

أولاً:

السؤال الأول:

$$\frac{1}{e^x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{2e^{-x} + 1}$$

$$X = \frac{1}{2X + 1} \text{ نفرض } X = e^{-x} \text{ فتكون}$$

$$2X^2 + X = 1$$

$$2X^2 + X - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(-1) = 9 > 0$$

$$x = \ln 2 \text{ وبالتالي } e^{-x} = \frac{1}{2} = e^{\ln \frac{1}{2}} = e^{-\ln 2} \text{ أي } X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2(2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{مرفوض } e^{-x} = -1 \text{ أي } X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2(2)} = -1$$

السؤال الثاني:

$$4 - 9^x - 3^{x+1} > 0 \text{ التابع } f(x) = \ln(4 - 9^x - 3^{x+1}) \text{ معرف بشرط}$$

$$4 - 3^{2x} - 3 \cdot 3^x > 0$$

$$4 - X^2 - 3X > 0 \text{ ومنه } X = 3^x \text{ نفرض}$$

$$X^2 + 3X - 4 < 0$$

$$(X + 4)(X - 1) < 0$$

$$(3^x + 4)(3^x - 1) < 0$$

بما أن $3^x + 4$ موجب تماماً فإن المتراجحة تكافئ:

$$3^x - 1 < 0$$

$$3^x < 1$$

$$3^x < 3^0$$

$$x < 0$$

وبالتالي مجموعة تعريف التابع f هي $D_f =]-\infty, 0[$

$$f(-1) = e \text{ و } f(x) = (x+2)^{\frac{x+2}{x+1}}$$

$$(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}} = (1+(x+1))^{\frac{x+2}{x+1}}$$

نفرض $t = x+1$ ومنه $x = t-1$

$$\text{وبالتالي } \frac{x+2}{x+1} = \frac{t-1+2}{t-1+1} = \frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t} \text{ ومنه}$$

$$(x+2)^{\frac{x+2}{x+1}} = (1+(x+1))^{\frac{x+2}{x+1}} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = (1+t) \cdot (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

عندما x تسعى إلى -1 فإن t تسعى إلى الصفر، وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t) \cdot (1+t)^{\frac{1}{t}} = (1)(e) = e = f(-1)$$

أي أن f مستمر عند -1

$f(x)$ إلى المجال المفتوح الذي مركزه 3 ونصف قطره 0.1 أي:

$$|f(x) - 3| < 0.1$$

$$\left| \frac{3e^x + 5}{e^x + 2} - 3 \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{3e^x + 5 - 3e^x - 6}{e^x + 2} \right| < 0.1$$

$$\left| \frac{-1}{e^x + 2} \right| < 0.1$$

$$\frac{1}{e^x + 2} < \frac{1}{10}$$

$$10 < e^x + 2$$

$$e^x > 8$$

$$x > \ln 8$$

$$x > 3 \ln 2$$

$$A = 3 \ln 2 \text{ أي أن}$$

$$f'(1) = 0 \text{ و } f(1) = -e \text{ أي } f(x) = (ax + b)e^x \text{ قيمة حدية للتابع} \quad (I)$$

$$(1) \dots a + b = -1 \text{ أي } f(1) = (a + b)e = -e \text{ فإن } f(1) = -e \text{ عندما}$$

$$f'(x) = ae^x + e^x(ax + b) = (ax + a + b)e^x \text{ لدينا}$$

$$(2) \dots 2a + b = 0 \text{ أي } f'(1) = (2a + b)e = 0 \text{ فإن } f'(1) = 0 \text{ عندما}$$

$$\text{بطرح (1) و (2) نجد } -a = -1 \text{ ومنه } a = 1$$

$$\text{نعوض في (2) فنجد } b = -2a = -2$$

$$\text{وبالتالي } f(x) = (x - 2)e^x$$

$$f(x) = (x - 2)e^x \text{ و } D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[\quad (II)$$

$$-\infty \text{ المقارب أفقي في جوار } y = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - 2e^x) = 0 - 0 = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = e^x + (x - 2)e^x = (1 + x - 2)e^x = (x - 1)e^x$$

$$\text{عندما } f'(x) = 0 \text{ فإن } x - 1 = 0 \text{ أي } x = 1 \text{ حيث } f(1) = (1 - 2)e = -e \text{ وبالتالي:}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-e$	$+\infty$

$$f(1) = -e \text{ قيمة حدية صغرى}$$

$$y = 0 \text{ مقارب أفقي} \quad (2)$$

$$\text{الوضع النسبي: } f(x) - y_\Delta = (x - 2)e^x$$

$$\text{بما أن } e^x > 0 \text{ فإن إشارة الفرق من إشارة } x - 2$$

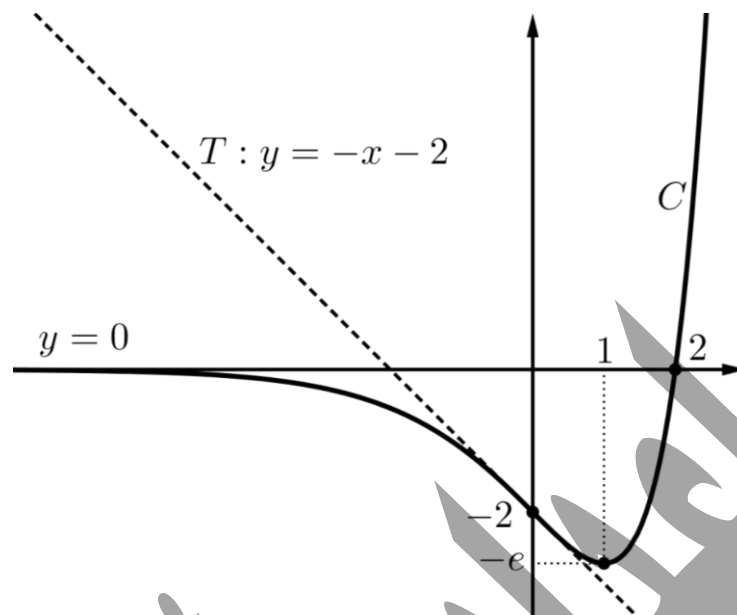
$$\text{عندما } x > 2 : C \text{ فوق المقارب}$$

$$\text{عندما } x < 2 : C \text{ تحت المقارب}$$

$$f''(x) = e^x + e^x(x - 1) = (1 + x - 1)e^x = xe^x \quad (3)$$

$$\text{عندما } f''(x) = 0 \text{ فإن } x = 0 \text{ وبالتالي:}$$

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x - 2$$



$$xe^x = m + 2e^x$$

$$xe^x - 2e^x = m$$

$$m = (x - 2)e^x = f(x)$$

عندما $m \in]-\infty, -e[$ ليس للمعادلة حل

عندما $m = -e$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m \in]-e, 0[$ للمعادلة حلين مختلفين

عندما $m \in [0, +\infty[$ للمعادلة حل وحيد

$$f(x) = xe^{-x} + x - 2 \text{ و } D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + x - 2 \right) = +\infty$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1 \text{ لا يمكن معرفة إشارة المشتق}$$

لذلك نفرض التابع $g(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$ المعرف على \mathbb{R}

$$g'(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

$$g(2) = e^{-2} - 2e^{-2} + 1 = -e^{-2} + 1 = -\frac{1}{e^2} + 1 = \frac{e^2 - 1}{e^2} \text{ حيث } x=2 \text{ فإن } g'(x) = 0 \text{ عندما}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$			

$\frac{e^2 - 1}{e^2}$

$$g(x) \geq \frac{e^2 - 1}{e^2} > 0 \text{ من جدول اطراد } g \text{ نجد أن}$$

وبالتالي $f'(x) > 0$ والتابع f متزايد تماماً

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x} + x - 2 - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad (2)$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y = x - 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = xe^{-x} \text{ الوضع النسبي:}$$

بما أن $e^{-x} > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة x

عندما $x > 0$ فوق المقارب

عندما $x < 0$ تحت المقارب

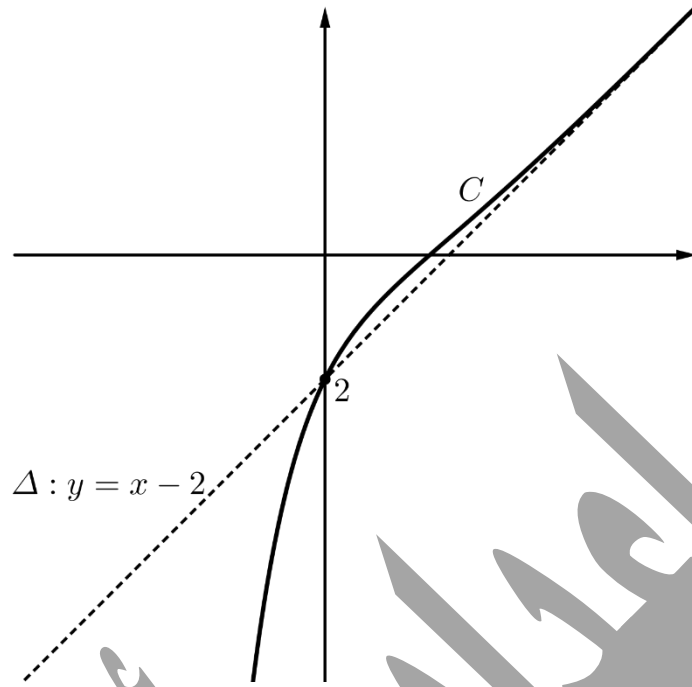
على المجال $]1, 2[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً

(3)

$$f(2) = 2e^{-2} + 2 - 2 = \frac{2}{e^2} > 0 \text{ و } f(1) = e^{-1} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$$

$$f(1) \times f(2) < 0 \text{ أي}$$

وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α يحقق $1 < \alpha < 2$



$$(E) \quad y + y' = e^{-x} + x - 1$$

(5)

لدينا $f(x) = xe^{-x} + x - 2$ و $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} + 1$ وبالتالي:

(a)

$$f + f' = xe^{-x} + x - 2 + e^{-x} - xe^{-x} + 1 = e^{-x} + x - 1$$

وبالتالي التابع f حل للمعادلة التفاضلية (E)

(1)... نفرض أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (E) أي $g + g' = e^{-x} + x - 1$

(b)

ووجدنا سابقاً أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) أي $f + f' = e^{-x} + x - 1$

$$g + g' - f - f' = 0 \quad \text{نجد: (2) و (1) بطرح العلاقتين}$$

$$(g - f) + (g - f)' = 0 \quad \text{وتكافئ}$$

وبالتالي $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية (F) $y + y' = 0$

من جهة أخرى، نفرض $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية (F) $y + y' = 0$ أي أن:

(3)... $(g - f) + (g - f)' = 0$ أي $g + g' - f - f' = 0$ أي $g + g' = f + f'$

ووجدنا سابقاً أن f حل للمعادلة التفاضلية (E) أي $f + f' = e^{-x} + x - 1$

$$\text{نعوض (2) في (3) فنجد } g + g' = e^{-x} + x - 1$$

أي أن g حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

المعادلة (F) $y + y' = 0$ تكافئ $y' = -y$ وهي من الشكل $y' = ay$ وحلها يعطى بالشكل $y = ke^{-x}$

(c)

بما أن $g - f$ حلاً للمعادلة التفاضلية (F) فإن $g - f = ke^{-x}$

$$g = ke^{-x} + f$$

(E) وهي جميع حلول المعادلة التفاضلية $g = ke^{-x} + xe^{-x} + x - 2$

انتهى حل النموذج الأول

التابع الأسّي

أولاً:

السؤال الأول:

$$\frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \leq \frac{3}{4}$$

$$4e^{2x} - 4 \leq 6e^x$$

$$2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$$

نفرض $X = e^x$ وبالتالي $2X^2 - 3X - 2 \leq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-2) = 25$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{1}{2} \text{ و } X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + 5}{4} = 2$$

$$(X - 2)\left(X + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \text{ وبالتالي}$$

$$(e^x - 2)\left(e^x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

بما $e^x + \frac{1}{2} > 0$ موجب تماماً فإن المتراجحة تكافئ $e^x - 2 \leq 0$ أي $e^x \leq 2$ ومنه $x \leq \ln 2$

وبالتالي حل المتراجحة $x \in]-\infty, \ln 2]$

السؤال الثاني:

$$f(x) = x + 3^x = x + e^{x \ln 3} \text{ و } D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \ln 3 e^{x \ln 3} > 0 \text{ أي أن التابع } f \text{ متزايد تماماً}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

على المجال $]-\infty, +\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $0 \in f(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$

أي أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α

$$f(0) = 0 + 3^0 = 1 > 0 \text{ بما أن}$$

$$f(-1) = -1 + 3^{-1} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} < 0 \text{ و}$$

$$-1 < \alpha < 0 \text{ أي أن}$$

السؤال الثالث:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x+\ln x} - e}{x-1} = 2e$$

نفرض التابع $f(x) = e^{x+\ln x}$ فإن $f(1) = e^{1+\ln 1} = e$

$$f'(1) = \left(1 + \frac{1}{1}\right) e^{1+\ln 1} = 2e \text{ فإن } f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x+\ln x} \text{ و}$$

f معرف واشتقاقي على المجال $]0, +\infty[$ فهو اشتقاقي عند الواحد

$$\text{حسب تعريف العدد المشتق } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \text{ نجد:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x+\ln x} - e}{x-1} = 2e$$

السؤال الرابع:

$$\text{لدينا } f(x) = xe^x \text{ و } f'(x) = e^x + xe^x$$

نعوض في المعادلة $y' - y = e^x$ فنجد:

$$f' - f = e^x + xe^x - xe^x = e^x$$

أي أن $f(x) = xe^x$ حل المعادلة التفاضلية $y' - y = e^x$.

$$\text{من جهة أخرى لدينا } f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$\text{وبالتالي } (f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = (f'' - 2(f' - f))e^{-x} = (2e^x + xe^x - 2e^x)e^{-x} = xe^{-x}e^x = x$$

$$\text{أي أن } (f'' - 2f' + 2f)e^{-x} = x$$

$$f(x) = \ln(e^x + a)$$

(1) يمكن كتابة التابع f بالشكل $f(x) = \ln\left(e^x \cdot \left(1 + \frac{a}{e^x}\right)\right) = \ln e^x + \ln\left(1 + \frac{a}{e^x}\right) = x + \ln\left(1 + \frac{a}{e^x}\right)$ وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_{\Delta}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \ln\left(1 + \frac{a}{e^x}\right) - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{e^x}\right) = \ln 1 = 0$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f أيًا كانت قيمة a .

$$f(0) = \ln 2 \text{ أي } A(0, \ln 2) \text{ يمر بالنقطة } C \quad (2)$$

$$\ln(e^0 + a) = \ln 2$$

$$a = 1 \text{ وبالتالي } 1 + a = 2$$

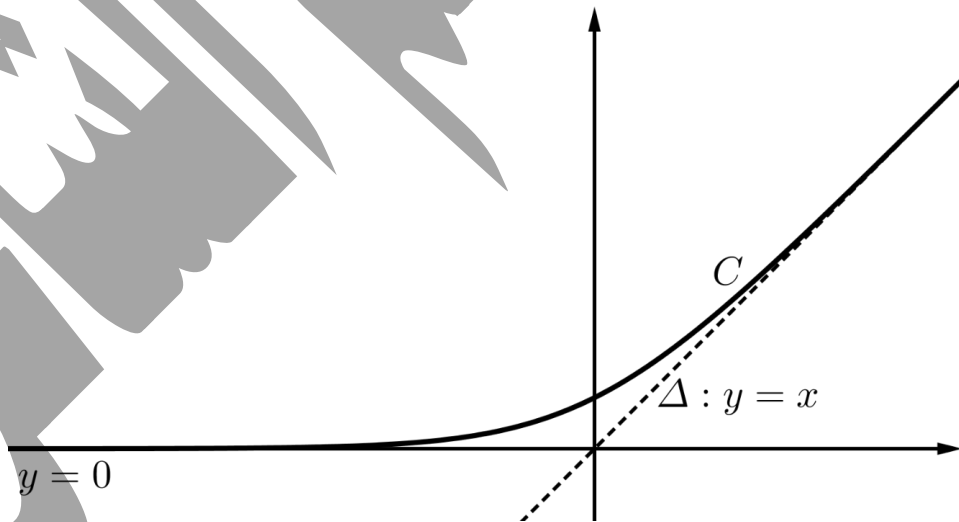
$$f(x) = \ln(e^x + 1) \text{ و } D_f =]-\infty, +\infty[\quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 1 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (a)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0 \text{ التابع } f \text{ متزايد تماماً}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

(b)



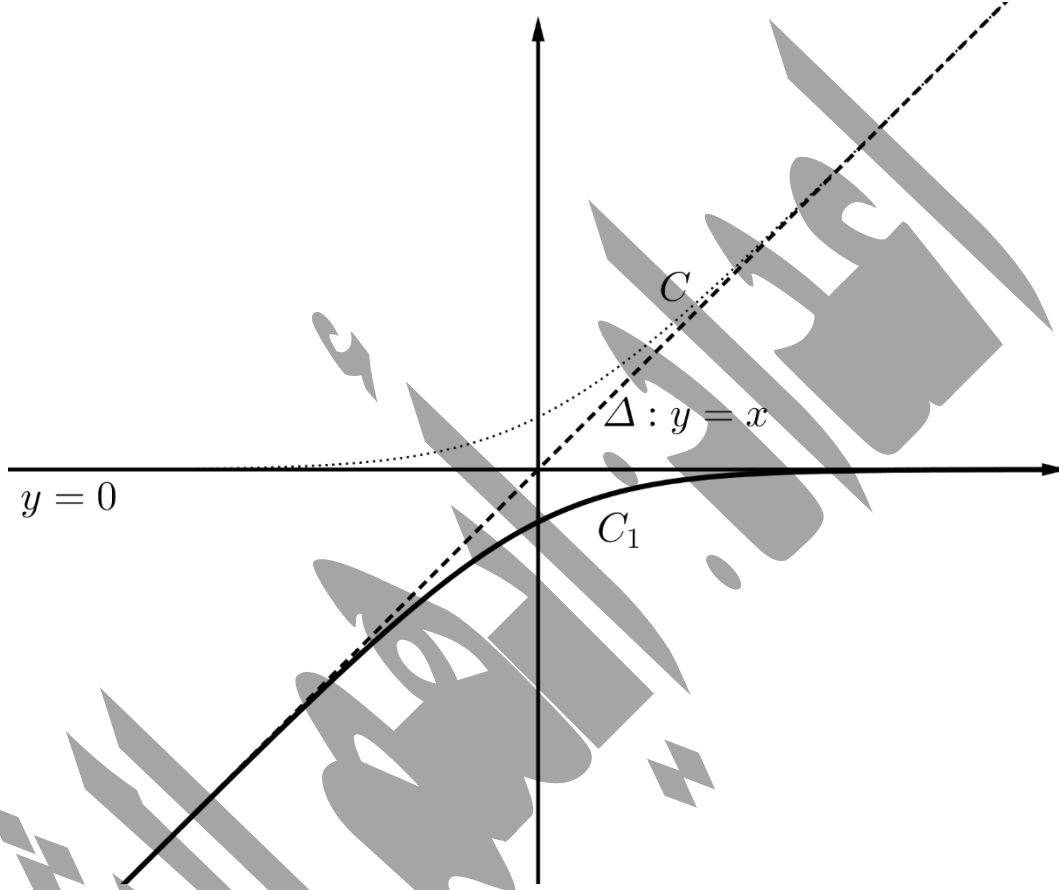
(c)

$$f_1(x) = x - \ln(e^x + 1)$$

$$f(-x) = \ln(e^{-x} + 1) = \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln e^x = \ln(1+e^x) - x$$

$$f(-x) = -(x - \ln(1+e^x)) = -f_1(x)$$

الخط البياني للتابع f_1 هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة للمبدأ



(d)

$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = f(u_n) = \ln(e^{u_n} + 1)$$

نفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$

- نثبت صحة القضية $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 0 < u_1 = \ln 2$ محققة.

- نفرض صحة القضية $E(n)$ من أجل n : $u_n < u_{n+1}$ محققة

- نثبت صحة القضية $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2}$ ؟

من الفرض $u_n < u_{n+1}$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} < u_{n+2}$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أيضاً كان العدد الطبيعي n

$$f(x) = x + \frac{4}{e^x + 1} \text{ و } D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (1)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \geq 0$$

وبالتالي التابع f متزايد

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{e^x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0 \quad (2)$$

وبالتالي $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

$$\text{الوضع النسبي: } f(x) - y_\Delta = \frac{4}{e^x + 1} > 0 \text{ وبالتالي } C \text{ فوق المقارب } \Delta$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x + 4)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 4) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{e^x + 1} - 4 \right) = \frac{4}{0 + 1} - 4 = 4 - 4 = 0 \quad (3)$$

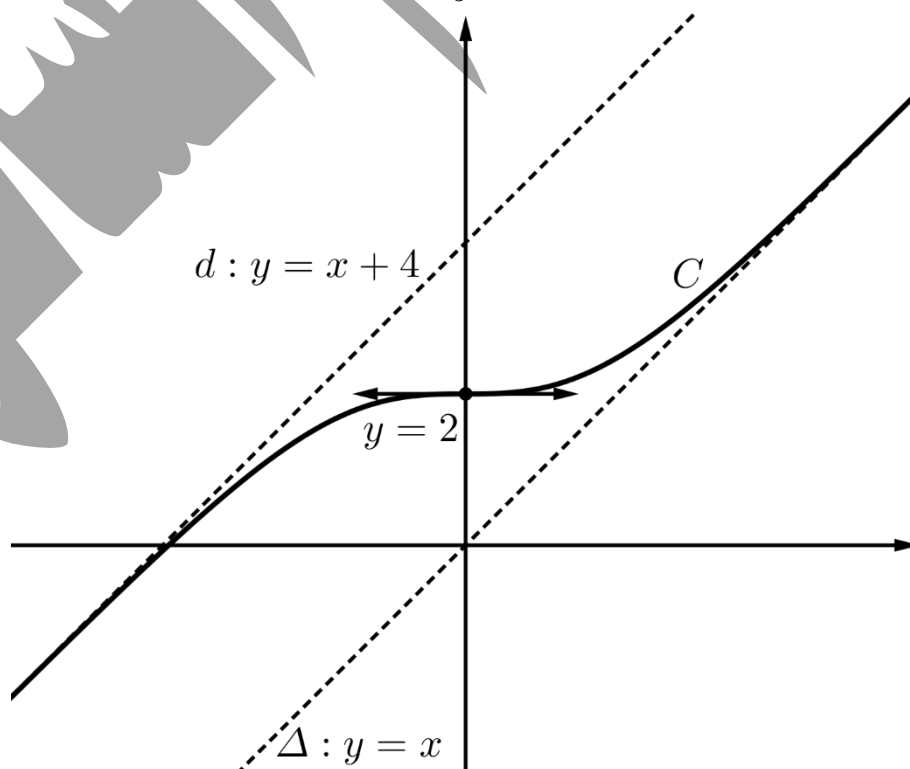
وبالتالي $d: y = x + 4$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$$\text{الوضع النسبي: } f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1} - 4 = \frac{4 - 4e^x - 4}{e^x + 1} = \frac{-4e^x}{e^x + 1} < 0 \text{ وبالتالي } C \text{ تحت المقارب } d$$

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad (4)$$

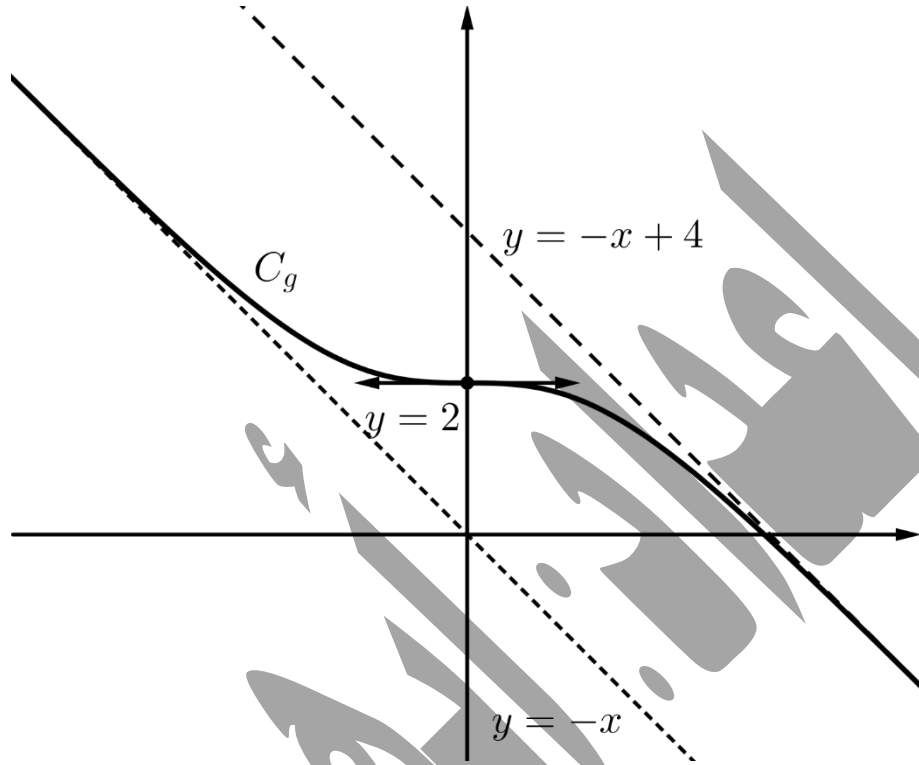
$$T: y = 2$$

(5)



$$f(-x) = -x + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{4}{\frac{1}{e^x} + 1} = -x + \frac{4}{\frac{1 + e^x}{e^x}} = -x + \frac{4e^x}{e^x + 1} = g(x) \quad (6)$$

الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمحور الترتيب



انتهى حل النموذج الثاني
التابع الأسّي

أولاً:

السؤال الأول:

$$e^x + 4e^{-x} \leq 5$$

$$e^x + \frac{4}{e^x} \leq 5$$

$$e^{2x} + 4 \leq 5e^x$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$$

نفرض $X = e^x$ وبالتالي $X^2 - 5X + 4 \leq 0$

$$(X - 4)(X - 1) \leq 0$$

$$(e^x - 4)(e^x - 1) \leq 0$$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$		
$(e^x - 4)(e^x - 1)$		+	0	-	0	+
المتراحة	//////	محققة	//////			

وبالتالي حل المتراحة $x \in [0, \ln 4]$

السؤال الثاني:

لدينا $f(x) = 3^{x^2 - 2x}$ و منه $f(0) = 3^0 = 1$

أو بصيغة أخرى: التابع يكتب بالشكل $f(x) = e^{(x^2 - 2x)\ln 3}$ و منه $f(0) = e^0 = 1$

و $f'(x) = (2x - 2)\ln 3 e^{(x^2 - 2x)\ln 3}$ و منه $f'(0) = (0 - 2)\ln 3 e^0 = -2\ln 3$

التابع f معرف واشتقائي على \mathbb{R} فهو اشتقائي عند الصفر

حسب تعريف العدد المشتق $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2 - 2x} - 1}{x} = -2\ln 3$$

$$2y' + y = 1$$

$$2y' = -y + 1$$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$f(x) = y = ke^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = ke^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

حل المعادلة التفاضلية هو

بما أن ميل المماس في النقطة التي فصلتها 0 يساوي -2 أي $f'(0) = -2$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}ke^{-\frac{1}{2}x} \text{ لدينا}$$

$$k = 4 \text{ وبالتالي } -\frac{1}{2}ke^0 = -2$$

$$f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$\left(\begin{array}{l} e^x \cdot e^y = 3 \\ e^x - 3e^y = 8 \end{array} \right) \text{ تكافئ } \left(\begin{array}{l} e^{x+y} = 3 \\ e^x - 3e^y = 8 \end{array} \right) \text{ الجملة}$$

$$X \cdot Y = 3 \quad (1)$$

$$X - 3Y = 8 \quad (2) \text{ نفرض } X = e^x \text{ و } Y = e^y \text{ وبالتالي}$$

$$X = 3Y + 8 \text{ لدينا من (2)}$$

$$\text{نعوض في (1) فنجد } (3Y + 8) \cdot Y = 3$$

$$3Y^2 + 8Y - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4(3)(-3) = 64 + 36 = 100$$

$$y = -\ln 3 \text{ وبالتالي } e^y = \frac{1}{3} = e^{\ln \frac{1}{3}} = e^{-\ln 3} \text{ أي } Y_1 = \frac{-8 + 10}{2(3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x = \ln 9 = 2\ln 3 \text{ وبالتالي } e^x = 9 = e^{\ln 9} \text{ أي } X = 3Y + 8 = 3\left(\frac{1}{3}\right) + 8 = 1 + 8 = 9$$

$$e^y = -3 \text{ مرفوض } Y_2 = \frac{-8 - 10}{2(3)} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$(x, y) \in \{(2\ln 3, -\ln 3)\} \text{ وبالتالي حل الجملة}$$

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1}$$

(1) f معرف بشرط $e^x \neq 0$ أي $x \neq 0$ وبالتالي مجموعة تعريف التابع f هي:

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$(2) \quad -\infty \text{ مقارب أفقي في جوار } y = 3 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0-3}{0-1} = 3$$

$$+\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$-\infty \text{ مقارب شاقولي عند } x = 0 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$+\infty \text{ مقارب أفقي في جوار } y = 2 \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 1) - e^x(2e^x - 3)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2e^{2x} - 2e^x - 2e^{2x} + 3e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0 \text{ التابع } f \text{ متزايد تماماً}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$
$f(x)$	3	$+\infty$	2

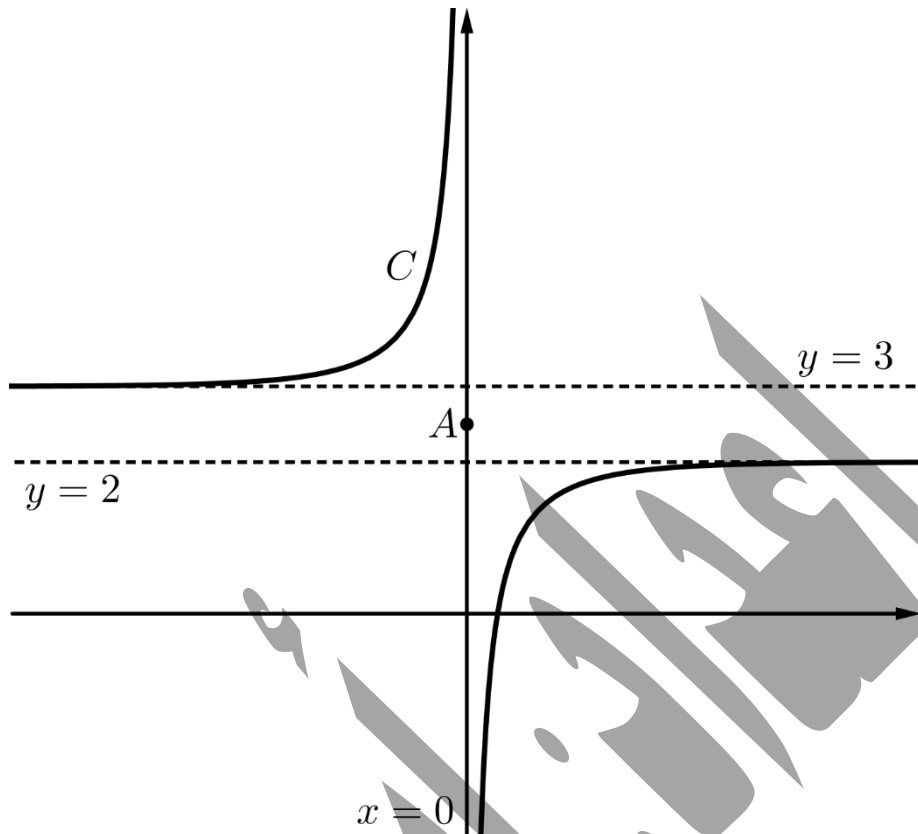
أيًا كان $h \in D_f = \mathbb{R}^*$ فإن $-h \in D_f = \mathbb{R}^*$

(3)

$$\frac{f(h) + f(-h)}{2} = \frac{\frac{2e^h - 3}{e^h - 1} + \frac{2e^{-h} - 3}{e^{-h} - 1}}{2} = \frac{\frac{2e^h - 3}{e^h - 1} + \frac{\frac{2}{e^h} - 3}{\frac{1}{e^h} - 1}}{2} = \frac{\frac{2e^h - 3}{e^h - 1} + \frac{2e^h - 3}{1 - e^h}}{2} = \frac{2e^h - 3}{e^h - 1} + \frac{2 - 3e^h}{1 - e^h}}{2}$$

$$\frac{f(h) + f(-h)}{2} = \frac{\frac{2e^h - 3}{e^h - 1} + \frac{2 - 3e^h}{1 - e^h}}{2} = \frac{\frac{2e^h - 3}{e^h - 1} + \frac{3e^h - 2}{e^h - 1}}{2} = \frac{5e^h - 5}{2(e^h - 1)} = \frac{5(e^h - 1)}{2(e^h - 1)} = \frac{5}{2}$$

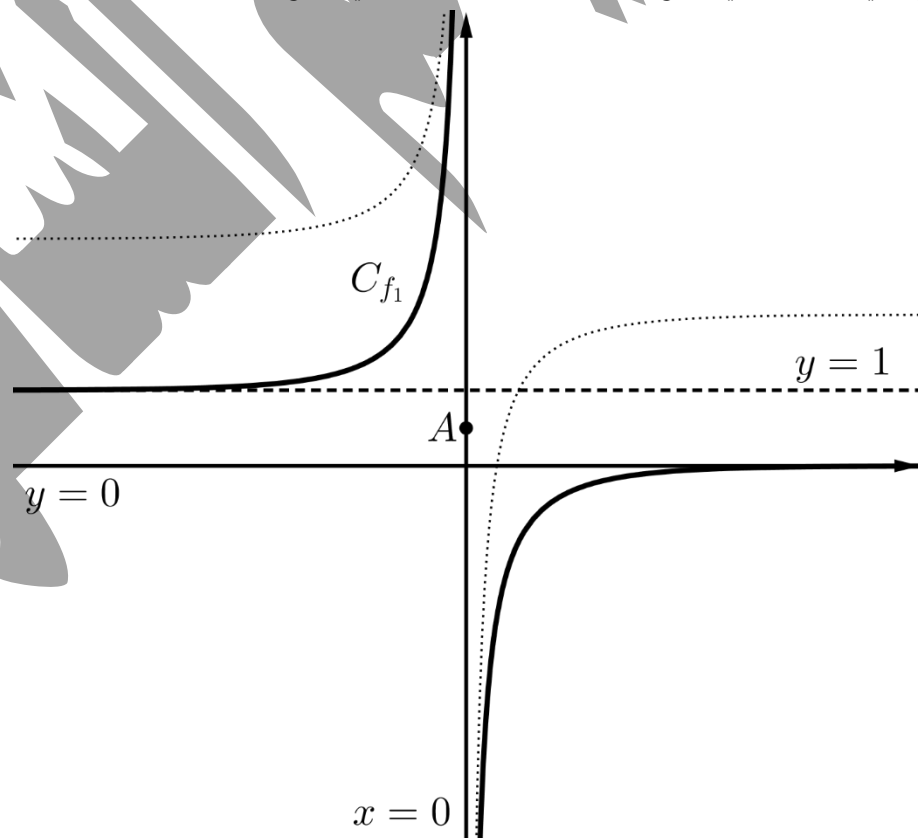
وبالتالي النقطة $I\left(0, \frac{5}{2}\right)$ مركز تناظر للخط البياني للتابع f .



$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 2 - 1}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 2}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x - 1} = 2 + f_1(x) \quad (5)$$

$$f_1(x) = f(x) - 2 \text{ أي}$$

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو انسحاب الخط البياني للتابع f بمقدار وحدتين للأسفل



$$u_n = f(n) = \frac{2e^n - 2}{e^n - 1} \text{ لدينا}$$

$$u_n \in]1.8, 2.2[$$

$$1.8 < u_n < 2.2$$

$$1.8 - 2 < u_n - 2 < 2.2 - 2$$

$$-0.2 < \frac{2e^n - 2}{e^n - 1} - 2 < 0.2$$

$$-0.2 < \frac{-1}{e^n - 1} < 0.2$$

$$\left| \frac{-1}{e^n - 1} \right| < 0.2$$

$$\frac{1}{e^n - 1} < \frac{2}{10}$$

$$\frac{1}{e^n - 1} < \frac{1}{5}$$

$$5 < e^n - 1$$

$$e^n > 6$$

$$n > \ln 6$$

$$n > \ln 3 + \ln 2 \approx 1.1 + 0.7 = 1.8$$

فإن أصغر عدد طبيعي n يحقق $u_n \in]1.8, 2.2[$ هو $n = 2$

$$g(x) = xe^x + 1 \quad (I)$$

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$g(-1) = -e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e} \text{ عندما } g'(x) = 0 \text{ فإن } x = -1 \text{ حيث } \frac{e-1}{e}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\frac{e-1}{e}$	

$$g(x) \geq \frac{e-1}{e} > 0 \text{ من جدول اطراد التابع } g \text{ نجد}$$

$$f(x) = e^x + \ln x \text{ و } D_f =]0, +\infty[\quad (I)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ وبالتالي } x = 0 \text{ مقارب شاقولي عند } -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x + 1}{x} = \frac{g(x)}{x} \quad (2)$$

لدينا سابقاً $g(x) > 0$ وعلى المجال $]0, +\infty[$ فإن $x > 0$ وبالتالي:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0 \text{ والتابع } f \text{ متزايد تماماً}$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$m \in f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[\text{ التابع مستمر ومتزايد تماماً و } [0, +\infty[\quad (3)$$

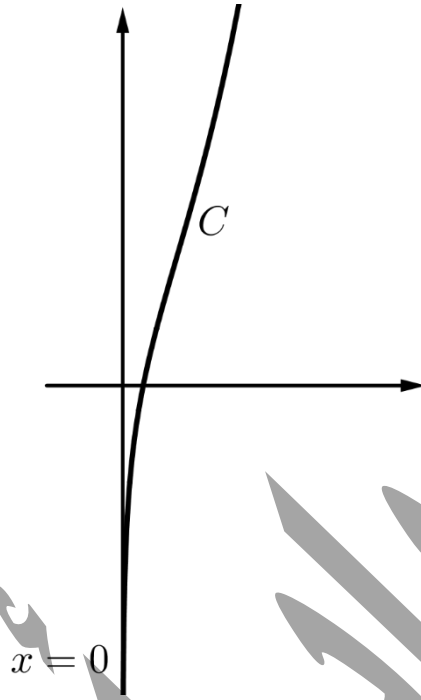
وبالتالي للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد أي كان العدد الحقيقي m .

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad (4)$$

$$T: y = (e+1)(x-1) + e$$

$$T: y = ex - e + x - 1 + e$$

$$T: y = ex + x - 1$$



لدينا $f(x) = e^x + \ln x$ و $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$ ومنه:

$$f' - f = e^x + \frac{1}{x} - e^x - \ln x$$

$$f' - f = \frac{1}{x} - \ln x$$

أي أن التابع f حل للمعادلة التفاضلية $y' - y = \frac{1}{x} - \ln x$

انتهى حل النموذج الثالث

التابع الأسّي

أولاً:

السؤال الأول:

$$4^{-x} + 2^{-x+1} \leq 3$$

$$(2^2)^{-x} + 2^{-x} \cdot 2 \leq 3$$

$$2^{-2x} + 2 \cdot 2^{-x} - 3 \leq 0$$

$$X^2 + 2X - 3 \leq 0 \text{ أي } X = 2^{-x} \text{ نفرض}$$

$$(X+3)(X-1) \leq 0$$

$$(2^{-x} + 3)(2^{-x} - 1) \leq 0$$

بما أن المقدار $2^{-x} + 3$ موجب تماماً فإن المتراجحة تكافئ:

$$2^{-x} - 1 \leq 0$$

$$2^{-x} \leq 1 = 2^0$$

$$-x \leq 0$$

$$x \geq 0$$

وبالتالي حل المتراجحة هو $x \in [0, +\infty[$

السؤال الثاني:

$$f(x) = (3-x)e^x$$

$$f'(x) = -e^x + e^x(3-x) = (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x$$

$$f''(x) = -e^x + e^x(2-x) = (-1+2-x)e^x = (1-x)e^x$$

عندما $f''(x) = 0$ فإن $x = 1$ وبالتالي معادلة المماس:

$$T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$T: y = e(x-1) + 2e$$

$$T: y = ex - e + 2e$$

$$T: y = ex + e$$

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 + \frac{n}{n+1} - 1 = 1 + \frac{n-n-1}{n+1} = 1 + \frac{-1}{n+1}$$

$$n = -\frac{1}{t} - 1 \text{ أي } n+1 = -\frac{1}{t} \text{ وبالتالي } t = \frac{-1}{n+1} \text{ نفرض}$$

عندما n تسعى إلى $+\infty$ فإن t تسعى إلى الصفر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}-1} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} \cdot (1+t)^{-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}} \cdot \frac{1}{1+t} = \frac{1}{e}$$

$2y' - y = -x^2 + x$ يحقق المعادلة التفاضلية $f(x) = ax^2 + bx + c$ من الشكل f

لدينا $f'(x) = 2ax + b$ نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد:

$$2(2ax + b) - (ax^2 + bx + c) = -x^2 + x$$

$$4ax + 2b - ax^2 - bx - c = -x^2 + x$$

$$-ax^2 + (4a - b)x + (2b - c) = -x^2 + x$$

$$-a = -1 \quad (1)$$

$$4a - b = 1 \quad (2) \text{ بالمطابقة نجد}$$

$$2b - c = 0 \quad (3)$$

$$\text{من (1) نجد } a = 1$$

$$\text{نعوض في (2) فنجد } 4 - b = 1 \text{ أي أن } b = 3$$

$$\text{نعوض في (3) فنجد } 6 - c = 0 \text{ أي أن } c = 6$$

وبالتالي التابع f يكتب بالشكل $f(x) = x^2 + 3x + 6$

$$f(x) = 27^x - 3^{x+1} \text{ و } D_f =]-\infty, +\infty[$$

$$f(x) = 27^x - 3^{x+1} = (3^3)^x - 3^x \cdot 3 = 3^{3x} - 3 \cdot 3^x = 3^x (3^{2x} - 3) \quad (1)$$

بما أن المقدار 3^x موجب تماماً فإن إشارة f من إشارة $3^{2x} - 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 3} (e^{2x \ln 3} - 3) = +\infty(+\infty - 3) = +\infty \quad (2)$$

$$-\infty \text{ مقارب أفقي في جوار } -\infty \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x \ln 27} - e^{(x+1) \ln 3}) = 0 - 0 = 0$$

الوضع النسبي: $f(x) - y_\Delta = 27^x - 3^{x+1} = 3^x (3^{2x} - 3)$

$$3^{2x} - 3 = 0$$

$$3^{2x} = 3^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta = 3^{2x} - 3$	-	0	+
الوضع النسبي	تحت المقارب C		فوق المقارب C

$$f(x) = e^{x \ln 27} - e^{(x+1) \ln 3} \text{ لدينا} \quad (3)$$

$$f'(x) = \ln 27 e^{x \ln 27} - \ln 3 e^{(x+1) \ln 3}$$

$$f'(x) = \ln 3^3 e^{x \ln 3^3} - \ln 3 e^{x \ln 3 + \ln 3}$$

$$f'(x) = 3 \ln 3 e^{3x \ln 3} - \ln 3 e^{x \ln 3} \cdot e^{\ln 3}$$

$$f'(x) = 3 \ln 3 e^{3x \ln 3} - 3 \ln 3 e^{x \ln 3}$$

$$f'(x) = 3 \ln 3 (e^{3x \ln 3} - e^{x \ln 3})$$

$$f'(x) = 3 \ln 3 (3^{3x} - 3^x)$$

$$f'(x) = 3 \ln 3 \cdot 3^x (3^{2x} - 1)$$

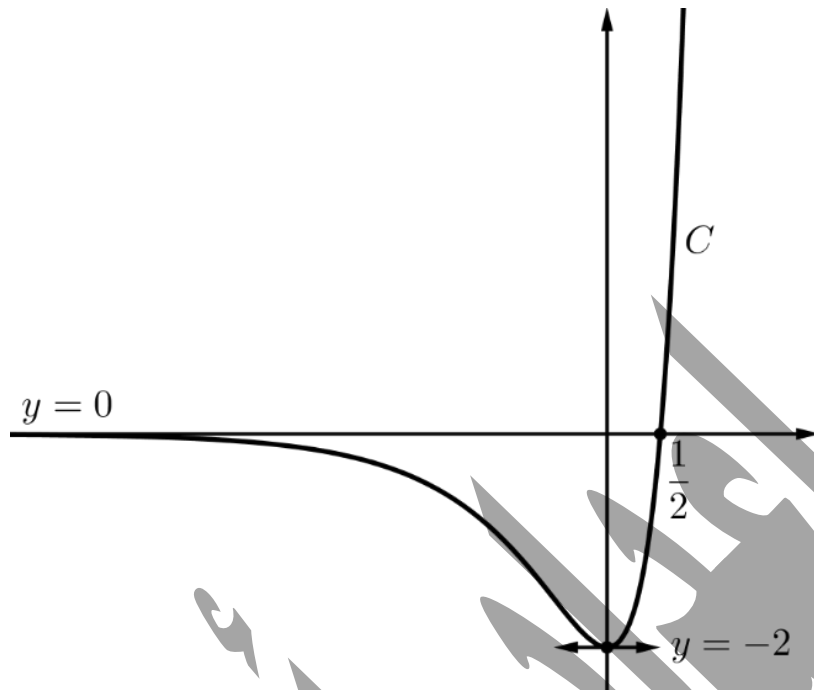
$$f'(x) = 3^{x+1} \ln 3 \cdot (3^{2x} - 1)$$

$$f(0) = 27^0 - 3^{0+1} = 1 - 3 = -2 \text{ حيث } x = 0 \text{ أي } 3^{2x} = 1 \text{ فإن } f'(x) = 0 \text{ عندما}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	\searrow -2	\nearrow +

$$f(0) = -2 \text{ قيمة حدية صغرى}$$

$$y = -2 \text{ المماس للخط } C \text{ في النقطة التي تعدم } f'(x) \text{ أفقي معادلته}$$



$$f(x) = m$$

ليس للمعادلة حل $m \in]-\infty, -2[$

للمعادلة حل وحيد $m = -2$

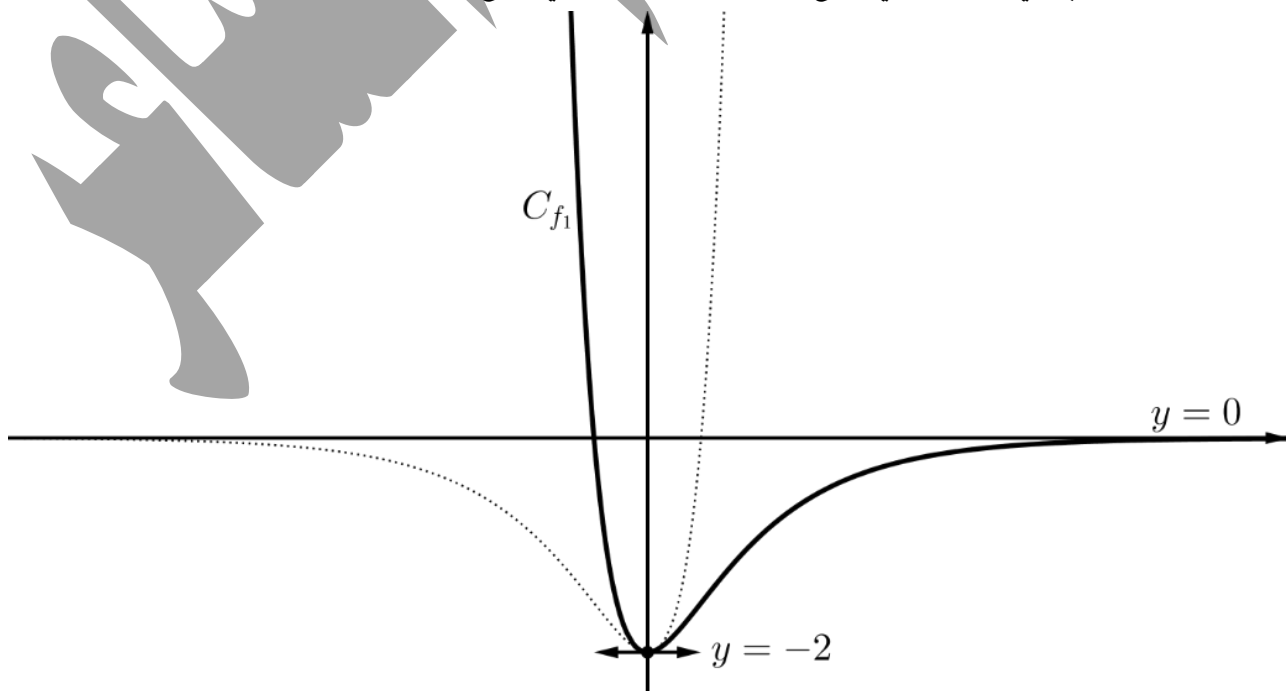
للمعادلة حلين مختلفين $m \in]-2, 0[$

للمعادلة حل وحيد $m \in [0, +\infty[$

$$f_1(x) = \frac{1 - 3^{2x+1}}{3^{3x}}$$

$$f(-x) = 27^{-x} - 3^{-x+1} = \frac{1}{27^x} - 3^{-x} \cdot 3 = \frac{1}{3^{3x}} - \frac{3}{3^x} = \frac{1 - 3 \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} = \frac{1 - 3^{2x+1}}{3^{3x}} = f_1(x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمحور الترتيب



$$g(x) = e^x - x \quad (I)$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

عندما $g'(x) = 0$ فإن $e^x = 1$ أي $x = 0$ حيث $g(0) = 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$		1	

من جدول اطراد g نجد أن $g(x) \geq 1 > 0$

$$f(x) = x + \frac{x+1}{e^x} \text{ و } D_f =]-\infty, +\infty[\quad (II)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{e^x - e^x(x+1)}{e^{2x}} = 1 + \frac{e^x(1-x-1)}{e^{2x}} = 1 - \frac{xe^x}{e^{2x}} = 1 - \frac{x}{e^x} = \frac{e^x - x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x} \quad (1)$$

بما أن $g(x) > 0$ و $e^x > 0$ فإن $f'(x) > 0$ والتابع f متزايد تماماً

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + \frac{-\infty}{0^+} = -\infty - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = +\infty + 0 + 0 = +\infty$$

وبالتالي جدول تغيرات التابع f هو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) = 0 \quad (2)$$

وبالتالي المستقيم $\Delta: y = x$ مقارب مائل للخط C

$$f(x) - y_\Delta = \frac{x+1}{e^x} \text{ الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق}$$

بما أن $e^x > 0$ فإن إشارة الفرق من إشارة $x+1$

عندما $x > -1$ فإن C فوق المقارب Δ

عندما $x < -1$ فإن C تحت المقارب Δ

(3) C يقبل مماساً يوازي المستقيم Δ إذا كان ميل المماس يساوي ميل المستقيم Δ أي:

$$f'(x) = 1$$

$$\frac{e^x - x}{e^x} = 1$$

$$e^x - x = e^x$$

$$x = 0 \text{ أي } -x = 0$$

وبالتالي C يقبل مماساً يوازي المستقيم Δ معادلته:

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) = x + 1$$

$$f(x) - y_T = x + \frac{x+1}{e^x} - x - 1 = \frac{x+1}{e^x} - 1 = \frac{x+1-e^x}{e^x} \text{ الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق}$$

وجدنا سابقاً أن $e^x - x \geq 1$ وبالتالي $x - e^x \leq -1$ أي $x + 1 - e^x \leq 0$

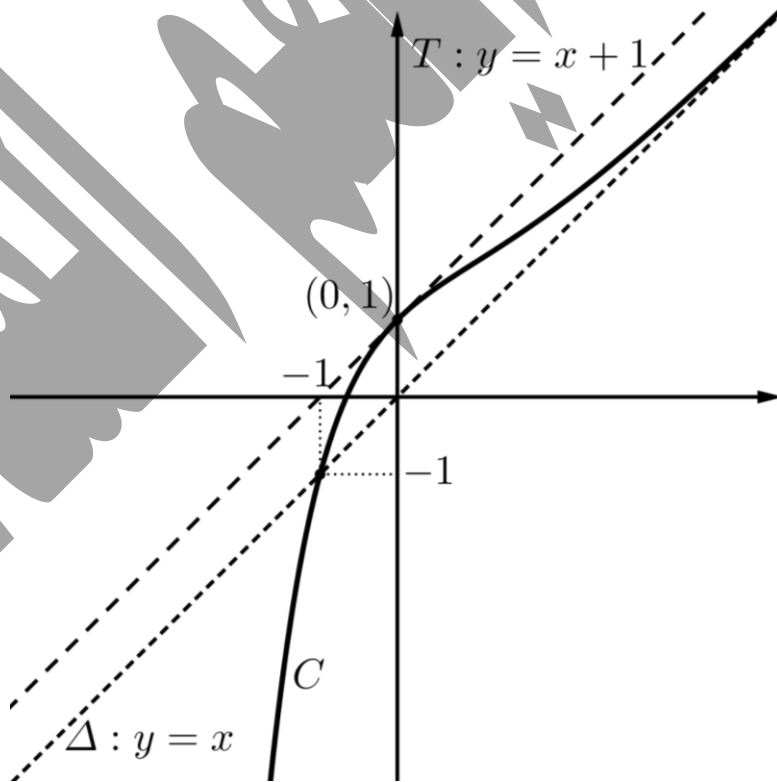
ولدينا $e^x > 0$ وبالتالي فإن:

$$T \text{ تحت المماس } C \text{ و } f(x) - y_T \leq 0$$

(4) على المجال $]-\infty, +\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $]-\infty, +\infty[= f(]-\infty, +\infty[)$

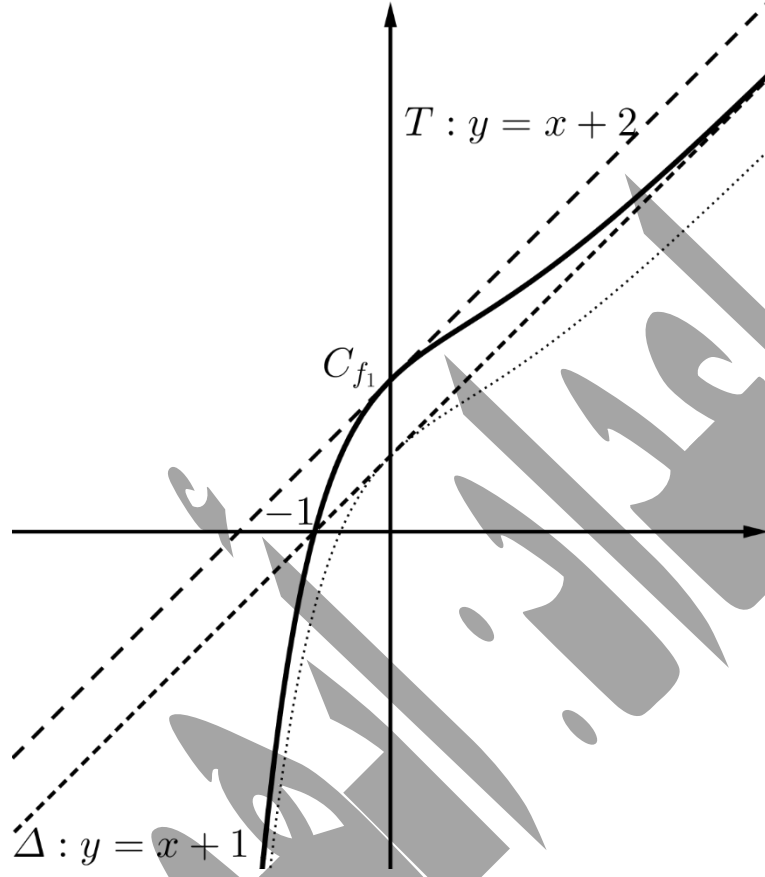
وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α

(5) بما أن $f(0) = 1 > 0$ و $f(-1) = -1 < 0$ فإن $-1 < \alpha < 0$



$$f_1(x) = \frac{(x+1)(e^x + 1)}{e^x} = \frac{(x+1)e^x}{e^x} + \frac{x+1}{e^x} = x+1 + \frac{x+1}{e^x} = f(x)+1 \quad (6)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع f_1 هو انسحاب الخط البياني للتابع f بمقدار واحد للأعلى



انتهى حل النموذج الرابع
التابع الأسّي