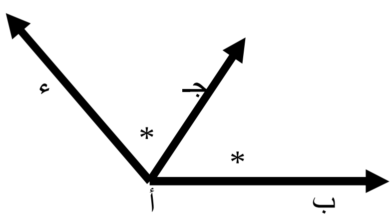
لاحظ أن

الزاوية الحادة تكملها زاوية منفرجة
الزاوية المنفرجة تكملها زاوية حادة
الزاوية القائمة تكملها زاوية قائمة
الزاوية المستقيمة تكملها زاوية صفرية
الزاوية الحادة تتممها زاوية حادة
الزاوية القائمة تتممها زاوية صفرية

منصف الزاوية :-

هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين

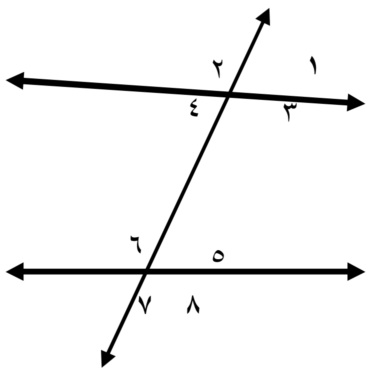
متساويتان فى القياس



إذا كان ق (ب أ جـ) = ق (جـ أ ء)

فإن أ جـ يسمى منصف للزاوية ب أ ء

أنواع الزوايا الناتجة عن قطع مستقيم مستقيمين



إذا قطع مستقيم مستقيمين ينتج
ثلاث أنواع من الزوايا
(١) زوايا متبادلة
مثل ٤ ، ٥ أو ٣ ، ٦
(٢) زوايا متناظرة
مثل ١ ، ٥ أو ٢ ، ٦
أو ٣ ، ٨ أو ٤ ، ٧
(٣) زوايا داخلة
مثل ٣ ، ٥ / ٤ ، ٦

إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فإن

١-كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس

٢-كل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس

٣-كل زاويتين داخليتين وفى جهة واحدة من القاطع متكاملتان

شروط توازى مستقيمين

يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وحدثت إحدى الحالات الاتية
١- زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس
٢- زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس
زاويتان داخليتان وفى جهة واحدة من القاطع ومتكاملتان
ملاحظات
(١) المستقيم العمودى على أحد مستقيمين متوازيين فى المستوى يكون عمودى على الأخر
أى أن إذا كان $ل_١ // ل_٢$ ، $ل_٣ \perp ل_١$ فإن $ل_٣ \perp ل_٢$
(٢) إذا كان كلا من مستقيمين عمودى على مستقيم ثالث كان هذا المستقيمان متوازيان
أى أن إذا كان $ل_١ \perp ل_٣$ ، $ل_٢ \perp ل_٣$ فإن $ل_١ // ل_٢$
(٣) إذا وازى مستقيمان مستقيماً ثالثاً كان هذا المستقيمان متوازيان
بصورة أخرى
المستقيمان الموازيان لثالث متوزيان
أى ان إذا كان $ل_١ // ل_٣$ ، $ل_٢ // ل_٣$ فإن $ل_١ // ل_٢$
(٤) إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذه المستقيمات متساوية فى الطول فإن الاجزاء المحصورة بينها لاى قاطع أخر تكون متساوية فى الطول أيضاً

المثلث

تعريف المثلث: هو عبارة عن مضلع ذو ٣ أضلاع ٣ زوايا ٣ رؤوس ولا يوجد فيه أقطار.

قانون أساسي لبناء مثلث :هو أن يكون مجموع كل ضلعين في المثلث أكبر من الضلع الثالث.

شرط مكافئ : أن يكون مجموع أصغر ضلعين أكبر من الضلع الثالث.

مثال ١ : من هذه الاضلاع ٤ ٦ ١ لا نستطيع بناء مثلث لأن ٦ > ٤ + ١

مثال ٢ : من هذه الأضلاع ٣ ٥ ٧ نستطيع بناء مثلث لأن ٧ < ٣+ ٥

نظريات المثلث

نظرية (١) :

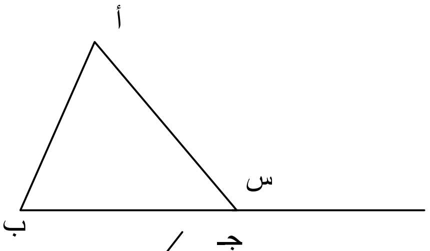
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة تساوي ١٨٠ ْ

أي أن ق (أ) + ق (ب) + ق (جـ) = ١٨٠ ْ

نظرية (٢) :

إذا مد أحد أضلاع مثلث فإن قياس الزاوية الخارجة الناتجة تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين للمثلث ما عدا المجاورة لها

أي أن ق (س) = ق (أ) + ق (ب)

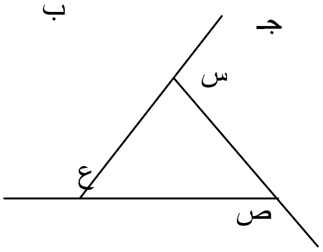


 # نتائج :

نتيجة (١) :

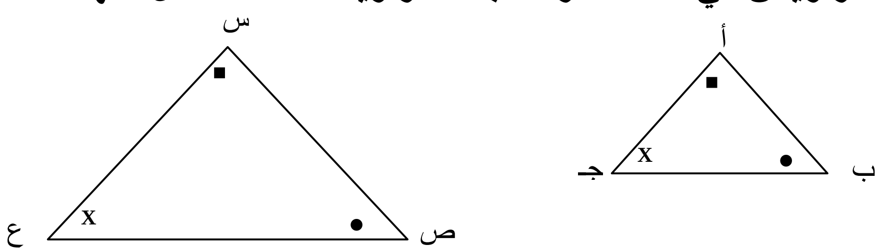
مجموع قياسات زوايا المثلث الخارجة تساوي ٣٦٠ ْ

أي أن : ق (س) + ق (ص) + ق (ع) = ٣٦٠ ْ



نتيجة (٢) :

إذا طابقت زاويتان في مثلث زاويتان في مثلث آخر تطابقت الزاوية الثالثة في كل منهما



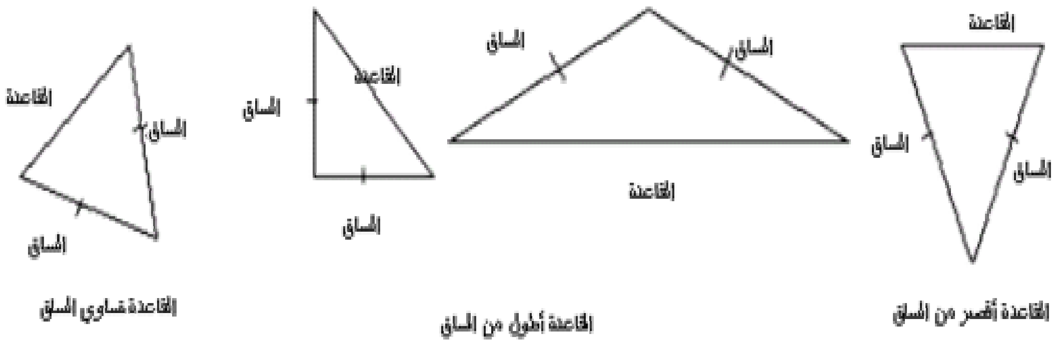
تصنيف المثلثات حسب الأضلاع :

مثلث متساوي الساقين :

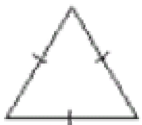
تعريف : هو مثلث فيه ضلعان متساويان في الطول.

الضلعان المتساويان في المثلث المتساوي الساقين يُسميان الساقين والضلع الثالث يُسمى القاعدة.
إنتبهوا: القاعدة قد تكون أطول من الساقين، أو أقصر منهما أو تُساويهما في الطول.

أمثلة لمثلثات متساوية الساقين:

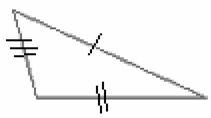


مثلث متساوي الأضلاع :



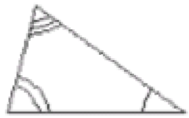
هو مثلث كل أضلاعه متساوية في الطول.
إنتبهوا: المثلث المتساوي الأضلاع هو، حالة خاصة من المثلث المتساوي الساقين.

مثلث مختلف الأضلاع :



هو مثلث أضلاعه مختلفة في أطوالـه .

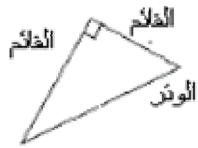
تصنيف المثلثات حسب الزوايا :

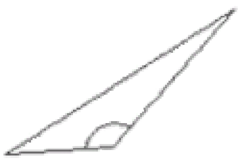


مثلث حاد الزوايا :
هو مثلث كل زواياه حادّة.
أحيانًا نُسمي هذا المثلث "مثلث حاد الزاوية".
نقصد من المصطلحين – "مثلث حاد الزوايا" و"مثلث حاد الزاوية" - نفس المثلث الذي فيه كل الزوايا حادة.

مثلث قائم الزاوية :
هو مثلث فيه زاوية قائمة.
في المثلث القائم الزاوية توجد فقط زاوية قائمة واحدة، والزاويتان الأخريان دائمًا حادّتان.

في المثلث القائم الزاوية :
نُسمي كل ضلع من ضلعي الزاوية القائمة الضلع القائم، والضلع الذي يُقابل الزاوية القائمة الوتر.





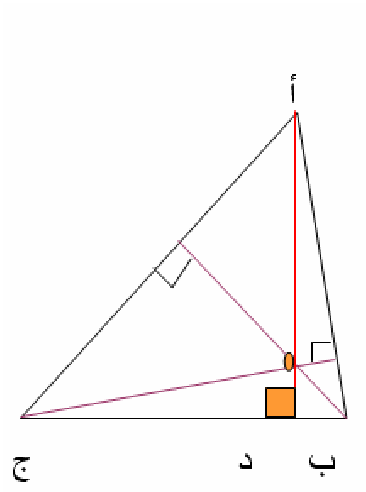
مثلث منفرج الزاوية :
هو مثلث فيه زاوية منفرجة.
في المثلث المنفرج الزاوية توجد فقط زاوية منفرجة واحدة، والزاويتان الأخريان دائمًا حادّتان.

الإرتفاع :

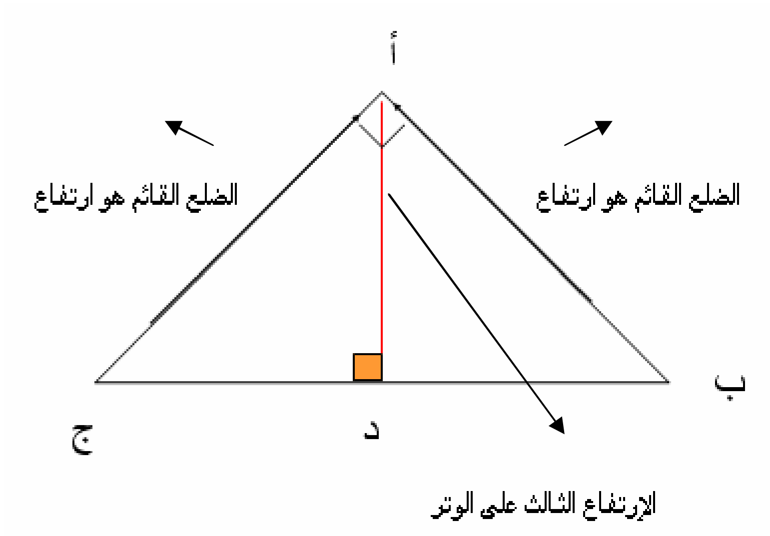
تعريفه : هو قطعة مستقيمة أحد طرفيها موجود في أحد الرؤوس ، وطرفها الآخر على الضلع المقابل أو على امتداده وهو عمودي على هذا الضلع .
في بعض المثلثات قد يكون الضلع نفسه هو أيضاً ارتفاع .

- **في المثلث توجد ٣ ارتفاعات يرمز للارتفاع بالحرف h**
- **لكل مثلث ٣ ارتفاعات ، توجد نقطة مشتركة للارتفاعات الثلاثة أو امتداداتها .**

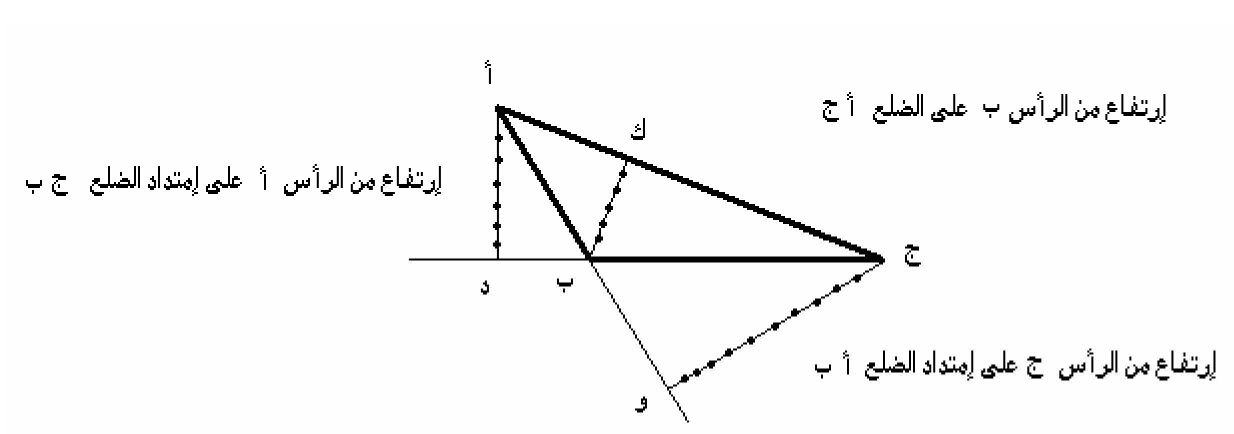
الإرتفاع فى المثلث حاد الزاوية



الإرتفاع فى المثلث قائم الزاوية :



الإرتفاع فى المثلث منفرج الزاوية :



متباينة المثلث :

مجموع طولي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث

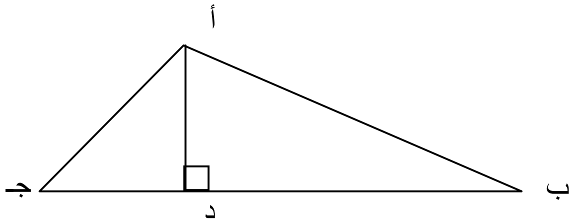
ويمكن اثبات ذلك :

في المثلث أ ب جـ نرسم أ د ⊥ ب جـ فيكون

أ ب > ب د .... (١)

أ جـ > جـ د .... (٢)

بالجمع أ ب + أ جـ > ب جـ



 # إذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية أكبر في القياس من قياس الزاوية المقابلة للآخر والعكس صحيح

==

 # إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث أصغر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث حاد الزوايا

==

 # إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث أكبر من مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث منفرج الزاوية وتكون الزاوية المنفرجة هي الزاوية المقابلة للضلع الأكبر

==

 # إذا كان مربع طول الضلع الأطول في مثلث مساويا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية وتكون الزاوية القائمة هي الزاوية المقابلة للضلع الأكبر

((عكس نظرية فيثاغورث))

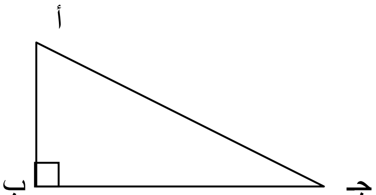
==

نظرية فيثاغورث :

في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

ق(ب) = ٩٠°

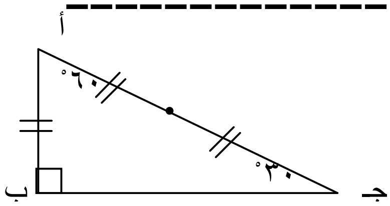
$(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$



==

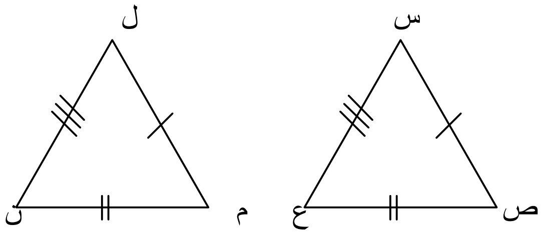
نتيجة :

في المثلث الثلاثيني الستيني يكون طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° يساوي نصف طول الوتر

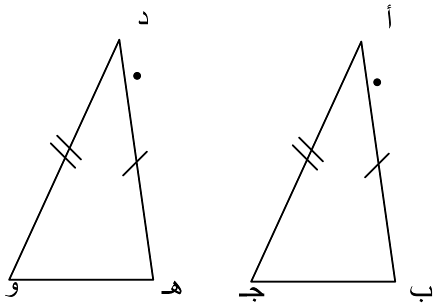


حالات تطابق المثلثين :

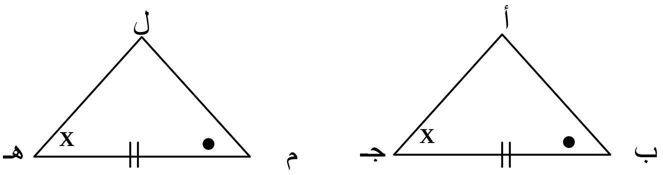
(١) يتطابق المثلثات إذا تطابق كل ضلع في أحدهما مع نظيره في الآخر
(ض . ض . ض)



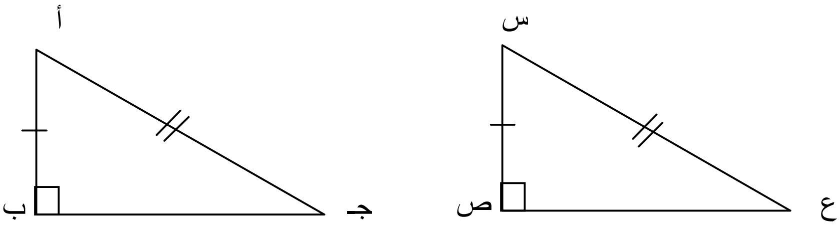
(٢) يتطابق المثلثان إذا تطابق في أحدهما ضلعان والزاوية المشتركة معهما في الرأس مع نظائرها في المثلث الآخر
(ض . ز . ض)



(٣) يتطابق المثلثان إذا تطابق في أحدهما زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما مع نظائرها في المثلث الآخر
(ز . ض . ز)

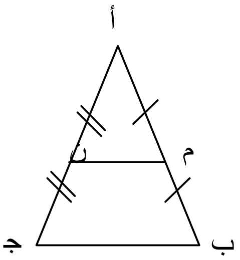


(٤) يتطابق المثلثان قائما الزاوية إذا تطابق في أحدهما وتر وضلع مع نظائرهما في المثلث الآخر



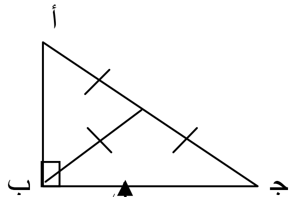
بعض نظريات المثلث :

نظرية (١) :
القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعي في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طوله



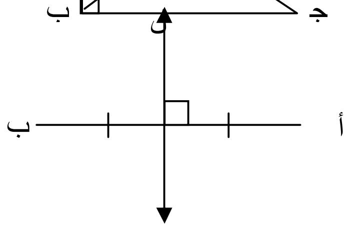
نظرية (٢) :

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة
إلى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر



<u>محاور أضلاع المثلث :</u>

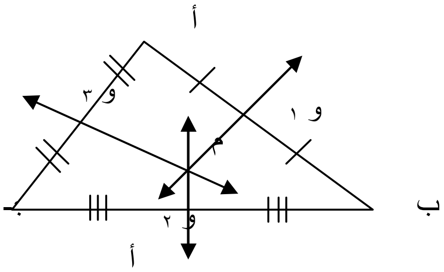
 # محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصف لها
 # محاور أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة



==================

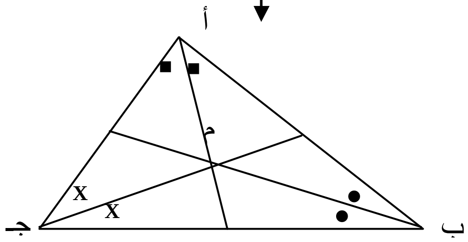
نظرية (٣) :

الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث
من منتصفاتها تتقاطع في نقطة واحدة



نظرية (٤) :

منصفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة

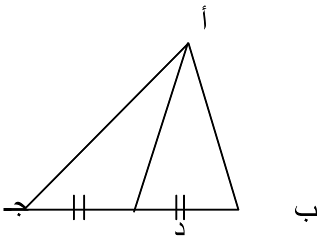


<u># نتيجة :</u>

نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه الثلاثة

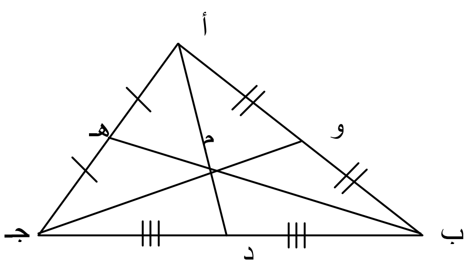
<u>القطع المتوسطة للمثلث</u>

 # القطعة المتوسطة للمثلث : هي القطعة المستقيمة التي
تصل أي رأس للمثلث بمنتصف الضلع المقابل
أ د   قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ



نظرية (٥) :

القطع المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة
تقسم كل منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس

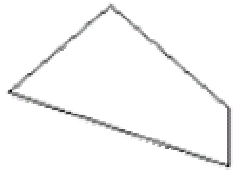


<u>الأشكال الرباعية :</u>

<u>تعريف :</u> هي مضلعات لها ٤ أضلاع ٤ رؤوس ٤ زوايا وَ ٢ أقطار

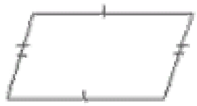
مجموع الزوايا الداخلية في الشكل الرباعي هو ٣٦٠°
نُميِّز بين أشكال رباعية خاصّة - متوازي الأضلاع، الدلتون، المُعين، المستطيل، المربع، شبه المنحرف
وبين أشكال رباعية غير خاصّة، أي أنها لا تنتمي إلى أحد الأنواع السابقة.

مثال:



الأشكال الرباعية الخاصة :

متوازي الأضلاع :



تعريفه : **هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متساويان.**

تعريف مكافئ : **"هو شكل رباعي فيه زوجان من ضلعين متقابلين متوازيين".**

صفات متوازي الأضلاع:

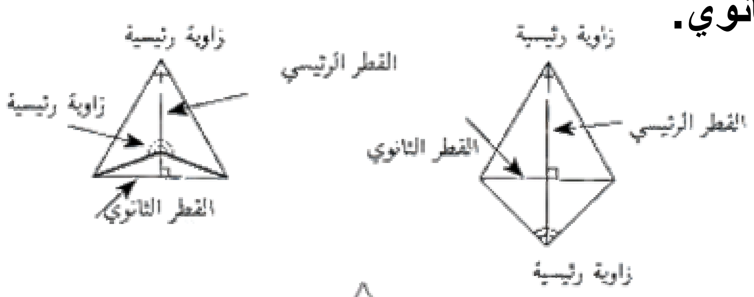
- **كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متوازيان (هذا هو أيضا مصدر الاسم "متوازي أضلاع").**
- **كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان.**
- **قطراه يُنصِّف أحدهما الآخر (أي أن كل قُطر يقسم الآخر إلى قسمين متساويين).**
- **فيه تماثل دوراني مركزه نقطة تقاطع قُطريه.**

الدالتون :

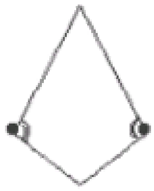
هو شكل رباعي فيه زوجان منفردان من ضلعين متجاورين متساويين.

الرأس الموجود بين ضلعين متساويين في الدلتون يُسمى رأسًا رئيسيًا. في الدلتون يوجد رأسان رئيسيان.
زاوية الدلتون التي رأسها " رأسًا رئيسيًا" تسمى "زاوية رئيسية"

القطر الذي يصل الرأسين الرئيسيين في الدلتون يُسمى القطر الرئيسي، بينما يُسمى القُطر الآخر القُطر الثانوي.

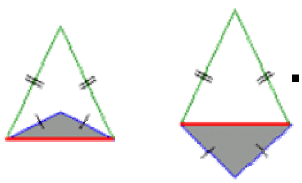


صفات الدلتون:



- **زاويتاه الجانبيتان متساويتان.**
- **قطراه متعامدان.**
- **قطره الرئيسي يُنصّف قطره الثانوي.**
- **قُطره الرئيسي يقسم الدلتون إلى مثلثين متطابقين.**
- **فيه تماثل انعكاسي بالنسبة لقطره الرئيسي.**
- **قُطره الثانوي يُكوِّن في الدلتون مثلثين متساويي الساقين، قاعدتهما المشتركة هي القطر الثانوي.**

(إذا كان الدلتون غير محدب، يقع أحد المثلثين داخل الآخر).



مساحة الدالتون = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

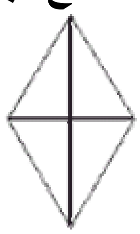
محيط الدالتون = مجموع أضلاعه

المُعيّن :

<u>تعريفه :</u> هو متوازي أضلاع خاص وأيضًا دلتون خاص.

لذلك فيه كل صفات الدلتون وصفات متوازي الأضلاع، بالإضافة إلى صفاتٍ خاصة به.

صفات المُعيّن:



- **كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.**
- **كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان.**
- **قطراه متعامدان.**
- **قطراه ينصّف أحدهما الآخر.**
- **كل قُطر فيه ينصف زاويتين متقابلتين.**

- فيه تماثل انعكاسي بالنسبة لكل قطر من قطريه.
- فيه تماثل دوراني؛ مركز التماثل هو نقطة التقاء قطريه.
- كل قُطر يقسم المعين إلى مثلثين متساويي الساقين متطابقين.

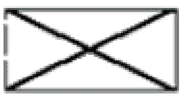
المستطيل

هو شكل رباعي كل **زواياه قائمة**.

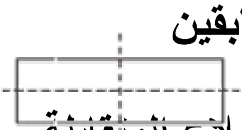
المستطيل هو متوازي أضلاع خاص، ولذلك فيه كل صفات متوازي الأضلاع بالإضافة إلى صفاتٍ خاصة به.

صفات المستطيل:

- كل ضلعين متقابلين فيه متساويان.
- كل ضلعين متقابلين فيه متوازيان.
- ٤ زوايا متساوية، قوائم.
- قطراه متساويان.
- قطراه ينصف أحدهما الآخر.
- كل قطر فيه يقسم المستطيل إلى مثلثين قائمي الزاوية ومتطابقين

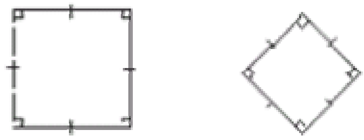


- فيه تماثل دوراني؛ مركز التماثل هو نقطة التقاء القطرين.
- فيه تماثل انعكاسي؛ فيه خطّا تماثل يمران في منتصفات الأضلاع المتقابلة



المربع:

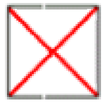
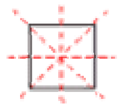
هو شكل رباعي كل أضلاعه متساوية وكل زواياه قائمة.



المربع هو شكل رباعي منتظم؛ المربع أيضًا هو متوازي أضلاع خاص، وكذلك مستطيل خاص ودلتون خاص ومعين خاص. لكل مربع توجد صفات متوازي الأضلاع، المستطيل، الدلتون والمعين بالإضافة إلى صفات خاصة به.

صفات المربع: فيه زوجان من ضلعين متقابلين متوازيين.

- فيه ٤ زوايا متساوية، قوائم (كل زاوية قيمتها ٩٠°)
- قطراه متساويان.
- قطراه متعامدان.
- قطراه ينصّف أحدهما الآخر.

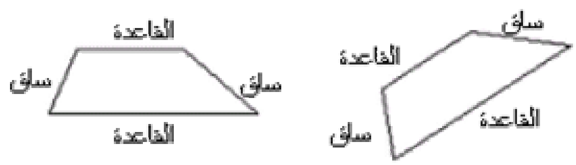



- فيه تماثل انعكاسي؛ فيه ٤ خطوط تماثل.
- فيه تماثل دوراني؛ مركز التماثل هو نقطة التقاء قطرية.
- كل قُطر من قُطريه يقسم المربع إلى مثلثين متطابقين، كل منهما قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

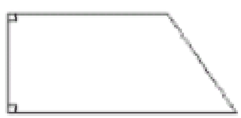
شبه المنحرف :

هو شكل رباعي فيه فقط زوج واحد من ضلعين متوازيين.
نُميّز في أضلاع شبه المنحرف بين قاعدتين وساقين:

القاعدتان - هما الضلعان المتوازيان.
الساقان - هما الضلعان الآخران (أي: الضلعان المتقابلان غير المتوازيين).

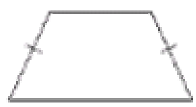


شبه منحرف قائم الزاوية :

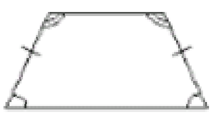


هو شبه منحرف أحد ساقيه عمودي على القاعدتين.

شبه منحرف متساوي الساقين :

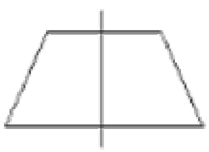


هو شبه منحرف ساقاه متساويان.



صفات شبه المنحرف المتساوي الساقين:

- قُطراهُ متساويان.
- الزاويتان بين الساقين وكل قاعدة من القاعدتين متساويتان.
- فيه تماثل انعكاسي ؛ خط تماثله يمر في منتصفي قاعدتيه.



تعاريف

التبرير الاستقرائي والتخمين الرياضي

التخمين : اصدار ادعاء عام (بهدف تعليمي)يرتكز على معطيات ومعلومات معروفة

التبرير الاستقرائي : النمط الذي يعتمد على اصدار ادعاء

مثال مضاد : هو المثال الذي يكون فيه الادعاء غير صحيح

المنطق

العبارة : جملة خبرية إما ان تكون صحيحة فقط او خاطئة فقط ولا تحتمل أي وضع ثالث

قيمة الصواب : تسمى صحة او خطا العبارة المنطقية قيمة الصواب لتلك العبارة

نفي العبارة المنطقية : يفيد معنى مضاد لتلك العبارة وقيمة الصواب لها عكس قيمة الصواب للعبارة

عبارة مركبة : جملة خبرية مكونة من خبرين او اكثر

عبارة بسيطة : جملة خبرية مكونة من خبر واحد

عبارة الوصل: عبارة مركبة مكونة من ربط عبارتين او اكثر بأداة الربط (و) (^)

عبارة الفصل : عبارة مركبة مكونة من ربط عبارتين او اكثر بأداة الربط (أو) (v)

جدول الصواب : جدول لتنظيم قيم الصواب للعبارات المنطقية

<u>العبارات الشرطية</u>

العبارة اذا كان فان : العبارة التي تتبع اذا تسمى الفرض والعبارة التي تتبع فان تسمى النتيجة

العبارة الشرطية : هي العبارة المكونة من فرض ومعطى ونتيجة

العكس : تبديل الفرض والنتيجة

المعكوس : نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية

المعاكس الإيجابي : نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية

العبارات المتكافئة منطقيا : هي العبارات التي لها نفس قيم الصواب

<u>العبارة الشرطية الثنائية</u> : ربط العبارة الشرطية وعكسها بأداة الربط و

التبرير الاستنتاجي : ستعمل قواعد أ، تعاريف أو حقائق أ، خصائص للوصول إلى نتائج منطقية

قانون الفصل المنطقي : احد أشكال التبرير الاستنتاجي ويستعمل للوصول إلى نتائج عن طريق عبارات شرطية صحيحة

قانون القياس المنطقي : احد أشكال التبرير الاستنتاجي والذي يستعمل للوصول إلى نتائج مشابهه لخاصية التعدي لعلاقة المساوة

المسلمات والبراهين الحرة :

المسلمة : حقيقة لا تحتاج إلى برهان

النظرية : حقيقة تحتاج إلى برهان

البرهان : دليل منطقي

البرهان الحر :هو احد أنواع البرهان وفي تكتب فقرة توضح لماذا يكون التخمين لوضع معطى صحيح!

البرهان الجبري:هو الدليل المنطقي الذي يستخدم خصائص مجموعات الأعداد والعمليات عليه

المناقشة الاستنتاجية : مجموعة الخطوات الجبرية التي تستعمل لحل المسائل

البرهان ذا العمودين : يحتوي على العبارات في عمود والمبررات في عمود مواز

البرهان الهندسي: هو الدليل المنطقي لا ثبات العلاقات بين الزوايا والقطع المستقيمة

زوايا المثلث

البرهان التسلسلي: تنظم سلسلة من العبارات في ترتيب منطقي بدءا بالعبارات المعطاة وتكتب كل عبارة داخل مستطيل والمبرر تحت كل مستطيل وتربط العبارات باسهم لبيان كيفية ارتباطهما

النتيجة: هي العبارة التي غالبا ما يتم إثباتها بسهولة عن طريق نظرية تسمى النتيجة لتلك النظرية

البرهان الاحداثى : يستعمل البرهان الاحداثى الأشكال في المستوى الاحداثى والجبر لا ثبات صحة المفاهيم الهندسية

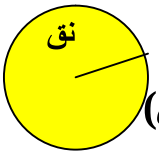
البرهان غير المباشر :

التبرير غير المباشر : افتراض إن النتيجة خطا ثم تبين إن هذا الافتراض يؤدي إلى تناقض مع المعطيات

البرهان غير المباشر : الافتراض خطأ النتيجة بإثبات صحتها

الفصل الثاني هندسة الدائرة

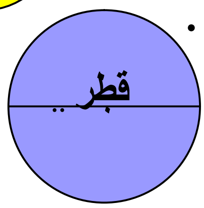
(١) __الدائرة__ : هي المنحنى المغلق الذي جميع نقطة على بعد متساو من نقطة معلومة في مستواه تسمى مركز الدائرة .



(٢) __نصف القطر__ : هو القطعة المستقيمة التي أحد طرفيها مركز الدائرة والطرف الأخر نقطة تنتمي إلى الدائرة .(نق)

(٣) __الوتر__ : هو قطعة مستقيمة نهايتاها على الدائرة .

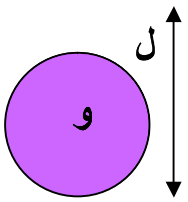
(٤) __القطر__: هو وتر مار بمركز الدائرة = ٢ نق



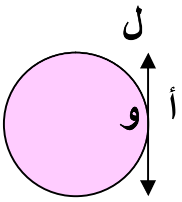
ملاحظات

أطول وتر في الدائرة هو القطر
أي مستقيم يمر بمركز الدائرة هو محور تناظر لها
الدائرة لها عدد لا نهائي من محاور التناظر .

وضع مستقيم بالنسبة إلى الدائرة

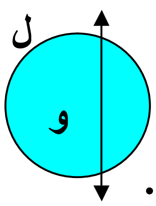


(١) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة و = Φ
فإن المستقيم يكون خارج الدائرة ويكون بعده عن المركز أكبر من نصف القطر في هذه الحالة



(٢) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة و = { أ }
فإن المستقيم يكون مماس للدائرة ويكون بعده عن المركز مساويا لطول نصف القطر في هذه الحالة
وتسمى النقطة أ بنقطة التماس.

(٣) إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة و= { أ ، ب }
فإن المستقيم يكون قاطع للدائرة ويكون بعده عن المركز أصغر من طول نصف القطر في هذه الحالة .



ملاحظة

المماس : هو المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة .

نظرية (١)

كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحده

نتيجة

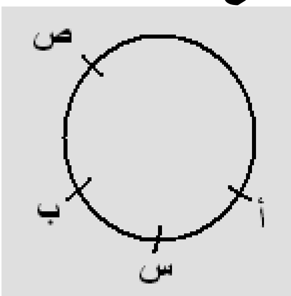
نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث هي مركز الدائرة المارة بروؤسه .

ملاحظات

(١) مركز الدائرة المارة بروؤس المثلث الحاد الزوايا يقع داخل المثلث

(٢) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث القائم الزاوية يقع على المثلث (نقطة تنتمي للمثلث)

(٣) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث .

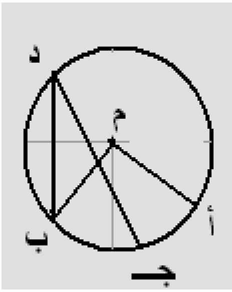


<u>١) القوس:</u>

هو مجموعة النقط المحصورة بين نقطتين على الدائرة فمثلا" أ س ب يمثل القوس الأصغر

أ ص ب يمثل القوس الأصغر

ملحوظة: الرمز أ ب يعنى القوس الأصغر ما لم يذكر خلاف ذلك



<u>٢) الزاوية المركزية:</u>

هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة ويحتوى كل ضلع من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة.

< أ م ب زاوية مركزية يقابلها القوس أ جـــ ب

< أ م ب زاوية مركزيه منعكسة يقابلها القوس أ د ب

<u>٣) الزاوية المحيطية :</u>

هى الزاوية التى رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترا" فى الدائرة فمثلا" : < جـــ د ب زاوية محيطية يقابلها القوس جـــ ب

<u>٤)قياس القوس:</u> هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له .

<u>٥) طول القوس :</u> هو جزء من محيط الدائرة .

<u>نتائج هامة:</u>

١) فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس متساوية فى الطول والعكس صحيح .

٢) فى الدائرة الواحدة أو الدوائر المتطابقة الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول والعكس صحيح

٣) الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس.

٤) القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس.

نظرية: -

الأوتار المتساوية في الدائرة تبعد أبعاد متساوية عن المركز.

نظرية عكسية:

الأوتار التي تبعد أبعادا متساوية عن المركز تكون متساوية.

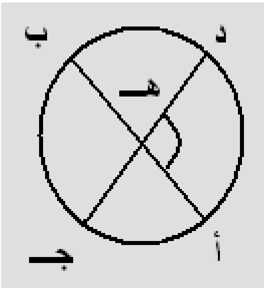
نظرية

" قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس "

ق(<أجـ ب) = ٢/١ ق(< أم ب)

نتيجة(١) قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها .

نتيجة(٢) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة .



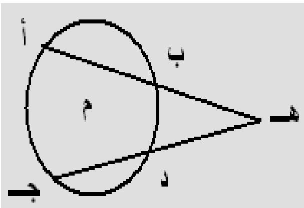
تمرين مشهور(١):

إذا كان أب ، جـ د وتران فى الدائرة م

أ ب Ç جـ د = { هـ } فإن :

ق(<أهـ جـ) = ٢/١ {ق(أجـ)+ق(د ب) }

= ٢/١ { ق(أ د) + ق(ب جـ) }



تمرين مشهور(٢) :

إذا كان أ ب ، جـ د وتران فى الدائرة م

أ ب Ç جـ د ={ هـ } حيث هـ خارج الدائرة فإن

ق(<هـ) = ٢/١ { ق(أ جـ) – ق(ب د) }

نظرية

" الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة متساوية فى القياس "

ق(<جـ)=ق(<د)=ق(<هـ)

نتيجة : الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسا" متساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة أو (عدة دوائر) متساوية فى القياس .

عكس نظرية

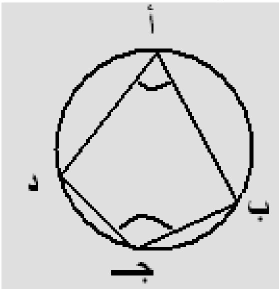
" إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحده وفى جهة واحده منها فإنه تمر برأسيهما دائرة واحده وتكون هذا القاعدة وترا" فيها "

نظرية

" إذا كان الشكل الرباعي دائريا" فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان "

(١) ق(<أ) + ق(<جـ)= ١٨٠ °

(٢) ق(ب) + ق(<د) = ١٨٠ °



عكس نظرية

" إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتين فى شكل رباعي كان هذا الشكل رباعي دائري "

<u>نتيجة :</u> قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رؤوس الشكل الرباعي الدائري يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .

حالات الشكل الرباعي الدائري

<u>يكون الشكل الرباعي دائريا" فى إحدى الحالات الآتية :</u>

١) إذا وجدت نقطة فى المستوى داخله تبعد عن كل رأس من رؤوسه بمقدار ثابت أو إذا كانت رؤوسه الأربعة على بعد ثابت من نقطة ثابتة

٢) إذا وجدت زاويتان مرسومتان على ضلع من أضلاعه كقاعدة ومتساويتان فى القياس .

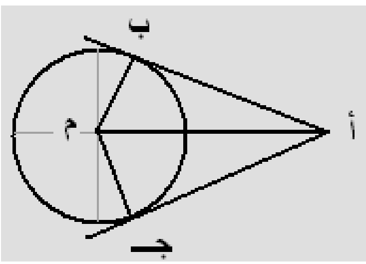
٣) إذا وجدت زاويتان متقابلتان فيه متكاملتان.

٤) إذا وجدت زاوية خارجه عند أى رأس من رؤوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها .

نظرية

" القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان فى الطول "

أ ب = أ جـ



<u>نتائج النظرية :</u>

إذا كان أ ب ، أ جـ قطعتين مماستين للدائرة م فإن

١) م أ محور ب جـ (م أ ^ ب جـ وينصفه)

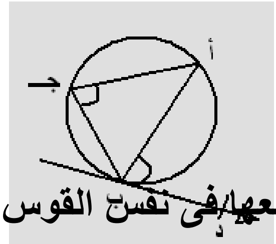
٢) أ م ينصف < ب أ جـ ، م أ ينصف < ب م جـ

تعريف :

الدائرة الداخلة للمثلث هى الدائرة التى تمس أضلاعه من الداخل ويكون مركزها نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث الداخلية

نظرية

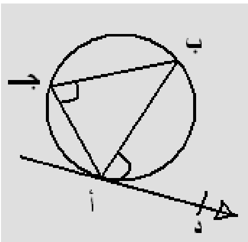
" قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس "



نتيجة:

قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس

عكس نظرية (٣ – ٢)



" إذا رسم أ د من إحدى نهايتي الوتر أ ب

فى الدائرة م بحيث كان

ق(< د أ ب)=ق(< جـ) فإن

أ د مماس للدائرة عند أ

ملاحظة

(١) طول ا لقوس هو طول جزء من محيط ا لدائرة .

طول ا لدائرة = محيطها = ٢ ط نق ، قياس ا لدائرة = ٣٦٠ °

طول نصف دائرة = ط نق ، قياس نصف دائرة = ١٨٠ °

طول $\frac{٣}{٤}$ دائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ٢ ط نق = $\frac{٣}{٢}$ ط نق

قياس $\frac{٣}{٤}$ دائرة = $\frac{٣}{٤}$ × ٣٦٠ = ٢٧٠ °

(٢) طول ا لقوس = $\frac{\text{قياس الزاوية المركزية المقابلة}}{٣٦٠}$ × ٢ ط نق

نق نصف قطر ا لدائرة ، ط = $\frac{٢٢}{٧}$ (ما لم يذكر خلاف ذلك)

الفصل الثالث الهندسة التحليلية

البعد بين نقطتين

إذا كانت أ = ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يتعين من العلاقة

$$\text{أ ب} = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢} = \sqrt{\text{مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات}}$$

إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٦) أوجد البعد بين أ ، ب

$$\text{أ ب} = \sqrt{(٤ - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = \sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥ \text{ وحدات}$$

مثال إذا كان أ = (١ ، ٢) ، ب = (س ، ٦) وكان طول أ ب = ٥ وحدات أوجد قيمة س

الحـــــــــل

أ ب = ٥

$\sqrt{(س - ١)^٢ + (٦ - ٢)^٢} = ٥$ بالتربيع

$(س - ١)^٢ + (٤)^٢ = ٢٥$

$س^٢ - ٢س + ١ + ١٦ - ٢٥ = ٠$

$س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$

$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$

$س = ٤$ $س = -٢$

مثال اثبت أن النقط أ (-١ ، ١) ، ب (٠ ، ٤) ، جـ(٣ ، ١) تقع على محيط دائرة واحدة مركزها م (١ ، ٢) وأوجد طول نصف قطرها ومحيطها ومساحتها .

الحـــــــل

$$\text{م أ} = \sqrt{(١ + ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$$

$$\text{م ب} = \sqrt{(١ - ٠)^٢ + (٤ - ٢)^٢} = \sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$$

$$\text{م جـ} = \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٢ - ١)^٢} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٥}$$

م أ = م ب = م جـ أ ، ب ، جـ تقع على محيط دائرة واحدة ويكون نق = $\sqrt{٥}$

محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × $\sqrt{٥}$ = ١٤ $سم^٢$

مساحة الدائرة = ط $نق^٢$ = ط $(\sqrt{٥})^٢$ = ط × ٥ = ١٥,٧ $سم^٢$

أحداثيات نقطة التنصيف

إذا كانت إحداثيات أ = ($س_١$ ، $ص_١$) ،، ب = ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن

إحداثيات منتصف أ ب = ($\frac{س_١+س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١+ص_٢}{٢}$)

مثال إذا كانت أ = (١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٦) أوجد منتصف أ ب

الحـــــــــــل

منتصف أ ب = ($\frac{١+٣}{٢}$ ، $\frac{٢+٦}{٢}$) = ($\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٨}{٢}$) = (٢ ، ٤)

مثال إذا كانت أ = (٢ ، ١) ، ب = (٥ ، -١) ، جـ(٦ ، ٥) ، ء = (٣ ، ٧) اثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

الحـــــــــــل

منتصف أ جـ = ($\frac{٢+٦}{٢}$ ، $\frac{١+٥}{٢}$)=(٤ ، ٣)

منتصف ب ء = ($\frac{٥+٣}{٢}$ ، $\frac{-١+٧}{٢}$)=(٤ ، ٣)

منتصف أ جـ = منتصف ب ء

∴ أ جـ ، ب ء ينصف كلا منهما الاخر

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

مثال إذا كانت أ=(-٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٥) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب إلى أربعة أجزاء متساوية

الحـــــــــــل

أ جـ ء هـ ب

ء منتصف أ ب = ($\frac{-٣+٥}{٢}$ ، $\frac{١+٥}{٢}$) = ($\frac{٢}{٢}$ ، $\frac{٦}{٢}$) = (١ ، ٣)

جـ منتصف أ ء = ($\frac{-٣+١}{٢}$ ، $\frac{١+٣}{٢}$) = ($\frac{-٢}{٢}$ ، $\frac{٤}{٢}$) = (-١ ، ٢)

هـ منتصف ء ب = ($\frac{-١+٥}{٢}$ ، $\frac{٣+٥}{٢}$) = ($\frac{٤}{٢}$ ، $\frac{٨}{٢}$) = (٢ ، ٤)

مثال أوجد مركز الدائرة التى أ ب قطر فيها أ = (١ ، ٢) ، ب = (-٥ ، ٤)

الحـــــــــــل

مركز الدائرة = ($\frac{١+(-٥)}{٢}$ ، $\frac{٢+٤}{٢}$) = ($\frac{-٤}{٢}$ ، $\frac{٦}{٢}$) = (-٢ ، ٣)

الميـــــــــل

ميل مستقيم بمعلومية نقطتين

المستقيم المار بالنقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) يتعين من العلاقة م = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}$

مثال أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين

(١ ، ٢) ، (٤ ، ٧)

الحــــــل

م = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{٧ - ٢}{٤ - ١} = \frac{٥}{٣}$

مثال أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين

أ = (-١ ، -٢) ، ب = (-٥ ، ١)

الحــــــل

م = $\frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{١ - (-٢)}{-٥ - (-٢)} = \frac{٣}{-٤} = \frac{-٣}{٤}$

(١) ميل المستقيم يكون عدد حقيقى موجب أو سالب أو صفر

(٢) ميل أى مستقيم أفقى (يوازى محور السينات) = صفر وهو المستقيم الذى معادلته (ص=ثابت)

(٣) ميل أى مستقيم رأسى(يوازى محور اصادات) = ($\frac{١}{٠}$ غير معرف) وهو المستقيم الذى معادلته (س=ثابت)

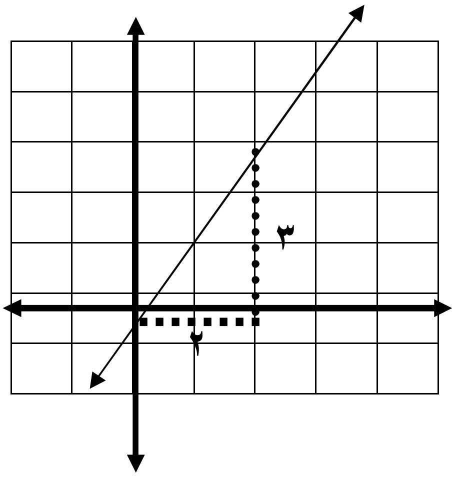
(٤) إذا كان ميل المستقيم موجب يكون شكله (⤢) أما إذا كان الميل سالب يكون شكله(⤡)

أما إذا كان ميله = ٠ يكون شكله (⟷) وإذا كان ميله غير معرف يكون شكله(↕)

(٥) يمكن إيجاد ميل مستقيم بيانيا عن طريق القانون م = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الافقــى}}$

(٦) يمكن أستخدام فكرة الميل لاثبات أن أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة نثبت أن الميل بإستخدام النقطتين أ ، ب يساوى الميل بإستخدام النقطتين ب ، جـ

مثال من الشكل المقابل اوجد ميل المستقيم ل



الحــــــل

الميل = $\frac{\text{التغير الراسى}}{\text{التغير الافقى}} = \frac{٣}{٢}$

إذا توازى مستقيمين تساوى ميلاهما

مثال إثبت أن المستقيمان ٦س – ٣ص +٥ = ٠ ، ص = ٢س +٧ متوازيان

الحـــــل

$م_١ = \frac{-٦}{-٣} = ٢$

$م_٢ = ٢$

$م_١ = م_٢$

∴ المستقيمان متوازيان

مثال إذا كان المستقيمان أ س – ٦ ص +٥ = ٠ والمستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٣ ، ٣) متوازيان أوجد قيمة أ

الحـــــل

المستقيمان متوازيان

$م_١ = م_٢$

$\frac{-أ}{-٦} = \frac{٣ - ١}{٣ - ٠}$

$\frac{أ}{٦} = \frac{٢}{٣}$

٣ أ = ١٢

أ = ٤

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٢) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ١) ، (٥ ، ٤)

الحـــــل

$م_{الموازى} = \frac{٤ - ١}{٥ - ٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $م_{المطلوب} = \frac{٣}{٥}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة(-١ ، ٢) وميله= $\frac{٣}{٥}$

$\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{٣}{٥}$

٥ ص – ١٠ = ٣س + ٣

٥ص – ٣ س – ١٣ = ٠

حاصل ضرب ميلى المستقيمين المتعامدين=-١

مثال إثبت أن المستقيمان ٢س – ٣ ص +٥ = ٠ ، ٦ س + ٤ ص +١ = ٠ متعامدين

الحـــــل

$م_١ = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

$م_٢ = \frac{-٦}{٤} = \frac{-٣}{٢}$

$م_١ \times م_٢ = \frac{٢}{٣} \times \frac{-٣}{٢} = -١$

∴ المستقيمان متعامدان

التقســــــــــيم

إذا كانت أ = $(س_1 ، ص_1)$،ب =$(س_2 ، ص_2)$ وكانت جـ تقسم أ ب بنسبة $م_1 : م_2$ فان أحداثيث جـ تتعين من العلاقتين

إذا كان التقسيم من الداخل

$$س = \frac{م_1 \times س_2 + م_2 \times س_1}{م_1 + م_2}$$

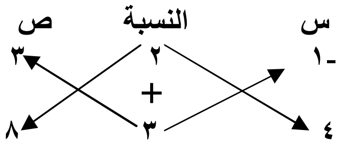
$$ص = \frac{م_1 \times ص_2 + م_2 \times ص_1}{م_1 + م_2}$$

إذا كان التقسيم من الخارج

$$س = \frac{م_1 \times س_2 - م_2 \times س_1}{م_1 - م_2}$$

$$ص = \frac{م_1 \times ص_2 - م_2 \times ص_1}{م_1 - م_2}$$

مثال إذا كانت أ = (-١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد أحداثيات جـ التى تقسم أ ب من الداخل بنسبة ٢ : ٣



الحــــــل

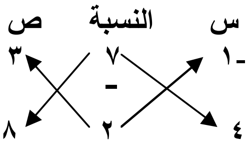
بفرض أن جـ = (س ، ص)

$$س = \frac{٢\times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١ \quad ، \quad ص = \frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} = \frac{١٦ + ٩}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$$

أحداثيات جـ = (١ ، ٥)

مثال إذا كانت أ = (-١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد جـ التى تقسم أ ب من الخارج بنسبة ٧ : ٢

الحــــــــــــــــــــــــــل



بفرض أن جـ = (س ، ص)

$$س = \frac{م_1 \times س_2 - م_2 \times س_1}{م_1 - م_2} = \frac{٧\times ٤ - ٢ \times -١}{٧ - ٢} = \frac{٢٨ + ٢}{٥} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$ص = \frac{م_1 \times ص_2 - م_2 \times ص_1}{م_1 - م_2} = \frac{٧ \times ٨ - ٢ \times ٣}{٧ - ٢} = \frac{٥٦ - ٦}{٥} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

أحداثيات جـ = (٦ ، ١٠)

مثال إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٧) ، جـ = (س ، ٤) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أ ب مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س

الحــــــــــــــــــــــــــل

جـ = (س ، ٤) ، أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٧)

ص = ٤ ، $ص_1 = ٢$ ، $ص_2 = ٧$

$$ص = \frac{م_1 \times ص_2 + م_2 \times ص_1}{م_1 + م_2}$$

$$٤ = \frac{م_1 \times ٧ + م_2 \times ٢}{م_1 + م_2}$$

$٧ م_1 - ٤ م_1 = ٤ م_2 - ٢ م_2$

$٣ م_1 = ٢ م_2$ $\quad \frac{م_1}{م_2} = \frac{٢}{٣}$ $\quad$ ٢ : ٣ من الداخل

$$ص = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$\text{٧ م}_1 + \text{٢ م}_2 = \text{٤ م}_1 + \text{٤ م}_2$

مثال : إذا كانت أ = (٢ ، -٤) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها أ ب بواسطة محورى الاحداثيات

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــــل

بواسطة محور السينات

جـ = (س ، ٠)

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_1 \times \text{ص}_2 + \text{م}_2 \times \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

$$\text{٠} = \frac{\text{م}_1 \times \text{٥} + \text{م}_2 \times \text{-٤}}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

$\text{٥م}_1 - \text{٤ م}_2 = \text{٠}$

$\text{٥م}_1 = \text{٤ م}_2$

$$\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{\text{٤}}{\text{٥}}$$

أ ب تنقسم بمحور السينات بنسبة ٤ : ٥ من الداخل

بواسطة محور الصادات

جـ = (٠ ، ص)

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1 \times \text{ص}_2 + \text{م}_2 \times \text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

$$\text{٠} = \frac{\text{م}_1 \times \text{٣} + \text{م}_2 \times \text{٢}}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

$\text{٣ م}_1 + \text{٢ م}_2 = \text{٠}$

$\text{٣ م}_1 = \text{- ٢ م}_2$

$$\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{\text{-٢}}{\text{٣}}$$

أ ب تنقسم بمحور الصادات بنسبة ٢ : ٣ من الخارج

ملاحظات

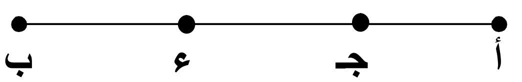
١) إذا كانت جـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ فان جـ تقسم أ ب من الداخل

٢) إذا كانت جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، جـ ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ فان جـ تقسم أ ب من الخارج

٤) إذا كانت جـ تقسم أ ب بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ فان $\text{م}_1 = \text{٣} \text{ ، م}_2 = \text{٢}$

إذا كانت أ = (-١ ، ١) ، ب = (٢ ، ٧) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية

الحـــــــــــــــــــــل



جـ تقسم أ ب من الداخل بنسبة ١ : ٢

جـ = (س ، ص)

$$\text{س} = \frac{\text{١} \times \text{٢} + \text{٢} \times \text{-١}}{\text{١+٢}} = \frac{\text{صفر}}{\text{٣}} = \text{٠} \quad \text{،،، ص} = \frac{\text{١} \times \text{٧} + \text{٢} \times \text{١}}{\text{١+٢}} = \frac{\text{٩}}{\text{٣}} = \text{٣}$$

جـ = (٠ ، ٣)

ء منتصف جـ ب

$$\text{ء} = \left(\frac{\text{٠+٢}}{\text{٢}} \text{،} \frac{\text{٣+٧}}{\text{٢}}\right) = (\text{ ١ ، ٥ })$$

معادلة الخط المستقيم

* بمعلومية نقطة يمر بها وميله
المستقيم الذى يمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) وميله = م تتعين معادلته من العلاقة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$
* بمعلومية نقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) تتعين معادلته من العلاقة
$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$
* بمعلومية ميله والجزء المقطوع من محور الصادات
ص = م س + جـ حيث ميله = م ، جـ هى الجزء المقطوع من محورى الاحداثيات
* بمعلومية الجزئين المقطوعين من محورى الاحداثيات $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$
حيث أ هى الجزء المقطوع من محور السينات
، ب هى الجزء المقطوع من محور الصادات
* لايجاد المقطوعة السينية أو نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠
* لايجاد المقطوعة الصادية أو نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

الميل
* بمعلومية نقطتين $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$
* بمعلومية زاوية الميل م = ظا هـ حيث هـ الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
* بمعلومية معادلة المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠
$$الميل = \frac{- معامل\ س}{معامل\ ص} = \frac{- أ}{ب}$$

ملاحظات
* ميل محور السينات واى مستقيم يوازيه = صفر
* ميل محور الصادات واى مستقيم يوازيه = غير معرف
* شرط توازى مستقيمين هو $م_١ = م_٢$
* شرط تعامد مستقيمين $م_١ \times م_٢ = -١$
* المستقيم الذى يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله = عدد موجب
* المستقيم الذى يصنع زاويةمنفرجة مع الاتجاه الموجب لمحورالسينات يكون ميله = عدد سالب

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-١ ، ٣) وميله = $\frac{٣}{٥}$

الحـــــــــــــــــــــــــل

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م \Leftarrow \frac{ص - ٣}{س + ١} = \frac{٣}{٥}$$

$$\Leftarrow ٣ س + ٣ = ٥ ص - ١٥ \Leftarrow ٣ س - ٥ ص + ١٨ = ٠$$

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٧)

الحـــــل

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ⟸ $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٧ - ٢}{٥ - ١}$

$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{٥}{٤}$ ⟸ ٥ س – ٥ = ٤ ص – ٨ ⟸ ٥ س – ٤ ص + ٣ = ٠

****

أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = ٣ ويقطع خمس وحدات من الجزء الموجب لمحور الصادات

الحـــــل

ص = م س + جـ = ٣ س + ٥

****

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، ٣) ويوازى المستقيم ٤ س – ٧ ص +٣ = ٠

الحـــــل

$م_{الموازى} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧}$ ⟸ $م_{المطلوب} = \frac{٤}{٧}$

$\frac{ص - ٣}{س + ٢} = \frac{٤}{٧}$ ⟸ ٤ س + ٨ = ٧ ص – ٢١ ⟸ ٤ س – ٧ص +٢٩ = ٠

****

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤) ويكون عمودى على المستقيم ٥س+٧ص = ١

الحـــــل

$م_{العمودى} = \frac{-٥}{٧}$ $م_{المطلوب} = \frac{٧}{٥}$

$\frac{ص - ٤}{س - ٣} = \frac{٧}{٥}$ ⟸ ٧س – ٢١ = ٥ ص – ٢٠ ⟸ ٧س – ٥ص – ١ = ٠

****

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، -٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

الحـــــل

$م_{الموازى} = \frac{٥ - ٣}{٤ - ١} = \frac{٢}{٣}$ $م_{المطلوب} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{ص + ٤}{س - ١} = \frac{٢}{٣}$ ⟸ ٢ س – ٢ = ٣ ص +١٢ ⟸ ٢ س – ٣ ص -١٤ = ٠

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، -٤) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــل

$م_{العمودى} = \frac{٥ - ٢}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$ $م_{المطلوب} = \frac{-٤}{٣}$

$\frac{ص + ٤}{س + ٢} = \frac{-٤}{٣}$ ⇐ ٣ ص + ١٢ = - ٤ س – ٨ ⇐ ٣ص+٤س + ٢٠ = ٠

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات ، ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــــل

$\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٤} = ١$ ×١٢ ٤ س – ٣ ص = ١٢

أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم ٢ س – ٥ ص = ١٠

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــــل

لايجاد المقطوعة السينية نضع ص = ٠ ٢ س = ١٠ س = ٥

المقطوعة السينية = ٥

لايجاد المقطوعة الصادية نضع س = ٠ - ٥ ص = ١٠ ص = -٢

المقطوعة الصادية = - ٢

إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تنتمى للمستقيم ٢ س + ٥ ص – ١٧ = ٠ أوجد قيمة أ

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــــل

بالتعويض فى المعادلة ٢ أ + ٥ (٣) – ١٧ = ٠ ⇐ ٢ أ +١٥ – ١٧ = ٠

٢ أ – ٢ = ٠ ⇐ ٢ أ = ٢ ⇐ أ = ١

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــــل

ميل المستقيم = ميل محور السينات = ٠

$\frac{ص – ٣}{س – ٢} = ٠$ ⇐ ص – ٣ = ٠ ⇐ ص = ٣

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور الصادات

الحـــــــــــــــــــــــــــــــــــل

ميل المستقيم = ميل محور الصادات = $\frac{١}{٠}$

$\frac{ص – ٣}{س – ٢} = \frac{١}{٠}$ ⇐ س – ٢ = ٠ ⇐ س = ٢

أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٣س – ٢ ص + ١١ = ٠ على التعامد عندما س = ١

الحـــــــــــل

عندما س = ١

٣(١) – ٢ ص + ١١ = ٠

٣ – ٢ ص + ١١ = ٠

- ٢ ص + ١٤ = ٠

- ٢ ص = - ١٤

ص = ٧

م المستقيم = $\frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ م العمودى = $\frac{-٢}{٣}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (١ ، ٧) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$\frac{ص - ٧}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص – ٢١ = -٢س+٢ ⟸ ٣ص+٢س – ٢٣ = ٠

إذا كان أ = (-٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٧) أوجد محور تماثل أ ب

الحـــــــــــل

محور القطعة هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

منتصف أ ب = ($\frac{-٣+٥}{٢}$ ، $\frac{١+٧}{٢}$) = (١ ، ٤)

ميل أ ب = $\frac{٧ - ١}{٥+٣} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

محور التماثل يمر بالنقطة (١ ، ٤) وميله = $\frac{-٤}{٣}$

$\frac{ص - ٤}{س - ١} = \frac{-٤}{٣}$

٣ ص – ١٢ = - ٤س +٤

٣ص – ١٢ + ٤س + ٤ = ٠

٣ص + ٤ س – ٨ = ٠

إذا كان أ ب قطر فى الدائرة م حيث أ = (-٤ ، ١) ، ب = (-٢ ، ٤) أوجد معادلة المماس للدائرة م عند أ

الحـــــــــــل

المماس لدائرة يكون عمودياً على القطر المرسوم من نقطة التماس

ميل أ ب = $\frac{٤ - ١}{-٢+٤} = \frac{٣}{٢}$

ميل المماس = $\frac{-٢}{٣}$

المماس يمر بالنقطة (-٤ ، ١) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$\frac{ص - ١}{س+٤} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص – ٣ = -٢ س - ٨

٣ص – ٣ +٢س + ٨ = ٠

٣ص +٢ س +٥ = ٠

إذا كان أجـ قطر فى المربع أ ب جـ ء حيث أ = (٣ ، ٥) ، جـ = (-١ ، -١) أوجد معادلة القطر ب ء

الحـــــــــل

القطر ب ء يمر بمنتصف القطر أ جـ وعمودى عليه

منتصف أ جـ = $(\frac{٣+(-١)}{٢} ، \frac{٥+(-١)}{٢}) = (١ ، ٢)$

ميل أ جـ = $\frac{-١ - ٥}{-١ - ٣} = \frac{-٦}{-٤} = \frac{٣}{٢}$

ميل ب ء = $\frac{-٢}{٣}$

القطر ب ء يمر بالنقطة (١ ، ٢) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص - ٦ = -٢ س +٢

٣ص - ٦ +٢س - ٢ = ٠

٣ص +٢س - ٨ = ٠

الزاوية بين مستقيمين

* أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ٢ س - ٣ ص +١ = ٠ ، س - ٥ ص +٧ = ٠

الحـــــــــل

م١ = $\frac{٢}{٣}$ ، م٢ = $\frac{١}{٥}$

ظاهـ = ± $\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} = \frac{\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٥}} = \frac{\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٢}{١٥}} = \frac{\frac{١٠ - ٣}{١٥}}{\frac{١٥ + ٢}{١٥}} = \frac{٧}{١٧}$

ق (هـ) = ٢٢ َ ٢٢ ْ

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ٣ س – ص = ٥ ، ٢ س + ص – ٧ = ٠

الحـــــــــــل

$\text{م}_١ = ٣$ ، $\text{م}_٢ = -٢$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \frac{٣ - (-٢)}{١ + ٣ \times -٢} = \frac{٥}{-٥} = -١$$

ق (هـ) = ١٣٥° أو ٤٥°

إذا كانت أ = (١ ، ٤) ، ب=(٢ ، ١) ، جـ= (٤ ، ٢) أوجد ق (ب أ جـ) المنفرجة

الحـــــــــــل

$$\text{م}_١ = \text{م}_{\text{أب}} = \frac{٤ - ١}{١ - ٢} = -٣ \quad ، \quad \text{م}_٢ = \text{م}_{\text{أجـ}} = \frac{٤ - ٢}{١ - ٤} = \frac{٢}{-٣} = \frac{-٢}{٣}$$

$$\text{ظاهـ} = \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \frac{-٣ - \frac{-٢}{٣}}{١ + -٣ \times \frac{-٢}{٣}} = \frac{-٣ + \frac{٢}{٣}}{١ + ٢} = \frac{\frac{-٩ + ٢}{٣}}{٣} = \frac{-٧}{٣} \times \frac{١}{٣} = -\frac{٧}{٩}$$

ق (ب أ جـ) = ١٤٢° ٧'

أوجد قياس الزاوية بين المستقيم ٣س – ٢ ص +١ = ٠ والمستقيم الذى ميله =

الحـــــــــــل

$$\text{ظاهـ} = \pm \frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٥}} = \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{١٠}} = \frac{\frac{١٥-٢}{١٠}}{\frac{١٠+٣}{١٠}} = \frac{١٣}{١٣} = \pm ١$$

ظاهـ = ١ ، ق(هـ) = ٤٥°

ظاهـ = -١ ، ق(هـ) = ١٣٥°

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين س – ك ص +٢ = ٠ ، س – ٣ ص +٤ = ٠ تساوى

أوجد قيمة ك

الحـــــــــــل

$$\text{م}_١ = \frac{-١}{-\text{ك}} = \frac{١}{\text{ك}} \quad \text{م}_٢ = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$$

هـ = ٤٥

ظاهـ = ± ١

$$\frac{\text{م}_١ - \text{م}_٢}{١ + \text{م}_١ \text{م}_٢} = \pm ١$$

$$\frac{\frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك}}}{\frac{٣\text{ك} + ١}{٣\text{ك}}} = \pm ١$$

$$\frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١} = ١ \qquad \frac{٣ - \text{ك}}{٣\text{ك} + ١} = -١$$

$$\frac{\frac{1}{ك} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{ك} \times \frac{1}{3}} = \pm 1$$

$$\frac{\frac{1}{ك} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3ك}} = \pm 1$$

٣ك + ١ = ٣ ــ ك	ـ ٣ ك ــ ١ = ٣ ــ ك
٣ك+ك = ٣ ــ ١	ـ٣ ك + ك = ٣ + ١
٤ ك = ٢	ـ٢ ك = ٤
ك = $\frac{2}{4}$ = $\frac{1}{2}$	ك = ـ٢

إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين تساوى ٤٥° فإذا علم أن ميل الاول = ٢ أوجد ميل الثانى

الحــــــــــــــل

نفرض أن ميل الثانى = م

هـ = ٤٥°

$$\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2} = \pm 1$$

$$\frac{2 - م}{1 + 2 \times م} = \pm 1$$

$$\frac{2 - م}{1 + 2م} = \pm 1$$

$\frac{2 - م}{1 + 2م} = 1$	$\frac{2 - م}{1 + 2م} = -1$
١ + ٢ م = ٢ ــ م	ـ١ ــ ٢ م = ٢ ــ م
٢م + م = ٢ ــ ١	ـ٢م + م = ٢ + ١
٣م = ١	ـ م = ٣
م = $\frac{1}{3}$	م = ـ٣

البعد العمودى

لايجاد طول العمود النازل من النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) على المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠ نستخدم القانون

$$ع = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

....

مثال أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم ٤ س ــ ٣ ص + ١١ = ٠

الحـــــــــــــــــــل

$$ع = \frac{|٤ (٢) ــ ٣ (١) + ١١|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|٨ ــ ٣ + ١١|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٦}{٥}$$

....

مثال إذا كان طول العمود النازل من نقطة الاصل على المستقيم ٤ س – ٣ ص + ك = ٠ يساوى ٣ وحدات أوجد قيمة ك

الحـــــل

ع = ٣

$$\frac{|٤(٠) - ٣(٠) + ك|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = ٣$$

$$\frac{ك}{٥} = ٣ \qquad ك = ٥ \times ٣ = ١٥$$

مثال إذا كان طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم ٣ س – ك ص +٨ = ٠ يساوى ٢ أوجد قيمة ك

الحـــــل

ع = ٢

$$\frac{|٣(٢) - ك(١) + ٨|}{\sqrt{٩ + ك^٢}} = ٢$$

$$\frac{٦ - ك + ٨}{\sqrt{٩ + ك^٢}} = ٢$$

$$\frac{١٤ - ك}{\sqrt{٩ + ك^٢}} = ٢$$

$$٢\sqrt{٩ + ك^٢} = ١٤ - ك$$ بالتربيع

$$٤(٩ + ك^٢) = ١٩٦ - ٢٨ك + ك^٢$$

$$٣٦ + ٤ك^٢ - ١٩٦ + ٢٨ك - ك^٢ = ٠$$

$$٣ك^٢ + ٢٨ك - ١٦٠ = ٠$$

$$(ك - ٤)(٣ك + ٤٠) = ٠$$

$$ك = ٤ \qquad ك = \frac{-٤٠}{٣}$$

مثال إذا كانت أ = (٢ ، -٢) ، ب = (-١ ، ١) ، جـ = (-٤ ، ٥) أوجد

(١) طول ب جـ   (٢) معادلة ب جـ

(٣) طول العمود النازل من أ على ب جـ   (٤) مساحة المثلث أ ب جـ

الحـــــل

$$ب جـ = \sqrt{(-١ + ٤)^٢ + (١ - ٥)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$ وحدات

معادلة ب جـ

$$\frac{ص - ١}{س + ١} = \frac{٥ - ١}{-٤ + ١} \qquad \frac{ص - ١}{س + ١} = \frac{٤}{-٣}$$

$$٤س + ٤ = -٣ص + ٣ \qquad ٤س + ٣ص + ١ = ٠$$

** طول العمود النازل من أ على ب جـ

$$ع = \frac{|٤(٢) + ٣(-٢) + ١|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{٨ - ٦ + ١}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

** مساحة المثلث أ ب جـ

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × ع = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × $\frac{٣}{٥}$ = ١,٥ سم^{٢}

مثال أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (١ ، -٣) والمستقيم ١٢س – ٥ ص -١ = ٠ مماس لها واوجد محيطها ومساحتها

الحـــــــــــــــــــــــــــــــل

نق = ع = $\frac{|١٢(١) -٥(-٣) – ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$ = $\frac{١٢ + ١٥ – ١}{١٣}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢ وحدة طولية

محيطها = ٢ ط نق = ٢ ط × ٢ = ٤ ط

مساحتها = ط نق^{٢} = ط × (٢)^{٢} = ٤ ط

مثال إثبت أن المستقيمان ٣ س – ٤ ص – ٦ = ٠ ، ٦ س – ٨ ص + ١ = ٠ متوازيان واوجد البعد بينهما

الحـــــــــــــــــــــــــــــــل

م$_{١}$ = $\frac{-٣}{-٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، م$_{٢}$ = $\frac{-٦}{-٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ م$_{١}$ = م$_{٢}$ المستقيمان متوازيان

لايجاد البعد بينهما نوجد نقطة على أحدهما ثم نوجد البعد بينها وبين المستقيم الاخر

فى المستقيم الاول نضع ص = ٠ نجد ان ٣ س – ٦ = ٠ ٣س = ٦ س = ٢

النقطة (٢ ، ٠) تنتمى للمستقيم الاول نوجد البعد بينها وبين المستقيم الثانى

ع = $\frac{|٦(٢) – ٨ (٠) + ١|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$ = $\frac{|١٢ + ٠ + ١|}{\sqrt{١٠٠}}$ = $\frac{١٣}{١٠}$ = ١,٣ وحدة طولية

مثال إثبت أن المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص + ٢ = ٠ يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢) وطول نصف قطرها ٤ سم

الحـــــــــــــــــــــــــــــــل

نوجد طول العمود النازل من المركز على المستقيم ٤ س + ٣ ص +٢ = ٠

ع = $\frac{|٤(٣) + ٣ (٢) + ٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$ = $\frac{|١٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤

ع = نق المستقيم يمس الدائرة

مثال إثبت أن النقطة (١ ، ٤) تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين

س + ص +٣ = ٠ ، س – ٧ ص -١٣ = ٠

الحــل

نثبت أن النقطة تقع على نفس البعد بين المستقيمين

$ع_١ = \frac{|(١) ١ + (٤) ١ + ٣|}{\sqrt{١ + ١}} = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

$ع_٢ = \frac{|١(١) - ٧(٤) - ١٣|}{\sqrt{١ + ٤٩}} = \frac{|١ - ٢٨ - ١٣|}{\sqrt{٥٠}} = \frac{٤٠}{٥\sqrt{٢}} = \frac{٨}{\sqrt{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

$\because$ ع$_١$ = ع$_٢$ $\therefore$ النقطة تقع على أحد منصفى الزاوية بين المستقيمين

إثبت أن النقطتين أ (٣ ، ١) ، ب = (-٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفتين من المستقيم

٣ س – ٤ ص +٦ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه

الحــــــــــــــــــل

نوجد طول العمود الساقط من أ (٣ ، ١) على المستقيم

$ع_١ = \frac{|٣(٣) - ٤(١) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٩ - ٤ + ٦|}{٢٥} = \frac{|١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول

نوجد طول العمود الساقط من ب (-٣ ، ٢) على المستقيم

$ع_١ = \frac{|٣(-٣) - ٤(٢) + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|-٩ - ٨ + ٦|}{٢٥} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥} = ٢,٢$ وحدة طول

المقدار ٣س – ٤ ص +٦ له أشارىين مختلفتين ١١ ، -١١ عند التعويض بالنقطتين

$\therefore$ النقطتان فى جهتين مختلفتين من المستقيم ٣س – ٤ ص + ٦ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه

معادلة مستقيم بمعلومية نقطة تقاطع مستقيمين

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ١١ ، س + ص = ٨ ويوازى المستقيم ٤ س – ٧ ص + ١ = ٠

الحـــل

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ١١

س + ص = ٨

س = ٣

بالتعويض فى ٢

٣ + ص = ٨

ص = ٥ (٣ ، ٥)

$م_{\text{الموازى}} = \frac{٤}{٧}$ $م_{\text{المطلوب}} = \frac{٤}{٧}$

$$\frac{\text{ص} - ٥}{\text{س} - ٣} = \frac{٤}{٧}$$

٤ س – ١٢ = ٧ ص – ٣٥

٤ س – ٧ ص +٢٣ = ٠

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ١١ ، س – ص = ١ وعمودى على المستقيم ٣ س – ٥ ص +١ = ٠

الحـــل

٢ س + ص = ١١

س - ص = ١

....

٣س = ١٢

س = ٤

بالتعويض فى ١

٢(٤) + ص = ١١

٨ + ص = ١١

ص = ٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٤ ، ٣)

$م_{\text{العمودى}} = \frac{٣}{٥}$ $م_{\text{المطلوب}} = \frac{-٥}{٣}$

$$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٤} = \frac{-٥}{٣}$$

٣ ص – ٩ = -٥ س +٢٠

٣ س + ٥ ص -٢٩ = ٠

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ٧ ، س + ٢ ص = ٨ وبالنقطة (٥ ، ٤)

الحـــل

بضرب الاولى × ٢

٤س + ٢ ص = ١٤

س + ٢ ص = ٨

....

٣ س = ٦ س = ٢

بالتعويض فى ٢

٢ + ٢ ص = ٨

٢ص = ٦ ص = ٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٢ ، ٣)

المستقيم المطلوب يمر بالنقطتين

(٢ ، ٣) ، (٥ ، ٤)

$$\frac{\text{ص} - ٣}{\text{س} - ٢} = \frac{٤ - ٣}{٥ - ٢} = \frac{١}{٣}$$

س – ٢ = ٣ ص – ٩

س – ٣ ص + ٧ = ٠

أوجد طول العمود النازل من نقطة تقاطع المستقيمين س+ص=٥ ، س – ص = ١ على المستقيم ٨س +٦ ص + ٥ = ٠

الحـــــــــــــل

نوجد أولا نقطة تقاطع المستقيمين

س + ص = ٥

س – ص = ١

بالجمع

٢س = ٦

س = ٣

بالتعويض فى المعادلة الاولى نجد أن ص = ٢

نوجد طول العمود النازل من النقطة (٣ ، ٢)

على المستقيم ٨س+٦ص+٥ = ٠

$$ع = \frac{|٨(٣) + ٦(٢) + ٥|}{\sqrt{٦٤+٣٦}} = \frac{|٢٤+١٢+٥|}{\sqrt{١٠٠}}$$

$$= \frac{٤١}{١٠} = ٤,١$$ وحدة طولية

إذا كانت أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٨) أوجد معادلة المستقيم العمودى على أ ب من منتصفه

الحـــــــــــــل

منتصف أ ب = $(\frac{-١+٣}{٢} ، \frac{٢+٨}{٢}) = (١ ، ٥)$

ميل أ ب $= \frac{٨ - ٢}{٣+١} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٣}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة(١ ، ٥) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$$\frac{ص - ٥}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$$

٣ص – ١٥ = -٢س +٢

٣ص – ١٥ + ٢س – ٢ = ٠

٣ص +٢س – ١٧ = ٠

إذا كان أ ب قطر فى دائرة مركزهام حيث أ = (-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد معادلة المماس للدائرة عند أ

الحـــــــــــــل

ميل أ ب $= \frac{٥ - ٢}{٣+١} = \frac{٣}{٤}$

المماس عمودى على القطر

ميل المماس = $\frac{-٤}{٣}$

المماس يمر بالنقطة (-١ ، ٢) وميله = $\frac{-٤}{٣}$

$$\frac{ص - ٢}{س +١} = \frac{-٤}{٣}$$

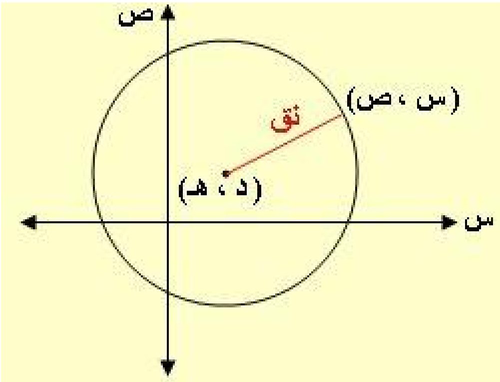
٣ص – ٦ = - ٤ س – ٤

٣ص – ٦ + ٤ س +٤ = ٠

٣ص +٤ س – ٢ = ٠

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها نق هي:



(س – د)٢ + (ص – هـ)٢ = نق٢ نق نصف قطر الدائرة

نحصل على هذه المعادلة من استخدام قانون البعد بين نقطتين

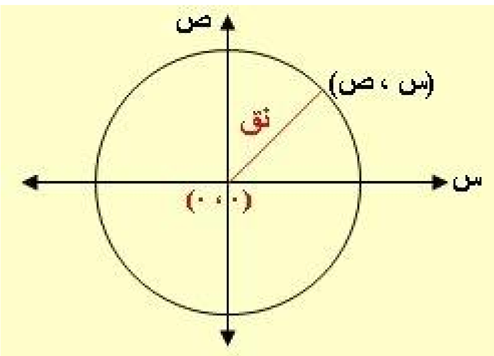
مربع البعد بين النقطتين (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) هو:

مربع البعد بين النقطتين = (س٢ – س١)٢ + (ص٢ – ص١)٢

وبتطبيقه على البعد نق الواصل بين (س ، ص) ، (د ، هـ)

مع ملاحظة (د ، هـ) أي نقطة في مستوى الإحداثيات الديكارتيه والشكل المرفق توضيح لذلك.

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق



وفي حال كون د = ٠ ، هـ = ٠ أي (د ، هـ) تكون نقطة الأصل

فإن معادلة الدائرة تؤول إلى س٢ + ص٢= نق٢

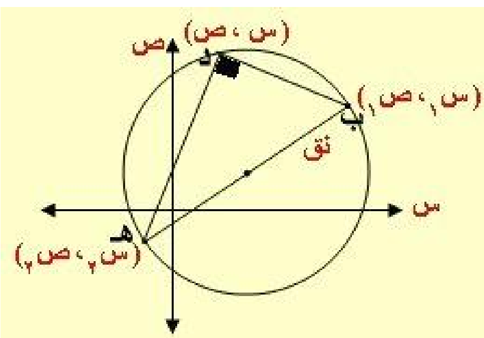
وهي معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نق

ويمكن الحصول عليها مباشرة من الشكل باستخدام نفس القانون

السابق وهو البعد بين نقطتين.

معادلة الدائرة التي طرفا قطر فيها (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) هي:

(س – س١) (س – س٢) + (ص – ص١)(ص – ص٢) = ٠



يمكن الحصول عليها من:

ق< د = ٩٠ < د مرسومة في نصف دائرة لاحظ الشكل

ميل ب د × ميل د هـ = – ١ تعامد مستقيمين

الميل لمستقيم مار بنقطتين = فرق الصادات ÷ فرق السينات

ص – ص١   ص – ص٢

—————— × —————— = – ١

س – س١   س – س٢

(س – س١) (س – س٢) = –(ص – ص١)(ص – ص٢)

(س – س١) (س – س٢) + (ص – ص١)(ص – ص٢) = ٠

<u>الصورة العامة لمعادلة الدائرة:</u>

من: (س – د)٢ + (ص – هـ)٢ = نق٢ وبفك الأقواس نحصل على

س٢ + ص٢–٢ د س –٢هـ ص + د٢+ هـ٢– نق٢ = ٠ وبوضع د= – ل ، هـ = – ك ، د٢ + هـ٢– نق٢ = حـ يكون:

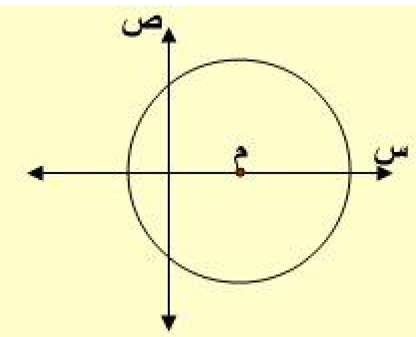
س٢ + ص٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠ مركزها (– ل ، – ك) ونصف قطرها نق حيث نق٢ = ل٢ + ك٢ – حـ

لاحـــــــظ:
١) لإيجاد المركز من المعادلة نجعل معامل س٢= معامل ص٢= ١ ثم المركز = (– معامل س÷٢ ، – معامل ص÷٢)

٢) إذا مرَّ محيط الدائرة بنقطة الأصل فإن حـ = ٠ والعكس صحيح لأن س = ص = ٠ وتؤول المعادلة إلى:

س٢ + ص٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص = ٠

حالات خاصة:
<u>١) إذا وقع المركز م = (– ل ، – ك) على محور السينات</u>



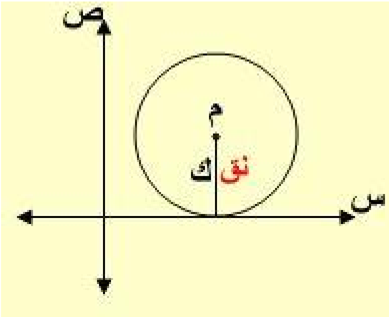
فإن ك = ٠ (إي نقطة تقع على محور الصادات إحداثها السيني = ٠)

أي م = (– ل، ٠) وتصبح معادلة الدائرة:

س٢ + ص٢ + ٢ ل س + حـ = ٠

ويكون ل٢ + ك٢ – حـ = نق٢ (ك = ٠)

أي أن: ل٢ – حـ = نق٢



٢) إذا وقع المركز م = (– ل ، – ك) على محور الصادات

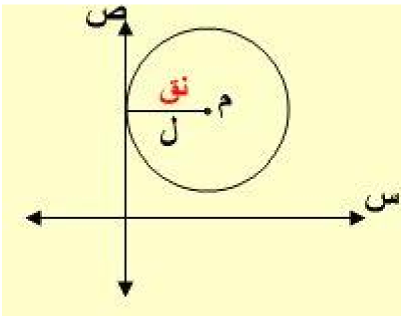
فإن ل = ٠ (إي نقطة تقع على محور الصادات إحداثها السيني =٠)

أي م = (٠ ، – ك) وتؤول معادلة الدائرة:

س٢ + ص٢ + ٢ ك ص + حـ = ٠

ويكون ل٢ + ك٢ – حـ = نق٢ (ل = ٠)

أي أن: ك٢ – حـ = نق٢



<u>٣) إذا مسَ محيط الدائرة محور السينات</u>

فإن ك = نق

أي ك٢ = نق٢

ومن: ل٢ + ك٢ – حـ = نق٢

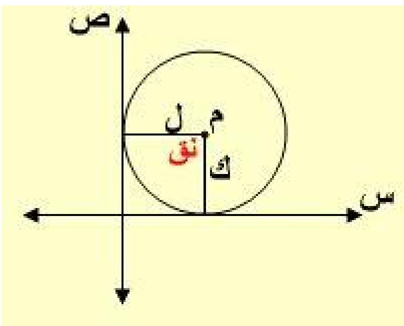
ل٢ – حـ = ٠

ل٢ = حـ

<u>٣) إذا مسَ محيط الدائرة محور السينات فإن ك = ل = نق</u>

والمركز هنا (نق ، نق) وتوجد ٤ دوائر حسب موقــع

المركز في أي ربع من الأرباع الأربعة.



(س – نق)٢ + (ص – نق)٢ = نق٢

(س + نق)٢ + (ص – نق)٢ = نق٢

(س + نق)٢ + (ص + نق)٢ = نق٢

(س – نق)٢ + (ص + نق)٢ = نق٢

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي ينطبق محوره على أحد المحورين ورأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
ص^{٢} = ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠)	س = - جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
ص^{٢} = - ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(- جـ ، ٠)	س = جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
س^{٢} = ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ)	ص = - جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
س^{٢} = - ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، - جـ)	ص = جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

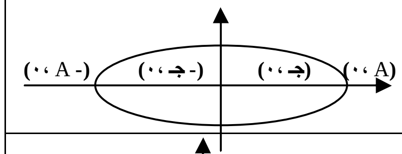
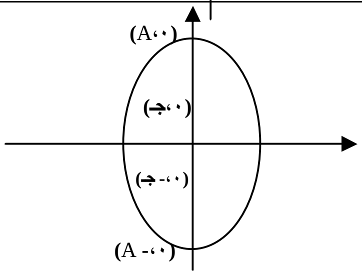
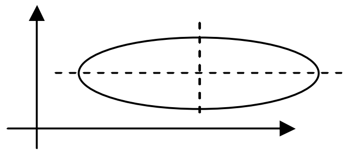
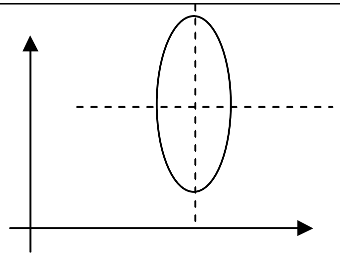
ملاحظات هامة :

- **لرسم القطع المكافئ نتحرك من البؤرة مسافة مقدارها ٢ جـ في الاتجاهين فنحصل على نقطتين**
- **فتحة القطع تتجه دائماُ من الرأس إلى البؤرة**
- **البعد البؤري = جـ**
- **لإيجاد معادلة القطع يلزمنا تحديد فتحة لاختيار المعادلة ، ثم إيجاد د، هـ، جـ من خلال استخدام المعطيات .**

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يوازي محوره أحد المحورين ورأسه (د ، هـ)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
(ص - هـ)^{٢} = ٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ)	س = - جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
(ص - هـ)^{٢} = -٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(- جـ + د ، هـ)	س = جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
(س – د)^{٢} = ٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ)	ص = - جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
(س – د)^{٢} = -٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، - جـ + هـ)	ص = جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

معادلة القطع الناقص	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور الأكبر ومعادلته	المحور الأصغر ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{س^{2}}{A^{2}} + \frac{ص^{2}}{ب^{2}} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (- A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{ص^{2}}{A^{2}} + \frac{س^{2}}{ب^{2}} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ) (٠ ، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(س - د)^{2}}{A^{2}} + \frac{(ص - هـ)^{2}}{ب^{2}} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (- جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (- A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	
$\frac{(ص - هـ)^{2}}{A^{2}} + \frac{(س - د)^{2}}{ب^{2}} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد الأكبر = ٢ A   * البعد الأصغر = ٢ ب

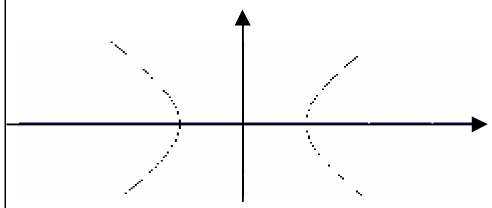
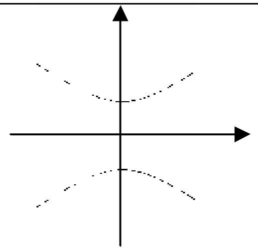
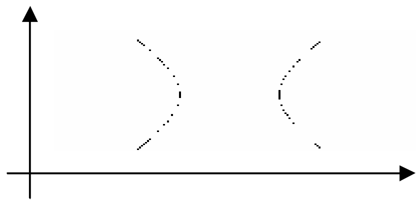
$A^{2} = ب^{2} + جـ^{2}$ حيث A ، ب ، جـ L :

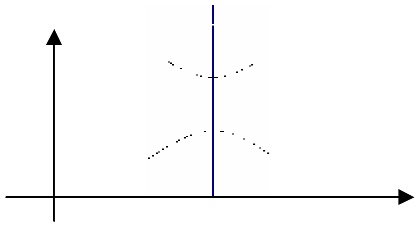
١) يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير س^٢ (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني

أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير ص^٢ موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

٢) لإيجاد معادلة القطع الناقص نحتاج إلى تحديد المحور الأكبر (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، هـ ، أ ، ب من خلال المعطيات .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

معادلة القطع الزائد	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور المستعرض (المحور البؤري) ومعادلته	المحور المرافق ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^2}{A^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^2}{A^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ) (٠ ، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{A^2} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (-جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (-A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	

$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{A^{٢}} - \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد بين الرأسين = ٢ A

$جـ^{٢} = ب^{٢} + A^{٢}$ حيث A ، ب ، جـ L :

* يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير $س^{٢}$ (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني . أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير $ص^{٢}$ موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

* لإيجاد معادلة القطع الزائد نحتاج إلى : تحديد المحور المستعرض (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، ه ، أ ، ب من خلال المعطيات .

معادلة الدرجة الثانية في الصورة :
0$س^{٢}$ + بَ س ص + جـَ $ص^{٢}$ + دَ س + هـَ ص + وَ = ٠
تُمثل

قطعاً مكافئاً
إذا كان 0× جـَ = ٠
بمعنى أن 0، جـَ أحدهما يساوي الصفر

قطعاً ناقصاً
إذا كان 0× جـَ > ٠
بمعنى أن 0، جـَ لهما نفس الإشارة

قطعاً زائداً
إذا كان 0× جـَ < ٠
بمعنى أن 0، جـَ لهما إشارتين مختلفتين

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي ينطبق محوره على أحد المحورين ورأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
ص^{٢} = ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠)	س = - جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
ص^{٢} = -٤جـ س	(٠ ، ٠)	(-جـ ، ٠)	س = جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
س^{٢} = ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ)	ص = - جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
س^{٢} = - ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، -جـ)	ص = جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

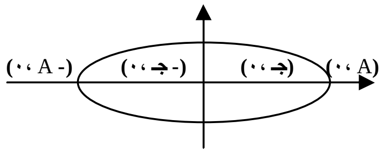
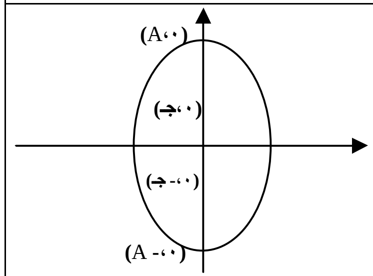
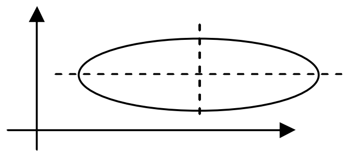
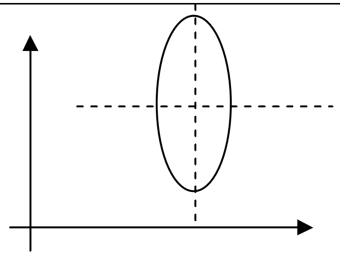
ملاحظات هامة :

- **لرسم القطع المكافئ نتحرك من البؤرة مسافة مقدارها ٢ جـ في الاتجاهين فنحصل على نقطتين**
- **فتحة القطع تتجه دائماً من الرأس إلى البؤرة**
- **البعد البؤري = جـ**
- **لإيجاد معادلة القطع يلزمنا تحديد فتحة لاختيار المعادلة ، ثم إيجاد د، هـ، جـ من خلال استخدام المعطيات .**

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يوازي محوره أحد المحورين ورأسه (د ، هـ)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
(ص- هـ)^{٢} = ٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ)	س = - جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
(ص- هـ)^{٢} = -٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(- جـ + د ، هـ)	س = جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
(س – د)^{٢} = ٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ)	ص = - جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
(س – د)^{٢} = -٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، - جـ + هـ)	ص = جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

معادلة القطع الناقص	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور الأكبر ومعادلته	المحور الأصغر ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^2}{A^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^2}{A^2} + \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠، جـ) (٠، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{A^2} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (-جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (-A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	
$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{A^2} + \frac{(\text{س} - \text{د})^2}{\text{ب}^2} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري

* البعد الأكبر = ٢ A

* البعد الأصغر = ٢ ب

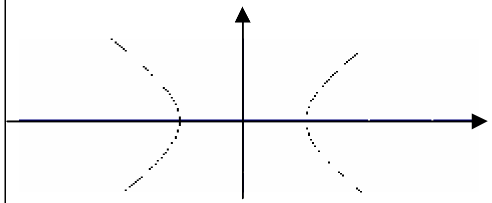
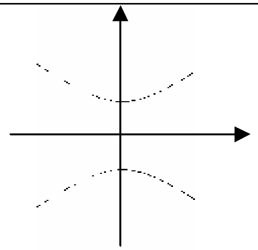
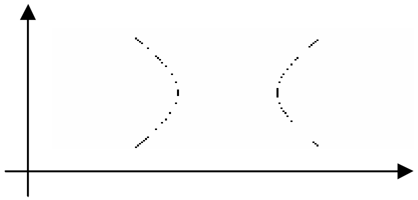
A^2 = ب^2 + جـ^2 حيث   A ، ب ، جـ L :

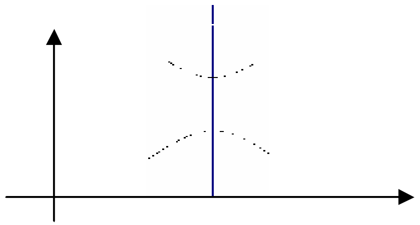
١) يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير $\text{س}^{٢}$ (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني

أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير $\text{ص}^{٢}$ موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

٢) لإيجاد معادلة القطع الناقص نحتاج إلى تحديد المحور الأكبر (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، هـ ، أ ، ب من خلال المعطيات .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

معادلة القطع الزائد	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور المستعرض (المحور البؤري) ومعادلته	المحور المرافق ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^{٢}}{A^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^{٢}}{A^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ) (٠ ، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{A^{٢}} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (- جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (-A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	

$\frac{(ص - هـ)^2}{A^2} - \frac{(س - د)^2}{ب^2} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد بين الرأسين = ٢ A

جـ^٢ = ب^٢ + A^٢ حيث   A ، ب ، جـ L :

* يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير س^٢ (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني . أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير ص^٢ موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

* لإيجاد معادلة القطع الزائد نحتاج إلى : تحديد المحور المستعرض (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، ه ، أ ، ب من خلال المعطيات .

معادلة الدرجة الثانية في الصورة :
0س^٢ + بَ س ص + جَـ ص^٢ + دَ س + هـَ ص + وَ = ٠
تُمثل

قطعاً مكافئاً إذا كان 0× جَـ = ٠ بمعنى أن 0، جَـ أحدهما يساوي الصفر	قطعاً ناقصاً إذا كان 0× جَـ > ٠ بمعنى أن 0، جَـ لهما نفس الإشارة	قطعاً زائداً إذا كان 0× جَـ < ٠ بمعنى أن 0، جَـ لهما إشارتين مختلفتين

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي ينطبق محوره على أحد المحورين ورأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
ص^{٢} = ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠)	س = - جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
ص^{٢} = - ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(- جـ ، ٠)	س = جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
س^{٢} = ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ)	ص = - جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
س^{٢} = - ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، - جـ)	ص = جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

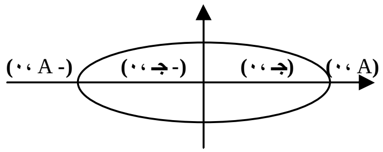
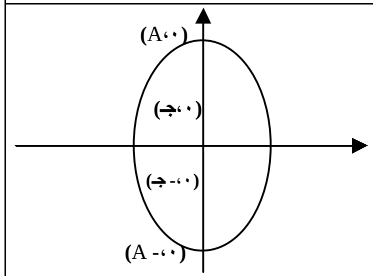
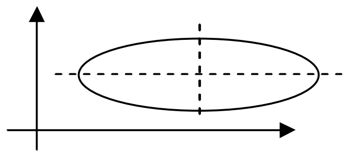
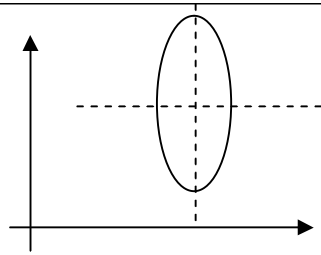
ملاحظات هامة :

- **لرسم القطع المكافئ نتحرك من البؤرة مسافة مقدارها ٢ جـ في الاتجاهين فنحصل على نقطتين**
- **فتحة القطع تتجه دائماً من الرأس إلى البؤرة**
- **البعد البؤري = جـ**
- **لإيجاد معادلة القطع يلزمنا تحديد فتحة لاختيار المعادلة ، ثم إيجاد د، هـ، جـ من خلال استخدام المعطيات .**

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يوازي محوره أحد المحورين ورأسه (د ، هـ)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
(ص - هـ)^{٢} = ٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ)	س = - جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
(ص - هـ)^{٢} = -٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(- جـ + د ، هـ)	س = جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
(س – د)^{٢} = ٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ)	ص = - جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
(س – د)^{٢} = -٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، - جـ + هـ)	ص = جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

<u>**الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص**</u>

معادلة القطع الناقص	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور الأكبر ومعادلته	المحور الأصغر ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^{٢}}{A^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^{٢}}{A^{٢}} + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠، جـ) (٠، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{A^{٢}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (-جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (-A + د ، هـ)	// S ومعادلته ص = هـ	// X ومعادلته س = د	
$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{A^{٢}} + \frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	// X ومعادلته س = د	// S ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد الأكبر = ٢ A   * البعد الأصغر = ٢ ب

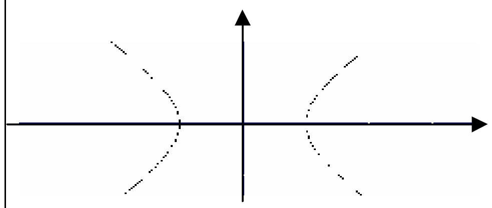
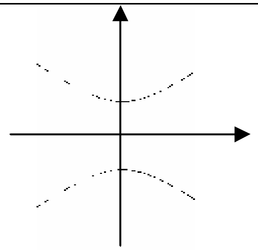
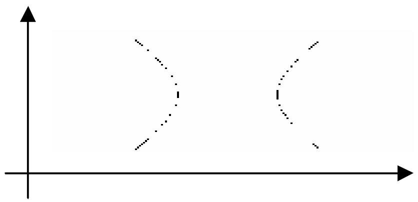
$A^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}$ حيث A ، ب ، جـ L :

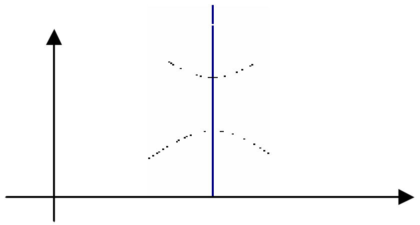
١) يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير $س^2$ (مثلاً) **موجباً** فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني

أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير $ص^2$ **موجباً** فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

٢) لإيجاد معادلة القطع الناقص نحتاج إلى تحديد المحور الأكبر (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، هـ ، أ ، ب من خلال المعطيات .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

معادلة القطع الزائد	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور المستعرض (المحور البؤري) ومعادلته	المحور المرافق ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^2}{A^2} - \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (-جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^2}{A^2} - \frac{\text{س}^2}{\text{ب}^2} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ) (٠ ، -جـ)	(٠ ، A) (٠ ، -A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^2}{A^2} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^2}{\text{ب}^2} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (-جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (-A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	

$\frac{(ص - هـ)^{٢}}{A^{٢}} - \frac{(س - د)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد بين الرأسين = ٢ A

جـ^{٢} = ب^{٢} + A^{٢} حيث A ، ب ، جـ L :

* يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير س^{٢} (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني . أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير ص^{٢} موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

* لإيجاد معادلة القطع الزائد نحتاج إلى : تحديد المحور المستعرض (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، ه ، أ ، ب من خلال المعطيات .

معادلة الدرجة الثانية في الصورة :
0س^{٢} + بَ س ص + جـَ ص^{٢} + دَ س + هـَ ص + وَ= ٠
تُمثـل

قطعاً مكافئاً
إذا كان 0× جـَ = ٠
بمعنى أن 0، جـَ أحدهما يساوي الصفر

قطعاً ناقصاً
إذا كان 0× جـَ > ٠
بمعنى أن 0، جـَ لهما نفس الإشارة

قطعاً زائداً
إذا كان 0× جـَ < ٠
بمعنى أن 0، جـَ لهما إشارتين مختلفتين

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي ينطبق محوره على أحد المحورين ورأسه نقطة الأصل (٠ ، ٠)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
ص^{٢} = ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠)	س = - جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
ص^{٢} = - ٤جـ س	(٠ ، ٠)	(- جـ ، ٠)	س = جـ	ص = ٠ (محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
س^{٢} = ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، جـ)	ص = - جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
س^{٢} = - ٤جـ ص	(٠ ، ٠)	(٠ ، - جـ)	ص = جـ	س = ٠ (محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

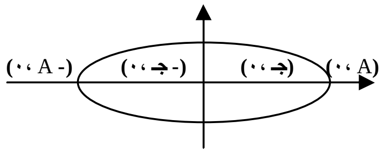
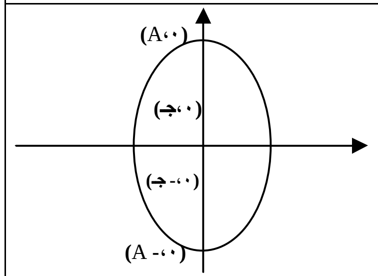
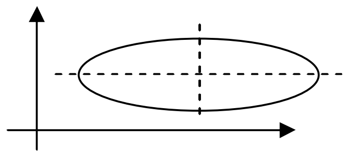
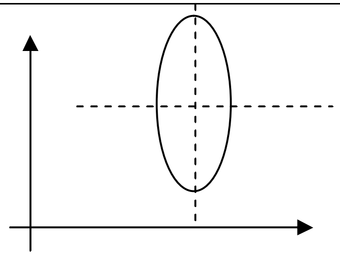
ملاحظات هامة :

- **لرسم القطع المكافئ نتحرك من البؤرة مسافة مقدارها ٢ جـ في الاتجاهين فنحصل على نقطتين**
- **فتحة القطع تتجه دائماُ من الرأس إلى البؤرة**
- **البعد البؤري = جـ**
- **لإيجاد معادلة القطع يلزمنا تحديد فتحة لاختيار المعادلة ، ثم إيجاد د، هـ، جـ من خلال استخدام المعطيات .**

الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يوازي محوره أحد المحورين ورأسه (د ، هـ)

المعادلة	الرأس	البؤرة	الدليل	المحور	اتجاه فتحة القطع
(ص - هـ)^{٢} = ٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ)	س = - جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{+} الاتجاه الموجب لمحور السينات
(ص - هـ)^{٢} = -٤جـ (س – د)	(د ، هـ)	(- جـ + د ،هـ)	س = جـ + د	ص = هـ (المحور يوازي محور السينات)	S^{-} الاتجاه السالب لمحور السينات
(س – د)^{٢} = ٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ)	ص = - جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{+} الاتجاه الموجب لمحور الصادات
(س – د)^{٢} = -٤جـ (ص – هـ)	(د ، هـ)	(د ، - جـ + هـ)	ص = جـ + هـ	س = د (المحور يوازي محور الصادات)	X^{-} الاتجاه السالب لمحور الصادات

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص

معادلة القطع الناقص	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور الأكبر ومعادلته	المحور الأصغر ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^{2}}{A^{2}} + \frac{\text{ص}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^{2}}{A^{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{\text{ب}^{2}} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠، جـ) (٠، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^{2}}{A^{2}} + \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{2}}{\text{ب}^{2}} = ١$	(د ، هـ)	(د + جـ ، هـ) (-جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (-A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	
$\frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{2}}{A^{2}} + \frac{(\text{س} - \text{د})^{2}}{\text{ب}^{2}} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد الأكبر = ٢ A   * البعد الأصغر = ٢ ب

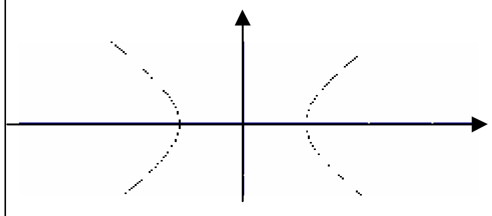
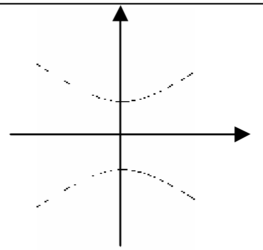
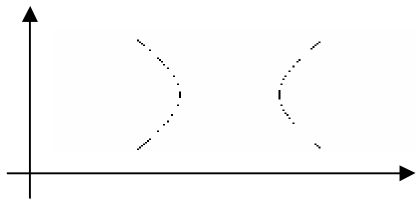
$A^{2} = \text{ب}^{2} + \text{جـ}^{2}$ حيث A ، ب ، جـ L :

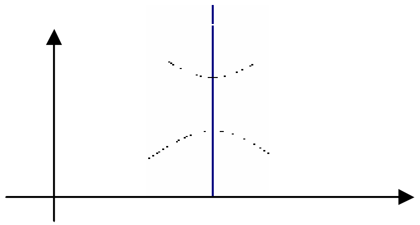
١) يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير س^{٢} (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني

أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير ص^{٢} موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

٢) لإيجاد معادلة القطع الناقص نحتاج إلى تحديد المحور الأكبر (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، هـ ، أ ، ب من خلال المعطيات .

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد

معادلة القطع الزائد	المركز	البؤرتان	الرأسان	المحور المستعرض (المحور البؤري) ومعادلته	المحور المرافق ومعادلته	الرسم البياني
$\frac{\text{س}^{٢}}{A^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(٠ ، ٠)	(جـ ، ٠) (- جـ ، ٠)	(A ، ٠) (-A ، ٠)	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	
$\frac{\text{ص}^{٢}}{A^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(٠ ، ٠)	(٠، جـ) (٠، - جـ)	(٠ ، A) (٠ ، - A)	(محور الصادات) ومعادلته س = ٠	(محور السينات) ومعادلته ص = ٠	
$\frac{(\text{س} - \text{د})^{٢}}{A^{٢}} - \frac{(\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$	(د ، هـ)	(جـ + د ، هـ) (- جـ + د ، هـ)	(A + د ، هـ) (- A + د ، هـ)	S // ومعادلته ص = هـ	X // ومعادلته س = د	

$\frac{(ص - هـ)^٢}{A^٢} - \frac{(س - د)^٢}{ب^٢} = ١$	(د ، هـ)	(د ، جـ + هـ) (د ، - جـ + هـ)	(د ، A + هـ) (د ، - A + هـ)	X // ومعادلته س = د	S // ومعادلته ص = هـ	

* البعد بين البؤرتين = ٢ جـ = البعد البؤري   * البعد بين الرأسين = ٢ A

جـ^٢ = ب^٢ + A^٢ حيث A ، ب ، جـ : L

* يمكننا تحديد المحور المستعرض للقطع الزائد من الصورة القياسية لهذا القطع ، فإذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير س^٢ (مثلاً) موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور السيني . أما إذا كان معامل المقدار الذي يحوي المتغير ص^٢ موجباً فإن المحور المستعرض يكون موازياً (منطبقاً) للمحور الصادي .

* لإيجاد معادلة القطع الزائد نحتاج إلى : تحديد المحور المستعرض (تقع عليه البؤرتان) ثم إيجاد د، ه ، أ ، ب من خلال المعطيات .

معادلة الدرجة الثانية في الصورة :
0س^٢ + بَ س ص + جـَ ص^٢ + دَ س + هـَ ص + وَ = ٠
تُمثل

قطعاً مكافئاً
إذا كان 0× جـَ = ٠
بمعنى أن 0، جـَ أحدهما يساوي الصفر

قطعاً ناقصاً
إذا كان 0× جـَ > ٠
بمعنى أن 0، جـَ لهما نفس الإشارة

قطعاً زائداً
إذا كان 0× جـَ < ٠
بمعنى أن 0، جـَ لهما إشارتين مختلفتين

الفصل الرابع الهندسة الفراغية

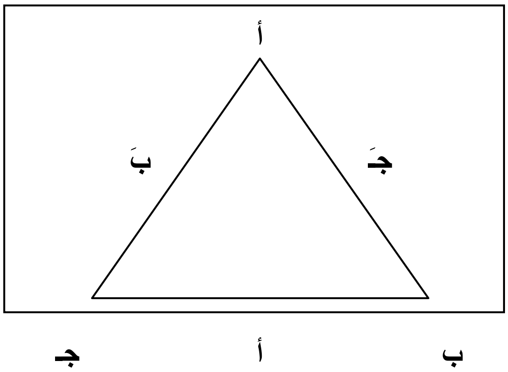
علم الهندسة الفراغية يبنى على مجموعة من المسلمات والنظريات والنتائج والتي يجب التعرف عليها وسنسرد هنا العديد منها:

١) أي نقطتين في الفراغ يمر بهما مستقيم واحد فقط.
٢) يتعين المستوى بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة أو مستقيمان متقاطعان أو مستقيم ونقطة خارجة عنه أو مستقيمين متوازيين.
٣) المستوى يحوي ثلاث نقط على الأقل ليست على استقامة واحدة
٤) المستوى هو ذلك السطح الذي إذا اختيرت نقطتان عليه فالمستقيم المار بهما يقع بأكمله في المستوى (منطبق على ذلك السطح).
٥) إذا اشترك مستقيم ومستوى في نقطتين فالمستقيم يقع بكامله في المستوى.
٦) يتقاطع المستويان في مستقيم يعرف بخط تقاطعهما المشترك.
٧) إذا اشترك مستويان في نقطة فلا بد أن تقع على خط تقاطعهما ولا بد من أنهما متقطعان..
٨) من نقطة خارج مستقيم لا يمكن رسم إلا مستقيم واحد يوازي المستقيم المفروض
٩) المستقيمان اللذان لا يلتقيان أما أن يكونا متوازيين إذا جمعهما مستوى واحد وإلا فإنهما متخالفان
١٠) تقاس الزاوية بين المستقيمين المتخالفين برسم مستقيم يوازي أحدهما من نقطة على الآخر (أتفق على الزاوية الحادة) .
١١) إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة فإنهما منطبقان.
١٢) المستقيم ل يوازي المستوى س إذا كان ل $\cap$ س = Φ أي لا يلتقيا
١٣) إن لم يكن ل // س فإنه يقطعه في نقطة ب مثلاً.
١٤) يتوازى المستويان إذا اشتركا في ثلاث نقاط (منطبقان) أو لا يلتقيا مهما امتدا (س $\cap$ ص =) .
١٥) إذا وازى مستقيم ل خارج المستوى س مستقيماً في المستوى س فإن ل // س.
١٦) إذا وازى مستقيم ل مستوى س فكل مستوى يمر بالمستقيم ل يقطع المستوى س في مستقيم ك فإن ل // ك.
١٧) إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطا تقاطعه معهما متوازيان.
١٨) المستقيم العمودي على مستقيمين في مستوى واحد يكون عمودي على مستوييهما أو عمودي على مستقيمين عند نقطة تقاطعهما.
١٩) المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان.
٢٠) المستقيمان المتوازيان إذا كان أحدهما عمودي على مستوى فالآخر عمودي عليه.
٢١) إذا توازى مستقيمان فالمستوى المار بأحدهما يكون موازياً الآخر
٢٢) إذا قطعت ثلاثة مستويات متوازية بمستقيمين فإن أطوال القطع المستقيمة المحصورة بينهما تكون متناسبة.
٢٣) المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان.
٢٤) إذا مر مستويان بمستقيمين متوازيين فإن خط تقاطع المستويين يوازي كلاً من المستقيمين المتوازيين.
٢٥) إذا وازى مستقيمان متقاطعان مستقيمين آخرين متقاطعين فالزاوية بين المستقيمين الأولين مساوية للزاوية بين الآخرين أو مكملة لها.
٢٦) إذا كان مستقيم عمودي على مستوى فكل مستوى يمر بهذا المستقيم يكون عمودياً على المستوى.
٢٧) إذا تعامد مستويان ووجد مستقيم في أحدهما عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عمودي على المستوى الآخر.
٢٨) المستويان المتقاطعان وعمودان على مستوى ثالث فإن خط تقاطعهما يكون عموديا على المستوى الثالث.
٢٩) تعرف الزاوية بين مستويين بالزاوية الزوجية بينهما وتقاس بالزاوية المحصورة بين العمودين المقامين من نقطة على خط تقاطعهما.
٣٠) إذا كانت الزاوية الزوجية بين مستويين قائمة كان المستويان متعامدين، والعكس صحيح.

أولاً قوانين الهندسة المستوية (المساحات والمحيطات)

١ – المثلث المساحة =
- ½ القاعدة × الارتفاع
- ½ حاصل ضرب أي ضلعين × جا الزاوية المحصورة بينهما
- $\sqrt{ح (ح - أ) (ح - ب) (ح - حـ)}$

حيث ح = نصف المحيط أ طول الضلع المقابل الزاوية أ



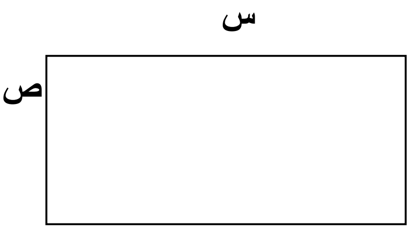
في حالة المثلث المتطابق الأضلاع

المساحة = $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ل^{٢} حيث ل طول ضلعه

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

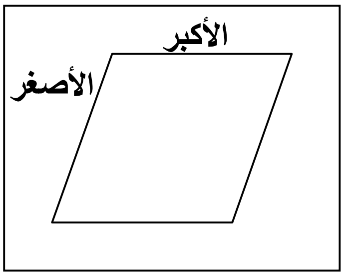
٢- المربع المساحة = ل^{٢} (حيث ل طول ضلعه)

المحيط = ٤ × طول الضلع



٣- المستطيل المساحة = الطول × العرض = س × ص

المحيط = ٢ (الطول + العرض) = ٢ (س + ص)



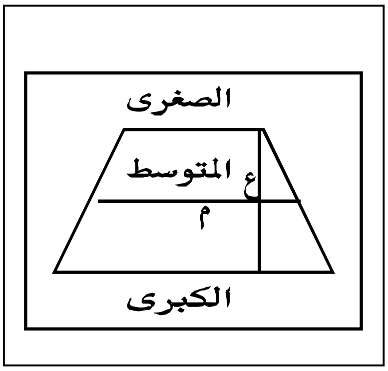
٤ - المعين المساحة = القاعدة × الارتفاع

= ½ حاصل ضرب طولي قطريه

المحيط = ٤ × طول الضلع

٥ – متوازي الأضلاع المساحة = القاعدة × الارتفاع

المحيط = ٢ (طول الضلع الأكبر + طول الضلع الأصغر)



٦ – شبه المنحرف

المساحة= ½ مجموع القاعدتين × الارتفاع

= القاعدة المتوسط × الارتفاع

محيط شبه المنحرف = مجموع أطوال أضلاعه

٧ – مساحة أي شكل رباعي = ½ حاصل ضرب طولا قطرين × حا الزاوية المحصورة بينهما

٨ ــ مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ ل^{٢} ظا $\frac{هــ}{ن}$ (^٨هــ = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠}{ن}$)

(ن عدد أضلاع ل طول الضلع)

= $\frac{ن}{٤}$ ل٢ ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا ($\frac{٣٦٠}{ن}$)

حيث نق نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

٩- المكعب المساحة الكلية = ٦ ل^{٢} حيث ل طول حرفه (ضلعه)

حجمه = ل^{٣}

١٠- الدائرة المساحة = ط نق^{٢}

المحيط = ٢ ط نق

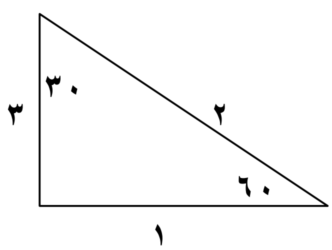
حيث نق نصف القطر ط = $\frac{٢٢}{٧}$ أو ٣,١٤

١١ ـ قاعدة هامة نظرية فيثاغورس

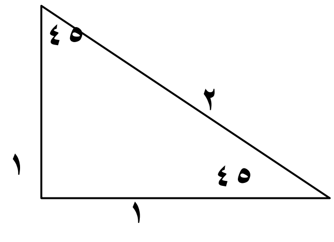
في المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعى طولي الضلعين الآخرين

| أ ج |^{٢} = | أ ب |^{٢} + | ب ج |^{٢}

١٢- المثلث الثلاثي الستيني



١٣- المثلث القائم المتطابق الضلعين



المنشور

تعريفه :- هو كثيروجوه لـه قاعدتان متوازيتـان ومتطابقتـان وكـل منهمـا مـضلع والأوجـه الجانبيـة متوازيـات أضلاع

ملاحظات

١ – الأحرف الجانبية للمنشور متساوية الطول ومتوازية .

٢ – يسمى المنشور حسب عدد أضلاع القاعدة .

٣ – ارتفاع المنشور : هو البعد بين قاعدتيه أو المستقيم العمودي على كلاً من قاعدتيه .

٤ - المنشور القائم : تكون الأحرف الجانبية عمودية على القاعدتين الارتفاع يساوي الحرف الجانبي والأوجه الجانبية مستطيلات .

٥ – المنشور المائل : هو الذي تكون الأحرف الجانبية مائلة على قاعدتيه والارتفاع = طول الحرف × جاهـ (هـ زاوية ميل الأحرف على القاعدة)

تعريف المقطع القائم : هو سطح ناتج عن تقاطع مستو يعامد أحرف المنشور

ملحوظة : إذا قطع منشور بمستوى يوازي أحد أحرفه الجانبية (أو أحد أوجهه الجانبية فإن المقطع الناتج يكون متوازي أضلاع)

حالات خاصة من المنشور

١ –إذا كان المنشور رباعي قائم قاعدته مستطيل سمى متوازي مستطيلات

٢ - إذا كان المنشور رباعي مائل قاعدته متوازي أضلاع سمى متوازي سطوح

٣ - إذا كان المنشور رباعي قائم جميع أوجهه مربعات (أو أحرفه كلها متساوية) سمى مكعب

ملخص قوانين المنشور

المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المنشور	مجموع مساحات أوجه أو محيط المقطع القائم × طول الحرف الجانبي	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين	مساحة المقطع القائم × طول الحرف الجانبي
المنشور القائم	محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع

تمـــــارين

١ – أو جد مساحة الخماسي المنتظم الذي طول ضلعه ل سم ؟

الحل:-

$$\text{مساحة المضلع المنتظم} = \frac{\text{ن}}{٤} \times \text{ل}^{٢} \times \text{ظتا} \frac{١٨٠}{\text{ن}}$$

$$\text{مساحة الخماسي المنتظم} = \frac{٥}{٤} \text{ل}^{٢} \text{ظتا} \frac{١٨٠}{\text{ن}}$$

$= \frac{٥}{٤}$ ل^{٢} ظتا ٣٦° ⎫ متممة

$= \frac{٥}{٤}$ ل^{٢} ظا ٥٤° ⎭

= ١,٧٢ ل^{٢} سم^{٢}

٢ ـ أحسب المساحة الجانبية والكلية لمنشور خماسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٢٥سم ؟

الحل :-

مساحة القاعدة (خماسي منتظم) $= \frac{ن}{٤}$ ل^{٢} ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$ $= \frac{٥}{\cancel{٤}} \times \overset{٢٥}{\cancel{١٠٠}} \times$ ظتا $\frac{١٨٠}{٥}$

= ١٢٥ ظتا ٣٦° = ١٢٥ ظا ٥٤°

= ١٧٢ سم^{٢}

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × طول الارتفاع

= (٥ × ١٠) × ٢٥ = ١٢٥٠سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

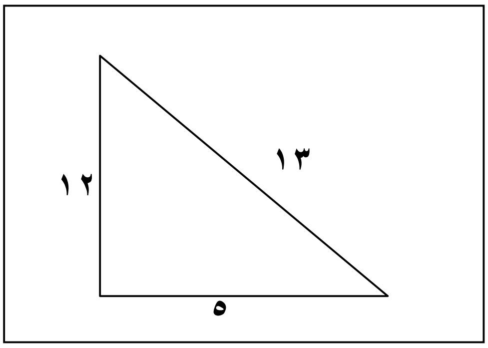
= ١٢٥٠ + ٢ × ١٧٢ = ١٢٥٠ + ٣٤٤

= ١٥٩٤ سم^{٢}

٣- منشور ثلاثي مائل طول حرفه الجانبي ٦سم وقاعدته مثلث اضلاعه ١٣سم ، ١٢سم ، ٥سم إذا كانت مساحته الكلية ٢٤٠ سم^{٢} فكم محيط مقطعه القائم ؟

الحل :-

(١٢)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩ = (١٣)^{٢}



المثلث قائم الزاوية

مساحة القاعدة (المثلث) = ½ طول القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم^{٢}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

٢٤٠ = المساحة الجانبية + ٦٠

المساحة الجانبية = ٢٤٠ – ٦٠ = ١٨٠سم^{٢}

المساحة الجانبية لمنشور مائل = محيط المقطع القائم × طول الحرف

١٨٠= محيط المقطع القائم × ٦ محيط المقطع القائم = $\frac{١٨٠}{٦}$ = ٣٠

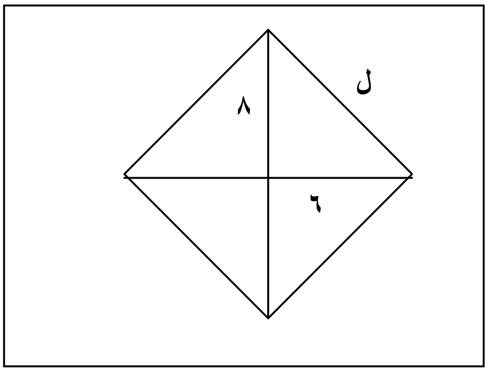
٤ – منشور قائم ارتفاعه ٤سم وقاعدته على شكل معين قطراه ١٢سم ، ١٦ سم . كم مساحته الكلية ؟

الحل

مساحة القاعدة (المعين) = ½ حاصل ضرب طولي قطرية

=½ × ١٢ × ١٦ = ٩٦ سم^{٢}

من فيثاغورث : ل^{٢} = ٦^{٢} + ٨^{٢} = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ل (طول ضلع القاعدة) = ١٠سم



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= (٤ × ١٠) × ٤ = ١٦٠ سم^{٢}

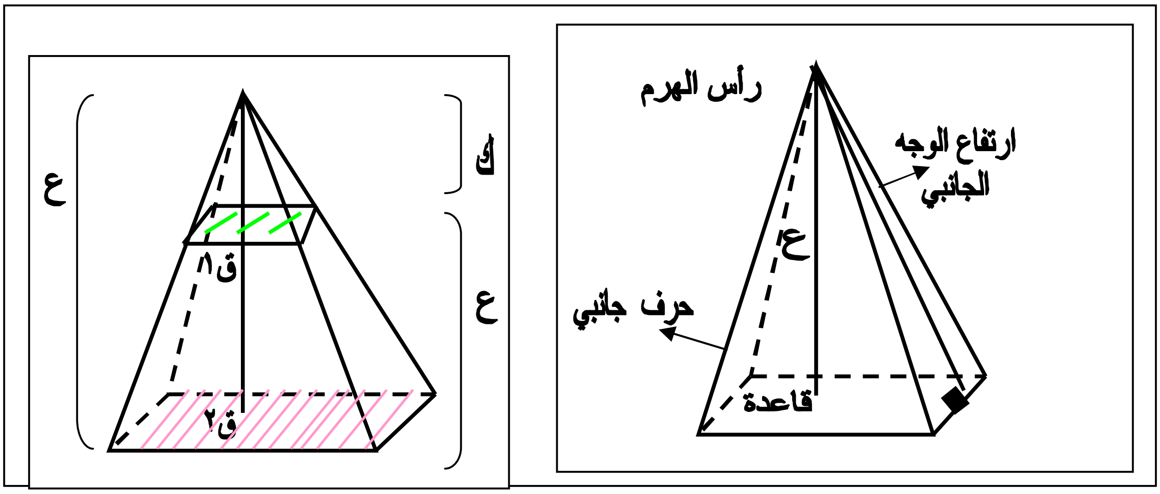
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × مساحة القاعدة

= ١٦٠ + ٢ × ٩٦ = ١٦٠ + ١٩٢

= ٣٥٢ سم^{٢}

الهرم

تعريفه : هو كثير وجوه أحد وجوهه مضلع وبقيه الوجوه مثلثات تلتقي في نقطه واحدة هي رأس الهرم



ملاحظات :

الهرم القائم هو هرم قاعدته مضلع منتظم خواصه

١ – جميع الأوجه الجانبية متطابقة .   ٢- ارتفاعه هو البعد بين رأسه ومركز قاعدته .

٣ – ارتفاعات أوجهه الجانبية متساوية في الطول .

الهرم الثلاثي يسمى رباعي وجوه وإذا كانت حروفه متساوية في الطول سمى رباعي وجوه منتظم .

في رباعي الوجوه المنتظم : أوجهه الاربعه (بما في ذلك القاعدة) مثلثات متطابقة الأضلاع وجميعها متطابقة .

قوانين الهرم

المجسم	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
الهرم القائم	½ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع
الهرم الناقص	½ مجموع محيط القاعدتين × ارتفاع الوجه الجانبية	المساحة الجانبية + مجموع مساحة القاعدتين	ح = $\frac{1}{3}$ عَ($ق_1$+$ق_2$ + $ق_1$ $ق_2$) حيث عَ الارتفاع $ق_1$ $ق_2$ مساحة القاعدتين

ملاحظات

إذا قطعت الاحرف الجانبية للهرم بمستو // قاعدته فإن الجزء المحصور بين قاعدة الهرم والمستوي القاطع يسمى هرم ناقص متوازي القاعدتين

بحيث $\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{(ع - عَ)^2}{ع^2}$

بحيث

ق١ مساحة القاعدة الصغرى

ق٢ مساحة القاعدة الكبرى

ع ارتفاع الهرم الكامل

عَ ارتفاع الناقص

١- ما هي المساحة الكلية الرباعي وجوه منتظم طول حرف ل ؟

الحل :- مساحة الوجه الواحد = مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ل

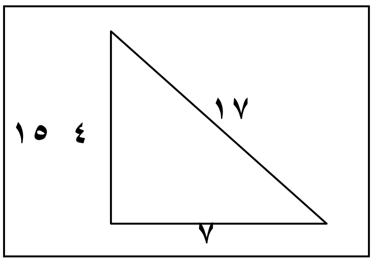
$= \frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^2$

المساحة الكلية = ٤ × مساحة الوجه الواحد

$= ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^2 = \sqrt{٣}\ ل^2$ سم^2

٢ – هرم ثلاثي ارتفاعه ١٥سم وقاعدته مثلث أضلاعه ٧سم ، ١٧سم ، ٤ ١٥

فما هو حجمه ؟



الحل :- $٧^2 + (٤\sqrt{١٥})^2 = ٤٩ + ١٤٠ = ٢٨٩ = ١٧^2$

القاعدة مثلث قائم

مساحة القاعدة $= \frac{1}{2} \times ٧ \times ٤\sqrt{١٥} = ١٤\sqrt{١٥}$ سم^2

حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \times ١٤\sqrt{١٥} \times ١٥ = ٧٠\sqrt{١٥}$ سم^3

الحل :- مساحة القاعدة (المعين) = ½ حاصل ضرب طولي قطريه

= ½ × ٦ × ٨ = ٢٤سم ^{٢}

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٢٤ × ١٦ = ١٢٨ سم ^{٣}

٣ - قطع هرم مساحة قاعدته ١٩٦سم ^{٢} بمستوي يوازي القاعدة ويبعد عنها مسافة ١٠ سم إذا كانت مساحته المقطع الناتج ١٤٤سم ^{٢} فأحسب ارتفاع الهرم وحجمه .

الحل :- ق١ : (مساحة المقطع) = ١٤٤ ، ق٢ : (مساحة القاعدة) = ١٩٦

عَ : البعد بين المقطع والقاعدة = ١٠ ، ع : ارتفاع الهرم = ؟

$\frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{(ع - عَ)}{ع^٢}$ $\frac{١٤٤}{١٩٦} = \frac{(ع - ١٠)^٢}{ع^٢}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

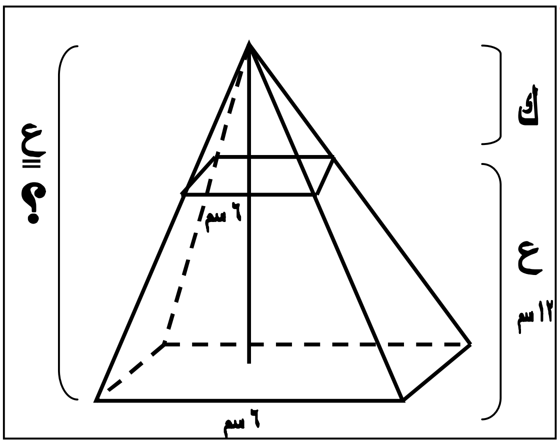
$\frac{١٢}{١٤} = \frac{ع - ١٠}{ع}$ ١٤ع - ١٤٠ = ١٢ع

٢ع = ١٤٠ ع = ٧٠سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ١٩٦ × ٧٠ = ٤٥٧٣,٣سم ^{٣}

٤ – في هرم ناقص الارتفاع ١٢سم والقاعدتان مربعان ضلعهما ٦سم ، ١٦سم أحسب حجم الهرم الناقص وما حجم الهرم الكامل ؟



الحل :- ق١ = ٣٦ مساحة القاعدة الصغيرة

ق٢ = ٢٥٦ مساحة القاعدة الكبرى

(مساحة المربع = ل ^{٢} حيث طول ضلعه)

عَ = ١٢ ارتفاع الهرم الناقص

حجم الهرم الناقص = $\frac{١}{٣}$ عَ (ق$_١$ + ق$_٢$ + $\sqrt{ق_١ ق_٢}$)

$\frac{١}{٣}$ × ١٢ (٣٦ + ٢٥٦ + ٩٦) = ٤ × ٣٨٨ = ١٥٥٢ سم^٣

$\frac{ق_١}{ق_٢} = \left(\frac{ع - عَ}{ع}\right)^٢$ $\frac{٣٦}{٢٥٦} = \frac{(ع - ١٢)^٢}{ع^٢}$ بجذر الطرفين

$\frac{٦}{١٦} = \frac{ع - ١٢}{ع}$ $\frac{٣}{٨} = \frac{ع - ١٢}{ع}$

٨ع − ٩٦ = ٣ع ⇐ ٥ع = ٩٦ ⇐ ع = $\frac{٩٦}{٥}$ ١٩,٢سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

الكامل = $\frac{١}{٣}$ × ٢٥٦ × ١٩,٢ = ١٦٣,٤ سم^٣

٥ – المساحة الكلية لهرم سداسي ناقص وقائم ٢٧٦ سم^٢ إذا كان طولا ضلعي قاعدته ٦سم ، ٨سم ، أحسب ارتفاع الوجه الجانبي

الحل :- مساحة السداسي المنتظم = $\frac{ن}{٤}$ ل^٢ ظتا $\frac{١٨٠}{ن}$ ن = ٦

مساحة القاعد الصغرى ق١ = $\frac{٦}{٤}$ × ٣٦ × ظتا $\frac{١٨٠}{٦}$ (ل = ٦سم)

= ٥٤ ظتا ٣٠° = ٥٤ظتا ٦٠°

=٥٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢

مساحة القاعدة الكبرى ق٢ = $\frac{٦}{٤}$ × ٦٤ × ظتا $\frac{١٨٠}{٦}$ (ل = ٨سم)

= ٩٦ ظتا ٣٠ = ٩٦ ظا ٦٠ = ٩٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢

المساحة الكلية للهرم السداسي القائم الناقص = مساحة الجانبية + مجموع مساحتي قاعدتيه

٢٧٦ $\sqrt{٣}$ = المساحة الجانبية + ٥٤ $\sqrt{٣}$ + ٩٦ $\sqrt{٣}$

المساحة الجانبية = ٢٦٧ $\sqrt{٣}$ - ١٥٠ $\sqrt{٣}$

= ١٢٦ $\sqrt{٣}$ سم٢

المساحة الجانبية = ½ مجموع محيطي القاعدتين × ارتفاع الوجه الجانبي

١٢٦ $\sqrt{٣}$ = ½ (٦ × ٦ = ٦ × ٨) × ارتفاع الوجه الجانبي

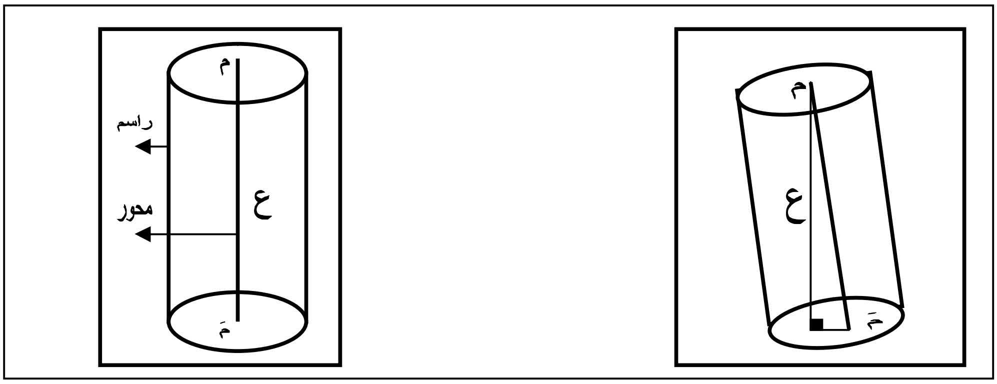
١٢٦ $\sqrt{٣}$ = ٤٢ × ارتفاع الوجه الجانبي

ارتفاع الوجه الجانبي = $\frac{١٢٦ \sqrt{٣}}{}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

الاسطوانة والمخروط

أولاً الاسطوانة الدائرية القائمة :

تعريف :- هي الجسم الذي يتولد من دوران مستطيل دوره كاملة حول أحد أضلاعه .



ملاحظات هامة

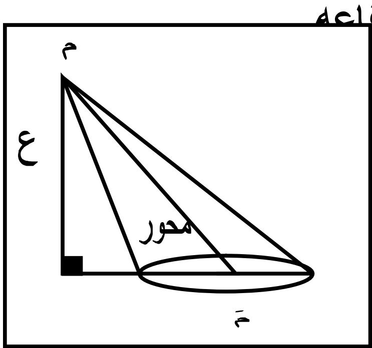
١- إذا قطعت الاسطوانة الدائرية القائمة بمستو يوازي القاعدة فالمقطع الناتج هو قرص دائري مساحته تساوي مساحة القاعدة

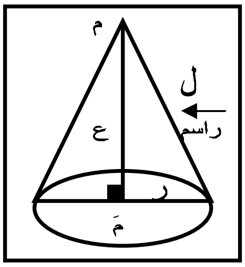
٢- إذا قطعت الاسطوانة الدائرية القائمة بمستو يحتوي محورها فالمقطع الناتج هو مستطيل مساحته (٢رع) حيث ر نصف قطر الاسطوانة ، ع ارتفاعها .

ثانياً : المخروط :-

تعريفه : هو جسم له قاعدة عبارة عن سطح مستو دائري وسطحه الجانبي أملس غير مستو

والمخروط الدائري القائم :- يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة . أو من دوران مثلث متساوى الساقين دورة كاملة حول ارتفاعه





ملاحظات هامة :-

١-إذا قطع المخروط الدائري القائم بمقطع يوازي القاعدة فالمقطع الناتج هو قرص دائري

تتحدد مساحته من العلاقة :

$$\frac{\text{مساحة المقطع}}{\text{مساحة القاعدة}} = \frac{(ع - عَ)^2}{ع^2}$$

حيث عَ هي البعد بين المقطع والقاعدة (ارتفاع المخروط الدائري القائم الناقص)

١ – إذا قطع المخروط الدائري القائم بمستو يحتوي المحور فالمقطع الناتج هو مثلث متطابق الضلعين مساحته تساوي ½ ر ع

ملخص قوانين الاسطوانة والمخروط

الحجم	المساحة الكلية	المساحة الجانبية	المجسم
مساحة القاعدة × الارتفاع = ط ر^2 × ع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين ٢ ط ر ع + ط ر^2	محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ ط ر ع	الاسطوانة الدائري القائمة
$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ ط ر^2 ع	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ط رع + ط ر٢	½ محيط القاعدة × طول الراسم = ط ر ل	المخروط الدائري القائم
$\frac{1}{3}$ ط ع (ر$_1^2$ + ر$_2^2$ + ر$_1$ر$_2$)	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	½ مجموع محيطي القاعدتين × طول الراسم ط (ر$_1$+ر$_2$)ل حيث ر$_1$،ر$_2$ نصف قطري قاعدتيه ع ارتفاعه ل طول راسمه	المخروط الدائري القائم الناقص

١ – طول أنبوبة معدنية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة أ م . إذا كان قطرها الخارجي ٤٠ سم و الداخلي ٣٠ سم. فما حجم المعدن ؟

الحل :- حجم المعدن = حجم الاسطوانة الخارجية – حجم الاسطوانة الداخلية

= ط ر^2 ع – ط ر^2 ع

= ط (٢٠)^2 × ١٠٠ – ط (١٥)^2 × ١٠٠

= ط × ٤٠٠ × ١٠٠ – ط × ٢٢٥ × ١٠٠

= ٤٠٠٠٠ ط – ٢٢٥٠٠ ط = ١٧٥٠٠ ط سم^3

٢ – قطعت اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٣٨سم بمستو يمر بمحورها م ن فكانت مساحة المقطع الناتج ٥٣٢سم^2 . أحسب حجم الاسطوانة ومساحة سطحها الجانبي (ط = $\frac{22}{7}$) ؟

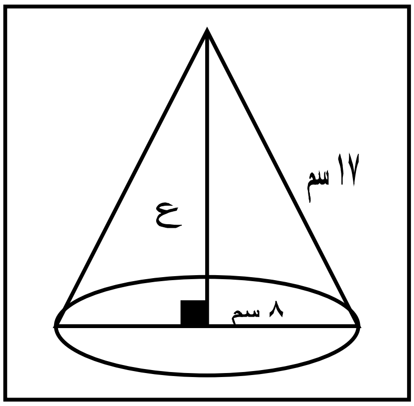
الحل :- المقطع الناتج هو مستطيل مساحته ٢ ر ع

⇐ ٢ × ٣٨ر = ٥٣٢ ⇐ ٧٦ر = ٥٣٢ ⇐ ر = $\frac{532}{76}$ = ٧سم

حجم الاسطوانة = ط ر٢ ع = $\frac{22}{7}$ × ٤٩ × ٣٨ = ٥٨٥٢سم^3

مساحة السطح الجانبي = ٢ ط ر ع = ع × $\frac{22}{7}$ × ٧ × ٣٨ = ١٦٧٢ سم^2

٣ – في مخروط دائري قائم طول نصف قطر القاعدة ٨سم وطول الراسم ١٧سم أحسب الحجم والمساحة الكلية .



الحل : - من فيثاغورث

ع^{٢} = ١٧^{٢} – ٨^{٢} = ٢٨٩ – ٦٤

= ٢٥٥ ⇐

ع =√ ٢٢٥ = ١٥ سم

حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ ط ر^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ ط × ٦٤ × ١٥ = ٣٢٠ ط سم^{٣}

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ط ر ل + ط ر^{٢}

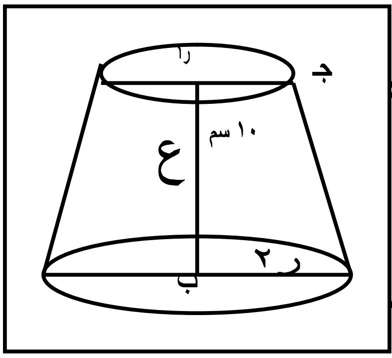
= ط × ٨ × ١٧ + ط × ٦٤ = ١٣٦ط + ٦٤ط = ٢٠٠ ط سم^{٢}

الكره

تعريف الكره :- هي جسم محدود بسطح منحني مقفل جميع نقطة على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة (م) تسمى المركز .

((ويسمى البعد الثابت نصف قطر الكره ورمزه ر))

المنطقة الكروية :- هو الجزء المحصور بين مستويين متوازيي



وارتفاعها (ع) هو البعد بين القاعدتين

القبة الكروية : إذا قطعت الكرة بمستو فإن كلاً من الجزأين النـ كروية .

القطاع الكروي

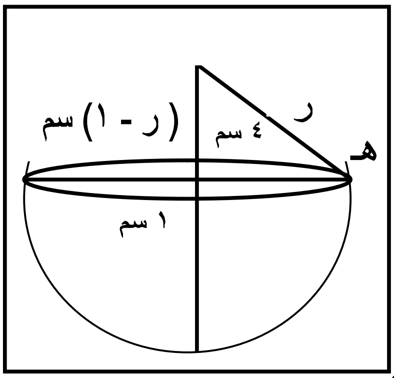
هو جزء من كره مكون من قبة كروية ومخروط دائري قائم رأسه مركز الكره وقاعدته هو قاعدة القبة

المجسم	المساحة	الحجم	ملاحظات
الكره	٤ ط $ر^{٢}$	$\frac{٤}{٣}$ ط $ر^{٣}$	في جميع القواسين هـ نصف قطر الكره
القبة الكروية	٢ ط ر ع	$\frac{١}{٣}$ ط $ع^{٢}$ (٣ر – ع)	
المنطقة الكروية	٢ ط ر ع	هو الفرق بين حجم قين	

تمارين على الكرة

قبه كرويه ارتفاعها ٢سم وطول قطرها ٨سم أوجد ما يلي :-

١ – مساحة القبة الكروية ٢ – حجم القبة الكروية



الحل :-

حسب فيثاغورث :

$ر^{٢}$ = ٢٤ + (ر - ٢ $)^{٢}$

$ر^{٢}$ = ١٦ + $ر^{٢}$ – ٤ر + ٤

⇐ ٤ر = ٢٠ ⇐ ر = ٥ (نصف قطر الكره)

مساحة القبة الكروية = ٢ ط ر ع

= ٢ ط × ٥ × ٢ = ٢٠ ط $سم^{٢}$ # ١

حجم القبة الكروية = $\frac{ط}{٣}$ $ع^{٢}$ (٣ر – ع)

= $\frac{ط}{٣}$ × ٤ (١٥ – ٢)

= $\frac{ط}{٣}$ × ٤ × ١٣ = $\frac{٥٢}{٣}$ ط $سم^{٣}$ # ٢

الباب الثالث (الجَبْر)

جَبْر كلمة عربية وهو فرع من علم الرياضيات وجاء اسمه من كتاب عالم الرياضيات والفلك والرحالة محمد بن موسى الخورازمي (الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة) الذي قدم العمليات الجبرية التي تنظم إيجاد حلول للمعادلات الخطية والتربيعية.

ويشكل علم الجبر أحد الفروع الثلاثة الأساسية في الرياضيات إضافة إلى الهندسة الرياضية والتحليل الرياضي ونظرية الأعداد والتباديل والتوافيق. ويهتم هذا العلم بدراسة البني الجبرية والتماثلات بينها، والعلاقات والكميات.

والجبر هو مفهوم أوسع وأشمل من الحساب أو الجبر الابتدائي. فهو لا يتعامل مع الأرقام فحسب، بل يصيغ التعاملات مع الرموز والمتغيرات والفئات كذلك. ويصيغ الجبر البدهيات والعلاقات التي بواسطتها يمكن تمثيل أي ظاهرة في الكون. ولذا يعتبر من الأساسيات المنظمة لطرق البرهان.

يقسم علم الجبر لعدة فروع.

الجبر الابتدائي، وفيه يتم دراسة خصائص الأعداد الحقيقية، وتستخدم رموز للتعبير عن المتغيرات والثوابت، وتتم دراسة القواعد التي تضبط المعادلات والتعابير الرياضية المكونة من هذه الرموز. ويتم تدريسه غالبا في التعليم الثانوي إضافة إلى إعطاء أفكار أساسية حول بقية مواضيع الجبر التجريدي في الجبر الابتدائي تتم دراسة جمع وضرب الأعداد، ودراسة كثيرات الحدود وطرق إيجاد الجذور لكثيرات الحدود هذه.

الجبر التجريدي، وفيه تتم دراسة البنى الجبرية كالزمر (أو المجموعات) والحلقات والحقول (أو المجالات)، والفضاء الشعاعي (أو فضاء المتجهات أو الفراغ الاتجاهي) الذي يمثل عصب دراسة الجبر الخطي. ويتم بعد ذلك في الجبر التجريدي، عملية تجريد للعملية الحسابية فيستعاض عن الأعداد برموز تدعى في الجبر متغيرات أو عناصر لمجموعة ما. عندئذ تصبح عمليات الجمع والضرب مجرد أمثلة عن المؤثرات الجبرية والعمليات الجبرية الثنائية، وتعريف هذه العمليات يقودنا إلى بنى جبرية مثل الزمر، والحلقات، والحقول.

الجبر الخطى، وهو مهتم بدراسة المتجهات، الفراغات الخطية، التحويلات الخطية، ونظم المعادلات الخطية. تعتبر فراغات المتجهات موضوعا مركزيا في الرياضيات الحديثة؛ لذا يعتبر الجبر الخطي كثير الاستعمال في كلا من الجبر المجرد والتحليل الدالي. الجبر الخطي له أيضاً أهمية قصوى في الهندسة التحليلية كما أن له تطبيقات شاملة في العلوم الطبيعة والعلوم الاجتماعية.

الجبر الشامل، وفيه تتم دراسة الخواص العامة لكل البنى الجبرية.

جبر الأعداد، وهو يهتم بدراسة خواص الأعداد من الناحية النظرية.

الجبر الهندسي، ويهتم بدراسة تجريد قواعد الهندسة.

جبر التوافيق، ويهتم بدراسة التباديل والتوافيق.

جبر الحاسوب، وفيه تتم دراسة الخوارزميات الخاصة بالتعامل مع الكائنات الرياضية

الفصل الأول الأعداد

مقدمة

الأعْدادُ لغةً هي جمعُ العَدَدِ، والعددُ هو "مقدار ما يُعَدُّ، ومَبْلَغُهُ."[1] أي أن العدد هو تعبير رمزي أو اصطلاحي أو كتابي لمقدار ما يعد من الكائنات والأشياء.

أما الأرقامُ لغةً فهي جمع الرَّقْمُ، والرَّقْمُ في علم الحساب: "هو الرمز المستعمل للتعبير عن أحد الأعداد البسيطة، وهي الأعداد التسعة الأولى والصفر، [أو ما رُكِّبَ منها]."[2] إذاً الرقم هو رمزٌ يعبر عن العدد الذي عادةً ما يعبر عنه بواسطة تركيب معين من الأرقام أو بواسطة ما يكتب كتابةً. ففي القرآن الكريم مثلاً لا يوجد آيةٌ كتب فيها العدد بشكل رقمي (أي على شكل رمز) ولكن عبر عنها بشكل كتابي. ففي قوله تعالى في سورة البقرة الآية ١٩٦: (فمنْ لَّمْ يجِدْ فَصِيَامُ ثَلاَثَةِ أَيَّامٍ في الحجِ وسبعةٍ إذا رَجعتُمْ، تِلكَ عَشَرَةٌ كَامِلَةٌ)، نجدُ أن الأعداد – كما هو الحال في جميع سور القرآن الكريم – قد كتبت كتابةً.[3]

أنواع الأعداد وتطورها

جرت العادة على أن تقسم مجموعات الأعداد الأكثر شيوعاً إلى ما يلي:[4]

١: مجموعة الأعداد الطبيعية (natural numbers):

ـ مجموعة أعداد العد (ع)= { ١، ٢ ، ٣ ، ٤، ٥ ، .... }

هي أقدم أعداد معروفة عبر التاريخ، وهي أول شكل أوجده الإنسان للتعبير عن المقادير والكميات. وهي الأعداد (٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ ،...إلخ).

٢) مجموعة الأعداد الصحيحة (integers): ص = { .... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...... }

وهي العدد صفر (٠)، والأعداد الطبيعية ونظائرها. ولذلك فإن الأعداد الصحيحة تضم ما يلي: الصفر (٠)، أعداد صحيحة موجبة (positive integers) وتسمى أحياناً بالأعداد الطبيعية (natural numbers) وهي (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ ،...)، وإلى أعداد صحيحة سالبة (negative integers) وهي (١-، ٢-، ٣-، ٤-، ٥-، ٦-،...).

لاحظ أن

(١) ص = $ص_+$ ∪ { ٠ } ∪ $ص_-$

(٢) الصفر ليس موجب ولا سالب

(٣) مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $ص_-$ = { -١ ، -٢ ، -٣ ، ....}

(٤) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص_+$ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ....}

٣: مجموعة الأعداد العادية أو النسبية (rational numbers) (ن)

هو العدد الذي يمكن وضعه على صورة كسر أعتيادى بسطه ومقامه أعداد صحيحة ومقامه لا يساوى الصفر

وهي أعداد مثل: $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{3}$ والتي يمكن أن تكتب كنسبة عددين صحيحين إلى بعضهما باستثناء أنه لا يمكن أن يكون المقام صفراً (٠).

لذلك فإن العدد الصحيح(٢) هو عددٌ نسبي لأن $2=\frac{2}{1}$. في الحقيقة إن كل الأعداد الصحيحة هي أعداد نسبية.

كل الأعداد النسبية يمكن أن تمثل بأعداد عشرية منتهية (terminating decimals) مثل: $\frac{3}{4}=0.75$ ، $\frac{3}{2}=1.5$ **أو بأعداد عشرية غير منتهية ودورية (nonterminating repeating decimals) مثل:**

$\frac{2}{3}=0.6666....$ ، $\frac{-4}{11}=-0.3636....$ ، $\frac{2}{15}=0.13333...$.

ملاحظات :-

(١) كل عدد صحيح هو عدد نسبى مقامه = ١ أى أن ص ⊂ ن

(٢) ط ⊂ ص ⊂ ن

٤: مجموعة الأعداد الحقيقية (real numbers) وهي تضم:

أ: الأعداد النسبية (rational numbers) وهي معرَّفة أعلاه.

ب: الأعداد الغير نسبية (irrational numbers): هي الأعداد التي لا يمكن أن تكتب كنسبة عددين صحيحين إلى بعضهما. وهي الأعداد التي تُمثل بأعداد عشرية غير منتهية وغير دورية (nonterminating nonrepeating decimals) ونظائرها. مثال على ذلك العدد πππππp =π٣,١٤١٥٩٢٧ والعدد $\sqrt{2}$ =١,٤١٤٢١٣٦، ونظائرهما: -٣,١٤١٥٩٢٧ ، -١,٤١٤٢١٣٦ .

ملاحظات

١ـ مجموعة أعداد العد مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية.

٢ـ الأعداد الزوجية هي التي تقبل القسمة على ٢ وأصغر عدد طبيعي زوجي هو الصفر ومن أمثلتها ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ....

٣ـ الأعداد الفردية هي الأعداد التي لاتقبل القسمة على ٢ وأصغرها الواحد ومن أمثلتها ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ....

٥ـ عند ضرب عددين أو أكثر فأن كل عدد يسمى عامل من عوامل حاصل الضرب

فمثلا ٢ × ٧ = ١٤ وعلى هذا فأن ٢ ، ٧ عاملان من عوامل ١٤ .

٦- إذا كانت عوامل حاصل الضرب متساوية فأن حاصل الضرب يسمى قوى العامل

فمثلا :- ٣ × ٣ = ٩ = (٣) ٢ يسمى العدد ٩ القوى الثانية للعامل ٣ ،

٧- لكل عدد أ لا يساوى الصفر يكون ا صفر = ١ فمثلا ٥ صفر = ١ ، (٤٥) صفر = ١

تعريف الأعداد المربعة

هي الأعداد التي يمكن تمثيلها بمجموعة من النقاط على شكل مربع مثل ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، .....

تعريف أخر:- هي تلك الأعداد التي تتكون من حاصل ضرب عاملين متساويين(القوى الثانية للأعداد)

فمثلاً

١× ١ = ١ ٢ × ٢ = ٤ ٣ × ٣ = ٩ ٤ × ٤ = ١٦ ٥× ٥ = ٢٥

الأعداد المربعة هي (١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩ ، ٦٤ ، ٨١ ، ....

تعريف الأعداد المكعبة

هي الأعداد التي يمكن تمثيلها بمجموعة من النقط على شكل مكعب

مثل (١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥ ، ....)

تعريف أخر :- هي تلك الأعداد التي تتكون من حاصل ضرب ثلاثة أعداد متساوية (القوى الثالثة للأعداد) .

فمثلا :-

١× ١ × ١ = ١ ٢ × ٢ × ٢ = ٨ ٣ × ٣ × ٣ = ٢٧

الأعداد المتماثلة هي:

الأعداد التي مجموع الأرقام ذات الرتبة الزوجية فيها يساوي مجموع الأرقام ذات الرتبة الفردية فيها فمثلا :

٢٤٢ متماثل لأن: مجموع الرقم (الأول و الثالث) = مجموع الرقم الثاني (٢ + ٢ = ٤)

والعدد :

٩ ٥ ٤ ٦ ٢ ٤ متماثل لأن : مجموع الرقم (الأول والثالث والخامس) = مجموع الرقم (الثاني والرابع والسادس) (٩ + ٤ + ٢ = ٥ + ٦ + ٤)

والعدد:

٥٤٤٥ متماثل لأن: مجموع الأرقام (الأول والثالث) = مجموع الأرقام (الثاني والرابع)

(٥ + ٤ = ٤ + ٥)

أما العدد: ٦٥٦ فغير متماثل لأن: مجموع الرقم (الأول والثالث) =/= الرقم الثاني

(٦ + ٦ =/= ٥)

ونلاحظ أن : الأعداد المتماثلة تقبل القسمة على الـ ١١

أي أن:

الأعداد المتماثلة هي مضاعفات العدد ١١

وبالتالي يمكن استنتاج قاعدة لقابلية القسمة على ١١ مفادها أن:

العدد الذي مجموع أرقامه فردية الرتبة = مجموع أرقامه زوجية الرتبة يقبل القسمة على ١١

***حالة خاصة ***

إذا كانت أرقام العدد متشابهة وعدد الأرقام زوجياً فإن العدد يقبل القسمة على ١١

الأعداد المثلثيةTriangular Numbers

يعرف العدد المثلثي (أو الثلاثي (T_n triangular number على أنه مجموع أول n عددا من الأعداد الصحيحة الموجبة، أي أن

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

متتابعة هذه الأعداد هي

١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٨ ، ٣٦ ، ٤٥ ، ٥٥ ،....................

خصائص العدد المثلثي

(1)مجموع عددين مثلثين متتابعين عدد مربع.
(2)كل عدد صحيح موجب يمكن كتابته كحاصل جمع ثلاثة أعداد مثلثية أو أقل.

العدد المثلثي في المتتابعات الهندسية

كان الرياضي سيربنسكي Sierpinski قد طرح سؤالا فيما إذا كان هناك أربعة أعداد مثلثية في تتابع هندسي أم لا. الرياضي بينيت Bennett قدم حدسه بالنفي على هذا التساؤل. في العام ٢٠٠٧ ميلادي أثبتت صحة هذا الحدس. أي أنه لا يوجد أربعة أعداد

مثلثية تمثل متتابعة هندسية .بالمناسبة يوجد ثلاثة أعداد مثلثية في تتابع هندسي وهي $(T_1, T_3, T_8) = (1, 6, 36)$.

الأعداد المتحابة

ابتكر عالم الرياضيات فيثاغورث زوجا من الأعداد المتحابة هما (٢٢٠ ، ٢٨٤) و كتعريف لعددين متحابين هما عددان مجموع قواسم أي منهما مساويا للعدد الأخر (طبعا عدد موجب) .
قواسم العدد ٢٢٠ هي : ١، ٢، ٤، ٥، ١٠، ٢٠، ١١، ٢٢، ٤٤، ٥٥، ١١٠ ومجموع هذه القواسم ٢٨٤ .

قواسم العدد ٢٨٤ هي : ١، ٢، ٤، ٧١، ١٤٢ ومجموع قواسم العدد ٢٨٤ هي ٢٢٠ .

وبالتالي العددان ٢٢٠ و ٢٨٤ عددان متحابان .

وقد حظيت الأعداد المتحابة باهتمام الكثير من العلماء حيث ابتكر عالم الرياضيات العربي ابن البنا في القرن الرابع عشر زوجا من الأعداد المتحابة هما ١٧٢٩٦ و ١٨٤١٦ وأعيد اكتشافها من قبل العالم الفرنسي بيير فيرمات سنة ١٦٣٦ م.

و في عام ١٦٣٨م ابتكر العالم الفرنسي ديكارت عددين متحابين هما ٩٣٦٣٥٨٤ و ٩٤٣٧٠٥٦.

و في عام ١٧٥٠م ابتدع الرياضي النمساوي اويلر واحد و ستون زوجا من الأعداد المتحابة و لكنها احتوت على خطأين فأصبح العدد واحد و خمسون زوجا من الأعداد المتحابة .

و كان للأعداد المتحابة دورا كبيرا في الحضارة الإسلامية وتوجد بكثرة في الكتابات الإسلامية الرياضية وأكدوا أن العددين المتحابين ٢٢٠ و ٢٨٤ لهما تأثير في الروابط أو إيجاد صداقة حميمة بين شخصين..

قاعدة الأعداد المتحابة:

ابتكر العالم المسلم ثابت ابن قرة قاعدة في إيجاد معادلة الأعداد المتحابة التي اهتم بها علماء الغرب بشكل ملحوظ عبر التاريخ.. والمعادلة هي:

إذا كان كل من س ، ص،ع أعداد أوليه و ن عدد صحيح طبيعي اكبر من ١فان:

س = ٣ × (٢^ن) - ١

ص = ٣ × (٢^(ن-١)) - ١

ع = ٩ × (٢^(٢ن-١)) - ١

فأن س،ص،ع أعداد فرديه مختلفة و ك = ٢^ن ×س×ص ، م= ٢^ن ×ع زوج من الأعداد المتحابة هما ك ، م

و هذا صحيح في حالة ما أخذنا ن = ٢ فان العددان المتحابان هما ٢٢٠ ، ٢٨٤

ولكن عندما ن=٣ فإننا نحصل على عددان غير متحابان .. وهذا يدل على أن القاعدة تنص على انه إذا وجد عددان متحابان فهما ك ، م...

في اعتقادكم هل من الممكن أن يأتي يوم تقام فيه علاقة بين شخصين بالاعتماد على معادلة ثابت ابن قره ؟ أم أن المجال مفتوح لعلاقة رياضية أخرى تسمح بإقامة علاقة بينهما ؟

الأعداد التامة

يعرّف العدد التام على أنه ذلك العدد الذي يساوي مجموع قواسمه باستثناء العدد ذاته. ويمكن القول - إذا لم نتقيد بهذا الاستثناء - أن مجموع قواسم العدد التام هو ضعف العدد ذاته.
وقد أمكن الآن التعرّف على الكثير من الأعداد التامة نذكر منها : ١، ٦ ، ٢٨ و ٤٩٦.

والمتمعن في الأعداد التي تم اكتشافها يلاحظ أن كلها أعداد زوجية. ومن هنا يطرح السؤال : هل كل الأعداد التامة أعداد زوجية؟ الجواب عن هذا السؤال لم يتضح بعد. ولم يتوقف الرياضيون عند هذا الحد في دراسة الأعداد التامة بل وسعوها وعرفوا مثلا ما يسمى بالأعداد المهيبة sublimes والأعداد القاصرة déficients (وهي التي يكون مجموع قواسمها أصغر منها) مثل ٢٧ والأعداد الزائدة abondants (وهي التي يكون مجموع قواسمها أكبر منها) مثل ٣٠.

أنواع الأعداد حسب الأصل الجغرافي

كان الإنسان القديم يقوم بعملية العد عن طريق وضع أثلام على الأشجار أو الأحجار لتسجيل مرور الأيام. فقام المصريون فيما بعد بالكتابة على ورق البَرْدي (**papyrus**) والمصنوع من القصب، وكتبت شعوب بلاد ما بين النهرين على الفخار الرطب. لقد استعملوا خطوطاً صغيرة (خَطّة) كرمز لأرقام الآحاد، وعلامات أخرى للعشرات وما بعدها.

وكان الرومان لا يزالون يستعملون خطوطاً صغيرة للأعداد من واحد حتى أربعة (IIII, III, II,I)، لكنهم - ومنذ حوالي ألفي عام- استخدموا علامات جديدة على شكل حروف للعشرات والخمسينات وهكذا (فالعشرات تبدأ بالعدد عشرة (X)، والخمسينات تبدأ بالعدد خمسين (L)، والمئات تبدأ بالعدد مئة (C)، والخمسمئات تبدأ بالعدد خمسمائة (D)، والألوف تبدأ بالعدد ألف (M)). واستعمل الصينيون علامات مختلفة للأعداد من أربعة وحتى عَشَرة، لكنهم كانوا لا يزالون يستعملون خطوطاً صغيرة للأعداد الثلاثة الأولى.

أما شعب المايا في أمريكا الوسطى فلقد أخترع النظام الأكثر لفتاً للنظر. لقد استعملوا فقط ثلاث علامات: النقطة، الخَطّة، والشكل البيضاوي. بهذه العلامات كان باستطاعتهم كتابة أي رقم مهما كان كبيراً.[٥]

وحالياً (عام ٢٠٠٢) يمكن تصنيف الأرقام المستخدمة فعلياً إلى الأنواع التالية:

١: الأرقام العربية المغربية (0 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 , 7 , 8 , ٩) وهي حالياً الأرقام الأكثر استخداماً في جميع أنحاء العالم، حيث تم اعتمادها في جميع دول العالم (باستثناء أغلب الدول العربية!) كما أنها النوع الوحيد من الأرقام المستعمل في الآلات الحاسبة العادية والعلمية وجميع الأجهزة الرقمية الأخرى.

٢: الأرقام العربية المشرقية وهي: (١ ، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩) وتستعمل هذه الأرقام في الدول العربية المشرقية فقط.

٣: الأرقام الرومانية:

يحتوي نظام العد الروماني على لمحة من فكرة القيمة المكانية – كما سنرى – ويعتقد أن أساس النظام العددي الروماني هو العد بالأصابع يدل على ذلك أن الكلمة اللاتينية للأصبع هي Jigitus وتستخدم الآن كلمة مشتقة منها هي digit التي تستخدم في وصف أي رمز من رموزهم العددية. وقد كتب الرومان الأعداد من واحد إلى أربعة كما يلي:

أما رمز خمسة فقد كان علامة على شكل V ولعلها تمثل الفجوة بين الإبهام وبقية الأصابع كما بالشكل أدناه

وقد نشأت عندهم فكرة القيمة المكانية مرتبطة بهذا الرمز؛ فلكي يتجنبوا التضخم في كتابة العدد I أربعة مرات هكذا IIII وضعوا I إلى يسار V وطبقت نفس الفكرة في رموز أخرى، وأصبح مفهوما أنه إذا كتب الرمز إلى يسار رمز آخر قيمته أكبر فإن العدد يدل على الفرق بين الرمزين وإذا كتب على يمينه فإن العدد يدل على مجموع الرمزين ، وقد نشأ هذا التعبير بالأصابع عن الأعداد ٦ ،7 ، 8كما بالشكل:

وللتعبير عن العدد ٩ كتب I على يسار الرمز الدال على عشرة وهو X ولعله مأخوذ من وضع اليدين متقاطعتين. وإذن فالعدد ٩ يكتب هكذا IX ثم العدد ١٠ يكتب X ثم العدد ١١ ويدل عليه الرمز XI حيث يوضع الرمز المعبر عن العدد واحد على يمين رمز العشرة ليدل ذلك على مجموع الرقمين وهكذا، وبذلك فإن الأرقام الرومانية الأولى هي:

الأرقام الرومانية الأولى	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
ما يقابلها من الأرقام المعاصرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

الأرقام الرومانية الأولى	X	XI	XII	XIII	XVI
ما يقابلها من الأرقام المعاصرة	١٠	١١	١٢	١٣	١٤

وهكذا إلى عشرين XX ثم ثلاثين XXX

ولتجنب تكرار رمز أربع مرات للدلالة على ٤٠ هكذا XXXX وضع رمز L للدلالة على العدد خمسين ويعتقد أنه النصف الأسفل من حرف C الدال على مائة وهو الحرف الأول من كلمة (Centum أي مائة)،

وعلى ذلك فإن العدد ٤٠ يكتب هكذا XL بينما تدل LX على العدد ستين، كذلك فإن XC تدل على ٩٠ بينما CXتدل على مائة وعشرة (١١٠) ثم استخدم حرف M للدلالة على العدد ألف (١٠٠٠) ربما لأن M هو الحرف الأول من كلمة Mille اللاتينية بمعنى ألف (١٠٠٠) وقبل ذلك كان يتم التعبير عن العدد ١٠٠٠ بالحرف (فأي) اليوناني ثم كتب بصورة بسيطة هكذا (I) وهذا تحور إلى M للدلالة على ١٠٠٠ أما العدد ٥٠٠ فقد كان يتم التعبير عنه بالرمز وهو كما ترى الجزء الأيمن من حرف (I) فأي في صورته البسيطة ثم تحور الرمز الدال على خمسمائة إلى حرف .D والجدول التالي يبين باختصار الرموز الأساسية لنظـــــام العـــــدد الرومـــــاني:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

وعلى ذلك فإن العدد MXDVIII يدل على ١٤٠٨ ، والعدد MMCCCXXLV يدل على ٢٣٢٤ ، والعـــام ١٩٩٩ يـــدل عليـــه العـــدد MCMXCIX وهكـــذا..

وقد ظل النظام الروماني سائدا في أوربا حتى دخول النظام العربي الخوارزمي [- نسبة إلى محمد بن موسى الخوارزمي مؤسس علم الجبر (من ١٦٤ ه إلى ٢٣٥ ه) -] (في القرن العاشر الميلادي) وظل النظامان يتنافسان في أوروبا قرابة أربعة قرون إلى أن ساد النظام العربي لسهولته في تسجيل الأعداد وفي إجراء العمليات الحسابية دون حاجة إلى المعداد الذي كان يستخدم في ظل النظام الروماني. (والمعداد هو جهاز عند الرومان.)

أنواع الأعداد حسب اللفظ

تنقسم ألفاظ العدد إلى قسمين:

١: الأعداد الأصلية (cardinal): واحد (أحد)، اثنان، ثلاث، أربع، خمس، ست، سبع، ثمان، تسع، عشر، عشرون، ثلاثون، أربعون، ... ، تسعون، مئة، ألف. وهي تلك الأعداد التي تعين مقدار معدودها. فإذا قلت: "جاءت خمس فتيات" أو " جاء خمسة رجال"، فهم السامع أنك تعني فتياتٌ بلغ مقدارهن "خمس" ورجالاً بلغ مقدارهم "خمسة".[٦] ويعبر عن تلك الأعداد بالرموز (الأرقام) المعروفة:(1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7 , 8 , 9).

٢: الأعداد الترتيبية (ordinal): وهي تلك الأعداد التي تشير إلى رتبة معدودها بالنسبة إلى غيره. وقد تكون مذّكرة: الأول، الثاني، الثالث، الرابع ...الخ، أو تكون مؤنثة: الأولى، الثانية، الثالثة، الرابعة ...الخ. وفي اللغة العربية لا يعبر عن تلك الأعداد برموز (أرقام) معروفة، كما هو الحال في اللغة الإنكليزية مثلاً:
.(1^{st} , 2^{nd}, 3^{rd}, 4^{th})

مشكلات التعامل مع الأعداد

أ: مشكلة الكتابة حسب المعدود:

العدد نوعان: مبهم وصريح. العدد المبهم وهو الذي يدلّ عليه بكنايات العدد: كم ، كأيّنْ، كذا. والأعداد الصريحة هي (المبارك، وآخرون، ١٩٨٣):

– من الواحد إلى العشرة.

– ألفاظ العقود: عشرون، ثلاثون، أربعون ... إلى التسعين.
– المائة والألف ومثناهما وجمعهما وما جرى مجراهما كالمليون والبليون والتريليون ...
ولهذه الأعداد مع المعدود من حيث المطابقة في التذكير والتأنيث أو عدمها الأحكام التالية:
١: يكون العدد بلفظ واحد للمذكر والمؤنث بالنسبة للمجموعتين (ب) و (ج) أعلاه، نحو:
«عندي عشرون (ثلاثون، مئة، ألف، مليون، بليون) ليرة ، عندي عشرون (ثلاثون، مئة، ألف، مليون، بليون) ديناراً ».
٢: (واحد ، اثنان) يوافقان المعدود دائماً فيذكران مع المذكر ويؤنثان مع المؤنث سواء أكانا مفردين أم مركبين أم متعاطفين، نحو: «هذا دينار واحد ، هذان ديناران اثنان ، هذه ليرة واحدة، هاتان ليرتان اثنتان ، عندي أحد عشر سهماً ، عندي اثنا عشر سهماً ، عندي إحدى عشرة ليرة، عندي اثنتا عشرة ليرة ، عندي واحد وعشرون دولاراً ، عندي اثنان وعشرون دولاراً ، عندي إحدى وعشرون أوقية من الذهب ، عندي اثنتان وعشرون أوقية من الذهب».
٣: (ثلاثة إلى تسعة) تخالف المعدود فتذكر مع المؤنث وتؤنث مع المذكر، سواء أكان العدد مفرداً أم مركباً أم متعاطفاً، نحو: « ثلاث ليرات ، ثلاثة دنانير ، ثلاث عشرة ليرة، ثلاثة عشر ديناراً، ثلاث وعشرون ليرة ، ثلاثة وعشرون ديناراً ».
٤: العدد (عشرة) يخالف معدوده إن كان مفرداً ويوافقه إن كان مركباً، نحو: «عشر ليرات ، عشرة دنانير ، ثلاث عشرة ليرة، ثلاثة عشر ديناراً ».
ب: مشكلة التمييز بين العدد والرقم:
العدد هو تعبير رقمي عن كمية معدودة ويلفظ بكل مراتبه. أما الرقم فهو رمز مجرد بدون معدود، مثل: رقم الهاتف، رقم السيارة، ورقم البناء ...إلخ، ويفضل أن يلفظ بدون مراتب كأن نلفظ رقم الهاتف ٧٦٣٤٣٠ على شكل أزواج ٧٦ و ٣٤ و ٣٠ وذلك لسهولة الفهم والكتابة. وقد استخدمت رموز متعددة للتعبير عن الأعداد اختلفت باختلاف المكان والزمان.
ج : مشكلة البليون الإنكليزي والبليون الأمريكي (مشكلة الأعداد الكبيرة):
"لم يكن عند العرب لفظ للعدد إذا تجاوز الألف، فكانوا يعبرون عن المليون (1,000,000) بقولهم «ألفُ ألفٍ»، وعن المليار (1,000,000,000) – ويسمى عند الإنكليز [بل الصحيح عند الأمريكان] «بليون» - بقولهم «ألفُ ألفِ ألفٍ»." [٨]
ولقد أورد (Hornby, 1978, p. 1036) الجدول التالي الذي يبين لنا الأسماء المختلفة لبعض الأعداد في كل من بريطانيا والدول الأوربية الأخرى من جهة، والولايات المتحدة الأمريكية من جهة أخرى:

الجدول (I)

الشكل العلمي والاسم اللفظي لبعض الأعداد

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)
العدد	الشكل العلمي للعدد	الاسم اللفظي في الولايات المتحدة الأمريكية	الاسم اللفظي في

			بريطانيا والدول الأوربية الأخرى
1,000,000,000	$١٠^{٩}$	بليون (billion)	ألف مليون
١,000,000,000,000	$١٠^{١٢}$	ترليون (trillion)	بليون (billion)
١,000,000,000,000,000	$١٠^{١٥}$	كوادرليون (quadrillion)	ألف بليون
1,000,000,000,000,000,000	$١٠^{١٨}$	كونتليون (quintillion)	ترليون (trillion)

من الجدول (I) نجد أن البليون في الولايات المتحدة الأمريكية لا يساوي البليون في بريطانيا والدول الأوربية الأخرى، حيث أن عدد أصفار الأول تساوي تسعة وعدد أصفار الثاني أثني عشر صفراً (الفرق ثلاث أصفار).
كذلك هناك فرق يساوي ستة أصفار بين الترليون المستخدم في الولايات المتحدة الأمريكية من جهة، والترليون المستخدم في بريطانيا والدول الأوربية الأخرى من جهة أخرى!
لا شك أن هذا الاختلاف يخلق مشاكل جمة للإحصائيين وللباحثين في المجالات العلمية المختلفة، ويتطلب من الجميع الدقة والحذر عند استخدام هذه الكلمات والتعامل معها.
إن وجود المقر الرئيس للأمم المتحدة، ومقار منظمات دولية أخرى مثل: صندوق النقد الدولي والبنك الدولي في الولايات المتحدة الأمريكية، واعتماد هذه المنظمات المعنى الأمريكي للأعداد (عمود ٣ من الجدول I)، ساعد على انتشار الاستعمال الأمريكي لها واندثار الاستعمال البريطاني تدريجياً، حتى أن البريطانيين أنفسهم بدؤوا يستخدمون وبشكل متزايد الاسم والمعنى الأمريكي للبليون، وإطلاق كلمة "البليون التقليدي" على البليون ذو الاثني عشر صفراً. إذاً، النتيجة التي يمكن الوصول إليها هي أن معاني الأرقام الموجودة في العمود ٤ من الجدول (I) هي عملياً غير مستعملة حالياً في جميع دول العالم، ما عدا معنى "ألف مليون"، حيث أن كثير من الإنكليز كانوا ولازالوا يفضلون هذه التسمية على كلمة "بليون" المستخدمة عند الأمريكيين وآخرين غيرهم، مع ملاحظة أن كل منهما يساوي 1,000,000,000.
كذلك تجدر الملاحظة أن كلمة مليار (milliard) في اللغة الإنكليزية هي ذات أصل فرنسي،[٩] لكنها عملياً لا تستخدم في بريطانيا على الرغم من تفضيل الفرنسيين وبعض العرب لهذه التسمية، مع ملاحظة أنها كذلك تساوي 1,000,000,000 وتعادل البليون الأمريكي.
إذاً، ما يجب تذكره دائماً هو أن:

مليار في فرنسا = ألف مليون في بريطانيا = بليون في أمريكا = 1,000,000,000

ولنتساءل الآن كم هو كبير البليون، الترليون، الكوادرليون، والكونِتليون ؟

إن العمود (٤) من الجدول (II)، والذي يبين أن بليون ثانية تساوي تقريباً ٣٢ سنة، يعطي فكرة عن المقياس. حقيقة أن الإنسان النياندرتالي (Neanderthal man) – وهو الإنسان المنسوب إلى وادي النياندرتال قرب دوسيلدوف بألمانيا[١٠] حيث وجدت بقايا هيكل عظمي لإنسان قديم – قد أنقرض منذ حوالي ترليون ثانية لهي جديرة بالتفكر.[١١]

الجدول (II)

تحديد بعض الأعداد بالثواني وتحويلها إلى دقائق، أيام أو سنوات

عمود (١)	عمود (٢)	عمود (٣)	عمود (٤)
العدد	عدد الأصفار	الاسم اللفظي في الولايات المتحدة الأمريكية	الرقم محدداً بالثواني ومساوياً لـِـ :
١,000	٣	ألف (thousand)	١٧ دقيقة
١,000,000	٦	مليون (million)	١١,٥ يوم
1,000,000,000	٩	بليون (billion)	٣٢ سنة
١,000,000,000,000	١٢	ترليون (trillion)	٣٢ ألف سنة
1,000,000,000,000,000	١٥	كوادرليون (quadrillion)	٣٢ مليون سنة
1,000,000,000,000,000,000	١٨	كوِنتليون (quintillion)	٣٢ بليون سنة

إذا فرضنا أن الإنسان يحتاج إلى عشر ثوانٍ كي يعد من الواحد إلى العشرة (أي يعد رقماً واحداً بالثانية الواحدة)، فهذا يعني إن الإنسان يحتاج إلى ٣٢ سنة كي يعد من الواحد إلى البليون، ويحتاج إلى ٣٢ ألف سنة كي يعد من الواحد إلى الترليون (حسب الاستخدام الأمريكي).[١٢] كذلك إذا افترضنا أن نطق كلمتي "الحمد لله" بتدبر يحتاج إلى ثانية واحدة من الزمن – وهذا افتراض ليس ببعيد عن الحقيقة، جرب هذا إذا كنت لا تصدق -، فهذا يعني أننا إذا أردنا حمد الله 1,000,000,000 مرة فقط، فإننا نحتاج إلى ٣٢ سنة.[١٣]

الفصل الثاني

2 **المجـــــــال : مجمـــــوعة العنـــــاصر التى يأخـــذها المتغـير س بحــيث يكـــون النــاتــج كمية معرفة " عدد حقيقى " .**

2 **قـواعــد هــامة :**

١) مجال أى دالة كثيرة الحدود مهما كان درجتها = ح .

٢) مجال الدالة الكسرية = ح - أصفـــار المقـــام .

2 **حــالة خـــاصة : ï مجال الدالة الكسرية = ح فى الحالات الأتية :**

*** المقام دالة ثابتة .　　　* المقام على الصورة $\text{س}^{\text{ن}}$ + أ حيث ن ← زوجى ، أ ∋ ح_{+}**

*** المقام على الصورة أ $\text{س}^{٢}$ + ب س + جـ : حيث المميز يكون سالباً .**

٣) مجال الدالة الجذرية :

أولاً : عندما يكون دليل الجذر فـردياً :

*** مجال د (س) = ح　　　د (س) = $\sqrt[٣]{\text{س - ٣}}$ ← مجال د (س) = ح**

ثانياً : عندما يكون دليل الجذر زوجيا :

*** مجال د (س) هو مجموعة العناصر الحقيقة التى تجعل ما تحت الجذر كمية غير سالبة (£ ٠) .**

د (س) = $\sqrt[٤]{\text{س - ٥}}$

الحـــــــــل

∵ س + ٥ £ ٠ ← س £ - ٥ ← مجال د (س) =] - ٥ ، ¥]

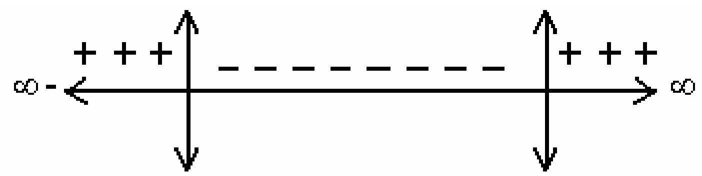
د (س) = $\sqrt{\text{س}^{٢}\text{ - س - ١٢}}$

الحـــــــــل

$\text{س}^{٢}$ - س - ١٢ = ٠

(س - ٤) (س + ٣) = ٠

س - ٤ = ٠	س + ٣ = ٠
س = ٤	س = - ٣



∵ مجال الدالة الجذرية كمية غير سالبة (£ ٠) .

∴ مجال د (س) =] ٤ ، ¥] U] - ¥ ، - ٣] = ح -] - ٣ ، ٤ [

العمليات على الـــــــدوال

2 إذا كانت : د ١ ، د ٢ دالتين مجالهما م ١ ، م ٢ حيث :

د ١ : م ١ ← ح ، د ٢ : م ٢ ← ح ، م ١ ∩ م ٢ ≠ ∅ فـــإن :

♦ (د ١ ± د ٢) : م ١ ∩ م ٢ ← ح

♦ (د ١ . د ٢) : م ١ ∩ م ٢ ← ح

♦ (د ١ / د ٢) : م ١ ∩ م ٢ - ف { د ٢ } ← ح حيث ف (د ٢) هى مجموعة أصفار المقام .

2 نلاحــظ من هذا التعريف أن مجموع أو فرق أو ضرب دالتين هو دالة جديدة بشرط (م ١ ∩ م ٢ ≠ ∅) حيث مجالها هو المجال المشترك للدالتين د ١ ، د ٢ أما مجال خارج قسمة دالتين هو المجال المشترك للدالتين مستبعدا منه أصفار المقام .

أمثلــــــــة محلـــــــــولة

2 أوجــــــد مجال الدوال الأتية :

Œ د (س) = √س − ٢ − √٥ − س

الحـــــــــل

نفرض أن : د ١ (س) = √س − ٢

س - ٢ £ ٠ ← س £ ٢ ← مجال د ١ (س) = [٢ ، ¥ [

د ٢ (س) = √٥ − س

٥ - س £ ٠ ← ٥ £ س ← س 3 ٥ ← مجال د ٢ (س) =] - ¥ ، ٥]

∴ مجال د (س) = [٢ ، ¥ [∩] - ¥ ، ٥]

• د (س) = √س + ٣ / س - ٢

الحـــــــــل

د ١ (س) = √س + ٣ ï س + ٣ £ ٠ ï س £ - ٣ ï مجال د ١ (س) = [- ٣ ، ¥ [

د ٢ (س) = س - ٢ ï مجال د ٢ (س) = ح ، ف (د ٢) = {٢}

∴ مجال د (س) = [- ٣ ، ¥ [∩ ح - {٢} = [- ٣ ، ¥ [- {٢}

Ž إذا كان د ١ (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ، د ٢ (س) = س ٢ - س - ٦

* أوجد مجال (د١ . د٢) س ، ($\frac{د_١}{د_٢}$) س

الحـــــــــل

د ١ (س) = $\sqrt{س - ٢}$ ï س - ٢ £ ٠ ï س £ ٢ ï م ١ = مجال د١ (س) = [٢ ، ¥ [

، د ٢ (س) = س ٢ - س - ٦ ï م ٢ = مجال د ٢ (س) = ح

ف (د ٢) : مجال (د١ . د٢) س = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ¥ [∩ ح = [٢ ، ¥ [

(أصفار المقام) ف (د ٢) : س ٢ - س - ٦ ï (س - ٣) (س + ٢) = ٠ ∴ س = ٣ & س = - ٢

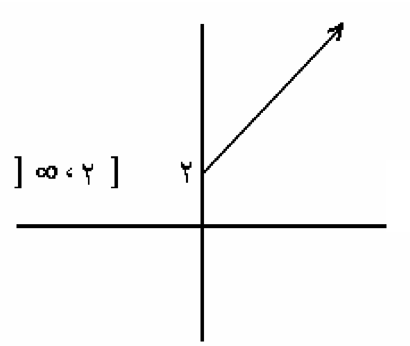
∴ ف (د ٢) = { ٣ ، - ٢ }

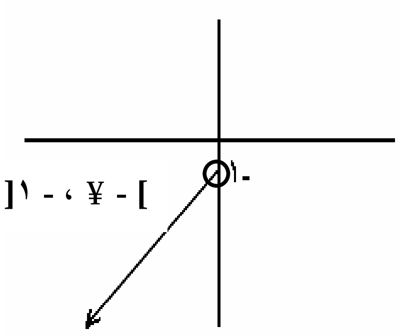
∴ مجال ($\frac{د_١}{د_٢}$) س = م١ ∩ م٢ - ف (د ٢) = [٢ ، ¥ [- { ٣ ، - ٢ } = [٢ ، ¥ [- { ٣ }

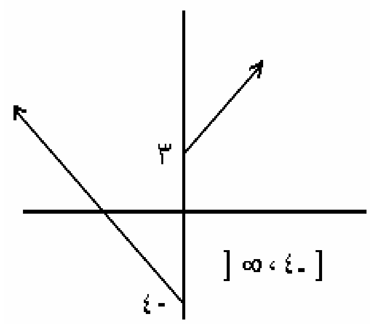
ثانياً : المدى

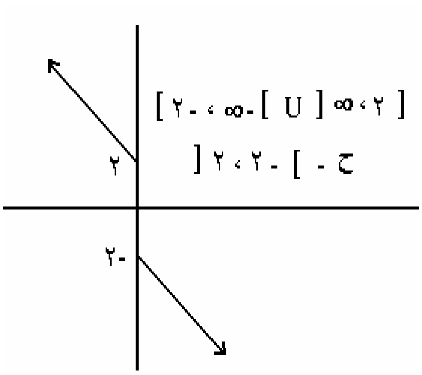
2 **المـــدى** : هو مجموعة العناصر الحقيقية التى يأخذها المتغير ص ونحصل عليه بيانيا من محور الصادات .

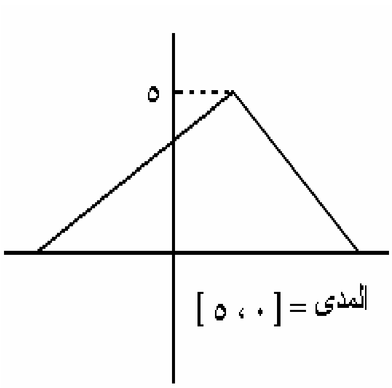
][أسفل قيمة ، أعلى قيمة][

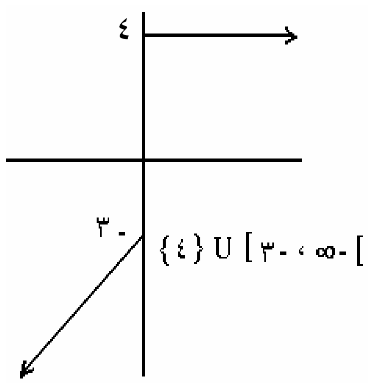




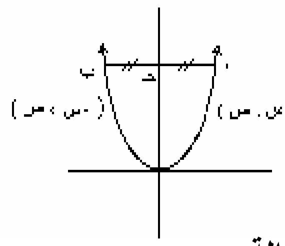








(نوع الدالة)



2 **تعريف** : (أولاً : الدالة الزوجية) ï الدالة د : س ← ص تكون زوجية إذا كانت :

د (- س) = د (س) " س ، - س ∋ المجال .

* **الشرط البيانى** : تكون الدالة زوجية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول الصادات .

Ã فإذا كانت النقطة (س ، ص) ∋ منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، ص) ∋ منحنى الدالة .

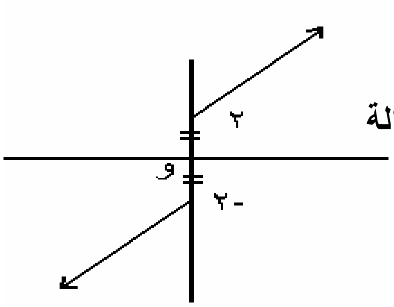
---

2 (ثانياً : الدالة الفردية) ï الدالة د : س ← ص تكون فردية إذا كانت :

د (- س) = - د (س) " س ، - س ∋ المجال .

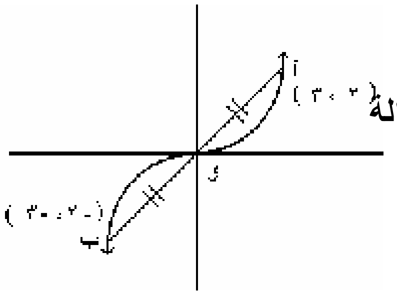
* **الشرط البيانى** : تكون الدالة فردية إذا كان الشكل البيانى لها متماثلا حول نقطة الأصل .

Ã فإذا كانت النقطة (س ، ص) تقع على منحنى الدالة فإن النقطة (- س ، - ص) تقع أيضا على منحنى الدالة .



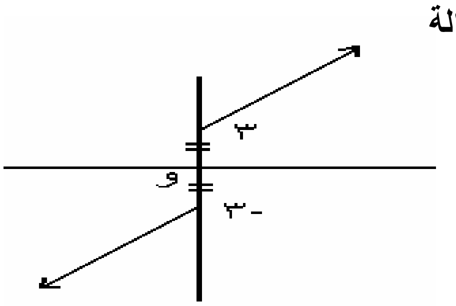
** ∵ (٠ ، ٢) ∉ لمنحنى الدالة وكذلك (٠ ، - ٢) ∉ لمنحنى الدالة

∴ نجد أن الدالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل .



** ∵ (٢ ، ٣) ∋ لمنحنى الدالة وكذلك (- ٢ ، - ٣) ∋ لمنحنى الدالة

∴ نجد أن الدالة فردية لأنها متماثلة حول نقطة الأصل .



** ∵ (٠ ، ٣) ∋ لمنحنى الدالة بينما (٠ ، - ٣)∉ لمنحنى الدالة

∴ نجد أن الدالة ليست فردية وليست زوجية

لأنها غير متماثلة حول نقطة الأصل ،

لأنها غير متماثلة حول محور الصادات .

** (ابحث نوع الدوال الآتية :)

♦١ $د (س) = \frac{س^{٣} \text{ جا } ٣ س}{١ + س^{٤}}$

$د (- س) = \frac{(- س)^{٣} \text{ جا } (- ٣ س)}{١ + (- س)^{٤}} = \frac{- س^{٣} \times - \text{ جا } ٣ س}{١ + س^{٤}} = \frac{س^{٣} \text{ جا } ٣ س}{١ + س^{٤}} = د (س)$

∴ الدالة زوجية .

♦٢ $د (س) = \frac{|س| \; س}{١ + س \text{ جا } س}$

$د (- س) = \frac{- س \; |- س|}{١ + (- س) \text{ جا } (- س)} = \frac{- س \; |- س|}{١ - س \times - \text{ جا } س}$

$= \frac{|س| \; س}{١ + س \text{ جا } س} = - د (س)$ ∴ الدالة فردية .

(اطـــــــراد الـدالــــة)

▼

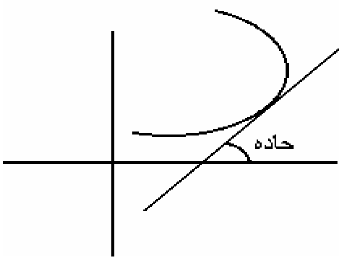
ê	ê	ê
تزايدية	تناقصية	ثابتة

١ 2 (**الدالة التزايدية**) ï يقال للدالة أنها تزايدية فى الفترة [أ ، ب] إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∋ [أ ، ب]

يتحقق الشرط الآتى : إذا كان س ١ > س ٢ ï د (س ١) > د (س ٢)

Ã **وبصفة عامـــة** : د (س) تكون تزايدية إذا كانت :

قيمة الدالة تتزايد بازدياد قيمة س .



Ã **وبطريقة أخرى** : د (س) تكون تزايدية إذا كان المماس لمنحنى الدالة يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

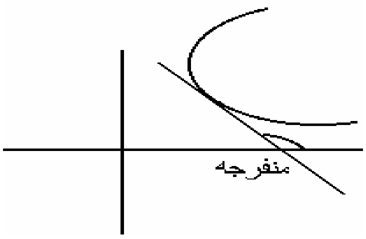
----

٢ 2 (**الدالة التناقصية**) ï يقال للدالة أنها تناقصية فى الفترة [أ ، ب] إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∋ [أ ، ب]

يتحقق الشرط الآتى : إذا كان س ١ > س ٢ ï د (س ١) < د (س ٢)

Ã **وبصفة عامـــة** : د (س) تكون تناقصية إذا كانت :

قيمة الدالة تتناقص بازدياد قيمة س .



Ã **وبطريقة أخرى** : د (س) تكون تناقصية إذا كان المماس لمنحنى الدالة

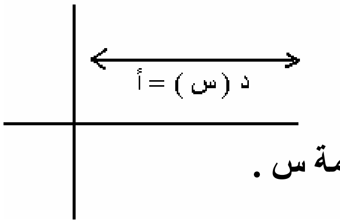
يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

---

٣ 2 (<u>الدالة الثابته</u>) ï يقال للدالة أنها ثابته فى الفترة] أ ، ب [إذا كان لكل س ١ ، س ٢ ∋] أ ، ب [

يتحقق الشرط الآتى :

إذا كان س ١ < س ٢ ï د (س ١) = د (س ٢) = أ



Ã <u>وبصفة عامـــة</u> : د (س) تكون ثابتة إذا كانت قيمة الدالة ثابتة مهما كانت قيمة س .

<u>(المقيـــــــــاس)</u>

2 (<u>مفهوم المقياس</u>) ï هو عدد حقيقى غير سالب (£ ٠)

2 (<u>المقياس العـدد</u>) ï هو الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد .

**** مثال :** | - ٥ | = ٥ ، | ٠ | = ٠ ، | ١/٢ | = ١/٢

2 (<u>تعريف " فــك " المقياس</u>) :

| س | = { س ← س ≥ ٠ ؛ - س ← س < ٠ } ، | س - ٢ | = { س - ٢ ← س ≥ ٢ ؛ - س + ٢ ← س < ٢ }

| ٢ س + ٦ | = { ٢ س + ٦ ← س ≥ - ٣ ؛ - ٢ س - ٦ ← س < - ٣ }

---

2 (<u>خواص المقياس</u>) :

♣١ | س | ≥ ٠ ، | س | = ٠ إذا كان س = ٠

♣٢ مقياس العدد = مقياس معكوسه الجمعى .

Ã | أ | = | - أ | ، | ٣ | = | - ٣ | ، | س - ٢ | = | - (س - ٢) | = | ٢ - س | ، | س - ٥ | = | ٥ - س |

♣٣ | س + ص | ≤ | س | + | ص |

♣٤ مقياس حاصل ضرب عددين = حاصل ضرب مقياسيهما . ï | س ص | = | س | × | ص |

Ã | - ٣ س | = | - ٣ | × | س | = ٣ | س |

Ã | - ٢ (س - ٥) | = | - ٢ | × | س - ٥ | = ٢ | س - ٥ |

Ã | س + ٢ | | س - ٢ | = | (س + ٢) (س - ٢) | = | س ^٢ - ٤ |

٥ ♣ مقياس خارج قسمة عددين = خارج قسمة مقياسيهما .

Ã $\left| \frac{س}{ص} \right| = \frac{|س|}{|ص|}$ ، $\frac{|س + ١|}{|س - ٣|} = \left| \frac{س + ١}{س - ٣} \right|$

٦ ♣ مقياس العدد = الجذر التربيعى الموجب لمربع هذا العدد .

Ã $|أ| = \sqrt{أ^٢}$ ، $|٥| = \sqrt{٢٥} = ٥$

٧ ♣ $(|أ|)^٢ = أ^٢$ ، $(|-٣|)^٢ = ٩$

2 (**<u>أوجد مجموعة الحل لكل مما يلى</u>**) :

Ã $\frac{|س + ٣|}{|س + ١|} = ٢$

(الحـــــل)

$\left| \frac{س + ٣}{س + ١} \right| = ٢$ ï $\frac{س + ٣}{س + ١} = \pm ٢$

$\frac{س + ٣}{س + ١} = ٢$ | $\frac{س + ٣}{س + ١} = -٢$

٢ س + ٢ = س + ٣ | س + ٣ = - ٢ س - ٢

س = ١ " تحقق " | س = $\frac{-٥}{٣}$ " تحقق "   م . ح = { ١ ، $\frac{-٥}{٣}$ }

Ã **| س + ١ | | س - ١ | = ٣**

(الحــل)

| (س + ١) (س - ١) | = ٣ ï | س^٢ - ١ | = ٣ ï س^٢ - ١ = ± ٣

س^٢ - ١ | س^٢ - ١

س^٢ = ٤ | س^٢ = - ٢ " مرفوض "

س = ± ٢ " تحقق " | ∴ م . ح = { ٢ ، - ٢ }

Ã **| س + ٥ | - | س - ٣ | = ٠**

(الحــل)

| س + ٥ | = | س - ٣ | ï بتربيع الطرفين ï (س + ٥)^٢ = (س - ٣)^٢

س^٢ + ١٠ س + ٢٥ = س^٢ - ٦ س + ٩

١٠ س + ٦ س = ٩ - ٢٥

١٦ س = - ١٦

س = - ١ " تحقق " م . ح { - ١ }

Ã | ٢ س - ٣ | > | س + ١ | ، س £ ١,٥

(الحــل)

س > ١,٥ ï س > - ١

∵ | ٢ س - ٣ | = ٢ س - ٣ ، | س + ١ | = س + ١

∴ | ٢ س - ٣ | > | س + ١ |

٢ س - ٣ > س + ١

٢ س - س > ١ + ٣

س > ٤ م . ح =] ٤ ، ¥ [

(رســـم المنحنيـــات)

2 **ارسم الشكل البيانى للدوال الآتية ومن الرسم أوجد المجال والمدى ونوع الاطراد :**

١ Ã د (س) = س^٢ / | س |

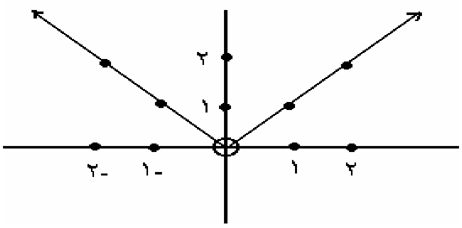
(الحــل)

| س | = { س ← س £ ٠ ، - س ← س > ٠ } ، د (س) = { س^٢ / س ← س > ٠ ، س^٢ / - س ← س > ٠ }

د (س) = { س ← س > ٠ ، - س ← س > ٠ }

د (س) = س ، س > ٠ د (س) = - س ، س > ٠

س	٢	١	⊙	⊙	- ١	- ٢
ص	٢	١	⊙	⊙	١	٢



المجال = ح - { ٠ } = ح *

المدى =] ٠ ، ¥ [، الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

د (س) تزايدية فى الفترة] ٠ ، ¥ [، تناقصية فى الفترة] - ¥ ، ٠ [

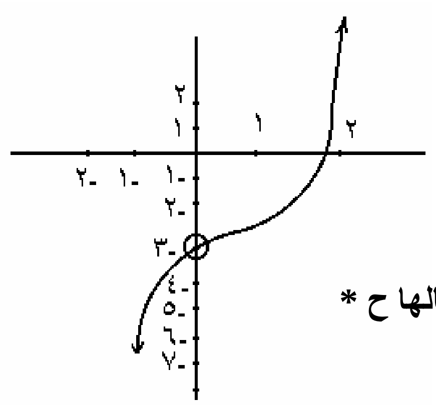
٢ Ã د (س) = $\frac{س^{٣}}{|س|}$ - ٣

(الحـــل)

| س | = { س ← س ≥ ٠ ، - س ← س < ٠ } ، د (س) = { $\frac{س^{٣}}{س}$ - ٣ ← س > ٠ ، $\frac{س^{٣}}{- س}$ - ٣ ← س < ٠ }

د (س) = { س ^{٢} - ٣ ← س > ٠ ، - س ^{٢} - ٣ ← س < ٠ }

د (س) = س ^{٢} - ٣ ، س > ٠ د (س) = - س ^{٢} - ٣ ، س < ٠



س	٢	١	٠	٠	-١	-٢
ص	١	-٢	-٣	-٣	-٤	-٧

المجال = ح - { ٠ } = ح * ، المدى = ح - { - ٣ }

د (س) تزايدية فى الفترتين] ٠ ، ¥ [،] - ¥ ، ٠ [، تزايديه على مجالها ح *

الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات

وغير متماثلة حول نقطة الأصل .

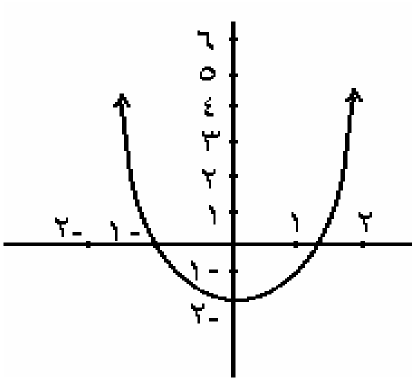
٣ Ã د (س) = س ^{٢} | س | - ٢

(الحـــل)

| س | = { س ← س ≥ ٠ ، - س ← س < ٠ } د (س) = { س ^{٢} × س - ٢ ← س ≥ ٠ ، س ^{٢} × - س - ٢ ← س < ٠ }

د (س) = { س ^{٣} - ٢ ← س ≥ ٠ ، - س ^{٣} - ٢ ← س < ٠ }

د (س) = س ^{٣} - ٢ ، س ≥ ٠ د (س) = - س ^{٣} - ٢ ، س < ٠



س	٢	١	٠	٠	-١	-٢
ص	٦	-١	-٢	-٢	-١	٦

المجال = ح

المدى = [- ٢ ، ∞ [، الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات

د (س) تزايدية فى الفترة] ٠ ، ∞ [، تناقصية فى الفترة] - ∞ ، ٠ [

٤ Ã إذا كانت : د (س) = س ^{٢} - س - ٢ ، ر (س) = | ٢ - س | ، ق (س) = $\frac{د (س)}{ر (س)}$

** عين مجال الدالة ق (س) وارسم الشكل البيانى لها ومن الرسم أوجد المدى والنوع والاطراد .

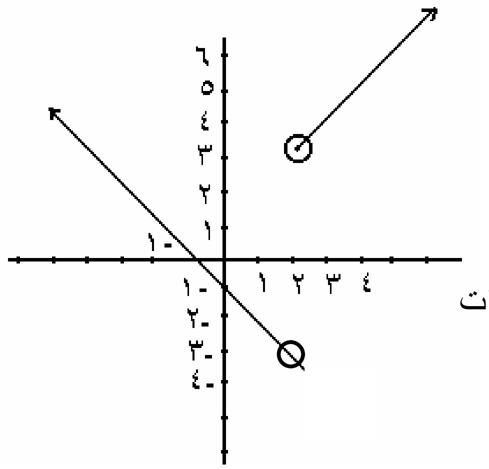
(الحــل)

ق (س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢}{| س - ٢ |}$ ، | س - ٢ | = $\begin{cases} س - ٢ & \leftarrow س \geq ٢ \\ -(س - ٢) & \leftarrow س < ٢ \end{cases}$

ق (س) = $\begin{cases} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{(س - ٢)} & \leftarrow س > ٢ \\ \frac{(س - ٢)(س + ١)}{-(س - ٢)} & \leftarrow س < ٢ \end{cases}$ ، ق (س) = $\begin{cases} س + ١ & \leftarrow س > ٢ \\ - س - ١ & \leftarrow س < ٢ \end{cases}$

د (س) = س + ١ ، س > ٢ ، د (س) = - س - ١ ، س < ٢

س	٤	٣	٢	٢	١	٠	١ـ
ص	٥	٤	٣	٣-	٢-	١-	٠



المجال = ح - { ٢ }

المــدى =] - ٣ ، ∞ [

، الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

، الدالة تزايدية فى الفترة] ٢ ، ∞ [، تناقصية فى الفترة] - ∞ ، ٢ [

---

٥ Ã د (س) = $\frac{٣ س + ٧}{س + ٢}$

(الحــل)

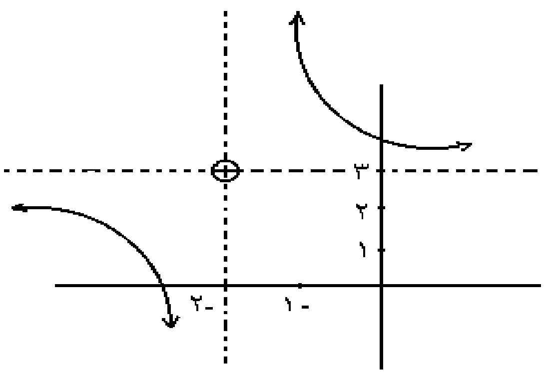
د (س) = $\frac{(٣ س + ٦) + ١}{س + ٢}$ = $\frac{٣ س + ٦}{س + ٢}$ + $\frac{١}{س + ٢}$

د (س) = $\frac{٣ (س + ٢)}{(س + ٢)}$ + $\frac{١}{س + ٢}$ = ٣ + $\frac{١}{س + ٢}$

نقطة التماثل لمنحنى الدالة (- ٢ ، ٣)

المجال = ح - { - ٢ }

المــدى = ح - { ٣ }



، الدالة ليست زوجية وليست فردية لأنها غير متماثلة حول محور الصادات وغير متماثلة حول نقطة الأصل

، الدالة تناقصية على مجالها ح - { - ٢ }

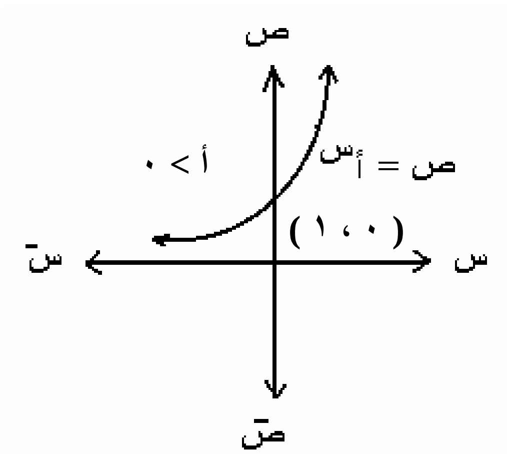
(الأسس واللوغاريتمات)

١- الدالة الأسية

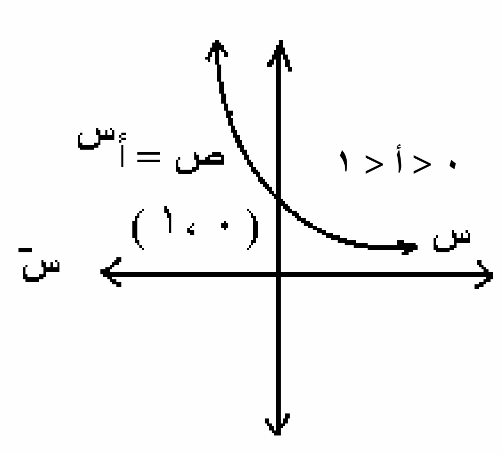
2 **تعريف** : إذا كانت أ عددا حقيقيا موجبا 1 ١ فإن الدالة د : ح ← $ح_+$ حيث د (س) = $\text{أ}^{\text{س}}$ تسمى دالة أسية أساسها أ .

2 **التمثيل البيانى للدالة الأسية** :   (د : ح ← $ح_+$)

(أولاً)



(ثانياً)



أولاً:

المجال = ح

المدى = $ح_+$ =] ٠ ، ¥ [

الدالة تزايدية على مجالها ح

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

الدالة ليست زوجية وليست فردية لعدم التماثل

ثانياً:

المجال = ح

المدى = $ح_+$ =] ٠ ، ¥ [

الدالة تناقصية على مجالها ح

منحنى الدالة يمر بالنقطة (٠ ، ١)

الدالة ليست زوجية وليست فردية لعدم التماثل

** **ملحـــوظة هامـــة** : تتمتع الدالة الأسية بالخواص الآتية لجميع قيم م ، ن الحقيقية :

Œ $\text{أ}^{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م+ن}}$ • $\dfrac{\text{أ}^{\text{م}}}{\text{أ}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{م-ن}}$ Ž $(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م ن}}$

---

2 الأســـس 2

2 **مراجعة الأسس الصحيحة** :

Œ $\text{أ}^{\text{ن}}$ = أ × أ × أ × ...... × أ   " ن ∋ $ص_+$

• $\text{أ}^{٠}$ = ١   " أ ∋ ح*

Ž $\text{أ}^{\text{- ن}} = \dfrac{١}{\text{أ}^{\text{ن}}}$ " أ ∋ ح*

2 قوانــــين الأســــس 2

Œ $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$ • $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$ Ž $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

• $(أ ب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$ • $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

2 **قاعدتان هامتان :**

Œ (الأساس = الأساس) ï (الأس = الأس) :

B $أ^{م} = أ^{ن}$ ï $م = ن$ " $أ \in ح - \{ ١ ، -١ ، ٠ \}$

• الأس = الأس

▼

ê لو كان أحد الأساسين رمزا	ê الأساسان مختلفان
▼	▼
الأساس = الأساس	الأس = صفر
$٢^{٥} = س^{٥}$	$٣^{س^{٢}-١} = ٧^{س^{٢}-١}$
س = ٢	الأس = الأس Ù الأس = ٠

$س^{٢} - ١ = ٠$ Ù $س^{٢} = ١$ Ù $س = \pm ١$

Ù م . ح = { ١ ، -١ }

---

2 الأسس الكسرية 2

2 **قواعد هامة :** لكل ن $\in$ $ص_{+}$ ، أ ، ب $\in$ $ح_{+}$ فإن :

Œ $أ^{\frac{١}{ن}} = ب$ وبضرب الأسين × ن ï $أ = ب^{ن}$

• $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$ مقام الأس الكسرى يصبح دليلا للجذر

Ž $\sqrt[ن]{أ^{م}} = (\sqrt[ن]{أ})^{م} = أ^{\frac{م}{ن}}$

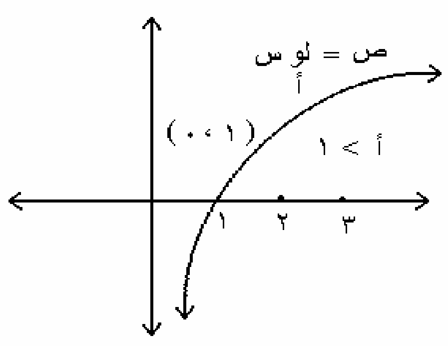
** **ملحـــوظة هامــة :** جميع قوانين الأسس الصحيحة يمكن تطبيقها على الأسس الكسرية .

ثانياً : الدالة اللوغاريتمية

د : ح$_+$ Ù ح

تعريف : إذا كانت أ Э ح$_+$ - {١} ، ص Э ح$_+$ فإن : ص = أ^{س} ↔ لو$_{أ}$ ص = س

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريتمية (د : ح$_+$ Ù ح)

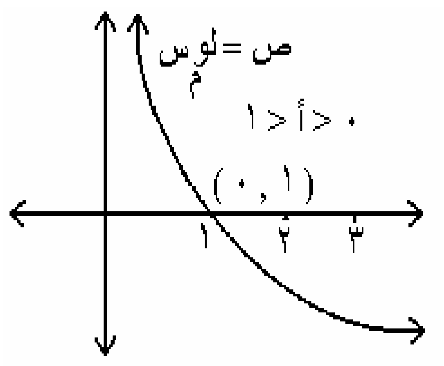


المجال = ح$_+$ =] ٠ ، ¥ [

المجال المقابل = ح

الدالة تزايدية على مجالها ح$_+$

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)



المجال = ح$_+$

المجال المقابل = ح

الدالة تناقصية على مجالها ح$_+$

منحنى الدالة يمر بالنقطة (١ ، ٠)

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت : س ، ص Э ح$_+$ ، أ Э ح$_+$ - {١} فإن :

١) لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص   ٢) لو$_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{أ}$ س - لو$_{أ}$ ص

٣) لو$_{أ}$ س^{ن} = ن لو$_{أ}$ س   ٤) لو$_{أ}$ أ = ١   ٥) لو$_{أ}$ ١ = صفر

** **ملحـــوظة هامـــة :** اللوغاريتمات المعتادة " العشرية " هى اللوغاريتمات التى أساسها ١٠ ولا يكتب .

مسائل محلولة

B١ إذا كانــت : د (س) = هـ^{س} + هـ$^{-س}$ ، ر (س) = هـ^{س} - هـ$^{-س}$

فأثبت أن : [د (س)]^{٢} - [ر (س)]^{٢} = ٤

(الحـــــــل)

= [د (س)]^{٢} - [ر (س)]^{٢} = [د (س) - ر (س)] [د (س) + ر (س)]

$= [\ ٥^{س} + ٥^{-س} - ٥^{س} - ٥^{-س}\ ]\ [\ ٥^{س} + ٥^{-س} + ٥^{س} - ٥^{-س}\ ]$

$= ٢ \times ٥^{-س} \times ٢ \times ٥^{س} = ٤ \times ٥^{-س + س} = ٤ \times ٥^{٠} = ٤$

B٢ إذا كانت : د (س) = $(\frac{٢}{٣})^{س}$ حل المعادلة : د (س + ٣) - د (س - ١) = $\frac{٦٥}{١٦}$

(الحـــــل)

$= (\frac{٢}{٣})^{س+٣} - (\frac{٢}{٣})^{س-١} = \frac{٦٥}{١٦}$ وبأخذ $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ عامل مشترك

$= (\frac{٢}{٣})^{س-١}\ [\ (\frac{٢}{٣})^{س+٣-س+١} - ١\ ] = -\frac{٦٥}{١٦}$

$= (\frac{٢}{٣})^{س-١}\ [\ (\frac{٢}{٣})^{٤} - ١\ ] = -\frac{٦٥}{١٦}$ ç $(\frac{٢}{٣})^{س-١} (\frac{١٦}{٨١} - ١) = -\frac{٦٥}{١٦}$

$= (\frac{٢}{٣})^{س-١} \times -\frac{٨١}{٦٥} = -\frac{٦٥}{١٦}$ ç $\times -\frac{٨١}{٦٥} = (\frac{٢}{٣})^{س-١} = \frac{٨١}{١٦} = (\frac{٣}{٢})^{٤}$

$= (\frac{٢}{٣})^{س-١} = (\frac{٢}{٣})^{-٤}$ ç س - ١ = - ٤ ç س = - ٣ ï م . ح = { - ٣ }

B٣ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ حل المعادلة : د (٢ س) - ٣٦ د (س) + د (٥) = ٠

(الحـــــل)

$٣^{٢س} - ٣٦ \times ٣^{س} + ٣^{٥} = ٠$ نفرض أن $٣^{س} = أ$ ç $٣^{٢س} = أ^{٢}$

$\therefore$ $أ^{٢} - ٣٦ أ + ٢٤٣ = ٠$ ç (أ - ٩) (أ - ٢٧) = ٠

أ = ٩	أ = ٢٧
$٣^{س} = ٣^{٢}$	$٣^{س} = ٣^{٣}$
س = ٢	س = ٣

م . ح = { ٢ ، ٣ }

B٤ إذا كانت : د (س) = $٣^{س}$ أثبت أن : $\frac{٤\ د\ (\ س + ٢\ ) - ١١\ د\ (\ س\ )}{٢\ د\ (\ س + ١\ ) + ٧\ د\ (\ س - ١\ )} = ٣$

(الحـــــل)

الأيمن $= \frac{٤ \times ٣^{س+٢} - ١١ \times ٣^{س}}{٢ \times ٣^{س+١} + ٧ \times ٣^{س-١}} = \frac{٣^{س}\ (\ ٤ \times ٣^{س+٢-س} - ١١\ )}{٣^{س-١}\ (\ ٢ \times ٣^{س+١-س+١} + ٧\ )}$

$= \frac{٣^{س}\ (\ ٣٦ - ١١\ )}{٣^{س-١}\ (\ ١٨ + ٧\ )} = \frac{٣^{س} \times ٢٥}{٣^{س-١} \times ٢٥} = ٣^{س-س+١} = ٣ =$ الأيسر

B حل المعادلة الآتية : لو (س^{٢} - س) - ٢ = ٠

(الحـــــــل)

لو$_{٢√٣}$ (س^{٢} - س) = ٢ ç س^{٢} - س = (٢√٣)^{٢} ç س^{٢} - س = ١٢

ç س^{٢} - س - ١٢ = ٠ ç (س - ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ س = - ٣ ç م . ح = { ٤ ، - ٣ }

B٦ حل المعادلة الآتية : لو$_{٢}$ س = ٢ - لو$_{٢}$ (س - ٣)

(الحـــــــل)

لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س - ٣) = ٢ ç لو$_{٢}$ س (س - ٣) = ٢ ç س^{٢} - ٣ س = ٢^{٢} = ٤

س^{٢} - ٣ س - ٤ = ٠

(س - ٤) (س + ١) = ٠

س - ٤ = ٠ ‖ س + ١ = ٠

س = ٤ ‖ س = - ١ " مرفوض " ç م . ح = { ٤ }

B٧ أوجد قيمة س إذا كان : ١/٩ × ٣^{س} = لو ١٤/٣ - لو ٣ + ٢ لو ٥ - لو ١٧ ٦/٧ + ٢ لو ٢٥/٧

(الحـــــــل)

٣$^{-٢}$ × ٣^{س} = لو ١٤/٣ - لـــو ٣ + لو ٢٥ - لو ١٢٥/٧ + لو ٢٢٥/٤٩

٣$^{س-٢}$ = لو $\frac{١٤ × ٢٥ × ٧ × ٢٢٥}{٣ × ٣ × ١٢٥ × ٤٩}$

٣$^{س-٢}$ = لو ١٠ ç ٣$^{س-٢}$ = ١ ç ٣$^{س-٢}$ = ٣^{٠} ç س - ٢ = ٠ ç س = ٢

B ٨ حل المعادلة الآتية : ٧$^{٢س-١}$ = ٢$^{٣س+١}$

(الحـــــــل)

بأخذ اللوغاريتم المعتاد للطرفين : ∴ لو ٧$^{٢س-١}$ = لو ٢$^{٣س+١}$

(٢ س - ١) لو ٧ = (٣ س + ١) لو ٢

٢ س لو ٧ - لو ٧ = ٣ س لو ٢ + لو ٢

٢ س لو ٧ - ٣ س لو ٢ = لو ٢ + لو ٧

س (٢ لو ٧ - ٣ لو ٢) = لو ٢ + لو ٧

س = $\frac{لو ٢ + لو ٧}{٢ لو ٧ - ٣ لو ٢}$ = ١,٤٥ ç م . ح = { ١,٤٥ }

٩ B أثبت أن : لو$_{ب}$ أ = لو$_{ب^٢}$ أ^٢ وإستخدم ذلك فى حل المعادلتين التاليتين :

١ ï لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = $\frac{٣}{٢}$ ٢ ï لو$_{٢}$ س - لو$_{٤}$ س = ٢

(الحـــــل)

نفرض أن : لو$_{ب}$ أ = س ï Œ ومنها أ = ب^{س} ç أ^{٢} = (ب^{س})^{٢} ç أ^{٢} = ب^{٢س}

∴ لو$_{ب^٢}$ أ^{٢} = لو$_{ب^٢}$ ب^{٢س} = س لو$_{ب^٢}$ ب^{٢} = س × ١ = س ï •

من Œ ، • ∴ لو$_{ب}$ أ = لو$_{ب^٢}$ أ^{٢}

١ ï لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س = $\frac{٣}{٢}$ ç لو$_{٤}$ س^{٢} + لو$_{٤}$ س = $\frac{٣}{٢}$ ç لو$_{٤}$ س^{٢} × س = $\frac{٣}{٢}$ ç لو$_{٤}$ س^{٣} = $\frac{٣}{٢}$

س^{٣} = (٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ ç س^{٣} = ٨ ∴ س = ٢

٢ ï لو$_{٢}$ س - لو$_{٤}$ س = ٢ ç لو$_{٤}$ س^{٢} - لو$_{٤}$ س = ٢ ç لو$_{٤}$ $\frac{س^{٢}}{س}$ = ٢ ç لو$_{٤}$ س =

٤ س = ٤^{٢} ç ٤ س = ١٦ ∴ س = ٤

---

١٠ B حل المعادلة الآتية : ٢$^{(لو س)^{٢}}$ × ٤ = ٢$^{(لو س^{٣})}$

(الحـــــل)

٢$^{(لو س)^{٢}}$ × ٢^{٢} = ٢$^{(لو س^{٣})}$ ç ٢$^{(لو س)^{٢} + ٢}$ = ٢$^{(لو س^{٣})}$

∵ الأساس = الأساس ∴ (لو س)^{٢} + ٢ = لو س^{٣} ∴ (لو س)^{٢} - لو س^{٣} + ٢ = ٠

(لو س)^{٢} - ٣ لو س + ٢ = ٠

(لو س - ٢) (لو س - ١) = ٠

لو س = ٢	لو س = ١
س = ١٠^{٢}	س = ١٠
س = ١٠٠	

ç م . ح = { ١٠ ، ١٠٠ }

---

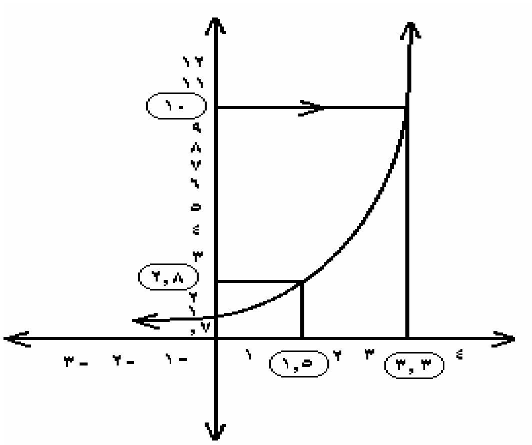
١١ B ارسم الدالة د : ح ← $ح^{+}$ حيث : د (س) = $٢^{س}$ ، س ∋ [٣- ، ٤] ومن الرسم أوجد :

Œ د (١,٥) ، د (- ٠,٥)

- قيمة تقريبية لـ س عندما د (س) = ١٠

(الحـــــل)

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢	٣	٤
ص	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨	١٦



* من الرسم نجد أن :

Œ د (١,٥) = ٢,٨ ، د (- ٠,٥) = ٠,٧

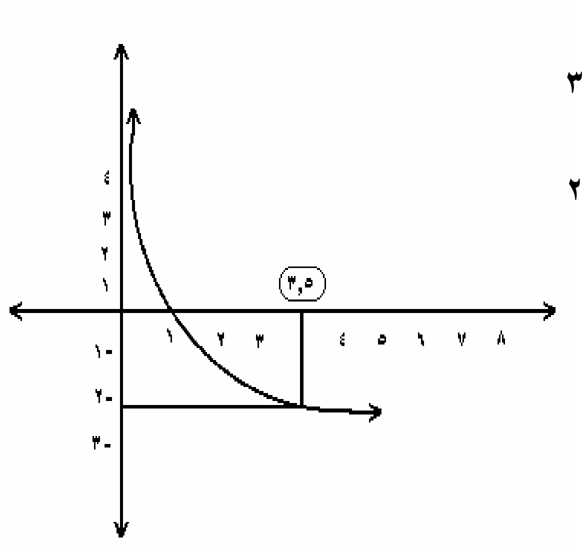
- عندما د (س) = ص = ١٠ نجد أن س = ٣,٣

١٢ B ارسم منحنى الدالة د : $ح_{+}$ ← ح حيث : د (س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س ، س ∋ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨]

ومن الرسم أوجد : $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥

(الحـــــل)

ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س



عند س = $\frac{١}{٨}$ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{٨}$ = $لو_{\frac{١}{٢}} (\frac{١}{٢})^{٣}$ = ٣ $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{٢}$ = ٣

عند س = $\frac{١}{٤}$ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{٤}$ = $لو_{\frac{١}{٢}} (\frac{١}{٢})^{٢}$ = ٢ $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{٢}$ = ٢

عند س = $\frac{١}{٢}$ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{٢}$ = ١

عند س = ١ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١ = صفر

عند س = ٢ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٢ = $لو_{\frac{١}{٢}} (\frac{١}{٢})^{-١}$ = -١

عند س = ٤ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٤ = $لو_{\frac{١}{٢}} (\frac{١}{٢})^{-٢}$ = -٢

عند س = ٨ ç ص = $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٨ = $لو_{\frac{١}{٢}} (\frac{١}{٢})^{-٣}$ = -٣

س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
ص	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-

** لإيجاد $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ من الرسم : Œ نأخذ س = ٣,٥ على محور السينات .

- نرسم منها مستقيم // الصادات فيقطع منحنى الدالة فى نقطة .

Ž نقرأ قيمة ص المناظرة لهذه النقطة على محور الصادات فنجدها = - ١,٨

² المتتــــابعــات ²

² **تعريف (المتتابعة الحقيقة) : هى دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $ص_+$ أو مجموعة جزئية منها على الصورة { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن } ومجالها المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية . أى :**

د : من ($ص_+$) ------ إلى------> (ح)

å â æ

" قيم الحدود " المجال " رتب الحدود " " المتتابعة غير منتهية "

**** بصيغة أخرى : د : { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن } Ù ح**

◄ إذا كانت المتتابعة منتهية أى حدها الأخير معلوم

*** الحد النونى " العام " للمتتابعة $ح_ن$: هو دالة فى ن يمكن بواسطته ايجاد أى حد من حدود المتتابعة كما يمكن الحصول على المتتابعة نفسها .**

((ملحوظة)) : لاحظ الفرق بين ($ح_ن$) ، $ح_ن$ حيث ($ح_ن$) ترمز للمتتابعة بينما $ح_ن$ ترمز للحد النونى لها .

---

² إطـــراد المتتابعــات ²

▼

تزايدية	تناقصية	ثابتة
$ح_{ن+١} - ح_ن > ٠$ موجب	$ح_{ن+١} - ح_ن < ٠$ سالب	$ح_{ن+١} - ح_ن = ٠$

Ã $ح_{ن+١} - ح_ن$ تعنى الفرق بين أى حد والسابق له مباشرة .

---

² المتتابعــات الحسابية ²

² **(تعريف) ï تسمى المتتابعة ($ح_ن$) م . ح إذا كان : $ح_{ن+١} - ح_ن$ = مقدار ثابت " ن ∋ $ص_+$ ويسمى المقدار الثابت بأساس المتتابعة الحسابية ويرمز له بالرمز د**

Ã فإذا كانت : ($ح_ن$) م . ح فإن أساس هذه المتتابعة هو د = $ح_{ن+١} - ح_ن$

أى أن : أساس المتتابعة الحسابية = أى حد فيها ـ الحد السابق له مباشرة .

² **(الصورة العامة للمتتابعة الحسابية) ï إذا رمزنا للحد الأول بالرمز أ ، الأساس بالرمز د فإنه يمكن كتابة المتتابعة الحسابية على الصورة :**

م . ح ← (أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، أ + ٣ د ، .... ، ¥) " إذا كانت المتتابعة غير منتهية "

م . ح ← (أ ، أ + د ، أ + ٢ د ، أ + ٣ د ، .... ، ل - ٢ د ، ل - د ، ل) " إذا كانت المتتابعة منتهية "

حيث ل هو الحد الأخير

(الحد العام فى المتتابعة الحسابية)

$$\boxed{\text{ح}_\text{ن} = \text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}}$$

الحد العام ê الحد الأول ê رتبة الحد ê الأساس ê

((**ملحوظة هامة جدا**)) :

Ã إذا كان عدد حدود المتتابعة الحسابية = ن فإن حدها الأخير هو $\text{ح}_\text{ن}$ ويرمز له بالرمز ل

* أى أن : عدد حدود المتتابعة الحسابية المنتهية = رتبة الحد الأخير

* أى أن : ل = $\text{ح}_\text{ن}$ = أ + (ن - ١) د

♣ فمثلا : إذا كان عدد حدود المتتابعة الحسابية = ٢٠ حدا فإن الحد الأخير هو الحد العشرون

* أى أن : ل = $\text{ح}_{٢٠}$ = أ + (٢٠ - ١) د = أ + ١٩ د

---

² الأوساط الحسابية ²

² إذا كان : أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من م . ح فإن ضعف الوسط الحسابى = مجموع الطرفين .

ê و . ح $\boxed{٢\,\text{ب} = \text{أ} + \text{جـ}}$ ومنها $\text{ب} = \frac{\text{أ} + \text{جـ}}{٢}$

ï أى أن : الوسط الحسابى = المجموع ÷ ٢ " يستخدم إذا ذكر كلمة الوسط الحسابى "

♣ فمثلا : إذا كان الوسط الحسابى لعددين = ٣

Ã نفرض أن العددين هما س ، ص ∴ $\frac{\text{س} + \text{ص}}{٢} = ٣$ ∴ س + ص = ٦

---

² مجموع حدود المتتابعة الحسابية ²

$$\text{جـ}_\text{ن} = \begin{cases} \frac{\text{ن}}{٢}\,[\,\text{أ} + \text{ل}\,] & \text{إذا علم الحد الأخير} \\ \frac{\text{ن}}{٢}\,[\,٢\,\text{أ} + (\text{ن} - ١)\,\text{د}\,] & \text{إذا علم الأساس} \end{cases}$$

♣ **تذكــر أن :**

١- فى المتتابعة الحسابية إذا كانت د > ٠ " ن موجب " تكون المتتابعة تزايدية ، وإذا كانت د < ٠ " ن سالب " تكون المتتابعة تناقصية " .

٢- إذا كان عدد حدود المتتابعة = ن " فرديا " فإنه يوجد حد أوسط وحيد رتبته $\frac{ن + ١}{٢}$

♣ **فمثلا : إذا كانت ن = ١٥ " فردى " ∴ رتبة الحد الأوسط = $ح_{\frac{ن+١}{٢}}$ = $ح_{\frac{١٥+١}{٢}}$ = $ح_٨$**

٣- إذا كان عدد حدود المتتابعة = ن " زوجيا " ∴ يوجد حدان أوسطان ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، الذى يليه .

♣ **فمثلا : إذا كانت ن = ٣٠ " زوجى " ∴ رتبة الحدان الأوسطان هما = $ح_{\frac{ن}{٢}}$ = والذى يليه ($ح_{١٥}$ ، $ح_{١٦}$)**

٤- إذا أدخلنا عدة أوساط حسابية بين عددين فإن : عدد حدود الــ م . ح = عدد الأوساط + ٢

أى أن : ن = عدد الأوساط + $\boxed{٢}$ ◄ ومنها عدد الأوساط = ن - ٢

أ (الأول) ل (الأخير)

٥- رتبة الحد تزيد عن رتبة الوسط بمقدار ١

$و_ن$ = ل - د
$و_{ن-٢}$ = ل - ٣ د

♣ **فمثلا : الوسط الثالث = الحد الرابع ∴ $و_٣$ = $ح_٤$ = أ + ٣ د**

وبالمثل : $و_{١٥}$ = $ح_{١٦}$ = أ + ١٥ د

٦- متتابعة الحدود الفردية الرتبة هى : ($ح_١$ ، $ح_٣$ ، $ح_٥$ ، $ح_٧$ ، ....)

(أ + د ، أ + ٣ د ، أ + ٥ د ، ....)

حدها الأول = أ + د ، أساسها = ٢ د

المتتابعـات الهندسية

(تعريف) تسمى المتتابعة ($ح_ن$) م . هـ إذا كــان : $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = مقدار ثابت " ن ∋ $ص_+$

ويسمى المقدار الثابت بأساس المتتابعة الحسابية ويرمز له بالرمز ر

(أى أن) : ر = $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = $\frac{\text{أى حد فيها}}{\text{السابق له مباشرة}}$

الصورة العامة للمتتابعات الهندسية

إذا رمزنا للحد الأول بالرمز أ ، والأساس بالرمز ر فإنه يمكن كتابة المتتابعة الهندسية على الصورة :

(أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، .... ، ¥) " إذا كانت المتتابعة غير منتهية "

، (أ ، أ ر ، أ ر^{٢} ، أ ر^{٣} ، .... ، $\frac{ل}{ر}$ ، $\frac{ل}{ر^{٢}}$ ، ل) " إذا كانت المتتابعة منتهية "

الحد العام فى المتتابعة الهندسية

$$ح_{ن} = ل = أ\ ر^{ن - ١}$$

" ن ∋ ص$_{+}$

أ ◄ الحد الأول
ن ◄ رتبة الحد
ر ◄ الأســاس

الأوساط الهندسية

إذا كان : أ ، ب ، جـ ثلاثة حدود متتالية من م . هـ فإن مربع الوسط الهندسى = حاصل ضرب الطرفين .

و . هـ $\boxed{ب^{٢} = أ \times جـ}$ ومنها ب = ± $\sqrt{أ\ جـ}$

أى أن : الوسط الهندسى = ± $\sqrt{\text{حاصل ضرب العددين " الحدين "}}$ " يستخدم إذا ذكر كلمة الوسط الهندسى "

فمثلا : إذا كان الوسط الهندسى لعددين = ٧

نفرض أن العددين هما أ ، ب ∴ $\sqrt{أ\ ب}$ = ٧ " بتربيع الطرفين " ∴ أ ب = ٤٩

نظرية هامة

الوسط الحسابى لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى .

مجموع حدود المتتابعة الهندسية

$$جـ_{ن} = \begin{cases} \dfrac{أ\ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١} & \text{حيث } ر > ١ \\[2ex] \dfrac{أ\ (١ - ر^{ن})}{١ - ر} & \text{حيث } ر < ١ \end{cases}$$

(إذا علم عدد الحدود " ن ")

$$جـ_{ن} = \begin{cases} \dfrac{ل\ ر - أ}{ر - ١} & \text{حيث } ر > ١ \\[2ex] \dfrac{أ - ل\ ر}{١ - ر} & \text{حيث } ر < ١ \end{cases}$$

(إذا علم الحد الأخير)

♣ **<u>مجموع عدد لا نهائى " غير منته " من الحدود</u> :**

Ã **الشرط اللازم لإيجاد مجموع عدد غير منته من حدود م . هـ هو | ر | < ١ أو -١ < ر < ١**

وفى هذه الحالة يكون جـ ¥ = $\frac{\text{الحد الأول}}{\text{١ - الأساس}}$ جـ ¥ = $\frac{\text{أ}}{\text{١ - ر}}$

♣ **<u>تذكـــر أن</u> :**

١- الوسط الحسابى لعددين موجبين مختلفين أكبر من وسطهما الهندسى .

٢- إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث كميات موجبة فى تتابع حسابى فإن : ب > $\sqrt{\text{أ جـ}}$

" نثبت الوسط الحسابى ونعرف الوسط الهندسى "

٣- إذا كانت : أ ، ب ، جـ ثلاث كميات موجبة فى تتابع هندسى فإن : $\frac{\text{أ + جـ}}{\text{٢}}$ > ب

" نثبت الوسط الهندسى ونعرف الوسط الحسابى "

<u>تمارين على المتتابعات</u>

<u>أولاً</u> : <u>على المتتابعة الحسابية</u> :

١♣ م . ح فيها مجموع الحدين الثالث والخامس يساوى ٢٤ ومربع حدها السادس يساوى ٣٢٤ أوجد المتتابعة .

(الحـــل)

∴ ح٣ + ح٥ = ٢٤	∴ ح٦^٢ = ٣٢٤
أ + ٢ د + أ + ٤ د = ٢٤	(أ + ٥ د)^٢ = ٣٢٤
٢ أ + ٦ د = ٢٤ بالقسمة ÷ ٢	أ + ٥ د = ± ١٨
أ + ٣ د = ١٢ بالضرب × -١	
-أ - ٣ د = -١٢	-أ - ٣ د = -١٢
أ + ٥ د = ١٨	أ + ٥ د = -١٨ +
٢ د = ٦	٢ د = - ٣٠
د = ٣	د = -١٥
أ + ٩ = ١٢	أ - ٤٥ = ١٢
أ = ٣	أ = ٥٧
م . ح = (٣ ، ٦ ، ٩ ، .....)	م . ح = (٥٧ ، ٤٢ ، ٢٧ ، .....)

♣٢ م . ح حدودها أعداد صحيحة ، حاصل ضرب الحدين الثالث والسادس ٤٠٦ ، وخارج قسمة الحد التاســـع على الحد الرابع منها يساوى ٢ والباقى - ٦ أوجد المتتابعة .

(الحـــل)

∵ ح$_{٣}$ × ح$_{٦}$ = ٤٠٦

(أ + ٢ د) (أ + ٥ د) = ٤٠٦ ß Œ

بالتعويض من • فى Œ

(٢د - ٦ + ٢ د) (٢ د - ٦ + ٥ د) = ٤٠٦

(٤ د - ٦) (٧ د - ٦) = ٤٠٦

∵ ح$_{٩}$ - ٢ ح$_{٤}$ = - ٦

أ + ٨ د - ٢ (أ + ٣ د) = - ٦

أ + ٨ د - ٢ أ - ٦ د = - ٦

- أ + ٢ د = - ٦

أ = ٢ د + ٦ ß •

ح$_{٤}$) ح$_{٩}$ (٢

- ٢ح$_{٤}$

- ٦

٢٨ د^{٢} - ٢٤ د - ٤٢ د + ٣٦ = ٤٠٦   ç   ٢٨ د^{٢} - ٦٦ د - ٣٧٠ = ٠

١٤ د^{٢} - ٣٣ د - ١٨٥ = ٠   ç   (١٤ د - ٣٧) (د + ٥) = ٠

١٤ د = ٣٧

د = $\frac{٣٧}{١٤}$

" مرفوض "

لأن المتتابعة حدودها صحيحة

د = - ٥

أ = - ١٠ + ٦ = - ٤

م . ح = (- ٤ ، - ٩ ، - ١٤ ، .....)

♣٣ م . ح فيها مجموع الحدود الأربعة الأولى منها = ٥٦ ، ومجموع الحدود الأربعة الأخيرة منها = ١١٢ ، وحدها الأول = ١١ أوجد المتتابعة وعدد حدودها .

(الحـــل)

∵ جـ$_{٤}$ الأولى = ٥٦

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن - ١) د]

جـ$_{ن}$ = $\frac{٤}{٢}$ [٢ أ + ٣ د] = ٥٦

٢ (٢ أ + ٣ د) = ٥٦   بالقسمة ÷ ٢

٢ أ + ٣ د = ٢٨ ç Œ

∵ أ = ١١

∴ ٢٢ + ٣ د = ٢٨

٣ د = ٦ ç د = ٢

م . ح = (١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ....)

∵ جـ$_{٤}$ الأخيرة = ١١٢

ل + ل - د + ل - ٢ د + ل - ٣ د = ١١٢

٤ ل - ٦ د = ١١٢

٤ ل - ١٢ = ١١٢

٤ ل = ١٢٤ ç ل = ٣١

ح$_{ن}$ = ل = ٣١ ç أ + (ن - ١) د = ٣١

١١ + (ن - ١) × ٢ = ٣١

١١ + ٢ ن - ٢ = ٣١

٢ ن = ٢٢

ن = ١١ حدا

♣٤ كم حدا يلزم أخذها ابتداء من الحد الأول من المتتابعة الحسابية (٣٠ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ... ، ...، ....)
ليكون مجموعها = ١٠٠ ثم فسر معنى الجواب .

(الحـــل)

أ = ٣٠ ، د = -٥ ، جـ$_{ن}$ = ١٠٠ ، ن = ؟

جـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن - ١) د]

١٠٠ = $\frac{ن}{٢}$ [٦٠ + (ن - ١) × - ٥]   بالضرب × ٢

٢٠٠ = ن (٦٠ - ٥ ن + ٥)   ٢٠٠ = ن (٦٥ - ٥ ن)

٢٠٠ = (٦٥ ن - ٥ ن^{٢})   ٥ ن^{٢} - ٦٥ ن + ٢٠٠ = ٠   بالقسمة ÷ ٥

ن^{٢} - ١٣ ن + ٤٠ = ٠   (ن - ٥) (ن - ٨) = ٠

ن = ٥ ، ن = ٨

مجموع الحدود الخمسة الأولى = مجموع الحدود الثامنة الأولى

جـ$_{٥}$ الأولى = جـ$_{٨}$ الأولى = ١٠٠

وهذا يعنى أن مجموع الحدود السادس والسابع والثامن = ٠

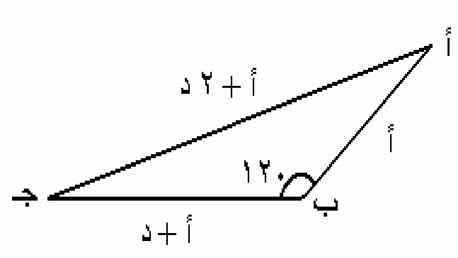
الاثبات : ح$_{٦}$ + ح$_{٧}$ + ح$_{٨}$ = أ + ٥ د + أ + ٦ د + أ + ٧ د

= ٣ أ + ١٨ د = ٣ × ٣ + ١٨ × - ٥ = ٩٠ - ٩٠ = صفر #

♣٥ إذا كونت أضلاع مثلث متتابعة حسابية وكان محيط المثلث = ٣٠ سم أوجد أطوال أضلاعه إذا كانت أكبر زواياه ١٢٠ْ .

(الحـــل)

◄ نفرض أن أطوال أضلاع المثلث هى أ ، أ + د ، أ + ٢ ء



∵ محيط المثلث = ٣٠

∴ أ + أ + د + أ + ٢ ء = ٣٠

∴ ٣ أ + ٣ د = ٣٠   بالقسمة ÷ ٣

∴ أ + د = ١٠   ï   أ = ١٠ - د   ç Œ

بتطبيق قانون جيب التمام فى المثلث أ ب جـ

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} - ٢ (أ ب) (ب جـ) جتا ب

(أ + ٢ د)^{٢} = أ^{٢} + (أ + د)^{٢} - ٢ أ (أ + د) جتا ١٢٠   ç •

بالتعويض من Œ فى • :

(١٠ - د + ٢ د)^{٢} = (١٠ - د)^{٢} + (١٠ - د + د)^{٢} - ٢ (١٠ - د) (١٠ - د + د) × $-\frac{١}{٢}$

$(١٠ + د)^{٢} = (١٠ - د)^{٢} + (١٠)^{٢} + (١٠ - د) \times ١٠$

$١٠٠ + ٢٠ د + د^{٢} = ١٠٠ - ٢٠ د + د^{٢} + ١٠٠ + ١٠٠ - ١٠ د$

٥٠ د = ٢٠٠   ç   د = ٤

أ = ١٠ - ٤ = ٦

∴   أضلاع المثلث هى ٦ ، ١٠ ، ١٤   #

٦♣ م . هـ تزايدية مجموع الحدين الأول والأخير = ٦٦ ، وحاصل ضرب الحدين الثانى وقبل الأخير = ١٢٨ ، ومجموع حدودها ١٢٦ أوجد عدد حدود هذه المتتابعة .

(الحـــل)

أ + ل = ٦٦   ç   أ = ٦٦ - ل   ç   Œ

$ح_{٢} \times \frac{ل}{ر} = ١٢٨$ ç $أ ر \times \frac{ل}{ر} = ١٢٨$ ç   أ ل = ١٢٨   ç   •

وبالتعويض من Œ فى •   (٦٦ - ل) ل = ١٢٨   ç $٦٦ ل - ل^{٢} = ١٢٨$ ç

∴ $ل^{٢} - ٦٦ ل + ١٢٨ = ٠$

(ل - ٢) (ل - ٦٤) = ٠

ل - ٢ = ٠	ل - ٦٤ = ٠
ل = ٢	ل = ٦٤
$أ = \frac{١٢٨}{٢} = ٦٤$	$أ = \frac{١٢٨}{٦٤} = ٢$

وحيث أن المتتابعة تزايدية   ∴   أ = ٢ ، ل = ٦٤ ،   ∵ $جـ_{ن} = ١٢٦$

∴ $\frac{ل ر - أ}{ر - أ} = ١٢٦$ | ç $\frac{٦٤ ر - ٢}{ر - ١} = ١٢٦$

١٢٦ ر - ١٢٦ = ٦٤ ر - ٢   ç   ٦٢ ر = ١٢٤

وبالقسمة للطرفين على ٦٢   ∴   ر = ٢

∴   م . هـ = (٢ ، ٤ ، ٨ ، .... ، ٦٤)

$ح_{ن} = ل = ٦٤$ ç $أ ر^{ن - ١} = ٦٤$

$٢^{١} \times ٢^{ن - ١} = ٦٤$ ç $٢^{١ + ن - ١} = ٦٤$ ç $٢^{ن} = ٢^{٦}$

ن = ٦   #

♣٧ م . هـ حدها الرابع = ٤ ، وحدها الأخير = ٦٤ ، والنسبة بين مجموع ن من حدودها إلى مجموع ن من مقلوبات هذه الحدود = ٣٢ : ١ أوجد المتتابعة وعدد حدودها .

(الحـــل)

∵ $ح_٤ = ٤$ ç $أ ر^{٣} = ٤$ ç Œ

∵ ل = ٦٤ ç $أ ر^{ن - ١} = ٦٤$ ç •

∵ الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هى : (أ ، أ ر ، $أ ر^{٢}$ ، .... ، ل)

∴ المتتابعة الهندسية لمقلوبات الحدود هى : ($\frac{١}{أ}$ ، $\frac{١}{أ ر}$ ، $\frac{١}{أ ر^{٢}}$ ، .... ، $\frac{١}{ل}$)

حيث الحد الأول $ح_١ = \frac{١}{أ}$ ، والأساس = $\frac{١}{ر}$

∴ $جـ_ن$ للمقلوبات = $\frac{\frac{١}{أ}\left[١ - \left(\frac{١}{ر}\right)^{ن} \right]}{١ - \frac{١}{ر}} = \frac{\frac{ر^{ن} - ١}{ر^{ن}}}{أ \left(\frac{ر - ١}{ر} \right)}$

∴ $جـ_ن$ للمقلوبات = $\frac{ر^{ن} - ١}{ر} \times \frac{ر}{أ (ر - ١)} = \frac{ر (ر^{ن} - ١)}{أ ر^{ن} (ر - ١)}$

∵ $جـ_ن$: $جـ_ن$ للمقلوبات = ٣٢ : ١

∴ $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١} \div \frac{ر (ر^{ن} - ١)}{أ ر^{ن} (ر - ١)} = \frac{٣٢}{١}$

∴ $\frac{أ (ر^{ن} - ١)}{ر - ١} \times \frac{أ ر^{ن} (ر - ١)}{ر (ر^{ن} - ١)} = ٣٢$

ç $أ \times أ ر^{ن - ١} = ٣٢$ ç أ × ٦٤ = ٣٢ بالقسمة ÷ ٦٤ ∴ أ $=\frac{١}{٢}$

بالتعويض فى Œ $\frac{١}{٢}$ $ر^{٣} = ٤$ ç $ر^{٣} = ٨$ ç ر = ٢

∴ م . هـ = ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، .... ، ٦٤)

$ح_ن$ = ل = ٦٤ ç $أ ر^{ن - ١} = ٦٤$

ç $\frac{١}{٢} \times ٢^{ن - ١} = ٦٤$ بالضرب × ٢

$٢^{ن - ١} = ١٢٨$ ç $٢^{ن - ١} = = ٢^{٧}$

ç ن - ١ = ٧ ç ن = ٨ حدود #

الفصل الثالث

التباديل

التباديل:- هو كل ترتيب يمكن عمله من مجموعة من الاشياء بأخذ بعضها أو كلها

مبدأ العد :- إذا أمكن أجراء عملية بأحدى طرق مختلفة عددها م وكان لدينا فى الوقت نفسه عملية أخرى يمكن أجراؤها بطرق عددها ن فإن عدد الطرق الممكنة لاجراء العمليتين معا يساوى م × ن

قوانيين التباديل :-

(١) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}\,(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢)\ ....\ (\text{ن} - \text{ر} + ١)$

(٢) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = \lfloor\underline{\text{ن}} = \text{ن}\,(\text{ن} - ١)(\text{ن} - ٢) \times .... \times ٣ \times ٢ \times ١$

(٣) $\lfloor\underline{\text{ن}} = \text{ن}\ \lfloor\underline{\text{ن} - ١} = \text{ن}\,(\text{ن} - ١)\ \lfloor\underline{\text{ن} - ٢}$

(٤) $^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \dfrac{\lfloor\underline{\text{ن}}}{\lfloor\underline{\text{ن} - \text{ر}}}$

(٥) $^{\text{ن}}\text{ل}_{٠} = ١$ ، $\lfloor\underline{\text{صفر}} = ١$

مثال أوجد قيمة كلا مما ياتى $^{٥}\text{ل}_{٢}$ ، $^{٧}\text{ل}_{٣}$ ، $^{٩}\text{ل}_{٤}$ ، $^{٥}\text{ل}_{٠}$ ، $^{١٠}\text{ل}_{١}$

? الحـــــــــــل @

$^{٥}\text{ل}_{٢} = ٥ \times ٤ = ٢٠$

$^{٧}\text{ل}_{٣} = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$

$^{٩}\text{ل}_{٤} = ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ =$

$^{١٠}\text{ل}_{١} = ١٠$

$^{٥}\text{ل}_{٠} = ١$

مثال أوجد قيمة كلا من $\lfloor\underline{٤}$ ، $\lfloor\underline{٥}$ ، $\lfloor\underline{٦}$

? الحـــــــــــل @

$\lfloor\underline{٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

$\lfloor\underline{٥} = ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ١٢٠$

$\lfloor\underline{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

مثال إذا كان $\frac{\lfloor \text{ن} + ١}{\lfloor \text{ن} - ١} = ٢٠$ فما قيمة ن

الحــــــــل

$\because \frac{\lfloor \text{ن} + ١}{\lfloor \text{ن} - ١} = ٢٠$ $\therefore \frac{(\text{ن}+١)\ \text{ن}\ \lfloor \text{ن} - ١}{\lfloor \text{ن} - ١} = ٢٠$

ن (ن + ١) = ٢٠   (ن – ٤)(ن + ٥) = ٠

$\text{ن}^{٢}$ + ن – ٢٠ = ٠   ن = ٤   ن = -٥ (مرفوض)

مثال إذا كان $\lfloor \text{ن}$ = ٥٠٤٠ فما قيمة ن

الحــــــــل

٥٠٤٠	١
٥٠٤٠	٢
٢٥٢٠	٣
٨٤٠	٤
٢١٠	٥
٤٢	٦
٧	٧
١	

نقسم ٥٠٤٠ على ١ ثم على ٢ ثم على ٣ ....

حتى يؤول خارج القسمة الى الواحد الصحيح

$\lfloor \text{ن}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

ن = ٧

مثال إذا كان $^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ٧٢٠

فما قيمة ر

الحــــــــل

$^{١٠}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ١٠ × ٩ × ٨

ر = ٣

مثال إذا كان $^{\text{ن}}\text{ل}_{٣}$ = ٦٠ أوجد ن

الحــــــــل

ل = ٥ × ٤ × ٣

ن = ٥

مثال إذا كان $^{٦}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ٣٠ فما قيمة ر

الحــــــــل

$^{٦}\text{ل}_{\text{ر}}$ = ٦ × ٥

ر = ٢

مثال إذا كان $^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ٩٠ أوجد ن

الحــــــــل

$^{\text{ن}}\text{ل}_{٢}$ = ١٠ × ٩

ن = ١٠

التوافيق

<u>التوافيق</u> :- هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها

فمثلا $^{٥}\text{ق}_{٢}$ هى عدد المجوعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٥ عناصر بصرف النظر عن الترتيب

أما $^{٥}\text{ل}_{٢}$ هى عدد المجوعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٥ عناصر مع مراعاة الترتيب

قوانيين التوافيق

(١) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$

(٢) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!\ (\text{ن} - \text{ر})!}$

(٣) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن} - \text{ر}}$ (قانون التبسيط) فمثلا $^{٧}\text{ق}_{٥} = {}^{٧}\text{ق}_{٢}$

(٤) $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٠} = ١$

(٥) إذا كان $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{س}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ص}}$ فان $\text{س} = \text{ص}$ أو $\text{ن} = \text{س} + \text{ص}$

(٦) $\dfrac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر} - ١}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}$ (قانون النسبة) فمثلا $\dfrac{^{٩}\text{ق}_{٤}}{^{٩}\text{ق}_{٣}} = \dfrac{٩ - ٤ + ١}{٤} = \dfrac{٦}{٤}$

لايجاد النسبة بين حدين غير متتاليين

$$\frac{^{٨}\text{ق}_{٥}}{^{٨}\text{ق}_{٣}} = \frac{^{٨}\text{ق}_{٥}}{^{٨}\text{ق}_{٤}} \times \frac{^{٨}\text{ق}_{٤}}{^{٨}\text{ق}_{٣}} = \frac{٨ - ٤}{٥} \times \frac{٨ - ٣}{٤} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{٤} = ١$$

$$\frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{الكبير}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{الصغير}}} = \frac{\text{ن} - \text{الصغير}}{\text{الكبير}}$$

مثال بكم طريقة يمكن يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها يتكون من شخصين من بين ١٠ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

? الحـــــــــل @

يمكن أنتخاب اللجنة الاولى بعدد من الطرق = $^{١٠}ق_{٢}$ = $\frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١}$ = ٤٥ طريقة

إذا انتخبنا اثنين للجنة الاولى يتبقى ٨ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثانية بعدد من الطرق = $^{٨}ق_{٢}$ = $\frac{٨ \times ٧}{٢ \times ١}$ = ٢٨ طريقة

وأخيرا يتبقى ٦ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثالثة بعدد من الطرق

= $^{٦}ق_{٢}$ = $\frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١}$ = ١٥ طريقة

∴ عدد الطرق التى يمكن بها اختيار اللجان الثلاث = ٤٥ × ٢٨ × ١٥ = ١٨٩٠٠

مثال أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها يشترط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات بكم طريقة يمكن أختيار الاشخاص الخمسة

? الحـــــــــل @

يمكن أختيار ٣ رجال بطرق عددها = $^{٧}ق_{٣}$ = $\frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٣٥

يمكن أختيار سيدتان بطرق عددها = $^{٤}ق_{٢}$ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = ٦

عدد الطرق الممكنة لاختيار الاشخاص الخمسة = ٣٥ × ٦ = ٢١٠

مثال إذا أريد أنتخاب ١١ رجل من بين ١٤ رجلا فما عدد الطرق للانتخاب

? الحـــــــــل @

عدد الطرق = $^{١٤}ق_{١١}$ = $^{١٤}ق_{٣}$ = $\frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢}{٣ \times ٢ \times ١}$ = ٣٦٤

مثال أوجد قيمة كلا من ${}^{١٠}\text{ق}_{٣}$ ، ${}^{١٣}\text{ق}_{٤}$ ، ${}^{٢٠}\text{ق}_{١٧}$ ، ${}^{١٥}\text{ق}_{.}$ ، ${}^{١٠}\text{ق}_{١٠}$

الحـــــــــل

$${}^{١٠}\text{ق}_{٣} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٢٠ \qquad {}^{١٣}\text{ق}_{٤} = \frac{١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} = ٧١٥$$

$${}^{٢٠}\text{ق}_{١٧} = {}^{٢٠}\text{ق}_{٣} = \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨}{٣ \times ٢ \times ١} =$$

$${}^{١٥}\text{ق}_{.} = ١ \qquad {}^{١٠}\text{ق}_{١٠} = ١$$

نظرية ذات الحدين

$(\text{أ} + \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{ب}^{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{ن}}$

$(\text{أ} - \text{ب})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{ن}} - {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{ب}^{١}\,\text{أ}^{\text{ن}-١} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{\text{ن}-٢} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ب}^{\text{ن}}$

حالة خاصة

$(١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} + \ldots\ldots + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}^{\text{ن}}$

$= ١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} + \ldots\ldots + \text{س}^{\text{ن}}$

****

مثال أوجد مفكوك $(\text{أ} + \text{ب})^{٥}$

(١) حسب قوى أ التنازلية (٢) حسب قوى أ التصاعدية

الحـــــــــل

(١) حسب قوى أ التنازلية

$(\text{أ} + \text{ب})^{٥} = \text{أ}^{٥} + {}^{٥}\text{ق}_{١}\,\text{ب}\,\text{أ}^{٤} + {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,\text{ب}^{٤}\,\text{أ} + {}^{٥}\text{ق}_{٥}\,\text{ب}^{٥}\,\text{أ}^{٠}$

$= \text{أ}^{٥} + ٥\,\text{ب}\,\text{أ}^{٤} + ١٠\,\text{ب}^{٢}\,\text{أ}^{٣} + ١٠\,\text{ب}^{٣}\,\text{أ}^{٢} + ٥\,\text{ب}^{٤}\,\text{أ} + \text{ب}^{٥}$

(٢) حسب قوى أ التصاعدية

$(\text{ب} + \text{أ})^{٥} = \text{ب}^{٥} + {}^{٥}\text{ق}_{١}\,\text{أ}\,\text{ب}^{٤} + {}^{٥}\text{ق}_{٢}\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٣}\,\text{أ}^{٣}\,\text{ب}^{٢} + {}^{٥}\text{ق}_{٤}\,\text{أ}^{٤}\,\text{ب} + {}^{٥}\text{ق}_{٥}\,\text{أ}^{٥}$

$= \text{ب}^{٥} + ٥\,\text{أ}\,\text{ب}^{٤} + ١٠\,\text{أ}^{٢}\,\text{ب}^{٣} + ١٠\,\text{أ}^{٣}\,\text{ب}^{٢} + ٥\,\text{أ}^{٤}\,\text{ب} + \text{أ}^{٥}$

مثال أوجد مفكوك (١ + س)^{٧} حسب قوى س التصاعدية

الحـــــــل

(١ + س)^{٧} = ١ + ^{٧}ق$_{١}$ س+ ^{٧}ق$_{٢}$ س^{٢} + ^{٧}ق$_{٣}$ س^{٣} + ^{٧}ق$_{٤}$ س^{٤} + ^{٧}ق$_{٥}$ س^{٥} +^{٧}ق$_{٦}$ س^{٦} +^{٧}ق$_{٧}$ س^{٧}

= ١ + ٧ س + ٢١ س^{٢} + ٣٥س^{٣} + ٣٥س^{٤} + ٢١س^{٥} + ٧س^{٦} + س^{٧}

****

مثال أوجد مفكوك (٢س – ٣ص)^{٣}

الحـــــــل

(٢س- ٣ص)^{٣} = (٢س)^{٣} + ^{٣}ق$_{١}$(-٣ص)^{١}(٢س)^{٢} +^{٣}ق$_{٢}$(-٣ص)^{٢}(٢س)+ (-٣ص)^{٣}

= ٨س^{٣} – ٣٦ ص س^{٢} +٥٤ ص^{٢} س – ٢٧ ص

****

مثال أوجد (٠,٩٨)^{٥} لاربعة أرقام عشرية

الحـــــــل

(١ – ٠,٠٢)^{٥} = ١ +^{٥}ق$_{١}$(-٠,٠٢)^{١} +^{٥}ق$_{٢}$(-٠,٠٢)^{٢} +^{٥}ق$_{٣}$ (-٠,٠٢)^{٣}+ ...

= ١+٥ × -٠,٠٢ + ١٠ × ٠,٠٠٠٤ + ١٠ × -٠,٠٠٠٠٠٨

= ١ – ٠,١ + ٠,٠٠٤ -٠,٠٠٠٠٨ = ٠,٩٠٣٩

الحد العام فى مفكوك (س + ص)^{ن} يعطى من العلاقة

ح$_{ر+١}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ (الثانى)^{ر}(الاول)$^{ن – ر}$

معامل ح$_{ر+١}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ (معامل الثانى)^{ر}(معامل الاول)$^{ن – ر}$

المحددات

تعريف المحدد:-

المحدد من الدرجة ن يتكون من ن من الصفوف ، ن من الاعمدة وينشأ من حذف (ن – ١) من المتغيرات فى ن من المعادلات الخطية ويكتب رمزيا على الشكل الاتى

$$\text{م}_{\text{ن}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \cdots\cdots & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \cdots\cdots & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{\text{ن}١} & \text{أ}_{\text{ن}٢} & \cdots\cdots & \text{أ}_{\text{ن}١} \end{vmatrix} \quad \text{أ}_{\text{ص ع}} \in \text{ح}$$

ص ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ن

أنواع المحددات :-

(١) محدد ١ × ١ هو يتكون من صف واحد وعمود واحد $\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} \end{vmatrix}$

(٢) محدد من الدرجة ٢ × ٢ [صفين وعمودين] وهو كالاتى

$$\text{م}_{٢ \times ٢} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}$$

(٣) محدد من الدرجة ٣ × ٣ [٣ صفوف ، ٣ أعمدة]

$$\text{م}_{٣ \times ٣} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

كيفية إيجاد قيمة المحدد :-

(أولا) إيجاد قيمة المحدد ٢ × ٢

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \times \text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{١٢} \times \text{أ}_{٢١}$$

مثال أوجد قيمة كلا من المحددات الاتية

(١) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

قيمة المحدد = ٥ × ٤ – ٣ × ٢

= ٢٠ – ٦ = ١٤

(٢) $\begin{vmatrix} -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

قيمة المحدد = ٣ × ٤ – (٥ × -٢)

= ١٢ + ١٠ = ٢٢

(٣) $\begin{vmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

قيمة المحدد = ٠ × ٤ – ٣ × ٠

= ٠ – ٠ = ٠

(٤) $\begin{vmatrix} -٤ & ٧ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

قيمة المحدد = ٧ × -١ – (٣ × -٤)

= -٧+ ١٢ = ٥

(٥) $\begin{vmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

قيمة المحدد = ١ × ٤ – ٣ × ٠

= ٤ – ٠ = ٤

(٦) $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ -١ & ٣ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

قيمة المحدد = ٥ × -١ – (٣ × ٢)

= -٥ – ٦ = -١١

(ثانيا) إيجاد قيمة المحدد من رتبة ٣ × ٣

$\begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix}$

يمكن الفك باستخدام الصف الاول

$$= \text{أ}_{١١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٢١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٣١}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن الفك بالصف الثانى كالاتى

$$= -\text{أ}_{١٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{٢٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} - \text{أ}_{٣٢}\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

ويمكن الفك بأى صف أو عمود [من الافضل عند فك محدد ٣ × ٣ الفك باستخدام الصف أو العمود المحتوى على أكبر أصفار]

لاحظ إشارات كل عنصر من عناصر المحدد ٣ × ٣

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

مثال **أوجد قيمة المحدد**

$$\begin{vmatrix} ١ & ١- & ٢ \\ ٢- & ٣ & ١ \\ ٤ & ٥ & ١- \end{vmatrix}$$

? **الحـــــــــل** @

$$\text{المحدد} = ١\begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٥ & ١- \end{vmatrix} - (١-)\begin{vmatrix} ٢- & ١ \\ ٤ & ١- \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٢- & ٣ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$$

= ١ (٣ × ١- – ٥ × ١) +١ (٢- × ١- – ٤ × ١) +٢ (٢- × ٥ – ٤ × ٣)

= (٣- – ٥) + (٢ – ٤) +٢ (١٠- – ١٢)

= ٨- – ٢ +٢ × ٢٢- = ٨- – ٢ – ٤٤ = ٥٤-

****

مثال **أوجد قيمة المحدد**

$$\begin{vmatrix} \text{قاس} & \text{ظا}^{٢}\text{س} \\ ١ & \text{قاس} \end{vmatrix}$$

? **الحـــــــــل** @

المحدد = قاس × قاس – ١ × ظا^{٢} س = قا^{٢} س – ظا^{٢} س = ١

تذكر أن

١ + ظا^{٢} س = قا^{٢} س

١ + ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س

مثال أوجد مجموعة الحل للمعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} & ٠ & -١ \\ ٣ & \text{س} & ٤ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = ١٠$

? الحــــــل @

بفك المحدد ومساواته بـ ١٠

$\text{س} \begin{vmatrix} \text{س} & ٤ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + (-١) \begin{vmatrix} ٣ & \text{س} \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠$

س (س – ٨) – ١ (٦ – ٢ س) = ١٠

س^{٢} – ٨ س -٦ + ٢س – ١٠ = ٠

س^{٢} – ٦ س – ١٦ = ٠

(س – ٨)(س + ٢) = ٠

س = ٨   س = -٢

مثال إذا علم أن $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = ٣$ أوجد قيمة كلا مما يأتى

(١) $\begin{vmatrix} ٣\text{جـ} & ٦\text{أ} \\ ٢\text{ء} & ٤\text{ب} \end{vmatrix}$ (٢) $\begin{vmatrix} \text{أ+جـ} & \text{ب+ء} \\ ٧\ \text{جـ} & ٧\ \text{ء} \end{vmatrix}$

? الحــــــل @

$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & \text{ء} \end{vmatrix} = ٣ \Leftarrow$ أ ء – ب جـ = ٣

قيمة المحدد الاول = ٣جـ × ٤ ب – ٢ ء × ٦ أ = ١٢ جـ ب – ١٢ ء أ

= ١٢ (جـ ب – ء أ) = ١٢ × -٣ = -٣٦

قيمة المحدد الثانى = (أ + جـ) × ٧ ء – ٧ جـ (ب + ء)

= ٧ أ ء + ٧ جـ ء - ٧ جـ ب – ٧ جـ ء

= ٧ أ ء – ٧ جـ ب

= ٧ (أ ء – ب جـ) = ٧ × ٣ = ٢١

خواص المحددات

خاصية(١)

فى أى محدد إذا بدلت الصفوف بالاعمدة والاعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فان قيمة المحدد لا تتغير

فمثلا

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 15$$

خاصية(٢)

قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أحد صفوفه أو أحد أعمدته

****

مثال أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

(١) باستخدام عناصر الصف الثالث   (٢) بأستخدام عناصر العمود الثانى

? الحـــــــل @

(١) بأستخدام عناصر الصف الثالث

مـ = - (-١) $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & -٣ \end{vmatrix}$ + ٤ $\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ (-٩ – ٠) + ٤(٦ – ٠) = -٩+٢٤ = ١٥

(٢) بأستخدام العمود الثانى

مـ = - (-١) $\begin{vmatrix} ٠ & -٣ \\ ٠ & -٤ \end{vmatrix}$ + ٢ $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{vmatrix}$ - (-٣) $\begin{vmatrix} ٣ & ٠ \\ -١ & -١ \end{vmatrix}$

= ١ (٠ – ٠) + ٢ (١٢ – ٠) +٣ (-٣ – ٠) = ٠ +٢٤ – ٩ = ١٥

خاصية(٣)

إذا كانت عناصر أى صف (أى عمود) كلها أصفار فإن قيمة المحدد = صفر

فمثلا المحددات

$\begin{vmatrix} ٢ & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix}$ = صفر ،، $\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & -٢ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = صفر

خاصية(٤)

إذا تبادل صفان (أو عمودان) فان قيمة المحدد النـاتج تساوى قيمة المحدد الاصلى مضروبا × -١

فمثلا

$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ & ٢ \\ -٣ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ -٣ & ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = - $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٥ & ٤ & ٢ \\ ٤ & -٣ & ١ \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix}$$

خاصية(٥)

إذا تساوى صفان (أو عمودان) فإن قيمة المحدد = صفر

فمثلا

$$\begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ٠ \qquad \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٥ \\ ٤ & -٣ & ٤ \\ -١ & ٦ & -١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

خاصية(٦)

إذا وجد عامل مشترك ك فى جميع عناصر أى صف (عمود) فان هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد ويكون المحدد الاصلى = ك × المحدد الناتج

فمثلا

$$\begin{vmatrix} ١٠ & ١٥ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = ٥ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix}$$

والعكس

$$٣ \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ١٥ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \quad \text{أو} = \begin{vmatrix} ٦ & ٥ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} \quad \text{أو} = \begin{vmatrix} ٢ & ١٥ \\ ١ & ١٢ \end{vmatrix}$$

مثال بدون فك أثبت أن

$$\begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١٥ \\ ٤ & -١ & ٢٠ \\ ٧ & ٦ & ٣٥ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

? الحـــــــــل @

بأخذ ٥ عامل مشترك من عناصر العمود الثالث

المحدد = ٥ $\begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٣ \\ ٤ & -١ & ٤ \\ ٧ & ٦ & ٧ \end{vmatrix}$ **= ٥ × صفر = صفر**

خاصية(٧)

تحويل محدد الى مجموع محددين :-

فى أى محدد إذا كتبت جميع عناصر أى صف (أى عمود) كمجموع عنصرين فإن قيمة المحدد يمكن كتابتها كمجموع قيمتى محددين ٠

$$\begin{vmatrix} \text{أ+س} & \text{ب + ص} & \text{جـ+ ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ك} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ك} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ك} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{أ+س} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ل+ص} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ف+ع} & \text{ق} & \text{ك} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ل} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ف} & \text{ق} & \text{ك} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{س} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ص} & \text{م} & \text{ن} \\ \text{ع} & \text{ق} & \text{ك} \end{vmatrix}$$

والعكس عند جمع محددين لا يختلفان الا فى عناصر أحد الصفوف (أو الاعمدة) نجمع هذان الصفان أو العمودان وبقاء بقية العناصر كما هى ٠

مثال **أوجد ناتج** $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ & -١ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{vmatrix}$

? الحـــــــــل @

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٣ & ٥ \\ ١- & ٢ & ٤ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ١- & ٢ & ٤ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ١ \\ ١- & ٢ & ٤ \\ ٢- & ١- & ٣ \end{vmatrix}$$

خاصية(٨)

إذا أضيفت لعناصر أى صف (أو عمود) فى محدد مضاعفات نظائرها من عناصر أى صف (أو عمود) أخر فان قيمة المحدد لا تتغير

فمثلا

$$\begin{vmatrix} ب - ٣ء & أ -٣جـ \\ ء & جـ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب & أ + ٢ب \\ ء & جـ +٢ء \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ب & أ \\ ء & جـ \end{vmatrix}$$

خاصية(٩)

قيمة المحدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

الصورة المثلثية العليا

$$٤٢ = ٧ \times ٣ \times ٢ = \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ١ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$٢٠ = ٤ \times ١ \times ٥ = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ١ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

ملاحظة هامة

بأستخدام خاصية (٨) يمكن تحويل أى محدد الى الصورة المثلثية وبالتالى يسهل أيجاد قيمته بدون فكه

مثال بدون فك المحدد إثبت ان

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ب} + ٢\text{أ})(\text{ب} - \text{أ})^٢$$

الحـــــــــل

$$\text{المحدد} = \begin{vmatrix} \text{ب}+٢\text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{ب}+٢\text{أ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{ب}+٢\text{أ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{ب} + ٢\text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ} \\ ١ & \text{ب} & \text{أ} \\ ١ & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix}$$

$ع_١ = ع_١ + ع_٢ + ع_٣$

$$= (\text{ب} + ٢\text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ} \\ ٠ & \text{ب}-\text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{ب}-\text{أ} \end{vmatrix} = (\text{ب} + ٢\text{أ})(\text{ب} - \text{أ})^٢$$

$ص_٢ = ص_٢ - ص_١$

$ص_٣ = ص_٣ - ص_١$

مثال بدون فك المحدد إثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{ب} - \text{جـ})(\text{جـ} - \text{أ})$$

الحـــــــــل

$$= \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ١ & \text{ب} & \text{ب}^٢ \\ ١ & \text{جـ} & \text{جـ}^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{ب}-\text{أ} & \text{ب}^٢-\text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{جـ}-\text{أ} & \text{جـ}^٢-\text{أ}^٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & \text{ب}-\text{أ} & (\text{ب}-\text{أ})(\text{ب}+\text{أ}) \\ ٠ & \text{جـ}-\text{أ} & (\text{جـ}-\text{أ})(\text{جـ}+\text{أ}) \end{vmatrix}$$

$ص_٢ = ص_٢ - ص_١$

$ص_٣ = ص_٣ - ص_١$

$$= (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & ١ & \text{ب}+\text{أ} \\ ٠ & ١ & \text{جـ}+\text{أ} \end{vmatrix} = (\text{ب} - \text{أ})(\text{جـ} - \text{أ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{أ}^٢ \\ ٠ & ١ & \text{ب}+\text{أ} \\ ٠ & ٠ & \text{جـ}-\text{ب} \end{vmatrix}$$

بأخذ (ب – أ) عامل مشترك من $\text{ص}_٢$

بأخذ (جـ - أ) عامل مشترك من $\text{ص}_٣$

$\text{ص}_٣ = \text{ص}_٣ - \text{ص}_٢$

= (ب – أ) (جـ - أ) (جـ - ب) = - (أ – ب) (جـ - أ) × - (ب – جـ)

= (أ – ب)(ب – جـ) (جـ - أ)

مثال بدون فك إثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{أ+ب} & \text{جـ + أ} & \text{ب+جـ} \\ \text{أ ب} & \text{جـ أ} & \text{ب جـ} \end{vmatrix} = -\text{(أ – ب)(ب – جـ)(جـ - أ)}$$

الحـــــــــل

المحدد =

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ \text{ب – جـ} & \text{أ – ب} & \text{ب + جـ} \\ \text{أ (ب – جـ)} & \text{جـ (أ – ب)} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_٢ = \text{ع}_٢ - \text{ع}_١$

$\text{ع}_٣ = \text{ع}_٣ - \text{ع}_٢$

$$= \text{(أ – ب) (ب – جـ)} \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ١ & ١ & \text{ب + جـ} \\ \text{أ} & \text{جـ} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$$

$$= \text{(أ – ب) (ب – جـ)} \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & \text{ب + جـ} \\ \text{أ- جـ} & \text{جـ} & \text{ب جـ} \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_٣ = \text{ع}_٣ - \text{ع}_٢$

= (أ – ب) (ب – جـ) (أ – جـ) = - (أ – ب) (ب – جـ)(جـ - أ)

مثال بدون فك إثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{س} \\ \text{ب} & \text{س} & \text{أ} \\ \text{س} & \text{ب} & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{(س+ أ + ب)(س – أ)(س– ب)}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{س + أ + ب} \\ \text{ب} & \text{س} & \text{س + أ + ب} \\ \text{س} & \text{ب} & \text{س + أ + ب} \end{vmatrix} = \text{(س + أ + ب)} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & ١ \\ \text{ب} & \text{س} & ١ \\ \text{س} & \text{ب} & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \text{(س + أ + ب)} \begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & ١ \\ ٠ & \text{س – أ} & ٠ \\ \text{س – ب} & \text{ب – أ} & ٠ \end{vmatrix}$$

$\text{ع}_٢ = \text{ع}_٢ - \text{أ ع}_١$

$\text{ع}_٣ = \text{ع}_٣ - \text{ب ع}_١$

$$= (\text{س} + \text{أ} + \text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & \text{س} - \text{أ} & ٠ \\ ٠ & \text{ب} - \text{أ} & \text{س} - \text{ب} \end{vmatrix} = (\text{س} + \text{أ} + \text{ب})(\text{س} - \text{أ})(\text{س} - \text{ب})$$

مثال بدون فك إثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & -\text{ب} & -\text{جـ} \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = \text{أ} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٣}$$

الحـــــــــــل

$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{١} + \text{ب}\ \text{ص}_{٢}$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}^{٢} & ٠ & -\text{جـ} \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_{١} = \text{ص}_{١} + \text{جـ}\ \text{ص}_{٣}$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}^{٢}+\text{جـ}^{٣} & ٠ & -\text{جـ} \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ}^{٢} & ٠ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٣}$$

مثال بدون فك إثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢\text{س} & \text{س} \\ ١ & ٢\text{ص} & \text{ص} \\ ١ & \text{س}+\text{ص} & \text{ص} \end{vmatrix} = (\text{س} - \text{ص})^{٢}$$

الحـــــــــــل

$\text{ص}_{٢} = \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}$

$\text{ص}_{٣} = \text{ص}_{٣} - \text{ص}_{١}$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ٢\text{س} & \text{س} \\ ٠ & ٢(\text{ص}-\text{س}) & \text{ص} - \text{س} \\ ٠ & \text{ص} - \text{س} & \text{ص} - \text{س} \end{vmatrix}$$

$\text{ص}_{٣} = \text{ص}_{٣} - \frac{١}{٢}\text{ص}_{٢}$

$$= (\text{ص} - \text{س})(\text{ص} - \text{س}) \begin{vmatrix} ١ & ٢\text{س} & \text{س} \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= (\text{ص} - \text{س})^2 \begin{vmatrix} ١ & \text{س}^2 & \text{س} \\ ٠ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & \frac{١}{٢} \end{vmatrix} = (\text{ص} - \text{س})^2 \times ١ \times ٢ \times \frac{١}{٢}$$

$$= (\text{ص} - \text{س})^2 = (\text{س} - \text{ص})^2$$

مثال بدون فك إثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ} + \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{أ} + \text{ص} & \text{ع} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{أ} + \text{ع} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 (\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع})$$

الحـــل

$\text{ع}_1 = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{أ} + \text{ص} & \text{ع} \\ \text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع} & \text{ص} & \text{أ} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$(\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{ع} \\ ١ & \text{أ} + \text{ص} & \text{ع} \\ ١ & \text{ص} & \text{أ} + \text{ع} \end{vmatrix}$$

$$= (\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ص} & \text{ع} \\ ٠ & \text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{أ} \end{vmatrix} = \text{أ}^2 (\text{أ} + \text{س} + \text{ص} + \text{ع})$$

مثال بدون فك إثبت أن

$$\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & ١ + \text{ب}^2 & \text{ب جـ} \\ \text{جـ} & \text{ب جـ} & ١ + \text{جـ}^2 \end{vmatrix} = ١$$

الحـــل

$\text{ع}_2 = \text{ع}_2 - \text{ب ع}_1$

$\text{ع}_3 = \text{ع}_3 - \text{جـ ع}_1$

$$= \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ \text{ب} & ١ & ٠ \\ \text{جـ} & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١$$

مثال بأستخدام خصائص المحددات إثبت أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ + ء س} & \text{ء س – أ} & \text{١} \\ \text{ب + هـ س} & \text{هـ س – ب} & \text{١} \\ \text{جـ + و س} & \text{و س – جـ} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٢س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$$

? الحـــــــــل @

$\text{ع}_{\text{٢}} = \text{ع}_{\text{٢}} + \text{ع}_{\text{١}}$

$$= \begin{vmatrix} \text{أ + ء س} & \text{٢ ء س} & \text{١} \\ \text{ب + هـ س} & \text{٢ هـ س} & \text{١} \\ \text{جـ + و س} & \text{٢ و س} & \text{١} \end{vmatrix}$$

$$= \text{٢ س} \begin{vmatrix} \text{أ + ء س} & \text{ء} & \text{١} \\ \text{ب + هـ س} & \text{هـ} & \text{١} \\ \text{جـ + و س} & \text{و} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٢س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ء} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{هـ} & \text{١} \\ \text{جـ} & \text{و} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٢س} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{١} & \text{١} & \text{١} \end{vmatrix}$$

مثال بأستخدام طريقة كرامر أوجد مجموعة الحل للمعادلتين

س +٣ ص = ١ ،، ٢ س + ٨ س = ٠

? الحـــــــــل @

نوجد محدد المعاملات $\triangle = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{٨} \end{vmatrix} = \text{١} \times \text{٨} - \text{٣} \times \text{٢} = \text{٨} - \text{٦} = \text{٢}$

نوجد محدد س = $\triangle_{\text{س}} = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{٨} \end{vmatrix} = \text{٨} - \text{٠} = \text{٨}$

نوجد محدد ص = $\triangle_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{٨} \end{vmatrix} = \text{٨} - \text{٦} = \text{٢}$

$\text{س} = \frac{\triangle_{\text{س}}}{\triangle} = \frac{\text{٨}}{\text{٢}} = \text{٤}$ $\text{ص} = \frac{\triangle_{\text{ص}}}{\triangle} = \frac{\text{٢}}{\text{٢}} = \text{١}$

م ٠ ح = { (٤ ، ١) }

مثال بأستخدام طريقة كرامر أوجد مجموعة الحل للمعادلات الاتية

س – ص + ع = ٢ ، ٢س+٣ص- ع =٥ ، ٣س – ٥ص + ٢ع = -١

الحــــــــل

$$\triangle = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{vmatrix} - (-١)\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix}$$

= (٦ – ٥) + (٤ + ٣) + (-١٠ – ٩) = ١ + ٧ – ١٩ = -١١

$$\triangle_{س} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ٥ & ٣ & -١ \\ -١ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢\begin{vmatrix} ٣ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{vmatrix} - (-١)\begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & -٥ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٦ – ٥) + (١٠ – ١) + (-٢٥ +٣) = ٢ +٩ – ٢٢ = -١١

$$\triangle_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ & -١ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix} = ١\begin{vmatrix} ٥ & -١ \\ -١ & ٢ \end{vmatrix} - ٢\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} + ١\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix}$$

= (١٠ – ١) – ٢ (٤ +٣) + (-٢ – ١٥) = ٩ – ١٤ – ١٧ = -٢٢

$$\triangle_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -٥ & -١ \end{vmatrix} = ١\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ -٥ & -١ \end{vmatrix} - (-١)\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ٢\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & -٥ \end{vmatrix}$$

= (-٣+٢٥) + (-٢ – ١٥) + ٢ (-١٠ – ٩) = ٢٢ -١٧ – ٣٨ = -٣٣

$$س = \frac{\triangle_{س}}{\triangle} = \frac{-١١}{-١١} = ١ \qquad ص = \frac{\triangle_{ص}}{\triangle} = \frac{-٢٢}{-١١} = ٢$$

$$ع = \frac{\triangle_{ع}}{\triangle} = \frac{-٣٣}{-١١} = ٣$$

م . ح = {(١ ، ٢ ، ٣)}

المصفوفات

تعريف المصفوفة : هي تنظيم للبيانات في شكل صفوف (أفقية)وأعمدة (رأسية) توضع بين قوسين.

مثل : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٧ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

نظم المصفوفة: إذا كان عدد صفوف المصفوفة = م ، عدد الأعمدة = ن

ـ تكون المصفوفة علي النظم م×ن

ـ المصفوفة أ علي النظم ٢ × ٣ ، المصفوفة ب علي النظم ٢×٢ ، ج علي النظم ١ ×٣

ـ **تسمية المصفوفة** : نرمز للمصفوفة بأي حرف كبير (أ ، ب ، ج ، س ، ص ....)

مثال : محلان لبيع الأدوات الكهربية في أحد الأيام باع المحل الأول ٥ خلاطات ، ٦ مراوح ، ٣ ثلاجات

ـ و باع المحل الثاني ٤ خلاطات ، ٩ مراوح ، ٣ ثلاجات ـ أكتب مصفوفة المبيعات س علي النظم٢×٣

الحل :-

س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٤ \end{pmatrix}$ ← المحل الأول ، ← المحل الثاني ..

---

* موقع العناصر في المصفوفة :

ـ في المصفوفة أ يكون العنصر ($أ_{ص ع}$) هو العنصر الذي يقع في الصف ص ، العمود ع

مثال : إذا كانت

أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٩ & ١ \\ ٠ & ٥ & -٢ \end{pmatrix}$ ـ أكتب نظم أ ثم أوجد $أ_{٢١}$ ، $أ_{٢٣}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{١٣}$ ..

الحل :

ـ نظم أ هو ٣ × ٣ ، $أ_{٢١}$ = ٣ ، $أ_{٢٣}$ = ٥ ، $أ_{٢٢}$ = ٩ ، $أ_{١٣}$ = -٢

* بعض المصفوفات الخاصة :.

١ـ **مصفوفة الصف** : هي المصفوفة التي تتكون من صف واحد و أي عدد من الأعمدة : م = ١

مثل س = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ١ \end{pmatrix}$ علي النظم ١ × ٣

٢ـ **مصفوفة العمود** : هي المصفوفة التي تتكون من أي عدد من الصفوف و عمود واحد فقط : ن=١

مثل ص = $\begin{pmatrix} ٩ \\ ٠ \\ ٦ \end{pmatrix}$ ، ل = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$

٣ـ **المصفوفة المربعة** : المصفوفة التي فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة : م = ن

٤ـ **المصفوفة الصفرية** : المصفوفة التي كل عناصرها أصفار : رمزها ▭ مستطيل صغير

مثل ▭ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ▭ = $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

مدوّر المصفوفة : لأي مصفوفة أ علي النظم م × ن إذا جعلنا الصفوف أعمدة . و الأعمدة صفوف فإننا نحصل علي مدور المصفوفة [أ] و رمزها (أ ^{مد}) و تكون علي النظم ن × م ..

*** ملاحظة :** (أ ^{مد}) ^{مد} = أ

مثال : -

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٠ & ٥ \\ ٨ & ٦ & -١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٩ & ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد أ ^{مد} ، ب^{مد} ، ج ^{مد}

الحل :

أ ^{مد} = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب ^{مد} = $\begin{pmatrix} -١ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ج ^{مد} = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٦ \\ ٩ \end{pmatrix}$ ....

*** تساوي مصفوفتين :-** ـ تتساوي المصفوفتان أ ، ب إذا كان

[١] لهما نفس النظم [٢] كل عنصر في أ يساوي نظيره في ب أي أن أ $_{ص ع}$ = ب $_{ص ع}$ ..

مثال ١ : إذا كانت $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٧ \\ ع & ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & س & ٧ \\ ٤ & ٣ & ص \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص ، ع

الحل :- من التساوي .: س = ٢ ، ص = ٥ ، ع = ٤

٢ـ إذا كانت $\begin{pmatrix} جـ-د & ٣ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & هـ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ جـ+د & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد جـ ، د ، هـ

الحل :-

من التساوي : جـ - د = ٥ ...[١] ، جـ + د = ١ .... [٢] بجمع ١ ، ٢ .: ٢ جـ = ٦ Ù جـ =٣

، من [٢] ٣ + د = ١ Ù د = -٢ ، من التساوي هـ = ٧

٣ـ إثبت أنه لجميع قيم س ، ص لا يمكن أن تتحقق المساواة الأتية .

$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & س \\ ٤ & ٣ & ٨ \\ -٢ & ص & ٠ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ س+ص & ٣ & ٨ \\ -٢ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$

الحل:- من التساوي : س = ٥ ، ص = ٤

، من التساوي س + ص = ٤ (٣)

لكن بالتعويض عن قيم س ، ص يكون س + ص = ٥+٤ = ٩ 1 ٤

أي أن س ، ص لا تحققان المعادلة (٣) \ لا يمكن التساوي ..

العمليات على المصفوفات :-

أولاً الجمع و الطرح :- لجمع (أو طرح) مصفوفتين لابد و أن يكونا علي نفس النظم و يكون الناتج عن طريق جمع (أو طرح) العناصر المتناظرة فيهما ..

مثال ١ : إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٠ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -١ & ٧ \\ ٦ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب

الحل :.

أ + ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٥ \\ -١ & ٩ \\ ١٠ & ٢ \end{pmatrix}$ و ذلك بجمع العناصر المتناظرة فيهما ..

٢- إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٣ & ٠ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب$^{\text{مد}}$

الحل:-

أ + ب$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٢ & ١ \\ ١٠ & -١ \end{pmatrix}$

*** ملاحظات هامة :** [١] (أ + ب)$^{\text{مد}}$ = أ$^{\text{مد}}$ + ب$^{\text{مد}}$: يمكن الإثبات من المثال السابق ..

[٢] يمكن ضرب أي مصفوفة في أي عدد مثل ك حيث ك 1 صفر

[٣] المعكوس الجمعي للمصفوفة (أ) هو (- أ) بحيث أ + (- أ) = $\boxed{\quad}$

[٤] أ + ب = ب + أ ، أ + $\boxed{\quad}$ = أ

٣- إذا كانت

س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد ٣س - ٢ص

الحل :-

٣س – ٢ص = ٣ $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ - ٢ $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٤ \\ -١ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٣ \\ ٩ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٤ & ٢ & -٨ \\ ٢ & -٢ & -١٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} -٤ & ٨ & -٥ \\ ١١ & -٢ & -٨ \end{pmatrix}$

تمرين : إذا كانت

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & ١ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{pmatrix}$ أوجد : أ - ٤ب ، ٣أ + ب ، أ + ب$^{\text{مد}}$ إن أمكن

٤- إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد المصفوفة س بحيث $٢ب + س^{مد} = ٣أ$

الحل :-

.: $٢ب + س^{مد} = ٣أ$ Ù $س^{مد} = ٣أ - ٢ب = ٣\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٥ \\ -٢ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٤ \end{pmatrix}$

.: $س^{مد} = \begin{pmatrix} ٦ & ٣ & ١٥ \\ -٦ & ٩ & ١٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٠ & -٦ \\ ١٠ & -٢ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢١ \\ -١٦ & ١١ & ٤ \end{pmatrix}$

.: $(س^{مد})^{مد} = س$ Ù $س = \begin{pmatrix} ٤ & -١٦ \\ ٣ & ١١ \\ ٢١ & ٤ \end{pmatrix}$ #

٥- إذا كانت $٢أ^{مد} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix} = \boxed{}$ فأوجد أ

الحل :-

$٢أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٠ \\ ٥ & -٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & -٢ & ٠ \\ -٥ & ٧ & -٤ \end{pmatrix}$ Ù $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -\frac{١}{٢} & -١ & ٠ \\ -\frac{٥}{٢} & \frac{٧}{٢} & -٢ \end{pmatrix}$ أكمل

٦- (هام) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س بحيث

$٣أ^{مد} - س = ٢ب - ٣س^{مد}$

الحل :- .: $٣أ^{مد} - س = ٢ب - ٣س^{مد}$ \ $٣س^{مد} - س = ٢ب - ٣أ^{مد}$

\ $٣س^{مد} - س = ٢\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ -٦ & -٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٢ & -٦ \\ -٩ & -٣ \end{pmatrix}$

\ $٣س^{مد} - س = \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ .... (١) بتدوير الطرفين

\ $٣س - س^{مد} = \begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix}$ .... (٢) ، بضرب المعادلة (٢) × ٣

\ $٩س - ٣س^{مد} = \begin{pmatrix} -٦ & ٩ \\ ١٨ & -٣ \end{pmatrix}$ .... (٢)/ : بجمع (١) و (٢)/

\ $٨س = \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٦ & ٩ \\ ١٨ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & ١٥ \\ ٢١ & -٤ \end{pmatrix}$ Ù $س = \begin{pmatrix} -١ & \frac{١٥}{٨} \\ \frac{٢١}{٨} & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}$

ضرب المصفوفات :- إذا كانت أ مصفوفة علي النظم م × ن ، ب مصفوفة علي النظم ن× ر

فإنه يمكن ضرب أ × ب و يكون الناتج مصفوفة علي النظم (م × ر)

- شرط ضرب مصفوفتين : عدد أعمدة الأولي = عدد صفوف الثانية .. [تساوي الوسطين]
- نظم المصفوفة الناتجة = عدد صفوف الأولي × عدد أعمدة الثانية .. [نظم الطرفين]

مثال١:- أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ - فأوجد أ ب ، ب أ

الحل :-

أ ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤+٦+٣ & ٢+١٢+١ \\ ٢+٢+٦ & ١+٤+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣ & ١٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

- لاحظ أن : أ علي النظم ٢ × ٣ ، ب علي النظم ٣ × ٢ ، أ ب علي النظم ٢ × ٢ [حذف الوسطين]

ب أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤+١ & ٦+١ & ٢+٢ \\ ٤+٤ & ٦+٤ & ٢+٨ \\ ٦+١ & ٩+١ & ٣+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ٤ \\ ٨ & ١٠ & ١٠ \\ ٧ & ١٠ & ٥ \end{pmatrix}$

٢- إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$ - إثبت أن أ (ب+ج) = أ ب + أ ج

الحل :-

∴ أ (ب + ج) = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ \\ ١٢ & ٩ \end{pmatrix}$ (١)

∴ أ ب + ب ج = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ -٢ & -١ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ \\ ٩ & -٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ١١ \\ ٣ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ٦ \\ ١٢ & ٩ \end{pmatrix}$ (٢) \ أ (ب+ج) = أ ب + أ ج

ملاحظات هامة جداً :

١- (أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد} ٢- أ^{٢} = أ × أ ، أ^{٤} = أ^{٢} × أ^{٢} [حيث أ مصفوفة مربعة]

٣- مصفوفة الوحدة (I)

- هي مصفوفة مربعة عناصر القطر الرئيسي فيها = ١ ، و باقي العناصر أصفار .

مثل I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ....

٤- أ × I = I × أ = أ

٣- إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ **- فأوجد قيمة** أ^{٢} - ٣ ب

الحل :-

.: أ^{٢} = أ × أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix}$

\ أ^{٢} - ٣ ب = $\begin{pmatrix} ١١ & ٨ \\ ١٦ & ٢٧ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} -٢ & ٠ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٧ & ٨ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}$

٤- إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ **فأوجد** أ^{٤}

الحل :-

.: أ^{٢} = أ × أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix}$

أ^{٤} = أ^{٢} × أ^{٢} = $\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٧ \\ ٠ & ٢٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٦ & ٢٠٣ \\ ٠ & ٦٢٥ \end{pmatrix}$

٥- إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ **- فإثبت أن :** أ^{٢} - ٥ أ + ٢ I = $\boxed{\quad}$

الحل :-

.: أ^{٢} = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix}$

\ أ^{٢} - ٥ أ + ٢I = $\begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix} - ٥\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٤ & ٣ \end{pmatrix} + ٢\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٨ & -٥ \\ -٢٠ & ١٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٠ & -٥ \\ -٢٠ & ١٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \boxed{\quad}$ #

البرمجة الخطــية

ـ حل متباينات الدرجة الأولى في متغير واحد ..

ـ أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية في ح و مثل الحل على خط الأعداد .

(١) ٣ س ـ ٤ £ ٢

الحل :-

٣ س £ ٢+٤

٣س £ ٦ ، ÷ ٣

\ س £ ٢

م ح = [٢، ¥ [

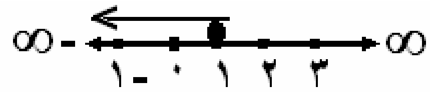
(٢) ٢ س + ٥ ³ ٧

٢ س ³ ٧ ـ ٥

٢ س ³ ٢ ؛ ÷٢

\ س ³ ١

م ح =] - ¥ ، ١]



(٣) -٥ > ٤ س + ٣ ³ ١١

ـ ٥ ـ ٣ > ٤ س ³ ١١ ـ ٣

ـ ٨ > ٤ س ³ ٨ ، ÷ ٤

\ ـ ٢ > س ³ ٢

م ح =] - ٢ ، ٢]

ـ حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين :-

١ـ حل المتباينة : ٢س + ص > ٦

الحل :ـ نرسم المستقيم الحدي : ٢س+ص = ٦ و ذلك بالتعويض بأي قيمتين لـ س و نحسب قيم ص المناظرة لها ـ و يفضل وضع س = ٠ و نحسب ص ثم نضع ص = ٠ و نحسب س

ـ المستقيم يقسم المستوي إلي جزئين ف$_1$ ، ف$_2$ ـ نعوض بنقطة تقع في كل منهما و التي تحقق المتباينة يكون عندها الحل و يفضل التعويض بنقطة الأصل (٠،٠)

ملاحظة : إذا كانت علامة التباين [> أ، <] يكون المستقيم متقطع

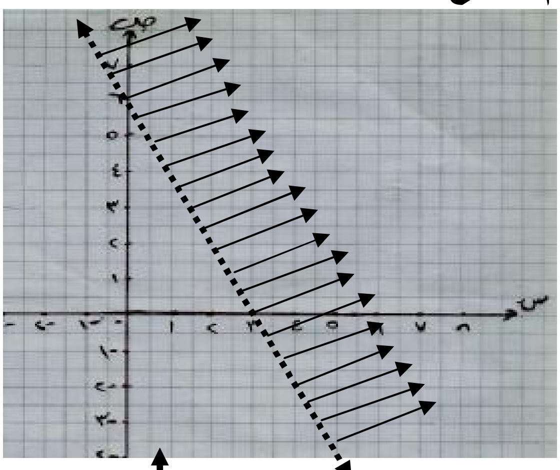
ـ إذا كانت علامة التباين [£ أ، ³] يكون الخط متصل .

.: ل : ٢س+ ص = ٦ يمر بالنقطتين

(٠ ، ٦) ، (٣ ، ٠)

.: النقطة (٠ ، ٠) لا تحقق المتباينة ٢س+ ص > ٦

\ الحل هو المنطقة المظللة ..

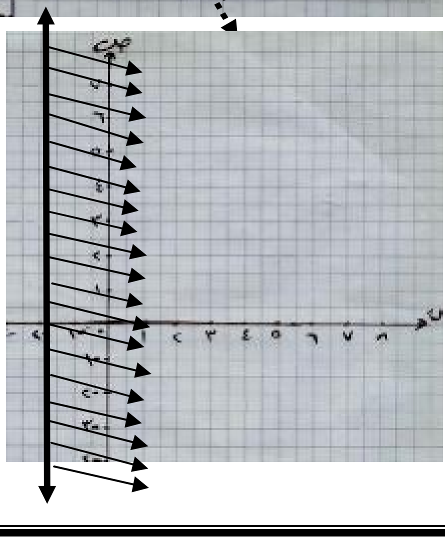


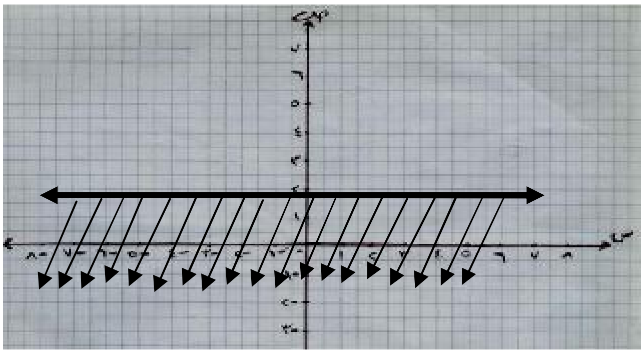
٢ـ حل المتباينة س £ ـ٢

الحل :ـ المستقيم الحدي ل : س = ـ٢ يمثله خط مستقيم يوازي محور الصادات و يمر بالنقطة (ـ٢ ، ٠)

.: نقطة الأصل تحقق المتباينة س £ ـ٢

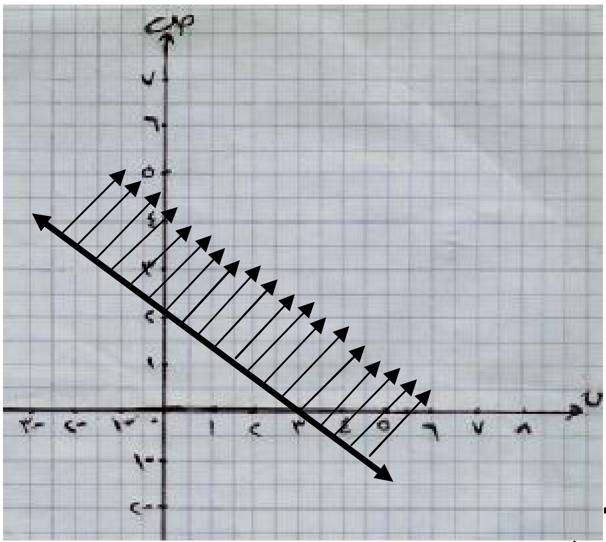
حيث ٠ £ ـ٢ \ الحل هو المنطقة المظللة ...





٣ـ حل المتباينة ص 3 ٢

الحل :ـ المستقيم الحدي ل : ص = ٢
يمثله خط مستقيم يوازي محور السينات
و يمر بالنقطة (٠ ، ٢)
ـ النقطة (٠،٠) تحقق المتباينة ص < ٢ لأن
٠ < ٢ \ الحل هو المنطقة المظللة ..



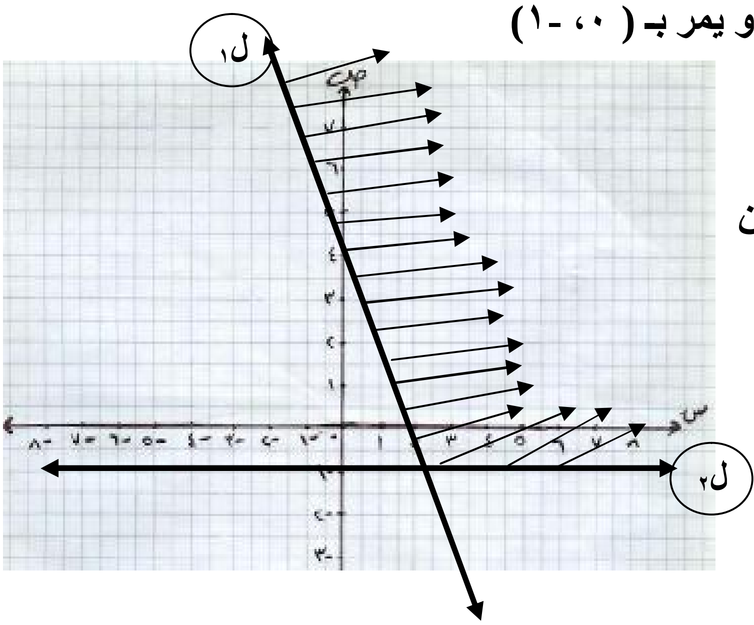
٤ـ حل المتباينة ٢س+ ٣ص £ ٦

الحل :ـ المستقيم الحدي ل : ٢س + ٣ص = ٦ يمر بالنقط (٠، ٢) ، (٣، ٠)
.: النقطة (٠،٠) لا تحقق المتباينة
٢س+٣ص £ ٦ لأن ٠+٠ < ٦
\ الحل هو المنطقة المظللة ..

<u>الحل البياني لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولي في متغيرين ..</u>

ـ مثال١: حل المتباينتين ٢س+ ص £ ٤ ، ص £ ـ١

الحل :ـ نحل المتباينتين بيانياً في نفس الشكل فيكون الحل هو منطقة التقاطع ..
.: ل١ : ٢س + ص = ٤ يمر بـ (٠ ، ٤) ، (٢، ٠)
، ل٢ : ص = ـ١ يوازي محور السينات و يمر بـ (٠، ـ١)



ـ لاحظ أن الحل هو المنطقة التي تحل كل من المتباينتين معاً
.: النقطة (٣، ٢) تحقق كل من المتباينتين
\ الحل هو المنطقة المظللة ..

٢- أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س £ ٠ ، ص £ ٠ ، ٢س + ص ³ ٤

الحل :-

ل$_1$: س = ٠ هو محور الصادات ، ل$_2$: ص = ٠ هو محور السينات

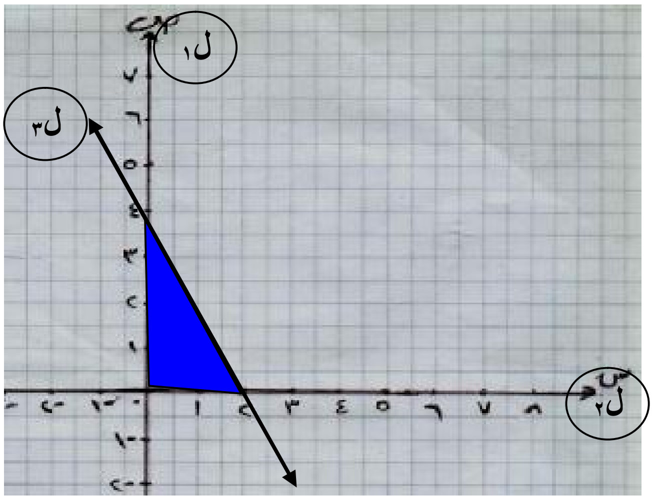
و المتباينتين س £ ٠ ، ص £ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

- ل$_3$: ٢س + ص= ٤ يمر بالنقط

(٠ ،٤) ، (٢، ٠)

- النقطة (٠،٠) تحقق كل المتباينات

\ الحل هو المنطقة المظللة ..



٣- أوجد مجموعة حل المتباينات الأتية بيانياً

س £ ٠ ، ص £ ٠ ، س + ص ³ ٤ ، ٢س+ ص ³ ٦

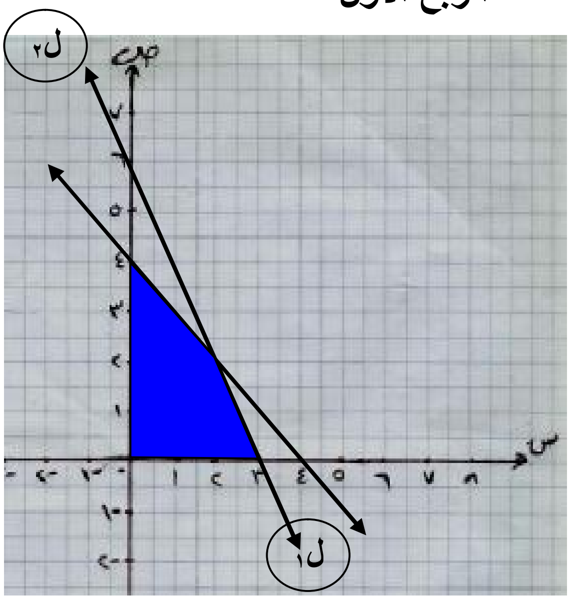
الحل :-

- كما سبق المتباينتين س £ ٠ ، ص £ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ل$_1$: س+ ص = ٤ يمر بـ (٤،٠) ، (٠ ، ٤)

ل$_2$: ٢س+ ص= ٦ يمر بـ (٠،٦) ، (٣، ٠)

الحل هو المنطقة المظللة ..



البرمجة الخطية :- - -

- هي وسيلة لإعطاء أفضل قرار في حل مشكلة .

- أو هي الحل الأمثل لتحقيق هدف معين علي صورة دالة خطية [ر = أ س + ب ص]

و لإيجاد الحل المطلوب (أكبر قيمة أو أصغر قيمة) نحدد منطقة الحلول المشتركة للمتباينات الموجودة فنجد أنه يحددها رؤوس مضلع ..

- و بالتعويض بهذه الرؤوس في دالة الهدف نحصل علي النقطة التي تحقق المطلوب (دالة الهدف)

((و الأمثلة التالية توضح ذلك)) Ù

مثال١ : عين مجموعة حل المتباينات الأتية معاً بيانياً

س £ ٠ ، ص £ ٠ ، ص- س ³ ٣ ، ٢ص+٥ س ³ ٢٠

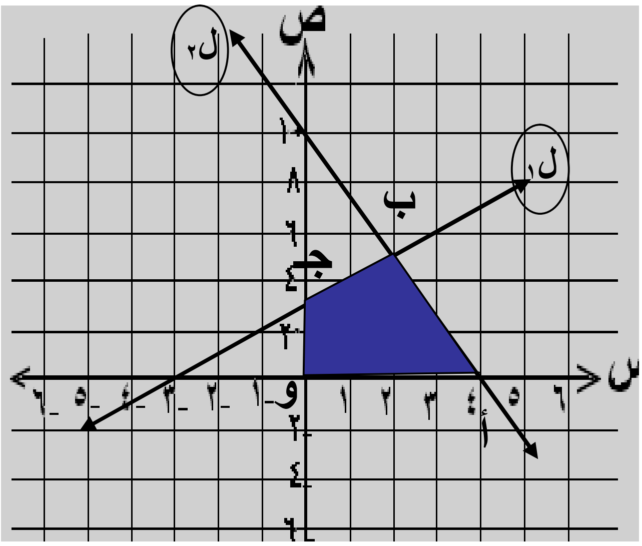
ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل ل أكبر ما يمكن حيث ل = ٥س+٣ص ..

الحل :-

ـ كما سبق المتباينتين س £ ٠ ، ص £ ٠ يحددان دائماً معاً الربع الأول

ـ ل١ : ص- س = ٣ يمر بـ (٠ ، ٣) ، (١ ، ٤)

ـ ل٢ : ٢ص+ ٥س = ٢٠ يمر بـ (٠ ، ١٠) ، (٤ ، ٠)



ـ فضاء الحل هو المضلع أ و جـ ب

حيث أ (٤ ، ٠)، و (٠،٠) ،جـ (٠، ٣)، ب(٢،٥)

.: دالة الهدف ل = ٥س+٣ص ..

بالتعويض بالنقط للحصول علي المطلوب

\ ل أ = ٥×٤+ ٣×٠ = ٢٠

، ل ب = ٥×٢+ ٣×٥ = ٢٥

، ل جـ = ٥×٠ + ٣×٣ = ٩

، ل و = ٥×٠+ ٣×٠ = صفر

\ ل أكبر ما يمكن عند ب (٢، ٥)

٢ـ أوجد بيانياً مجموعة حل المتباينات الأتية

س £ ٠ ، ص £ ٠ ، س+ ٢ص £ ٤ ، س + ص £ ٣

ـ ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل (ر) أقل ما يمكن حيث ر = ٥س+ ٤ص .

الحل :-

ـ ل١ : س + ٢ص = ٤ يمر بـ (٠، ٢) ، (٤ ،

ـ ل٢: س+ ص= ٣ يمر بـ (٠، ٣) ، (٣ ، ٠)

\ الحل هو المنطقة المحددة بأسفل

بالنقط أ (٤، ٠) ، ب(٢، ١) ، جـ (٠، ٣)

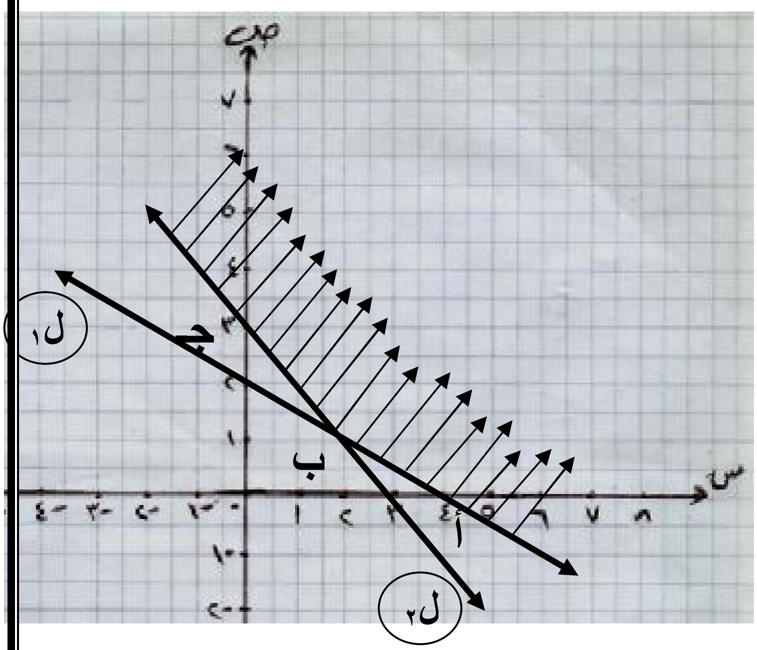
.: ر = ٥س+ ٤ص

\ ر أ = ٥× ٤ + ٤×٠ = ٢٠

، ر ب = ٥×٢+ ٤×١= ١٤

، ر جـ = ٥×٠+ ٤×٣= ١٢

\ أقل قيمة عند جـ = (٠، ٣)



٣ـ مطحن لديه ٨٠ كجم من الذرة ، ١٢٠ كجم من القمح ـ ينتج نوعين من الدقيق و يضعه في أكياس ، بحيث يلزم للكيس من النوع الأول كيلو واحد من الذرة ، ٣ كجم من القمح ـ يلزم للكيس من النوع الثاني ٢ كجم من

الذرة ، ٢ كجم من القمح ـ أوجد عدد الأكياس من كل نوع التي يجب أن ينتجها المطحن ليكون دخله أكبر ما يمكن ، علماً بأن ثمن الكيس من النوع الأول ٤ جنيه ، النوع الثاني ٢ جـ .

الحل :-

ـــــــ	النوع الأول	النوع الثاني	الكمية المتاحة
ذرة	١	٢	٨٠
قمح	٣	٢	١٢٠
الثمن	٤	٢	ـــــــ

ـ .: س £ ٠ ، ص £ ٠ ، س + ٢ص 3 ٨٠ ، ٣س+ ٢ص 3 ١٢٠

، دالة الهدف : ر = ٤س+ ٢ص ..

ـ $ل_{١}$: س+٢ص= ٨٠ يمر بـ (٠ ، ٤٠) ، (٨٠ ، ٠)

ـ $ل_{٢}$: ٣س+٢ص= ١٢٠ يمر بـ (٠ ، ٦٠) ، (٤٠ ، ٠)

ـ منطقة الحل هو المضلع أ و جـ ب حيث

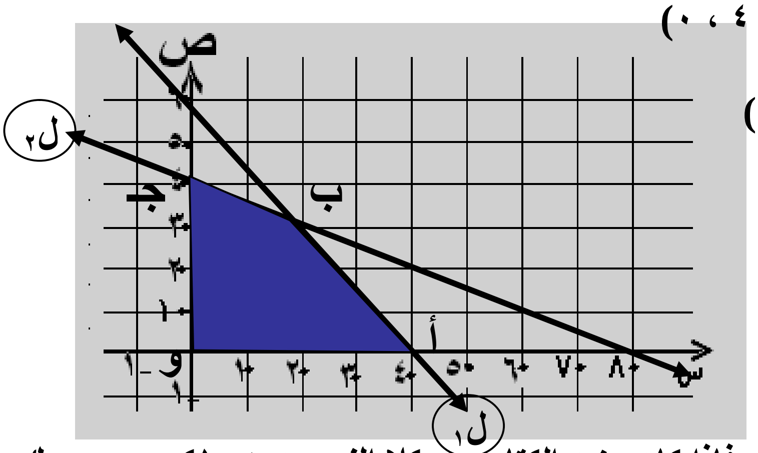
أ(٤٠ ، ٠) ، و(٠،٠) ،جـ (٠ ، ٤٠) ، ب(٢٠ ، ٣٠)

، دالة الهدف : ر= ٤س+٢ص

$ر_{أ}$ = ١٦٠ ، $ر_{و}$ = ٠ ، $ر_{جـ}$ = ٨٠ ، $ر_{ب}$ =١٤٠

يكون الدخل أكبر ما يمكن عند أ (٤٠ ، ٠)

أي أن المطحن ينتج ٤٠ كيس من النوع الأول



٤ ـ يراد وضع نوعين من الكتب أ ، ب علي رف مكتبة طوله ٩٦سم ، و حمولته القصوي ٢٠كجم ، فإذا كان وزن الكتاب من كلا النوعين هو ١كجم ، و سمك الكتاب من النوع أ هو ٦سم ، و من النوع ب ٤سم ـ أوجد عدد الكتب من كل نوع التي توضع علي الرف بحيث يكون عددها أكبر ما يمكن .

الحل:-

	النوع أ	النوع ب	القيمة العظمى
الوزن	١	١	٢٠
السمك	٦	٤	٩٦

.: س £ ٠ ، ص £ ٠ ، س+ ص 3 ٢٠ ، ٦س+٤ص 3 ٩٦ ، دالة الهدف ر = س+ ص

\ $ل_{١}$: س+ص= ٢٠ يمر بـ (٠ ، ٢٠) ، (٢٠ ، ٠)

، ـ $ل_{٢}$: ٦س+٤ص= ٩٦ يمر بـ (٠ ، ٢٤) ، (١٦ ، ٠)

الحل هو المنطقة المضلعة أ و جـ ب

حيث أ(١٦ ، ٠) ، و(٠،٠) ، جـ (٠ ، ٢٠) ، ب(٨ ، ١٢)

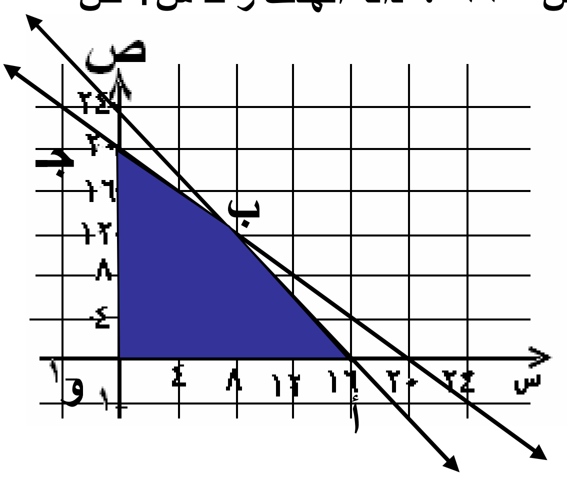
، .: ر = س+ ص

\ $ر_{أ}$= ١٦ ، $ر_{و}$ = ٠ ، $ر_{جـ}$ = ٢٠ ، $ر_{ب}$= ٢٠

\ أكبر قيمة عند جـ (٠ ، ٢٠) ، ب (٨ ، ١٢)

ـ أي أنه نضع ٢٠ كتاب من النوع الثاني فقط

أو نضع ٨ كتب من النوع الأول ، ١٢ من النوع الثاني ..

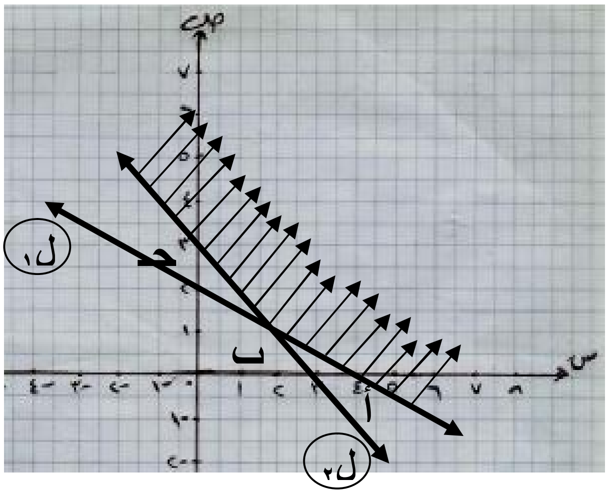


٥ـ قررت إحدي الشركات أن تقدم وجبة خفيفة لموظفيها تتكون من صنفين ، بحيث تتوفر في الوجبة الواحدة لكل شخص ٤ وحدات علي الأقل من فيتامين أ ، ٩ وحدات من فيتامين ب ـ فإذا كانت الوحدة من الصنف الأول تعطي في المتوسط وحدة فيتامين أ ، ٣ وحدات فيتامين ب ـ و ان الوحدة من الصنف الثاني تعطي في المتوسط وحدتين من فيتامين أ ، ٣ وحدات من فيتامين ب ـ وكان سعر الوحدة من الصنف الأول ٧٥ قرش ، وسعر الوحدة من الصنف الثاني ٥٠ قرش ـ فكم عدد الوحدات من الصنفين يعطي أرخص وجبة و تتضمن الحد الأدني من الفيتامينات .

الحل:-

فيتامين	الصنف الأول	الصنف الثانى	الحد الأدنى
أ	١	٢	٤
ب	٣	٣	٩
السعر	٧٥	٥٠	

.: س £ ٠ ، ص £ ٠ ، س+ ٢ص £ ٤ ، ٣س+ ٣ص £ ٩ ، دالة الهدف : ر = ٧٥س+ ٥٠ص



\ ل١ : س+ ٢ص = ٤ يمر بـ (٠، ٢) ، (٤، ٠)

ـ ل٢ : ٣س+٣ص= ٩ يمر بـ (٠، ٣) ، (٣ ، ٠)

الحل هو المنطقة التي حدودها السفلي أ ، ب ، جـ

حيث أ(٤، ٠) ، ب (٢، ١)، جـ (٠، ٣)

.: ر = ٧٥س+ ٥٠ ص

\ ر أ = ٧٥×٤+٥٠×٠= ٣٠٠

، ر ب = ٧٥×٢+٥٠+١= ٢٠٠

، ر جـ = ٧٥×٠+ ٥٠×٣ = ١٥٠

\ أرخص وجبة عند جـ (٠، ٣)

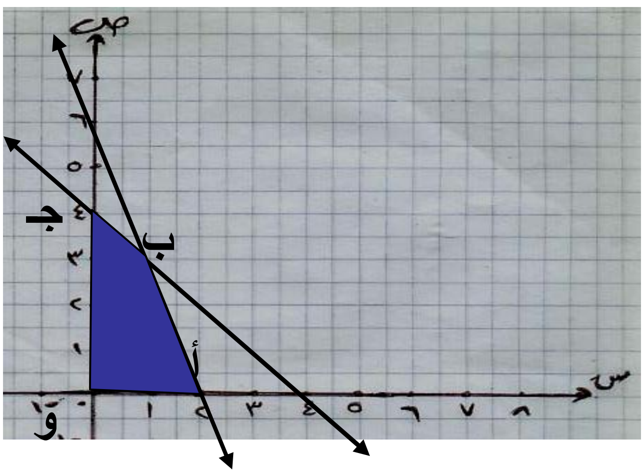
ـ ٣وحدات من الصنف الثاني

٦ـ طائرة بها ٤ مقاعد للركاب ، فإذا كان راكب الدرجة الأولي يسمح له بحمل ٦٠ كجم و يدفع ٥٠٠٠جنيه ، و راكب الدرجة الثانية يحمل ٢٠كجم و يدفع ٢٥٠٠جـ . فإذا كان أكبر وزن للأمتعة هو ١٢٠ كجم .. ـ فأوجد عدد الركاب من كل درجة الذي يحقق أكبر دخل من الأجور .

الحل:-

	الدرجة الأولى	الدرجة الثانية	المتاح
المقاعد	س	ص	٤
الوزن	٦٠	٢٠	١٢٠
السعر	٥٠٠٠	٢٥٠٠	

.: س £ ٠ ، ص £ ٠ ، س+ص ³ ٤ ، ٦٠ س + ٢٠ ص ³ ١٢٠



، دالة الهدف ر = ٥٠٠٠س+ ٢٥٠٠ ص .

، ل١ : س+ص= ٤ يمر بـ (٠، ٤) ، (٤، ٠)

، ل٢ :٦٠س+ ٢٠ص = ١٢٠يمر بـ (٠، ٦)،(٢، ٠)

الحل هو المنطقة المضلعة أ ب جـ و

حيث: أ(٢، ٠) ، ب(١، ٣)، جـ (٠، ٤) ، و(٠،٠)

.: دالة الهدف : ر= ٥٠٠٠س+٢٥٠٠ص

\ ر أ = ١٠٠٠٠ ، ر ب = ١٢٥٠٠ ، ر جـ = ١٠٠٠٠

أكبر دخل عند ب(١، ٣) : مقعد واحد من الدرجة الأولي

، ٣ مقاعد من الدرجة الثانية

الباب الرابع الاحصاء

مقدمه فى مادة الإحصاء

نحن نعيش في عصر المعلومات وعالم الأعمال يتطلب منا اليوم معالجة وتنظيم وتقديم وتفسير كميات كبيرة منها وطبيعتها الكمية. والمهارات التي نحن بحاجة إليها في التعامل مع هذه المعلومات مرتبطة بعلم الإحصاء (statistics).

فالإحصاء : هو العلم الذي يبحث في جميع البيانات الخاصة لمختلف الظواهر وتصنيف هذه البيانات في جداول منظمة وتمثيلها بيانيا علي شكل رسومات أو صور توضيحية وكذلك تحليل البيانات واستخلاص النتائج منها واستخدامها في اتخاذ القرار المناسب ومقارنة الظواهر ببعضها ومحاولة استنتاج علاقات بينها.

وعلم الإحصاء أيضا نفسه هو فرع من علم الرياضيات متعلق بمعالجة مختلف البيانات الإحصائية عن العالم وهو عبارة عن مجموعة من الأساليب والعمليات الإحصائية الخاصة بمعالجة البيانات الكمية أو الرقمية.

مقاييس النزعة المركزية

١. الوسط الحسابي

٢. الوسيط

٣. المنوال

٤. الوسط الهندسي

٥. الوسط التوافقي

ولا يمكن تفضيل أحد هذه المقاييس على الآخر لأن لكل منها مزاياه وعيوبه إلا أن المقاييس الثلاثة الأولى هي الأكثر استخداماً.

أولاً: الوسط الحسابي ($\bar{س}$)

ويعرف الوسط الحسابي بأنه القيمة التي أذا أعطيت لكل مفردة من مفردات الظاهرة لكان مجموع القيم الجديدة مساويا للمجموع الفعلي للقيم الأصلية للظاهرة.

أي ببساطة،

$$\text{الوسط الحسابي لمجموعة من القيم} = \frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عددهم}}$$

طرق حساب الوسط الحسابي:

(١) في حالة البيانات غير المبوبة (٢) في حاله البيانات المبوبة (الجداول التكرارية)

أولا: في حالة البيانات غير المبوبة.

مثال (١)

إذا كانت درجات مجموعة من الطلبة في كلية التقنية بالمجمعة في مادة الإحصاء هي:

٣٠ و٦٠ و٤٠ و٧٠ و ١٠٠

فأوجد الوسط الحسابي لدرجات الطلاب.

الحل:

الوسط الحسابي ($\overline{س}$) $= \dfrac{٣٠ + ٦٠ + ٤٠ + ٧٠ + ١٠٠}{٥}$

$= \dfrac{٣٠٠}{٥}$

= ٦٠ درجة.

أمثلة أخري:-

يمكنك استخدام مهارة الطالب في وضع مثال كما فعلت أمامه لأن هدفنا هو الطالب حتى نخرج من أسلوب التلقين إلي أسلوب المشاركة الفعالة فهو أساس العملية التعليمية وأن كان أمامك ٣٠ طالب مثلا فأنت لديك ٣٠ مثال أو مسألة وتبني جسر من الثقة بينك وبين الطالب من جهة وبين الطالب ونفسه من جهة أخرى حتى تخرج مادة الرياضيات إلي المعايشة.

مثال (٢)

إذا كانت درجات ستة طلاب في احد المواد هي

٦٣و٨٠ و٤٠ و٧٢ و٦٠ و ٢٥

أحسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب

مثال (٣)

الوسط الحسابي للعددين ٤ و ٦ هو................

مثال (٤)

الوسط الحسابي لمجموعه من القيم هو ....

مثال (٥)

أوجد الوسط الحسابي للقيم ١,٥ و٢,٦ و ٣,٥ و ٤,٤ و ٥,٧ و٨,٣

ثانيا : في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

يبين الجدول التالي أجور ٤٠ عامل في أحد المصانع وكانت كالآتي:

الفئات	٣-	٩-	١٥-	٢١-	٢٧-	٣٣-	المجموع
التكرار	١٠	١٢	٨	٦	٣	١	٤٠

الحل:

الفئات	التكرار(ك)	مراكز الفئات (س)	ك×س
٣-	١٠	٦	٦٠
٩-	١٢	١٢	١٤٤
١٥-	٨	١٨	١٤٤
٢١-	٦	٢٤	١٤٤
٢٧-	٣	٣٠	٩٠
٣٣-	١	٣٦	٣٦
المجموع	٤٠		٦١٨

الوسط الحسابي $(\overline{س})$ = $\frac{مج\ ك \times س}{مج\ ك}$

= $\frac{٦١٨}{٤٠}$

= ١٥,٤٥ ريالاً.

طبعا الحل مكتوب على صورة ٤ أعمدة: فالعمود الأول(الفئات) والعمود الثاني (التكرار) وهم من ورقة الأسئلة أو المعطيات أما العمود الثالث (مراكز الفئات(س)) نحصل عليه بأكثر من طريقة فمنها أن نعرف طول الفئة في المسألة . وهي تختلف من مسألة لآخري ففي مثالنا السابق طول الفئة هو (أعرف أنك ربما تقول ١٠. لا، طبعاً!)

طول الفئة = ٩-٣
= ١٥-٩
= ٢١-١٥
= ٢٧-٢١
= ٣٣-٢٧
= ٦

نمسك طول الفئة وهو ٦ ونقسمه على ٢ (ثابتة) فينتج ٣
نمسك خارج القسمة وهي ٣ ونضيفها إلى الفئات لتعطي مراكز الفئات(س)

أما العمود الرابع والأخير فهو حاصل ضرب ك(التكرار) في س (مراكز الفئات) وبعد ذلك مجموع ك في س نقسمه علي مجموع ك(التكرار) فينتج الوسط الحسابي

أي الوسط الحسابي ($\bar{س}$) $= \dfrac{\text{مج ك} \times \text{س}}{\text{مج ك}}$

$= \dfrac{٦١٨}{٤٠}$

$=$ **١٥,٤٥ ريالاً.**

من عيوب الوسط الحسابي أنـه لا يمكن إيجاده بالرسم ويتأثر بـالقيم الشاذة أمـا مزاياه فمنهـا السهولة في الحساب ولذلك فهو أكثر المتوسطات استخداما كما تدخل جميع قيم المجموعة في حسابه.

ويمكنك مع طلابك أياً كانت أعمـارهم أن تجعلهم يكونـون مسائل تختلف في طول المجموعة وتنبههم إن تكون طول الفئة واحده في نفس المسألة أما التكرار فلهم حرية الاختيار حسب طالب وأخر طبعا ويكون عندك بنك من المسائل التي تم تكوينها من جانب الطلاب الذي نتمنى الأمل فيهم بإذن الله سبحانه وتعالي .

ثانيا:الوسيط

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط مجموعة القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً أي أنه القيمة التي يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها.

طرق حسابه :-

**(١) جبريا	(٢) بيانيا**

الطريقة الجبرية:
سوف أتكلم عن الطريقة الجبرية ولا حقا نتكلم عن الطريقة البيانية مع معالجة الطريقة البيانيـة لمقاييس النزعة المركزية كلها معاً. ويمكن حسابه أيضاً في حالة البيانـات غير المبوبـة و في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

<u>(أ) في حالة البيانات غير المبوبة:</u>

مثال: أوجد الوسيط لمجموعة القيم ٣٠ و ٦٠ و٢٠ و ٤٠ و ٧٠

الحل: أولاً لابد من ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ونختار القيمة التي بالمنتصف طبعا أذا كان عدد المفردات فردي، كالتالي:

القيم بعد الترتيب: ٢٠ و ٣٠ و ٤٠ و ٦٠ و ٧٠
الوسيط هو: ٤٠

مثال آخر: أوجد الوسيط للقيم ١٢ و ٤ و ١ و ٦ و ١١ و ٨

الحل:
القيم بعد الترتيب : ١ و ٤ و ٦ و ٨ و ١١ و١٢

$$\text{الوسيط} = \frac{٦ + ٨}{٢}$$

$$= \frac{١٤}{٢}$$

$$= ٧$$

في المثال السابق أولا نرتب القيم ترتيبا تصاعديا (تنازليا) ثم نختار القيمتان التي بالمنتصف وهما ٦ و ٨ ونجمعهم ونقسمهم علي ٢ (وهي قيمه ثابتة) والناتج من خارج القسمة هو قيمة الوسيط في حالة البيانات الغير مبوبه وفي مثالنا السابق عدد المفردات زوجي.

مزيد من الأمثلة والمسائل اجعل طلابك هم الذين يقومون بتكوين هذه الأمثلة والمسائل مع توجيهك لهم إن كل طالب عليه أعطاء مثال لقيم عدد مفرداتها فردي وقيم أخري عدد مفرداتها زوجي.

فمثلا ببساطة أوجد الوسيط للقيم الآتية:

(١) ٦ و ٤ و ٨
(٢) ٦ و ٤ و ٨ و ١٠

<u>(ب) في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).</u>

مثال:
أوجد الوسيط للجدول التكراري الأتي الذي يبين أجور العمال في أحد المصانع وكانت بالريال

الفئات	٣-	٩-	١٥-	٢١-	٢٧-	٣٣-	المجموع
التكرار	١٠	١٢	٨	٦	٣	١	٤٠

الحل:
أولا نكوّن جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري البسيط المعطى في المسألة وهو عبارة عن عمودين فقط العمود الأول الفئات والثاني التكرار المتجمع الصاعد للفئات. الفئات تكتب كما هي بالجدول التكراري البسيط أما التكرار المتجمع الصاعد فنبدأ بالصفر (ثابت) ثم

نضيف على الصفر أول تكرار وهو ١٠ في هذه المسألة ثم ١٢ على أخر مجموع ثم نضيف ٨ ثم ٦ ثم ٣ ثم ١ فنحصل على ٤٠ وهو مجموع التكرار وهذا يدل على أن الجمع صحيح وإذا كان المجموع غير مطابق لمجموع التكرار فنعيد الجمع مرة ثانية حتى يكون نتيجة الجمع مساوية لمجموع التكرار كما يلي :

الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٣	صفر
أقل من ٩ (البداية)	١٠ (التكرار السابق)
أقل من ١٥	٢٢ (التكرار اللاحق)
اقل من ٢١	٣٠
أقل من ٢٧	٣٦
أقل من ٣٣	٣٩
اقل من ٣٩	٤٠

٢٠
رتبة الوسيط

نحصل على ترتيب الوسيط بقسمة المجموع على ٢

$$\text{رتبة الوسيط} = \frac{\text{المجموع}}{٢} = \frac{٤٠}{٢} = ٢٠$$

$$\text{قيمة الوسيط} = \text{بداية الفئة الوسيطة} + \frac{\text{رتبة الوسيط} - \text{التكرار السابق}}{\text{التكرار اللاحق} - \text{التكرار السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٩ + \frac{٢٠ - ١٠}{٢٢ - ١٠} \times ٦$$

$$= ٩ + \frac{١٠}{١٢} \times ٦$$

= ١٤ ريال

رتبة الوسيط	=	٢٠
بداية الفئة الوسيطة	=	٩
التكرار السابق	=	١٠
التكرار اللاحق	=	٢٢
طول الفئة	=	٦

من مزايا الوسيط أنه لا يتأثر بالقيم الشاذة ويمكن الحصول عليه بالرسم ومن عيوبه أنه لا يدخل في حسابه سوى قراءة واحدة أو قراءتين من المجموعة كلها.

ثالثاً: المنوال في حالة البيانات المبوبة (الجداول التكرارية).

الجدول التالي يبين درجات ٤٠ طالب من طلاب كلية التقنية في أحد المواد العملية والمطلوب أيجاد المنوال.

البداية

الفئات	٣-	٩-	١٥-	٢١-	٢٧-	٣٣-	المجموع
التكرار	١٠	١٢	٨	٦	٣	١	٤٠

التكرار السابق($ك_١$) أكبر تكرار(ك) التكرار اللاحق($ك_٢$)

$$\text{المنوال} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \frac{ك - ك_١}{٢ك - ك_١ - ك_٢} \times \text{طول الفئة}$$

$$= ٩ + \frac{١٢ - ١٠}{٢ \times ١٢ - ١٠ - ٨} \times ٦$$

$$= ٩ + \frac{٢}{٦} \times ٦$$

$$= ١١$$

بداية الفئة المنوالية هي أمام أكبر تكرار وهي ٩
ك وهي أكبر تكرار وهي ١٢
$ك_١$ تعني التكرار السابق لأكبر تكرار وهي ١٠
$ك_٢$ تعني التكرار اللاحق لأكبر تكرار وهي ٨
طول الفئة وهي ٦ وهي زيادة الفئة من خانة لأخرى.

من مزايا المنوال سهولة الحساب وأنه لا يتأثر بالقيم الشاذة ومن عيوبه أنه غير دقيق حيث يتم حسابه بطرق كلها تقريبية.

الاحتمال

* التجربة العشوائية

تعريف التجربة العشوائية

التجربة العشوائية هي كل تجربة نستطيع أن نحدد مقدما (أي قبل إجرائها) جميع النواتج الممكنة الحدوث، ولكن لا يمكن تحديد أي من هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجراء هذه التجربة

تعريف: فضاء (فراغ) العينة أو فضاء النواتج (ف)

هو مجموع جميع النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية.

تعريف الحدث

هو أى مجموعة جزئية من فضاء العينة.

* أنواع الأحداث

١) الحدث المؤكد: هو الحدث الذي لابد أن يقع ويرمز له بالرمز (ف).

٢) الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يمكن أن يقع ويرمز له بالرمز (f).

٣) الحدث الأولى (البسيط): هو الحدث الذي تتألف المجموعة التي تمثله من عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

٤) الحدثان المتنافيان : هما الحدثان اللذان يستحلا و قوعهما معاً و وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر .

• مسلمات الاحتمال

(١) ل (ف) = ١ [ف يسمى فضاء العينة]

(٢) ٠ $\le$ ل(أ) $\le$ ١ [حيث أ حدث ما]

(٣) ل(أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) [حيث أ ، ب حدثين متنافيين من ف]

قوانين الاحتمال

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

وهو يعنى لفظيا – احتمال وقوع أ أو ب
- احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∪ ب)

وهو يعنى لفظيا احتمال وقوع أحد الحدثين معا

ل (أ - ب) = ل (أ) – ل (أ ∩ ب)

وهو يعنى - احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب
- احتمال وقوع أ فقط

لاحظ أن ل (أ ∩ ب ′) = ل (أ – ب) = ل (أ) – ل (أ ∩ ب)

ل (ب - أ) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب

وهو يعنى - احتمال وقوع ب وعدم وقوع أ
- احتمال وقوع ب فقط

لاحظ أن ل (ب ∩ أ ′) = ل (ب – أ) = ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

ل (أ′) = ١ - ل (أ)

وهو يعنى احتمال عدم وقوع أ

لاحظ أن ل(الحدث)′ = ١ – الحدث فمثلا

ل(أ ∪ ب)′ = ١ – ل (أ ∪ ب) ،،، ل (أ ∩ ب)′ = ١ – ل (أ ∩ ب)

ل (أ – ب)′ = ١ – ل (أ – ب) ،،، ل (ب – أ)′ = ١ – ل (ب – أ)

لاحظ أن

*** احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل**

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) – ل (أ ∩ ب)

*** احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر**

ل (أ ∩ ب)/ = ١ – ل (أ ∩ ب)

*** احتمال وقوع أحد الحدثين فقط**

= ل (أ – ب) + ل (ب – أ) = ل (أ) + ل (ب) – ٢ ل (أ ∩ ب)

= ل (أ ∪ ب) – ل (أ ∩ ب)

*** احتمال عدم وقوع أ أو ب**

ل (أ ∪ ب)/ = ١ – ل (أ ∪ ب)

*** احتمال عدم وقوع أ ، ب معا**

ل (أ ∩ ب)/ = ١ – ل (أ ∩ ب)

* ل (أ/ ∪ ب/) = ل (أ ∩ ب)/ = ١ – ل (أ ∩ ب)

* ل (أ/ ∩ ب/) = ل (أ ∪ ب)/ = ١ – ل (أ ∪ ب)

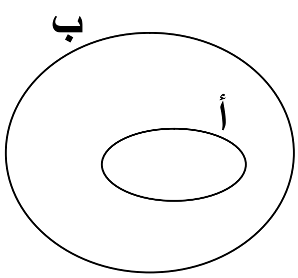
* ل (أ ∪ ب/) = ل (ب/) + ل (أ ∩ ب)

* ل (أ/ ∪ ب) = ل (أ/) + ل (أ ∩ ب)

****

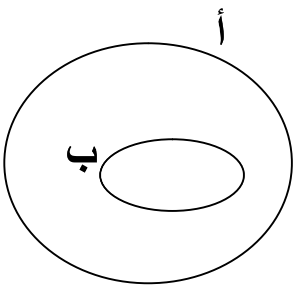
**** إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان فان ل (أ ∩ ب) = ٠**

**** إذا كان أ ⊂ ب فان**



ل (أ ∩ ب) = ل (أ) ،،،، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

**** إذا كان ب ⊂ أ فان**



ل (أ ∩ ب) = ل (ب) ،،،، ل (أ ∪ ب) = ل (أ)

إذا كان س ،ص حدثين من ف بحيث كان ل(س) = ٠,٥ ، ل(ص) = ٠,٦
ل(س ∩ ص) = ٠,٣ أوجد

(١) ل (س ص)	(٤) ل (س/)	(٧) ل(س/ ∩ ص/)
(٢) ل(س – ص)	(٥) ل (ص/)	(٨) ل (س ص/)
(٣) ل (ص – س)	(٦) ل (س/ ص/)	(٩) ل (س/ ص)

(١) ل(س   ص) = ل (س) + ل(ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٥+٠,٦-٠,٣ = ٠,٨
(٢) ل(س – ص) = ل (س) – ل (س ∩ ص) = ٠,٥ – ٠,٣ = ٠,٢
(٣) ل (ص – س) = ل (ص) – ل (س ∩ ص) = ٠,٦ – ٠,٣ = ٠,٣
(٤) ل(س/) = ١ – ل (س) = ١ – ٠,٥ = ٠,٥
(٥) ل(ص/) = ١ – ل (ص) = ١ – ٠,٦ = ٠,٤
(٦) ل(س/   ص/) = ل (س ∩ ص)/ = ١ – ل(س ∩ ص) = ١ – ٠,٣ = ٠,٧
(٧) ل (س/ ∩ ص/) = ل (س   ص)/ = ١ – ل (س   ص) = ١ – ٠,٨ = ٠,٢
(٨) ل(س   ص/) = ل(ص/) + ل (س ∩ ص) = ٠,٤ + ٠,٣ = ٠,٧
(٩) ل (س/   ص) = ل(س/) + ل (س ∩ ص) = ٠,٥ + ٠,٣ = ٠,٨
****

إذا كان س ،ص حدثين من ف بحيث كان ل(س) = ٠,٤ ، ل(ص) = ٠,٨
ل(س ∩ ص) = ٠,٣ أوجد
(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل   (٢) احتمال وقوع س فقط
(٣) احتمال وقوع ص فقط   (٤) احتمال عدم وقوع س

(١) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
ل(س   ص) = ل(س) + ل (ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٤ +٠,٨ – ٠,٣ = ٠,٩
****
(٢) احتمال وقوع س فقط
ل(س – ص) = ل (س) – ل (س ∩ ص) = ٠,٤ – ٠,٣ = ٠,١
****
(٣) احتمال وقوع ص فقط
ل(ص – س) = ل(ص) – ل (س ∩ ص) = ٠,٨ – ٠,٣ = ٠,٥
****
(٤) احتمال عدم وقوع س
ل(س/) = ١ – ل (س) = ١ – ٠,٤ = ٠,٦
****

يحاول عبدالرحمن وجهاد حل مسألة فإذا كان احتمال أن يحلها عبدالرحمن ٠,٦ واحتمال أن تحلها جهاد ٠,٥ واحتمال أن يحل كلاهما المسألة معا ٠,٣٥ أوجد

(١) احتمال حل المسألة　　　(٢) احتمال أن يحلها عبد الرحمن فقط

(٣) احتمال أن تحلها جهاد فقط　　　(٤) احتمال أن يحلها أحدهما دون الأخر

(٥) احتمال عدم حل المسألة　　　(٦) احتمال أن يحلها أحدهما على الأكثر

(٧) احتمال أن يفشل عبد الرحمن فى حلها　　　(٨) احتمال أن تفشل جهاد فى حلها

نرمز لنجاح عبد الرحمن فى حل المسألة بالرمز س وجهاد بالرمز ص

ل(س) = ٠,٦　　　ل(ص) = ٠,٥　　　ل(س ∩ ص) = ٠,٣٥

(١) احتمال حل المسألة

ل(س   ص) = ل(س) + ل(ص) – ل (س ∩ ص) = ٠,٦ + ٠,٥ – ٠,٣٥ = ٠,٧٥

(٢) احتمال أن يحلها عبد الرحمن فقط

ل(س – ص) = ل(س) – ل(س ∩ ص) = ٠,٦ – ٠,٣٥ = ٠,٢٥

(٣) احتمال أن تحلها جهاد فقط

ل(ص – س) = ل(ص) – ل(س ∩ ص) = ٠,٥ – ٠,٣٥ = ٠,١٥

(٤) احتمال أن يحلها أحدهما دون الأخر

ل(س   ص) – ل(س   ص) = ٠,٧٥ – ٠,٣٥ = ٠,٤

(٥) احتمال عدم حل المسألة

ل(س   ص)/ = ١ – ل (س   ص) = ١ – ٠,٧٥ = ٠,٢٥

(٦) احتمال أن يحلها أحدهما على الأكثر

ل(س ∩ ص)/ = ١ – ل(س ∩ ص) = ١ – ٠,٣٥ = ٠,٦٥

(٧) احتمال أن يفشل عبد الرحمن فى حلها

ل(س/) = ١ – ل (س) = ١ – ٠,٦ = ٠,٤

(٨) احتمال أن تفشل جهاد فى حلها

ل(ص/) = ١ – ل (ص) = ١ – ٠,٥ = ٠,٥

حساب الاحتمال على فضاء عينة متساو الإمكانات

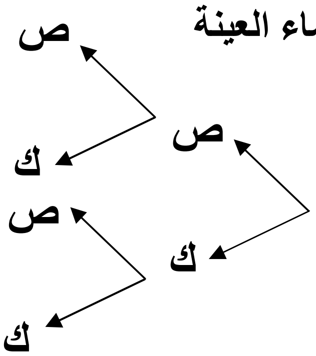
فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة أكتب فضاء العينة

ف = { ص ، ك }

****

فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين أكتب فضاء العينة

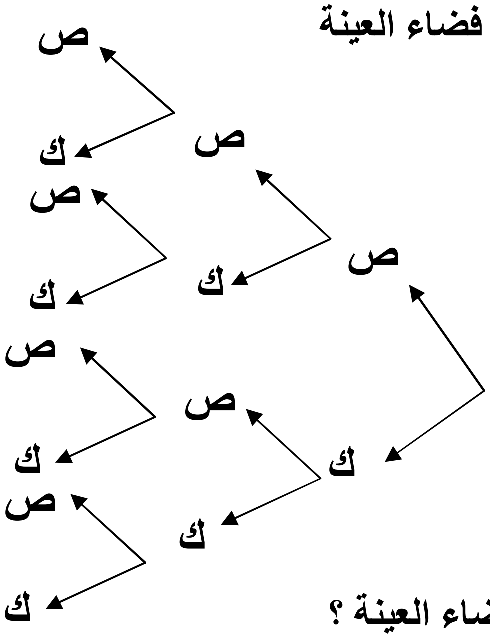
ف = { (ص، ص) ، (ص،ك)، (ك،ص)،(ك،ك)}



****

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات أكتب فضاء العينة

ف= { (ص ، ص ، ص) ،(ص ، ص ، ك)
(ص ، ك ، ص) ،(ص ، ك ، ك) (ك ، ص ، ص)
(ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ،(ك ، ك ، ك) }



فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة أكتب فضاء العينة ؟

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

****

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين أكتب فضاء العينة ؟

ف= { (١ ، ١) (١ ، ١) (١ ، ٢) ، ....، (٦،٦)}

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١،١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

****

مـــلاحظة

إذا كان أ حدث جزئي من فضاء متساو الإمكانات فان

ل(أ) = $\frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين أكتب فضاء العينة ثم عين احتمال كلا من الأحداث الآتية

(١) أ = حدث ظهور عددين متساويين (٢) ظهور عددين مجموعهم = ٥

(٣) جـ = ظهور عددين مجموعهم ≤ ١٠ (٤) ء = ظهور عددين مجموعهم يقبل القسمة على ٤

ف = { (١ ، ١) ، (١ ، ٢) ، ....(٦ ، ٦) } ٣٦ زوج

(١) أ = حدث ظهور عددين متساويين

أ= {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦)} ل(أ) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٢) ظهور عددين مجموعهم = ٥

ب = {(١ ، ٤) ، (٤ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢)} ل(ب) = $\frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$

(٣) جـ = ظهور عددين مجموعهم ≤ ١٠

جـ = {(٤ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦)} ل(جـ) = $\frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$

(٤) ء = ظهور عددين مجموعهم يقبل القسمة على ٤

ء = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٦ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٦)} ل (ء) = $\frac{٩}{٣٦} = \frac{١}{٤}$

المتغيرات العشوائية

تعريف المتغير العشوائي:-

المتغير العشوائي هو دالة من ف ⟵ ح

أنواع المتغيرات العشوائية

(١) المتغير العشوائي المتقطع

هو متغيرعشوائى مداه مجموعة محدودة من العناصر

(٢) المتغير العشوائي المتصل

هو متغير عشوائي مداه فترة [مجموعة غير محدودة من العناصر]

****

المتغير العشوائي المتقطع

أولا تكوين جدول التوزيع الاحتمالي:-

مثال : فى تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين كان المتغير العشوائي يعبر عن (عدد الصور)
كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س

ف ⟵ ح

(ص ، ص) ⟵ ٢
(ص ، ك) ⟵ ١
(ك ، ص) ⟵ ١
(ك ، ك) ⟵ ٠

$س_ر$	٠	١	٢
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

****

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات كان المتغير العشوائي يعبر عن
(عدد الكتابات) كون جدول التوزيع الاحتمالي

ف

(ص ، ص ، ص) ⟵ ٠
(ص ، ص ، ك) ⟵ ١
(ص ، ك ، ص) ⟵ ١
(ص ، ك ، ك) ⟵ ٢
(ك ، ص ، ص) ⟵ ١
(ك ، ص ، ك) ⟵ ٢
(ك ، ك ، ص) ⟵ ٢
(ك ، ك ، ك) ⟵ ٣

$س_ر$	٠	١	٢	٣
$د(س_ر)$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات كان المتغير العشوائي يعبر عن (عدد الصور - عدد الكتابات) كون جدول التوزيع الاحتمالي

ف ⟵ ح

(ص ، ص ، ص) ⟵ ٣

(ص ، ص ، ك) ⟵ ١

(ص ، ك ، ص) ⟵ ١

(ص ، ك ، ك) ⟵ -١

(ك ، ص ، ص) ⟵ ١

(ك ، ص ، ك) ⟵ -١

(ك ، ك ، ص) ⟵ -١

(ك ، ك ، ك) ⟵ -٣

$س_ر$	-٣	-١	١	٣
د($س_ر$)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

****

فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وكان المتغير العشوائي يعبر عن (مجموع العددين) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير س

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢

$س_ر$	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
د($س_ر$)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

الوسط الحسابى أو التوقع ويرمز له بالرمز μ μ = مجـ $س_ر$ × د($س_ر$)

التباين ($\delta^٢$) $\delta^٢$ = مجـ $س_ر^٢$ × د($س_ر$) - $\mu^٢$

الانحراف المعياري (δ) = $\sqrt{\text{التباين}}$

معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{معامل الاختلاف}}$ × ١٠٠ %

****

مثال

إذا كان س متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي محدد بالجدول

$س_{ر}$	٠	١	٢	٣
د($س_{ر}$)	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤

أوجد الوسط الحسابى – التباين – الانحراف المعياري – معامل الاختلاف

الحـــــل

$س_{ر}$	د($س_{ر}$)	$س_{ر}$×د($س_{ر}$)	$س_{ر}^{٢}$ × د($س_{ر}$)
٠	٠,١	٠	٠
١	٠,٢	٠,٢	٠,٢
٢	٠,٣	٠,٦	١,٢
٣	٠,٤	١,٢	٣,٦
مجـ		μ =٢	٥

الوسط الحسابى = ٢

التباين = ٥ – (٢)^{٢} = ١

الانحراف المعياري = ١ = ١

معامل الاختلاف = $\frac{\text{الانحراف المعيارى}}{\text{معامل الاختلاف}}$ ×١٠٠%

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ %

= ٥٠ %

****

مثال

إذا كان س متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي محدد بالجدول

$س_{ر}$	١	٢	٤	٦
د($س_{ر}$)	٢ك	٣ك	٤ك	ك

أوجد (١) قيمة ك   (٢) الوسط الحسابى والانحراف المعياري

الحـــــل

$س_{ر}$	د($س_{ر}$)	$س_{ر}$×د($س_{ر}$)	$س_{ر}^{٢}$ × د($س_{ر}$)
١	٠,٢	٠,٢	٠,٢
٢	٠,٣	٠,٦	١,٢
٤	٠,٤	١,٦	٦,٤
٦	٠,١	٠,٦	٣,٦
مجـ		μ =٣	١١,٤

٢ك +٣ ك +٤ ك + ك = ١

١٠ك = ١

ك = $\frac{١}{١٠}$ = ٠,١

الوسط الحسابى = ٣

التباين = ١١,٤ – (٣)^{٢} = ٢,٤

الانحراف المعياري = $\sqrt{٢,٤}$ =

التوزيع الطبيعي

المنحنى الطبيعي (أو المنحنى الجاوسى)

هو منحنى يأخذ شكل الناقوس أو الجرس

خصائص المنحنى الطبيعي

(١) ل (- ∞ < س < ∞) = ١

(٢) ل(٠ < س < ∞) = ٠,٥

(٣) ل(- ∞ < س < ٠) = ٠,٥

(٤) ل(- أ < س < ٠) = ل(٠ < س < أ)

****

[أ] كيفية حساب الاحتمال على الفترة [٠ ، ى] حيث ى عدد موجب

لإيجاد ل (٠ < س < ١,٢٥) نستخدم جدول المساحات

	٠,٠٠			٠,٠٥	
٠,١					
٠,٢					
١,٢				٠,٣٩٤٤	
١,٥	٠,٤٣٣٢				

ل(٠ < س < ١,٢٥) = ٠,٣٩٤٤

ل (٠ < س < ١,٥) = ٠,٤٣٣٢

ثانيا حساب الاحتمال على [- ى ، ٠]

ل(- ١,٥ < س < ٠) = ل (٠ < س < ١,٥) = ٠,٤٣٣٢

ل(-٠,٧٥ < س < ٠) = ل (٠ < س < ٠,٧٥) = ٠,٢٧٣٤

****

ثالثا حساب الاحتمال على الفترة [أ ، ب]

ل(أ < س < ب) = ل(٠ < س < ب) – ل (٠ < س < أ)

ل(- أ < س < - ب) = ل (ب < س < أ) = ل(٠ < س < أ) – ل(٠ < س < ب)

ل(- أ < س < ب) = ل (٠ < س < ب) + ل (٠ < س < أ)

فمثلا

ل(١ > س > ٢,٥) = ل (٠ > س > ٢,٥) – ل (٠ > س > ١)

= ٠,٤٩٣٨ – ٠,٣٤١٣ = ٠,١٥٢٥

ل(- ٢ > س > - ٠,٥) = ل (٠,٥ > س > ٢)=ل(٠ > س > ٢) – ل(٠ > س > ٠,٥)

= ٠,٤٧٧٢ – ٠,١٩١٥ =

ل(-٠,٧٥ > س > ١) = ل (٠ > س > ١) + ل (٠ > س > ٠,٧٥)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٢٧٣٤ = ٠,٦١٤٧

****

<u>رابعا حساب الاحتمال على فترة غير منتهية</u>

ل(س < ١) = ٠,٥ – ل (٠ > س > ١)

= ٠,٥ – ٠,٣٤١٣

= ٠,١٥٨٧

****

ل(س > ١) = ٠,٥ + ل (٠ > س > ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣

= ٠,٨٤١٣

****

ملاحظة

ل (س < -١) = ل (س > ١) = ٠,٥ + ل (٠ > س > ١)

= ٠,٥ + ٠,٣٤١٣ = ٠,٨٤١٣

<u>البحث فى عمق الجدول :-</u>

فى هذا الجزء سوف يكون معلوم قيمة الاحتمال ومجهول أحد حدود الفترة

فمثلا إذا كان ل (٠ > م > ك) = ٠,٣٩٤٤ فما قيمة ك

لإيجاد قيمة ك نبحث عن المساحة المعطاة ٠,٣٩٤٤ فى جدول المساحات فنجدها فى صف ١,٢ وتحت ٠,٠٥ ولهذا فإن ك = ١,٢٥

الارتبــاط

* تعريف الارتباط

الارتباط هو علاقة بين متغيرين ،أو أكثر ،ويقاس الارتباط بمعامل الارتباط "ر" حيث -١ ≤ر≤ 1 ≤

* أنواع الارتباط

١- طردى: صفر < س.1 ≤

2- عكسي ≤-1 :س < صفر.

ملاحظات

١- إذا كان ر = صفر	لا ارتباط
٢- إذا كان ر = ١	ارتباط طردى تام
٣- إذا كان ر =-١	ارتباط عكسي تام

* درجات الارتباط

١- ضعيف: صفر < ر < ٠,٤ أو -٠,٤ < ر < صفر.

٢- متوسط: ٠,٤ ≤ر 0.6≥ أو ≤-0.6 ر.-0.4 ≤

٣- قوى: ٠,٦ < ر< ١ أو -١ < ر < -٠,٦

* معامل ارتباط بيرسون

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)(مجـ\ ص)}{\sqrt{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}\ .\ \sqrt{ن\ مجـ\ ص^2 - (مجـ\ ص)^2}}$$

حيث ن عدد قيم كل من المتغيرين ولإيجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة نكون جدولاً من 5أعمدة وهى س، ص، س ص ،س^2،ص^2

مثال1

من بيانات الجدول الآتى، أوجد معامل ارتباط بيرسون بين قيم س، ص مبيناً نوعه ودرجته.

س	6	5	7	8	10	6	7
ص	4	7	5	6	8	7	8

الحل

س	ص	س2	ص2	س ص
6	4	24	36	16
5	7	35	25	49
7	5	35	49	25
8	6	48	64	36
10	8	80	100	64
6	7	42	36	49
7	8	56	49	64
49	45	320	359	303

ن7 =

٧ × ٣٢٠ − ٤٩ × ٤٥

$$ر = \frac{45 \times 49 - 320 \times 7}{\sqrt{(٢٤٠١ - ٣٥٩ \times ٧)}\ \sqrt{(٢٠٢٥ - ٣٠٢ \times ٧)}}$$

ر x (112)) ÷ 35 = (٩٦)) = ٠,٣٤ طردي ضعيف

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

*** معامل ارتباط الرتب لسبيرمان**

فى هذه الطريقة نوجد معامل الارتباط بين رتب القيم ، وليس بين القيم نفسها.

خطوات الحل

١-نرتب كل من أزواج القيم بنفس الترتيب (تنازلياً معاً أو تصاعدياً معاً).

مع ملاحظة أنه إذا اشترك اثنان أو أكثر فى رتبة تعطى لكلٍّ منهما المتوسط الحسابى لهذه الرتب.

٢ - نكون جدولاً من أربعة أعمدة وهى: رتب س، رتب ص، ف، ف٢ حيث ف تعنى الفرق المطلق بين الرتب.

- نستخدم القانون:

$$ر = 1 - \frac{6 \text{مجـ} ف^2}{ن(ن^2 - 1)}$$

حيث ن عدد الأزواج المرتبة

مثال ١

من بيانات الجدول الآتى:

س	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جداً	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص

الحل

ن = ٦

رتب س	رتب ص	ف	$ف^2$
1	3	2-	4
3.5	6	2.5-	6.25
2	4.5	2.5-	6.25
5	1	4	16
6	2	4	16
3.5	4.5	1-	1
			49.5

$$ر = 1 - \frac{6 \text{مجـ} ف^2}{ن(ن^2 - 1)}$$

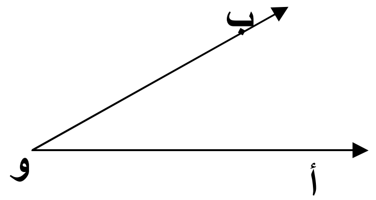
ر = 1-(6 × 49.5) ÷ (6 ×35)

ر = -0.41 = ضعيف

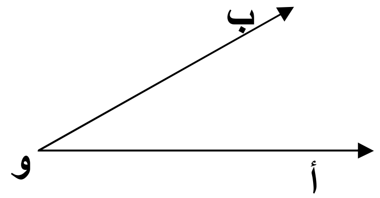
الباب الخامس حساب المثلثات

الزاوية الموجهة :-

هى زاوية محصورة بين ضلعين أحدهما يسمى ضلع أبتدائى والأخر يسمى ضلع نهائي ولها اتجاه يتحدد من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي



و أ يسمى ضلع أبتدائى
و ب يسمى ضلع نهائي
تسمى الزاوية أ و ب



و ب يسمى ضلع أبتدائى
و أ يسمى ضلع نهائي
تسمى الزاوية ب و أ

لاحظ أن

ق (أ و ب) ≠ ق(ب و أ)

****

قياس الزاوية الموجهة

للزاوية تقسيمان من حيث القياس

(١) من حيث وحدة القياس يوجد نوعان

أ- قياس موجب ب – قياس سالب

(٢) من حيث الإشارة (اتجاه الدوران)

أ- قياس موجب ب- قياس سالب

****

أولا القياس من حيث الوحدة

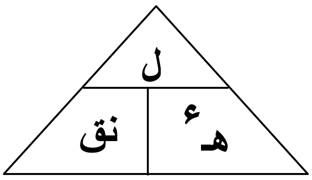
(١) القياس الستيني:-

هو قياس وحداته الدرجة، الدقيقة ، الثانية ويرمز له بالرمز س ْ

١ ْ = ٦٠ / ، ١ / = ٦٠ //

(٢) القياس الدائري:-

هو قياس وحدته الدرجة الدائرية (١ ء) ويرمز له بالرمز هـ ء



القياس الدائري لزاوية مركزية = $\frac{\text{طول القوس الذى تحصره}}{\text{طول نصف قطر الدائرة}}$

هـ ء = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ ،،،، نق = $\frac{\text{ل}}{\text{هـ ء}}$ ،،، ل = هـ ء × نق

مثال أوجد القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر قوساً طوله ١٠سم من دائرة طول نصف قطرها ٤سم

الحـــــــــل

$$هـ^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{١٠}{٤} = ٢,٥^{ء}$$

****

مثال زاوية مركزية قياسها ١,٥ ء تحصر قوسا طوله ٧,٥ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحـــــــــل

$$نق = \frac{ل}{هـ^{ء}} = \frac{٧,٥}{١,٥} = ٥سم$$

****

مثال زاوية مركزية قياسها ١,٤ ء تحصر قوساً طوله ٤سم أوجد طول القوس الذي تحصره

الحـــــــــل

$ل = هـ^{ء} \times نق = ١,٤ \times ٥ = ٧$ سم

****

الزاوية النصف قطرية

هى زاوية مركزية تحصر قوسا طوله يساوى طول نصف قطر دائرتها (ل = نق) فيكون قياسها الدائري يساوى ١ ء

****

العلاقة بين القياسين الدائرى والستينى

$$\frac{س^{\circ}}{١٨٠} = \frac{هـ^{ء}}{ط}$$ ومنه نجد أن

(١) $$س^{\circ} = \frac{هـ^{ء} \times ١٨٠}{ط}$$

(٢) $$هـ^{ء} = \frac{س^{\circ} \times ط}{١٨٠}$$

مثال حول من القياس الستيني إلى القياس الدائري كلا من القياسات الآتية

(١) ١٢٠° — الحـــــــل — $هـ^ء = \frac{س° \times ط}{١٨٠} = \frac{١٢٠ \times ط}{١٨٠} =$

120	×	Exp	÷	180	=	
120	×	Exp	÷	180	=	

(٢) ٤٠ / ٢٠٠° — الحـــــــل — $هـ^ء = \frac{٤٠ / ٢٠٠° \times ط}{١٨٠} =$

200	,,,,	40	,,,,	×	Exp	÷	180	=	
200	,,,,	40	,,,,	×	Sh	Exp	÷	180	=

(٢) ١٥ // ٢٠ / ١٠٠ — الحـــــــل — $هـ^ء = \frac{١٥ // ٢٠ / ١٠٠° \times ط}{١٨٠} =$

100	,,,	20	,,,	15	,,,	×	Exp	÷	180	=	
100	,,,	20	,,,	15	,,,	×	Sh	Exp	÷	180	=

مثال حول من القياس الدائري إلى القياس الستيني

(١) ٠,٦ ء — الحـــــــل — $س° = \frac{٠,٦ \times ١٨٠}{ط}$

(فى الآلات الحديثة)

0	٠	6	×	180	÷	Exp	=	,,,

(فى الآلات القديمة)

0	٠	6	×	180	÷	sh	Exp	=	sh	,,,

ملاحظة إذا أعطيت القياس الدائرى بدلالة ط فإنه يحول مباشرة إلى القياس الستينى بالتعويض عن ط بـ ١٨٠°

****

مثال حول كلا من القياسات الدائرية الآتية إلى القياس الستيني

(١) $هـ^ء = \frac{ط}{٢}$ — الحـــــل — $س° = \frac{١٨٠}{٢} = ٩٠°$

(٢) $هـ^ء = \frac{٥ ط}{٣}$ — الحـــــل — $س° = \frac{٥ \times ١٨٠}{٣} = ٣٠٠°$

مثال أوجد بدلالة ط القياس الدائري لكلا من القياسات الآتية

(١) ١٢٠° **الحـــل** $هـ^ء = \frac{١٢٠ \times ط}{١٨٠} = \frac{٢ط}{٣}$

مثال أوجد القياس الدائري والقياس الستيني للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ٥سم من دائرة طول نصف قطرها ٤سم

الحـــل

ل = ٥سم

نق = ٤سم

$هـ^ء = \frac{ل}{نق} = \frac{٥}{٤} = ١,٢٥^ء$

$س = \frac{هـ^ء \times ١٨٠}{ط} = \frac{١,٢٥ \times ١٨٠}{ط} =$

مثال أوجد القياس الستيني للزاوية المركزية التى تحصر قوسا طوله ٩سم من دائرة طول قطرها ١٠سم

الحـــل

ل = ٩سم

نق = ٥سم

$هـ^ء = \frac{ل}{نق} = \frac{٩}{٥} = ١,٨^ء$

$س = \frac{هـ^ء \times ١٨٠}{ط} = \frac{١,٨ \times ١٨٠}{ط} =$

مثال زاوية مركزية قياسها ١٢٠° طول نصف قطر دائرتها ٥سم أوجد طول القوس الذي تحصره

الحـــل

س = ١٢٠°

نق = ٥سم

$هـ^ء = \frac{س \times ط}{١٨٠} = \frac{١٢٠ \times ط}{١٨٠} = ٢,١^ء$

ل = هـ^ء × نق = ٢,١ × ٥ = ١٠,٥ سم

مثال زاوية مركزية قياسها ١٥٠° تحصر قوساً طوله $\frac{١٧ط}{٤}$ سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحـــل

س = ١٥٠°

$ل = \frac{١٧ط}{٤} = ١٣,٣٥$

$$هـ^ء = \frac{س \times ط}{١٨٠} = \frac{١٥٠ \times ط}{١٨٠} = ٢,٦$$

$$نق = \frac{ل}{هـ^ء} = \frac{١٣,٣٥}{٢,٦} = ٥,٢٥ \text{ سم}$$

مثال زاوية محيطية قياسها ٦٥° طول نصف قطر دائرتها = ٤سم أوجد طول القوس الذي تحصره

الحـــــــل

سْ = ٢ × ٦٥° = ١٣٠° نق = ٤سم

$$هـ^ء = \frac{١٣٠° \times ط}{١٨٠} = ٢,٣^ء$$

ل = هـ^ء × نق = ٢,٣ × ٤ = ٩,٢ سم

مثال زاوية محيطية قياسها ٢٠ َ ٧٥° تحصر قوساً طوله ١٠سم أوجد طول نصف قطر دائرتها

الحـــــــل

سْ = ٢ × ٢٠ َ ٧٥° = ٤٠ َ ١٥٠° ل = ١٥ سم

$$هـ^ء = \frac{٤٠' \; ١٥٠° \times ط}{١٨٠} = ٢,٦٣^ء$$

$$نق = \frac{ل}{هـ^ء} = \frac{١٥}{٢,٦٣} = ٥,٧ \text{ سم}$$

مثال أوجد القياسين الدائري والستيني للزاوية المركزية التى تحصر قوساً طوله يساوى طول نصف قطر دائرتها (الزاوية النصف قطرية)

الحـــــــل

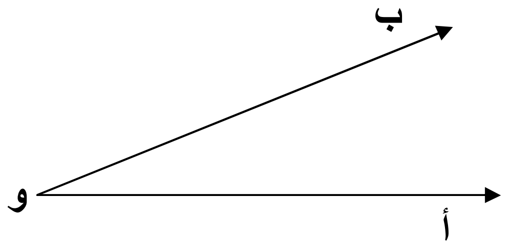
ل = نق

$$هـ^ء = \frac{ل}{نق} = \frac{نق}{نق} = ١^ء \qquad سْ = \frac{١ \times ١٨٠}{ط} = ٤٤'' \; ١٧' \; ٥٧°$$

القياس من حيث الإشارة

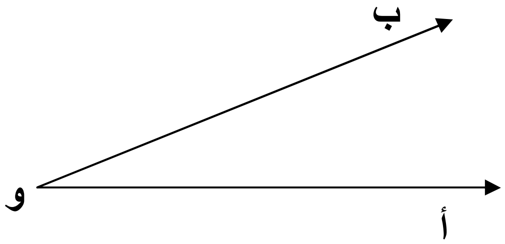
ينقسم القياس من حيث الإشارة إلى

(١) القياس الموجب



يكون قياس الزاوية الموجهة موجبا إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائي ضد حركة عقارب الساعة

(١) القياس السالب



يكون قياس الزاوية الموجهة سالبا إذا كان اتجاه الدوران من الضلع الأبتدائى إلى الضلع النهائي مع حركة عقارب الساعة

للتحويل من قياس سالب إلى قياس موجب

القياس الستيني السالب = القياس الستينىالموجب ـ ٣٦٠

القياس الدائري السالب = القياس الدائري الموجب ـ ٢ط (بدلالة ط)

للتحويل من قياس موجب إلى قياس سالب

القياس الستيني الموجب = القياس الستيني السالب + ٣٦٠

القياس الدائري الموجب = القياس الدائري السالب + ٢ط (بدلالة ط)

مثال **حول كلا من القياسات الموجبة الآتية إلى القياس السالب**

(١) ١٥٠°

الحـــل

القياس السالب = ١٥٠ ـ ٣٦٠ =ـ ٢١٠

(٢) ٤٠ َ ١٠٠°

الحـــل

القياس السالب=٤٠ َ ١٠٠° ـ ٣٦٠°

= ـ ٢٠ َ ٢٥٩°

(٣) ٢٥ ً ٥٠ َ ٢٠٠°

الحـــل

القياس السالب = ٢٥ ً ٥٠ َ ٢٠٠° ـ ٣٦٠

= ـ ٣٥ ً ٩ َ ١٥٩°

<u>حول كلا الزوايا المتكافئة :-</u>

هى الزوايا التى لها نفس الشعاع النهائي وتنتج بإضافة أو طرح (٣٦٠° أو ٢ ط) من القياس حسب نوعه

هـ = هـ ± ن × ٣٦٠° (إذا كان القياس ستيني

هـ = هـ ± ٢ ن ط (إذا كان القياس دائري بدلالة ط) فمثلا

٣٠° = ٣٠+٣٦٠ = ٣٩٠

= ٣٠ +٢ × ٣٦٠ = ٧٥٠

= ٣٠ +٣ × ٣٦٠ = ١١١٠

ولهذا فإن الزاوية

٣٠° = ٣٩٠° = ٧٥٠° = ١١١٠°

$$\frac{\text{ط}}{\text{٥}} = \frac{\text{ط}}{\text{٥}} + \text{٢ط} = \frac{\text{ط} + \text{١٠ط}}{\text{٥}} = \frac{\text{١١ط}}{\text{٥}}$$

$$= \frac{\text{١١ط}}{\text{٥}} + \text{٢ط} = \frac{\text{١١ط} + \text{١٠ط}}{\text{٥}} = \frac{\text{٢١ط}}{\text{٥}}$$

****

٣٠ = ٣٠ +٢ ط = ٣٠ +٤ ط = ٣٠ +٦ط = ٣٠ +٨ ط = ٣٠+١٠ط = وهكذا

لكن

٣٠ + ط = ٣٠ + ٣ ط = ٣٠ +٥ ط = ٣٠ +٧ط = ٣٠ +٩ ط = ١١٠°

وكذلك

٣٠ = ٣٠ – ٣٦٠ = - ٣٣٠°

٣٠ = ٣٠ – ٢ × ٣٦٠ = - ٦٩٠°

٣٠ = ٣٠ – ٣ × ٣٦٠° = - ١١٥٠

خلاصة القول

أن الزاوية لا تتغير أذا أضيف إليها عدد كامل من الدورات أو طرح منها عدد كامل من الدورات

****

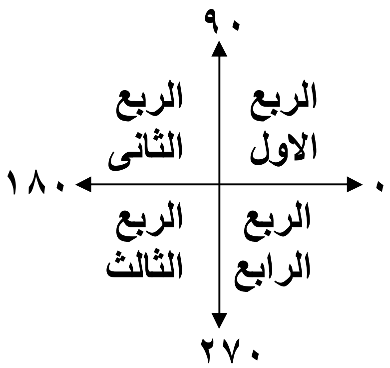
لاحظ أن

(١) إذا كانت ٠ < س < ٩٠° فإن س تقع فى الربع الأول

(٢) إذا كانت ٩٠ < س < ١٨٠° فإن س تقع فى الربع الثاني

(٣) إذا كانت ١٨٠ < س < ٢٧٠° فإن س تقع فى الربع الثالث

(٤) إذا كانت ٢٧٠ < س < ٣٦٠° فإن س تقع فى الربع الرابع



مثال حدد الربع الذي تقع فيه كلا من الزوايا التى قياسها كالاتى

(١) ١٢٠٠°

الحـــل

١٢٠٠ = ١٢٠٠ ـ ٣٦٠ = ٨٤٠ ـ ٣٦٠ = ٤٨٠ ـ ٣٦٠ = ١٢٠°

الزاوية التى قياسها ١٢٠٠ تقع فى الربع الثاني

****

(٢) ـ ١٥٠٠

الحـــل

- ١٥٠٠ = - ١٥٠٠ +٣٦٠ = - ١١٤٠ +٣٦٠ = - ٧٨٠ +٣٦٠ = - ٤٢٠ +٣٦٠ = -٦٠

= -٦٠ +٣٦٠ = ٣٠٠

الزاوية التى قياسها ـ ١٥٠٠ تقع فى الربع الرابع

****

(٣) $\frac{١٧ط}{٣}$

الحـــل

$\frac{١٧ط}{٣}$ = $\frac{١٧ \times ١٨٠}{٣}$ = ١١٢٠ = ١١٢٠ ـ ٣٦٠ = ٧٦٠ ـ ٣٦٠ = ٤٠٠ -٣٦٠ = ٤٠°

الزاوية التى قياسها $\frac{١٧ط}{٣}$ تقع فى الربع الأول

****

(٤) $\frac{-١٩ط}{٤}$

الحـــل

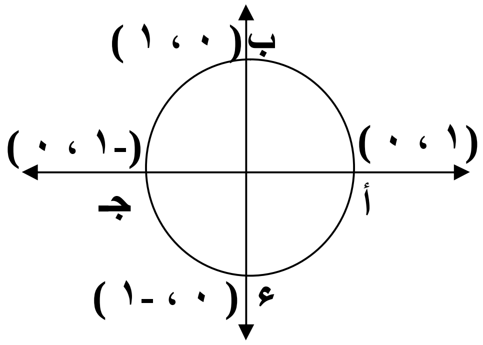
$\frac{-١٩ط}{٤}$ = $\frac{-١٩ \times ١٨٠}{٤}$ = - ٨٥٥ = - ٨٥٥ +٣٦٠ = - ٤٩٥ +٣٦٠ = - ١٣٥ +٣٦٠ =٢٢٥

الزاوية التى قياسها $\frac{-١٩ط}{٤}$ تقع فى الربع الثالث

الدوال المثلثية

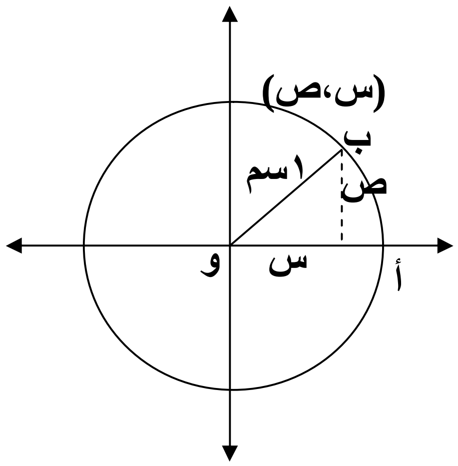
دائرة الوحدة :-

هى دائرة مركزها نقطة الأصل و(٠ ، ٠)
وطول نصف قطرها ١سم تقطع محوري
الإحداثيات فى أربعة نقط هى على الترتيب
أ=(١ ، ٠) ،،،، ب = (٠ ، ١)
جـ = (-١ ، ٠) ،،، ء = (٠ ، -١)



****

إذا فرض وجود نقطة ب = (س ، ص) هذه النقطة فى أى موضع تكون زاوية أ و ب يمكن تعريف مجموعة من الدوال المثلثية لهذه الزاوية وهذه الدوال تعتمد على الاحداثيين السينى والصادى لنقطة ب وهى كالاتى



(١) دالة الجيب (جا   sin)

جا (أ و ب) = الاحداثى الصادى لنقطة ب=ص

****

(٢) دالة جيب التمام (جتا   cos)

جتا (أ و ب) = الاحداثى السينى لنقطة ب = س

****

(٣) دالة الظل (ظا   tan)

ظا(أ و ب) = $\frac{\text{الاحداثى الصادى}}{\text{الاحداثى السينى}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

(٤) دالة قاطع التمام (قتا)

قتا(أ و ب) = $\frac{1}{\text{الاحداثى الصادى}} = \frac{1}{\text{ص}}$

****

(٥) دالة القاطع (قا)

قا(أ و ب) = $\frac{1}{\text{الاحداثى السينى}} = \frac{1}{\text{س}}$

****

(٦) دالة ظل التمام (ظتا)

ظتا(أ و ب) = $\frac{\text{الاحداثى السينى}}{\text{الاحداثى الصادى}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

ملخص الدوال المثلثية

إذا كانت زاوية أ و ب = هـ تقطع دائرة الوحدة فى نقطة ب = (س ، ص) فإن

جا هـ = ص ، قتا هـ = $\frac{١}{ص}$

جتاهـ = س ، قاهـ = $\frac{١}{س}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، ظتاهـ = $\frac{س}{ص}$

ملاحظة هامة جداً
الاحداثى الصادى والسينى لنقطة ب يرتبطان بالعلاقة $س^٢ + ص^٢ = ١$

****

مثال إذا كانت أ و ب زاوية فى وضعها القياسى تقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب أوجد جميع الدوال المثلثية لها إذا كانت

(١) ب = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)

الحـــــــــــل

جاهـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | قتاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

جتاهـ = $\frac{١}{٢}$ | قــاهـ = ٢

ظاهـ = $\frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٣}$ | ظتاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٢) ب = (٠,٦ ، ٠,٨)

الحـــــــــــل

جاهـ = $\frac{٨}{١٠}$ | قتاهـ = $\frac{١٠}{٨}$

جتاهـ = $\frac{٦}{١٠}$ | قاهـ = $\frac{١٠}{٦}$

ظاهـ = $\frac{\frac{٨}{١٠}}{\frac{٦}{١٠}}$ = $\frac{٨}{٦}$ | ظتاهـ = $\frac{٦}{٨}$

(٣) (س ، $\frac{١}{٢}$) حيث س > ٠

الحـــــــــــل

نوجد الاحداثى السينى من العلاقة

$س^٢ + ص^٢ = ١$

$س^٢ + (\frac{١}{٢})^٢ = ١$

$س^٢ + \frac{١}{٤} = ١$

$س^٢ = ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

س = $\sqrt{\frac{٣}{٤}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب = ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

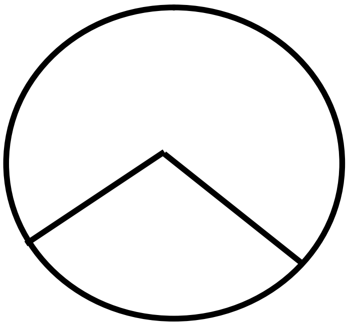
جاهـ = $\frac{١}{٢}$ | قتاهـ = ٢

جتا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | قاهـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

ظاهـ = $\frac{\frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ | ظتاهـ = $\sqrt{٣}$

القطاع الدائرى

القطاع الدائري :-



هو جزء من سطح دائرة محصور

بين نصفى قطر وطول قوس

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق ل

= $\frac{١}{٢}$ هـ ء × نق

= $\frac{س^{\circ}}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة

= $\frac{هـ^{ء}}{٢ط}$ × مساحة الدائرة

محيط القطاع = ٢ نق + ع

مثال

قطاع دائرة طول نصف قطر دائرته ٦سم يحصر قوساً طوله ٥سم أوجد محيطه ومساحته

الحـــــــــــــــــل

محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٥ = ١٢ +٥ = ١٧ سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥ = ١٥ سم^{٢}

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال

قطاع دائري قياس زاويته المركزية ١,٥ ء وطول نصف قطر دائرته ٤سم أوجد محيطه ومساحته

ل = هـ ء × نق = ١,٥ × ٤ = ٦ سم

محيطه = ٢ نق + ل = ٢ × ٤ + ٦ = ٨ +٦ = ١٤سم

$\frac{١}{٢}$ $\frac{١}{٢}$

مساحته = $\frac{1}{2}$ نق × ل = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ سم^{٢}

مثال

قطاع دائري قياس زاويته المركزية ٥٠° وطول نصف قطر دائرته ٦سم

أوجد محيطه ومساحته .

الحـــــــــــــــــــل

هـ^{ء} = $\frac{٥٠ \times ط}{١٨٠}$ = ٠,٨٧ نق = ٦سم

ل = هـ^{ء} × نق = ٠,٨٧× ٦ = ٥,٢٢ سم

محيطه = ٢ نق + ل = ٢ × ٦ + ٥,٢٢ = ١٧,٢٢ سم

مساحته = $\frac{١}{٢}$ نق × ل = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥,٢٢ = ١٥,٦٦ سم

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال

قطاع دائري قياس زاويته المركزية = ٦٠° ومساحة دائرته = ١٥سم^{٢}

أوجد مساحة القطاع

الحـــــــــــــــــــل

مساحة القطاع = $\frac{س}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة = $\frac{٦٠°}{٣٦٠}$ × ١٥ = ٢,٥ سم^{٢}

مثال

قطاع دائري قياس زاويته المركزية ٢,٢ ^{ء} وطول قوسه = ١١ سم

أوجد محيطه ومساحته

الحـــــــــــــــــــل

نق = $\frac{ل}{هـ^{ء}}$ = $\frac{١١}{٢,٢}$ = ٥سم

محيطه = ٢ نق + ل = ٢ × ٥ +١١ = ١٠ +١١ = ٢١ سم

مساحته = $\frac{١}{٢}$ نق ل = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١١ = ٢٧,٥ سم^{٢}

مثال

قطاع دائري مساحته ٤٠ سم^{٢} يحصر قوساً طوله = ١٠سم
أوجد محيطه

الحـــــــــــــــــــل

مساحته = ٤٠

$\frac{١}{٢}$ **نق × ل = ٤٠**

$\frac{١}{٢}$ **× نق × ١٠ = ٤٠**

٥ نق = ٤٠

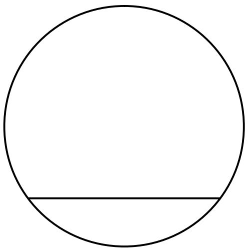
نق = $\frac{٤٠}{٥}$ **= ٨سم**

محيطه = ٢نق + ل

= ٢ × ٨ + ١٠

= ١٦+١٠ = ٢٦ سم

القطعة الدائرية



القطعة الدائرية :-
هى جزء من سطح
دائرة محدود بوتر وقوس

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ **نق^{٢} (هـ ء – جاهـ)**

@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@

مثال

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١٢٠°
وطول نصف قطر دائرتها = ١٠سم

الحــــــل

هـ ء = $\frac{١٢٠ \times ط}{١٨٠}$ **= ٢,١ ء**

مساحة القطعة = $\frac{١}{٢}$ **نق^{٢} (هـ ء – جاهـ) =** $\frac{١}{٢}$ **× ١٠٠ (٢,١ – جا١٢٠)**

= ٥٠ (٢,١ – جا ١٢٠) = ٦١,٧ سم^{٢}

مثال

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى قياس زاويتها المركزية = ١,٢ وطول نصف قطر دائرتها = ٨سم

الحـــل

هـ ء = (١,٢ × ١٨٠) / ط = ٦٩°

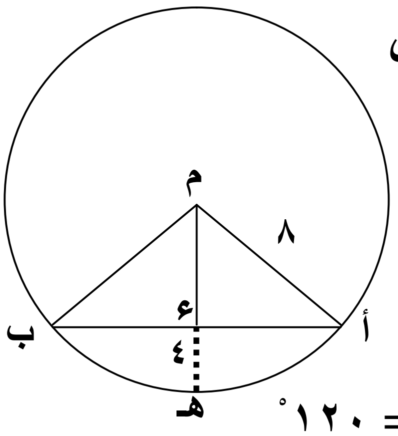
مساحة القطعة = ١/٢ نق^{٢} (هـ ء − جاهـ) = ١/٢ × ٦٤ (١,٢ − جا٦٩)

= ٣٢ (١,٢ − جا٦٩) = ٨,٥ سم^{٢}

مثال

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨سم وأرتفاعها = ٤ سم

الحـــــــــل



م هـ = نق = ٨ سم

م ع = ٨ − ٤ = ٤ سم

جتا(أ م ع) = ٤/٨ = ١/٢

∴ ق (أ م ع) = ٦٠° ∴ ق (أ م ب) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

هـ ء = (١٢٠ × ط) / ١٨٠ = ٢,١

مساحة القطعة الدائرية = ١/٢ نق^{٢} (هـ ء − جاهـ)

= ١/٢ × ٦٤ (٢,١ − جا١٢٠°)

قوانين هامة

التحويل من تقدير ستيني إلى دائري والعكس :

$$\frac{\text{س}^\circ}{180} = \frac{\text{د}}{\text{ط}}$$

المتطابقات الأساسية

1) جا² ع + جتا² ع = ١
2) ١ + ظا² ع = قا² ع
3) ١ + ظتا² ع = قتا² ع

- −١ ≤ جا ع ≤ ١ ، −١ ≤ جتا ع ≤ ١
- جا (هـ + ٢ م ط) = جا هـ ، م ∈ ص
- جتا (هـ + ٢ م ط) = جتا هـ ، م ∈ ص
- ظا ع = $\frac{\text{جا ع}}{\text{جتا ع}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ صفر
- ظا (هـ + ٢ م ط) = ظا هـ ، م ∈ ص
- قا ع = $\frac{1}{\text{جتا ع}}$ ، قتا ع = $\frac{1}{\text{جا ع}}$ ، ظتا ع = $\frac{1}{\text{ظا ع}} = \frac{\text{جتا ع}}{\text{جا ع}}$

تبسيط الدوال الدائرية

جا(ط − ع) = جا ع	جتا(ط − ع) = − جتا ع	ظا(ط − ع) = − ظا ع
جا(ط + ع) = − جا ع	جتا(ط + ع) = − جتا ع	ظا(ط + ع) = ظا ع
جا(−ع) = − جا ع	جتا(−ع) = جتا ع	ظا(−ع) = − ظا ع
جا($\frac{\text{ط}}{2}$ − ع) = جتا ع	جتا($\frac{\text{ط}}{2}$ − ع) = جا ع	ظا($\frac{\text{ط}}{2}$ − ع) = ظتا ع
جا($\frac{\text{ط}}{2}$ + ع) = جتا ع	جتا($\frac{\text{ط}}{2}$ + ع) = − جا ع	ظا($\frac{\text{ط}}{2}$ + ع) = − ظتا ع
جا ($\frac{3\text{ط}}{2}$ − ع) = − جتا ع	جتا ($\frac{3\text{ط}}{2}$ − ع) = − جا ع	ظا ($\frac{3\text{ط}}{2}$ − ع) = ظتا ع
جا ($\frac{3\text{ط}}{2}$ + ع) = − جتا ع	جتا ($\frac{3\text{ط}}{2}$ + ع) = جا ع	ظا ($\frac{3\text{ط}}{2}$ + ع) = − ظتا ع

علاقة الدوال المثلثية بالمثلث القائم :

جا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	جتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	ظا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
قتا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$	قا هـ = $\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$	ظتا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

طول القوس : ل = |هـ| × نق

هـ الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس بالتقدير الدائري

الدوال الدائرية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما

جا (جـ + د) = جا جـ جتا د + جتا جـ جا د

جا (جـ − د) = جا جـ جتا د − جتا جـ جا د

جتا (جـ + د) = جتا جـ جتا د − جا جـ جا د

جتا (جـ − د) = جتا جـ جتا د + جا جـ جا د

ظا (جـ + د) = $\frac{\text{ظا جـ + ظا د}}{\text{١ − ظا جـ ظا د}}$

ظا (جـ − د) = $\frac{\text{ظا جـ − ظا د}}{\text{١ + ظا جـ ظا د}}$

العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وزواياه

قاعدة جيوب التمام :

أ² = ب² + جـ² − ٢ ب جـ جتا أ

ب² = جـ² + أ² − ٢ جـ أ جتا ب

جـ² = أ² + ب² − ٢ أ ب جتا جـ

قاعدة الجيوب :

$$\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$$

حساب مساحة المثلث بمعرفة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما :

(١) م = $\frac{1}{2}$ ب جـ جا أ

(٢) م = $\frac{1}{2}$ أ جـ جا ب

(٣) م = $\frac{1}{2}$ أ ب جا جـ

الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا

$$\text{جا ٢ جـ} = \text{٢ جا جـ جتا جـ}$$

$$\text{جتا ٢ جـ} = \text{جتا}^{\text{٢}}\,\text{جـ} - \text{جا}^{\text{٢}}\,\text{جـ}$$

$$= \text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\,\text{جـ}$$

$$= \text{٢ جتا}^{\text{٢}}\,\text{جـ} - \text{١}$$

$$\text{جا}^{\text{٢}}\,\text{جـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١} - \text{جتا ٢ جـ}\right)$$

$$\text{جتا}^{\text{٢}}\,\text{جـ} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١} + \text{جتا ٢ جـ}\right)$$

$$\text{ظا ٢ جـ} = \frac{\text{٢ ظا جـ}}{\text{١} - \text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{جـ}}$$

$$\text{ظا}^{\text{٢}}\,\text{جـ} = \frac{\text{١} - \text{جتا ٢ جـ}}{\text{١} + \text{جتا ٢ جـ}}$$

$$\text{جا جـ} = \text{٢ جا}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}}\,\text{جتا}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}}$$

$$\text{جتا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١} + \text{جتا جـ}\right)$$

$$\text{جتا جـ} = \text{جتا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}} - \text{جا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}}$$

$$\text{جا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{١} - \text{جتا جـ}\right)$$

$$= \text{١} - \text{٢ جا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}} = \text{٢ جتا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}} - \text{١}$$

$$\text{ظا}^{\text{٢}}\,\frac{\text{جـ}}{\text{٢}} = \frac{\text{١} - \text{جتا جـ}}{\text{١} + \text{جتا جـ}}$$

قوانين التحويل

$$\text{جا}(\text{جـ}+\text{د}) + \text{جا}(\text{جـ}-\text{د}) = \text{٢ جا جـ جتا د}$$

$$\text{جا}(\text{جـ}+\text{د}) - \text{جا}(\text{جـ}-\text{د}) = \text{٢ جتا جـ جا د}$$

$$\text{جتا}(\text{جـ}+\text{د}) + \text{جتا}(\text{جـ}-\text{د}) = \text{٢ جتا جـ جتا د}$$

$$\text{جتا}(\text{جـ}+\text{د}) - \text{جتا}(\text{جـ}-\text{د}) = -\text{٢ جا جـ جا د}$$

$$\text{جتا}(\text{جـ}-\text{د}) - \text{جتا}(\text{جـ}+\text{د}) = \text{٢ جا جـ جا د}$$

$$\text{جا جـ جتا د} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{جا}(\text{جـ}+\text{د}) + \text{جا}(\text{جـ}-\text{د})\right]$$

$$\text{جتا جـ جا د} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{جا}(\text{جـ}+\text{د}) - \text{جا}(\text{جـ}-\text{د})\right]$$

$$\text{جتا جـ جتا د} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{جتا}(\text{جـ}+\text{د}) + \text{جتا}(\text{جـ}-\text{د})\right]$$

$$\text{جا جـ جا د} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{جتا}(\text{جـ}+\text{د}) - \text{جتا}(\text{جـ}-\text{د})\right]$$

$$\text{جا جـ جا د} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left[\text{جتا}(\text{جـ}-\text{د}) - \text{جتا}(\text{جـ}+\text{د})\right]$$

$$\text{جا س} + \text{جا ص} = \text{٢ جا}\,\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{٢}}\,\text{جتا}\,\frac{\text{س}-\text{ص}}{\text{٢}}$$

$$\text{جا س} - \text{جا ص} = \text{٢ جتا}\,\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{٢}}\,\text{جا}\,\frac{\text{س}-\text{ص}}{\text{٢}}$$

$$\text{جتا س} + \text{جتا ص} = \text{٢ جتا}\,\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{٢}}\,\text{جتا}\,\frac{\text{س}-\text{ص}}{\text{٢}}$$

$$\text{جتا س} - \text{جتا ص} = -\text{٢ جا}\,\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{٢}}\,\text{جا}\,\frac{\text{س}-\text{ص}}{\text{٢}}$$

$$\text{جتا س} - \text{جتا ص} = \text{٢ جا}\,\frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{٢}}\,\text{جا}\,\frac{\text{ص}-\text{س}}{\text{٢}}$$

الباب السادس التفاضل والتكامل

التغيـــــــــــير

إذا كان ص = د(س) فإن :

- التغير فى س = هـ = D س = س٢ – س١

وعلى ذلك يكون : س٢ = س١ + هـ

- التغير فى ص = D ص = ص٢ – ص١ = د (س٢) – د (س١)
- **دالة التغير** ت (هـ) = د (س١ + هـ) – د (س١)
- **دالة متوسط التغير** م (هـ) = $\frac{\text{د (س١ + هـ) – د (س١)}}{\text{هـ}}$

$$= \frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د (س}_2\text{) - د (س}_1\text{)}}{\text{س}_2\text{ - س}_1} = \frac{\text{ص}_2\text{ - ص}_1}{\text{س}_2\text{ - س}_1} = \frac{D\text{ ص}}{D\text{ س}}$$

- **معدل التغير** نهــــا م (هـ) = نهــــا $\frac{\text{د (س١ + هـ) – د (س١)}}{\text{هـ}}$ (هـ ← ٠)

مثال ١ إذا كان د (س) = س٢ + ٥ س

(أولاً) أوجد دالة التغير ت عندما س = ٢ ثم احسب ت (٠,١)

(ثانياً) احسب متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٥

(ثالثاً) أوجد معدل تغير الدالة عندما س = ٤

(الحل)

(أولاً) ت (هـ) = د (س١ + هـ) – د (س١)

= [(س١ + هـ)٢ + ٥ (س١ + هـ)] – [س$_1^2$ + ٥ س١]

= س$_1^2$ + ٢ س١ هـ + هـ٢ + ٥ س١ + ٥ هـ - س$_1^2$ - ٥ س١

= ٢ س١ هـ + هـ٢ + ٥ هـ

عندما س = ٢

ت (هـ) = ٢ × ٢ × هـ + هـ٢ + ٥ هـ = هـ٢ + ٩ هـ

ت (٠,١) = (٠,١)٢ + ٩ × ٠,١ = ٠,٠١ + ٠,٩ = ٠,٩١

(ثانياً) م (هـ) = $\frac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) – د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$

م (هـ) = $\frac{\text{٢ س}_1\text{ هـ + هـ}^{٢}\text{ + ٥ هـ}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ (٢ س}_1\text{ + هـ + ٥)}}{\text{هـ}}$

م (هـ) = ٢ س$_1$ + هـ + ٥

عندما س = ٣ ، هـ = ٠,٥

م (هـ) = ٢ × ٣ + ٠,٥ + ٥ = ١١,٥

(ثالثاً) معدل التغير = نهــــا$_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ م (هـ) = نهــــا$_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{د (س}_1\text{ + هـ) – د (س}_1\text{)}}{\text{هـ}}$

= نهــــا$_{\text{هـ} \leftarrow ٠}$ (٢ س$_1$ + هـ + ٥) = ٢ س$_1$ + ٥

عندما س = ٤   \ معدل التغير = ٢ × ٤ + ٥ = ١٣

مثال ٢ إذا كان د (س) = س^{٢} + ٣ س +٤ فأوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من س$_1$ إلى س$_1$ + هـ ثم استنتج متوسط تغير الدالة عندما تتغير س من ٥ إلى ٤,٨ ثم احسب معدل تغير الدالة عندما س = ٥

(الحل) ت (هـ) = د (س$_1$ + هـ) – د (س$_1$)

= [(س$_1$ + هـ)^{٢} + ٣ (س$_1$ + هـ) + ٤] – [س$_1^2$ + ٣ س$_1$ +٤]

= س$_1^2$ + ٢ س$_1$ هـ + هـ^{٢} + ٣ س$_1$ + ٣ هـ + ٤ - س$_1^2$ - ٣ س$_1$ – ٤

= ٢ س$_1$ هـ + هـ^{٢} + ٣ هـ

م (هـ) = $\frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{٢ س}_1\text{ هـ + هـ}^{٢}\text{ + ٣ هـ}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ (٢ س}_1\text{ + هـ + ٣)}}{\text{هـ}}$

م (هـ) = ٢ س$_1$ + هـ + ٣

عندما س = ٥ ، هـ = ٤,٨ – ٥ = - ٠,٢

م (هـ) = ٢ × ٥ – ٠,٢ + ٣ = ١٢,٨

، معدل التغير = نهـــــــا م (هـ) = نهـــــــا (٢ س١ + هـ + ٣) = ٢ س١ + ٣
هـ ← ٠ هـ ← ٠

عندما س = ٥ \ معدل التغير = ٢ × ٥ + ٣ = ١٣

مثال ٣ إذا كان د (س) = أ س٢ + ب س + ٣ فأوجد دالة التغير ت (هـ) عندما تتغير س من ٢ إلى ٢ + هـ . وإذا كان د (٢) = ٣ ، ت (٠,٥) = ١,٢٥ فأوجد أ ، ب .

(الحل) ت (هـ) = د (٢ + هـ) – د (٢)
= [أ(٢ + هـ)٢ + ب (٢ + هـ) + ٣] – [٤ أ + ٢ ب + ٣]
= أ (٤ + ٤ هـ + هـ٢) + ٢ ب + ب هـ + ٣ – ٤ أ – ٢ ب – ٣
= ٤ أ + ٤ أ هـ + أ هـ٢ + ٢ ب + ب هـ + ٣ – ٤ أ – ٢ ب – ٣
= ٤ أ هـ + أ هـ٢ + ب هـ

Q د (٢) = ٣ \ ٤ أ + ٢ ب + ٣ = ٣
\ ٤ أ + ٢ ب = ٠ \ ٢ أ + ب = ٠
\ ب = - ٢ أ ... (١)

، Q ت ($\frac{1}{2}$) = ١,٢٥ \ ٤ أ × $\frac{1}{2}$ + أ × $\frac{1}{4}$ + ب × $\frac{1}{2}$ = $\frac{5}{4}$ بالضرب × ٤
\ ٨ أ + أ + ٢ ب = ٥ \ ٩ أ + ٢ ب = ٥ ... (٢)
بالتعويض من (١) فى (٢) \ ٩ أ – ٤ أ = ٥
\ ٥ أ = ٥ \ أ = ١ وبالتعويض فى (١) \ ب = – ٢

مثال ٤ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د (س) = $\sqrt{\text{س} - 1}$ ثم احسب هذا المتوسط عندما تتغير س من ١٠ إلى ١٧ . أوجد أيضاً معدل تغير الدالة عندما س = ١٠

(الحل) ت (هـ) = د (س١ + هـ) – د (س١)
= $\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - 1}$ - $\sqrt{\text{س}_1 - 1}$

م (هـ) = $\frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\sqrt{\text{س}_1 + \text{هـ} - 1} - \sqrt{\text{س}_1 - 1}}{\text{هـ}}$

عندما س = ١٠ ، هـ = ٧

$$م(هـ) = \frac{\sqrt{١٦} - \sqrt{٩}}{٧} = \frac{4-3}{7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{معدل التغير} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س_١ + هـ) - د(س_١)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\sqrt{س_١ + هـ - ١} - \sqrt{س_١ - ١}}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(\sqrt{س_١ + هـ - ١} - \sqrt{س_١ - ١})(\sqrt{س_١ + هـ - ١} + \sqrt{س_١ - ١})}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ - ١} + \sqrt{س_١ - ١})}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{(س_١ + هـ - ١) - (س_١ - ١)}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ - ١} + \sqrt{س_١ - ١})}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{هـ(\sqrt{س_١ + هـ - ١} + \sqrt{س_١ - ١})}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١}{(\sqrt{س_١ + هـ - ١} + \sqrt{س_١ - ١})} = \frac{١}{٢\sqrt{س_١ - ١}}$$

<u>عندما س = ١٠</u>

$$\text{معدل التغير} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

مثال ٥ أوجد دالة متوسط التغير للدالة د (س) = $\frac{2}{س - 3}$ ثم احسب متوسط التغير عندما تتغير س من ٥ إلى ٥,٢ . أوجد كذلك معدل تغير الدالة عند س = ٥

(الحل)

$$ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١)$$

$$= \frac{٢}{س_١ + هـ - ٣} - \frac{٢}{س_١ - ٣} = \frac{٢(س_١ - ٣) - ٢(س_١ + هـ - ٣)}{(س_١ + هـ - ٣)(س_١ - ٣)}$$

$$= \frac{٢ س_١ - ٦ - ٢ س_١ - ٢ هـ + ٦}{(س_١ + هـ - ٣)(س_١ - ٣)} = \frac{-٢ هـ}{(س_١ + هـ - ٣)(س_١ - ٣)}$$

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{١}{هـ} \times \frac{-٢ هـ}{(س_١ + هـ - ٣)(س_١ - ٣)}$$

$$م(هـ) = \frac{-٢}{(س_١ + هـ - ٣)(س_١ - ٣)}$$

<u>عندما س = ٥ ، هـ = ٠,٢</u>

$$م(هـ) = \frac{-2}{(5+0.2-3)(5-3)} = \frac{-2}{2.2 \times 2} = \frac{-10}{22} = \frac{-5}{11}$$

، معدل التغير = $\lim_{هـ \to ٠} \frac{-٢}{(س_١ + هـ - ٣)(س_١ - ٣)} = \frac{-2}{(س_1 - 3)^2}$

<u>عندما س = ٥</u>　　$\therefore$ معدل التغير = $\frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

مثال ٦ مكعب يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله . أوجد متوسط معدل التغير فى مساحة أوجهه عندما يزداد طول حرفه من ٥ سم إلى ٥,٢ سم .
ثم أوجد معدل التغير فى مساحة أوجهه عندما يكون طول حرفه ٥ سم .

<u>(الحل)</u>

نفرض أن طول حرف المكعب = س سم ، مساحة أوجهه = ص سم^٢

$\therefore$ مساحة أوجهه ص = د (س) = ٦ س^٢

$ت(هـ) = د(س_١ + هـ) - د(س_١) = ٦(س_١ + هـ)^٢ - ٦ س_1^2$

$= ٦(س_1^2 + ٢ س_١ هـ + هـ^٢) - ٦ س_1^2 = ٦ س_1^2 + ١٢ س_١ هـ + ٦ هـ^٢ - ٦ س_1^2$

= ١٢ س١ هـ + ٦هـ٢ = هـ (١٢ س١ + ٦ هـ)

م (هـ) = $\frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ (١٢ س١ + ٦ هـ)}}{\text{هـ}}$ = ١٢ س١ + ٦ هـ

عندما س = ٥ ، هـ = ٠,٢

م (هـ) = ١٢ × ٥ + ٦ × ٠,٢ = ٦١,٢

، معدل التغير = نهـــــا م (هـ) = نهـــــا (١٢ س١ + ٦ هـ) = ١٢ س١
هـ ← ٠		هـ ← ٠

عندما س = ٥

معدل التغير = ١٢ × ٥ = ٦٠

مثال ٧ صفيحة دائرية الشكل تتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة بشكلها . أوجد معدل التغير فى مساحة سطح الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها = ٧ سم . (ط = $\frac{22}{7}$)

(الحل) نفرض أن طول نصف قطرها = س سم ، مساحة سطحها = ص سم٢

\ ص = د (س) = ط س٢

ت (هـ) = د (س١ + هـ) – د (س١) = ط (س١ + هـ)٢ – ط س$_1^2$

= ط (س$_1^2$ + ٢ س١ هـ + هـ٢) – ط س$_1^2$

= ط س$_1^2$ + ٢ط س١ هـ + ط هـ٢ – ط س$_1^2$

= ٢ط س١ هـ + ط هـ٢ = هـ (٢ط س١ + ط هـ)

م (هـ) = $\frac{\text{ت (هـ)}}{\text{هـ}}$ = $\frac{\text{هـ (٢ ط س١ + ط هـ)}}{\text{هـ}}$ = ٢ ط س١ + ط هـ

معدل التغير = نهـــــا م (هـ) = نهـــــا (٢ ط س١ + ط هـ) = ٢ ط س١
هـ ← ٠		هـ ← ٠

عندما س = ٧ سم

معدل التغير = ٢ × $\frac{22}{7}$ × ٧ = ٤٤

المشتقة الأولى للدالة

µ **المشتقة الأولى للدالة** $\frac{ء ص}{ء س} = \lim_{هـ \to 0} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

µ **المشتقة الأولى للدالة قد تسمى الدالة المشتقة أو المعامل التفاضلى الأول للدالة أو معدل تغير الدالة .**

µ **ومن رموزها المستخدمة** $\frac{ء ص}{ء س}$ ، ص′ ، د′(س) ، $\frac{ء}{ء س}$ [د(س)]

µ **قواعد الاشتقاق**

3 إذا كان د (س) = أ حيث أ ثابت　　فإن د′(س) = ٠

مثال ٨ إذا كان د (س) = ٧　　\ د′(س) = ٠

3 إذا كان د (س) = $س^{ن}$　　فإن د′(س) = ن $س^{ن-1}$

مثال ٩ إذا كان د (س) = $س^{5}$　　\ د′(س) = ٥ $س^{4}$

3 إذا كان د (س) = أ $س^{ن}$　　فإن د′(س) = أ ن $س^{ن-1}$

مثال ١٠ إذا كان د (س) = ٧ $س^{5}$　　\ د′(س) = ٣٥ $س^{4}$

3 إذا كان د (س) = أ س　　فإن د′(س) = أ

مثال ١١ إذا كان د (س) = ٨ س　　فإن د′(س) = ٨

3 إذا كان د (س) = س　　فإن د′(س) = ١

µ **التفسير الهندسي للمشتقة الأولى :**

المشتقة الأولى للدالة عند النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) هى ميل المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة .

مثال ١٢ إذا كان ص = $\text{س}^{٣}$ – ٥ $\text{س}^{٤}$ + ٧ س - $\frac{3}{\text{س}^{2}}$ + ١٤ فأوجد ص′

(الحل) ص = $\text{س}^{٣}$ – ٥ $\text{س}^{٤}$ + ٧ س – ٣ $\text{س}^{-٢}$ + ١٤

∴ ص′ = ٣ $\text{س}^{٢}$ – ٢٠ $\text{س}^{٣}$ + ٧ + ٦ $\text{س}^{-٣}$

∴ ص′ = ٣ $\text{س}^{٢}$ – ٢٠ $\text{س}^{٣}$ + ٧ + $\frac{6}{\text{س}^{3}}$

مثال ١٣ إذا كان ص = ٤ س $\sqrt{\text{س}}$ + ٦ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٧}}$ - $\frac{9\,\text{س}}{5}$ فأوجد ص′

(الحل) ص = ٤ س × $\text{س}^{\frac{1}{2}}$ + ٦ $\text{س}^{\frac{7}{3}}$ - $\frac{9}{5}$ س = ٤ $\text{س}^{\frac{3}{2}}$ + ٦ $\text{س}^{\frac{7}{3}}$ - $\frac{9}{5}$ س

∴ ص′ = ٤ × $\frac{3}{2}$ $\text{س}^{\frac{1}{2}}$ + ٦ × $\frac{7}{3}$ $\text{س}^{\frac{4}{3}}$ - $\frac{9}{5}$ = ٦ $\sqrt{\text{س}}$ + ١٤ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٤}}$ - $\frac{9}{5}$

مثال ١٤ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = ٣ $\text{س}^{٢}$ – س - ٩ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ عند النقطة (١ ، د (س)) ، ثم أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نفس النقطة .

(الحل) ص = ٣ $\text{س}^{٢}$ – س - ٩ $\text{س}^{\frac{2}{3}}$

∴ ص′ = ٦ س – ١ - ٩ × $\frac{2}{3}$ $\text{س}^{\frac{-1}{3}}$ = ٦ س – ١ - $\frac{6}{\text{س}^{\frac{1}{3}}}$ = ٦ س – ١ - $\frac{6}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$

عند س = ١

ميل المماس = ص′ = ٦ – ١ - ٦ = -١

ملاحظة ميل المماس لمنحنى دالة عند نقطة يساوى ظل قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة عند تلك النقطة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

Q ميل المماس = - ١ \ ظا هـ = - ١ \ هـ = 135°

مثال ١٥ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة د (س) = س^{٣} ـ ٣ س^{٢} + ٣س والتى يكون عندها ميل المماس للمنحنى يساوى ١٢ .

(الحل) ميل المماس = د$^{/}$(س) = ٣ س^{٢} ـ ٦ س + ٣ = ١٢

\ ٣ س^{٢} ـ ٦ س + ٣ ـ ١٢ = ٠ \ ٣ س^{٢} ـ ٦ س - ٩ = ٠

بالقسمة على ٣ \ س^{٢} ـ ٢ س - ٣ = ٠

\ (س ـ ٣) (س + ١) = ٠

إما س- ٣ = ٠ ومنها س = ٣ وعندها ص = ٢٧ ـ ٢٧ + ٩ = ٩

أ، س + ١ = ٠ ومنها س = - ١ وعندها ص = -١ ـ ٣ ـ ٣ = -٧

وعلى ذلك توجد نقطتان هما (٣ ، ٩) ، (- ١ ، - ٧)

مثال ١٦ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} ـ ٣ س + ٢ عند كل نقطة من نقط تقاطعه مع محور السينات .

- لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى
- لإيجاد نقط التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ فى معادلة المنحنى

(الحل) نضع ص = ٠ فى معادلة المنحنى

\ س^{٢} ـ ٣ س + ٢ = ٠ \ (س ـ ١) (س ـ ٢) = ٠

إما س ـ ١ = ٠ ومنها س = ١

أ، س ـ ٢ = ٠ ومنها س = ٢

\ نقطتا التقاطع هما (١ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

ميل المماس = ص$^{/}$ = ٢ س ـ ٣

عند النقطة (١ ، ٠) \ ميل المماس = ص$^{/}$ = ٢ ـ ٣ = - ١

عند النقطة (٢ ، ٠) \ ميل المماس = ص$^{/}$ = ٤ ـ ٣ = ١

مثال ١٧ أوجد النقط التى تقع على منحنى الدالة ص = س + $\frac{2}{\text{س}}$ التى عندها المماس يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 135° .

(الحل) ص = س + ٢ س$^{-١}$

\ ميل المماس = ص/ = ١ ـ ٢ س^-٢^ = ١ - $\frac{2}{س^2}$ = ظا 135° = - ١

\ ١ - $\frac{2}{س^2}$ = - ١ \ ٢ = $\frac{2}{س^2}$ \ ٢ س^٢^ = ٢ \ س^٢^ = ١ \ س = ± ١

<u>عند س = ١</u> \ ص = ١ + ٢ = ٣ \ النقطة هى (١ ، ٣)

<u>عند س = - ١</u> \ ص = - ١ - ٢ = - ٣ \ النقطة هى (- ١ ، - ٣)

مثال ١٨ أثبت أن المماس لمنحنى الدالة ص = ٢ س^٣^ ـ ٣ س^٢^ + ٤ عند النقطة حيث س = ١ يوازى محور السينات .

ملاحظة إذا كان المماس موازياً لمحور السينات فإن ميل المماس = ص/ = ٠

<u>(الحل)</u> ميل المماس = ص/ = ٦ س^٢^ ـ ٦ س

<u>عند س = ١</u>

\ ميل المماس = ٦ ـ ٦ = ٠ \ المماس يوازى محور السينات

مثال ١٩ أوجد قيم أ، ب إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = أ س^٢^+ ب س عند النقطة (١ ، ٥) الواقعة عليه يساوى ٨ .

<u>(الحل)</u> Q النقطة (١ ، ٥) تقع على منحنى الدالة فهى تحقق معادلته

\ أ + ب = ٥ ... (١)

ميل المماس = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ أ س + ب = ٨

<u>عند النقطة (١ ، ٥)</u> \ ٢ أ + ب = ٨ ... (٢)

بطرح (١) من (٢) \ أ = ٣ وبالتعويض فى (١) \ ب = ٢

مثال ٢٠ إذا كان المماس لمنحنى الدالة ص = أ س^٣^ + ب س يوازى محور السينات عند النقطة (- ١ ، ٢) فأوجد قيمة كلاً من أ ، ب .

<u>(الحل)</u> Q النقطة (- ١ ، ٢) تقع على منحنى الدالة فهى تحقق معادلته

\ - أ - ب = ٢ ... (١)

ميل المماس = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ أ س^٢^+ ب = ٠

<u>عند النقطة (- ١ ، ٢)</u> \ ٣ أ + ب = ٠ ... (٢)

بجمع (١) ، (٢) \ ٢ أ = ٢ \ أ = ١
نعوض فى (٢) \ ٣ + ب = ٠ \ ب = -٣

مثال ٢١ إذا كان د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ حيث أ ، ب ، جـ ' ح
وكان د (٠) = ٣ ، د$^{/}$(٠) = - ٥ ، د$^{/}$(٢) = ٣ فأوجد د (١) ، د$^{/}$(- ٢) .

(الحل) د (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ \ د$^{/}$(س) = ٢ أ س + ب
Q د (٠) = ٣ \ جـ = ٣ ... (١)
، Q د$^{/}$(٠) = - ٥ \ ب = - ٥ ... (٢)
، د$^{/}$(٢) = ٣ \ ٤ أ + ب = ٣ ... (٣)
نعوض من (٢) فى (٣) \ ٤ أ – ٥ = ٣ \ ٤ أ = ٨ \ أ = ٢
\ د (س) = ٢ س^{٢} – ٥ س + ٣ \ د (١) = ٢ – ٥ + ٣ = ٠
، د$^{/}$(س) = ٤ س – ٥ \ د$^{/}$(-٢) = - ٨ – ٥ = - ١٣

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين

= مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى

مثال ٢٢ إذا كان ص = (س^{٢}+ ٣ س + ١) (س^{٢}– ٣ س + ٤) فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص$^{/}$ = (٢س +٣) (س^{٢}– ٣س +٤) + (٢س –٣) (س^{٢}+٣س +١)
= ٢ س^{٣} – ٦ س^{٢} + ٨ س + ٣ س^{٢} – ٩ س + ١٢ + ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٢ س
– ٣ س^{٢} – ٩ س – ٣ = ٤ س^{٣} – ٨ س + ٩

المشتقة الأولى لحاصل ضرب ثلاث دوال

= مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية ×الدالة الثالثة + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى × الدالة الثالثة + مشتقة الدالة الثالثة × الدالة الأولى × الدالة الثانية

مثال ٢٣ إذا كان ص = (س^{٢}- ١) (٢ س – ٥) (٣ س + ٧) فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص$^{/}$ = ٢س (٢ س – ٥) (٣ س + ٧) + ٢(س^{٢}- ١) (٣ س + ٧)
+ ٣ (س^{٢} – ١) (٢ س – ٥)
= ٢ س (٦ س^{٢} – س – ٣٥) + ٢ (٣ س^{٣} + ٧ س^{٢} – ٣ س – ٧)
+ ٣ (٢ س^{٣} – ٥ س^{٢} – ٢ س + ٥)
= ١٢ س^{٣} – ٢ س^{٢} – ٧٠ س + ٦ س^{٣} + ١٤ س^{٢} – ٦ س – ١٤ + ٦ س^{٣}
- ١٥ س^{٢} – ٦ س + ١٥ = ٢٤ س^{٣} – ٣ س^{٢} – ٨٢ س + ١

مثال ٢٤ إذا كان ص = (س^{٢} + ٩) (س + ٣) (س - ٣) فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = (س^{٢} + ٩) (س^{٢} – ٩) = س^{٤} – ٨١ \ ص$^{/}$ = ٤ س^{٣}

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة البسط × المقام – مشتقة المقام × البسط}}{\text{مربع المقام}}$

مثال ٢٥ إذا كان د (س) = $\frac{2س - 3}{5س + 1}$ فأوجد د$^{/}$(٠)

(الحل)

$$د^{/}(س) = \frac{2 \times (5س + 1) - 5 \times (2س - 3)}{(5س+1)^2} = \frac{10س + 2 - 10س + 15}{(5س+1)^2}$$

$$د^{/}(س) = \frac{17}{(5س+1)^2} \quad \backslash \quad د^{/}(٠) = \frac{17}{1} = ١٧$$

مثال ٢٦ أوجد $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{4س + 3}{5س - 1}\right)$ عند س = ١

(الحل) $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{4س + 3}{5س - 1}\right) = \frac{4 \times (5س - 1) - 5 \times (4س + 3)}{(5س - 1)^2}$

$$= \frac{20س - 4 - 20س - 15}{(5س-1)^2} = \frac{-19}{(5س-1)^2}$$

عند س = ١ \ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{4س + 3}{5س - 1}\right) = \frac{-19}{16}$

مثال ٢٧ إذا كان د (س) = $\frac{س}{س - ب}$ وكان د$^{/}$(٢) = - ١ فأوجد قيمة ب

(الحل) $د'(س) = \frac{1 \times (س - ب) - 1 \times س}{(س - ب)^2} = \frac{س - ب - س}{(س - ب)^2} = \frac{- ب}{(س - ب)^2}$

$د'(٢) = \frac{- ب}{(2 - ب)^2} = - ١$ $\therefore (٢ - ب)^٢ = ب$

$\therefore ٤ - ٤ ب + ب^٢ = ب$ $\therefore ب^٢ - ٥ ب + ٤ = ٠$

$\therefore (ب - ١)(ب - ٤) = ٠$ إما ب = ١ أ، ب = ٤

مثال ٢٨ أوجد النقط التى تقع على منحنى الدالة $ص = \frac{س^2 + 2}{2 س - 1}$ والتى يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات .

(الحل) ميل المماس = $\frac{2 س \times (2 س - 1) - 2 \times (س^2 + 2)}{(2 س - 1)^2}$

$= \frac{4 س^2 - 2 س - 2 س^2 - 4}{(2 س - 1)^2} = \frac{2 س^2 - 2 س - 4}{(2 س - 1)^2} = ٠$

لأن المماس يوازى محور السينات

$\therefore ٢ س^٢ - ٢ س - ٤ = ٠$ $\therefore س^٢ - س - ٢ = ٠$

$\therefore (س - ٢)(س + ١) = ٠$

إما س - ٢ = ٠ ومنها س = ٢ وعندها $ص = \frac{4 + 2}{4 - 1} = ٢$

أ، س + ١ = ٠ ومنها س = - ١ وعندها $ص = \frac{1 + 2}{- 2 - 1} = - ١$

$\therefore$ توجد نقطتان هما (٢ ، ٢) ، (- ١ ، - ١)

مثال ٢٩ أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة

ص = $\frac{س^3 - 27}{س - 3}$ عند س = - ١ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

(الحل) ص = $\frac{(س - 3)(س^2 + 3س + 9)}{(س - 3)}$ = س^٢ + ٣ س + ٩

ميل المماس = ص$^/$ = ٢ س + ٣

عند س = - ١

ميل المماس = - ٢ + ٣ = ١ \ ظا هـ = ١ \ هـ = **45°**

مثال ٣٠ أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة ص = $\frac{س - 2}{س - 1}$ والتى يكون عندها المماس للمنحنى موازياً للمستقيم ص = س + ٤

(الحل)

ميل المماس للمنحنى = ص$^/$ = $\frac{1 \times (س - 1) - 1 \times (س - 2)}{(س - 1)^2}$ = $\frac{1}{(س - 1)^2}$

ميل المستقيم = ص$^/$ = ١

\ $\frac{1}{(س - 1)^2}$ = ١ \ (س – ١)^٢ = ١

\ س^٢ – ٢ س + ١ = ١ \ س^٢ – ٢ س = ٠

\ س (س – ٢) = ٠

إما س = ٠ ومنها ص = $\frac{0 - 2}{0 - 1}$ = ٢

أ، س = ٢ ومنها ص = $\frac{2 - 2}{2 - 1}$ = ٠

\ النقطتان هما (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠)

مشتقة دالـــــة الدالـــــة (قاعدة السلسلة)

إذا كانت ص دالة فى ع ، ع دالة فى س فإن ص تسمى دالة دالة س

ويكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} ، \frac{ءع}{ءس}$

نتائج هامة

(١) إذا كانت ص $= [د(س)]^{ن}$ فإن $\frac{ءص}{ءس} = ن \times [د(س)]^{ن-1} \times د^{/}(س)$

مثال ٣١ إذا كانت ص = $(س^{٢} - ٥ س + ٣)^{٩}$ فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص$^{/}$ = ٩ × $(س^{٢} - ٥ س + ٣)^{٨}$ × (٢ س – ٥)

(٢) $\frac{ء}{ءس}(ص)^{ن} = ن ص^{ن-1} ، \frac{ءص}{ءس}$

مثال ٣٢ $\frac{ء}{ءس}(ص^{5}) = ٥ ص^{٤} \times \frac{ءص}{ءس}$

مثال ٣٣ إذا كان س^{٢} (ص^{٢} + ١) = ٤ فأثبت أن س^{٣} ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ = ٠

الحل س^{٢} ص^{٢} + س^{٢} = ٤ ... (١) بإجراء الاشتقاق بالنسبة للمتغير س

٢ س × ص^{٢} + ٢ ص × $\frac{ءص}{ءس}$ × س^{٢} + ٢ س = ٠ بالقسمة على ٢

\ س ص^{٢} + س^{٢} ص $\frac{ءص}{ءس}$ + س = ٠ بالضرب × س

\ س^{٢} ص^{٢} + س^{٣} ص $\frac{ءص}{ءس}$ + س^{٢} = ٠ ... (٢)

نعوض من (١) فى (٢) \ س^{٣} ص $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ = ٠

مثال ٣٤ إذا كانت ص = $\frac{7}{(5س + 1)^4}$ فأوجد ص$'$

الحل ص = ٧ (٥ س + ١)$^{-٤}$

\ ص$'$ = - ٢٨ (٥ س + ١)$^{-٥}$ × ٥ = $\frac{-140}{(5س + 1)^5}$

مثال ٣٥ إذا كانت ص^{٣} = (١ + ٢ س^{٢})^{٤} فأوجد ص$'$

الحل ص = $(1 + 2س^2)^{\frac{4}{3}}$

ص$'$ = $\frac{4}{3}(1 + 2س^2)^{\frac{1}{3}}$ × ٤ س = $\frac{16}{3}$ س $\sqrt[٣]{١ + ٢ س^{٢}}$

مثال ٣٦ إذا كان ٢ $\sqrt{ص}$ = س^{٢} – ٣ فأوجد ص$'$

الحل بتربيع الطرفين \ ٤ ص = س^{٤} – ٦ س^{٢} + ٩

بالقسمة على ٤ \ ص = $\frac{1}{4}$ س^{٤} - $\frac{3}{2}$ س^{٢} + $\frac{9}{4}$ \ ص$^{/}$ = س^{٣} – ٣ س

مثال ٣٧ إذا كان ص = (أ س + ٢)^{٢}، وكان $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦ عند س = ١ فأوجد أ

(الحل) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ (أ س + ٢) × أ

عند س = ١ \ ٢ (أ + ٢) × أ = ٦ \ (أ + ٢) × أ = ٣

\ أ^{2} + ٢ أ – ٣ = ٠ \ (أ + ٣) (أ – ١) = ٠

إما أ + ٣ = ٠ ومنها أ = - ٣

أ، أ – ١ = ٠ ومنها أ = ١

مثال ٣٨ إذا كانت ص = (ع – ١)^{٥} ، ع = س^{٢} + ٣ فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(الحل) ص = (س^{٢} + ٣ – ١)^{٥} = (س^{٢} + ٢)^{٥}

\ $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ (س^{٢} + ٢)^{٤} × ٢ س = ١٠ س (س^{٢} + ٢)^{٤}

حل آخر Q ص = (ع – ١)^{٥} \ $\frac{ء ص}{ء ع}$ = ٥ (ع – ١)^{٤}

، Q ع = س^{٢} + ٣ \ $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٢ س

\ $\frac{ء ص}{ء س}$ = $\frac{ء ص}{ء ع}$ × $\frac{ء ع}{ء س}$ = ٥ (ع – ١)^{٤} × ٢ س

= ٥ (س^{٢} + ٣ – ١)^{٤} × ٢ س = ١٠ س (س^{٢} + ٢)^{٤}

مثال ٣٩ إذا كانت ص = ع^{٧} ، ع = س^{٣} + ٢ س^{٢} – ٤ فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ عند س = ١

(الحل) ص = (س^{٣} + ٢ س^{٢} – ٤)^{٧}

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٧ (س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٤)^{٦} \times (٣ س^{٢} + ٤ س)$

عند س = ١ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٧ (١ + ٢ - ٤)^{٦} \times (٣ + ٤) = ٧ \times ١ \times ٧ = ٤٩$

مثال ٤٠ إذا كان ص = ع^{٥} + ع ، ع = س + $\frac{1}{س}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = - ١

(الحل) ص = $\left[س + \frac{1}{س} \right]^{5}$ + س + $\frac{1}{س}$ = $\left[س + س^{-1} \right]^{5}$ + س + س$^{-١}$

$\frac{ءص}{ءس} = ٥ \left[س + س^{-1} \right]^{4} (١ - س^{-٢}) + ١ - س^{-٢}$

$= ٥ \left[س + \frac{1}{س} \right]^{4} \left(1 - \frac{1}{س^{2}} \right) + ١ - \frac{1}{س^{2}}$

عند س = - ١ $\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٥ (- ١ - ١)^{٤} (١ - ١) + ١ - ١ = ٠$

مثال ٤١ إذا كانت ص = $\frac{ع - 2}{ع + 1}$ ، ع = $\frac{س + 1}{2س - 1}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$

(الحل) ص = $\dfrac{\frac{س + 1}{2س - 1} - 2}{\frac{س + 1}{2س - 1} + 1}$ بالضرب بسطاً ومقاماً × (٢ س - ١)

$\therefore ص = \frac{س + 1 - 2(2س - 1)}{س + 1 + (2س - 1)} = \frac{س + 1 - 4س + 2}{س + 1 + 2س - 1} = \frac{3 - 3س}{3س}$

$$= \frac{3}{3\text{س}} - \frac{3\text{س}}{3\text{س}} = \text{س}^{-١} - ١ \qquad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\text{س}^{-٢} = \frac{-1}{\text{س}^2}$$

مثال ٤٢ إذا كانت $\text{ص} = \text{ع}^٢ + \text{ع}$ ، $\text{ع} = ٢\,\text{س}^٢$ فأثبت أن

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ١٦\,\text{س}^٣$$

(أول ٢٠٠٢)

(الحل) $\text{ص} = (\,٢\,\text{س}^٢\,)^٢ + ٢\,\text{س}^٢ = ٤\,\text{س}^٤ + ٢\,\text{س}^٢$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٦\,\text{س}^٣ + ٤\,\text{س} \quad ، \quad \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٤\,\text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ١٦\,\text{س}^٣ + ٤\,\text{س} - ٤\,\text{س} = ١٦\,\text{س}^٣$$

مثال ٤٣ إذا كانت $\text{ص} = \left(\frac{3\text{س} - 1}{2\text{س} + 3}\right)^5$ فأوجد $\text{ص}'$

(الحل)

$$\text{ص}' = ٥\left(\frac{3\text{س} - 1}{2\text{س} + 3}\right)^4 \times \frac{3(2\text{س}+3) - 2(3\text{س}-1)}{(2\text{س}+3)^2}$$

$$= ٥\left(\frac{3\text{س} - 1}{2\text{س} + 3}\right)^4 \times \frac{6\text{س} + 9 - 6\text{س} + 2}{(2\text{س}+3)^2}$$

$$= ٥\,\frac{(3\text{س}-1)^4}{(2\text{س}+3)^4} \times \frac{11}{(2\text{س}+3)^2} = \frac{55(3\text{س}-1)^4}{(2\text{س}+3)^6}$$

مثال ٤٤ إذا كانت $\text{ص} = (\,٢\,\text{س} + ١\,)^٥\,(\,٣\,\text{س} - ٤\,)^٨$ فأوجد $\text{ص}'$

(الحل) $\text{ص}' = ٥\,(\,٢\,\text{س} + ١\,)^٤ \times ٢ \times (\,٣\,\text{س} - ٤\,)^٨$

$+ ٨ \times (\,٣\,\text{س} - ٤\,)^٧ \times ٣ \times (\,٢\,\text{س} + ١\,)^٥$

$\text{ص}' = ١٠\,(\,٢\,\text{س} + ١\,)^٤(\,٣\,\text{س} - ٤\,)^٨ + ٢٤\,(\,٣\,\text{س} - ٤\,)^٧(\,٢\,\text{س} + ١\,)^٥$

$= ٢\,(\,٢\,\text{س} + ١\,)^٤\,(\,٣\,\text{س} - ٤\,)^٧ \{\,٥\,(\,٣\,\text{س} - ٤\,) + ١٢\,(\,٢\,\text{س} + ١\,)\,\}$

= ٢ (٢ س + ١)^{٤} (٣ س – ٤)^{٧} (١٥ س – ٢٠ + ٢٤ س + ١٢)
= ٢ (٢ س + ١)^{٤} (٣ س – ٤)^{٧} (٣٩ س - ٨)

مثال ٤٥ إذا كانت ص = (٢ س + ٣)^{٧} (٢ س – ٣)^{٧} فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = (٢ س + ٣)^{٧} (٢ س – ٣)^{٧} = (٤ س^{٢} – ٩)^{٧}
ص$^{/}$ = ٧ (٤ س^{٢} – ٩)^{٦} × ٨ س = ٥٦ س (٤ س^{٢} – ٩)^{٦}

مثال ٤٦ إذا كانت ص = $\frac{(2س + 1)^{5}}{(3س - 4)^{8}}$ فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = (٢ س + ١)^{٥} (٣ س – ٤)$^{-٨}$
ص$^{/}$ = ٥ (٢ س + ١)^{٤} × ٢ × (٣ س – ٤)$^{-٨}$
- ٨ × (٣ س – ٤)$^{-٩}$ × ٣ × (٢ س + ١)^{٥}
= ١٠ (٢ س + ١)^{٤}(٣ س – ٤)$^{-٨}$ - ٢٤(٣ س – ٤)$^{-٩}$(٢ س + ١)^{٥}
= ٢ (٢ س + ١)^{٤} (٣ س – ٤)$^{-٩}$ { ٥ (٣ س - ٤) - ١٢ (٢ س + ١) }
= ٢ (٢ س + ١)^{٤} (٣ س – ٤)$^{-٩}$ (١٥ س – ٢٠ - ٢٤ س - ١٢)
= ٢ (٢ س + ١)^{٤} (٣ س – ٤)$^{-٩}$ (- ٩ س - ٣٢)
= - ٢ (٢ س + ١)^{٤} (٣ س – ٤)$^{-٩}$ (٩ س + ٣٢)
= $\frac{-2(2س + 1)^{4}(9س + 32)}{(3س - 4)^{9}}$

المشتقة الأولى للدوال المثلثية

نظريات ونتائج

Ã إذا كان ص = جا س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = جتا س

Ã إذا كان ص = جتا س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = - جا س

Ã إذا كان ص = جا أ س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = أ جتا أ س

مثال ٤٧ إذا كان ص = جا ٧ س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٧ جتا ٧ س

Ã | إذا كان ص = جتا أ س فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = - أ جا أ س |
|---|

مثال ٤٨ إذا كان ص = ٥ جتا ٣ س

فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ × (- ٣ جا ٣ س) = - ١٥ جا ٣ س

Ã | إذا كان ص = جا (أ س + ب) فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = أ جتا (أ س + ب) |
|---|

مثال ٤٩ إذا كان ص = ٥ جا (٣ س – ٢)

فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٥ × ٣ جتا (٣ س – ٢) = ١٥ جتا (٣ س – ٢)

Ã

Ã | إذا كان ص = جتا (أ س + ب) فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = - أ جا (أ س + ب) |
|---|

مثال ٥٠ إذا كان ص = ٨ جتا (٢ – ٥ س)

فإن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٨ × -٥ × - جا (٢ – ٥ س) = ٤٠ جا (٢ – ٥ س)

مثال ٥١ إذا كانت ص = (٣ جتا ٤ س – ٥ جا ٢ س $)^{٧}$ فأوجد ص$'$

(الحل)

ص$'$ = ٧ (٣ جتا ٤ س – ٥ جا ٢ س $)^{٦}$ (- ١٢ جا ٤ س – ١٠ جتا ٢ س)

= ٧ (٣ جتا ٤ س – ٥ جا ٢ س $)^{٦}$ × - ٢ (٦ جا ٤ س + ٥ جتا ٢ س)

= - ١٤ (٣ جتا ٤ س – ٥ جا ٢ س $)^{٦}$ (٦ جا ٤ س + ٥ جتا ٢ س)

مثال ٥٢ إذا كان ص = س جتا ٣ س + س^{٣} جا س + جا $\frac{س}{3}$ فأوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

(الحل) $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ × جتا ٣ س + (- ٣ جا ٣ س) × س + ٣ س^{٢} × جا س

+ (جتا س) × س^{٣} + $\frac{1}{3}$ جتا $\frac{س}{3}$

= جتا ٣ س – ٣ س جا ٣ س + ٣ س^{٢} جا س + س^{٣} جتا س + $\frac{1}{3}$ جتا $\frac{س}{3}$

مثال ٥٣ إذا كان ص = ١٠ جا س جتا س فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = ٥ × ٢ جا س جتا س = ٥ جا ٢ س

\ ص$^{/}$ = ٥ × ٢ جتا ٢ س = ١٠ جتا ٢ س

مثال ٥٤ إذا كان ص = (جا س + جتا س)^{٢} فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = جا^{٢} س + ٢ جا س جتا س + جتا^{٢} س = ١ + جا ٢ س

\ ص$^{/}$ = ٢ جتا ٢ س

تذكر أن : جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١ ، جا ٢ س = ٢ جا س جتا س

مثال ٥٥ إذا كان ص = قتا س فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = قتا س = $\frac{1}{جا\ س}$ \ ص$^{/}$ = $\frac{0\ ´ جا\ س\ -\ جتا\ س\ ´ 1}{جا^{2}\ س}$

= $\frac{-\ جتا\ س}{جا^{2}\ س}$ = $\frac{-\ جتا\ س}{جا\ س}$ × $\frac{1}{جا\ س}$ \ ص$^{/}$ = - ظتا س قتا س

مثال ٥٦ إذا كان ص = جا^{٢} (٢ س – ٣) فأوجد ص$^{/}$

(الحل) ص = $[جا\ (2\ س\ -\ 3)]^{2}$

ص$^{/}$ = ٢ جا (٢ س – ٣) × جتا (٢ س – ٣) × ٢

= ٢ × ٢ جا (٢ س – ٣) جتا (٢ س – ٣) = ٢ جا (٤ س – ٦)

مثال ٥٧ إذا كان ص = $\frac{جا\ س}{1+\ جتا\ س}$ فأوجد ص$^{/}$

الحل) $ص^{/} = \dfrac{جتا\,س\,(1+جتا\,س) - (-جا\,س)\,جا\,س}{(1+جتا\,س)^2}$

$= \dfrac{جتا\,س + جتا^2\,س + جا^2\,س}{(1+جتا\,س)^2} = \dfrac{1+جتا\,س}{(1+جتا\,س)^2} = \dfrac{1}{1+جتا\,س}$

مثال ٥٨ إذا كان $ص = \dfrac{جا\,2\,س}{جتا\,3\,س}$ فأوجد $ص^{/}$

الحل) $ص^{/} = \dfrac{2\,جتا\,2\,س \times جتا\,3\,س - (-3\,جا\,3\,س) \times جا\,2\,س}{جتا^2\,3\,س}$

$= \dfrac{2\,جتا\,2\,س\,جتا\,3\,س + 3\,جا\,3\,س\,جا\,2\,س}{جتا^2\,3\,س}$

مثال ٥٩ أثبت أن المماس لمنحنى الدالة ص = س جتا ٢ س عند $س = \dfrac{ط}{2}$

يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها 135^{o} .

الحل) ميل المماس = $ص^{/}$ = ١ × جتا ٢ س + (- ٢ جا ٢ س) × س

= جتا ٢ س – ٢ س جا ٢ س

عند $س = \dfrac{ط}{2}$ \ $ص^{/}$ = جتا ط – ٢ × $\dfrac{ط}{2}$ × جا ط

\ $ص^{/}$ = -١ – ط × ٠ = - ١ \ ظا هـ = - ١ \ هـ = 135^{o}

مثال ٦٠ أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = جا س + ٢ جتا (س - $\dfrac{5ط}{6}$)

عند س = ط

(الحل) ميل المماس = ص$'$ = جتا س + ٢ [- جا (س - $\frac{5ط}{6}$)]

= جتا س - ٢ جا (س - $\frac{5ط}{6}$)

عند س = ط

\ ص$'$ = جتا ط - ٢ جا (ط - $\frac{5ط}{6}$) = - ١ – ٢ × $\frac{1}{2}$ = - ٢

مثال ٦١ أوجد نقطة فى الربع الأول على منحنى الدالة ص = جا س + جتا س يكون المماس عندها موازياً لمحور السينات .

(الحل) $\frac{ء ص}{ء س}$ = جتا س – جا س = ٠ (لأن المماس يوازى محور السينات)

\ جا س = جتا س \ $\frac{جا س}{جتا س}$ = ١ \ ظا س = ١ \ س = 45° = $\frac{ط}{4}$

\ ص = جا 45° + جتا 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{٢}$

\ النقطة هى ($\frac{ط}{4}$ ، $\sqrt{٢}$)

النهايات

مفاهيــــم وتعاريــــف

Ã إذا كان س ' ح =] - ¥ ، ¥ [فإن :

١. - ¥ < س < ¥ (مثال) - ¥ < - ٣ < ¥

٢. ¥ ± س = ¥ (مثال) ¥ ± ٨ = ¥

٣. - ¥ ± س = - ¥ (مثال) - ¥ ± ٥ = - ¥

Ã إذا كانت س ' ح+ فإن :

١. س × ¥ = ¥ (مثال) ٣ × ¥ = ¥

٢. س × - ¥ = - ¥ (مثال) ٤ × - ¥ = - ¥

٣. ¥ / س = ¥ (مثال) ¥ / 7 = ¥

٤. - ¥ / س = - ¥ (مثال) - ¥ / 7 = - ¥

Ã إذا كانت س ' ح- فإن :

١. س × ¥ = - ¥ (مثال) - ٣ × ¥ = - ¥

٢. س × - ¥ = ¥ (مثال) -٤ × - ¥ = ¥

٣. ¥ / س = - ¥ (مثال) ¥ / - 7 = - ¥

٤. - ¥ / س = ¥ (مثال) - ¥ / - 7 = ¥

Ã **الكمية المعينة** : هى الكمية التى لها ناتج محدد (مثال) ٧ ، -٥ ، $\frac{3}{4}$ ، ٠

Ã **الكمية غير المعينة** : هى التى ليس لها قيمة محددة (مثال) $\frac{0}{0}$ ، ¥ / ¥ ، ¥ - ¥

• **الكمية غير المعرفة** : $\frac{\text{س}}{0}$ حيث س $\in$ ح – { ٠ } (مثال) $\frac{5}{0}$ ، $\frac{-7}{0}$

• $\frac{\text{س}}{\pm\infty}$ = ٠ حيث س $\in$ ح (مثال) $\frac{5}{\infty}$ = ٠ ، $\frac{-4}{\infty}$ = ٠ ، $\frac{3}{-\infty}$ = ٠

نهايـــة دالـــة عند نقطـــة

مثال ١ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢}$ (س^{٢}+٥ س-٧) = ٤+١٠-٧ = ٧

مثال ٢ $\lim\limits_{\text{س}\to ٥}$ ٩ = ٩

مثال ٣ $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^3+\text{س}^2-5}{\text{س}^2+4} = \frac{1+1-5}{1+4} = \frac{-3}{5}$

مثال ٤ $\lim\limits_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س}^2-9}{\text{س}+3} = \frac{9-9}{3+3} = \frac{\text{صفر}}{6}$ = صفر

مثال ٥ $\lim\limits_{\text{س}\to ٥} \frac{\text{س}+3}{\text{س}-5} = \frac{8}{0}$ غير معرف " الدالة ليس لها نهاية "

مثال ٦ $\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \frac{2\text{س}^2-\text{س}-6}{\text{س}^2-4}$ \ د(٢) = $\frac{2\times 4-2-6}{4-4} = \frac{8-8}{4-4} = \frac{0}{0}$

نضع س = ٢ + هـ حيث س $\to$ ٢ عندما هـ $\to$ ٠

د(٢ + هـ) = $\frac{٢(٢+\text{هـ})^٢-(٢+\text{هـ})-٦}{(٢+\text{هـ})^٢-٤} = \frac{٢(٤+٤\text{هـ}+\text{هـ}^٢)-٢-\text{هـ}-٦}{٤+٤\text{هـ}+\text{هـ}^٢-٤}$

$$= \frac{\text{٨} + \text{٨هـ} + \text{٢هـ}^{\text{٢}} - \text{٢} - \text{هـ} - \text{٦}}{\text{٤هـ} + \text{هـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٧هـ} + \text{٢هـ}^{\text{٢}}}{\text{٤هـ} + \text{هـ}^{\text{٢}}} = \frac{\text{هـ}(\text{٧} + \text{٢هـ})}{\text{هـ}(\text{٤} + \text{هـ})} = \frac{\text{٧} + \text{٢هـ}}{\text{٤} + \text{هـ}}$$

$$\therefore \lim_{\text{س} \to \text{٢}} \frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 4} = \lim_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{٧} + \text{٢هـ}}{\text{٤} + \text{هـ}} = \frac{7+0}{4+0} = \frac{7}{4}$$

مثال ٧ $\lim_{\text{س} \to \text{٢}} \frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 6}{\text{س}^2 - 4}$

$$\because \text{د}(\text{٢}) = \frac{2 \times 4 - 2 - 6}{4 - 4} = \frac{8 - 8}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

نحلل البسط والمقام (إذا أمكن ذلك) ونختصر العامل الصفرى (المسبب للصفر فى كل من البسط والمقام)

$$= \lim_{\text{س} \to \text{٢}} \frac{(2\text{س} + 3)(\text{س} - 2)}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 2)} = \lim_{\text{س} \to \text{٢}} \frac{2\text{س} + 3}{\text{س} + 2} = \frac{4 + 3}{2 + 2} = \frac{7}{4}$$

مثال ٨ $\lim_{\text{س} \to \text{-٤}} \frac{\text{س}^2 + 4\text{س}}{2\text{س}^2 + 4\text{س} - 16}$

$$\because \text{د}(\text{-٤}) = \frac{16 - 16}{32 - 16 - 16} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \text{-٤}} \frac{\text{س}(\text{س} + 4)}{2(\text{س}^2 + 2\text{س} - 8)} = \lim_{\text{س} \to \text{-٤}} \frac{\text{س}(\text{س} + 4)}{2(\text{س} + 4)(\text{س} - 2)}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \text{-٤}} \frac{\text{س}}{2(\text{س} - 2)} = \frac{-4}{2 \times -6} = \frac{1}{3}$$

مثال ٩ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س - 2)^2 - 1}{3س^2 - 4س - 15}$ \ $د(٣) = \frac{1 - 1}{27 - 12 - 15} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{س^2 - 4س + 4 - 1}{3س^2 - 4س - 15} = \lim_{س \to ٣} \frac{س^2 - 4س + 3}{3س^2 - 4س - 15}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - 1)(س - 3)}{(3س + 5)(س - 3)} = \lim_{س \to ٣} \frac{س - 1}{3س + 5} = \frac{3 - 1}{9 + 5} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

مثال ١٠ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{1 - (3س + 1)^2}{4س}$ \ $د(٠) = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{1 - (9س^2 + 6س + 1)}{4س} = \lim_{س \to ٠} \frac{1 - 9س^2 - 6س - 1}{4س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{- 9س^2 - 6س}{4س} = \lim_{س \to ٠} \frac{- 3س(3س + 2)}{4س}$$

$$= \lim_{س \to ٠} \frac{- 3(3س + 2)}{4} = \frac{- 6}{4} = \frac{- 3}{2}$$

مثال ١١ $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{(س^2 - 9)^2}{2س + 6}$ \ د(-٣) = $\dfrac{(9 - 9)^2}{-6 + 6} = \dfrac{0}{0}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{[(س - 3)(س + 3)]^2}{2(س + 3)} = \lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{(س + 3)^2 (س - 3)^2}{2(س + 3)}$

$= \lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{(س + 3)(س - 3)^2}{2} = \dfrac{0 \times 36}{2} = ٠$

مثال ١٢ $\lim\limits_{س \to ٢} \dfrac{س^3 - س^2 - 8س + 12}{س^2 - 5س + 6}$ \ د(٢) = $\dfrac{8 - 4 - 16 + 12}{4 - 10 + 6} = \dfrac{0}{0}$

إذا كان التحليل صعباً نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل الصفرى

بالقسمة بسطاً ومقاماً على (س- ٢)

س^٣ – س^٢ – ٨ س + ١٢	س – ٢
س^٣ –٢س^٢	س^٢ + س – ٦
... + س^٢ – ٨ س	
+ س^٢ – ٢ س	
... - ٦ س + ١٢	
- ٦ س + ١٢	

... ...

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(س^2+س-6)}{(س-2)(س-3)} = \lim_{س \to 2} \frac{س^2+س-6}{س-3}$$

$$= \frac{4+2-6}{2-3} = \frac{0}{-1} = 0$$

مثال ١٣ $\lim_{س \to 1} \left[\frac{س^4 - س^3 + س - 1}{س^3 + س - 2}\right]^2$ \ د(١) $= \left[\frac{1-1+1-1}{1+1-2}\right]^2 = \frac{0}{0}$

نقسم كلاً من البسط والمقام على (س-١)

$$\begin{array}{r|l} س^4 - س^3 + س - 1 & س - 1 \\ \cline{2-2} س^4 - س^3 & س^3 + 1 \\ \hline .. \quad .. & \\ س - 1 & \\ س - 1 & \\ \hline .. \quad .. & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} س^3 + ... + س - 2 & س - 1 \\ \cline{2-2} س^3 - س^2 & س^2 + س + 2 \\ \hline س^2 + س & \\ س^2 - س & \\ \hline 2س - 2 & \end{array}$$

٢ س ــ ٢

.. ..

$$\therefore \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \left[\frac{(\text{س}-1)(\text{س}^3+1)}{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+2)} \right]^2 = \underset{\text{س} \to 1}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{س}^3+1}{\text{س}^2+\text{س}+2} \right]^2$$

$$= \left(\frac{1+1}{1+1+2} \right)^2 = \left(\frac{2}{4} \right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

مثال ١٤ $\underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \left(\frac{1}{\text{س}-2} - \frac{12}{\text{س}^3-8} \right)$

$$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \left(\frac{1}{\text{س}-2} - \frac{12}{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2\text{س}+4)} \right)$$

$$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}^2+2\text{س}+4)-12}{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2\text{س}+4)} = \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2+2\text{س}-8}{\text{المقام}}$$

$$= \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-2)(\text{س}+4)}{(\text{س}-2)(\text{س}^2+2\text{س}+4)} = \underset{\text{س} \to 2}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+4}{\text{س}^2+2\text{س}+4}$$

$$= \frac{2+4}{4+4+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

مثال ١٥ إذا كان د(س) = ٣س+٥ فأوجد $\lim\limits_{و \to ٠} \dfrac{د(س + و) - د(س)}{و}$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{3(س + و) + 5 - (3س + 5)}{و}$$

$$= \lim_{و \to ٠} \frac{3س + 3و + 5 - 3س - 5}{و} = \lim_{و \to ٠} \frac{3و}{و} = \lim_{و \to ٠} ٣ = ٣$$

مثال ١٦ إذا كانت $\lim\limits_{س \to -٣} \dfrac{س^2 + (3 + ب)س + 3ب}{س + 3} = ١٠$ فأوجد قيمة ب

$$\lim_{س \to -٣} \frac{(س + 3)(س + ب)}{(س + 3)} = ١٠$$

\ $\lim\limits_{س \to -٣} (س + ب) = ١٠$ \ $-٣ + ب = ١٠$ \ $ب = ١٣$

مثال ١٧ $\lim\limits_{س \to ٥} \dfrac{3س^2 - 75}{س - 5}$ \ $د(٥) = \dfrac{75 - 75}{5 - 5} = \dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{3(س^2 - 25)}{س - 5} = ٣ \lim_{س \to ٥} \frac{(س - 5)(س + 5)}{(س - 5)}$$

$$= ٣ \lim_{س \to ٥} (س + ٥) = ٣ \times ١٠ = ٣٠$$

مثال ١٨ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^5 - 27 س^2}{4 س^3 - 36 س}$ ‏ \ د(٣) = $\frac{0}{0}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^2 (س^3 - 27)}{4 س (س^2 - 9)}$

$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س}{4} \times \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س - 3)(س^2 + 3 س + 9)}{(س - 3)(س + 3)}$

$= \frac{3}{4} \times \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^2 + 3 س + 9}{س + 3} = \frac{3}{4} \times \frac{9 + 9 + 9}{3 + 3} = \frac{3}{4} \times \frac{27}{6} = \frac{27}{8}$

مثال ١٩ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^6 - 64}{س - 2}$ ‏ \ د(٢) = $\frac{0}{0}$

نستخدم النظرية : $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن \times أ^{ن - 1}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^6 - 2^6}{س - 2} = ٦ \times 2^5 = ٦ \times ٣٢ = ١٩٢$

مثال ٢٠ $\lim\limits_{س \to ٥} \frac{3 س^2 - 75}{س - 5}$ ‏ \ د(٥) = $\frac{75 - 75}{5 - 5} = \frac{0}{0}$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{3(\text{س}^2 - 25)}{\text{س} - 5} = ٣ \underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2 - 5^2}{\text{س} - 5} = ٣ \times ٢ \times ٥ = ٣٠$$

مثال ٢١ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{32\,\text{س}^2 - \text{س}^7}{4\,\text{س}^3 - \text{س}^5}$ 　　 $\backslash\ \text{د}(٢) = \frac{0}{0}$

نستخدم النتيجة : $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{م}} - \text{أ}^{\text{م}}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \text{أ}^{\text{ن}-\text{م}}$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2(32 - \text{س}^5)}{\text{س}^3(4 - \text{س}^2)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{1}{\text{س}} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^5 - 2^5}{\text{س}^2 - 2^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 2^3 = ١٠$$

مثال ٢٢ $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^5 - 27\,\text{س}^2}{4\,\text{س}^3 - 36\,\text{س}}$ 　　 $\backslash\ \text{د}(٣) = \frac{0}{0}$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^2(\text{س}^3 - 27)}{4\,\text{س}(\text{س}^2 - 9)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{4} \times \underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^3 - 3^3}{\text{س}^2 - 3^2}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} \times ٣ = \frac{27}{8}$$

مثال ٢٣ $\lim\limits_{س \to -3} \dfrac{س^4 - 81}{س^5 + 243}$ \ د(-٣) = $\dfrac{0}{0}$

= $\lim\limits_{س \to -3} \dfrac{س^4 - (-3)^4}{س^5 - (-3)^5} = \dfrac{4}{5} \times (-3)^{-1} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{-3} = \dfrac{-4}{15}$

مثال ٢٤ $\lim\limits_{س \to -0.5} \dfrac{16س^4 - 1}{2س + 1}$ \ د(-٠,٥) = $\dfrac{0}{0}$

= $\lim\limits_{2س \to -1} \dfrac{(2س)^4 - (-1)^4}{2س - (-1)}$ = ٤ × (-١)^٣ = -٤

مثال ٢٥ $\lim\limits_{س \to 4} \dfrac{\frac{1}{2}س^4 - 128}{س - 4}$ \ د(٤) = $\dfrac{0}{0}$

بالضرب × ٢ بسطاً ومقاماً

= $\lim\limits_{س \to 4} \dfrac{س^4 - 256}{2(س - 4)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{س \to 4} \dfrac{س^4 - 4^4}{س - 4} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4^3$ = ١٢٨

مثال ٢٦ $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^5 + س^3 - 40}{س^2 - 4}$ \ د(٢) = $\dfrac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^5 - 32}{س^2 - 4} + \frac{س^3 - 8}{س^2 - 4} \right) = \lim_{س \to ٢} \left(\frac{س^5 - 2^5}{س^2 - 2^2} + \frac{س^3 - 2^3}{س^2 - 2^2} \right)$$

$$= \frac{5}{2} \times 2^3 + \frac{3}{2} \times 2 = ٢٠ + ٣ = ٢٣$$

مثال ٢٧ $\lim_{س \to 1} \frac{س \sqrt[٥]{س} - 1}{س - 1}$ $\because$ د(١) = $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{س \times س^{\frac{1}{5}} - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{س^{\frac{6}{5}} - 1^{\frac{6}{5}}}{س - 1} = \frac{6}{5} \times 1^{\frac{1}{5}} = \frac{6}{5}$$

مثال ٢٨ $\lim_{س \to 1} \frac{(\sqrt[٣]{س} - 1)(\sqrt{س} - 1)}{(س - 1)^2}$ $\because$ د(١) = $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}}{س - 1} \times \frac{س^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{س - 1} = \frac{1}{3} \times 1^{\frac{-2}{3}} \times \frac{1}{2} \times 1^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{6}$$

مثال ٢٩ $\lim_{س \to -١} \frac{س^4 - \frac{1}{س^4}}{س^3 - \frac{1}{س^3}}$ $\because$ د(-١) = $\frac{0}{0}$

بالضرب بسطاً ومقاماً × س^٤ حيث س ≠ ٠

$$= \lim_{س \to -1} \frac{س^8 - 1}{س^7 - س} = \lim_{س \to -1} \frac{س^8 - 1}{س\,(س^6 - 1)}$$

$$= \lim_{س \to -1} \frac{1}{س} \times \lim_{س \to -1} \frac{س^8 - (-1)^8}{س^6 - (-1)^6} = -1 \times \frac{8}{6} \times (-1)^2 = \frac{-4}{3}$$

مثال ٣٠ إذا كان $\lim_{س \to 1} \frac{س^{5ن} + س^{ن} - 2}{س - 1} = ١٢$ فأوجد قيمة ن

$$\lim_{س \to 1} \left(\frac{س^{5ن} - 1^{5ن}}{س - 1} + \frac{س^{ن} - 1^{ن}}{س - 1} \right) = ٥ن \times 1^{5ن-1} + ن \times 1^{ن-1}$$

$= ٥ن + ن = ٦ن = ١٢$ ∴ $ن = ٢$

مثال ٣١ $\lim_{و \to ٠} \frac{\sqrt[3]{1+و} - 1}{و}$ ∴ $د(٠) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{1+و \to ١} \frac{(1+و)^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}}{(1+و) - 1} = \frac{1}{3} \times 1^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}$$

<u>حل آخر</u> : نضع ١ + و = ص ∴ و = ص – ١

عندما و → ٠ ∴ ص → ١

$$= \lim_{ص \to ١} \frac{ص^{\frac{1}{3}} - 1^{\frac{1}{3}}}{ص - 1} = \frac{1}{3} \cdot 1^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3}$$

مثال ٣٢ $\lim_{س \to ١} \frac{(س + 2)^4 - 81}{س - 1}$ \ $د(١) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{س+٢ \to ٣} \frac{(س + 2)^4 - 3^4}{(س + 2) - 3} = ٤ \times 3^3 = ٤ \times ٢٧ = ١٠٨$$

حل آخر : نضع س+٢ = ص   \ س = ص-٢

عندما س ← ١   ∴ ص ¬ ٣

$$= \lim_{ص \to ٣} \frac{ص^4 - 81}{ص - 2 - 1} = \lim_{ص \to ٣} \frac{ص^4 - 3^4}{ص - 3} = ٤ \times 3^3 = ٤ \times ٢٧ = ١٠٨$$

مثال ٣٣ $\lim_{س \to -٤} \frac{(س + 3)^7 + 1}{س + 4}$ \ $د(-٤) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{س+٣ \to -١} \frac{(س + 3)^7 - (-1)^7}{(س + 3) - (-1)} = ٧ \times (-1)^6 = ٧ \times ١ = ٧$$

حل آخر : نضع س+٣ = ص   \ س = ص-٣

عندما س ¬ -٤   \ ص ¬ -١

$$= \lim_{ص \to -1} \frac{ص^7 + 1}{ص - 3 + 4} = \lim_{ص \to -1} \frac{ص^7 - (-1)^7}{ص - (-1)} = ٧ \times (-1)^6 = ٧ \times ١ = ٧$$

مثال ٣٤ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - 2)^3 - 1}{س\,(س - 3)}$ \ $د(٣) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{1}{س} \times \lim_{س - ٢ \to ١} \frac{(س - 2)^3 - 1^3}{(س - 2) - 1} = \frac{1}{3} \times ٣ \times 1^2 = ١$$

مثال ٣٥ $\lim_{س \to 2} \frac{(س + 1)^5 - 243}{س^4 - 16}$ \ $د(٢) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(س + 1)^5 - 243}{س - 2} \text{ ، } \frac{س - 2}{س^4 - 16}$$

$$= \lim_{س + ١ \to 3} \frac{(س + 1)^5 - 3^5}{(س + 1) - 3} \times \lim_{س \to 2} \frac{س^1 - 2^1}{س^4 - 2^4}$$

$$= ٥ \times 3^4 \times \frac{1}{4} \times 2^{-3} = ٥ \times ٨١ \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{405}{32}$$

مثال ٣٦ $\lim_{و \to ٠} \frac{(2 + و)^5 - 32}{و}$ \ $د(٠) = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{\text{٢+و} \to \text{٢}} \frac{(2+\text{و})^5 - 2^5}{(2+\text{و}) - 2} = \text{٥} \times 2^4 = \text{٥} \times \text{١٦} = \text{٨٠}$$

مثال ٣٧

$$\lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(2+\text{و})^5 - 32}{7\text{و}} \qquad \text{د(٠)} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{1}{7} \times \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(2+\text{و})^5 - 32}{\frac{1}{7} \times 7\text{و}} = \frac{1}{7} \times \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(2+\text{و})^5 - 32}{\text{و}}$$

$$= \frac{1}{7} \times \lim_{\text{٢+و} \to \text{٢}} \frac{(2+\text{و})^5 - 2^5}{(2+\text{و}) - 2} = \frac{1}{7} \times \text{٥} \times 2^4 = \frac{80}{7}$$

مثال ٣٨

$$\lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(2+3\text{و})^5 - 32}{\text{و}} \qquad \text{د(٠)} = \frac{0}{0}$$

$$= \text{٣} \times \lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(2+3\text{و})^5 - 32}{3 \times \text{و}} = \text{٣} \times \lim_{\text{٢+٣و} \to \text{٢}} \frac{(2+3\text{و})^5 - 2^5}{(2+3\text{و}) - 2}$$

$$= \text{٣} \times \text{٥} \times 2^4 = \text{٣} \times \text{٥} \times \text{١٦} = \text{٢٤٠}$$

مثال ٣٩

$$\lim_{\text{و} \to \text{٠}} \frac{(2+3\text{و})^5 - 32}{7\text{و}} \qquad \text{د(٠)} = \frac{0}{0}$$

$$= \frac{3}{7} \times \lim_{و \leftarrow ٠} \frac{(2+3و)^5 - 32}{\frac{3}{7} \times 7و} = \frac{3}{7} \times \lim_{و \leftarrow ٠} \frac{(2+3و)^5 - 32}{3و}$$

$$= \frac{3}{7} \times \lim_{٢+٣و \leftarrow ٢} \frac{(2+3و)^5 - 2^5}{(2+3و) - 2} = \frac{3}{7} \times ٥ \times 2^4 = \frac{240}{7}$$

مثال ٤٠ $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س+3} - 2}{س - 1}$ \ $د(١) = \frac{0}{0}$

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق البسط

$$= \lim_{س \leftarrow ١} \frac{\sqrt{س+3} - 2}{س - 1} \times \frac{\sqrt{س+3} + 2}{\sqrt{س+3} + 2} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{(س+3) - 4}{المقام}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ١} \frac{(س - 1)}{(س - 1)(\sqrt{س+3} + 2)} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{1}{\sqrt{س+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

مثال ٤١ $\lim_{س \leftarrow -١} \frac{س^3 + 1}{4 - \sqrt{س^2 + س + 16}}$ \ $د(-١) = \frac{0}{0}$

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام

$$= \lim_{س \leftarrow -١} \frac{س^3 + 1}{4 - \sqrt{س^2 + س + 16}} \times \frac{4 + \sqrt{س^2 + س + 16}}{4 + \sqrt{س^2 + س + 16}}$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهـا}} \frac{\text{البسط}}{16 - (س^2 + س + 16)} = \underset{س \to -1}{\text{نهـا}} \frac{\text{البسط}}{- س^2 - س}$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهـا}} \frac{(س + 1)(س^2 - س + 1)(4 + \sqrt{س^2 + س + 16})}{- س (س + 1)}$$

$$= \underset{س \to -1}{\text{نهـا}} \frac{(س^2 - س + 1)(4 + \sqrt{س^2 + س + 16})}{- س}$$

$$= \frac{(1 + 1 + 1)(4 + \sqrt{1 - 1 + 16})}{1} = \frac{3 \times 8}{1} = ٢٤$$

مثال ٤٢

$$\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س + 1} - 2}{\sqrt{7 - س} - 2} \qquad \backslash \ د(٣) = \frac{0}{0}$$

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق البسط × مرافق المقام

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س + 1} - 2)(\sqrt{س + 1} + 2)(\sqrt{7 - س} + 2)}{(\sqrt{7 - س} - 2)(\sqrt{س + 1} + 2)(\sqrt{7 - س} + 2)}$$

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س + 1 - 4)(\sqrt{7 - س} + 2)}{(7 - س - 4)(\sqrt{س + 1} + 2)}$$

$$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - 3)(\sqrt{7 - س} + 2)}{(3 - س)(\sqrt{س + 1} + 2)} = \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - 3)(\sqrt{7 - س} + 2)}{-(س - 3)(\sqrt{س + 1} + 2)}$$

$$= -\ \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}\ \frac{\sqrt{7 - س} + 2}{\sqrt{س + 1} + 2} = -\ \frac{2+2}{2+2} = -١$$

نهايـــة دالـــة عند اللانهايـــة

$$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}\ \frac{أ}{س^{ن}} = \text{صفر} \qquad \text{حيث } أ \in ح ،\ ن \in ح^{+}$$

لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية عند اللانهاية نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير س مرفوعاً لأكبر قوة له فى المقام

مثال ٤٣

$$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}\ \frac{3س^2 - 5س + 7}{4س^2 + 2س - 3} = \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}\ \frac{3 - \frac{5}{س} + \frac{7}{س^2}}{4 + \frac{2}{س} - \frac{3}{س^2}}$$

وذلك بقسمة كلاً من البسط والمقام على س٢

$$= \frac{3 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{3}{4}$$

مثال ٤٤

$$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}\ \frac{(2س - 3)(س + 1)}{س^3 - 5س + 2} = \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـــا}}\ \frac{2س^2 - س - 3}{س^3 - 5س + 2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{2}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^2} - \frac{3}{\text{س}^3}}{1 - \frac{5}{\text{س}^2} + \frac{2}{\text{س}^3}}$$

وذلك بقسمة كلاً من البسط والمقام على س^٣

$$= \frac{0 - 0 - 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = ٠$$

مثال ٤٥

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}^3 + 2}{\text{س}(2\text{س} - 1)} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س}^3 + 2}{2\text{س}^2 - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1 - 5\text{س} + \frac{2}{\text{س}^2}}{2 - \frac{1}{\text{س}}}$$

وذلك بقسمة كلاً من البسط والمقام على س^٢

$$= \frac{1 - \infty + 0}{2 - 0} = \frac{-\infty}{2} = -\infty$$

\ الدالة ليس لها نهاية

مثال ٤٦

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{2\text{س}^2}{\text{س} + 1} - (2\text{س} - 3) \right)$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^2 - (2\text{س} - 3)(\text{س} + 1)}{\text{س} + 1}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^2 - (2\text{س}^2 - \text{س} - 3)}{\text{س} + 1}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^2 - 2\text{س}^2 + \text{س} + 3}{\text{س} + 1} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} + 3}{\text{س} + 1}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{\text{س}}}{1 + \frac{1}{\text{س}}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = ١$$

وذلك بالقسمة بسطاً ومقاماً على س

مثال ٤٧

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{4\text{س} - 3}{\sqrt{9\text{س}^2 + 1}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{4\text{س} - 3}{\sqrt{\text{س}^2 (9 + \frac{1}{\text{س}^2})}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} (4 - \frac{3}{\text{س}})}{\text{س} \sqrt{9 + \frac{1}{\text{س}^2}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{4 - \frac{3}{\text{س}}}{\sqrt{9 + \frac{1}{\text{س}^2}}} = \frac{4 - 0}{\sqrt{9 + 0}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

مثال ٤٨ نهـــا $_{س \to \infty}$ $\dfrac{\sqrt[5]{س^5 - س^2}}{\sqrt[7]{س^7 + 1}}$ = نهـــا $_{س \to \infty}$ $\dfrac{\sqrt[5]{س^5 (1 - \frac{1}{س^3})}}{\sqrt[7]{س^7 (1 + \frac{1}{س^7})}}$

= نهـــا $_{س \to \infty}$ $\dfrac{س \sqrt[5]{1 - \frac{1}{س^3}}}{س \sqrt[7]{1 + \frac{1}{س^7}}}$ = نهـــا $_{س \to \infty}$ $\dfrac{\sqrt[5]{1 - \frac{1}{س^3}}}{\sqrt[7]{1 + \frac{1}{س^7}}}$ = $\dfrac{\sqrt[5]{1-0}}{\sqrt[7]{1+0}}$ =

١

مثال ٤٩ نهـــا $_{س \to \infty}$ $(\frac{2}{س} + 3) \times (\frac{1}{س}) \sqrt{س^2 + س + 1}$

= نهـــا $_{س \to \infty}$ $(\frac{2}{س} + 3) \times \frac{1}{س} \sqrt{س^2 (\frac{1}{س^2} + \frac{1}{س} + 1)}$

= نهـــا $_{س \to \infty}$ $(\frac{2}{س} + 3) \times \frac{س}{س} \sqrt{\frac{1}{س^2} + \frac{1}{س} + 1}$ = $(٣+٠) \times \sqrt{١+٠+٠}$ =

٣

مثال ٥٠ نهـــا $_{س \to \infty}$ $(\sqrt{س^٢ + ١} - \sqrt{س^٢ - ١})$

= نهـــا $_{س \to \infty}$ $\dfrac{(\sqrt{س^2 + 1} - \sqrt{س^2 - 1})(\sqrt{س^2 + 1} + \sqrt{س^2 - 1})}{(\sqrt{س^2 + 1} + \sqrt{س^2 - 1})}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{(س^2 + 1) - (س^2 - 1)}{\sqrt{س^2 (1 + \frac{1}{س^2})} + \sqrt{س^2 (1 - \frac{1}{س^2})}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{2}{س \sqrt{1 + \frac{1}{س^2}} + س \sqrt{1 - \frac{1}{س^2}}}$$

بالقسمة بسطاً ومقاماً على س

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{2}{س}}{\sqrt{1 + \frac{1}{س^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{س^2}}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{1+1}} = ٠$$

مثال ٥١ : إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{ب س^3 + 3 س^2 - 1}}{\sqrt{4 س^2 + 7}} = -١$ فما قيمة ب ؟

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[3]{س^3 (ب + \frac{3}{س} - \frac{1}{س^3})}}{\sqrt{س^2 (4 + \frac{7}{س^2})}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س} \sqrt[3]{\text{ب} + \frac{3}{\text{س}} - \frac{1}{\text{س}^3}}}{\text{س} \sqrt{4 + \frac{7}{\text{س}^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\text{ب} + 0 - 0}}{\sqrt{4 + 0}} = \frac{\sqrt[3]{\text{ب}}}{2} = -1 \quad \therefore \sqrt[3]{\text{ب}} = -2 \quad \therefore \text{ب} = -8$$

نهايـــة الدوال المثلثيـــة

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1 \quad , \quad \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = 1 \quad , \quad \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا أ س}}{\text{ب س}} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$$

ملاحظة $\lim_{\text{س} \to 0} \text{جتا س} = 1 \quad , \quad \lim_{\text{س} \to 0} \text{جتا أ س} = 1$

مثال ٥٢ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا } 5 \text{ س}}{\text{س}} = ٥$

مثال ٥٣ $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا س}}{3 \text{ س}} = \frac{1}{3}$

مثال ٥٤

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{3\,س}{\text{جا}\,7\,س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{3\,س}{س}}{\frac{\text{جا}\,7\,س}{س}} = \frac{3}{7}$$

وذلك بالقسمة بسطاً ومقاما على س

مثال ٥٥

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا}\,8\,س}{\text{جا}\,5\,س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{\text{ظا}\,8\,س}{س}}{\frac{\text{جا}\,5\,س}{س}} = \frac{8}{5}$$

مثال ٥٦

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{2\,س + \text{جا}\,7\,س}{4\,س + \text{ظا}\,5\,س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{2\,س}{س} + \frac{\text{جا}\,7\,س}{س}}{\frac{4\,س}{س} + \frac{\text{ظا}\,5\,س}{س}}$$

$$= \frac{2+7}{4+5} = \frac{9}{9} = ١$$

مثال ٥٧

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{5\,س^2 - 7\,س}{3\,\text{جا}\,س} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{5\,س^2}{س} - \frac{7\,س}{س}}{\frac{3\,\text{جا}\,س}{س}}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{5\text{س} - 7}{\frac{3\,\text{جا س}}{\text{س}}} = \frac{0 - 7}{3 \times 1} = \frac{-7}{3}$$

مثال ٥٨

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س} - 4\,\text{ظا س}}{5\text{س}\ \text{جتا}\ 3\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{\text{جا س}}{\text{س}} - \frac{4\,\text{ظا س}}{\text{س}}}{\frac{5\text{س}}{\text{س}} \times \text{جتا}\ 3\text{س}}$$

$$= \frac{1 - 4 \times 1}{5 \times 1} = \frac{-3}{5}$$

مثال ٥٩

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{5\text{س}^2}{\text{جا}^2\, 4\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{\frac{5\text{س}^2}{\text{س}^2}}{\frac{\text{جا}^2\, 4\text{س}}{\text{س}^2}}$$

وذلك بالقسمة بسطاً ومقاماً على س^2

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{5}{\left(\frac{\text{جا}\, 4\text{س}}{\text{س}}\right)^2} = \frac{5}{(4)^2} = \frac{5}{16}$$

مثال ٦٠

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{3\text{س}^2+\text{جا}^2\text{س}}{2\text{س}^2-\text{ظا}^2\text{س}}=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\frac{3\text{س}^2}{\text{س}^2}+\frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2}}{\frac{2\text{س}^2}{\text{س}^2}-\frac{\text{ظا}^2\text{س}}{\text{س}^2}}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{3+\left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^2}{2-\left(\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}\right)^2}=\frac{3+(1)^2}{2-(1)^2}=\frac{3+1}{2-1}=٤$$

مثال ٦١

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{جتا س حا }3\text{س}}{5\text{س}}=\lim_{\text{س}\to 0}\text{جتا س}\times\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{جا }3\text{س}}{5\text{س}}$$

$$=١\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$$

مثال ٦٢

$$\lim_{\text{س}\to 0}\text{س}^{٢}\text{ ظتا ٧ س قتا ٥ س}=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\text{س}^2}{\text{ظا }7\text{س}\times\text{جا }5\text{س}}$$

$$=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2}}{\frac{\text{ظا }7\text{س}}{\text{س}}\cdot\frac{\text{حا }5\text{س}}{\text{س}}}=\frac{1}{5\times 7}=\frac{1}{35}$$

مثال ٦٣ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{س}(\text{ظتا ٥س} - \text{قتا ٤س})$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \text{س} \left(\frac{1}{\text{ظا } 5 \text{ س}} - \frac{1}{\text{جا } 4 \text{ س}} \right)$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{س}}{\text{ظا } 5 \text{ س}} - \frac{\text{س}}{\text{جا } 4 \text{ س}} \right) = \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ظا } 5 \text{ س}}{\text{س}}} - \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا } 4 \text{ س}}{\text{س}}} \right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{4 - 5}{20} = \frac{-1}{20}$$

مثال ٦٤ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{5}{3 \text{ س}} + 2 \right) \text{جا } 4 \text{ س} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{5 \text{ جا } 4 \text{ س}}{3 \text{ س}} + 2 \text{ جا } 4 \text{ س} \right)$

$$= ٥ \times \frac{4}{3} + ٢ \times ٠ = \frac{20}{3}$$

مثال ٦٥ $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{س}^٢ (١ + \text{ظتا}^2 \text{ س}) = \lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{س}^٢ \times \text{قتا}^2 \text{ س}$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}^2}{\text{جا}^2 \text{ س}} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{س}^2}{\text{س}^2}}{\frac{\text{جا}^2 \text{ س}}{\text{س}^2}} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{1}{\left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}} \right)^2} = \frac{1}{1} = ١$$

مثال ٦٦

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - \text{جتا } 2\text{س}}{7\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - (1 - 2\text{جا}^2\text{س})}{7\text{س}^2}$$

$$= \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1 - 1 + 2\text{جا}^2\text{س}}{7\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{2\text{جا}^2\text{س}}{7\text{س}^2}$$

$$= \frac{2}{7} \times \lim_{\text{س} \to 0} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^2 = \frac{2}{7} \times 1 = \frac{2}{7}$$

مثال ٦٧

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{ظا } 7\sqrt{\text{س}}}{4\sqrt{\text{س}}}$$

نضع ص = $\sqrt{\text{س}}$ وعندما س $\to 0$ تكون ص $\to 0$

$$= \lim_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{ظا } 7\text{ص}}{4\text{ص}} = \frac{7}{4}$$

بعض قواعد التكامل

لا توجد قواعد لتكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمة دالتين وفيما يلي جدول بعض التكاملات الغير المحدودة حيث ن هي مجموعة الأعداد النسبية ، حيث : ث ، A ' H

١) $\int$ د س = س + ث

٢) $\int$ A د س = A $\int$ د س = A س + ث

٣) $\int$ س^{ن} د س = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + ث حيث ن ' N - {-١}

٤) $\int$ (جاس) د س = - جتاس + ث

٥) $\int$ (جتاس) د س = جاس + ث

مجال الدالة ف = H

٦) $\int$ (قا^{٢}س) د س = ظاس + ث ، ف = H - { $\frac{\text{ط}}{\text{م}}$ + م ط } حيث م ' X

٧) $\int$ (قتا^{٢}س) د س = - ظتاس + ث ، ف = H - { م ط } حيث م ' X

٨) $\int$ (قاس ظاس) د س = قاس + ث ، ف = H - { $\frac{\text{ط}}{٢}$ + م ط } حيث م ' X

٩) $\int$ (قتاس ظتاس) د س = - قتاس + ث ، ف = H - { م ط } حيث م ' X

طرق التكامل بالتعويض يمكن تحويلها إلى احدى الصور المحتواه داخل الجدول السابق

اولاً : تكامل دالة خطية مرفوعة لأس ن و ن 1 - ١ أو $\int$ (A س + ب)^{ن} د س ن 1 - ١ :

تكامل دالة خطية مرفوعة لأس على صورة (A س + ب)^{ن} د س ن 1 - ١

$\int$ (A س + ب)^{ن} د س = $\frac{١}{\text{A}}$ $\frac{(\text{A س + ب})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + ث

أي أن تكامل دالة خطية مرفوعة لأس ن = $\frac{١}{\text{معامل س}}$ $\frac{(\text{A س + ب})^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + ث

ثالثاً : تكامل دالة دائرية زاويتها دالة خطية :

١) $\int$ جا (A س + ب) د س = - $\frac{١}{\text{A}}$ جتا (A س + ب) + ث

٢) $\int$ جتا (A س + ب) د س = $\frac{١}{\text{A}}$ جا (A س + ب) + ث

٣) $\int$ قا^{٢} (A س + ب) د س = $\frac{١}{\text{A}}$ ظا (A س + ب) + ث

٤) $\int$ قتا^{٢} (A س + ب) د س = -$\frac{١}{\text{A}}$ ظتا (A س + ب) + ث

٥) قا (A س + ب) ظا (A س + ب) د س =$\frac{١}{\text{A}}$ قا (A س + ب) + ث

٦) $\int$ قتا (A س + ب) ظتا (A س + ب) د س = - $\frac{١}{\text{A}}$ قتا (A س + ب) + ث

رابعاً : تكامل دالة دائرية زاويتها دالة خطية لا يمكن تكاملها إلا بتحويلها إلى دوال اخرى :

١) جتا^2 س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢ س) s جتا^2 (زاوية) = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ضعف الزاوية)

٢) جا^2 س = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا ٢ س) s جا^2 (زاوية) = $\frac{١}{٢}$(١ - جتا ضعف الزاوية)

٣) ظا^2 س = قا^2 س - ١ s ظا^2 (زاوية) = قا^2 (نفس الزاوية) - ١

٢) ظتا^2 س = قتا^2 س - ١ s ظتا^2 (زاوية) = قتا^2 (نفس الزاوية) - ١

ملاحظة :

١) جتا^2 (A س + ب) = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢ (A س + ب))

٢) جا^2 (A س + ب) = $\frac{١}{٢}$ (١ - جتا ٢ (A س + ب))

٣) ظا^2 (A س + ب) = قا^2 (A س + ب) - ١

٢) ظتا^2 (A س + ب) = قتا^2 (A س + ب) - ١

ملاحظة

تكامل دالة دائرية لزاوية ما × تفاضل الزاوية = تكامل الدالة الدائرية لنفس الزاوية

خامساً : تكامل دالة على الصورة [د (س)]^{ن} × دَ (س) :

(تكامل حاصل ضرب دالة مرفوعة لأس ن في مشتقتها حيث ن عدد نسبي و ن 1 ١)

أي أن إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق خلال الفترة ف وكان ن ' N - { - ١ } فإن :

$$\int [د (س)]^{ن} \times دَ (س) د س = \frac{[د (س)]^{ن + ١}}{ن + ١} + ث$$

$$\int [الدالة]^{ن} \times مشتقتها = \frac{[الدالة]^{ن + ١}}{ن + ١} + ث$$

ملاحظة :

إذا كانت لدينا دالتين مضروبتين أو مقسومة وامكن تحويلها إلى حاصل ضرب بشرط أن اس المقام 1 ١ وكانت احداهما مشتقة الأخرى فإنه يمكن اتباع ما يلي :

نفرض أن الدالة ذات الأس هي د (س) نوجد مشتقة الدالة فإذا كانت الدالة الاخرى هي مشتقة الدالة او شبسهه بمشتقة الدالة فإن الدالة تصبح :

$$\int [د (س)]^{ن} \times دَ (س) "س = \frac{[د (س)]^{ن + ١}}{ن + ١} + ث$$

∴ تكامل الدوال على صورة $\sqrt{ب^{٢} - A^{٢} س^{٢}}$ ، $\sqrt{A^{٢} س^{٢} - ب^{٢}}$ ، $\sqrt{A^{٢} س^{٢} + ب^{٢}}$

أو على صورة $A^{٢} س^{٢} - ب^{٢}$ في المقام أو البسط بحيث لايكون التكامل على صورة $\int [\, د(س) \,]^{ن} \times دَ(س) \, ءس$

يمكن التخلص من الجذر بواسطة العلاقات وتحول التكاملات إلى نوع سبق دراسته ، هذه العلاقات تستنتج من المتطابقات الأساسية الأولى لحساب المثلثات : $جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١$ ، $ظا^{٢} س + ١ = قا^{٢} س$ ، $ظتا^{٢} س + ١ = قتا^{٢} س$
يمكن استخدام هذه العلاقات سواء كانت هذه الدوال كسرية أو جذرية :

الصـــــــــــورة	الـــــــتـــــــعويض
$\sqrt{ب^{٢} - A^{٢} س^{٢}}$ أو $ب^{٢} - A^{٢} س^{٢}$ في المقام (عدد٢ - متغير٢)	$س = \frac{ب}{A} جا ص$ أو $س = \frac{ب}{A} جتا ص$
$\sqrt{A^{٢} س^{٢} - ب^{٢}}$ أو $A^{٢} س^{٢} - ب^{٢}$ في المقام (متغير٢ - عدد٢)	$س = \frac{ب}{A} قا ص$ أو $س = \frac{ب}{A} قتا ص$
$\sqrt{A^{٢} س^{٢} + ب^{٢}}$ أو $A^{٢} س^{٢} + ب^{٢}$ في المقام (متغير٢ + عدد٢)	$س = \frac{ب}{A} ظا ص$ أو $س = \frac{ب}{A} ظتا ص$

****

ملاحظات :

١) $جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١$ $\left\{ \begin{array}{l} جا^{٢} س = ١ - جتا^{٢} س \\ جتا^{٢} س = ١ - جا^{٢} س \end{array} \right.$

٢) $ظا^{٢} س + ١ = قا^{٢} س$ s $ظا^{٢} س = قا^{٢} س - ١$

٣) $ظتا^{٢} س + ١ = قتا^{٢} س$ s $ظتا^{٢} س = قتا^{٢} س - ١$

٤) $جتا^{٢} س = \frac{١}{٢} (١ + جتا ٢ س)$

٥) $جا^{٢} س = \frac{١}{٢} (١ - جتا ٢ س)$

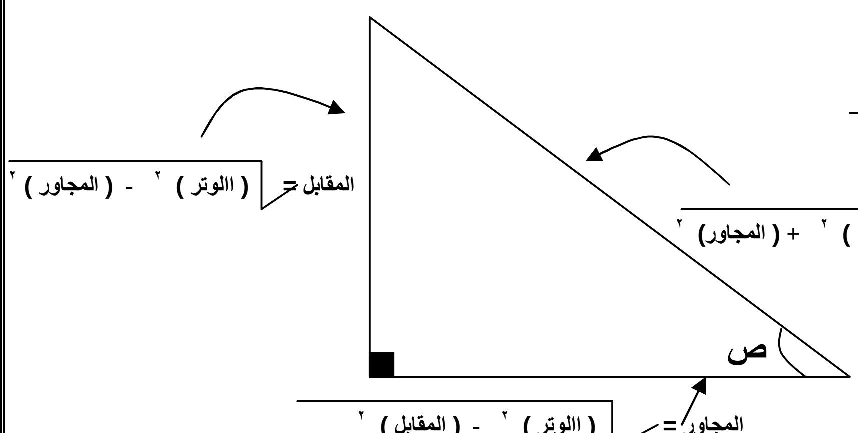
٦) $جا ٢ س = ٢ جا س جتا س$

٧) $جتا ٢ س = جتا^{٢} س - جا^{٢} س$

٨) نظرية فيثاغورس : $(الوتر)^{٢} = (المقابل)^{٢} + (المجاور)^{٢}$

$المقابل = \sqrt{(الوتر)^{٢} - (المجاور)^{٢}}$

$المجاور = \sqrt{(الوتر)^{٢} - (المقابل)^{٢}}$



بعض الملاحظات :

١) $\text{جـاص} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، $\text{جتاس} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ ، $\text{ظاس} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\text{قتاص} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$ ، $\text{قاس} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$

٢) $\text{س} = \frac{\text{ب}}{A}\ \text{جاص}$ s $\text{جاص} = \frac{A}{\text{ب}}\ \text{س}$

٣) $\text{جاص} = \frac{A}{\text{ب}}\ \text{س}$ s $\text{ص} = \text{جا}^{-1}\ \frac{A}{\text{ب}}\ \text{س}$

٤) لحل دوال على الصورة دالة كسرية في بسط أو في مقام سواء فيها جذر أو غير ذلك وليست على صورة دالة في مشتقتها نتبع مايلي : G

① $\sqrt{(\text{عدد})^2 - (\text{عدد} \times \text{مقدار متغير})^2} = \sqrt{\text{ب}^2 - A^2\text{س}^2}$ نضع $\text{س} = \frac{\text{ب}}{A}\ \text{جاص}$

② $\sqrt{(\text{عدد} \times \text{متغير})^2 - (\text{عدد})^2} = \sqrt{A^2\text{س}^2 - \text{ب}^2}$ نضع $\text{س} = \frac{\text{ب}}{A}\ \text{قاص}$

③ $\sqrt{(\text{عدد} \times \text{متغير})^2 + (\text{عدد})^2} = A^2\text{س}^2 + \text{ب}^2$ نضع $\text{س} = \frac{\text{ب}}{A}\ \text{ظاص}$

A نفرض أن $\text{س} = \frac{\text{ب}}{A}$ [جاص أو قاص أو ظاص] (نشتق الطرفين)

مثلاً $\text{س} = \frac{\text{ب}}{A}$ [جاص أو قاص أو ظاص]

s $\text{ءس} = \frac{\text{ب}}{A}$ [جتاص ءص ، قاص ظاص ءص ، $\text{قا}^2\text{ص}$ ءص]

B نعوض عن قيم س ، ءس بدلالة ص ، ءص

نحاول ان نختصر التكاملات وأخذ عامل مشترك مع ملاحظة :

& $\sqrt{\text{ب}^2 - A^2 (\frac{\text{ب}^2}{A^2}) \text{جا}^2\text{ص}} \neq \sqrt{\text{ب}^2 - \text{ب}^2 \text{جا}^2\text{ص}} \neq \sqrt{\text{ب}^2 (1 - \text{جا}^2\text{ص})} = \sqrt{\text{ب}^2 \text{جتا}^2\text{ص}} = \text{ب جتاص}$

$\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 + \text{جتا}2\text{س})$ ، $\text{جتا}^2\text{س} = \frac{1}{2}(1 - \text{جتا}2\text{س})$

& $\sqrt{A^2 (\frac{\text{ب}^2}{A^2}) \text{قا}^2\text{ص} - \text{ب}^2} = \sqrt{\text{ب}^2 \text{قا}^2\text{ص} - \text{ب}^2} = \sqrt{\text{ب}^2 (\text{قا}^2\text{ص} - 1)} \neq \sqrt{\text{ب}^2 \text{ظا}^2\text{ص}} = \text{ب ظاص}$

& $\sqrt{\text{ب}^2 + A^2 (\frac{\text{ب}^2}{A^2}) \text{ظا}^2\text{ص}} \neq \sqrt{\text{ب}^2 + \text{ب}^2 \text{ظا}^2\text{ص}} \neq \sqrt{\text{ب}^2 (1 + \text{ظا}^2\text{ص})} \neq \sqrt{\text{ب}^2 \text{قا}^2\text{ص}} = \text{ب قاص}$

****

حالات خاصة : إذا كانت ن ' N - { -١ }

١) $\int \text{جا}^{\text{ن}}\text{س جتاس ءس} = \frac{\text{جتا}^{\text{ن}+1}\text{س}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

٢) $\int \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س جاس ءس} = \int \text{جتا}^{\text{ن}}\text{س} (-\text{جاس})\ \text{ءس} = -\frac{\text{جا}^{\text{ن}+1}\text{س}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$

٣) $\int$ ظا^{ن} س قا^{٢} س ء س = $\frac{\text{ظا}^{ن+١}\text{س}}{ن+١}$ + ث

٤) $\int$ ظتا^{ن} س قتا^{٢} س ء س = -. $\int$ ظتا^{ن} س (- قتا^{٢} س) ء س = - $\frac{\text{ظتا}^{ن+١}\text{س}}{ن+١}$ + ث

٥) $\int$ قا^{ن} س (قا س ظا س) ء س = $\frac{\text{قا}^{ن+١}\text{س}}{ن+١}$ + ث

٦) $\int$ قتا^{ن} س (قتا س ظتا س) ء س = - $\int$ قتا^{ن} س (- قتا س ظتا س) ء س = - $\frac{\text{قتا}^{ن+١}\text{س}}{ن+١}$ + ث

٧) $\int$ قا^{ن} س ظا س ء س = $\int$ قا$^{ن-١}$ س (قا س ظا س) ء س = $\frac{\text{قا}^{ن}\text{س}}{ن}$ + ث

٨) $\int$ قتا^{ن} س ظتا س ء س = $\int$ قتا$^{ن-١}$ س (قتا س ظتا س) ء س = - $\int$ قتا$^{ن-١}$ س (- قتا س ظتا س) ء س = - $\frac{\text{قتا}^{ن}\text{س}}{ن}$ + ث

٩) $\int$ جا^{٣} س ء س = $\int$ حا^{٢} س جاس ء س = $\int$ (١ – جتا^{٢} س) جا س ء س = $\int$ (جاس - حتا^{٢} س جا س) ء س

= - جتا س + $\frac{١}{٣}$ جتا^{٣} س + ث   (بنفس الطريقة لـ حتا^{٣} س)

١٠) $\int$ جتا^{٤} س ء س = $\int$ جتا^{٢} س جتا^{٢} س ء س = $\int$ (جتا^{٢} س)^{٢} ء س = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢ س))^{٢} ء س

= $\frac{١}{٤}$ $\int$ (١ + ٢جتا٢ س + جتا^{٢} ٢ س) ء س = $\frac{١}{٤}$ $\int$ ١ + جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٤ س)) ء س

= $\frac{١}{٤}$ [س + ٢ × $\frac{١}{٢}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٤}$ جا ٤ س] + ث

= $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٨}$ س + $\frac{١}{٣٢}$ جا ٤ س + ث

= $\frac{٣}{٨}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا ٢ س + $\frac{١}{٣٢}$ جا ٤ س + ث   (بنفس الطريقة لـ جا^{٤} س)

١١) $\int$ قا^{٤} س ء س = $\int$ قا^{٢} س قا^{٢} س ء س = $\int$ (١ + ظا^{٢} س) قا^{٢} س ء س = $\int$ (قا^{٢} س + ظا^{٢} س قا^{٢} س) ء س

= ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣} س + ث   (بنفس الطريقة قتا^{٤} س)

١٢) $\int$ ظا^{٤} س ء س = $\int$ ظا^{٢} س ظا^{٢} س ء س = $\int$ (قا^{٢} س - ١) ظا^{٢} س ء س = $\int$ (ظا^{٢} س قا^{٢} س - ظا^{٢} س) ء س

= $\int$ (ظا^{٢} س قا^{٢} س - (قا^{٢} س - ١)) ء س

= $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣} س - ظا س + س + ث   (بنفس الطريقة ظتا^{٤} س)

****

الدالة الاسية واللوغاريتمية :

الدالة اللوغاريتمية

اولاً : الاشتقاق :

١) ص = لو د(س) Ü صَ = $\frac{١}{\text{د(س)}}$ × دَ(س) = $\frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}}$

أي ان تفاضل لو(أي دالة) = $\frac{١}{\text{الدالة}}$ × مشتقة الدالة

٢) ص = لو س Ü صَ = $\frac{١}{\text{ص}}$

لاحظ : ص = لو$_A$ د(س) = $\frac{\text{لو د(س)}}{\text{لو } A}$ Ü صَ = $\frac{1}{\text{لو } A}$ × $\frac{1}{\text{د(س)}}$ × دَ(س) = $\frac{\text{دَ(س)}}{\text{لو } A \text{ لو د(س)}}$

ثانياً : التكامل

١) $\int \frac{\text{دَ(س)}}{\text{د(س)}}$ ءس = لو | د(س) | + ث

$\int \frac{\text{مشتقة}}{\text{الدالة}}$ ءس = لو | الدالة | + ث تكامل $\frac{\text{مشتقة}}{\text{الدالة}}$ = لو | الدالة | + ث

٢) $\int$ لوس ءس = س لو س - س + ث

٣) $\int$ لوس^{ن} ءس = ن $\int$ لو س = ن (س لو س - س) + ث

٤) $\int$ لو$_A$ س ءس = $\int \frac{\text{لوس}}{\text{لو } A}$ ءس = $\frac{\text{س لو س - س}}{\text{لو } A}$ + ث

٥) $\int$ لو$_A$ س^{ن} = ن $\int \frac{\text{لو س}}{\text{لو } A}$ = $\frac{\text{ن}}{\text{لو } A}$ (س لو س - س) + ث

الدالة الاسية :

اولاً : الاشتقاق : (اتبعي القاعدة فقط)

تفاضل أي دالة اسية = نفس الدالة الاسية × تفاضل الاس × لو الاساس

(ولكن إذا كان اساسه هـ مانكتب لو الاساس لأن لو$_{هـ}$ هـ = ١) أي ان :

١) ص = هـ^{س} Ü صَ = هـ^{س}

٢) ص = هـ$^{د(س)}$ Ü صَ = هـ$^{د(س)}$ × دَ(س)

٣) ص = A^{س} Ü صَ = A^{س} لو A

٤) ص = A$^{د(س)}$ Ü صَ = A$^{د(س)}$ × دَ(س) لو A

٥) ص = لو هـ$^{د(س)}$ = د(س) ، ص = هـ$^{\text{لو د(س)}}$ = د(س) (وتفاضل او تكامل حسب نوع الدالة)

٦) لاحظي هنالك فرق بين ص = هـ$^{\text{لو(س + A)}}$ = س + A و ص = هـ$^{\text{لو س + A}}$ = هـ$^{\text{لو س}}$ هـ^{A} = س هـ^{A}

ثانياً : التكامل: (اتبعي القاعدة فقط)

تكامل أي دالة اسية × مشتقة الاس = $\frac{\text{نفس الدالة الاسية}}{\text{لو الاساس}}$

(ولكن إذا كان اساسه هـ مانكتب لو الاساس لأن لو$_{هـ}$ هـ = ١) أي ان :

١) $\int$ هـ^{س} ءس = هـ^{س} + ث

٢) $\int$ هـ$^{د(س)}$ × دَ(س) ءس = هـ$^{د(س)}$ + ث

٣) $\int A^{س}$ ء س = $\frac{A^{س}}{لو\ A}$ + ث

٤) $\int A^{د(س)} \times$ دَ (س) ء س = $\frac{A^{د(س)}}{لو\ A}$ + ث

٥) ص = س^{س} Ü ص = هـلو س^{س} = هـ$^{س لو س}$ Ü صَ = هـ$^{س لو س}$ × (١ × لو س + س × $\frac{١}{س}$)

= س^{س} (لو س + ١)

٦) $\int$ س^{س} (لو س + ١) ء س = س^{س} + ث

لاتوجد قاعدة مباشرة لتكامل ضرب او قسمة دالتين :

اولاً : في حالة الضرب

١) إذا يمكن الضرب نضرب ثم نكامل

٢) لايمكن الضرب

احدى الدالتين مشتقة الاخرى

لايمكن الضرب او ليست احدى الدالتين مشتقة الاخرى

أي أن إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق خلال الفترة ف وكان ن ' N - { - ١ } فإن :

$\int$ [د (س)]^{ن} × دَ (س) "س = $\frac{[\ د\ (س)\ ]^{ن+١}}{ن + ١}$ + ث

خطوه

[الدالة]^{ن} × مشتقتها = $\frac{[\ الدالة\ ]^{ن+١}}{ن + ١}$ + ث

الخطوات

التكامل بالتعويض : نفرض ان المقدار للدالة الخطية والتي لها ذات الاس الصعب بـ ص نوجد س بدلالة ص نفاضل الطرفين ثم نعوض عن قيم س ، ء س بدلالة ص ، ء ص

ملاحظة ممكن في بعض الدوال ليست دالة

ولكن نحاول ان نستخدم لها التكامل بالتعويض نفرض والتي لها الاس الصعب بـ ص ثم نتبع

ثانياً : في حالة القسمة لدالتين :

اولاً : في حالة الضرب

قسمة دالتين

يمكن رفع المقام للبسط بحيث اس المقام ن 1 - ١

لايمكن رفع المقام لأن المقام باس يساوي ١

تحول إلى حاصل ضرب دالتين وتفاضل على حسب ما سبق

إذا كان درجة البسط £ درجة المقام

اما بالتحليل والاختصار ثم نكامل إذا كان درجة البسط > درجة المقام او قسمة مطولة ثم نختار طريقة مناسبة للتكامل

إذا كان درجة البسط < درجة المقام

وكان البسط مشتقة المقام

$\int \frac{دَ\ (س)}{د (س)}$ ء س = لو | د (س) | + ث

$\int \frac{مشتقة}{الدالة}$ = لو | الدالة | + ث

وفي الختام

يا قارئ خطي لا تبكي على موتي..فاليوم أنا معك وغداً في التراب..

فإن عشت فإني معك وإن مت فللذكرى!..

ويا ماراً على قبري لا تعجب من أمري..

بالأمس كنت معك وغداً أنت معي...

ونسأل الله العلي القدير أن نكون قد وفقنا فـــي معالجـــة موضـــوعات الكتاب، كما نسأله تعالى أن ينفع به القارئ الكـــريم، وأن يكـــون فـــي ميزان حسناتنا يوم القيامة، يوم لا ينفع مال ولا بنون إلا من أتـــى الله بقلب سليم.

والله ولي التوفيق،،،
وصلى الله وسلّم على نبينا الأكرم

بقلم الأستاذ

احمد حماد شعبان