وزارة التربية والتعليم
Ministry of Education
المملكة العربية السعودية

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

قسم العلوم الطبيعية

الفصل الدراسي الأول

دليل المعلم

العبيكان
Obeikan

McGraw Hill Education

الطبعة المعدّلة
١٤٣٥ هـ - ٢٠١٤ م

قررت وزارة التربية والتعليم بالمملكة العربية السعودية
تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

يوزع مجاناً ولا يباع

الرياضيات
الصف الثالث الثانوي
قسم العلوم الطبيعية

Original Title:

Precalculus ©2011 & Algebra 2 ©2010

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
د. ناصر بن حمد العويشق
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان
أحمد مصطفى سمارة
عمر محمد أبوغليون
خلود عبدالحفيظ لوباني
أحمد محمود البشتاوي
هاني جميل زريقات

التعريب والتحرير اللغوي
نخبة من المتخصصين

إعداد الصور
د. سعود بن عبدالعزيز الفراج

www.macmillanmh.com
www.obeikaneducation.com

Education

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies. Inc. © 2008.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

أخي المعلم / أختي المعلمة

يسرنا أن نقدِّم دليل المعلم لمادة الرياضيات، آملين أن يكون لكم المرشد في تدريس المادة، والداعم في تقويم الطلاب، بما يحقق الأهداف المنشودة من تدريس الرياضيات.

ويشتمل هذا الدليل على الآتي:

أولاً: مقدمة حول السلسلة:

توضح هذه المقدمة كيفية بناء السلسلة علميًّا وتربويًّا، وتُبرز النقاط المحورية التي يركز عليها المنهج في هذا الصف، وفلسفة السلسلة المتوازنة أفقيًّا والمترابطة رأسيًّا، وأساليب التدريس المتَّبعة والمتنوعة في الدليل، وأنواع التقويم، وأدواته المقترحة، التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

ثانيًا: نظرة عامة على الفصل:

تمَّ توزيع المقرَّر إلى فصول، ويبدأ دليل المعلم في كل فصلٍ بتقديم نظرةٍ عامةٍ عليه تتضمن مخططًا للدروس وأهدافها، ومصادر تدريسها، والخطة الزمنية المقترحة للتدريس، ثم يقدّم الترابط الرأسي لموضوع الفصل خلال الصف والصفوف الأخرى. كما يقترح الدليل آليةً لتعلم مهارات الفصل من خلال مهارة الدراسة، ثم يقدم دعمًا للمعلم من خلال صفحة استهلال الفصل الموجودة في كتاب الطالب، وكيفية الاستفادة منها في تقديم موضوع الفصل، ثم يعرض مخططًا للتقويم بأنواعه المختلفة وأدواته المتعددة.

ثالثًا: الدروس:

يقدّم الدليل أنشطةً مقترحةً تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، وبأساليب تدريسٍ متنوعةٍ، تساعد المعلم على تدريس كل درسٍ، وبعد ذلك يعرض الدليل الدرس في خطواتٍ محددةٍ هي:

التركيز: يبيِّن ترابط المهارات الرئيسة قبل الدرس وفي أثنائه وبعده.

التدريس: يقدّم مقترحاتٍ للمعلم حول كيفية تدريس الدرس، تتضمن أسئلة تعزيز حواريةً وأنشطةً مقترحةً، ويُبرز المحتوى الرياضي لموضوع الدرس. كما يقدّم أمثلةً إضافيةً للمعلم.

التدريب: يتضمن تدريباتٍ متنوعةً تحقق أهداف الدرس بحسب مستويات الطلاب.

التقويم: يقدّم مقترحات لتقويم الدرس، كما يتضمن مقترحًا للمعلم للتأكد من مدى استيعاب الطلاب المفاهيم وإتقانهم المهارات المقدّمة في الدرس.

كما يقدّم الدليل في كل درس إجاباتٍ مفصّلةً لبعض الأسئلة والتمارين.

رابعًا: أساليب التقويم:

تقدّم السلسلة أساليب متنوعةً لتقويم الطلاب (التشخيصي والتكويني والختامي)، وآلياتٍ لمعالجة الأخطاء والصعوبات لدى الطلاب.

ونحن إذ نقدّم هذا الدليل لزملائنا المعلمين والمعلمات، لنأمل أن يحوز اهتمامهم، ويلبي متطلباتهم لتدريس هذا المقرَّر، ويساعدهم على أداء رسالتهم.

الفهرس

الفصل 1 تحليل الدوال

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفهرس

الفصل 3 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

أهلًا بك في عالم الرياضيات

دليل المعلم

منهج الرياضيات المترابط رأسيًّا
ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي

تقدم لك هذه السلسلة ثلاثة أبعاد للترابط الرأسي:

1 تصميم المحتوى

يعد الترابط الرأسي للمحتوى عمليةً مهمةً تساعد طلابك على التحقق من التسلسل الدقيق للمحتوى، وتتابعه من مستوى إلى آخر. وهذا يمنحك الثقة بأن المحتوى يتم تقديمه وتعزيزه وتقويمه في الأوقات المناسبة، كما يساعد على سدِّ الثغرات وتجنُّب التكرار غير المبرر، ممَّا يمكّنك من توجيه تدريسك وتكييفه ليتلاءم مع حاجات الطلاب.

2 تصميم التدريس

إن الترابط الرأسي القوي بين الأساليب التدريسية بدءًا من الصف الأول يُسهِّل على الطلاب الانتقال من المرحلة الابتدائية إلى المتوسطة، فالثانوية. إذ تعمل المفردات، والتقنيات والوسائل الحسية وخطة الدرس والمعالجة على التقليل من عوامل الصعوبة والتشويش التي يواجهها بعض الطلاب عندما ينتقلون عبر الصفوف المختلفة.

3 التصميم البصري

تشتمل صفحات السلسلة على تصاميم بصرية متسقة من صفٍّ إلى آخر، تساعد الطلاب على الانتقال من مرحلة إلى أخرى بسلاسةٍ، كما تزداد دافعيتهم للتعلم والنجاح عندما تكون طريقة التعامل مع هذه الصفحات مألوفةً لديهم.

المرحلة الابتدائية الأولية

المرحلة الابتدائية العليا

المفاتيح الخمسة للنجاح

1 الخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة

بينت نتائج البحوث أن ٨٠٪ من الطلبة الذين يظهرون نجاحًا في مجالي الجبر والهندسة في الصف العاشر يلتحقون بالكليات الجامعية ذات العلاقة، وينجحون. وبناءً على ذلك اهتمت السلسلة بالخرائط المفاهيمية للخبرات السابقة وطورتها.

2 المحتوى العميق المتوازن

تم تطوير السلسلة بحيث تركز على المهارات والموضوعات التي يواجه الطلاب صعوبات فيها؛ مثل حل المسألة في كل مستوى صفي.

الصفان 1 و 2	الصفوف 3-5
1) حل المسألة	1) حل المسألة
2) النقود	2) الكسور الاعتيادية
3) الزمن	3) القياس
4) القياس	4) الكسور العشرية
5) الكسور الاعتيادية	5) الزمن
6) الحساب	6) الجبر
الصفوف 6-8	**الصفوف 9-12**
1) الكسور الاعتيادية	1) حل المسألة
2) حل المسألة	2) الكسور الاعتيادية
3) القياس	3) الجبر
4) الجبر	4) الهندسة
5) الحساب	5) الحساب
	6) الاحتمالات

3 التقويم المستمر

تتضمن هذه السلسلة تقويماتٍ تشخيصيةً وتكوينيةً وختاميةً، وخططًا علاجيةً، وإثرائيةً.

4 المعالجة وتنويع التعليم

توفر السلسلة مصادر متنوعة تتضمن أنشطة وخططًا علاجية، وأخرى إثرائية وفقًا لنتائج الطلاب في التقويم التشخيصي.

المعالجة 1 **قبل بدء التدريس:** وتتضمن تعرف أخطاء الطلاب ومعالجتها؛ وذلك بمراجعة المفاهيم والمهارات المتعلقة بها، قبل الانتقال إلى تدريس المعرفة الجديدة.

المعالجة 2 **في أثناء التدريس:** وتتضمن استعمال بدائل واستراتيجيات متنوعة تناسب أنماط التعلم المختلفة لدى الطلاب.

5 التطوير المهني

توفر السلسلة فرصًا عديدة للمعلم ليطوّر أداءه مهنيًّا، بطرق تعليم إضافية؛ مثل: الفيديو، الرياضيات المحوسبة، المواقع الإلكترونية المترابطة ترابطًا رأسيًّا متكاملًا من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثاني عشر.

المرحلة المتوسطة

المرحلة الثانوية

فلسفة السلسلة

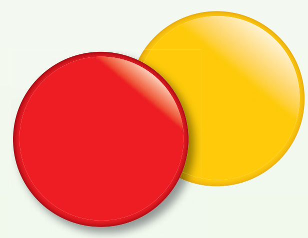
دليل المعلم

تعليم متوازن، ترابط رأسي بين الصفوف
من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي

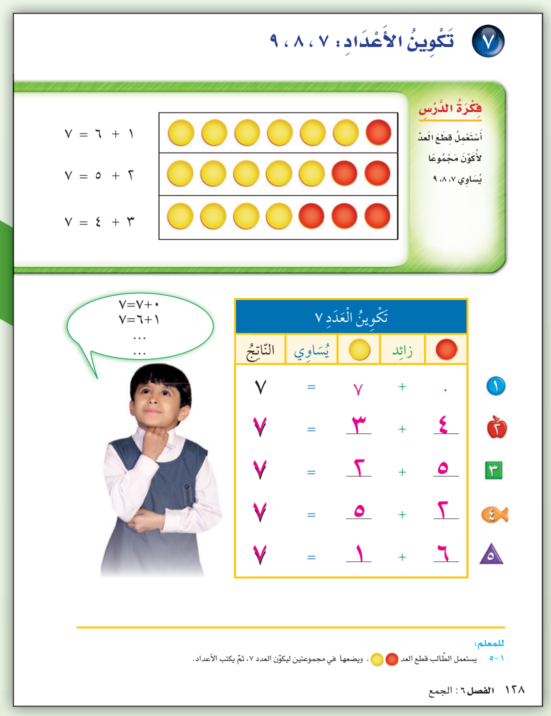
يظهر الترابط الرأسي لهذه السلسلة من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي دمجًا متوازنًا للتعليم. وتوفر هذه السلسلة للطلاب منحنًى متوازنًا للرياضيات من خلال:

- استقصاء المفاهيم وبناء فهم إدراكي.
- تطوير مهارات إجرائية وحسابية وتعزيزها وإتقانها.
- تطبيق الرياضيات في حل مسائل من واقع الحياة.

ويوضح تسلسل صفحات كتاب الطالب، تطوُّر الترابط الرأسي للفهم الإدراكي والمهارات الإجرائية والحسابية لموضوعٍ مهمٍ في الجبر.



يستعمل طلاب **المرحلة الابتدائية الأولية** قطع عدٍّ بلونين مختلفين؛ لتمثيل جمل الجمع. ويُعدُّ هذا النشاط أساسًا للفهم والنجاح في حل معادلاتٍ جبريةٍ.



٧ تَكْوِينُ الأَعْدَادِ: ٧ ، ٨ ، ٩

فِكْرَةُ الدَّرْسِ
أَسْتَعْمِلُ قِطَعَ العَدِّ لأُكَوِّنَ مَجْمُوعًا يُسَاوِي ٧، ٨، ٩

١ + ٦ = ٧
٢ + ٥ = ٧
٣ + ٤ = ٧

تَكْوِينُ الْعَدَدِ ٧

	(أحمر)	زائِد	(أصفر)	يُسَاوِي	النّاتِجُ
١	٠	+	٧	=	٧
٢	٤	+	٣	=	٧
٣	٥	+	٢	=	٧
٤	٢	+	٥	=	٧
٥	٦	+	١	=	٧

للمعلم:
١–٥ يستعمل الطّالب قطع العد، ويضعها في مجموعتين ليكوّن العدد ٧، ثمّ يكتب الأعداد.

١٢٨ **الفصل ٦** : الجمع

٦ - ١ القِسمةُ والكسورُ الاعتياديةُ

فِكْرَةُ الدَّرْسِ
أُمثِّلُ مَواقِفَ القِسمةِ بالكُسورِ الاعتياديةِ.

المُفْرَدَاتُ
الكسرُ الاعتياديُّ
البسطُ
المقامُ

www.obeikaneducation.com

اسْتَعِدَّ

وعاءٌ مملوءٌ بالحليبِ يكفِي لملءِ ثلاثةِ أكوابٍ. ما كميةُ الحليبِ التي ستوضعُ في كلِّ كوبٍ؟
يُمكنُ إيجادُ كمّيةِ الحليبِ في كلِّ كوبٍ بالقسمةِ.
نقسمُ وعاءً واحدًا على ثلاثةِ أكوابٍ.
١ ÷ ٣

الكَسرُ الاعتياديُّ يمثِّلُ أَجزاءً مُتساويةً مِن كُلٍّ أو من مَجموعةٍ، وتستعملُ الكُسورُ لِتمثيلِ القِسمةِ، فإذا قُسِمَ وعاءٌ واحدٌ من الحليبِ إلى ٣ أَجزاءٍ مُتساويةٍ، فسيكونُ في كلِّ كوبٍ $\frac{١}{٣}$ (ثلث) الوعاءِ.

$\frac{١}{٣}$ ← البسط ← المقام

البسْطُ هو العددُ العلويُّ في الكَسرِ، ويدلُّ على عددِ الأجزاءِ.
والمقامُ هو العددُ السُّفليُّ في الكَسرِ، ويدلُّ على عددِ أجزاءِ الكُلِّ.

مثالٌ مِن واقعِ الحياةِ — استعمالُ الكُسورِ

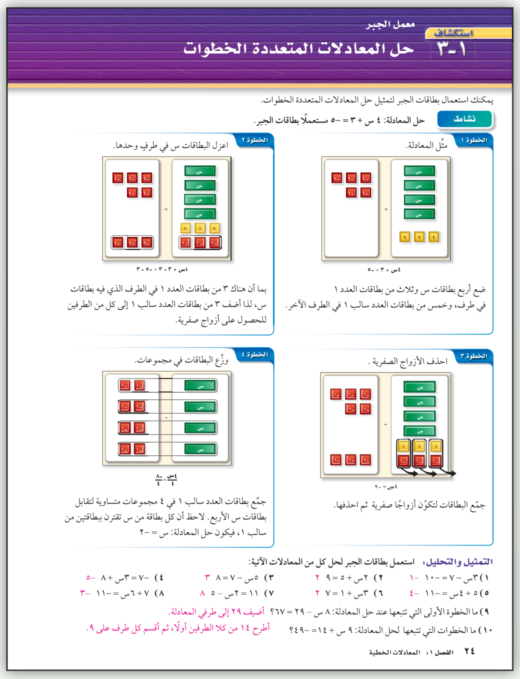
١ **طعامٌ:** يُريدُ تركي وسعودٌ وفهدٌ أَنْ يَتقاسَموا فَطيرتينِ بالتَّساوي، فكمْ سيكونُ نَصيبُ كُلٍّ مِنهُمُ؟

فَطيرتانِ تُقْسمانِ على ٣ أَشخاصٍ
٢ ÷ ٣

قسِّم كلَّ دائرةٍ إلى ثلاثةِ أجزاءٍ متساويةٍ، ثمَّ استعملِ الألوانَ لتوضِّحَ نصيبَ كلِّ واحدٍ منهُمُ.
إذنْ سيكونُ نصيبُ كلِّ واحدٍ منهُمُ $\frac{٢}{٣}$ (ثُلُثَي) الفَطيرةِ.

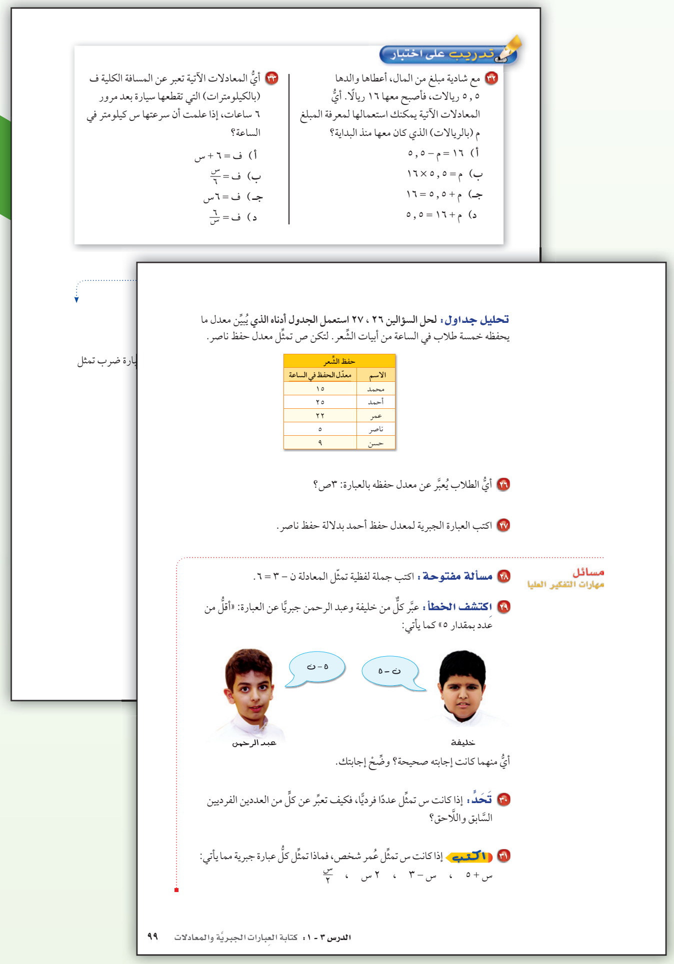
الدرس ٦-١ : القسمة والكسور الاعتيادية ١٨٣

أما طلاب **المرحلة الابتدائية العليا**؛ فيستفيدون من خبراتهم في التعامل مع الأكواب وقطع العد؛ لاستعمالها في تمثيل معادلات الجمع والطرح، وحلها.

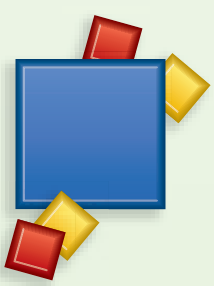


معمل الجبر
استكشاف
١-٣ حل المعادلات المتعددة الخطوات
يمكنك استعمال بطاقات الجبر لتمثيل حل المعادلات المتعددة الخطوات.
نشاط حل المعادلة: ٤ س + ٣ = −٥ مستعملًا بطاقات الجبر.
الخطوة ١ مثّل المعادلة.
الخطوة ٢ اعزل البطاقات س في طرفٍ وحدها.

وفي **المرحلة الثانوية** يستمر الطلبة في استعمال البطاقات؛ لاستكشاف حل المعادلات المتعددة الخطوات، ويطبقون الخطوات التي طوَّروها في معمل الجبر إلى رموز جبرية.



يتنقل طلاب **المرحلة المتوسطة** خلال التعامل مع الجبر، من استعمال الأكواب وقطع العد إلى استعمال نماذج جبرية أكثر تجريدًا، ويحلّ الطلاب في الدروس اللاحقة معادلاتٍ بسيطةً تحتوي على رموز جبرية.



استمرارية التعليم:

يوضّح التسلسل التعليمي الذي تمَّ وصفه قوّة المقابلة بين النتيجة المرغوب فيها والنجاح في الجبر. وتعمل هذه العملية التطويرية على تجنُّب وجود فجوات أو تداخلات بين مستويات الصفوف، وتؤكّد على أنّ مفاهيم كل صفٍّ ومهاراته مبنيَّة على أساس قوي تمَّ تطويره في صفوف سابقة، ويستعمل المنحى نفسه عبر المسارات جميعها ابتداءً من الصف الأول الابتدائي وحتى الصف الثالث الثانوي.

فلسفة السلسلة

توازن عملية التدريس

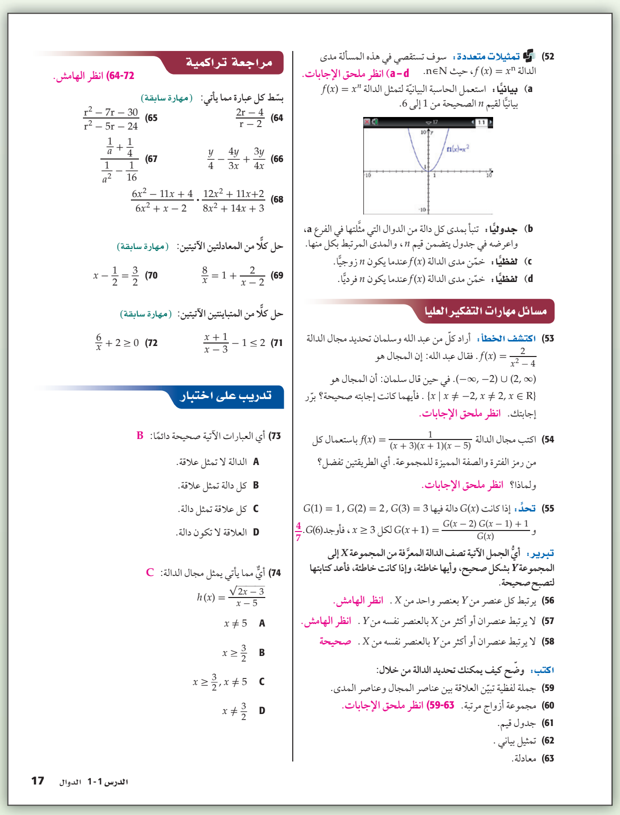
- مفاهيم
- مهارات
- حل مسائل

حل المسألة ذات العلاقة

تزوّد السلسلة الطلاب بخطط ملائمة لحل المسألة، ومهارات وتطبيقات عليها خلال الصفوف؛ إذ يتوافر لهم فرص مستمرة لتطبيق مهارات الرياضيات، وحل المسائل باستعمال التفكير البصري، والاستدلال المنطقي، والحس العددي، والجبر.

استراتيجيات حل المسألة

تساعد **استراتيجيات حل المسألة** الطلاب على تعلم طرائق مختلفة لمواجهة المسائل الكلامية.



مسائل مهارات التفكير العليا

تتطلب هذه المسائل **مهارات التفكير العليا** (التحليل، والتركيب، ... ، إلخ).

التمثيلات المتعددة

تساعد مسائل **التمثيلات المتعددة** الطلاب على تصوُّر المفاهيم وتعميق الفهم، وتتضمن: العبارات اللفظية والعددية والجبرية والتمثيل البياني والجداول ... إلخ.

معامل الحاسبة البيانية TI-nspire

توفر هذه المعامل للطلاب فرصة لفهم الرياضيات من خلال التمثيلات البيانية

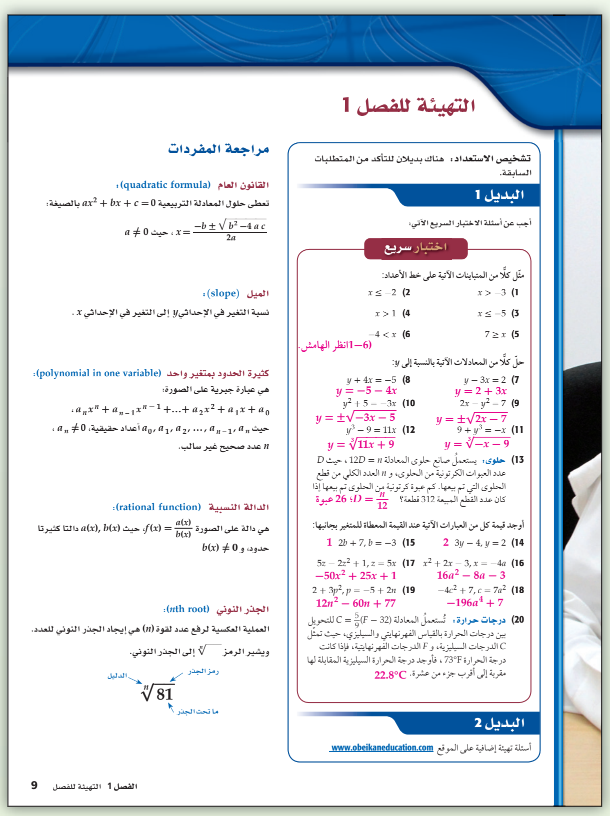
نظام التقويم الشامل

دليل المعلم

معالجة الأخطاء

توفر السلسلة تقويمًا صريحًا ذا معنى لمدى تقدم الطلاب في بنية المنهج وفي المواد المساندة التي يستعين بها المعلم.

1 التقويم التشخيصي



التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$ 2) $x \leq -2$

3) $x \leq -5$ 4) $x > 1$

5) $7 \geq x$ 6) $-4 < x$

(1–6) انظر الهامش.

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y - 3x = 2$ $y = 2 + 3x$

8) $y + 4x = -5$ $y = -5 - 4x$

9) $2x - y^2 = 7$ $y = \pm\sqrt{2x - 7}$

10) $y^2 + 5 = -3x$ $y = \pm\sqrt{-3x - 5}$

11) $9 + y^3 = -x$ $y = \sqrt[3]{-x - 9}$

12) $y^3 - 9 = 11x$ $y = \sqrt[3]{11x + 9}$

13) **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $n = 12D$ ، حيث D عدد العبوات الكرتونية من الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة كرتونية من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المبيعة 312 قطعة؟ $D = \frac{n}{12}$؛ 26 عبوة

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

14) $3y - 4, y = 2$ 2

15) $2b + 7, b = -3$ 1

16) $x^2 + 2x - 3, x = -4a$ $16a^2 - 8a - 3$

17) $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$ $-50x^2 + 25x + 1$

18) $-4c^2 + 7, c = 7a^2$ $-196a^4 + 7$

19) $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$ $12n^2 - 60n + 77$

20) **درجات حرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي، حيث تمثّل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة 73°F ، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. 22.8°C

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):
تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):
نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x .

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):
هي عبارة جبرية على الصورة:
$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ،
حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ،
n عدد صحيح غير سالب.

الدالة النسبية (rational function):
هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x), b(x)$ دالتا كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):
العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.
ويشير الرمز $\sqrt[n]{}$ إلى الجذر النوني.

$\sqrt[n]{81}$
رمز الجذر
الدليل
ما تحت الجذر

الفصل 1 التهيئة للفصل 9

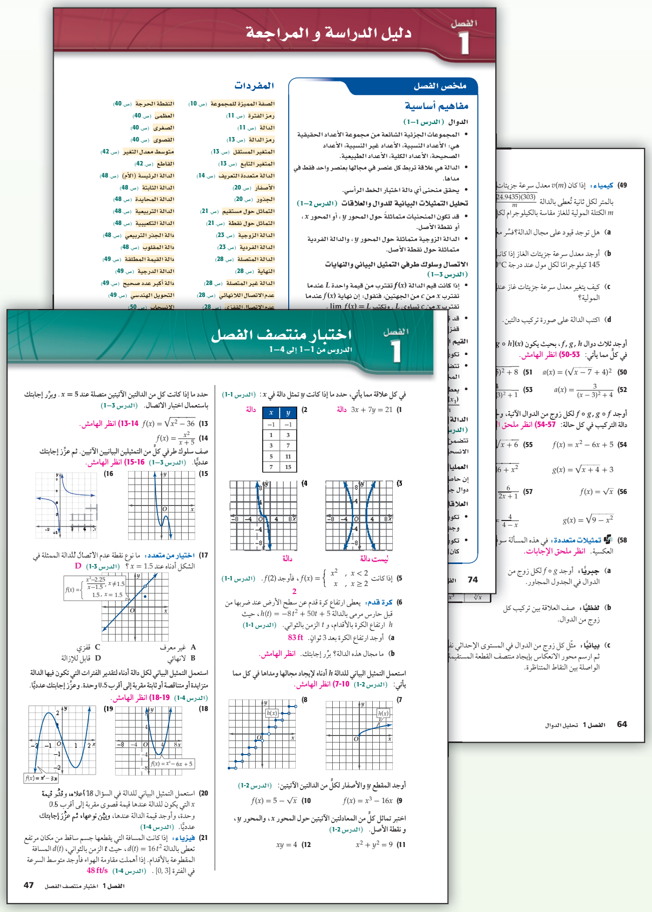
تقويم أوّلي: قوِّم معرفة طلابك في بداية العام الدراسي باستعمال اختبارات تشخيصية واختبارات تحديد المستوى. وسوف يساعدك هذا على تحديد مدى حاجة طلابك لمواد ومصادر تعلم إضافية ليكونوا قادرين على المواءمة مع معايير مستوى الصف.

تقويم مستوى المدخلات الدراسية: قوِّم المعارف السابقة لطلابك في بداية الفصل أو الدرس، من خلال:

كتاب الطالب:
- التهيئة
- فيما سبق، الآن، لماذا.

دليل المعلم:
- بدائل تنويع التعليم

دليل التقويم
- نموذج التوقع



2 التقويم التكويني

مراقبة التقدم: حدِّد ما إذا كان طلابك يحرزون تقدمًا مناسبًا في كل درس في أثناء تعلمهم أم لا، باستعمال أنواع التقويم الآتية لتنويع التدريس والتدريبات:

كتاب الطالب:
- تحقق من فهمك بعد كل مثال
- مسائل مهارات التفكير العليا (اكتشف الخطأ، اكتب)
- اختبار منتصف الفصل
- دليل الدراسة والمراجعة

دليل المعلم:
- بدائل تنويع التعليم
- الخطوة الرابعة (التقويم) في خطة التدريس
- معالجة الأخطاء

دليل التقويم:
- الاختبارات القصيرة
- اختبار منتصف الفصل

3 التقويم الختامي

التقويم الختامي: قوِّم مدى نجاح طلابك في تعلم مفاهيم كل فصل باستعمال ما يأتي:

كتاب الطالب:
- اختبار الفصل

دليل المعلم:
- معالجة الأخطاء

دليل التقويم:
- اختبار المفردات
- اختبار الفصل (نماذج متعددة)
- اختبار الإجابات المطولة
- اختبار تراكمي

تنويع التعليم

تلبية حاجات الطلاب:

توفر السلسلة دعمًا واسعًا يراعي الفروق الفردية بين الطلاب.

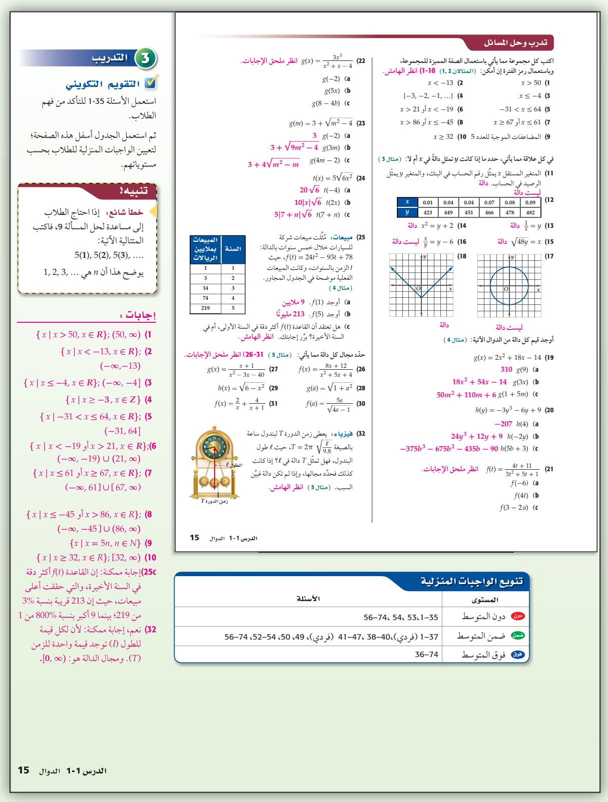
حيث يحتوي كل فصل وكل درس على اقتراحات لتحديد احتياجات طلابك وتلبيتها.

كما أن تنويع التعليم يلبي حاجات الفئتين الآتيتين :

- دون الطلاب دون المتوسط.
- فوق الطلاب فوق المتوسط.

الطلاب من المستوى المتقدم:

التسريع والإثراء: يمكن استعمال المصادر والواجبات المنزلية ، والتي تمَّ تصنيفها للطلاب فوق المتوسط، مع الطلاب ذوي المستوى التعليمي المتقدم.



مجموعات أسئلة متعددة المستويات:

تمّ تنويع الواجبات المنزلية لكل درس بحسب مستويات الطلاب:

- دون دون المتوسط
- ضمن ضمن المتوسط
- فوق فوق المتوسط

مصادر متعددة المستويات:

توفر السلسلة مصادر لكل درس بحسب مستويات الطلاب:

- دون دون المتوسط
- ضمن ضمن المتوسط
- فوق فوق المتوسط

المعالجة

معالجة متعددة المستويات :

يُقدَّم في كل فصل من فصول كتاب المعلم لمختلف الصفوف مدخل شامل للمعالجة.

التقويم والمعالجة

يتضمن كل فصل اقتراحات للتشخيص ومستويات المعالجة.

المعالجة 1 استعمال مجموعات أسئلة.

المعالجة 2 استعمال دليل الدراسة والمراجعة، وبدائل تنويع التعليم.

في بداية كل فصل

يقدم مخطط المعالجة اقتراحات لطرائق التعامل مع الطلاب بناءً على نتائج اختبار "التهيئة" في بداية كل فصل، وتساعدك العبارات الشرطية التي يتضمنها المخطط على تحديد مستوى المعالجة الذي تستعمله.

خلال كل درس

توفر السلسلة فرصًا متعددة للتقويم التكويني في كل فصل؛ ليحدد المعلم ما إذا كانت هناك ضرورة للمعالجة بناءً على نتائج الطلاب أم لا.

ما بعد الفصل

توفر السلسلة بدائل متعددة للطلاب الذين لا يزالون يعانون من صعوبات بعد إنهاء الفصل، تساعدهم على تحسين مستوياتهم.

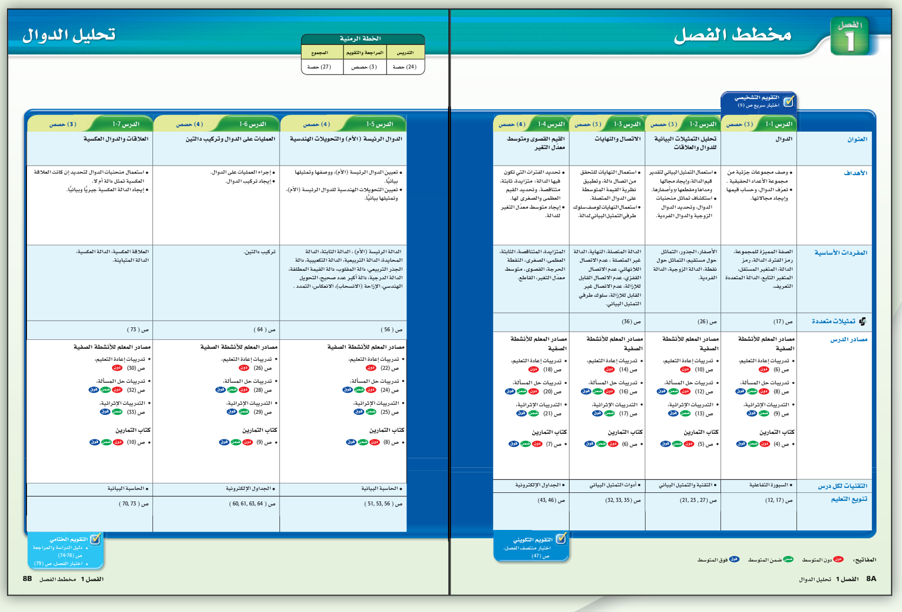
تدريبات إعادة التعليم

عزز المهارات الضرورية من خلال تدريبات إعادة التعليم بأسلوب تدريسي ومعالجة يختلفان عن كتاب الطالب وكتاب التمارين.

التخطيط للنجاح

سهولة الاستعمال:

تتميّز السلسلة بأنها نموذج تعليم قوي يشتمل على بدائل تنويع التعليم، وإعادة التعليم والتعزيز، وبدائل للتوسع، وإرشادات للمعلم تساعده على تعرّف مستويات الطلاب، كما يشتمل على نشاطات قبلية متقدمة، وتقويم مصاحب للتعليم.



تخطيط ملائم للدرس في متناول اليد:

يساعدك مخطط الفصل على التخطيط للتعليم، من خلال توضيح الأهداف والخطة الزمنية المقترحة، والتغطية الشاملة للأفكار المحورية.

الترابط الرأسي (بين الفصول):

بُنيت الموضوعات الدراسية على المفاهيم والمهارات السابقة للصف المعني، وتؤسس لموضوعات مستقبلية.

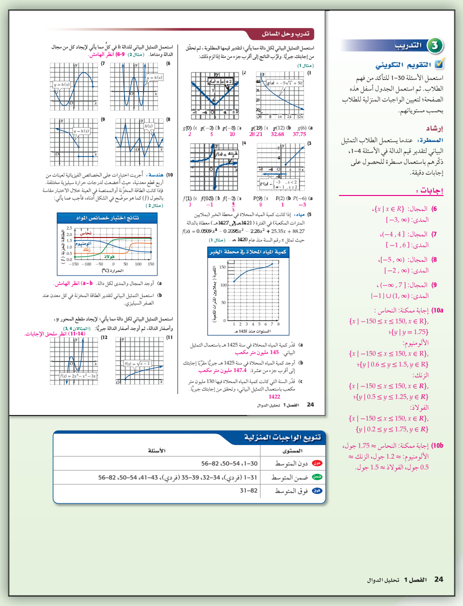
خطة الخطوات الأربع في التعليم:

تنظم خطة الخطوات الأربعة تدريسك وتتضمن:

1 التركيز
2 التدريس
3 التدريب
4 التقويم

الترابط الرأسي (بين الدروس):

يوضح **الترابط الرأسي** في بداية كل درس الأهداف التي تؤدي إلى محتوى الدرس الحالي والأهداف التي تتبعه، والذي يأتي في إطار وثيقة المدى والتتابع من الصف الأول الابتدائي إلى الصف الثالث الثانوي.

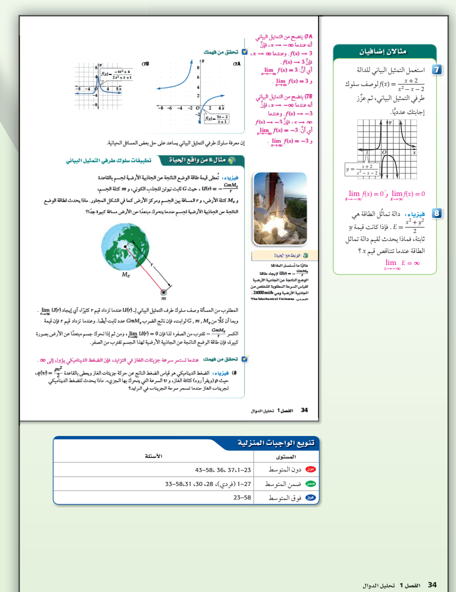


أسئلة التعزيز:

يحتوي كل درس على **أسئلة التعزيز** لمساعدة الطلاب في استقصاء الأفكار الرئيسة للدرس وفهمها.

أمثلة إضافية:

يعدُّ كل **مثال إضافي** انعكاسًا لمثالٍ في كتاب الطالب.



بدائل تنويع الواجبات المنزلية:

بما أن معظم الصفوف تشمل طلابًا ذوي قدرات مختلفة، فإن بدائل **تنويع الواجبات المنزلية** يسمح لك بتعديل أسئلة الواجب المنزلي.

نشاطات تقويمية:

توفر نشاطات **التقويم التكويني** طرائق بديلة لتحديد استيعاب الطلاب في نهاية كل درس؛ مثل:

- **التعلم السابق:** يربط الطلاب ما تعلموه في الدرس الحالي بما تعلموه سابقًا.
- **التعلم اللاحق:** يخمّن الطلاب كيفية ارتباط الدرس الحالي بالدرس التالي.
- **فهم الرياضيات:** يذكر الطلاب الرياضيات المستعملة في المسألة.
- **بطاقة المكافأة:** يجب على الطلاب أن يُجيبوا عن السؤال المطلوب، ويسلِّموا الإجابة للمعلم قبل مغادرة الصف.

إعداد الطلاب للدراسة الجامعية وسوق العمل

تعمل هذه السلسلة على الربط بين ما يتعلمه الطلاب في المدرسة الثانوية، وما يُتوقَّع منهم أن يعرفوه عند بدء دراستهم الجامعية.

كيف يمكن إعداد الطلاب للدراسة الجامعية بصورة أفضل؟

إن المنهج القوي في المرحلة الثانوية مؤشر جيد على الاستعداد للدراسة الجامعية. فالطلاب الذين يدرسون كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة يكونون أكثر استعدادًا للدراسة الجامعية.

وفيما يأتي بعض مناحي الاستعداد للدراسة الجامعية التي طوَّرها:
David Conley at the University of Oregon

- **مهارات عقلية:** وهي مهارات ضرورية لتعلم المحتوى على المستوى الجامعي، وتشمل: التفكير الناقد، حل المسألة، التبرير، وتتاح في كل يوم للطلاب الذين يدرسون هذه السلسلة فرصٌ لتنمية **مهارات التفكير العليا**، من خلال المسائل الخاصة بذلك.

- **المحتوى العلمي:** إن كتب المرحلة الثانوية من هذه السلسلة متَّسقة مع معايير عالمية دقيقة تشمل معايير NCTM للرياضيات المدرسية وغيرها.

- **مهارات عامة:** تشمل مهارات مثل، الاستيعاب القرائي، وإدارة الوقت، وتسجيل الملاحظات، ... إلخ. وتوفر هذه السلسلة فرصًا لتنمية هذه المهارات من خلال إرشادات **قراءة الرياضيات** و**روابط المفردات**، ودليل التوقع وغيرها.

ماذا عن الطلاب الذين لا يخططون للالتحاق بالجامعات؟

لم تعد الرياضيات في عالم التقنية المعاصر مقتصرةً على الطلاب الذين يلتحقون بالجامعات، فقد أظهرت إحدى الدراسات أن البرامج التدريبية التي يخضع لها شخص يريد الحصول على عمل تتطلب أن يكون هذا الشخص على مستوى معين من التعليم في الجبر والهندسة وتحليل البيانات والإحصاء يماثل مستوى الطالب الذي يلتحق بالسنة الأولى في الجامعة؛ حتى ينجح في عمله.

ملحوظات المعلم

الفصل 1 مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (9)

	الدرس 1-1 (3) حصص	الدرس 1-2 (3) حصص	الدرس 1-3 (3) حصص	الدرس 1-4 (4) حصص
العنوان	**الدوال**	**تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات**	**الاتصال والنهايات**	**القيم القصوى ومتوسط معدّل التغير**
الأهداف	• وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية . • تعرّف الدوال، وحساب قيمها وإيجاد مجالاتها.	• استعمال التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها ومداها ومقطعها y وأصفارها. • استكشاف تماثل منحنيات الدوال، وتحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية.	• استعمال النهايات للتحقق من اتصال دالة، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة. • استعمال النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.	• تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وتحديد القيم العظمى والصغرى لها. • إيجاد متوسط معدّل التغير للدالة.
المفردات الأساسية	الصفة المميزة للمجموعة، رمز الفترة، الدالة، رمز الدالة، المتغير المستقل، المتغير التابع، الدالة المتعددة التعريف.	الأصفار، الجذور، التماثل حول مستقيم، التماثل حول نقطة، الدالة الزوجية، الدالة الفردية.	الدالة المتصلة، النهاية، الدالة غير المتصلة ، عدم الاتصال اللانهائي، عدم الاتصال القفزي، عدم الاتصال القابل للإزالة، عدم الاتصال غير القابل للإزالة، سلوك طرفي التمثيل البياني.	المتزايدة، المتناقصة، الثابتة، العظمى، الصغرى، النقطة الحرجة، القصوى، متوسط معدّل التغير، القاطع.
تمثيلات متعددة	ص (17)	ص (26)	ص (36)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (4) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (5) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (14) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (6) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (18) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (7) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• السبورة التفاعلية	• التقنية والتمثيل البياني	• أدوات التمثيل البياني	• الجداول الإلكترونية
تنويع التعلم	ص (12, 17)	ص (21, 23 , 27)	ص (32, 33, 35)	ص (43, 46)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل، ص (47)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تحليل الدوال

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(24) حصة	(3) حصص	(27) حصة

الدرس 1-5 (4) حصص	الدرس 1-6 (4) حصص	الدرس 1-7 (3) حصص
الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية	**العمليات على الدوال وتركيب دالتين**	**العلاقات والدوال العكسية**
• تعيين الدوال الرئيسة (الأم)، ووصفها وتمثيلها بيانيًا. • تعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)، وتمثيلها بيانيًا.	• إجراء العمليات على الدوال. • إيجاد تركيب الدوال.	• استعمال منحنيات الدوال لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثل دالة أم لا. • إيجاد الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.
الدالة الرئيسة (الأم) ، الدالة الثابتة، الدالة المحايدة، الدالة التربيعية، الدالة التكعيبية، دالة الجذر التربيعي، دالة المقلوب، دالة القيمة المطلقة، الدالة الدرجية، دالة أكبر عدد صحيح، التحويل الهندسي، الإزاحة (الانسحاب)، الانعكاس، التمدد .	تركيب دالتين.	العلاقة العكسية، الدالة العكسية، الدالة المتباينة.
ص (56)	ص (64)	ص (73)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (22) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (8) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات حل المسألة، ص (28) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (29) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (9) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (30) دون • تدريبات حل المسألة، ص (32) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (33) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (10) دون ضمن فوق
• الحاسبة البيانية	• الجداول الإلكترونية	• الحاسبة البيانية
ص (51, 53, 56)	ص (60, 61, 63, 64)	ص (70, 73)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (74-78)
- اختبار الفصل، ص (79)

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 1**	
	التهيئة للفصل 1 ، ص (9)	مخطط المعالجة، ص (9)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (11, 12) www.obeikaneducation.com	تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1 www.obeikaneducation.com
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (47) اختبار منتصف الفصل، ص (13) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1 www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (74-78) اختبار الفصل، ص (79) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1 www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 1**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (15, 17, 19) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (21) اختبار المفردات ، ص (14) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (23) اختبار تراكمي ، ص (24) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 1 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب   دليل المعلم   مصادر المعلم للأنشطة الصفية   دليل التقويم   شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

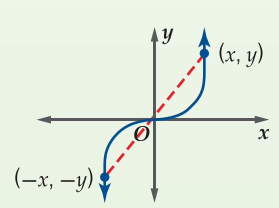
المتعلمون اللغويون: اطلب إلى الطلاب اختيار مناطق سياحية لزيارتها في رحلة مدرسية. وأعطهم وقتًا بين 10–5 دقائق لكتابة مخطط للرحلة. ثم اطلب إليهم تعيين دوال ترتبط بكل نشاط خلال الرحلة؛ فمثلًا إذا اقترحوا استعمال أنابيب للتنفس تحت الماء، فإن تكلفة هذه الأنابيب يمكن تمثيلها على صورة دالة في الزمن. واطلب إليهم تعيين الدالة جبريًّا وتمثيلها بيانيًّا.

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية للقيام بألعاب تعتمد على الأشكال في الرياضيات. واطلب إلى كل مجموعة كتابة أربع دوال يتضمن كل منها عمليات: الجمع والطرح والضرب والقسمة على بطاقات مرقمة. وكذلك كتابة مجال الدالة، أصفارها، سلوك طرفي التمثيل البياني، نقاط عدم الاتصال. الدالة الرئيسة (الأم) والدالة العكسية. اجمع البطاقات ثم اخلطها بشكل عشوائي. ثم تختار كل مجموعة بطاقة عشوائيًّا، يحاول الطلاب الإجابة عن المسائل جميعها قبل أن يقوم المعلم بتعليق الأشكال على السبورة.

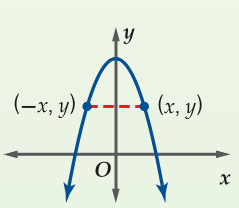
البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية. ثم اكتب ثلاث دوال أو أكثر على السبورة على أن يكون من بينها دالة زوجية ودالة فردية على الأقل. واطلب إلى كل طالب تمثيل الدالة نفسها مرتين ، ثم وضع إحدى النسختين فوق الأخرى؛ ليختبر إن كانت الدالة زوجية أم فردية أو ليست زوجية وليست فردية. واطلب إليهم قلب النسخة العلوية حول المحور y ، فإذا كانت متماثلة حول المحور y تكون الدالة زوجية. ثم اطلب إليهم إعادة الشكلين إلى وضعهما الأصلي، وتدوير النسخة العلوية حول نقطة الأصل؛ للتأكد إن كانت الدالة متماثلة حول نقطة الأصل؛ فعندئذٍ تكون الدالة فردية.

دالة فردية



دالة زوجية



البديل 3 فوق المتوسط فوق

قسّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، واطلب إلى كل مجموعة إعداد خطة درس لطلاب السنة القادمة تعالج مفهومًا رياضيًّا يعدّ تحدّيًا لهم. يتضمن كل درس ما يأتي:

- مقدمة للمفهوم تتضمن رؤية وأفكارًا لاستعمال التقنيات.
- عدة أمثلة تؤدي إلى معالجة المفهوم بصورة شاملة.
- لعبة أو نشاطًا.

الفصل 1

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 1

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تعيين مجموعات جزئية مختلفة من الأعداد.
- تمثيل المعادلات بيانيًا.
- دراسة أنواع مختلفة من المعادلات وتمثيلاتها البيانية.
- تعيين الخصائص الأساسية للمنحنيات مثل المقاطع (y) والقيم القصوى والأصفار.

الفصل 1

- تعيين دوال وتحديد المجال والمدى والمقاطع y والأصفار لها.
- دراسة الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات والقيم القصوى لدالة.
- حساب معدلات التغير لدوال غير خطية.
- تعيين الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية.
- إجراء عمليات على الدوال وتعيين دالة التركيب وإيجاد الدالة العكسية.

ما بعد الفصل 1

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- دراسة معدل التغير عند نقطة على منحنى الدالة.
- دراسة اختلاف معدل التغير عندما تتحرك نقطة على منحنى الدالة.

نظرة على الدروس

1-1 الدوال

مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها. يمكن وصف المجال باستعمال الصفة المميزة للمجموعة أو رمز الفترة. والمجال الذي يمكن وصفه بالصفة المميزة للمجموعة قد يكون مجموعة الأعداد الحقيقية R ، أو مجموعة الأعداد الصحيحة Z ، أو مجموعة الأعداد الطبيعية N.

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

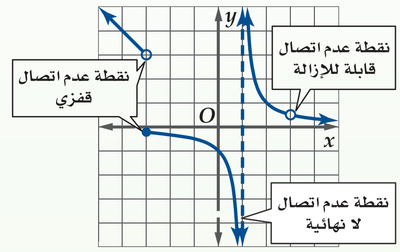
يُظهر التمثيل البياني للدوال أو العلاقات خصائص مهمة تتضمن ما يأتي:

- المجال: مجموعة القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير المستقل.
- المدى: مجموعة قيم المتغير التابع.
- المقطع y : النقطة / النقاط التي يقطع المنحنى عندها المحور y .
- الأصفار: النقطة / النقاط التي يقطع المنحنى عندها المحور x .
- الدوال الزوجية : دوال متماثلة حول المحور y .
- الدوال الفردية: دوال متماثلة حول نقطة الأصل.
- محور التماثل: المستقيم الذي إذا طُوي جزآ المنحنى حوله فإنهما يتطابقان تمامًا.
- نقطة التماثل: النقطة التي إذا دار المنحنى حولها بزاوية قياسها 180° يظهر المنحنى وكأنه لم يتغير.

تحليل الدوال

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

نهاية الدالة هي قيمة y عندما يقترب x عن اليمين واليسار من قيمة محددة. وتزودنا النهايات بمعلومات حول الاتصال، والشكل الآتي يوضح أنماط عدم الاتصال المختلفة.



- عدم اتصال لا نهائي: تقترب النهاية من المالانهاية.
- عدم اتصال قفزي: تختلف النهاية من اليمين عنها من اليسار.
- عدم اتصال قابل للإزالة: تكون الدالة متصلة عدا نقاط محددة.

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدّل التغير

يوفر التمثيل البياني طريقة سريعة لفهم العلاقة بين متغيرات مختلفة، وهذا يتضمن إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية والمطلقة ، وعند هذه النقاط تتغير العلاقة بين المتغيرين من تزايد إلى تناقص أو من تناقص إلى تزايد.

إضافة إلى ذلك، فإن متوسط معدّل التغير بين نقطتين هو ميل القاطع المار بهما.

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

يمكن تحويل الدوال الرئيسة (الأم) بسحبها إلى الأعلى أو إلى الأسفل، أو إلى اليسار أو إلى اليمين ، كما يمكن إيجاد صورة الدالة بالانعكاس حول المحور x وتوسع الدالة أو تضيّقها. بالنسبة للدالة $g(x) = af[(bx + c)] + d$ ، تمثل a التوسع أو التضيق الرأسي، وتمثل b التضيق أو التوسع الأفقي، كما تمثل c الانسحاب إلى اليسار أو إلى اليمين، وتمثل d الانسحاب إلى الأعلى أو إلى الأسفل، وتحدد إشارة a ما إذا كان منحنى الدالة ينعكس حول المحور x أم لا.

وتتضمن الدالة الرئيسة (الأم) في هذا الدرس الدوال الآتية: الثابتة، المحايدة، التربيعية، التكعيبية، دالة المقلوب، القيمة المطلقة وأكبر عدد صحيح.

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تُجرى عمليات حسابية على الدوال كما هو الحال على الأعداد ، حيث يمكن جمع الدوال وطرحها وضربها. ويمكن قسمة الدوال شريطة ألّا يكون المقام صفرًا.

كما يمكن إجراء عملية تركيب الدوال، حيث تستعمل العناصر من مدى الدالة الأولى (قيم y) كعناصر لمجال الدالة الثانية (قيم x)؛ فمثلًا إذا كان:

$f(x) = 2x + 1, g(x) = x - 1$ فإن:

$[f \circ g](x) = f(g(x)) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

1-7 العلاقات والدوال العكسية

منحنى الدالة العكسية هو انعكاس لمنحنى الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$ ، ويكون معكوس الدالة نفسه دالة إذا حققت الدالة الأصلية اختبار الخط الأفقي.

يمكن إيجاد الدالة العكسية جبريًّا على النحو الآتي:

- كتابة الدالة كمعادلة.
- استبدال المتغير x بالمتغير y في المعادلة.
- حل المعادلة بالنسبة إلى y .
- تعويض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y .

مشروع الفصل

أسلوب العمل

يستعمل الطلاب ما تعلموه لإيجاد قيم الدوال.

- اطلب إليهم اختيار دالة من اهتماماتهم؛ فمثلًا، يهتم الطلاب بكرة القدم، لذا بإمكانهم رصد عدد الأهداف التي سُجِّلت عبر الزمن خلال موسم كروي.
- عندما يقرر الطلاب ماهية الدالة التي سوف يكتبونها، اطلب إليهم جمع البيانات اللازمة لكتابة قاعدتها.
- اطلب إلى الطلاب تمثيل الدالة وتحديد مجالها، مداها، قيمها القصوى، مقطع المحور y لها ، وأصفارها. واطلب إليهم كتابة المعاني العملية لهذه القيم.
- اطلب إلى الطلاب إيجاد الدالة العكسية الخاصة بدالة كل منهم إن وجدت، وكتابة فائدتها. ثم تحديد مجال الدالة العكسية ومناقشة دلالتها في سياق المسألة.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: يقال لعلاقتين بأنهما متعاكستان، إذا وفقط إذا كان كل زوج (b, a) ينتمي إلى إحدى العلاقتين فإن (a, b) ينتمي إلى العلاقة الأخرى.

مثال: العلاقة العكسية لِـ $f(x) = x^2 + 1$ هي $y = \pm\sqrt{x - 1}$

سؤال: ما العلاقة بين منحنى دالة ومنحنى الدالة العكسية لها؟ منحنى الدالة ومنحنى الدالة العكسية لها متماثلان حول المستقيم $y = x$.

الفصل 1

تحليل الدوال
Analyzing Functions

فيما سبق:

درستُ الدوال وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أستكشف تماثل منحنيات الدوال.
- أبحثُ الاتصال وأجدُ متوسط معدل تغير دالة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.
- أجدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

لماذا؟

إدارة أعمال: تُستعملُ الدوالُ في عالم الأعمال والتجارة لتحليل التكلفة، والتنبُّؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، وتوقُّع التكاليف، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... إلخ.

قراءة سابقة: كوِّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

8 الفصل 1 تحليل الدوال

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة، ثم قراءة متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$ 2) $x \le -2$

3) $x \le -5$ 4) $x > 1$

5) $7 \ge x$ 6) $-4 < x$

(1–6) انظر الهامش.

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y - 3x = 2$ **$y = 2 + 3x$**

8) $y + 4x = -5$ **$y = -5 - 4x$**

9) $2x - y^2 = 7$ **$y = \pm\sqrt{2x - 7}$**

10) $y^2 + 5 = -3x$ **$y = \pm\sqrt{-3x - 5}$**

11) $9 + y^3 = -x$ **$y = \sqrt[3]{-x - 9}$**

12) $y^3 - 9 = 11x$ **$y = \sqrt[3]{11x + 9}$**

13) **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $n = 12D$ ، حيث D عدد العبوات الكرتونية من الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة كرتونية من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المبيعة 312 قطعة؟ **$D = \frac{n}{12}$؛ 26 عبوة**

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

14) $3y - 4, y = 2$ **2**

15) $2b + 7, b = -3$ **1**

16) $x^2 + 2x - 3, x = -4a$ **$16a^2 - 8a - 3$**

17) $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$ **$-50x^2 + 25x + 1$**

18) $-4c^2 + 7, c = 7a^2$ **$-196a^4 + 7$**

19) $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$ **$12n^2 - 60n + 77$**

20) **درجات حرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي، حيث تمثّل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة 73°F ، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. **22.8°C**

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):

نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x .

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ،

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ،

n عدد صحيح غير سالب.

الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $a(x), b(x)$ دالتا كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):

العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

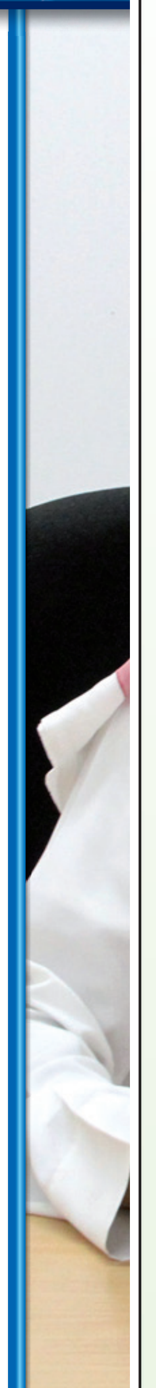
ويشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.

$$\sqrt[n]{81}$$

الدليل

رمز الجذر

ما تحت الجذر



التهيئة للفصل الأول

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فقم"، في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بمراجعة تمثيل المتباينات على خط الأعداد، وحل المعادلات بالنسبة لمتغير، وإيجاد قيمة عبارة عند قيمة معطاة للمتغير.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

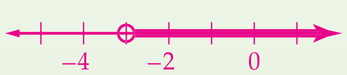
إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

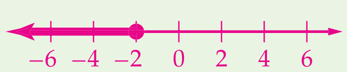
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

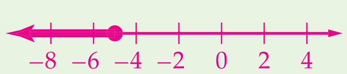
(1



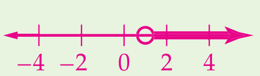
(2



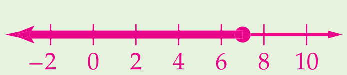
(3



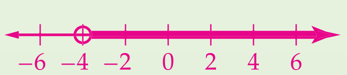
(4



(5



(6



تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

1-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

دراسة المجموعات ورموزها.

الدرس 1-1

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعرّف الدوال وحساب قيمها وإيجاد مجالاتها.

ما بعد الدرس 1-1

تعيين مدى الدالة ومقطعها y وأصفارها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- أعطِ مثالًا على متغيرين يعطي الزيادة في أحدهما زيادة في الآخر.
  إجابة ممكنة: زيادة طول أرض الغرفة يعطي زيادة في مساحتها.
- أعطِ مثالًا على متغيرين تعطي الزيادة في أحدهما نقصانًا في الآخر.
  إجابة ممكنة: زيادة التكاليف تعطي نقصًا في الأرباح.
- هل يمكن أن تعطي الزيادة في أحد المتغيرين زيادة ونقصانًا في المتغير الآخر؟ نعم. إجابة ممكنة: زيادة الإنتاج لتغطية الطلب في السوق يزيد الربح، لكن زيادة الإنتاج أكثر من طلب السوق يؤدي إلى نقصان الربح .

1-1 الدوال
Functions

فيما سبق:

درستُ مجموعات الأعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات:

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

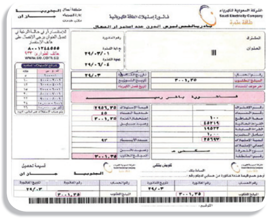
المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

www.obeikaneducation.com

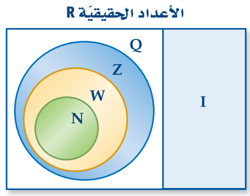
لماذا؟



تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية: تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي **الأعداد الحقيقية**



الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

يمكن وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث... | x لها هذه الخصائص... | x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال 1 **استعمال الصفة المميزة**

اكتب كلًا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \ge 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ $\{x \mid x \ge 1, x \in W\}$

1B) $x \le -3$ $\{x \mid x \le -3, x \in R\}$

1C) $-1 \le x \le 5$ $\{x \mid -1 \le x \le 5, x \in R\}$

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (12)	• تنويع التعليم ص (12)	• تنويع التعليم ص (17)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

قراءة الرياضيات

غير محدودة: تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقُّف).

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	**رمز الفترة**	**المتباينة**	**رمز الفترة**
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \le 16$ $\quad (-8, 16]$

b) $x < 11$ $\quad (-\infty, 11)$

c) $x > 5$ أو $x \le -16$ $\quad (-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

تحقق من فهمك

2A) $-4 \le y < -1$ $\quad [-4, -1)$ 2B) $a \ge -3$ $\quad [-3, \infty)$ 2C) $x > 9$ أو $x < -2$ $\quad (-\infty, -2) \cup (9, \infty)$

إرشادات للدراسة

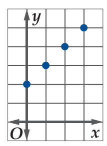
الرمزان $\cup$، $\cap$: يُقرأ الرمز "$\cup$" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين. يُقرأ الرمز "$\cap$" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًّا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًّا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًّا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.



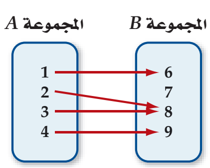
4) **جبريًّا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثّل دالة.
حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.
المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى $= \{6, 8, 9\}$.



إرشادات للدراسة

المجال والمدى: في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:
D = {1, 2, 3, 4}
R = {6, 8, 9}

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال 1 يبيِّن كيفية التعبير عن مجموعات من الأعداد بالصفة المميزة للمجموعة.

مثال 2 يبيِّن كيفية التعبير عن مجموعات من الأعداد باستعمال رمز الفترة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة.

a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
$\{x \mid 2 \le x \le 7, x \in W\}$

b) $x > -17$.
$\{x \mid x > -17, x \in R\}$

c) مضاعفات العدد 7 جميعها.
$\{x \mid x = 7n, n \in Z\}$

2 اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-2 \le x \le 12$
$[-2, 12]$

b) $x > -4$ $\quad (-4, \infty)$

c) $x < 3$ أو $x \ge 54$
$[54, \infty) \cup (-\infty, 3)$

المحتوى الرياضي

رمز الفترة يُستعمل الرمزان "(" أو ")" عندما لا يكون طرف الفترة إحدى نقاطها، في حين يُستعمل الرمزان "[" أو "]" عندما يكون طرف الفترة إحدى نقاطها. لاحظ أن $[a, a)$ و (a, a) و $(a, a]$ تمثّل المجموعة الخالية، في حين تمثل $[a, a]$ المجموعة $\{a\}$.

مثال إضافي

3 في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالّةً في x أم لا:

a) تمثل قيم المدخلات x طول الطالب بالبوصات، وقيم المخرجات y عدد الكتب التي يمتلكها الطالب.

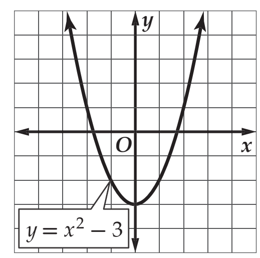
ليست دالة؛ لأنه ربما ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x.

b)

x	y
1	0
1	1
4	−2
4	2
9	−3

ليست دالة؛ لأن القيمتين $2, -2$ من y ترتبطان بالقيمة 4 من x .

c)



دالة؛ لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط .

d) $x = 3y^2$

ليست دالة؛ لأنه عند حل المعادلة بالنسبة إلى y نجد أن كل قيمة لـ x أكبر من الصفر ترتبط بقيمتين لـ y

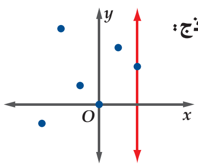
---

كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي — اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



مثال 3 — تحديد العلاقات التي تمثِّل دوالّ

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالّةً في x أم لا:

a) تمثِّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

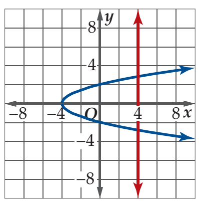
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثل دالّة في x .

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y، وعليه فإن y تمثل دالّةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة ، فإنّ y لا تمثّل دالّةً في x .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثّل دالّةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لـِ y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ أضف $2x$ لكلا الطرفين

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثّل دالّةً في x؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لـِ y، إحداهما موجبة ، والأخرى سالبة.

> **إرشادات للدراسة**
>
> **جدوليًا:** إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y ، كما يوضح الجدول أدناه:
>
> | x | y |
> |---|---|
> | −2 | −4 |
> | 3 | −1 |
> | 3 | 4 |
> | 5 | 6 |
> | 7 | 9 |

> **إرشادات للدراسة**
>
> **دوال تتكرر فيها قيم y:** لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b .

✓ تحقق من فهمك

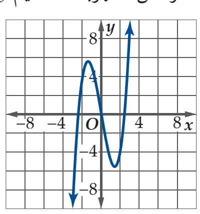
3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك. دالة

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

ليست دالة

3C)



دالة

3D) $3y + 6x = 18$ دالة

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: قسّم طلاب الصف إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، واطلب إليهم إعطاء دالتين وعلاقتين لا تمثلان دوال، ثم اطلب إليهم تمثيل العلاقات الأربع بيانيًّا لتوضيح أي منها تمثل دوالّ. لاحظ أن العلاقات التي لا تمثل دوالَّ تُمثّل بشكل انتشار.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الطبيعيون: اطلب إلى الطلاب تسمية ثلاثة أشياء لكل منها وجه واحد على الأقل على شكل مربع، واطلب إليهم تدوين معلومات عن طول ضلع المربع ومساحته. ثم انقل هذه البيانات على السبورة وتحدَّ الطلاب بالبحث عن دالة تمثل العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته. $A(s) = s^2$

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x. وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

الدالة المرتبطة بالمعادلة	المعادلة
$f(x) = -6x$	$y = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيّرًا مستقلًا**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24 \quad \text{عوّض 6 مكان } x$$
$$= 36 + 48 - 24 \quad \text{بسّط}$$
$$= 60 \quad \text{بسّط}$$

b) $f(-4x)$

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24 \quad \text{عوّض } -4x \text{ مكان } x$$
$$= 16x^2 - 32x - 24 \quad \text{بسّط}$$

c) $f(5c + 4)$

$$f(x) = x^2 + 8x - 24 \quad \text{الدالة الأصلية}$$
$$f(5c+4) = (5c+4)^2 + 8(5c+4) - 24 \quad \text{عوّض } (5c+4) \text{ مكان } x$$
$$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24 \quad \text{فك الأقواس } (5c+4)^2 \text{ و } 8(5c+4)$$
$$= 25c^2 + 80c + 24 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A) $f(12)$ $\quad \dfrac{27}{121}$ **4B)** $f(6x)$ $\quad \dfrac{12x+3}{36x^2 - 12x + 1}$ **4C)** $f(-3a + 8)$ $\quad \dfrac{-6a+19}{9a^2 - 42a + 49}$

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًا.

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

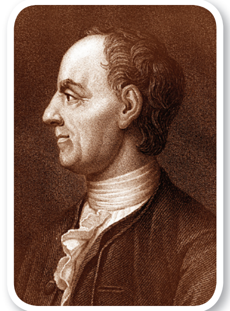
حدّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \dfrac{2 + x}{x^2 - 7x}$

تكون العبارة $\dfrac{2+x}{x^2 - 7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$، أي $D = \{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty)$.

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D = \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$ أو $D = [5, \infty)$.



الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1783م – 1707م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وهو أول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:
يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلًا، $f(x) = \sqrt{x - 5}$ و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يعبران عن الدالة نفسها.

تحديد الدالة

مثال 3 يبيِّن كيفية تحديد العلاقات التي تمثل دوالّ.

مثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد قيم دالة عند نقط معطاة.

مثال 5 يبيِّن كيفية تحديد مجال الدالة جبريًّا.

مثال 6 يبيِّن كيفية إيجاد قيم دالة متعددة التعريف عند نقط معطاة.

مثالان إضافيان

4 إذا كان $f(x) = x^2 - 2x - 8$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(3)$ $\quad -5$

b) $f(-3d)$ $\quad 9d^2 + 6d - 8$

c) $f(2a - 1)$ $\quad 4a^2 - 8a - 5$

5 حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $g(x) = \sqrt{4x - 1}$

$D = \left\{x \middle| x \geq \frac{1}{4}, x \in R\right\}$

أو $D = \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

b) $h(t) = \dfrac{3t^2}{t^2 - 1}$

$D = \{t \mid t \neq \pm 1, t \in R\}$

أو

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

c) $f(x) = \dfrac{x - 5}{\sqrt{2x - 3}}$

$D = \left\{x \middle| x > \frac{3}{2}, x \in R\right\}$

أو $D = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

تكون هذه الدالة معرّفة إذا كان المقام معرّفًا، وقيمته لا تساوي صفرًا، وهذا يعني أنها معرفة عندما يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن مجال $h(x)$ هو $D = \{x \mid x < -3$ أو $x > 3, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$

5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$

5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

5A) $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, \infty)$ أو $\{x | x \neq -4, x \neq -3, x \in R\}$

5B) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ أو $\{x | x \leq -2$ أو $x \geq 2, x \in R\}$

5C) $(-3, \infty)$ أو $\{x | x > -3, x \in R\}$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوال المتعددة التعريف**.

مثال 6 من واقع الحياة — إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \leq x \leq 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ — تعريف الدالة في الفترة $66 \leq x \leq 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ — عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ — بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لإيجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ — تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ — عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ — بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

تحقق من فهمك

6) **سرعة :** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t \ , & 0 \leq t \leq 15 \\ 60 \ , & 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 \ , & 240 \leq t \leq 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **20 mi/h**

6B) $v(15)$ **60 mi/h**

6C) $v(245)$ **30 mi/h**

إرشادات للدراسة

سرعة السيارة: تقاس سرعة السيارة عادة بالميل أو بالكيلومتر لكل ساعة، ويمكن أن تتغير كل ثانية ما لم يستعمل مثبت السرعة.

مثال إضافي

6 موارد مالية : تبيّن الدالة المتعددة التعريف معدل سعر المتر المربع الواحد بالريال من الأراضي التجارية بدلالة المساحة الكلية للأرض a .

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a - 1000}{40} + 75 \ , & 1000 \leq a < 2600 \\ \frac{-(a - 2600)}{100} + 110 \ , & 2600 \leq a < 4000 \\ \frac{a - 4000}{25} + 98 \ , & a \geq 4000 \end{cases}$$

أوجد معدل سعر المتر المربع الواحد في كل من الحالتين الآتيتين:

a) مساحة الأرض 4000 متر مربع. **98 ريالًا**

b) مساحة الأرض 3200 متر مربع. **104 ريالات**

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2) 1-10 انظر الهامش.

1) $x > 50$
2) $x < -13$
3) $x \leq -4$
4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$
5) $-31 < x \leq 64$
6) $x > 21$ أو $x < -19$
7) $x \geq 67$ أو $x \leq 61$
8) $x > 86$ أو $x \leq -45$
9) المضاعفات الموجبة للعدد 5
10) $x \geq 32$

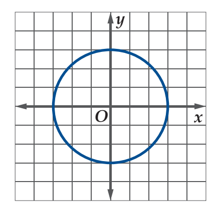
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا: (مثال 3)

11) المتغير المستقل x يمثّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب. دالة

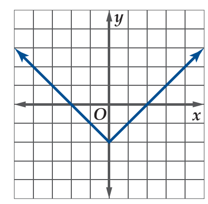
12) ليست دالة

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

13) $\frac{1}{x} = y$ دالة
14) $x^2 = y + 2$ دالة
15) $\sqrt{48y} = x$ دالة
16) $\frac{x}{y} = y - 6$ ليست دالة

17)


ليست دالة

18)


دالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$
a) $g(9)$ **310**
b) $g(3x)$ **$18x^2 + 54x - 14$**
c) $g(1 + 5m)$ **$50m^2 + 110m + 6$**

20) $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$
a) $h(4)$ **-207**
b) $h(-2y)$ **$24y^3 + 12y + 9$**
c) $h(5b + 3)$ **$-375b^3 - 675b^2 - 435b - 90$**

21) $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$ انظر ملحق الإجابات.
a) $f(-6)$
b) $f(4t)$
c) $f(3 - 2a)$

22) $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$ انظر ملحق الإجابات.
a) $g(-2)$
b) $g(5x)$
c) $g(8 - 4b)$

23) $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$
a) $g(-2)$ **3**
b) $g(3m)$ **$3 + \sqrt{9m^2 - 4}$**
c) $g(4m - 2)$ **$3 + 4\sqrt{m^2 - m}$**

24) $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$
a) $t(-4)$ **$20\sqrt{6}$**
b) $t(2x)$ **$10|x|\sqrt{6}$**
c) $t(7 + n)$ **$5|7 + n|\sqrt{6}$**

25) **مبيعات:** مُثّلت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

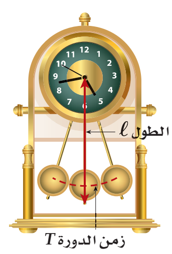
السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a) أوجد $f(1)$. **9 ملايين**
b) أوجد $f(5)$. **213 مليونًا**
c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنة الأولى، أم في السنة الأخيرة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

حدّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5) 26-31 انظر ملحق الإجابات.

26) $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$
27) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$
28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$
29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$
30) $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$
31) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

32) **فيزياء:** يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدِّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيِّن السبب. (مثال 5) انظر الهامش.



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–35، 53، 54، 56–74
ضمن المتوسط	1–37 (فردي)، 38–40، 41–47 (فردي)، 49، 50، 52–54، 56–74
فوق المتوسط	36–74

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-35 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: إذا احتاج الطلاب إلى مساعدة لحل المسألة 9، فاكتب المتتالية الآتية:
$5(1), 5(2), 5(3), \ldots$
يوضح هذا أن n هي $1, 2, 3, \ldots$

إجابات:

1) $\{x \mid x > 50, x \in R\}; (50, \infty)$
2) $\{x \mid x < -13, x \in R\}; (-\infty, -13)$
3) $\{x \mid x \leq -4, x \in R\}; (-\infty, -4]$
4) $\{x \mid x \geq -3, x \in Z\}$
5) $\{x \mid -31 < x \leq 64, x \in R\}; (-31, 64]$
6) $\{x \mid x < -19$ أو $x > 21, x \in R\}; (-\infty, -19) \cup (21, \infty)$
7) $\{x \mid x \leq 61$ أو $x \geq 67, x \in R\}; (-\infty, 61] \cup [67, \infty)$
8) $\{x \mid x \leq -45$ أو $x > 86, x \in R\}; (-\infty, -45] \cup (86, \infty)$
9) $\{x \mid x = 5n, n \in N\}$
10) $\{x \mid x \geq 32, x \in R\}; [32, \infty)$

25c) إجابة ممكنة: إن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنة الأخيرة، والتي حققت أعلى مبيعات، حيث إن 213 قريبة بنسبة 3% من 219؛ بينما 9 أكبر بنسبة 800% من 1

32) نعم، إجابة ممكنة: لأن لكل قيمة للطول (l) توجد قيمة واحدة للزمن (T). ومجال الدالة هو: $[0, \infty)$.

أوجد $f(-5)$ و $f(12)$ لكل من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

33) $f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , x<3\\ -x^3 & , 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , x>8\end{cases}$ **23; 433**

34) $f(x)=\begin{cases}-15 & , x<-5\\ \sqrt{x+6} & , -5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & , x>10\end{cases}$ **$1; 8\frac{1}{6}$**

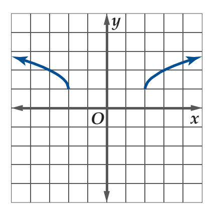
35) **عمل:** تمثل الدالة $T(x)$ أدناه الربح (بالريال) الذي تكسبه شركة توزيع لأجهزة هاتف:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , 0<x\le 7000\\ 500+2.4x & , 7000<x\le 20000\\ 800+3x & , 20000<x\le 80000\end{cases}$$

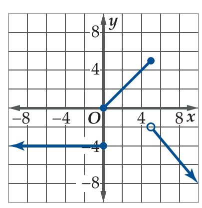
حيث x تمثّل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد: $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.
14700 , 24500 , 150800

معتمدًا على اختبار الخط الرأسي ، حدِّد ما إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا، وبرِّر إجابتك. **(36, 37 انظر الهامش.**

36)



37)



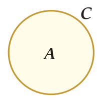
38) **رياضة:** تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة مسافة 0.4 mi ، وقيادة دراجة هوائية مسافة 5 mi ، وجري مسافة 2.6 mi . فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t. مقرّبًا t إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك. **انظر الهامش.**

b) حدِّد مجال الدالة. **[0, 0.78]**

39) **هندسة:** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.



a) اكتب المساحة كدالة في المحيط. **$A(c)=\frac{C^2}{4\pi}$**

b) أوجد $A(4), A(0.5)$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. **1.27, 0.02**

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟ **كلما زاد المحيط زادت المساحة.**

40) **حسابات:** تتناقص قيمة أجهزة الحاسوب بعد شرائها مع مرور الزمن. وتُستعملُ الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t)=1800-30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شراءه. فحدِّد مجال هذه الدالة.
$D=\{t \mid 0\le t\le 60, t\in N\}$

أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ، $f(a), f(a+h)$ ، حيث $h\ne 0$ لكل مما يأتي: **(41-48 انظر الهامش.**

41) $f(x)=-5$

42) $f(x)=\sqrt{x}$

43) $f(x)=\frac{1}{x+4}$

44) $f(x)=x^2-6x+8$

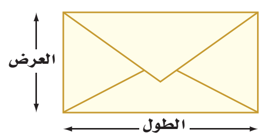
45) $f(x)=-14x+6$

46) $f(x)=x^3+9$

47) $f(x)=5x^2$

48) $f(x)=x^3$

49) **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5، فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in ، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$in ، فأجب عما يأتي: **(a,b انظر الهامش.**



a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ ، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 1.8 ، ثم اكتب مجال الدالة.

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1 ، ثم اكتب مجال الدالة.

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له ، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه. **52.9 in^2**

في كل من العلاقتين الآتيتين، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا. برِّر إجابتك.
(50, 51 انظر ملحق الإجابات.

50) $x=|y|$

51) $x=y^3$

تنبيه!

خطأ شائع: ذكّر الطلاب بقاعدتين أساسيتين تتعلقان بالمسائل 31-26 وهما:

1) لا يجوز أن يكون المقام صفرًا.

2) لا يوجد حل حقيقي للجذر التربيعي لعدد سالب.

إرشادات للمعلم الجديد

العلاقات والدوال: في المسألتين 50 وَ 51، يمكن الكشف عن العلاقات التي تمثّل دوالّ بسرعة، وذلك بتعيين أزواج مرتبة للعلاقة، لذا فإنه لا حاجة لتمثيل كل علاقة بيانيًّا.

إجابات :

36) دالة، لا يقطع أي خط رأسي المنحنى أكثر من مرة .

37) ليست دالة؛ لأن الخط الرأسي (المحور y) يقطع التمثيل البياني في النقطتين $(0,-4)$, $(0,0)$.

38a) $D(t)=\begin{cases}4t , & 0\le t\le 0.1\\ 20t-1.6 , & 0.1<t\le 0.35\\ 6t+3.32 , & 0.35<t\le 0.78\end{cases}$

41) $-5 , -5 , 0$

42) $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+h}$, $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

43) $\frac{1}{a+4}$, $\frac{1}{a+h+4}$, $\frac{-1}{a^2+ah+8a+4h+16}$

44) $a^2-6a+8, a^2+2ah+h^2-6a-6h+8, 2a-6+h$

45) $-14a+6, -14a-14h+6, -14$

46) $a^3+9 , a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+9, 3a^2+3ah+h^2$

47) $5a^2 , 5a^2+10ah+5h^2 , 10a+5h$

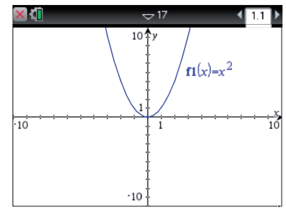
48) $a^3 , a^3+3a^2h+3ah^2+h^3 , 3a^2+3ah+h^2$

49a) $A(\ell)=\frac{\ell^2}{1.8}$; [5,11.5]

49b) $A(h)=2.1h^2$, [2.4, 5.5]

52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى الدالة $f(x) = x^n$، حيث $n \in N$. **(a–d) انظر ملحق الإجابات.**

a) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًّا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.



b) **جدوليًّا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع **a**، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًّا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًّا.

d) **لفظيًّا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟ **انظر ملحق الإجابات.**

55) **تحدٍّ:** إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\,G(x-1) + 1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$. $\frac{4}{7}$

تبرير: أيُّ الجمل الآتية تصف الدالة المعرَّفة من المجموعة X إلى المجموعة Y بشكل صحيح، وأيها خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعد كتابتها لتصبح صحيحة.

56) يرتبط كل عنصر من Y بعنصر واحد من X. **انظر الهامش.**

57) لا يرتبط عنصران أو أكثر من X بالعنصر نفسه من Y. **انظر الهامش.**

58) لا يرتبط عنصران أو أكثر من Y بالعنصر نفسه من X. **صحيحة**

اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد الدالة من خلال:

59) جملة لفظية تبيّن العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

60) مجموعة أزواج مرتبة. **(59-63) انظر ملحق الإجابات.**

61) جدول قيم.

62) تمثيل بياني .

63) معادلة.

مراجعة تراكمية

(64-72) انظر الهامش.

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

64) $\frac{2r - 4}{r - 2}$

65) $\frac{r^2 - 7r - 30}{r^2 - 5r - 24}$

66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

67) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{16}}$

68) $\frac{12x^2 + 11x + 2}{8x^2 + 14x + 3} \cdot \frac{6x^2 - 11x + 4}{6x^2 + x - 2}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

69) $\frac{8}{x} = 1 + \frac{2}{x - 2}$

70) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

حل كلًّا من المتباينتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

71) $\frac{x+1}{x-3} - 1 \leq 2$

72) $\frac{6}{x} + 2 \geq 0$

تدريب على اختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا: **B**

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة: **C**

$h(x) = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x - 5}$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات، وإيجاد مثالين على دالتين مجال كلّ منهما هو $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$.

إجابة ممكنة: $g(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 2x - 3}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

تمثيلات متعددة

في السؤال 52 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والجداول، والتعبير اللفظي لاستقصاء مدى الدالة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: إجابة عبدالله على السؤال 53 أغفلت عناصر من المجال. لذا ذكّر الطلاب بأن قيم x التي لا تنتمي إلى مجال الدالة هي التي تجعل المقام صفرًا.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب حل المسألة التالية: إذا كانت $f(x) = \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ فأوجد قيمة $f(3)$.

$-3\sqrt{2}$

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 1-1، بإعطائهم اختبارًا قصيرًا

الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات:

56) خطأ؛ إجابة ممكنة: ليس بالضرورة ارتباط كل عنصر من Y بعنصر مختلف من X.

57) خطأ؛ إجابة ممكنة: يمكن لعنصرين أو أكثر من X الارتباط بالعنصر نفسه من Y.

64) 2

65) $\frac{r - 10}{r - 8}$

66) $\frac{3xy - 7y}{12x}$

67) $\frac{4a}{4 - a}$

68) $\frac{3x - 4}{2x + 3}$

69) 4

70) 2

71) $x < 3$ أو $x \geq 5$

72) $x \leq -3$ أو $x > 0$

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم

الدّوال

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية على مجموعة الأعداد النسبية **Q**، وغير النسبية **I**، والأعداد الصحيحة **Z**، والأعداد الكلية **W**، والأعداد الطبيعية **N**.

الصفة المميزة للمجموعة هي إحدى طرق وصف المجموعة، وفيها نختار متغيرًا ونكتب خصائصه، ونبيّن إلى أي مجموعة ينتمي.

والفترة طريقة أخرى للتعبير عن المجموعة، وفيها نستعمل أقواسًا مغلقة إذا كانت أطراف الفترة تنتمي إلى المجموعة، وأقواسًا مفتوحة إذا كانت أطراف الفترة لا تنتمي إليها. ونستعمل ∞ للتعبير عن اللانهاية الموجبة، و$-\infty$ للتعبير عن اللانهاية السالبة.

مثال اكتب المجموعة $x > 18$ باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة.

تتضمن المجموعة كلّ الأعداد التي هي أكبر من 18.

الصفة المميزة: $\{x \mid x > 18, x \in \mathbf{R}\}$

الخط العمودي | يعني "حيث"، والرمز $\in$ يعني ينتمي إلى، وتقرأ العبارة: مجموعة الأعداد x حيث x أكبر من 18 و x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

رمز الفترة: $(18, \infty)$

استعملنا الأقواس المفتوحة؛ لأن 18 ليس عنصرًا في المجموعة، و ∞ للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

تمارين

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{17, 18, 19, 20, \dots\}$
$\{x \mid x \geq 17, x \in \mathrm{N}\}$

2) $x \leq -2$
$\{x \mid x \leq -2, x \in \mathrm{R}\}; (-\infty, -2]$

3) $x > -8.8$
$\{x \mid x > -8.8, x \in \mathrm{R}\}; (-8.8, \infty)$

4) $5 < x < 15$
$\{x \mid 5 < x < 15, x \in \mathrm{R}\}; (5, 15)$

5) $x < -11$ أو $x \geq 1$
$\{x \mid x < -11$ أو $x \geq 1, x \in \mathrm{R}\};$
$(-\infty, -11) \cup [1, \infty)$

6) $\{\dots, -10, -9, -8, -7\}$
$\{x \mid x \leq -7, x \in \mathrm{Z}\}$

الصف: الثالث الثانوي | 6 | الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات إعادة التعليم (7) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدّوال

تمييز الدّوال العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A مع عناصر من مجموعة مثل B. وتحتوي المجموعة A على المدخلات أو عناصر **المجال**، في حين تحتوي المجموعة B على المخرجات أو عناصر **المدى**. **والدالة f** من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر واحد فقط y من B. ولإيجاد قيمة الدالة عند نقطة a في مجالها، ضع a مكان المتغير المستقل، ثم أوجد الناتج.

مثال 1 أوجد قيمة كلّ من الدالتين الآتيتين:

a) إذا كانت $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$، فأوجد $f(-2)$

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 3x$ الدالة الأصلية

$f(-2) = 4(-2)^3 + 6(-2)^2 + 3(-2)$ عوض -2 مكان x

$= -32 + 24 - 6 = -14$ بسّط

b) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & x \leq 4 \\ 3x, & 4 < x < 10 \\ 2x^2 - 15, & x \geq 10 \end{cases}$، فأوجد $g(6)$ و $g(10)$

بما أن 6 واقعة بين 4 و 10، فإننا نستعمل القاعدة $g(x) = 3x$، لذا $g(6) = 3(6) = 18$

وبما أن 10 تنتمي إلى المجموعة $x \geq 10$، فإن $g(10) = 2(10)^2 - 15 = 185$

مثال 2 حدِّد مجال الدالة $f(x) = \dfrac{3 + x}{x^2 - 6x}$

إذا كان مقام العبارة $\dfrac{3 + x}{x^2 - 6x}$ يساوي صفرًا، فإنها غير معرفة. وبحلّ المعادلة $x^2 - 6x = 0$، فإن القيم المستثناة من المجال وهي $x = 0$، و $x = 6$. أي أن المجال هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq 6, x \in \mathbf{R}\}$ أو $\mathrm{D} = (-\infty, 0) \cup (0, 6) \cup (6, \infty)$

تمارين

أوجد قيمة كلّ دالة مما يأتي:

1) إذا كانت $f(x) = 5x^2 - 4x - 6$، فأوجد قيمة $f(3)$.
27

2) إذا كانت $h(x) = 9x^9 - 4x^4 + 3x - 2$، فأوجد قيمة $h(t)$.
$9t^9 - 4t^4 + 3t - 2$

3) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} x + 45, & x \leq -1 \\ 81 - x, & x > -1 \end{cases}$، فأوجد $g(-5)$, $g(36)$.
45, 40

4) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x}, & x < 3 \\ 2x + 10, & 3 \leq x < 8 \\ 42, & x \geq 8 \end{cases}$، فأوجد قيم $f(3), f(8.5)$.

42; 16

الصف: الثالث الثانوي | 7 | الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات حل المسألة (8) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-1 تدريبات حل المسألة

الدّوال

1) **مناخ:** يبيِّن الجدول الآتي متوسط درجات الحرارة العظمى والصغرى المسجَّلة في إحدى المدن.

درجات الحرارة العظمى والصغرى (F°)		
الشهر	العظمى	الصغرى
يناير	91	84
مارس	100	84
مايو	108	95
يونيو	117	97
أكتوبر	106	95
ديسمبر	93	86

a) اكتب العلاقة على صورة أزواج مرتبة.
$\{(91, 84), (100, 84), (108, 95), (117, 97), (106, 95), (93, 86)\}$

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.
المجال: $\{91, 100, 108, 117, 106, 93\}$,
المدى: $\{84, 95, 97, 86\}$

c) حدِّد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. **نعم**

2) **غزلان:** تمثِّل الدالة الآتية أعداد الغزلان خلال 5 سنوات $f(d) = -3d^4 + 43d^3 - 185d^2 + 350d - 59$ أوجد قيمة كل من $f(3)$ و $f(5)$، اللتين تمثّلان أعداد الغزلان في السنتين الثالثة والخامسة.
244 غزالًا؛ 566 غزالًا

3) **خدمات:** يتقاضى مطعم 15% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، إذا كانت تكلفتها أقلّ من 50 ريالًا. ويتقاضى 18% من تكلفة الوجبة إذا كانت تكلفتها 50 ريالًا وأقل من 100 ريال. و 20% إذا كانت تكلفتها 100 ريال أو أكثر، اكتب دالة متعددة التعريف تصف التكلفة الكلية التي على أحد زبائن المطعم دفعها بدلالة وجبة كلفتها c.

$$t(c) = \begin{cases} 1.15c, & 0 < c < 50 \\ 1.18c, & 50 \leq c < 100 \\ 1.2c, & c \geq 100 \end{cases}$$

4) **شحن:** يبيِّن الجدول الآتي تكلفة توصيل بضاعة، وتعتمد الأجرة على الثمن الإجمالي للمشتريات.

الثمن الإجمالي (ريال)	تكلفة التوصيل (ريال)
0 ولغاية 300	8
أكثر من 300 ولغاية 600	15
أكثر من 600 ولغاية 1000	20
أكثر من 1000	مجانًا

a) اكتب دالة متعددة التعريف تصف أجرة التوصيل c بدلالة الثمن الإجمالي للمشتريات t.

$$c(t) = \begin{cases} 8, & 0 \leq t \leq 300 \\ 15, & 300 < t \leq 600 \\ 20, & 600 < t \leq 1000 \\ 0, & t > 1000 \end{cases}$$

b) اكتب مجال الدالة ومداها.
المدى: $\{0, 8, 15, 20\}$، المجال: $[0, \infty)$

5) **مصعد:** بدأ مصعد فيه 12 شخصًا، بالهبوط من الدور الثامن، وكان ينزل عند كل دور شخص واحد، فإذا كان للعمارة دوران تحت مستوى الأرض و 8 أدوار فوق المستوى. ويُعبِّر عن عدد الأشخاص المتبقي في المصعد بِـ $f(\ell) = \ell + 4$ حيث ℓ رقم الدور، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب مجالًا مناسبًا باستعمال الصفة المميزة للمجموعة.
المجال: $\{\ell \mid -2 \leq \ell \leq 8, \ell \in \mathrm{Z}\}$

b) اكتب مدى الدالة.
المدى: $\{2, 3, 4, 5, \dots, 12\}$

الصف: الثالث الثانوي | 8 | الفصل 1: تحليل الدوال

التدريبات الإثرائية (9) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-1 التدريبات الإثرائية

معدل التغير

معدل التغير: تتغير الدالة $f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$، بمقدار $f(b) - f(a)$. ويُعَرّف متوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بين $x = a$ و $x = b$ بالمقدار $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

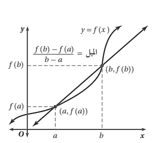
أوجد التغير ومتوسط معدل التغير للدالة $f(x)$ بين القيمتين المعطاتين في كل من السؤالين الآتيين:

1) $f(x) = 3x - 4$ من $x = 3$ إلى $x = 8$

التغير: 15، متوسط معدل التغير: 3

2) $f(x) = x^2 + 6x - 10$، من $x = 2$ إلى $x = 4$

التغير: 24، متوسط معدل التغير: 12



متوسط معدل التغير بين $x = a$ و $x = b$ يمثِّل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ على منحنى الدالة f كما هو مبين في الشكل المجاور.

3) أيهما أكبر: متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = x^2$ بين 0 و 1 أم بين 4 و 5؟

متوسط معدل التغير بين 4 و 5 هو الأكبر.

4) أيّ الدّوال الآتية $f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = x^3$ لها أكبر متوسط معدل تغير بين 2 و 3؟

$h(x)$

5) أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = x^2$ في كل فترة من الفترات الآتية:

a) $a = 1$ إلى $b = 1.1$
2.1

b) $a = 1$ إلى $b = 1.01$
2.01

c) $a = 1$ إلى $b = 1.001$
2.001

d) ما القيمة التي يقترب منها متوسط معدل التغير عندما تقترب قيمة b من 1؟ **2**

تُسمى القيمة التي أوجدتها في التمرين **5d** معدل التغير اللحظي للدالة، وله أهمية كبيرة في علم التفاضل والتكامل.

6) أوجد معدل التغير اللحظي للدالة $f(x) = 3x^2$ عندما تقترب x من 3. **18**

الصف: الثالث الثانوي | 9 | الفصل 1: تحليل الدوال

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (4) دون ضمن فوق

1-1 الدوالّ

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

1) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$
$\{x \mid x \leq 2, x \in Z\}$

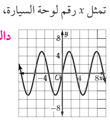
2) $-6.5 < x \leq 3$
$\{x \mid -6.5 < x \leq 3, x \in R\}; (-6.5, 3]$

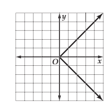
3) $x < 3$
$\{x \mid x < 3, x \in R\}, (-\infty, 3)$

4) $x < 0$ أو $x > 8$
$\{x \mid x < 0$ أو $x > 8, x \in R\};$
$(-\infty, 0) \cup (8, \infty)$

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

5) تمثل x رقم لوحة السيارة، و y سنة صنع السيارة. دالة

6)  دالة

7)  ليست دالة

8) $-x + y = 3x$ دالة

9) $x = 5(y-1)^2$ ليست دالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

10) $h(x) = x^2 - 8x + 1$
a) $h(-1)$ 10
b) $h(2x)$ $4x^2 - 16x + 1$
c) $h(x+8)$ $x^2 + 8x + 1$

11) $f(a) = -3\sqrt{a^2 + 9}$
a) $f(4)$ -15
b) $f(3a)$ $-9\sqrt{a^2 + 1}$
c) $f(a+1)$ $-3\sqrt{a^2 + 2a + 10}$

حدّد مجال كل من الدالتين الآتيتين:

12) $g(x) = \sqrt{-3x - 2}$ $\{x \mid x \leq -\frac{2}{3}, x \in R\}$

13) $h(t) = \frac{2t - 6}{t^2 + 6t + 9}$ $\{t \mid t \neq -3, t \in R\}$

14) أوجد $f(-4)$ و $f(11)$ للدالة $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 16, & x < -2 \\ \sqrt{x - 2}, & -2 < x \leq 11 \\ -75, & x > 11 \end{cases}$ $64; 3$

الفصل الأول تحليل الدوال

4

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations

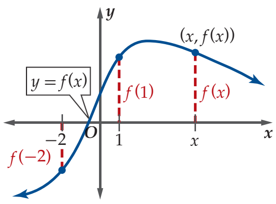
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1423 – 1430) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 ,\ 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1422هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

تحليل التمثيل البياني للدالة: التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f . وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساوية طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة — تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:

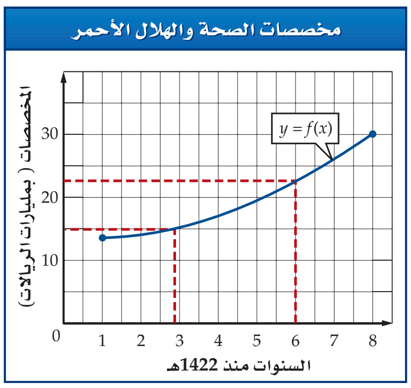
a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1428 هـ ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

السنة 1428 هـ هي السنة السادسة بعد 1422 هـ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1428هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.



b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3 ، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1425 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

لذا تعد السنة التقريبية 1425هـ معقولة.

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها. (الدرس 1–1)

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار zeros

الجذور roots

التماثل حول مستقيم line symmetry

التماثل حول نقطة point symmetry

الدالة الزوجية even function

الدالة الفردية odd function

www.obeikaneducation.com

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

تعيين الدوال وإيجاد قيمها.

الدرس 1-2

استعمال التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y وأصفارها.

استكشاف تماثل منحنيات الدوال وتحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

ما بعد الدرس 1-2

استكشاف الاتصال وسلوك نهاية الدالة والنهايات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

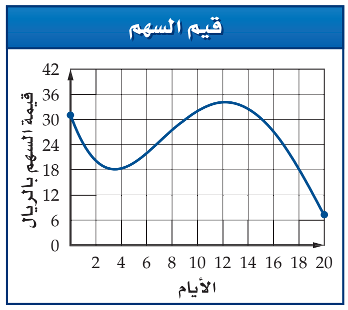
- ما نوع الدالة $f(x)$؟
  كثيرة حدود
- ماذا تمثل القيمة $f(1)$؟
  قيمة المخصصات سنة 1423 بمليارات الريالات

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (21)	• تنويع التعليم ص (21)	• تنويع التعليم ص (23، 27)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

تحقق من فهمك

1) **أسهم:** تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \le d \le 20$، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d.



1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

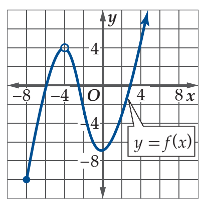
1A) 32 ريالًا

1B) في كلٍّ من اليومين التاسع والخامس عشر تقريبًا.

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور.



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

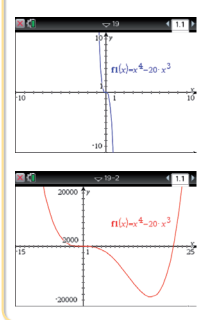
مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid -8 \le x, x \ne -4, x \in \mathbb{R}\}$.

المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

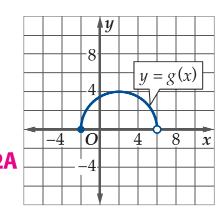
إرشادات للدراسة

اختيار التدريج المناسب: اختر تدريجًا مناسبًا لكل من المحورين x, y للتمكن من رؤية منحنى الدالة بوضوح. لاحظ اختلاف التمثيل الظاهر للدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$ أدناه.



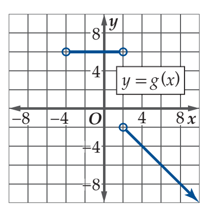
تحقق من فهمك

(2A



2A) $D = [-2, 6)$
$R = [0, 4]$

(2B



2B) $D = [-4, 2) \cup (2, \infty)$
$D = (-\infty, -2) \cup \{6\}$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

تحليل التمثيل البياني للدالة

مثال 1 يبيِّن كيفية تقدير قيم الدالة باستعمال التمثيل البياني.

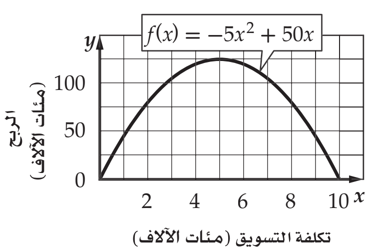
مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد مجال دالة ومداها باستعمال التمثيل البياني.

مثال 3 يبيِّن كيفية إيجاد المقطع y لدالة من التمثيل البياني.

مثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد أصفار دالة من التمثيل البياني.

مثال إضافي

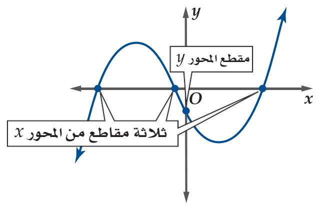
1 **إعلان:** إذا كانت العلاقة بين أرباح شركة كبرى وتكلفة التسويق x مقدّرة بمئات الآلاف من الريالات معطاةً بالدالة: $f(x) = -5x^2 + 50x$ وممثّلة بالشكل أدناه، فأجب عمّا يأتي:



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير ربح الشركة إذا كانت التكلفة 300000 ريال. وتحقق من إجابتك جبريًّا.
10500000 ريال

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير التكلفة إذا كان الربح 12500000 ريال. وتحقق من إجابتك جبريًّا.
500000 ريال

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.

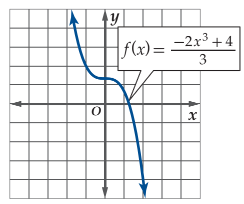


ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نجد $f(0)$.

مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

a)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

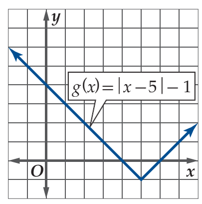
الحل جبريًّا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3+4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

b)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًّا:

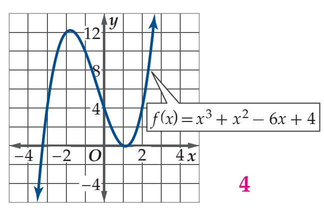
أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0-5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4.

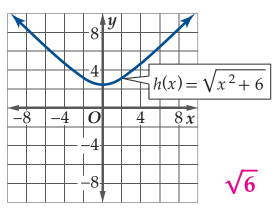
تحقق من فهمك

3A)



4

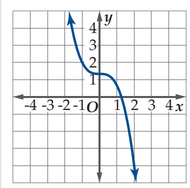
3B)



$\sqrt{6}$

إرشادات للدراسة

تدريج المحورين x، y: إذا لم يظهر التدريج على المحورين x، y في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات. انظر المثال 3a:



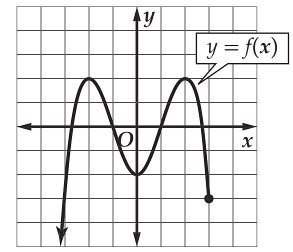
إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني: عندما تُسمى المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y. ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للتسهيل نسمي عادةً المحور الأفقي x والرأسي y.

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

مثالان إضافيان

2 أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني أدناه.

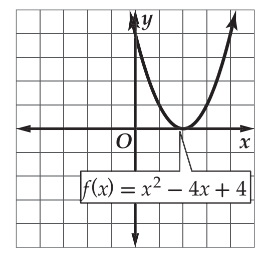


المجال: $(-\infty, 3]$

المدى: $(-\infty, 2]$

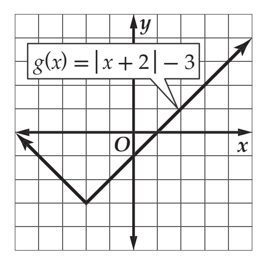
3 استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين أدناه؛ لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا.

a)



4

b)



-1

التعليم باستعمال التقنيات

التقنيـة والتمثيـل البياني: اطلب إلى الطلاب تتبع مسار منحنى الدالة بتحريك مؤشر الفأرة على المنحنى لرؤية الإحداثيات في أثناء الحركة، تقدم هذه التقنية إلى الطلاب تغذية راجعة سريعة حول تقديراتهم لقيم الدالة.

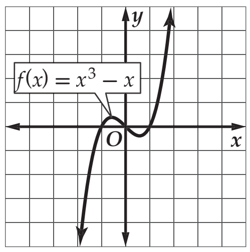
المحتوى الرياضي

تمثيل الدوال: يُعطي التمثيل البياني والجبري للدوال كمًّا كبيرًا من المعلومات عن العلاقة بين المتغيرين.

- يقدم التمثيل البياني معلومات سهلة عن القيم العظمى، والقيم الصغرى، وأصفار الدوال، والمقاطع y.
- تعطي الصيغة الجبرية القيم الدقيقة للدالة.

مثال إضافي

4 استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - x$ ؛ لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا. $-1, 0, 1$

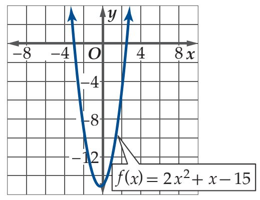


إرشادات للمعلم الجديد

إيجاد القيم باستعمال التمثيل البياني: عند استعمال التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمها، يجب على الطلاب استعمال حافة مستقيمة لمدّ كلا المحورين؛ لتسهيل عملية إيجاد القيم بدقة.

مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



التقدير من المنحنى:

يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.
لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

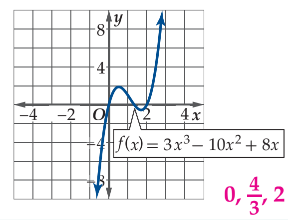
الحل جبريًّا:

$2x^2 + x - 15 = 0$			ضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$			حلّل
$2x - 5 = 0$	أو	$x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$	أو	$x = -3$	حل كل معادلة

أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f.

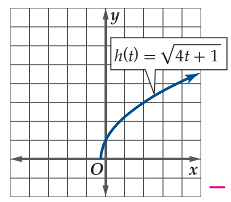
تحقق من فهمك

4A)



$0, \frac{4}{3}, 2$

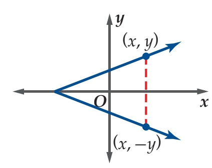
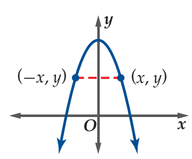
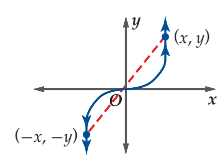
4B)



$-\frac{1}{4}$

التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها °180 حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأنواع التماثل:

مفهوم أساسي اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة

تماثل العلاقات والدوال: يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون: اطلب إلى الطلاب البحث عن متغيرات مستقلة وغير مستقلة ضمن اهتماماتهم، ثم اطلب إليهم وصف هذه المتغيرات وتحديد مجال الدالة المكونة منها ومداها.
ثم اطلب إليهم تمثيل الدوال التي حصلوا عليها. ولاحظ أن المجال الذي فيه أعداد سالبة مناسب لدرجات الحرارة، ولكنه غير مناسب للزمن المحدد لإجراء مباراة.

التماثل

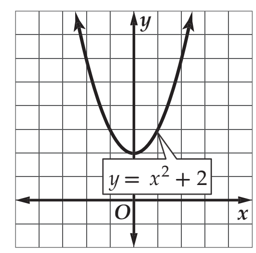
مثال 5 يبيِّن كيفية اختبار تماثل منحنيات الدوال حول مستقيم وحول نقطة.

مثال 6 يبيِّن كيفية تحديد دالة من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

مثال إضافي

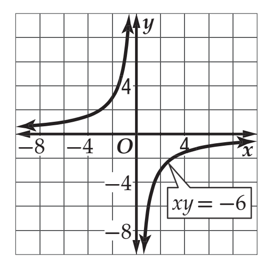
5 استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من المعادلتين الآتيتين؛ لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. وعزِّز إجابتك عدديًّا ثمَّ تحقق منها جبريًّا:

(a



متماثل حول محور y

(b



متماثل حول نقطة الأصل

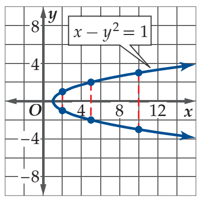
إرشادات للدراسة

التماثل: من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكل من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقَّق منها جبريًّا.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

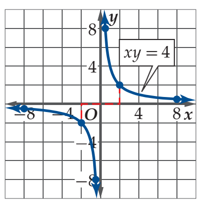
يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x:

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	(2, 1)	(2, −1)	(5, 2)	(5, −2)	(10, 3)	(10, −3)

التحقق جبريًّا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x.

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

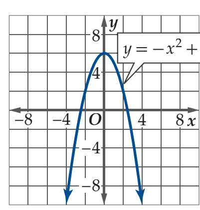
x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	(−8, −0.5)	(−2, −2)	(−0.5, −8)	(0.5, 8)	(2, 2)	(8, 0.5)

التحقق جبريًّا:

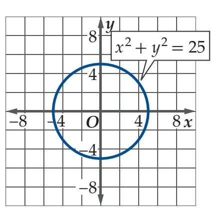
بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

✓ تحقق من فهمك

5A) انظر الهامش.



5B) انظر الهامش.



إجابة (تحقق من فهمك):

5A) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, y)$ على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول المحور y:

x	2	-2	3	-3
y	2	2	-3	-3
(x, y)	$(2, 2)$	$(-2, 2)$	$(3, -3)$	$(-3, -3)$

التحقق جبريًّا:

بما أن المعادلة $y = -(-x)^2 + 6$ تكافئ $y = -x^2 + 6$، فإن المنحنى متماثل حول المحور y.

5B) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(x, -y)$ على المنحنى نفسه. وهو متماثل حول المحور y أيضًا؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, y)$ على المنحنى نفسه. وهو متماثل حول نقطة الأصل؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, -y)$ على المنحنى نفسه. ويمكن التحقق من ذلك عدديًّا وجبريًّا.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

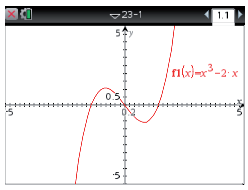
مفهوم أساسي **الدوال الزوجية والدوال الفردية**

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y **الدوال الزوجية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل **الدوال الفردية**.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

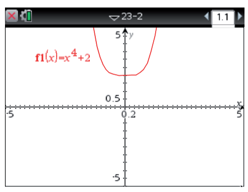
$= -x^3 + 2x$ بسّط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x) = x^4 + 2$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

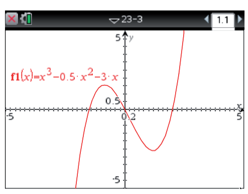
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$ انظر الهامش.



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة قد تكون متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

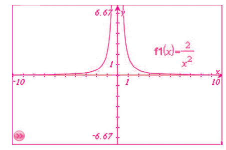
$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بسّط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$،
فإن $f(-x) \neq f(x)$، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛
لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

تحقق من فهمك

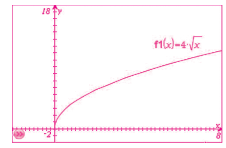
6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ 6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$ 6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$ انظر الهامش.

6A)



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية، لأنها متماثلة حول المحور y.
$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} = f(x)$،
وهذا يعني أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$

6B)



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست زوجية وليست فردية؛ لأنها غير متماثلة حول المحور y، وغير متماثلة حول نقطة الأصل.
$f(-x) = 4\sqrt{-x}$،
$-f(x) = -4\sqrt{x}$
إذن $f(-x) \neq f(x)$
وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$
وهذا يعني أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

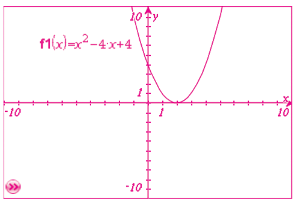
إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال الفردية: قد تُظهر لك بعض التمثيلات البيانية تماثلًا والحقيقة غير ذلك؛ لذا عليك التأكد من التماثل جبريًّا في كل مرة.

مثال إضافي

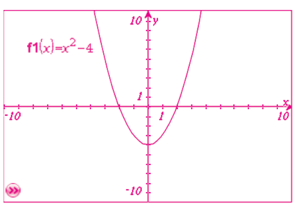
6 استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$



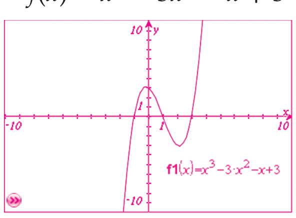
$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 4$
$= x^2 + 4x + 4$
الدالة ليست زوجية وليست فردية.

b) $f(x) = x^2 - 4$



$f(-x) = (-x)^2 - 4$
$= x^2 - 4$
الدالة زوجية، ومنحناها متماثل حول المحور y.

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$



$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 - (-x) + 3$
$= x^3 - 3x^2 + x + 3$
الدالة ليست زوجية وليست فردية.

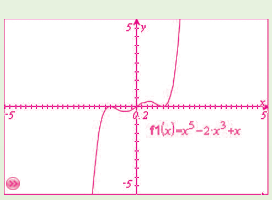
تنويع التعليم

فوق

المتعلمون السمعيون: اطلب إلى الطلاب الاستماع إلى ضربات قلوبهم باستعمال سمّاعات كالتي يستعملها الأطباء. إن القلب ينبض باستمرار وتكون نبضاته متناسقة بين انقباض الأذينين والبُطينين، ثم اطلب إليهم تمثيل ذلك بيانيًّا، ووصف التماثل (إن وجد)، وهل الدالة زوجية أم فردية.

إجابة:

6C)



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة فردية؛ لأنها متماثلة حول نقطة الأصل.

$h(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x$،

إذن $h(-x) = -h(x)$؛ وهذا يعني أن الدالة فردية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 30–1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشاد

المسطرة: عندما يستعمل الطلاب التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة في الأسئلة 4–1، ذكّرهم باستعمال مسطرة للحصول على إجابات دقيقة.

إجابات:

6) المجال: $\{x \mid x \in R\}$،
المدى: $[-3, \infty)$

7) المجال: $(-4, 4]$،
المدى: $[-1, 6]$

8) المجال: $[-5, \infty)$،
المدى: $[-2, \infty)$

9) المجال: $(-\infty, 7]$ ،
المدى: $\{-1\} \cup (1, \infty)$

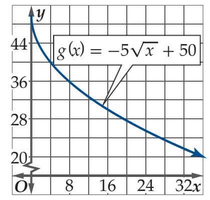
10a) إجابة ممكنة: النحاس:
$\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$،
$\{y \mid y = 1.75\}$؛
الألومنيوم:
$\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$،
$\{y \mid 0.6 \le y \le 1.5, y \in R\}$؛
الزنك:
$\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$،
$\{y \mid 0.5 \le y \le 1.25, y \in R\}$؛
الفولاذ:
$\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$،
$\{y \mid 0.2 \le y \le 1.75, y \in R\}$

10b) إجابة ممكنة: النحاس ≈ 1.75 جول، الألومنيوم: ≈ 1.2 جول، الزنك ≈ 0.5 جول، الفولاذ ≈ 1.5 جول.

تدرب وحل المسائل

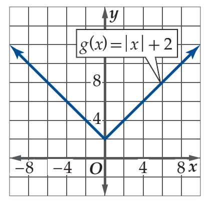
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: (مثال 1)

1)



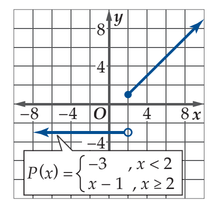
a) $g(6)$ **37.75** b) $g(12)$ **32.68** c) $g(19)$ **28.21**

2)



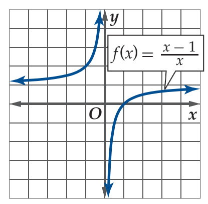
a) $g(-8)$ **10** b) $g(-3)$ **5** c) $g(0)$ **2**

3)



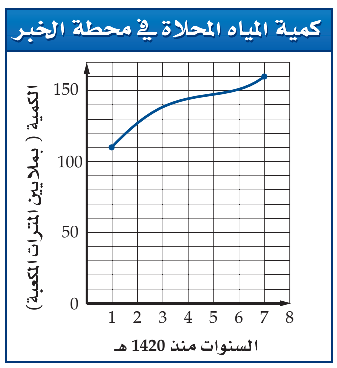
a) $P(-6)$ **−3** b) $P(2)$ **1** c) $P(9)$ **8**

4)



a) $f(-3)$ $\frac{4}{3}$ b) $f(0.5)$ **−1** c) $f(1)$ **0**

5) مياه: إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1427هـ) معطاة بالدالة $f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$ حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1420 هـ. (مثال 1)



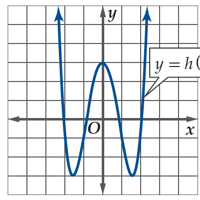
a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني. **145 مليون متر مكعب**

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًّا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. **147.4 مليون متر مكعب**

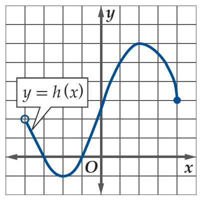
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا. **1422**

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2) **(6-9) انظر الهامش.**

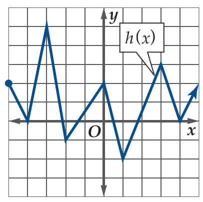
6)



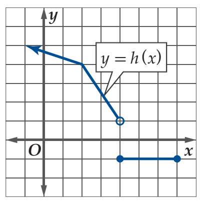
7)



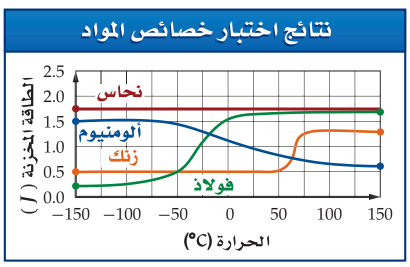
8)



9)



10) هندسة: أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزَّنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضّح في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي: (مثال 2)

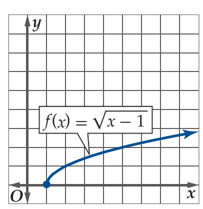


a) أوجد المجال والمدى لكل دالة. **b-a) انظر الهامش.**

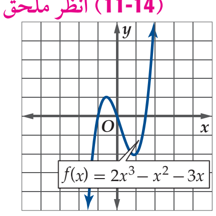
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد أصفار الدالة جبريًّا: (المثالان 3, 4) **(11-14) انظر ملحق الإجابات.**

11)

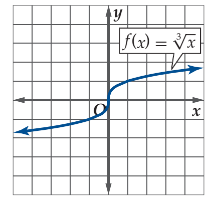


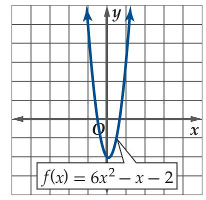
12)

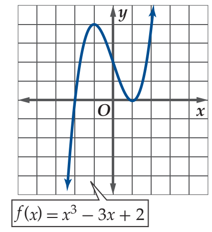


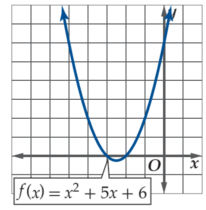
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–30، 50–54، 56–82
ضمن المتوسط	1–31 (فردي)، 32–34، 35–39 (فردي)، 41–43، 50–54، 56–82
فوق المتوسط	31–82

13) 

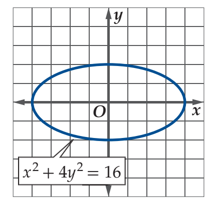
14) 

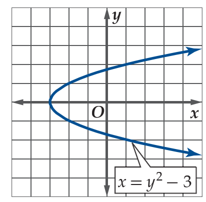
15) 

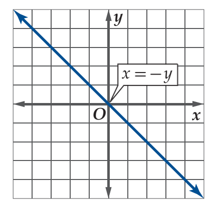
16) 

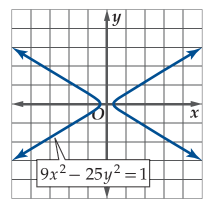
15, 16) انظر الهامش.

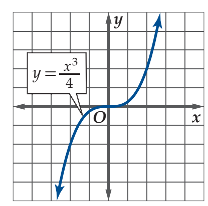
استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًّا: (مثال 5) 17-24) انظر ملحق الإجابات.

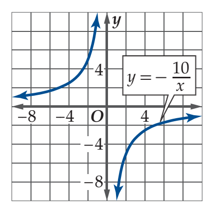
17) 

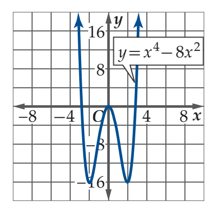
18) 

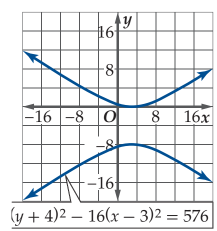
19) 

20) 

21) 

22) 

23) 

24) 

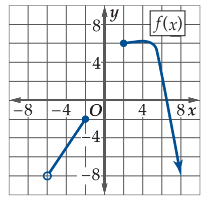
الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، ثم حلّل منحناها لتحدِّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًا. وإذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: (مثال 6) 25-30) انظر ملحق الإجابات.

25) $f(x)=x^2+6x+10$ 26) $f(x)=-2x^3+5x-4$

27) $g(x)=\sqrt{x+6}$ 28) $h(x)=|8-2x|$

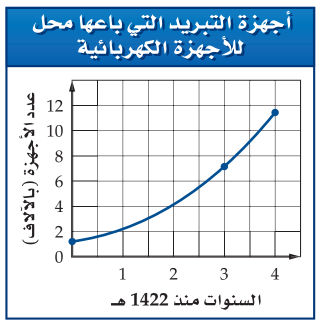
29) $f(x)=|x^3|$ 30) $g(x)=\frac{x^2}{x+1}$

31) استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



a) $f(-2)$ **−2** b) $f(-4)$ **−5** c) $f(2)$ **6**

32) **مبيعات:** إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة من 1422هـ إلى 1426هـ يُعطى بالدالة $h(x)=0.5x^2+0.5x+1.2$، حيث x رقم السنة منذ 1422 هـ. 32a-d) انظر الهامش.



a) اكتب مجال الدالة، ثم قرِّب مداها.

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1424هـ. ثم أوجد ذلك جبريًّا.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًّا. ماذا يمثّل المقطع y؟

d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسِّر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

إجابات:

15) المقطع y هو 2، صفرا الدالة هما −2 وَ 1

$0=x^3-3x+2$

$0=(x+2)(x-1)(x-1)$

$x+2=0$ أو $x-1=0$

$x=-2$ أو $x=1$

16) المقطع y هو 6؛ صفرا الدالة هما −2 وَ −3

$0=x^2+5x+6$

$0=(x+2)(x+3)$

$x+2=0$ أو $x+3=0$

$x=-2$ أو $x=-3$

32a) المجال: $\{x \mid 0\le x\le 4, x\in W\}$

المدى:

$\{y \mid 1200\le y\le 11200, y\in R\}$

32b) إجابة ممكنة: 4500 جهاز. وجبريًّا: 4200 جهاز.

32c) إجابة ممكنة: 1100، وجبريًّا: 1200. ويمثل المقطع y عدد الأجهزة المبيعة سنة 1422 هـ.

32d) لا يوجد لهذه الدالة أصفار؛ لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة.

33) **دوال:** إذا كانت $f(x) = x^n$ ، حيث $n \in N$ فأجب عن الأسئلة الآتية:

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \le n \le 6$.

b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.

c) صف التماثل لكل دالة.

d) تنبّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$ ، ومداها، وتماثلها، ثم برّر إجابتك.

(33a–d انظر ملحق الإجابات.

34) **صيدلة:** إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة :

$$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$

(34a–b انظر الهامش.

a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا .

b) اكتب المجال المناسب للدالة، وفسّر إجابتك.

c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟ **346 ملجرام تقريبًا**

الحاسبة البيانيّة: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا. **35-38** انظر ملحق الإجابات.

35) $f(x) = \frac{4x - 1}{x}$

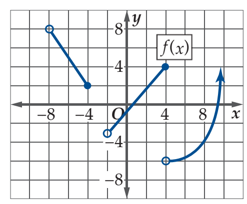
36) $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x + 3}$

37) $h(x) = 2\sqrt{x + 12} - 8$

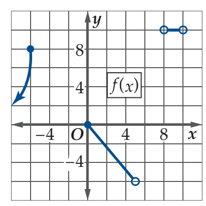
38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي: **39-41)** انظر الهامش.

39)



40)



41) **فيزياء:** إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$

a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.

b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.

c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

42) **أسهم:** افترض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة : **(42a–d** انظر الهامش.

$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$

حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد مجال الدالة، ثم قدّر مداها.

c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟

d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

43) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x - 2}$ عندما تقترب x من العدد 2.

a) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	−100	−1000	غير معرف	1000	100

b) **تحليليًّا:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟ **(43b–d** انظر ملحق الإجابات.

c) **بيانيًّا:** مثّل الدالة بيانيًّا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b** ؟ وضح إجابتك.

d) **لفظيًّا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح إجابتك .

الحاسبة البيانيّة: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا. و حدِّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. **44–49** انظر ملحق الإجابات.

44) $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$

45) $f(x) = x^2 - x - 6$

46) $h(x) = x^6 + 4$

47) $f(g) = g^9$

48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$

49) $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

مسائل مهارات التفكير العليا

50–54 انظر ملحق الإجابات.

مسألة مفتوحة: مَثِّل بيانيًّا منحنًى يحقق الشروط في كل حالة مما يأتي:

50) منحنى يمر بالنقاط $(-8, 1), (-5, 2), (-4, 4), (-3, 8)$ ، ومتماثل حول المحور y .

51) منحنى يمر بالنقاط $(0, 0), (2, 6), (3, 12), (4, 24)$ ، ومتماثل حول المحور x .

52) منحنى يمر بالنقاط $(-3, -18), (-2, -9), (-1, -3)$ ، ومتماثل حول نقطة الأصل.

53) منحنى يمر بالنقاط $(4, -16), (6, -12), (8, -8)$ ويمثِّل دالة زوجية.

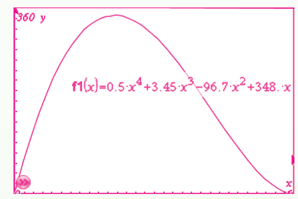
54) **اكتب:** وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من مقاطع x ، بينما يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر .

تمثيلات متعددة

في السؤال 43 يستعمل الطلاب الجداول والتحليل والتمثيل البياني والتعبير اللفظي لاستقصاء مدى دالة عندما تقترب x من عدد ما.

إجابات :

(34a



(34b المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 6, x \in W\}$ ، يبقى مسكّن الألم في الدم من صفر إلى 6 ساعات.

(39 المجال: $(-8 , -4] \cup (-2 , \infty)$

المدى : $(-6 , \infty)$

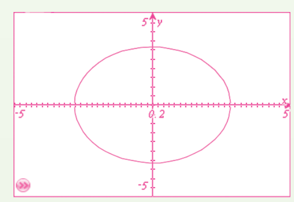
(40 المجال :

$(-\infty , -6] \cup [0 , 5) \cup (8 , 10)$

المدى : $(-\infty , 8) \cup \{ 10 \}$

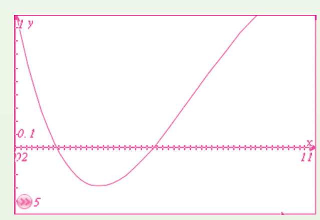
(41a المنحنى متماثل حول نقطة الأصل، وحول المحور x، وحول المحور y .

(41b



(41c $(2,-\sqrt{5}),(-2,\sqrt{5}),(-2,-\sqrt{5})$

(42a



(42b المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 11, x \in W\}$

المدى: $\{y \mid -0.5 \le y \le 1, y \in R\}$

(42c 1.04، إجابة ممكنة: يمثل المقطع y نسبة التغير المئوية الابتدائية في الأسعار.

(42d 1.5, 5.2، تمثل الأصفار خط الأساس أو الوقت الذي تكون فيه نسبة التغير صفرًا. فمثلًا النقطة التي تكون عندها نسبة الزيادة 60% هي أكبر بمقدار 60% من خط الأساس.

55) **تحدٍّ:** أوجد مجال الدالة $f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^3-4x^2-12x}$، ومداها. برِّر إجابتك، ثم تحقّق منها بيانيًّا. **68-55 انظر ملحق الإجابات.**

تبرير: أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة. برِّر إجابتك.

56) مدى الدالة $f(x) = nx^2$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

57) مدى الدالة $f(x) = \sqrt{nx}$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

58) جميع الدوال الفردية متماثلة حول المستقيم $y = -x$.

59) إذا دارت دالة زوجية $180°n$ حول نقطة الأصل، حيث n عدد صحيح، فإنها تبقى زوجية.

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد ما إذا كانت الدالة $b(x)$ فردية، أم زوجية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، وبرِّر إجابتك:

60) $b(x) = a(-x)$

61) $b(x) = -a(x)$

62) $b(x) = [a(x)]^2$

63) $b(x) = a(|x|)$

64) $b(x) = [a(x)]^3$

تبرير: هل يمثّل المنحنى المعطى تماثله في كل مما يأتي دالة دائمًا أم أحيانًا أم لا يمثّل دالة؟ وبرِّر إجابتك.

65) متماثل حول المستقيم $x = 4$.

66) متماثل حول المستقيم $y = 2$.

67) متماثل حول كل من المحورين x, y.

68) **اكتب:** وضّح لماذا لا تكون العلاقة المتماثلة حول المحور x دالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

69) $g(x) = x^2 - 10x + 3$

a) $g(2)$ **-13**

b) $g(-4x)$ **$16x^2 + 40x + 3$**

c) $g(1+3n)$ **$9n^2 - 24n - 6$**

70) $p(x) = \frac{2x^3+2}{x^2-2}$

a) $p(3)$ **8**

b) $p(x^2)$ **$\frac{2x^6+2}{x^4-2}$**

c) $p(x+1)$ **$\frac{2x^3+6x^2+6x+4}{x^2+2x-1}$**

71) $h(x) = 2x^2 + 4x - 7$

a) $h(-9)$ **119**

b) $h(3x)$ **$18x^2 + 12x - 7$**

c) $h(2+m)$ **$2m^2 + 12m + 9$**

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية (الدرس 1-1)

72) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}$ **$\{x \mid x \in R\}$**

73) $f(x) = \frac{1}{x^2-16}$ **$\{x \mid x \neq \pm 4, x \in R\}$**

74) $f(x) = \sqrt{3x+18}$ **$\{x \mid x \geq -6, x \in R\}$**

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

75) $27^{\frac{1}{3}}$ **3**

76) $64^{\frac{5}{6}}$ **32**

77) $49^{-\frac{1}{2}}$ **$\frac{1}{7}$**

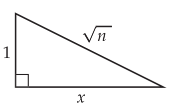
78) $16^{-\frac{3}{4}}$ **$\frac{1}{8}$**

79) $25^{\frac{3}{2}}$ **125**

80) $36^{-\frac{3}{2}}$ **$\frac{1}{216}$**

تدريب على اختبار

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه. **B**



A) $\sqrt{n^2-1}$ C) $\sqrt{n+1}$

B) $\sqrt{n-1}$ D) $n-1$

82) ما مدى الدالة $f(x) = x^2 + 1$، إذا كان مجالها $-2 < x < 3$؟ **D**

A) $5 < f(x) < 9$ C) $1 < f(x) < 9$

B) $5 < f(x) < 10$ D) $1 \leq f(x) < 10$

4 التقويم

فهم الرياضيات: اكتب الخطوات اللازمة لتحديد الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

1) إذا كان $f(-x) = f(x)$، فإن الدالة زوجية.

2) إذا كان $f(-x) = -f(x)$، فإن الدالة فردية.

3) إذا كان $f(-x) \neq f(x)$ أو $f(x) \neq -f(x)$، فإن الدالة غير ذلك.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 1-1، 2-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

تنويع التعليم

فوق

توسّع: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية و $g(x)$ دالة فردية، وكان $h(x) = f(x) \cdot g(x)$، فهل $h(x)$ دالة زوجية أو فردية أو ليست أيًّا منهما؟ وضِّح إجابتك. دالة فردية؛ لأن: $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -h(x)$.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) دون

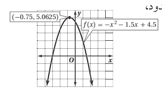
الاسم: ________ التاريخ: ________

1-2 تدريبات إعادة التعليم

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال إذا نظرت إلى منحنى الدالة، فإنه يمكنك تحديد مجالها ومداها، وتقدير المقطعين x, y. تسمى المقاطع x لمنحنى دالة بأصفار هذه الدالة؛ لأن قيمة الدالة عند كلّ منها تساوي صفرًا.

مثال استعمل التمثيل البياني للدالة f لإيجاد مجالها ومداها وقيمة تقريبية للمقطع y وأصفارها، ثم أوجد المقطع y وأصفار الدالة جبريًّا.



يدل السهمان اللذان على المنحنى على استمراريته من اليسار ومن اليمين دون حدود، لذا فإن مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

لا تزيد قيم الدالة على 5.0625 أو $f(-0.75)$، لذا فإن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن أو تساوي 5.0625

أي أنّ المدى: $\{y \mid y \leq 5.0625, y \in \mathbf{R}\}$

التقدير من التمثيل البياني: المقطع y هو الإحداثي y للنقطة التي يقطع عندها المنحنى المحور y، ويُقدَّر بـ 4.5، وبالمثل فإن المقطعين x للدالة أو صفري الدالة هما الإحداثيان x للنقطتين اللتين يقطع المنحنى عندهما المحور x، ويبدو أنهما عند -3 و 1.5

الحل جبريًّا: لإيجاد المقطع y جبريًّا، أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = -(0)^2 - 1.5(0) + 4.5 = 4.5$$

ولإيجاد أصفار الدالة جبريًّا ضع $f(x) = 0$، ثم حلّ المعادلة بالنسبة إلى x

$$-x^2 - 1.5x + 4.5 = 0$$

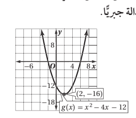
$$-1(x+3)(x-1.5) = 0$$

$x = 1.5$ أو $x = -3$

تمارين

استعمل التمثيل البياني للدالة g لإيجاد مجال الدالة ومداها وقيمة تقريبية للمقطع y وأصفارها، ثم أوجد المقطع y وأصفار الدالة جبريًّا.

(1



المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

المدى: $\{y \mid y \geq -16, y \in \mathbf{R}\}$

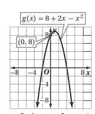
المقطع y: -12

الصفران: $-2, 6$

$x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)$;

$x = -2$ أو $x = 6$

(2



المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

المدى: $\{y \mid y \leq 9, y \in \mathbf{R}\}$

المقطع y: 8

الصفران: $-2, 4$

$8 + 2x - x^2 = -(x+2)(x-4)$;

$x = -2$ أو $x = 4$

الصف: الثالث الثانوي | 10 | الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

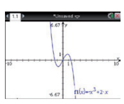
تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

تماثل المنحنيات يوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتماثلة حول المحور x أو المحور y **محور تماثل**. ويوجد للتمثيل البياني للعلاقة المتماثلة حول نقطة الأصل **نقطة تماثل**.

متماثل بالنسبة إلى...	الوصف	الاختبار الجبري
المحور x	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.
المحور y	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.
نقطة الأصل	إذا وقعت (x, y) على المنحنى، فإن $(-x, -y)$ تقع على المنحنى نفسه.	عند وضع $-x$ مكان x، و $-y$ مكان y نحصل على معادلة مكافئة للمعادلة الأصلية.

تسمى الدّوال المتماثلة حول المحور y دوالّ **زوجية**، وفيها يكون $f(-x) = f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة. وتسمى الدّوال المتماثلة حول نقطة الأصل دوالّ **فردية**، وفيها يكون $f(-x) = -f(x)$.

مثال استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = -x^3 + 2x$ بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.



يتضح من التمثيل أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

التحقق جبريًّا: $f(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -f(x)$

إذن فالدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

تمارين

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلّ دالة من الدّوال الآتية، ثم حلّل منحناها؛ لتحدد ما إذا كانت زوجية أو فردية أو غير ذلك، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

1) $f(x) = 4x^3 + 1$

ليست فردية وليست زوجية؛ لأن $4(-x)^3 + 1 = -4x^3 + 1$

2) $g(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

زوجية؛ لأن $(-x)^4 - 10(-x)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9$ متماثلة حول المحور y.

3) $g(x) = \frac{5}{x^4}$

زوجية؛ لأن $\frac{5}{(-x)^4} = \frac{5}{x^4}$ متماثلة حول المحور y.

4) $g(x) = x^3 - 6x$

فردية؛ لأن $(-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x$ متماثلة حول نقطة الأصل.

الصف: الثالث الثانوي | 11 | الفصل 1: تحليل الدوال

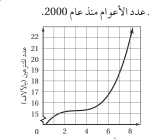
تدريبات حل المسألة (12) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-2 تدريبات حل المسألة

تحليل التمثيلات البيانية للدّوال والعلاقات

1) **متنزّه:** إذا كان العدد السنوي للمتنزّهين في أحد المتنزّهات من عام 2000 إلى عام 2008 يُعبّر عنه بالمعادلة $v(x) = 0.05x^3 - 0.51x^2 + 1.81x + 13.35$، حيث x عدد الأعوام منذ عام 2000.

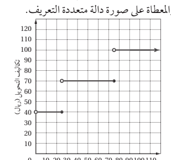


a) اعتمادًا على التمثيل البياني، قدّر عدد المتنزّهين عام 2006. **16700**

b) أوجد العدد التقريبي للمتنزّهين عام 2006 جبريًّا. **16650**

c) في أي عام زاد عدد المتنزّهين على 20000 أول مرة؟ **2008**

2) **حوالات:** يبيّن الشكل الآتي تكاليف الحوالات النقدية والمعطاة على صورة دالة متعددة التعريف.

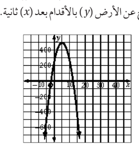


a) اكتب مجال الدالة ومداها.

المجال: $(0, \infty)$، المدى: $\{40, 70, 100\}$

b) قدّر تكاليف تحويل 245 ألف ريال بالاعتماد على التمثيل البياني أعلاه. **100 ريال**

3) **صناعة:** أطلق نموذج صاروخ وتمثّل الدالة: $y = -10x^2 + 100x + 250$ العلاقة بين ارتفاع الصاروخ عن الأرض (y) بالأقدام بعد (x) ثانية.



a) ما الارتفاع الذي أُطلق منه الصاروخ؟ **250 قدمًا**

b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟ **700 قدم**

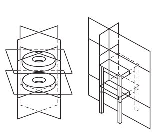
الصف: الثالث الثانوي | 12 | الفصل 1: تحليل الدوال

التدريبات الإثرائية (13) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-2 التدريبات الإثرائية

تماثل الأشكال الثلاثية الأبعاد



تماثل الأشكال الثلاثية الأبعاد: يوجد تماثل للأجسام الثلاثية الأبعاد كما هو الحال في الأشكال الثنائية الأبعاد.

إذا قطع مستوى مجسمًا، وكان كل من جزأي المجسم صورة مرآة للجزء الآخر، فإن المستوى يُسمى مستوى تماثل للمجسم. وقد يكون للمجسم عددٌ منتهٍ، أو غيرُ منتهٍ من مستويات التماثل. ففي الشكل المجاور، يوجد للكرسي مستوى تماثل واحد، في حين يوجد لقطعة الحلوى عدد غير منتهٍ من مستويات التماثل رُسِمَ ثلاثة منها.

حدِّد عدد مستويات التماثل لكل مجسم مما يأتي، ثم صفها.

1) طوبة على شكل متوازي مستطيلات.

ثلاثة مستويات تماثل تمر بالمركز، وكل مستوى منها يوازي وجهين متقابلين.

2) كرة تنس.

عدد لا نهائي من المستويات يمر كل منها بمركز الكرة.

3) علبة عصير أسطوانية الشكل.

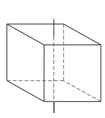
عدد لا نهائي من المستويات تمر بالمحور المركزي، بالإضافة إلى مستوى يمر بمنتصف المحور، ويصنع معه زاوية قائمة.

4) هرم قاعدته مربع.

4 مستويات تمر جميعها بالرأس العلوي: مستويان كل منهما يوازي حرفين متقابلين من القاعدة، والمستويان الآخران يمران بقطري القاعدة.

5) مكعب.

9 مستويات: 3 مستويات كل منها يوازي وجهين متقابلين، وأما المستويات الستة الباقية فيمر كل منها بزوج من الأحرف المتقابلة.



يوجد كذلك تماثل دوراني للمجسمات. فمثلًا في الشكل المجاور، المحور المرسوم خلال المكعب يمثّل محور تماثل دوراني من الرتبة الرابعة؛ لأنه يمكن تدوير المكعب حوله إلى أربعة أوضاع مختلفة متطابقة.

6) كم محور تماثل دوراني من الرتبة الرابعة للمكعب؟ استعمل مكعب الأرقام لتحدد محاور التماثل.

3؛ كل محور يمر بمركزي وجهين متقابلين.

الصف: الثالث الثانوي | 13 | الفصل 1: تحليل الدوال

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

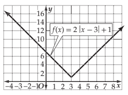
مصادر الدرس 2 - 1

دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط

كتاب التمارين (5) دون ضمن فوق

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

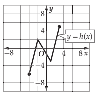
1) استعمل التمثيل البياني المجاور لتقدير قيمة $f(-2.5), f(1), f(7)$، ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. $12; 5; 9$



الفصل الأول تحليل الدوال

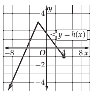
استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.

2)



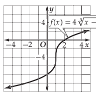
المجال $= [-4, 3]$
المدى $= [-6, 5]$

3)



المجال $= (-\infty, 4]$
المدى $= (-\infty, 3]$

4) استعمل التمثيل البياني المجاور لإيجاد المقطع y للدالة f وأصفارها، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا. المقطع y : $f(0) = -8$ ؛ صفر الدالة: 2



$4\sqrt[3]{0-1} - 4 = 4\sqrt[3]{-1} - 4 = 4(-1) - 4 = -8;$

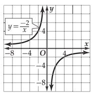
$y = -8$

$0 = 4\sqrt[3]{x-1} - 4; 4 = 4\sqrt[3]{x-1};$

$1 = \sqrt[3]{x-1}, 1 = x - 1; 2 = x$

استعمل التمثيل البياني لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. وعزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقق منها جبريًّا:

5)

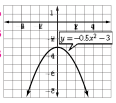


متماثل حول نقطة الأصل

$-y = \frac{-2}{-x}$

$y = \frac{-2}{x}$

6)



متماثل حول المحور y

$y = -0.5(-x)^2 - 3$

$y = -0.5(x)^2 - 3$

7) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة $g(x) = \frac{1}{x^2}$ بيانيًّا، ثم حلِّل منحناها؛ لتحدد إن كانت الدالة زوجيةً أم فرديةً أم غير ذلك. ثم تحقَّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجيةً أو فرديةً فصِف تماثل منحناها.

زوجية، متماثلة حول المحور y .

5

ملحوظات المعلم

1-3 ملاحظات الدرس

1-3 الاتصال والنهايات
Continuity and Limits

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 2–1)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبّقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function

النهاية limit

الدالة غير المتصلة discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity

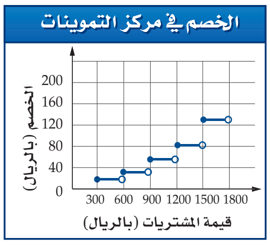
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

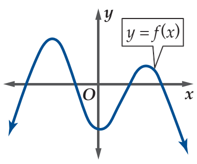
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.



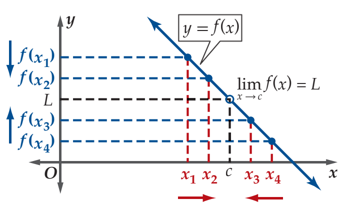
$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x=c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

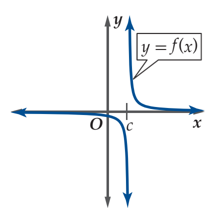


إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

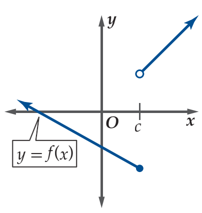
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x=c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



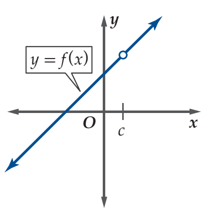
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x=c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل للإزالة** عند $x=c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولاتساوي قيمة الدالة عند $x=c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-1

إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني.

الدرس 3-1

استعمال النهايات للتحقق من اتصال دالة، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

استعمال النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

ما بعد الدرس 3-1

إيجاد القيم القصوى لدالة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة 400 ريال .
  20 ريالًا تقريبًا
- أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة 1200 ريال .
  80 ريالًا
- ماذا تعني الدوائر الصغيرة المظللة والمفتوحة على التمثيل البياني؟
  تعني الدوائر المظللة أن النقطة تنتمي إلى الدالة، وتعني الدوائر المفتوحة أن النقطة لا تنتمي إلى الدالة.

مصادر الدرس 3-1

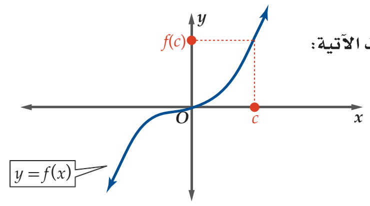
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (32 ، 33)	• تنويع التعليم ص (32)	• تنويع التعليم ص (35)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

إرشادات للدراسة

النهايات: إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

ملخص المفهوم **اختبار الاتصال**

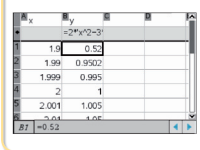


يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

إرشاد تقني

جداول: لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة، ثم اختر تطبيق القوائم وجداول البيانات بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة.



مثال 1 التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

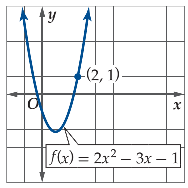
$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.



الشكل 1.3.1

3) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ؛ فالدالة متصلة عند $x = 0$.

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

1B) الدالة غير متصلة عند $x = 0$ ؛ لأن $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من 0 .

الاتصال

المثالان 1 , 2 يبيِّنان كيفية تحديد نقاط الاتصال ونقاط عدم الاتصال للدوال ونوعها.

المثال 3 يبين كيفية إزالة عدم الاتصال في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة.

المثالان 4 , 5 يبيِّنان كيفية تقريب أصفار الدالة في فترة معطاة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ متصلة عند $x = \frac{1}{2}$. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ موجودة .

3) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$.

أي أن الدالة متصلة عند $x = \frac{1}{2}$.

المحتوى الرياضي

غير محدد وغير معرف: نقول: إن القيمة غير محددة بمعنى أنه لا يمكن تحديد قيمتها. وسنعتبر في هذا الكتاب أن "غير معرف" تعني أنها غير موجودة.

إذا لم يتحقّق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة، فاختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع عدم الاتصال عند تلك نقطة.

مثـال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \quad x>-3\\ 2-x & , \quad x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3)=5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x=-3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x=-3$.

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3$, $x=3$.

عند $x=3$

1) $f(3)=\frac{6}{0}$ ، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

عند $x=-3$

1) $f(-3)=\frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)\approx -0.167\approx -\frac{1}{6}$.

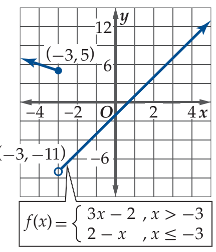
3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=-3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

تحقق من فهمك

2A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

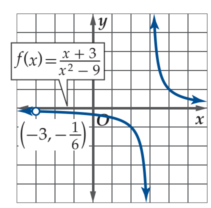
2B) $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \quad x>2\\ 2-x & , \quad x\le 2\end{cases}$ ، عند $x=2$.

2A) غير متصلة عند $x=0$ ، بما أن $f(0)=\frac{1}{0}$ هذه القيمة غير معرفة، فإن للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=0$.



الشكل 1.3.2

2B) غير متصلة عند $x=2$ ، $f(2)=0$ ، وبما أن $f(x)$ تقترب من 0 عندما تقترب x من 2 من جهة اليسار، في حين تقترب من 14 عندما تقترب x من 2 من جهة اليمين، لذا فإن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة. وللدالة عدم اتصال قفزي عند $x=2$.



الشكل 1.3.3

مثال إضافي

2 حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، و إذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ؛ عند $x=1$

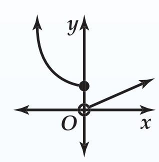
$f(x)$ غير متصلة عند $x=1$ ، وعدم الاتصال لا نهائي.

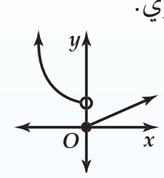
b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ ؛ عند $x=2$

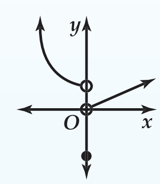
$f(x)$ غير متصلة عند $x=2$ ، وعدم الاتصال قابل للإزالة.

المحتوى الرياضي

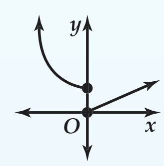
الاتصال: أنواع أخرى من عدم الاتصال القفزي.







أما هذا التمثيل: فلا يمثل عدم اتصال قفزيّ؛ لأنه لا يمثل دالة.

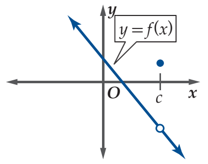


وبالمثل إذا كان عدم الاتصال قابلًا للإزالة، فيمكن أن تكون الدالة معرّفة عند نقطة عدم الاتصال، وقد لا تكون.

التعليم باستعمال التقنيات

أدوات التمثيل البياني: توفِّر أدوات التمثيل مثل الحاسبة البيانية والبرامج المحوسبة طرقًا سهلة وسريعة لاستكشاف خصائص الدوال، لذا اطلب إلى الطلاب استعمال أدوات التمثيل البياني؛ لمعرفة كيفية تغير النهايات لدوالٍ نهاياتُها موجودة.

لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.



يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

1) $f(4) = \frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

تحقق من فهمك

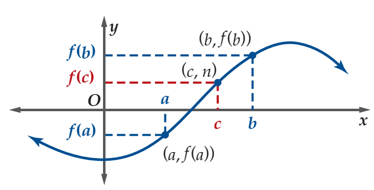
3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$. انظر الهامش.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a $(\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a))$، ومتصلة من اليسار عند b $(\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b))$. ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نظرية نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.



مثال إضافي

3 أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$$

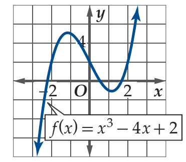
إجابة تحقق من فهمك:

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50



الشكل 1.3.4

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2 ,-3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.

✓ تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

بين العددين -5 وَ -4، وبين 0 وَ 1، وبين 1 وَ 2

4B) $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

بين العددين -3 وَ -2 وبين 2 وَ 3

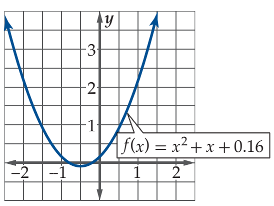
إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمَّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$ ؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

5A) للدالة صفر حقيقي عند $x = 1$، وصفران حقيقيان بين العددين -1 وَ 0

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

5B) للدالة صفر حقيقي بين العددين 1 وَ 2

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

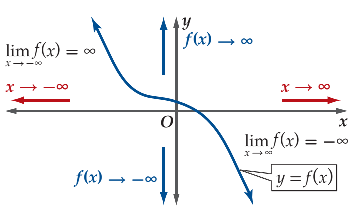
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.



إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

قراءة الرياضيات

النهايات: تقرأ العبارة $\lim_{x \to \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

مثالان إضافيان

4 حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقة للدالة $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ في الفترة $[-2, 2]$.

يوجد للدالة صفران ، بين -1 والعدد صفر، وبين 1 وَ 2

5 حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقة للدالة $f(x) = x^3 + 2x + 5$ في الفترة $[-2, 2]$.

يوجد للدالة صفر واحد بين العددين -2 وَ -1

إرشادات للمعلم الجديد

تغير الإشارة: وضح للطلاب أن الدالة $f(x) = (x - 1)^2$ لا تغير إشارتها عند عددين صحيحين متتاليين ، في حين أنه يوجد للدالة صفر مكرر عند $x = 1$.

تنويع التعليم

دون ضمن

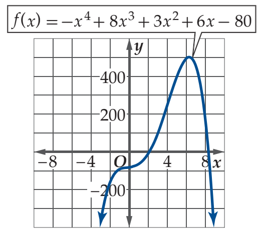
المتعلمون المنطقيون: اطلب إلى الطلاب تطوير قواعد عامة لتمثيل الدوال أو تذكّرها ، واطلب إليهم اختبار قواعدهم بتمثيل بعض الدوال دون استعمال أدوات التمثيل، ثم باستعمالها ، واطلب إليهم التفكير فيما يحدد خطوط التقارب الرأسية والأفقية.

إرشادات للدراسة

في المثال 6، أوجدت قيم تقريبية لـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لـ $f(x)$. وكذلك في المثال 7.

مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$، وأن $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

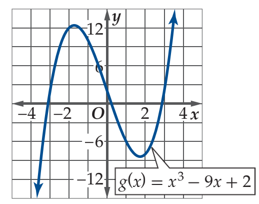
كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1\cdot10^{16}$	$-1\cdot10^{12}$	$-1\cdot10^{8}$	-80	$-1\cdot10^{8}$	$-1\cdot10^{12}$	$-1\cdot10^{16}$

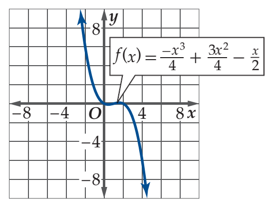
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك انظر الهامش.

6A)



6B)



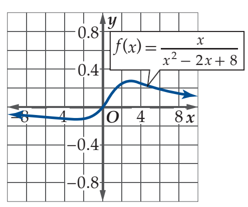
6A) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$، فإنّ $g(x) \to -\infty$. وعندما $x \to \infty$، فإنّ $g(x) \to \infty$. أي أنَّ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$.

x	$g(x)$
-10000	$-1\cdot10^{12}$
-1000	$-1\cdot10^{9}$
0	2
1000	9999.9×10^{5}
10000	10^{12}

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، على حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1\cdot10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1\cdot10^{-4}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

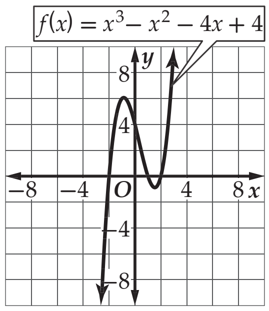
سلوك طرفي التمثيل البياني

مثال 6 يبيِّن كيفية معرفة سلوك نهاية الدالة عندما تقترب $f(x)$ من المالانهاية.

المثالان 8 , 7 يبيِّنان كيفية معرفة سلوك نهاية الدالة عندما تقترب $f(x)$ من قيمة محددة.

مثال إضافي

6 استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.



$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ وَ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

يتضح من التمثيل البياني أنه عندما:

$x \to -\infty, f(x) \to -\infty$

$x \to \infty, f(x) \to \infty$

x	$f(x)$
-10000	$-1\cdot10^{12}$
-1000	$-1\cdot10^{9}$
0	4
1000	99.9×10^{7}
10000	999.9×10^{9}

إجابة:

6B) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$، فإنَّ $f(x) \to \infty$. عندما $x \to \infty$، فإنَّ $f(x) \to -\infty$. أي أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

x	$f(x)$
$-10,000$	$-1\cdot10^{11}$
-1000	$-1\cdot10^{8}$
0	0
1000	$-2.5\cdot10^{8}$
$10,000$	$-2.5\cdot10^{11}$

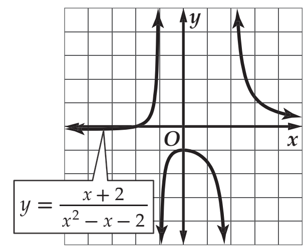
تنويع التعليم

دون

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة لعمل شبكة مربعات على ورقة كبيرة، واطلب إليهم تدريج المحورين من 50− إلى 50، ثم اطلب إليهم اختيار دالة غير متصلة، وتمثيل نقاطها عند كل مضاعفات الخمسة على المحور x، وكذلك اختيار دالة أخرى نهايتها محددة، وتمثيل مجموعة من نقاطها. واطلب إليهم وصف عدم الاتصال وسلوك نهاية الدوال باستعمال تمثيلاتها البيانية.

مثالان إضافيان

7 استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



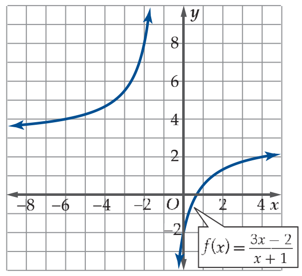
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

8 **فيزياء:** دالة تماثُل الطاقة هي $E=\dfrac{x^2+y^2}{2}$. فإذا كانت قيمة y ثابتة، فماذا يحدث لقيم دالة تماثل الطاقة عندما تتناقص قيم x ؟

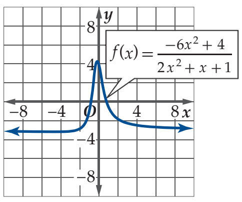
$\lim\limits_{x\to-\infty} E=\infty$

✅ **تحقق من فهمك**

(7A



(7B



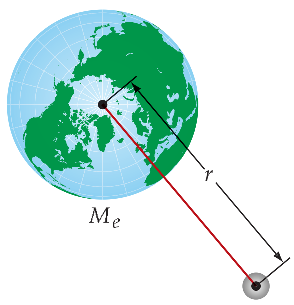
7A) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to-\infty$، فإنَّ $f(x)\to 3$. وعندما $x\to\infty$، فإنَّ $f(x)\to 3$.
أي أنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

7B) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x\to-\infty$، فإنَّ $f(x)\to-3$. وعندما $x\to\infty$، فإنَّ $f(x)\to-3$.
أي أنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-3$.

إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 8 من واقع الحياة تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r)=-\dfrac{GmM_e}{r}$، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟



الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r)=-\dfrac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .
المصدر: The Mechanical Universe

المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لِـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim\limits_{r\to\infty} U(r)$.
وبما أن كلًّا من G, m, M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\dfrac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim\limits_{r\to\infty} U(r)=0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

✅ **تحقق من فهمك** عندما تستمر سرعة جزيئات الغاز في التزايد، فإن الضغط الديناميكي يؤول إلى ∞ .

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v)=\dfrac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–23، 37، 36، 43–58
ضمن المتوسط	1–27 (فردي)، 28، 30، 31، 33–58
فوق المتوسط	23–58

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، عند $x = -5$. **7-1) انظر الهامش.**

2) $f(x) = \sqrt{x + 5}$ ، عند $x = 8$.

3) $h(x) = \frac{x^2 - 36}{x + 6}$ ، عند $x = 6 , x = -6$.

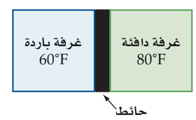
4) $g(x) = \frac{x}{x - 1}$ ، عند $x = 1$.

5) $h(x) = \frac{x - 4}{x^2 - 5x + 4}$ ، عند $x = 4 , x = 1$.

6) $h(x) = \frac{x(x - 6)}{x^3}$ ، عند $x = 6 , x = 0$.

7) $f(x) = \begin{cases} 4x - 1 , & x \le -6 \\ -x + 2 , & x > -6 \end{cases}$ ، عند $x = -6$.

8) **فيزياء:** غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط بحسب العلاقة $f(w) = \frac{7.4}{w}$ ، حيث تمثل $f(w)$ المعدل الزمني لانتقال الحرارة بالواط، و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1,2)



a) حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w = 0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. **8) انظر ملحق الإجابات.**

b) حدّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعه؟

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b .

9) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ لتصبح متصلة عند $x = -3$ (المثال 3) **انظر الهامش.**

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (المثالان 4, 5)

10) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, [-2, 4]$ **بين 1 وَ 2**

11) $g(x) = -x^3 + 6x + 2, [-4, 4]$

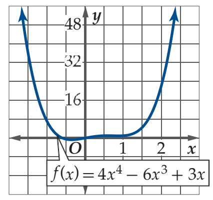
12) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 3, [-3, 3]$ **بين −1 وَ 0، وبين 1 وَ 2**

13) $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 5}, [-2, 4]$ **لا يوجد أصفار للدالة في الفترة المعطاة.**

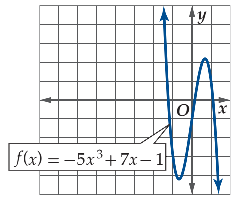
14) $g(x) = \sqrt{x^3 + 1} - 5, [0, 5]$ **بين 2 وَ 3**

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا. (المثالان 6, 7)

15)

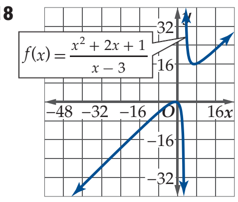


16)

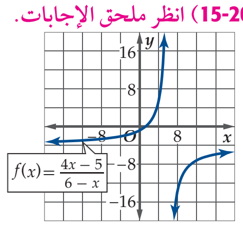


15-20) انظر ملحق الإجابات.

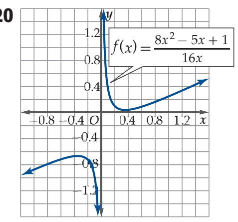
17)



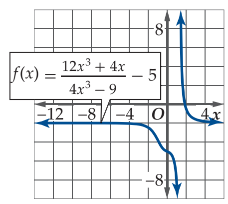
18)



19)



20)



21) **كيمياء:** يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x) = \frac{0.5x}{x + 12}$ ، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 7) **انظر ملحق الإجابات.**

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة.

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزِّز إجابتك عدديًّا.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞ . برِّر إجابتك. (مثال 8) **22-25) انظر ملحق الإجابات.**

22) $f(u) = \frac{12}{u}$

23) $q(x) = -\frac{24}{x}$

24) $f(x) = \frac{0.8}{x^2}$

25) $h(r) = \frac{-1}{r^2 + 1}$

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m) = \frac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة)، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ (مثال 8) **انظر الهامش.**

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–23 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

1) الدالة معرفة عند $x = -5$ ، تؤول قيم الدالة إلى 4.58 عندما تقترب x من -5 من الجهتين؛ $f(-5) = 4.58$. الدالة متصلة عند -5.

2) الدالة معرفة عند $x = 8$، تؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين؛ $f(8) = 3.61$. الدالة متصلة عند 8.

3) للدالة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = -6$ ، الدالة معرفة عند $x = 6$ ، تقترب قيم الدالة إلى 0 عندما تقترب x إلى 6 من الجهتين. $h(6) = 0$ الدالة متصلة عند $x = 6$.

4) للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$.

5) للدالة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 4$. للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$، قيم الدالة تقترب من $\frac{1}{3}$ عندما تقترب x من 4 من الجهتين.

6) للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$، الدالة معرفة عند $x = 6$، وتقترب قيم الدالة من 0 عندما تقترب x من 6 من الجهتين؛ $h(6) = 0$ ، الدالة متصلة عند $x = 6$.

7) للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = -6$، حيث $f(x)$ تقترب من -25 عندما تقترب x من -6 من جهة اليسار، وتقترب من 8 عندما تقترب x من -6 من جهة اليمين .

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3} , & x \ne -3 \\ -6 , & x = -3 \end{cases}$

11) بين -3 وَ -2 ، وبين -1 وَ 0 ، وبين 2 وَ 3

26) إجابة ممكنة: عندما تتزايد كتلة الجسم، فإن طاقة السيارة الحركية تقترب من 0.

تنويع التعليم

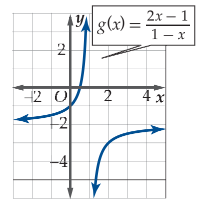
فوق

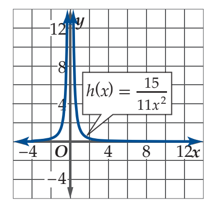
توسّع: أوجد قيم كل من b,m التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 , x \le 0 \\ mx + b , 0 < x < 1 \\ x^2 , x \ge 1 \end{cases}$$

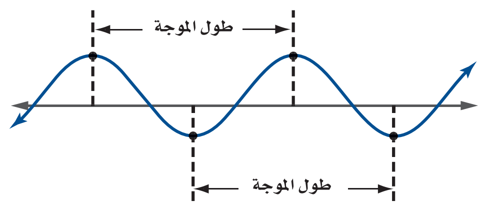
إجابة ممكنة: $m = 1, b = 0$.

استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برِّر إجابتك. **(27,28)** انظر الهامش.

27)


28)


29) **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (ويقرأ لامدا)، و يُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f. انظر ملحق الإجابات



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز إجابتك عدديًّا.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال.
لا، عدم اتصال لا نهائي عند $\lambda = 0$

الحاسبة البيانية: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال، وحدد نقاطه. ثمّ صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت.
(30-32) انظر ملحق الإجابات.

30) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

31) $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

32) $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية وَ صِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًّا. **(33,34)** انظر ملحق الإجابات.

33) $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

34) $f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x}$

35) **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًّا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي: انظر ملحق الإجابات.

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.

c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات.
افترض أن $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان. انظر ملحق الإجابات.

a) **جدوليًّا:** افترض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d. ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول أدناه:

$c = 1$				
a	b	d	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
−1	5	7	−1	−1
9	−6	8	9	9

b) **جدوليًّا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوِّن جدولًا كما في الفرع **a**.

c) **تحليليًّا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$ ومن $+\infty$.

37) **الحاسبة البيانية:** مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًّا، حيث n, a, b أعداد صحيحية غير سالبة. انظر ملحق الإجابات.

a) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا زوجيًّا موجبًا، ثم عزز إجابتك بيانيًّا.

b) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا فرديًّا موجبًا ، ثم عزز إجابتك بالتمثيل البياني.

خطأ شائع: في السؤال 36 فرع c، قد يحدث لبس عند بعض الطلاب بأن يظنوا أن للدالة عدة متغيرات؛ لذا ذكّرهم بأن x هو المتغير المستقل الوحيد، وأن a, b, c, d ثوابت.

تمثيلات متعددة

في السؤال 36 يستعمل الطلاب الجداول والتحليل لاستقصاء النهايات.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم تحليل التمثيلات البيانية للعلاقات والدوال على فهم الاتصال والسلوك النهائي للدالة.

إجابات:

27) للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$. عندما $x \to \mp\infty$ فإن $g(x) \to -2$.

28) للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$. عندما $x \to \mp\infty$ فإن $h(x) \to 0$.

مسائل مهارات التفكير العليا

(38-44) انظر الهامش.

تبرير: بيِّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

38) $f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$

39) $f(x) = \frac{x^4}{x^5}$

40) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \quad x \geq 3 \\ bx + a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$$

تبرير: أوجد $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرِّر إجابتك.

41) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

42) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

43) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

44) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y.

45) **اكتب:** أعطِ مثالًا على دالة لها عدم اتصال قابل للإزالة، ثم بيّن كيف يمكن إزالته. وكيف تؤثر إزالة عدم الاتصال في الدالة؟
انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًّا، وتحديد أصفارها. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا: (الدرس 1-2)

46) $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ (46-48) انظر ملحق الإجابات.

47) $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

48) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

حدد مجال كل من الدوال الآتية: (الدرس 1-1)

49) $f(x) = \frac{4x+6}{x^2+3x+2}$ $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$

50) $g(x) = \frac{x+3}{x^2 - 2x - 10}$
$(-\infty, 1-\sqrt{11}) \cup (1-\sqrt{11}, 1+\sqrt{11}) \cup (1+\sqrt{11}, \infty)$

51) $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

إذا كانت $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-3x+1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

52) $f(9)$ $\frac{13}{55}$

53) $f(3b)$ $\frac{6b-5}{9b^2-9b+1}$

54) $f(2a-3)$ $\frac{4a-11}{4a^2-18a+19}$

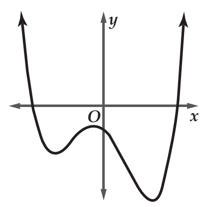
مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها. (الدرس 1-2)

55) $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (55, 56) انظر ملحق الإجابات.

56) $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

تدريب على اختبار

57) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟ **D**



A 1

B 2

C 3

D 4

58) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟ **A**

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

إجابات:

38) عدم اتصال قابل للإزالة. إجابة ممكنة: بما أن الدالة متصلة دائمًا إلا عندما يكون $x = 0$ وذلك لأن النهاية موجودة والدالة غير معرفة عند تلك النقطة، لذا فإن عدم الاتصال قابل للإزالة.

39) عدم اتصال لا نهائي؛ إجابة ممكنة: للدالة عدم اتصال لا نهائي؛ لأنه عندما تقترب x من 0 من الجهتين، تؤول قيم الدالة إلى ∞ أو $-\infty$.

40) الدالة f متصلة على كلٍّ من الفترات $(-\infty, -3)$، $(-3, 3)$، $(3, \infty)$، وحتى تكون متصلة على $(-\infty, +\infty)$ يجب أن تكون متصلة عند كلٍّ من العددين -3 وَ 3 وهذا يعني أن

1) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} f(x)$

$b \times -3 + a = -b - (-3)$

$-3b + a = -b + 3$

2) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$\to (3)^2 + a = b \times 3 + a$

$9 + a = 3b + a$

وبحل المعادلتين الآتيتين

$-3b + a = -b + 3$

$9 + a = 3b + a$، نجد أن

$a = 9, b = 3$

41) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، التمثيل البياني لسلوك الدالة عند $-\infty$ يجب أن يكون مشابهًا لسلوكها عند ∞ للدالة الزوجية.

42) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$، التمثيل البياني لسلوك الدالة عند $-\infty$ يجب أن يكون معاكسًا لسلوكها عند ∞ للدالة الفردية.

43) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$؛ لأن $(x, y) \to (-x, -y)$ في التماثل حول نقطة الأصل.

44) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$، لأن $y = f(-x) = f(x)$ في التماثل حول المحور y.

الفصل 1
مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-3 تدريبات إعادة التعليم

الاتصال والنهايات

الاتصال تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقَّقت الشروط الآتية:

1) $f(x)$ معرفة عند c؛ أي أن $f(c)$ موجودة.

2) تقترب $f(x)$ من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين، أي أنّ $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.

3) القيمة التي تقترب منها $f(x)$ من جهتي c هي $f(c)$؛ أي أنّ، $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

ويكون للدّوال غير المتصلة ثلاثة أنواع من عدم الاتصال، وهي: عدم الاتصال اللانهائي، وعدم الاتصال القفزي، وعدم الاتصال القابل للإزالة.

مثال **حدِّد ما إذا كانت كلّ من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة، مبرِّرًا إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع عدم الاتصال هل هو: لا نهائي أم قفزي، أم قابل للإزالة؟**

a) $f(x) = 2|x| + 3; x = 2$

(1) $f(2) = 7$، أي أن $f(2)$ موجودة.

(2) كوّن جدولًا يبيِّن قيم $f(x)$ عندما تقترب x من العدد 2 من اليمين ومن اليسار.

x	$y = f(x)$
1.9	6.8
1.99	6.98
1.999	6.998

x	$y = f(x)$
2.1	7.2
2.01	7.02
2.001	7.002

يبيِّن الجدولان أن y تقترب من 7 عندما تقترب x من العدد 2 من اليمين ومن اليسار.

أي أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$.

(3)

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$؛ إذن الدالة متصلة عند $x = 2$.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}; x = 1$

الدالة غير معرفة عند $x = 1$؛ لأنها تجعل المقام صفرًا.

يبيِّن الجدولان أنه عندما تقترب قيم x من العدد 1 من اليسار، تتناقص قيم $f(x)$ على نحو كبير وتكون سالبة. وعندما تقترب قيم x من 1 من اليمين، تتزايد قيم $f(x)$ على نحو كبير وتكون موجبة.

x	$y = f(x)$
0.9	−9.5
0.99	−99.5
0.999	−999.5

x	$y = f(x)$
1.1	10.5
1.01	100.5
1.001	1000.5

وعليه، فإن للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$.

تمارين

حدِّد ما إذا كانت كلّ دالة من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيمة x المعطاة، مبرِّرًا إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيّن نوع عدم الاتصال، هل هو: لا نهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة؟

1) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x > 2 \\ x - 1, & x \le 2 \end{cases}$ ؛ $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1, \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5,$

وعليه فإن الدالة غير متصلة، ولها نقطة عدم اتصال قفزي.

2) $f(x) = x^2 + 5x + 3; x = 4$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 39, \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 39, f(4) = 39$

وعليه فإن الدالة متصلة.

الصف: الثالث الثانوي   14   الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات إعادة التعليم (15) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الاتصال والنهايات

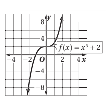
سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة يصف سلوك طرفي التمثيل البياني مسار المنحنى عند طرفيه، أو ماذا يحدث لقيم $f(x)$ عندما تتزايد أو تتناقص قيم x بلا حدود. ويمكنك استعمال مفهوم النهاية لوصف سلوك طرفي التمثيل.

سلوك طرفي التمثيل البياني من جهة اليسار (عندما تتناقص قيم x السالبة بلا حدود): $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

سلوك طرفي التمثيل البياني من جهة اليمين (عندما تتزايد قيم x الموجبة بلا حدود): $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

قد تؤول قيم $f(x)$ إلى سالب ما لانهاية أو موجب ما لا نهاية أو إلى قيمة محددة.

مثال **استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 + 2$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.**



عندما تتناقص x بلا حدود فإن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود أيضًا. ويتضح من التمثيل البياني أن النهاية هي سالب ما لا نهاية: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

عندما تتزايد قيم x بلا حدود فإن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود أيضًا. ويتضح من التمثيل البياني أن النهاية هي موجب ما لانهاية: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم $|x|$.

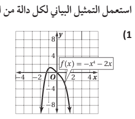
x	−1000	−100	−10	0	10	100	1000
$y = f(x)$	−999999998	−999998	−998	2	1002	1000002	1000000002

عندما $x \longrightarrow -\infty$، فإن $f(x) \longrightarrow -\infty$. وعندما $x \longrightarrow \infty$، فإن $f(x) \longrightarrow \infty$.

تمارين:

استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا:

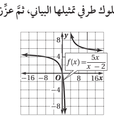
1)



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

انظر أعمال الطلاب.

2)



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5; \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 5$

انظر أعمال الطلاب.

الصف: الثالث الثانوي   15   الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات حل المسألة (16) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-3 تدريبات حل المسألة

الاتصال والنهايات

1) **إسكان:** إذا كانت نسبة الذين يملكون منازل في إحدى الدول يُعبر عنها بالقاعدة:

$h(x) = -0.0009x^4 - 0.09x^3 + 1.54x^2 - 4.12x + 47.37,$

حيث x عدد العقود منذ 1900، فاستعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $h(x)$ على $(-\infty, +\infty)$ بيانيًّا، ثم صف سلوك طرفي تمثيلها البياني.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

2) **هندسة:** يُعبّر عن ارتفاع متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وحجمه 250 وحدة مكعبة بالقاعدة: $f(x) = \frac{250}{x^2}$، حيث x طول ضلع القاعدة.

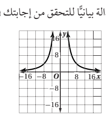
a) تحقق إن كانت الدالة متصلة عند $x = 5$، وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

نعم، الدالة متصلة عند $x = 5$؛ لأن $f(5) = 10$ وأن $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 10$.

b) هل الدالة متصلة على $(-\infty, +\infty)$؟ برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت غير متصلة فوضِّح إجابتك، وحدِّد نوع عدم الاتصال، هل هو لا نهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة؟

غير متصلة، عدم اتصال لا نهائي؛ لأن $f(0)$ غير معرفة، $f(x)$ غير متصلة عند $x = 0$.

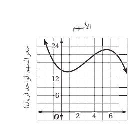
c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من إجابتك في الفرع b.



3) **رحلة:** إذا كانت تكلفة الشخص الواحد في رحلة جماعية يُعبَّر عنها بالقاعدة $f(x) = \frac{600}{x+25}$، حيث x عدد المشتركين، فمثّل الدالة على $(-\infty, +\infty)$ بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم عيِّن نقاط عدم الاتصال وصفها بالاعتماد على التمثيل البياني.

عدم اتصال لا نهائي عند $x = -25$.

4) **أسهم:** إذا كان معدل سعر السهم الواحد لإحدى الشركات بعد x يوم من عرضها في السوق يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = -0.15x^3 + 1.4x^2 - 1.8x + 15.29$.



استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty; \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

انظر أعمال الطلاب.

الصف: الثالث الثانوي   16   الفصل 1: تحليل الدوال

التدريبات الإثرائية (17) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-3 التدريبات الإثرائية

قراءة الرياضيات

اقرأ: يُستعمل التعريف الآتي للاتصال في كتب الرياضيات الجامعية. لاحظ أن المؤلف يبدأ بتوضيح رموز الفترات المختلفة. على الرغم من وجود عدد كبير من الرموز القياسية المتفق عليها عالميًّا، إلا أنه جرت العادة أن يوضح مؤلفو الكتب هذه الرموز التي يريدونها.

في هذا الكتاب تسمى المجموعة S مجال الدالة، وعادة ما تكون فترة. وتحقق إحدى المتباينات الأربع الآتية: $a < x < b, a \le x < b, a < x \le b, a \le x \le b$. وفي هذه المتباينات يكون $a \le b$. وتكافئ هذه المتباينات الفترات $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$، على الترتيب.

تسمى (a, b) فترة مفتوحة، والفترتان $[a, b)$ و $(a, b]$ نصف مفتوحة أو نصف مغلقة، وتسمى الفترة $[a, b]$ فترة مغلقة.

على افتراض أن I فترة مفتوحة أو مغلقة أو نصف مفتوحة، إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على I وكانت x_0 نقطة في I، نقول: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند x_0 إذا أصبحت قيمة المقدار $|f(x) - f(x_0)|$ صغيرة جدًّا عندما $x \in I$ وتقترب x من x_0 .

استعمل التعريف أعلاه للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1) ماذا يحدث للمتباينات الأربع في الفقرة الأولى عندما $a = b$؟

يمكن أن تتحقق المتباينة $a \le x \le b$ فقط.

2) ماذا يحدث للفترات الأربع في الفقرة الأولى عندما $a = b$؟

تكون الفترة (a, b) هي $\varnothing$ ، والفترات الأخرى تمثل النقطة $a = b$.

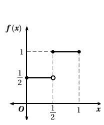
3) ما المصطلح الرياضي المناسب الذي يجب وضعه في الفراغ لتصبح العبارة الآتية صحيحة؟ إذا كانت $f(x)$ غير ___؟___ عند x_0، فإنه يوجد للدالة نقطة عدم اتصال عند x_0.

متصلة

4) ما الرمز المستعمل للدلالة على أن العدد x موجود في الفترة I؟

$x \in I$

5) مثِّل الدالة $f(x)$ بيانيًّا إذا كانت $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$



6) هل الدالة المعطاة في التمرين 5 متصلة على الفترة $[0, 1]$؟ وإذا كانت غير متصلة، فما نقاط عدم الاتصال؟

لا، الدالة غير متصلة عند $x = \frac{1}{2}$.

الصف: الثالث الثانوي   17   الفصل 1: تحليل الدوال

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (6) دون ضمن فوق

3-1 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة أم لا عند قيمة x المعطاة، وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدِّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

1) $f(x) = -\frac{2}{3x^2}; x = -1$
نعم متصلة، الدالة معرفة عند $x = -1$ ، الدالة تقترب من $-\frac{2}{3}$ عندما تقترب x من -1 من الجهتين و $f(-1) = -\frac{2}{3}$

2) $f(x) = \frac{x-2}{x+4}; x = -4$
غير متصلة، نوع عدم الاتصال لا نهائي عند $x = -4$

3) $f(x) = x^3 - 2x + 2; x = 1$
نعم متصلة، الدالة معرفة عند $x = 1$ ، الدالة تقترب من 1 عندما تقترب x من 1 من الجهتين و $f(1) = 1$

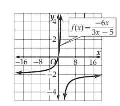
4) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2};\ x = -1 , x = -2$
غير متصلة، للدالة نقطة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = -1$ ، وعدم اتصال لا نهائي عند $x = -2$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

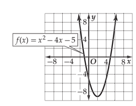
5) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4; [-6, 2]$
$[-5, -4], [-1, 0], [0, 1]$

6) $g(x) = x^4 + 10x - 6; [-3, 2]$
$[-3, -2], [0, 1]$

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين؛ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزّز إجابتك عدديًّا:

7)


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$
انظر أعمال الطلاب.

8)


$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
انظر أعمال الطلاب.

9) **إلكترونيات:** يوضح قانون أوم العلاقة بين المقاومة R ، وفرق الجهد E ، وشدة التيار I في دائرة كهربائية، وتُعطى هذه العلاقة بالقاعدة $R = \frac{E}{I}$. فإذا كان فرق الجهد ثابتًا، وتزايدت شدة التيار، فماذا يحدث للمقاومة؟
تتناقص المقاومة لتقترب من الصفر.

6

الفصل الأول تحليل الدوال

ملحوظات المعلم

1-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4

إيجاد قيم الدوال .

الدرس 1-4

تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ، ثابتة ، متناقصة . وتحديد القيم العظمى والصغرى لها.

إيجاد متوسط معدّل التغير للدالة.

ما بعد الدرس 1-4

تمثيل الدوال الرئيسة (الأم) ووصفها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المواقف التي تُفَضّل فيها الدوال المتزايدة على الدوال المتناقصة؟
  إجابة ممكنة: تزايد درجات الاختبار مع الزمن، والتزايد في المبيعات السنوية.
- عمل أحد رجال الأعمال على تحسين أداء مصنعه بعدما تراجعت أرباحه. فإذا أثمر هذا التحسن خلال الأشهر شوال وذي القعدة وذي الحجة، فمتى يتغير منحنى دالة الربح من التناقص إلى التزايد؟
  إجابة ممكنة: خلال شوال وذي القعدة وذي الحجة أو بعدها بفترة قصيرة.
- إذا تذبذبت معدلات الإيراد الشهرية لأحد المصانع بين الزيادة والنقصان خلال السنة الأخيرة، فكيف تحسب متوسط معدّل التغير خلال شهرين؟
  أجد مقدار التغير بين شهرين ثم أقسم على 2.

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير
Extrema and Average Rates of Change

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1–1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحدد القيم العظمى والصغرى لها.
- أجِدُ متوسط معدل التغير للدالة.

المفردات:

المتزايدة
increasing
المتناقصة
decreasing
الثابتة
constant
النقطة الحرجة
critical point
العظمى
maximum
الصغرى
minimum
القصوى
extrema
متوسط معدل التغير
average rate of change
القاطع
secant line

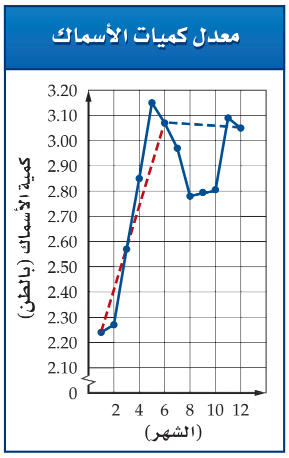
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبيّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .

يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

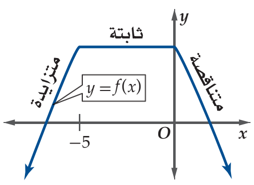
كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.



التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$ من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$



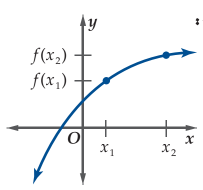
يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًّا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

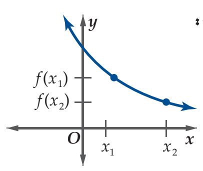
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

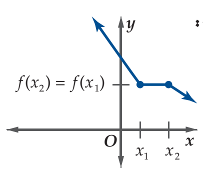
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



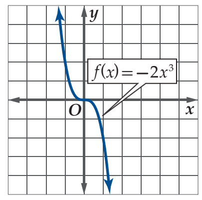
مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (43)	• تنويع التعليم ص (43)	• تنويع التعليم ص (46)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

مثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

a) $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًّا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

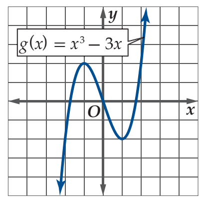
التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	−16	−128	−432	−1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x، تتناقص قيم $f(x)$؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

b) $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًّا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	−11	−9	−7	−5	−3	−1
$g(x)$	−1298	−702	−322	−110	−18	2

$(-1, 1)$:

x	−1	−0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	−1.375	−2

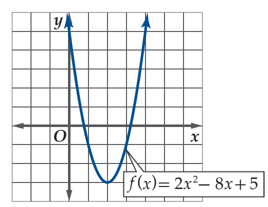
$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	−2	18	110	322	702	1298

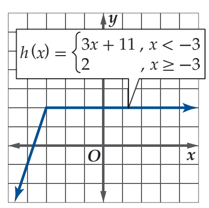
توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك (1A-1B) انظر ملحق الإجابات.

1A)



1B)



تنبيه!

فترات: لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

إرشادات للدراسة

الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة: إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمّى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. فالدالة في المثال 1a متناقصة، بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على فترة أخرى.

بينما يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة ويمكن تعزيز ذلك عدديًّا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لإثبات صحة هذه الخصائص.

التزايد والتناقص

مثال 1 يبيِّن كيفية تقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة.

الأمثلة 2-4 تبيِّن كيفية إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة واستعمالها.

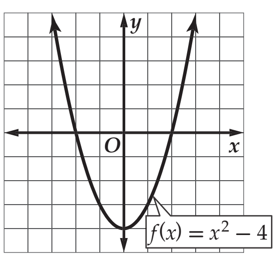
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

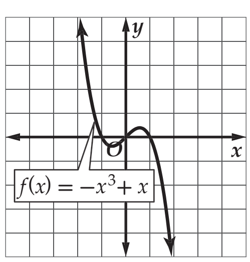
1 استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لتقدير الفترات (قرّب إلى أقرب 0.5 وحدة) التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

a) $f(x) = x^2 - 4$



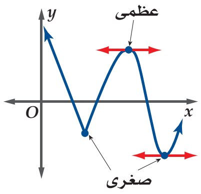
$f(x)$ متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

b) $f(x) = -x^3 + x$



$f(x)$ متناقصة في الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$، ومتزايدة في الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًا أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غيرمعرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.



يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

إرشادات للدراسة

القيم القصوى: ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية والمطلقة

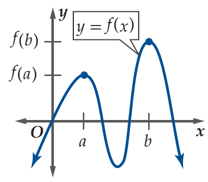
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمّيَت قيمة عظمى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

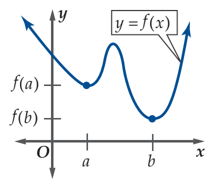
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمّيَت قيمة صغرى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمّيَت قيمة صغرى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج:



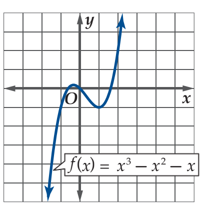
$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية: يُستعمل مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

مثال 2 — تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يوضح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًا:

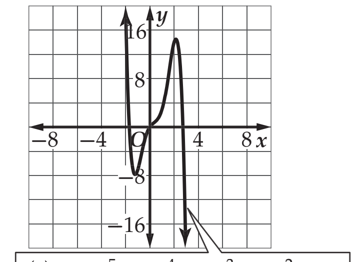
اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-1) < f(-0.5)$ و $f(0) < f(-0.5)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا .

مثال إضافي

2 قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربَة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.



$f(x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 3x$

صغرى محلية عند $x = -1$
عظمى محلية عند $x = 2$. لا يوجد قيم قصوى مطلقة.

المحتوى الرياضي

القيم القصوى المحلية والمطلقة
ترتبط القيم الصغرى المحلية أو العظمى المحلية بفترة، وقد تجد أن للدالة أكثر من قيمة صغرى أو عظمى محلية، لكن القيم الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة لا ترتبط بفترة بل هي قصوى مطلقة على المجال كله ، ويوجد للدالة على الأكثر قيمة صغرى مطلقة واحدة وقيمة عظمى مطلقة واحدة.

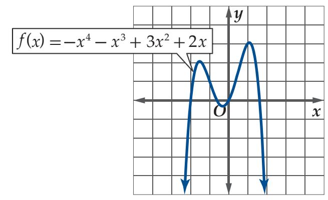
إرشادات للمعلم الجديد

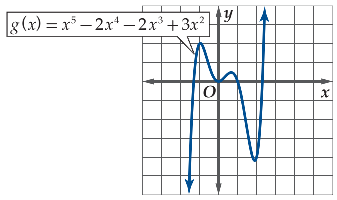
المماسات: سيتم دراسة ميل المماس لمنحنى الدالة عند قيم محددة لاحقًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(1.5)$, $f(1) < f(0.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولاً.

وبما أن $f(1) < f(-100)$, $f(-0.5) < f(100)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

تحقق من فهمك

(2A


(2B


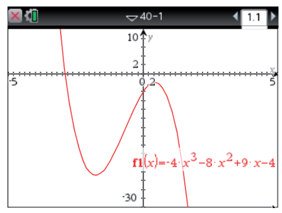
نحتاج إلى حساب التفاضل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، ونحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة والذي ستتم دراستها في الفصل الثامن (النهايات والاشتقاق). كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

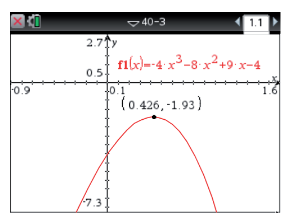
مثّل الدالة بيانيًا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

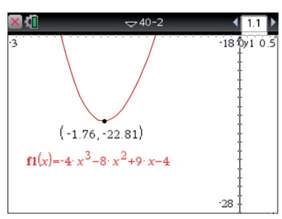
بالضغط على المفاتيح: on ، ثم اكتب الدالة واضغط enter



يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلُّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط على مفتاح menu ، ثم على 6: تحليل الرسم البياني ، واختر منها 3: القيمة العظمى أو 2: القيمة الصغرى ، ثم مرِّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$ ، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$





تحقق من فهمك

(3A $h(x) = 7 - 5x - 6x^2$

(3B $g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$

(2A يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = -1.5$، ومقدارها 2 . كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها -0.3 . وقيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$، ومقدارها 3 .

(2B يوضح التمثيل البياني أن للدالة $g(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = -1$، ومقدارها 2 . وقيمة صغرى محلية عند $x = 0$، ومقدارها 0 . وقيمة عظمى محلية عند $x = 0.5$، ومقدارها 0.5 . وقيمة صغرى محلية عند $x = 2$، ومقدارها -4 . وسلوك طرفي التمثيل البياني يدل على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

إرشاد تقني

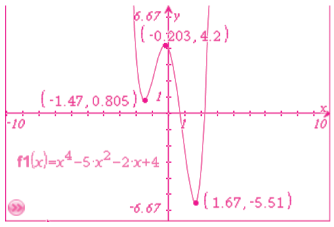
ضبط: عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب، لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملاً.

(3A تقدر القيمة العظمى المطلقة بـ 8.04 وتكون عند $x = -0.42$

(3B تقدر القيمة العظمى المحلية بـ 5.06 وتكون عند $x = -0.12$ ، وتقدر القيمة الصغرى المحلية بـ 1.24 وتكون عند $x = 1.45$

مثال إضافي

3 الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.



قيمة عظمى محلية مقدارها 4.20 عند $x = -0.20$ تقريبًا، قيمة صغرى محلية مقدارها 0.80 عند $x = -1.47$ تقريبًا، وأخرى مقدارها -5.51 تقريبًا عند $x = 1.67$ تقريبًا.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية: إن استعمال خصائص الجداول الإلكترونية يوفر طريقة سريعة وسهلة لعمل الجداول؛ لذا اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة واستعمال الجداول الإلكترونية لعمل جداول قيم لإيجاد القيم الصغرى والعظمى المحلية.

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

الربط مع الحياة

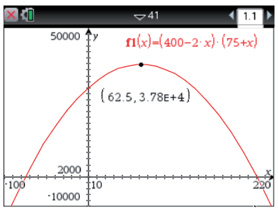
تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيقات القيم القصوى

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$



المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$.

لذا مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu، ثم 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى، ثم مرّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.

لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمهما أكبر ما يمكن.

4) نصف القطر ≈ 1.83 in، الارتفاع ≈ 1.83 in

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

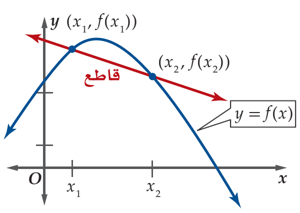
مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًّا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}.

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



إذا كان متوسط معدل التغير على فترة موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة في المتوسط على الفترة. وأما إذا كان سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة في المتوسط على الفترة.

مثال إضافي

4 وقود اقتصادي: أعلنت إحدى شركات السيارات أن خزان وقود سيارة جديدة يكفي لنقل السائق وثلاثة ركاب مسافة 360 mi، وفي أثناء بحثك في الإنترنت وجدت أن المسافة بالميل التي تقطعها هذه السيارة لكل خزان مملوء بالوقود هي:

$$f(x) = -4x^2 + 44x + 240$$

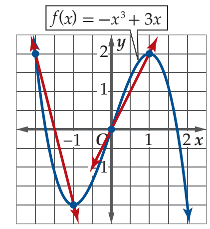
حيث $x + 55$، سرعة السيارة بالميل لكل ساعة. فما سرعة السيارة التي تجعل المسافة التي تقطعها السيارة لكل خزان وقود أكبر ما يمكن؟ وما المسافة المقطوعة في هذه الحالة؟

المسافة المقطوعة أكبر ما يمكن عندما تكون السرعة 60.5 mi/h. المسافة المقطوعة 361 mi.

المحتوى الرياضي

متوسط معدّل التغير: إيجاد متوسط معدّل التغير بين نقطتين لدالة غير خطية يماثل إيجاد ميل مستقيم، لاحظ أن التغير بين نقطتين للدوال غير الخطية يتغير بتغير النقطتين. عند حساب ميل المستقيم أوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

وعند حساب متوسط معدّل التغير لدالة أوجد $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.



الشكل 1.4.1

مثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)}$$ عوِّض -1 مكان x_2 ، -2 مكان x_1

$$= \frac{[-(-1)^3 + 3(-1)] - [-(-2)^3 + 3(-2)]}{-1 - (-2)}$$ عوِّض $f(-1)$ ، $f(-2)$

$$= \frac{-2 - 2}{-1 - (-2)} = -4$$ بسِّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$ عوِّض 1 مكان x_2 ، 0 مكان x_1

$$= \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2$$ عوِّض $f(1)$ ، $f(0)$ وبسِّط

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2, [2, 3]$ **6**

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x, [-5, -3]$ **−220**

يُستعملُ متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(2) - d(0)}{2 - 0}$$ عوِّض 2 مكان t_2 ، 0 مكان t_1

$$= \frac{64 - 0}{2} = 32$$ عوِّض $d(2)$ ، $d(0)$ ، وبسِّط

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(4) - d(2)}{4 - 2}$$ عوِّض 4 مكان t_2 ، 2 مكان t_1

$$= \frac{256 - 64}{2} = 96 \text{ ft/sec}$$ عوِّض $d(4)$ ، $d(2)$ ، وبسِّط

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s ، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

تحقق من فهمك

6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و$d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120 - 150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

المصدر: الموسوعة العالمية MSN

تنبيه!

السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

6) −4 ft/s ، سرعة الجسم المتوسطة تتناقص في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

متوسط معدّل التغير

المثالان 6 ,5 يبيِّنان كيفية إيجاد متوسط معدّل التغير.

مثالان إضافيان

5 أوجد متوسط معدّل التغير للدالة $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ في كل من الفترتين الآتيتين:

a) $[-3, -1]$ **12**

b) $[2, 5]$ **−10**

6 **الجاذبية:** إذا كانت المسافة المقطوعة للأجسام الساقطة على سطح القمر يُعبّر عنها بالقاعدة $d(t) = 2.7t^2$ ، حيث d المسافة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فأوجد السرعة المتوسطة لجسم ساقط في كل من الفترتين الآتيتين:

a) من 1 إلى 2 ثانية. **8.1 ft/s**

b) من 2 إلى 3 ثوانٍ. **13.5 ft/s**

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب البحث في شبكة الإنترنت عن صور لجبال من الطبيعة يظهر فيها منحنى خط الأفق، ثم اطلب إلى كلٍّ منهم تحديد هذا المنحنى في الصور التي أحضروها، وتعيين القيم العظمى المحلية والمطلقة لمنحنى الأفق.

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 24–1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: في السؤالين 18 وَ 29، قد يحاول الطلاب إيجاد دالة بمتغير مستقل واحد؛ لذا ذكّرهم بأن استعمال نظام من المعادلات وطريقة التعويض يقلل عدد المتغيرات المستقلة.

إجابات:

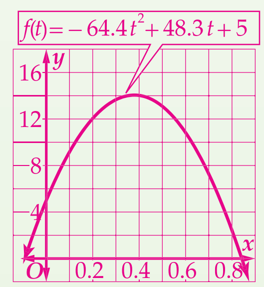
1) f متزايدة في الفترة، $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة في الفترة $(-0.5, 1)$، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

2) f متناقصة في الفترة، $(-\infty, 2.5)$، ومتزايدة في الفترة $(2.5, \infty)$.

3) f متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

4) f متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

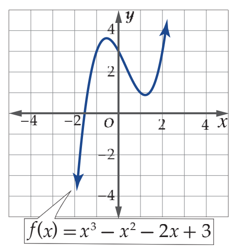
5a)



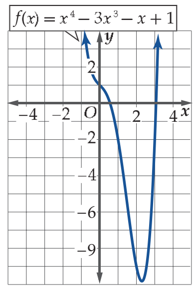
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًّا: **(مثال 1)** 4–1 انظر الهامش.

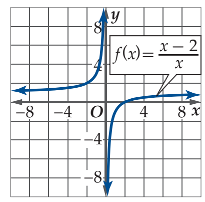
1)



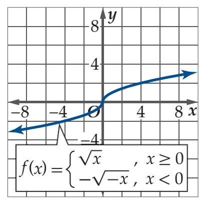
2)



3)



4)



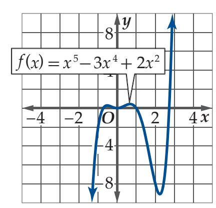
5) **كرة سلة:** يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. **(مثال 2)**

a) مَثِّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش.

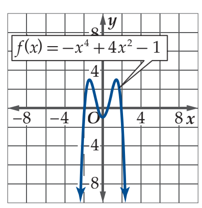
b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًّا. 14 ft

قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًّا. **(مثال 2)** 11–6 انظر ملحق الإجابات.

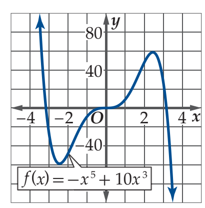
6)



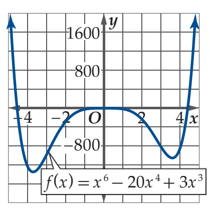
7)



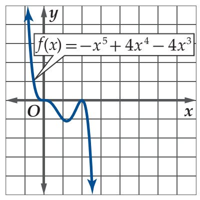
8)



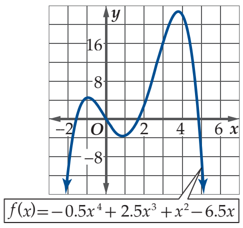
9)



10)



11)



الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: **(مثال 3)** 17–12 انظر ملحق الإجابات.

12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

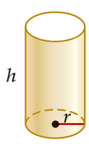
14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

15) $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

16) $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

17) $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

18) **هندسة:** أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). **(مثال 4)**



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة تساوي 20.5π بوصة مربعة

نصف القطر = 2.6 بوصة، الارتفاع = 2.6 بوصة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. **(مثال 5)**

19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$ 28

20) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$ 4430

21) $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$ −309

22) $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$ −2550

23) $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$ 0.05

24) $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$ 0.183

25) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلاً $x = 1$ تمثّل شهر يناير، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. **(مثال 6)**

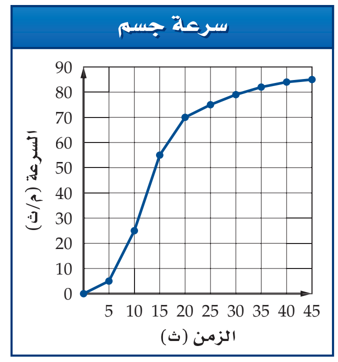
a) من أبريل إلى مايو. 2.18

b) من يوليو إلى أكتوبر. −2.18

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1–24، 42–44، 49–62
ضمن ضمن المتوسط	1–25 (فردي)، 26–29، 31–41 (فردي)، 47–62
فوق فوق المتوسط	26–62

26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15], [15, 20], [25, 45]$.
5 **3** **0.5**

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية. **انظر الهامش.**

27) **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$ ، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \le x \le 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا. **27a-c) انظر الهامش.**

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

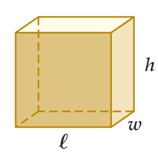
28) **دخل:** افترض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1420هـ وحتى عام 1430 هـ يعطى بالدالة:
$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \le x \le 10$
حيث x رقم السنة. **28-35) انظر ملحق الإجابات.**

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1423 إلى عام 1430هـ. وماذا تعني قيمة متوسط معدل التغير في هذه الفترة؟

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

29) **صندوق:** يرغب سالم في عمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضّح إجابتك.



مثّل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

30) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

31) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

32) $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

33) $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

34) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $x < -2$ ، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.

35) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.

الحاسبة البيانية: حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبيِّن نوعها:

36) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ **(3, 5) ، صغرى**

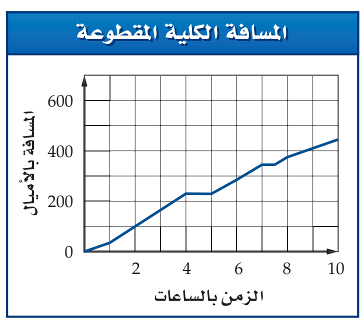
37) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$ **(−5, −1) ، عظمى**

38) $f(x) = -4|x-22| + 65$ **(22, 65) ، عظمى**

39) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$ **(0, 6) ، عظمى**

40) $f(x) = x^3 + x$ **لا توجد قيم قصوى**

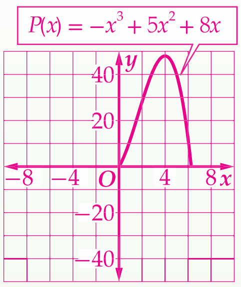
41) **سفر:** قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعها في إحدى الرحلات ومثّلها بيانيًّا. أعطِ أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟ **انظر ملحق الإجابات.**



إجابات:

26b) تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدّل تسارع للجسم في الفترة $[5, 15]$. ويبطئ التسارع في الفترة $[25, 45]$، لكن تبقى سرعة الجسم في تزايد .

27a)



27b) 400 ريال.

27c) 48 ريالًا.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب وصف كيفية الربط بين درس اليوم والدرس اللاحق حول الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-1 و 3-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (11)

إجابات:

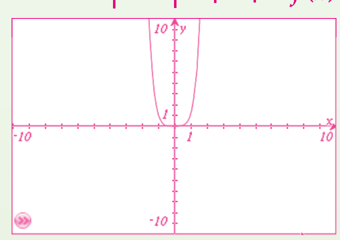
49) الدالة معرفة عند $x=-3$ ، وتقترب الدالة من 2.65 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، و $f(-3)=2.65$ ؛ لذا فإن الدالة متصلة عند $x=-3$.

50) الدالة معرفة عند $x=3$ ، وتقترب قيمة الدالة من 2 عندما تقترب x من 3 من الجهتين، و $f(3)=2$ ؛ لذا فإن الدالة متصلة عند 3.

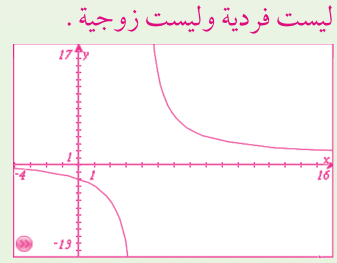
51) للدالة نقطة عدم اتصال قابلة للإزالة عند $x=-5$ ، ومعرفة عند $x=5$ ، وتقترب الدالة من 0 عندما تقترب x من 5 من الجهتين، أي أن $h(5)=0$ ؛ إذن الدالة متصلة عند $x=5$.

52) دالة زوجية، متماثلة حول المحور y

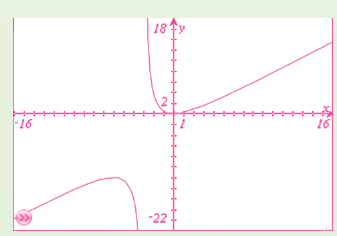
$$f(-x)=\left|(-x)^5\right|$$
$$=\left|-x^5\right|=\left|x^5\right|=f(x)$$



53) ليست فردية وليست زوجية .



54) ليست فردية وليست زوجية .



مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثل بيانيًا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

42) متصلة **42-48) انظر ملحق الإجابات.**
متزايدة على $(-\infty, 4)$
ثابتة على $[4, 8]$
متناقصة على $(8, \infty)$
$f(5)=3$

43) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x=-2$
متزايدة على $(-\infty, -2)$
متزايدة على $(-2, \infty)$
$f(-6)=-6$

44) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x=c$ ومتزايدة عندما $x>c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c. وضّح إجابتك.

45) **تحدٍّ:** إذا كانت g دالة متصلة، وكان $g(a)=8$ و $g(b)=-4$ ، فأعطِ وصفًا لقيمة $g(c)$ حيث $a<c<b$. وبرِّر إجابتك.

46) **تحدٍّ:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x)=\sin x$ بيانيًّا، ثم صف القيم القصوى المحلية للدالة.

47) **تبرير:** أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$ ، $(b, f(b))$ إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). وضّح إجابتك.

48) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيِّن نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 3-1)

49) $f(x)=\sqrt{x^2-2}\ , x=-3$ **49-54) انظر الهامش.**

50) $f(x)=\sqrt{x+1}\ , x=3$

51) $h(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}\ ; x=-5\ , x=5$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. وتحقّق من إجابتك جبريًّا، و إذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 2-1)

52) $f(x)=|x^5|$

53) $f(x)=\dfrac{x+8}{x-4}$

54) $g(x)=\dfrac{x^2}{x+3}$

أوجد مجال كل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

55) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-5}$ $\{x \mid x \neq \pm\sqrt{5}, x \in R\}$

56) $g(x)=\sqrt{x^2-9}$ $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

57) $h(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-7}}$ $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 3-1)

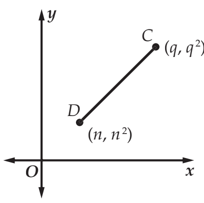
58) $f(x)=x^{10}-x^9+5x^8$
عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$ ، عندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$

59) $g(x)=\dfrac{x^2+5}{7-2x^2}$
عندما $x \to \infty$ فإن $g(x) \to -\dfrac{1}{2}$ ، عندما $x \to -\infty$ فإن $g(x) \to -\dfrac{1}{2}$

60) $h(x)=\left|(x-3)^2-1\right|$
عندما $x \to \infty$ فإن $h(x) \to \infty$ ، عندما $x \to -\infty$ فإن $h(x) \to \infty$

تدريب على اختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$ ، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD. **A**



A $q+n$ C $\dfrac{q^2+q}{n^2-n}$

B $q-n$ D $\dfrac{1}{q+n}$

62) يوجد للدالة $y=x^3+2x^2-4x-6$ قيمة عظمى محلية ، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم. **C**

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب النقطتان اللتان تحددان القاطع قربًا كافيًا من القيمة العظمى المحلية؟ وما علاقة القاطع في هذه الحالة مع مماس منحنى الدالة عند نقطة القيمة العظمى المحلية؟
يقترب القاطع من الخط الأفقي، ويقترب ميله من 0. عندما يقترب القاطع من نقطة القيمة العظمى المحلية قربًا كافيًا، فإنه يصبح مماسًّا لمنحنى الدالة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 1

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) دون

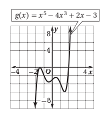
الاسم: ______ التاريخ: ______

1-4 تدريبات إعادة التعليم

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

التزايد والتناقص قد تكون الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة على فترة معطاة. وتُسمى النقاط التي تتغير عندها الدالة من متزايدة إلى متناقصة أو العكس **نقاطًا حرجة**، وقد تكون النقطة الحرجة **صغرى محلية**، أو **صغرى مطلقة**، أو **عظمى محلية**، أو **عظمى مطلقة**. ويُستعمل المصطلح قيمة **قصوى** للدلالة على القيمة الصغرى أو العظمى.

مثال قدّر قيم x التي يكون للدالة عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيّن نوعها بالاعتماد على التمثيل البياني للدالة $f(x)$، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا:

يظهر من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = -1.5$، وصغرى محلية مقدارها -3.5 عند $x = -0.5$، وعظمى محلية مقدارها -2.5 عند $x = 0.5$، وصغرى محلية مقدارها -6 عند $x = 1.5$. ويظهر كذلك أن $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا:

اختر قيمًا لـ x على جانبي قيمة x التي عندها قيمة صغرى أو عظمى على أن يكون الفرق بين كل عدد والذي يليه 0.5 وحدة، واختر قيمة كبيرة لِـ x وأخرى صغيرة.

x	−100	−2	−1.5	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	100
$f(x)$	-1×10^{10}	−7	−0.09	−2	−3.5	−3	−2.47	−4	−5.91	1	$\approx1\times10^{10}$

لما كانت $f(-1.5) > f(-1)$، $f(-1.5) > f(-2)$، فإن هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(-2, -1)$ قريبة من -1.5

ولما كانت $f(-0.5) < f(0)$، $f(-0.5) < f(-1)$، فإن هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(-1, 0)$ قريبة من -0.5

ولما كانت $f(0.5) > f(1)$، $f(0.5) > f(0)$، فإن هناك قيمة عظمى محلية في الفترة $(0, 1)$ قريبة من 0.5.

ولما كانت $f(1.5) < f(2)$، $f(1.5) < f(1)$، فإن هناك قيمة صغرى محلية في الفترة $(1, 2)$ قريبة من 1.5.

وكذلك لما كانت $f(100) > f(-1.5)$، $f(-100) < f(1.5)$، $f(-100) < f(-0.5)$ فإن هذا يعزز تخميننا بأنه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

تمارين

الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل من الدالتين الآتيتين، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم:

1) $f(x) = 2x^6 + 2x^4 - 9x^2$

صغرى محلية مقدارها -5.03 عند $x = -0.97$؛ وعند $x = 0.97$ وعظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$

2) $f(x) = x^3 + 9x^2$

صغرى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$؛ وعظمى محلية مقدارها 108 عند $x = -6$

تدريبات إعادة التعليم (19) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

1-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير متوسط معدل التغير بين نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين. نسمي المستقيم الواصل بين نقطتين على منحنى الدالة **قاطعًا**.

متوسط معدل التغير في الفترة $[x_1, x_2]$ هو ميل القاطع، m_{sec}.

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال أوجد متوسط معدل تغير الدالة $f(x) = 0.5x^3 + 2x$ في كل من الفترتين الآتيتين:

a) $[-3, -1]$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)}$ ضع -3 مكان x_1 و -1 مكان x_2

$= \frac{[0.5(-1)^3 + 2(-1)] - [0.5(-3)^3 + 2(-3)]}{-1 - (-3)}$ أوجد قيم $f(-3)$، $f(-1)$

$= \frac{-2.5 - (-19.5)}{-1 - (-3)} = \frac{17}{2}$ بسِّط

b) $[-1, 1]$

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$ ضع -1 مكان x_1 و 1 مكان x_2

$= \frac{2.5 - (-2.5)}{1 - (-1)} = \frac{5}{2}$ أوجد القيم وبسِّط

تمارين:

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدّوال الآتية في الفترة المعطاة:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1; [-3, -2]$ **−28**

2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 1; [-1, 0]$ **0**

3) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4; [-3, -1]$ **−14**

4) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 4; [1, 3]$ **26**

5) $f(x) = x^4 + 8x - 3; [-4, 0]$ **−56**

6) $f(x) = -x^4 + 8x - 3; [0, 1]$ **7**

تدريبات حل المسألة (20) دون ضمن فوق

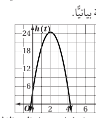
الاسم: ______ التاريخ: ______

1-4 تدريبات حل المسألة

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

1) **قذيفة نارية:** يطلق قارب فقد اتجاهه قذائف نارية في الهواء. إذا كان ارتفاع القذيفة بالأمتار يُعبّر عنه بالدالة $h(t) = -4.9t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني من بدء إطلاق القذيفة، فأجب عما يأتي:

a) مثّل الدالة بيانيًّا.



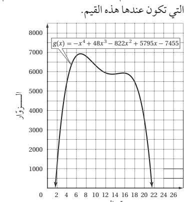
b) قدّر أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة، ثمَّ عزِّز إجابتك عدديًّا.

24.5 مترًا؛ انظر أعمال الطلاب.

2) **استجمام:** إذا كان عدد زوار أحد أماكن الاستجمام يُعبَّر عنه بالدالة:

$g(x) = -x^4 + 48x^3 - 822x^2 + 5795x - 7455$

حيث x عدد الأيام منذ فتح المكان للزوار، فقدّر إلى أقرب وحدة القيم القصوى المحلية أو المطلقة وقيم x التي تكون عندها هذه القيم.



عظمى محلية ومطلقة $(7, 6900)$؛ صغرى محلية $(13, 5857)$؛ عظمى محلية $(16, 5905)$.

3) **استجمام:** أوجد متوسط معدل تغير الدالة في المسألة 2 لكل فترة زمنية مما يأتي:

a) من اليوم 2 إلى اليوم 6. **1395**

b) من اليوم 13 إلى اليوم 15. **19**

c) من اليوم 18 إلى اليوم 20. **−921**

4) **صناديق:** قطعة من الكرتون مربعة الشكل طول ضلعها 18 بوصة. يُراد عمل صندوق منها دون غطاء، وذلك بقص مربعات متطابقة من أركانها، ثم ثني الأجزاء البارزة إلى أعلى.

a) اكتب دالة $v(x)$، حيث v حجم الصندوق، x طول ضلع المربع الذي تم قصّه من الأركان الأربعة.

$v(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$

b) أوجد قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن، وما أكبر حجم؟

3 in.; 432 in³

c) أوجد القيمة الصغرى المحلية للدالة؟ ووضِّح ماذا تعني هذه القيمة في سياق المسألة.

القيمة الصغرى =0، وتحدث عندما x=9؛ إذا تم قص مربعات من الأركان طول ضلع كل منها 9 بوصات فإن حجم الصندوق يصبح 0 ؛ لأنه لا يمكن صنع الصندوق.

التدريبات الإثرائية (21) فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

1-4 التدريبات الإثرائية

معادلات "غير حقيقية"

معادلات غير حقيقية: توجد معادلات لا يمكن تمثيلها على المستوى الإحداثي مثل المعادلة $x^2 - 2x + 2y^2 + 8y + 14 = 0$. وبإكمال المربع بالنسبة لِـ x و y نحصل على المعادلة $(x - 1)^2 + 2(y + 2)^2 = -5$.

تعلم أنه لجميع قيم x و y الحقيقية فإن كلًّا من القيمتين $(x - 1)^2$ و $2(y + 2)^2$ غير سالبة، لذا فإن ناتج جمعهما لا يمكن أن يساوي -5. وعليه فلا توجد أعداد حقيقية تحقق المعادلة، بل يحققها أعداد تخيلية (مركّبة) فقط.

تحقق مما إذا كان بالإمكان تمثيل كل من المعادلات الآتية على المستوى البياني، مجيبًا بـ«نعم» أو «لا»:

1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = -4$ **لا**

2) $x^2 - 3x + y^2 + 4y = -7$ **لا**

3) $(x + 2)^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ **نعم**

4) $x^2 + 16 = 0$ **لا**

5) $x^4 + 4y^2 + 4 = 0$ **لا**

6) $x^2 + 4y^2 + 4xy + 16 = 0$ **لا**

ما قيم k التي تحقق ما يأتي في السؤالين 7 و 8؟

a) تجعل حلول المعادلة أعدادًا تخيلية (مركّبة) فقط.

b) يكون التمثيل البياني للعلاقة نقطة.

c) يكون التمثيل البياني في المستوى ممكنًا.

d) اختر قيمة لِـ k التي تجعل التمثيل البياني ممكنًا، ثم ارسم المنحنى على الشبكة المعطاة.

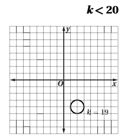
7) $x^2 - 4x + y^2 + 8y + k = 0$

a) **$k > 20$**

b) **$k = 20$**

c) **$k < 20$**

d)



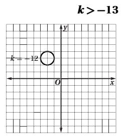
8) $x^2 + 4x + y^2 - 6y - k = 0$

a) **$k < -13$**

b) **$k = -13$**

c) **$k > -13$**

d)



9) لماذا لا يمكننا مناقشة القيم القصوى ومتوسط معدل التغير للتمثيل البياني في كلٍّ من المسألتين 7 و 8؟

إجابة ممكنة: لأن كلًّا منهما ليست دالة.

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

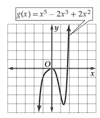
مصادر الدرس 4 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

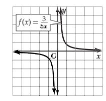
كتاب التمارين (7) دون ضمن فوق

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين ؛ لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا:

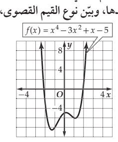
1)


متزايدة في $(-\infty, 0)$ ، متناقصة في $(0, 1.5)$
متزايدة في $(1.5, \infty)$
انظر أعمال الطلاب.

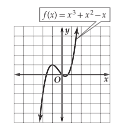
2)


متناقصة في الفترتين $(-\infty, 0)$ ، $(0, \infty)$
انظر أعمال الطلاب.

قدِّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

3)


صغرى مطلقة قيمتها -8.5 عند $x = -1.5$
عظمى محلية قيمتها -5 عند $x = 0$
صغرى محلية قيمتها -6 عند $x = 1$
انظر أعمال الطلاب.

4)


عظمى محلية قيمتها 1 عند $x = -1$
صغرى محلية قيمتها -0.13 عند $x = 0.5$
انظر أعمال الطلاب.

5) **الحاسبة البيانية:** أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة للدالة: $h(x) = x^5 - 6x + 1$. وحدّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.
قيمة عظمى محلية تقدّر بـ 6.02 عند $x = -1.05$ ، وقيمة صغرى تقدر بـ -4.02 عند $x = 1.05$

أوجد متوسط معدّل التغير لكلٍّ من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

6) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5; [-4, -2]$ **-132**

7) $g(x) = -3x^3 - 4x; [2, 6]$ **-160**

8) **فيزياء:** إذا كان ارتفاع صاروخ $h(t)$ بالقدم بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا يُعطَى بالقاعدة $h(t) = -16t^2 + 32t + 0.5$، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ. **16.5 ft**

7

الفصل الأول تحليل الدوال

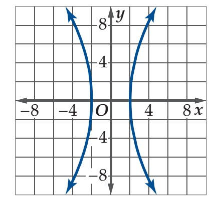
ملحوظات المعلم

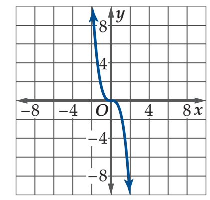
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x: (الدرس 1-1)

1) $3x + 7y = 21$ دالة

2) دالة

x	y
−1	−1
1	3
3	7
5	11
7	15

3) 
ليست دالة

4) 
دالة

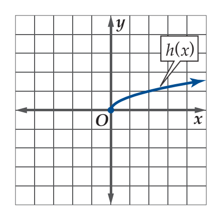
5) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ x & , x \geq 2 \end{cases}$، فأوجد $f(2)$. (الدرس 1-1)
2

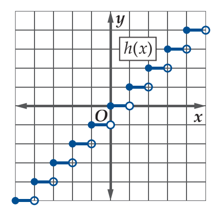
6) **كرة قدم:** يعطى ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض عند ضربها من قبل حارس مرمى بالدالة $h(t) = -8t^2 + 50t + 5$، حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. (الدرس 1-1)

a) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثوانٍ. 83 ft

b) ما مجال هذه الدالة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

استعمل التمثيل البياني للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها في كل مما يأتي: (الدرس 1-2) 7-10 انظر الهامش.

7) 

8) 

أوجد المقطع y والأصفار لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 1-2)

9) $f(x) = x^3 - 16x$

10) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x، والمحور y، و نقطة الأصل. (الدرس 1-2)

11) $x^2 + y^2 = 9$

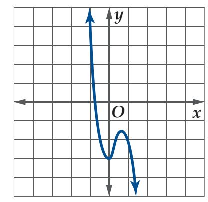
12) $xy = 4$

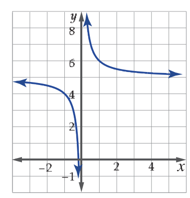
حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 5$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. (الدرس 1–3)

13) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$ 13-14 انظر الهامش.

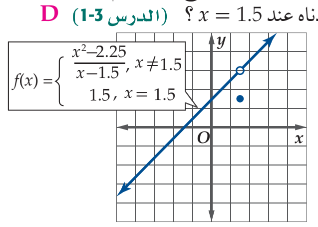
14) $f(x) = \frac{x^2}{x + 5}$

صف سلوك طرفي كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين. ثم عزِّز إجابتك عدديًا. (الدرس 1–3) 15-16 انظر الهامش.

15) 

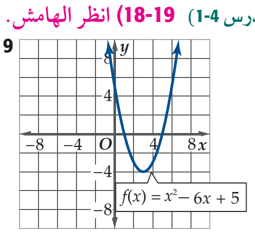
16) 

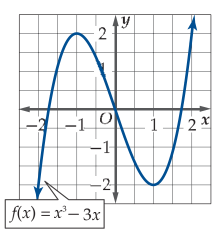
17) **اختيار من متعدد:** ما نوع نقطة عدم الاتصال للدالة الممثلة في الشكل أدناه عند $x = 1.5$ ؟ (الدرس 1-3) D



A غير معرف
B لانهائي
C قفزي
D قابل للإزالة

استعمل التمثيل البياني لكل دالة أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. وعزِّز إجابتك عدديًا. (الدرس 1-4) 18-19 انظر الهامش.

18) 

19) 

20) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 18 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيمة الدالة عندها، وبيِّن نوعها، ثم عزِّز إجابتك عدديًا. (الدرس 1-4)

21) **فيزياء:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء فأوجد متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$. (الدرس 1-4) 48 ft/s

الدروس من 1-1 إلى 1-4

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13) .

إجابات

6b) $[0, 6.35]$ ، إجابة ممكنة: الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا، وارتفاع الكرة لا يجب أن يكون سالبًا في هذه الحالة.

7) المجال: $[0, \infty)$ ، والمدى: $[0, \infty)$

8) المجال: $\{x | x \in R\}$ ، والمدى: $\{y | y \in Z\}$

9) المقطع y: 0 ، الأصفار: $0, 4, -4$.

10) المقطع y: 5 ، الأصفار: 25 .

11) حول المحور x ، حول المحور y ، حول نقطة الأصل.

12) حول نقطة الأصل.

13) غير متصلة: الدالة غير معرّفة عند $x=5$.

14) متصلة: الدالة معرفة عند $x = 5$. وتقترب قيمة الدالة من 2.5 عندما تقترب x من 5 من الجهتين؛ $f(5) = 2.5$.

15) يتضح من التمثيل البياني أن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$.

16) يتضح من التمثيل البياني أن: $f(x) \to 5$ عندما $x \to \infty$ ، $f(x) \to 5$ عندما $x \to -\infty$.

18) f متناقصة في الفترة $(-\infty, 3)$ ، ومتزايدة في الفترة $(3, \infty)$.

19) f متزايدة في $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في $(-1, 1)$، ومتزايدة في $(1, \infty)$.

20) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية ومطلقة مقدارها -4 وتكون عند $x = 3$،
$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5$
$= 9 - 18 + 5 = -4$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 1-1,1-2,1-3,1-4	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		

1-5 ملاحظات الدرس

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

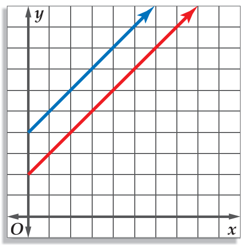
فيما سبق:
درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 4—1)

والآن:
- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًا.

المفردات:
الدالة الرئيسة (الأم)
parent function
الدالة الثابتة
constant function
الدالة المحايدة
identity function
الدالة التربيعية
quadratic function
الدالة التكعيبية
cubic function
دالة الجذر التربيعي
square root function
دالة المقلوب
reciprocal function
دالة القيمة المطلقة
absolute value function
الدالة الدرجية
step function
دالة أكبر عدد صحيح
greatest integer function
التحويل الهندسي
transformation
الإزاحة (الانسحاب)
translation
الانعكاس
reflection
التمدد
dilation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

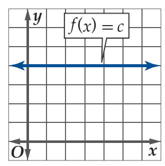


الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

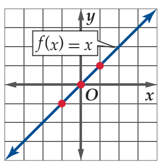
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي — الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

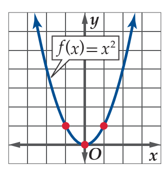
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



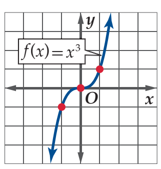
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



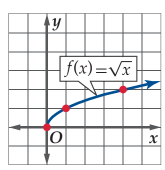
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



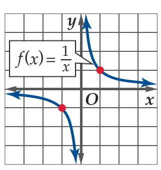
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}\,,\ x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}\,,\ x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5

تحليل التمثيل البياني للدوال.

الدرس 1-5

تعيين الدوال الرئيسة (الأم) ووصفها وتمثيلها بيانيًّا.

تعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم) وتمثيلها بيانيًّا.

مابعد الدرس 1-5

إجراء عمليات على الدوال وتركيب الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما أوجه الشبه والاختلاف بين الدالتين $f(x) = x$ وَ $g(x) = x + 2$؟ المستقيمان لهما الميل نفسه، والدالة $g(x)$ ناتجة عن انسحاب $f(x)$ وحدتين إلى الأعلى.
- صف أثر قيم a المختلفة في الدالة $f(x) = x + a$. تعمل قيم a في انسحاب المستقيم إلى أعلى أو إلى أسفل بمقدار a من الوحدات.
- ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدالتين $f(x) = x^2$ وَ $g(x) = x^2 + 2$؟ الدالتان لهما الشكل البياني نفسه؛ الدالة $g(x)$ ناتجة عن انسحاب $f(x)$ وحدتين إلى أعلى.

مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (51 ,53)	• تنويع التعليم ص (51 ,53)	• تنويع التعليم ص (53 ، 56)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

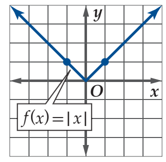
مفهوم أساسي **دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)**

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5,\ |0| = 0,\ |4| = 4$

النموذج



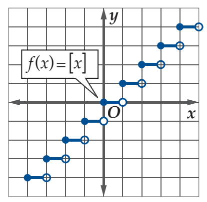
أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي **دالة أكبر عدد صحيح**

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [x]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[-4] = -4,\ [-1.5] = -2,\ [\frac{1}{3}] = 0$

النموذج



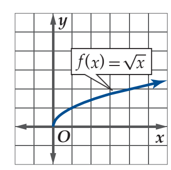
باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1 **وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)**

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

تحقق من فهمك

1) $f(x) = |x|$

1) مجال الدالة: $\{x \mid x \in R\}$، ومداها: $\{y \mid 0 \leq y < \infty, y \in R\}$
للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
المنحنى متماثل حول المحور y ؛ لذا فالدالة زوجية.
المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
المنحنى متناقص في الفترة $(-\infty, 0)$ ، ومتزايد في الفترة $(0, \infty)$.
يبدأ المنحنى عند $x = 0$.
وينتهي بـ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ وَ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

التحويلات الهندسية: تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

الدوال الرئيسة (الأم)

مثال 1 يبيِّن كيفية وصف الخصائص المهمة للدالة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$: المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

المجال والمدى $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$؛ لا يقطع المحور x، ولا يقطع المحور y، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية. الدالة متصلة على مجالها، ويوجد لها نقطة عدم اتصال لا نهائية عند $x = 0$. الدالة متناقصة على فترتي المجال.

التعليم باستعمال التقنيات

الحاسبة البيانية اطلب إلى الطلاب استعمال الحاسبة البيانية وكتابة المَعْلَمات في الدالة الرئيسة (الأم) بشكل صحيح. مثل: الثابت، التربيعية التكعيبية وهكذا. على أن يلاحظوا أثر تغير كل معلمة. وبعد أن يكملوا ملاحظاتهم؛ عليهم مقارنتها بملاحظات زملائهم.

التحويلات الهندسية

مثال 2 يبيِّن كيفية تمثيل التحويلات الهندسية.

مثال 3 يبيِّن كيفية وصف الدالة وعلاقتها بالدالة الرئيسة (الأم) وكتابة معادلة الدالة بعد التحويل.

مثال 4 يبيِّن كيفية وصف التمثيل البياني للدالة بعد التحويل.

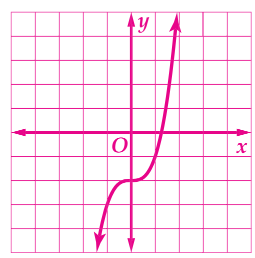
مثال 5 يبيِّن كيفية تمثيل الدالة متعددة التعريف.

المثالان 6 , 7 يبيِّنان كيفية استعمال التحويلات الهندسية للدوال ووصفها وتمثيلها.

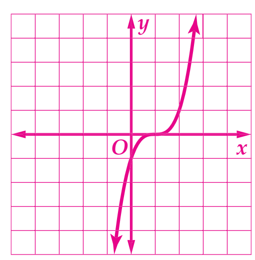
مثال إضافي

2 استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

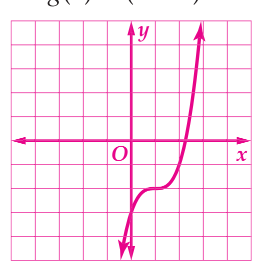
a) $g(x) = x^3 - 2$



b) $g(x) = (x - 1)^3$



c) $g(x) = (x - 1)^3 - 2$

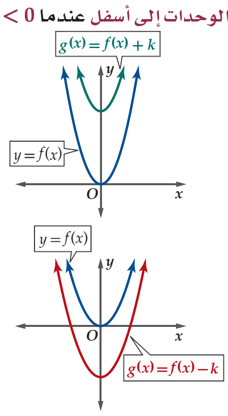


الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

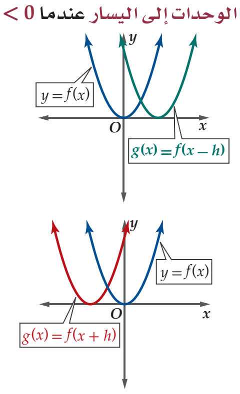
الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.



الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

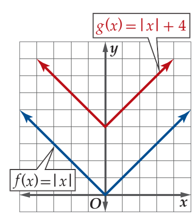
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

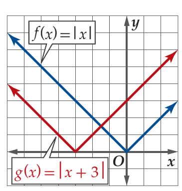
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

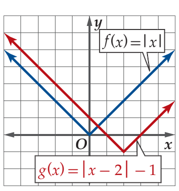
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$ **2B)** $h(x) = 8 + x^3$ **2C)** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

إرشاد تقني

الانسحاب:

يمكنك إجراء انسحاب لمنحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية. TI−nspire ، بعد تمثيل الدالة الرئيسة (الأم) f1(x):

- لإجراء انسحاب مقداره k وحدة لأعلى أو لأسفل اضغط على المفاتيح:

tab var $f1(x) \pm k$ enter

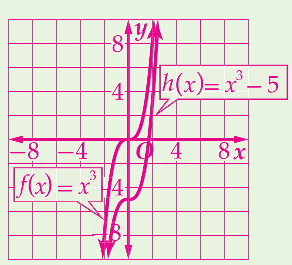
- لإجراء انسحاب مقداره h وحدة لليمين أو اليسار اضغط على المفاتيح:

tab var $f1(x \pm h)$ enter

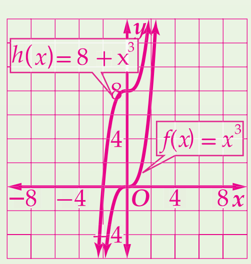
ستقوم الحاسبة برسم كلا الدالتين الرئيسة (الأم) والدالة المزاحة على الشاشة نفسها.

2A-C) انظر الهامش

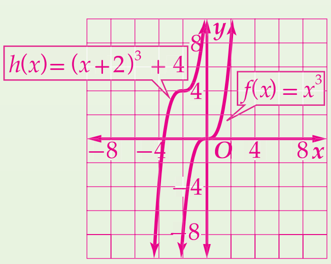
2A)



2B)



2C)

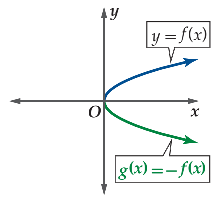


من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي **الانعكاس حول المحورين الإحداثيين**

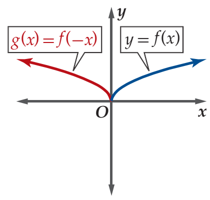
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.

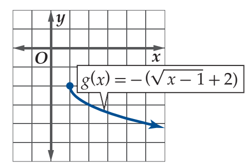


الانعكاس حول المحور y

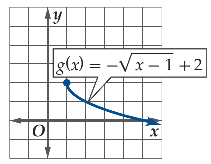
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.

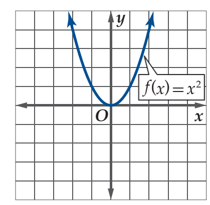


انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين وحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

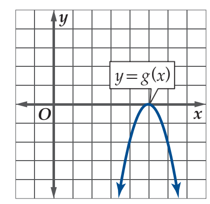
مثال 3 كتابة معادلات التحويل



الشكل 1.5.5

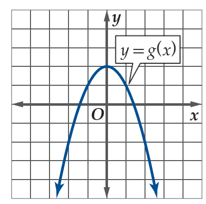
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

a)



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x-5)^2$.

b)

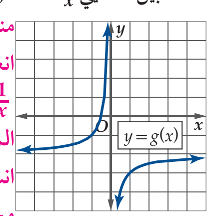


منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

✓ **تحقق من فهمك**

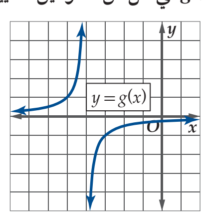
صف العلاقة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3A)



منحنى الدالة هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب بمقدار وحدتين إلى الأسفل؛ $g(x) = -\frac{1}{x} - 2$

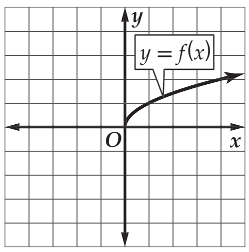
3B)



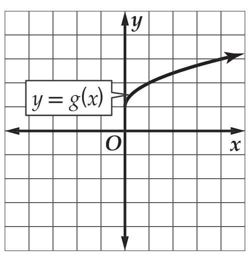
منحنى الدالة هو انسحاب لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور y. $g(x) = \frac{-1}{x+4}$

مثال إضافي

3 صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ في الشكل أدناه ومنحنى $g(x)$، في كلٍّ شكل مما يأتي ثم اكتب معادلة $g(x)$.

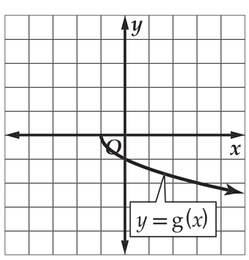


a)



انسحاب المنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى. $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

b)



انسحاب المنحنى وحدة إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x. $g(x) = -\sqrt{x+1}$.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون: اطلب إلى الطلاب عمل ملصقات يعرضون فيها الدوال الرئيسة (الأم) الثماني التي تم دراستها في هذا الدرس، وكيفية إجراء التحويلات الهندسية عليها.

المحتوى الرياضي

التحويلات الهندسية للدوال عند إجراء انعكاس لمنحنى الدالة، تحصل على الشكل نفسه، لكن إذا حصل تمدد لمنحنى الدالة، فإنك تحصل على شكل مختلف. من منظور هندسي، يحافظ الانسحاب والانعكاس لمنحنيات الدوال على شكلها؛ لذا فالصورة مطابقة لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم)، في حين لا يحافظ التمدد على الشكل؛ لذا فالصورة لا تشبه منحنى الدالة الرئيسة (الأم).

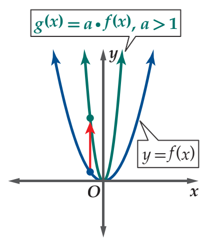
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا.

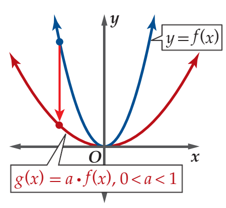
مفهوم أساسي — التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$.

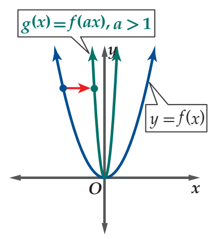


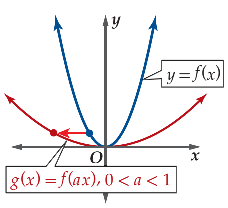


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$.



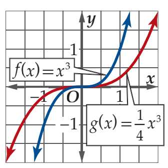


مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

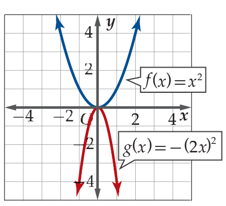
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضييق أفقي، ثم انعكاس حول المحور x لمنحنى $f(x) = x^2$؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$ وَ $2 > 1$.



إرشادات للدراسة

التمدد: يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبّق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

تحقق من فهمك (4A-4B) انظر الهامش

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

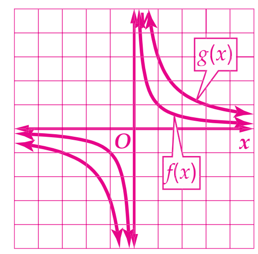
يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها.

مثال إضافي

4 عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، ثمَّ صِف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه.

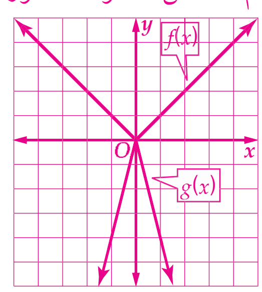
a) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{3}{x}$

منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ بمعامل مقداره 3.



b) $f(x) = |x|,\ g(x) = -|4x|$

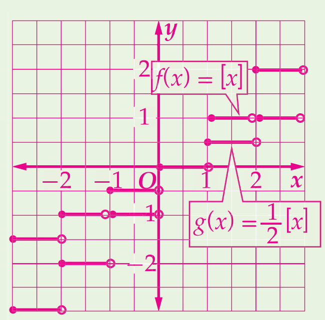
منحنى $g(x)$ هو تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$ بمعامل مقداره 4، ثم انعكاس له حول المحور x.



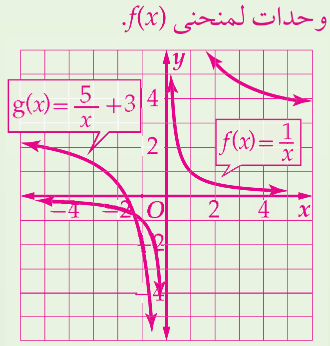
إجابات (تحقق من فهمك):

4A) $f(x) = [x];\ g(x) = \frac{1}{2}[x]$

$g(x)$ تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$.

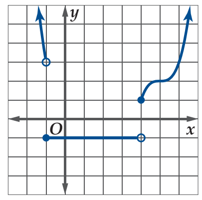


4B) $f(x) = \frac{1}{x}$؛ منحنى $g(x)$ توسع رأسي بمقدار 5 وحدات، ثمَّ انسحاب إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات لمنحنى $f(x)$.



مثال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًا

مثّل الدالة بيانيًا: $f(x)=\begin{cases}3x^2 &, x<-1\\ -1 &, -1\le x<4\\ (x-5)^3+2 &, x\ge 4\end{cases}$.



في الفترة $(-\infty,-1)$، أمثّل الدالة $y=3x^2$.

في الفترة $[-1,4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y=-1$.

في الفترة $[4,\infty)$ أمثّل الدالة $y=(x-5)^3+2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1,3)$ و $(4,-1)$ ونقطة عند كل من $(-1,-1)$ و $(4,1)$ لأن $f(-1)=-1$ و $f(4)=1$.

تحقق من فهمك (5A-B) انظر الهامش

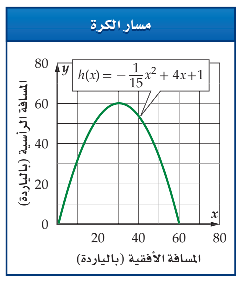
5A) $g(x)=\begin{cases}x-5 &, x\le 0\\ x^3 &, 0<x\le 2\\ \frac{2}{x} &, x>2\end{cases}$

5B) $h(x)=\begin{cases}(x+6)^2 &, x<-5\\ 7 &, -5\le x\le 2\\ |4-x| &, x>2\end{cases}$

يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثّل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة التحويلات الهندسية على الدوال

كرة قدم: ضرب لاعب كرة قدم، فكان مساره معطى بالدالة $h(x)=-\frac{1}{15}x^2+4x+1$، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x=0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ للحصول على $h(x)$.



الربط مع الحياة

تأسس الاتحاد السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x)=a(x-h)^2+k$ باستعمال إكمال المربع.

$h(x)=-\frac{1}{15}x^2+4x+1$ الدالة الأصلية

$=-\frac{1}{15}(x^2-60x)+1$ حلّل $-\frac{1}{15}x^2+4x$

$=-\frac{1}{15}(x^2-60x+900)+1+\frac{1}{15}(900)$ أكمل المربع

$=-\frac{1}{15}(x-30)^2+61$ اكتب $x^2-60x+900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$، ثم انعكاس حول المحور x، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

تحقق من فهمك

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x)=\sqrt{\frac{x}{11}}$، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

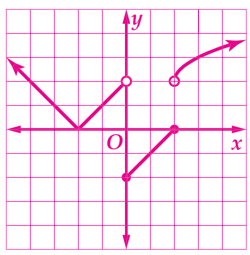
A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$. توسع أفقي

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم. $I(x)=\sqrt{\frac{x}{15}}$

مثالان إضافيان

5) مثّل الدالة بيانيًا:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|, x<0\\ |x|-2, 0\le x\le 2\\ \sqrt{x-2}+2, x>2\end{cases}$$



6) **مدينة الألعاب:** يتخذ جزء من سكة حديد العجلة الدوّارة في مدينة الألعاب شكل منحنى الدالة: $g(x)=\frac{-x^2}{30}+\frac{10x}{3}-\frac{100}{3}$، حيث تمثل $g(x)$ ارتفاع السكة عن سطح الأرض بالياردات، و x المسافة الأفقية بالياردة من نقطة انطلاق القطار على العجلة.

a) صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ للحصول على $g(x)$.
منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ مسحوبًا 50 وحدة إلى اليمين و 50 وحدة إلى الأعلى، وتضيق رأسيّ، وانعكاس حول المحور x.

b) إذا قرر مصمم سكة الحديد رفع أعلى نقطة فيها لتصبح 70 ياردة عن سطح الأرض، فأعد كتابة $g(x)$ للتوافق مع هذا التعديل.
$g(x)=-\frac{1}{30}(x-50)^2+70$

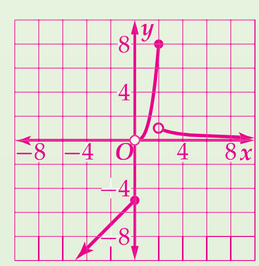
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

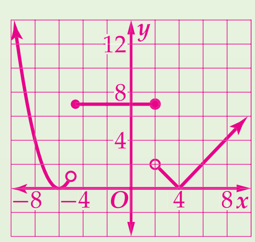
المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات لتحديد إن كانت مجموعات من الدوال لها تماثلات تشابه تماثلات الدوال الرئيسة (الأم). وشجِّعهم على استعمال الحاسوب أو الحاسبة البيانية لاختبار تخميناتهم حول التماثل.

إجابات (تحقق من فهمك):

5A)



5B)

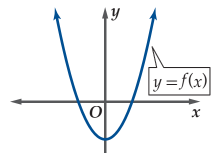


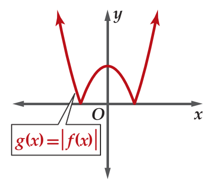
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي **التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة**

$g(x) = |f(x)|$

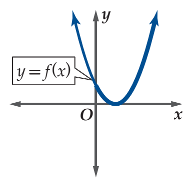
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

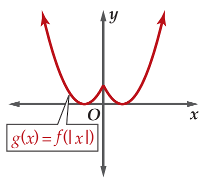




$g(x) = f(|x|)$

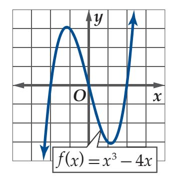
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





إرشاد تقني

تحويلات القيمة المطلقة
يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .



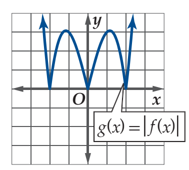
الشكل 1.5.6

مثال 7 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

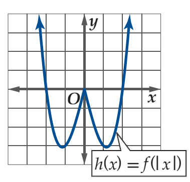
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

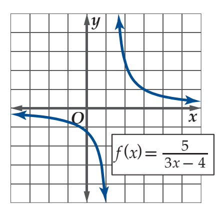
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



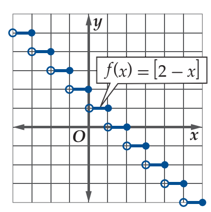
تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: **7A-B)** انظر الهامش.

7A)

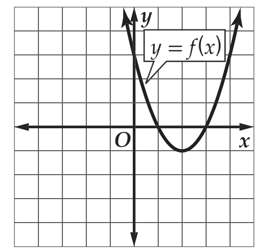


7B)

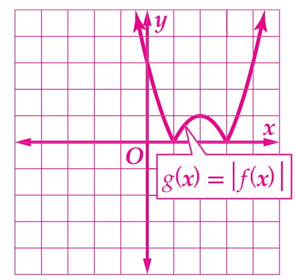


مثال إضافي

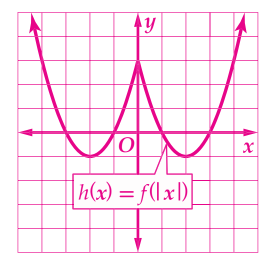
7 استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$ المبين في الشكل أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:



a) $g(x) = |f(x)|$

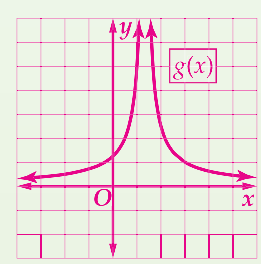


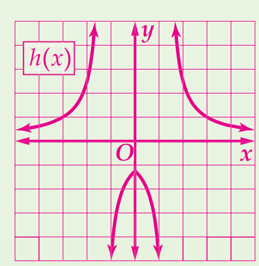
b) $h(x) = f(|x|)$



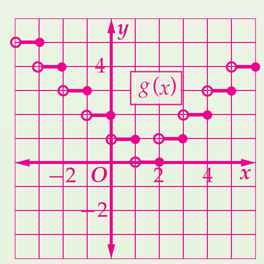
إجابات (تحقق من فهمك):

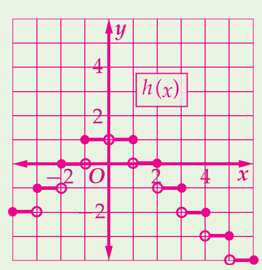
7A)





7B)





تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1) **1-6 انظر الهامش.**

1) $f(x) = [x]$ 2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 3) $f(x) = x^3$

4) $f(x) = x^2$ 5) $f(x) = c$ 6) $f(x) = x$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2) **7-8 انظر ملحق الإجابات.**

7) $g(x) = \sqrt{x-4}$

8) $g(x) = \sqrt{x-7} + 3$

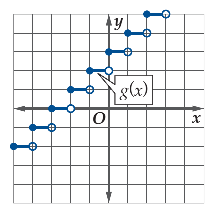
استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2) **9-10 انظر ملحق الإجابات.**

9) $g(x) = \frac{1}{x} + 4$

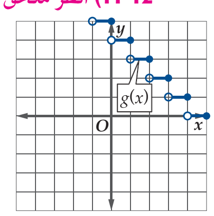
10) $g(x) = \frac{1}{x+7} - 4$

صف العلاقة بين منحنى $f(x) = [x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3) **11-12 انظر ملحق الإجابات.**

11)

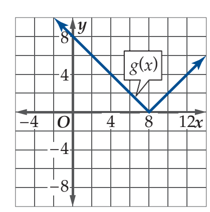


12)

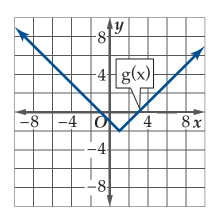


صف العلاقة بين منحنى $f(x) = |x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3) **13-14 انظر ملحق الإجابات.**

13)



14)



اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15) $g(x) = 3|x| - 4$ 16) $g(x) = 3\sqrt{x+8}$

17) $g(x) = \frac{4}{x+1}$ 18) $g(x) = 2[x-6]$

19) $g(x) = \frac{1}{6x} + 7$ 20) $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{4}$

مثّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا: (مثال 5) **15-24 انظر ملحق الإجابات.**

21) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \ x < -2 \\ 3 & , \ -2 \le x < 7 \\ (x-5)^2 + 2 & , \ x \ge 7 \end{cases}$

22) $g(x) = \begin{cases} x+4 & , \ x < -6 \\ \frac{1}{x} & , \ -6 \le x < 4 \\ 6 & , \ x \ge 4 \end{cases}$

23) $h(x) = \begin{cases} |x-5| & , \ x < -3 \\ 4x - 3 & , \ -1 \le x < 3 \\ \sqrt{x} & , \ x \ge 4 \end{cases}$

24) $g(x) = \begin{cases} 2 & , \ x < -4 \\ x^4 - 3x^3 + 5 & , \ -1 \le x < 1 \\ [x] + 1 & , \ x \ge 3 \end{cases}$

25) **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ عام 1411هـ حتى 1431هـ . استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55

انظر ملحق الإجابات.

26) **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x) = 20 + 0.2\,[x]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6) **انظر ملحق الإجابات.**

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = [x]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًّا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

27) **فيزياء:** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x) = 4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر. (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$. **توسع رأسي**

b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x) = 2x^2$، فمثِّل بيانيًّا كلًّا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية. **انظر ملحق الإجابات.**

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–31 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) المجال: $\{x \mid x \in R\}$، المدى: $\{y \mid y \in z\}$. يقطع المنحنى المحور y عند (0.0) ويقطع المحور x عند $\{x \mid 0 \le x < 1, x \in R\}$. لا يوجد لمنحنى الدالة تماثلات، أي أنها ليست فردية وليست زوجية. للدالة عدم اتصال قفزي عند $\{x \mid x \in z\}$.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. الدالة ثابتة عند $\{x \mid x \notin z\}$. متزايدة عند $\{x \mid x \in z\}$.

2) المجال $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$ المدى $\{y \mid y \neq 0, y \in R\}$. المنحنى لا يقطع أيًّا من المحورين، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ، للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ الدالة متناقصة في $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$.

3) المجال $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى $\{y \mid y \in R\}$. المنحنى يقطع المحورين عند $(0, 0)$ ، المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ومتصلة.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

4) المجال $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى $\{y \mid y \ge 0, y \in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0) المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فالدالة زوجية، ومتصلة.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ ،
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ ، ومتزايدة على الفترة $(0, \infty)$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون — دون المتوسط	1–31، 50–53، 55–67
ضمن — ضمن المتوسط	1–31 (فردي)، 32–50 (زوجي)، 49–54 ، 55–67
فوق — فوق المتوسط	29–67

5) المجال: $\{x \mid x \in R\}$، المدى: $\{y \mid y = c, c \in R\}$. إذا كان $c = 0$ ، يقطع المنحنى المحور x عند عدد لانهائي من النقاط. وعدا ذلك فالمنحنى لا يقطع المحور x، يقطع المنحنى المحور y عند النقطة $(0, c)$، والدالة متماثلة حول المحور y؛ لذا فهي زوجية ومتصلة.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$، وثابتة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

6) المجال: $\{x \mid x \in R\}$ ، المدى: $\{y \mid y \in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0). المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ومتصلة.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$.

تمثيلات متعددة
في السؤال 49 يستعمل الطلاب الجداول والتعبير اللفظي والجبر لاستقصاء بعض العمليات على الدوال.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب وصف العلاقة بين الدالة $g(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$ ودوالها الرئيسة (الأم).

منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x) = x^2$ بالانعكاس حول المحور x، ويتبعه انسحاب بمقدار 3 وحدات إلى اليسار، و 4 وحدات إلى أعلى، وتوسع مقداره 4.

تنبيه
خطأ شائع في الأسئلة 31–28 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في معرفة التغيرات التي تسببها القيمة المطلقة؛ لذا اقترح عليهم تمثيل منحنى الدالة دون قيمة مطلقة، ثم إجراء الانعكاس على أجزاء من منحنى الدالة في المحور المناسب.

إجابة:
38) إن منحنى $g(x)$ ناتج عن التحويلات الهندسية الآتية لمنحنى $f(x) = x^3$.
- انسحاب 5 وحدات إلى اليمين.
- تضييق رأسي معامله 0.5.
- انعكاس حول المحور x.
- انسحاب 8 وحدات إلى الأسفل.

لذا فمعادلة $g(x)$ هي:
$g(x) = -0.5(x-5)^2 - 8$

(28-31 انظر ملحق الإجابات.

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: **(مثال 7)**

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

29) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

30) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$

31) $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

اكتب الدالة الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32) $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى أعلى، و7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2 $g(x) = \frac{2}{x+7} + 5$

33) $f(x) = [x]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى أسفل، وتوسع رأسي معامله 3 $g(x) = -3[x] - 4$

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:

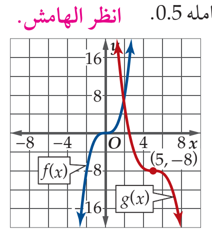
34) $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$ **(34-37** انظر ملحق الإجابات.

35) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

36) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

37) $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

38) اكتب معادلة الدالة $g(x)$ إذا علمت أن منحناها ناتج عن عدة تحويلات هندسية لمنحنى الدالة $f(x)$، وأحد هذه التحويلات هو تضييق رأسي معامله 0.5. انظر الهامش.



39) **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

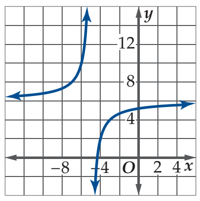
a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع. $g(x) = 1.12f(x)$

b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء.

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع. $g(x) = f(x) - 0.45$

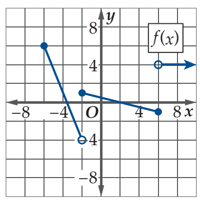
b) $g(x) = f(x - 30)$

40) اكتب دالة تمثّل المنحنى المرسوم:



$f(x) = -\frac{4}{x+5} + 6$

استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



(41-44 انظر ملحق الإجابات.

41) $g(x) = 0.25f(x) + 4$

42) $g(x) = 3f(x) - 6$

43) $g(x) = f(x-5) + 3$

44) $g(x) = -2f(x) + 1$

(45-48 انظر ملحق الإجابات.

استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

45) $g(x) = 2f(x) + 5$ **46)** $g(x) = -3f(x) + 6$

47) $g(x) = f(4x) - 5$ **48)** $g(x) = f(2x+1) + 8$

49) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:
- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًّا:** اختر ثلاث قيم لـ a، وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
−4	15	−13	2	2
15	262	63	325	325

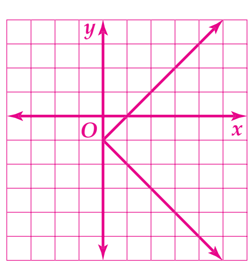
b) **لفظيًّا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

c) **جبريًّا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًّا. **(49b-c** انظر ملحق الإجابات.

تنويع التعليم
فوق

توسّع: مثّل الدالة $|y+1| = x$. ثم صف علاقتها بالدالة $y = |x|$.

منحنى هذه الدالة هو تدوير لمنحنى الدالة $y = |x|$ بزاوية قياسها 90° مع اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم إزاحة وحدة واحدة إلى أسفل.



مسائل مهارات التفكير العليا

(50-56) انظر ملحق الإجابات.

50) اكتشف الخطأ: وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x+4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الله: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

51) تبرير: إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $h(x)$, $f(x)$؟ برِّر إجابتك.

تبرير: تحقّق ما إذا كانت كل من الجملتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة. وبرِّر إجابتك.

52) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = |f(x)|$

53) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(-x) = -|f(x)|$

54) تحدٍّ: صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

55) تبرير: وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

56) اكتب: وضح أهمية الترتيب في تحويلات الانعكاس والانسحاب.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

57) $g(x) = -2x^2 + x - 3, [-1, 3]$ **-3**

58) $g(x) = x^2 - 6x + 1, [4, 8]$ **6**

59) $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4, [-2, 3]$ **-14**

حدِّد سلوك طرف التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية عندما تقترب x من لانهاية، مستعملًا التبرير المنطقي، وبرِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

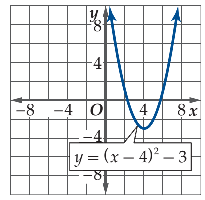
60) $q(x) = -\frac{12}{x}$ (60-62) انظر الهامش.

61) $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

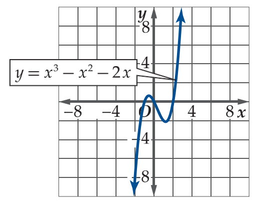
62) $p(x) = \frac{x+2}{x-3}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير قيمة كلٍّ من: المقطع y، والأصفار إلى أقرب جزء من مئة (كلما لزم ذلك) لكل دالة من الدوال الآتية، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا: (الدرس 1-2) (63-65) انظر الهامش.

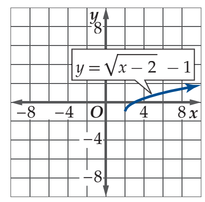
63)



64)

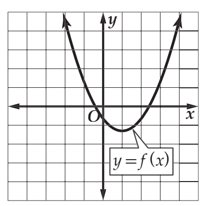


65)



تدريب على اختبار

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟ **D**



A $(0,\infty)$

B $(-\infty,1)$

C $(-1,\infty)$

D $(1,\infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2+8}{2}$؟ **B**

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

تنبيه

اكتشف الخطأ في السؤال 50 كلا التفسيرين صحيح، اطلب إلى الطلاب التحقق من ذلك بسحب الدالة الأصلية 4 وحدات إلى أعلى من جهة، ثم كلِّفهم بسحب الدالة الأصلية 4 وحدات إلى اليسار، سيلاحظون أن النتيجة واحدة في الحالتين.

إجابات:

60) 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$، تتناقص قيمة الكسر لتؤول $q(x)$ إلى 0.

61) 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x\to\infty$، تتناقص قيمة الكسر لتؤول $f(x)$ إلى 0.

62) 1؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، تقترب الدالة من $\frac{x}{x}$؛ لذا فإن قيم $p(x)$ تؤول إلى 1.

63) المقطع y هو 13، وأصفار الدالة هي 2.25,5.75 تقريبًا. المقطع y عندما $x = 0$ ويساوي $y=(-4)^2-3=13$

أصفار الدالة:

$$0 = (x-4)^2 - 3$$
$$3 = (x-4)^2$$
$$\pm\sqrt{3} = x - 4$$
$$x = 4 \pm \sqrt{3}$$
$$x = 5.73 , 2.27$$

64) المقطع y هو 0 ؛ الأصفار $-1, 0, 2$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x(x+1)(x-2) = 0$$
$$x = 0 \text{ أو } x + 1 = 0 \text{ أو } x - 2 = 0$$
$$x = 0 \text{ أو } x = -2 \text{ أو } x = 2$$

65) المنحنى لا يقطع المحور y.

صفر الدالة هو 3

$$0 = \sqrt{x-2} - 1$$
$$1 = \sqrt{x-2}$$
$$1^2 = x - 2$$
$$1 + 2 = x$$
$$x = 3$$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون: دون المتوسط — ضمن: ضمن المتوسط — فوق: فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) دون

الاسم: ____ التاريخ: ____

1-5 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

الدوال الرئيسة (الأم) الدالة الرئيسة هي أبسط صورة في عائلة الدالة.

الدالة الرئيسة (الأم)	الصيغة	ملاحظات
الدالة الثابتة	$f(x)=c$	التمثيل البياني هو مستقيم أفقي.
الدالة المحايدة	$f(x)=x$	إحداثيات أي نقطة على التمثيل البياني (a, a).
الدالة التربيعية	$f(x)=x^2$	التمثيل البياني على صورة حرف U.
الدالة التكعيبية	$f(x)=x^3$	المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.
دالة الجذر التربيعي	$f(x)=\sqrt{x}$	التمثيل البياني في الربع الأول.
دالة المقلوب	$f(x)=\frac{1}{x}$	التمثيل البياني مكون من جزأين.
دالة القيمة المطلقة	$f(x)=\lvert x\rvert$	التمثيل البياني على صورة حرف V.
دالة أكبر عدد صحيح	$f(x)=[x]$	دالة أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x؛ وهي نوع من الدوال الدرجية.

مثال صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^3$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$، المدى: $\{y \mid y \in \mathbf{R}\}$.

المنحنى يمر بنقطة الأصل، لذا فالمقطع x هو 0، والمقطع y هو 0.

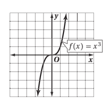
والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل والدالة فردية؛ لأن $f(-x)=-f(x)$.

وكذلك الدالة متصلة؛ لأنه يمكن تتبع منحناها دون رفع القلم عن الورقة.

وعندما تتناقص x بلا حدود فإن y تؤول إلى سالب ما لا نهاية، وعندما تتزايد x بلا حدود فإن y تؤول إلى موجب ما لانهاية.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

لاحظ أن الدالة متزايدة دائمًا، لذا فهي متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.



تمارين

صف خصائص التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ من حيث: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص.

المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$، والمدى: $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathbf{R}\}$؛ المقطع x هو 0؛ المقطع y هو 0، المنحنى متماثل حول المحور y، والدالة زوجية ومتصلة، $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$؛ الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

الصف: الثالث الثانوي — 22 — الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات إعادة التعليم (23) دون

الاسم: ____ التاريخ: ____

1-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

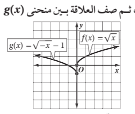
الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم) يمكن إجراء تحويل للدالة الرئيسة لإنشاء منحنيات أخرى في عائلة هذه الدالة.

الانسحاب (الإزاحة)	$g(x)=f(x)+k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا ...	... $\lvert k\rvert$ وحدة إلى أعلى عندما $k>0$.
		... $\lvert k\rvert$ وحدة إلى أسفل عندما $k<0$.
	$g(x)=f(x-h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا...	... h وحدة إلى اليمين عندما $h>0$.
		... $\lvert h\rvert$ وحدة إلى اليسار عندما $h<0$.
الانعكاس	$g(x)=-f(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	...حول المحور x.
	$g(x)=f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$...	... حول المحور y.
التمدد	$g(x)=a\cdot f(x)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...توسعًا رأسيًّا إذا كان $a>1$.
		...تضيقًا رأسيًّا إذا كان $0<a<1$.
	$g(x)=f(ax)$ هو تمدد لمنحنى $f(x)$ ويكون:	...تضيقًا أفقيًّا إذا كان $a>1$.
		...توسعًا أفقيًّا إذا كان $0<a<1$.

مثال عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)=\sqrt{-x}-1$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$، ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه.

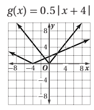
منحنى $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)=\sqrt{x}$ حول المحور y، ومزاح وحدة واحدة إلى أسفل.



تمارين:

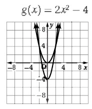
عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$، ثم صف العلاقة بين منحنى $g(x)$ ومنحنى $f(x)$ ومثّلهما بيانيًّا على المستوى نفسه:

1) $g(x)=0.5\lvert x+4\rvert$



منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى دالة القيمة المطلقة $f(x)=\lvert x\rvert$، ومزاح 4 وحدات إلى اليسار.

2) $g(x)=2x^2-4$



منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى الدالة التربيعية $f(x)=x^2$، ومزاح 4 وحدات إلى أسفل.

الصف: الثالث الثانوي — 23 — الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: ____ التاريخ: ____

1-5 تدريبات حل المسألة

الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

1) **مساحة:** إذا كان العرض w لقطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ثابتة مقدارها A فإنه يُعبر عن العرض بالعلاقة: $w(x)=\frac{A}{x}$، حيث x طول المستطيل.

a) إذا كانت مساحة قطعة الأرض 1000 قدم مربعة، فصف التحويلات التي تمت على منحنى الدالة الرئيسة $f(x)=\frac{1}{x}$ للحصول على منحنى الدالة $w(x)$.

توسع رأسي للدالة $f(x)$.

b) اكتب دالة بدلالة الطول يمكن استعمالها لإيجاد أصغر محيط ممكن لقطعة أرض مساحتها معطاة.

$P(x)=2x+2\left(\frac{A}{x}\right)$

c) هل الدالة التي حصلت عليها في b تحويل للدالة $f(x)$؟ وضِّح إجابتك.

لا، إجابة ممكنة: إنها ناتج جمع دالتين نسبيتين مختلفتين.

d) أوجد أصغر محيط ممكن لقطعة أرض مساحتها 1000 قدم مربعة. **126.5 ft**

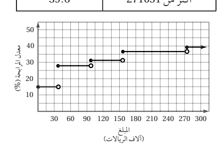
2) **جولف:** إذا كان مسار كرة الجولف مُعطى بالقاعدة $h(x)=-\frac{1}{10}x^2+2x$، حيث $h(x)$ ارتفاع الكرة بالياردات عن سطح الأرض، وx المسافة الأفقية بين الكرة ونقطة انطلاقها باليارادات.

فصف التحويلات الهندسية التي تمت على منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ للحصول على $h(x)$.

منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x)$ مزاح 10 وحدات إلى اليمين، مع تضيق رأسي، ومنعكس حول المحور x، ومزاح 10 وحدات إلى أعلى.

3) **مرابحة:** مثّل معدلات المرابحة على المبالغ المبينة في الجدول الآتي باستعمال الدالة الدرجية.

حدود المبلغ (ريال)	معدل المرابحة (%)
من 0 إلى 41200	15
من 41201 إلى 99600	28
من 99601 إلى 151750	31
من 151751 إلى 271050	36
أكثر من 271051	39.6



4) **أفق:** يمكن استعمال الدالة $f(x)=\sqrt{1.5x}$ لتقدير مسافة الرؤية الأفقية أو مقدار المسافة التي يمكن لشخص الرؤية ضمنها في يوم صافٍ، حيث $f(x)$ المسافة بالأميال، وx ارتفاع الشخص بالأقدام.

a) قارن بين منحنى $f(x)$ ومنحنى الدالة الرئيسة (الأم).

الدالة $f(x)$ تكافئ الدالة الرئيسة (الأم) بعد تضيق أفقي.

b) تستعمل الدالة $g(x)=1.2\sqrt{x}$ كذلك لتقدير مسافة الرؤية الأفقية. قارن بين منحنى $g(x)$ ومنحنى الدالة الرئيسة (الأم).

الدالة $f(x)$ تكافئ الدالة الرئيسة (الأم) بعد توسع رأسي.

الصف: الثالث الثانوي — 24 — الفصل 1: تحليل الدوال

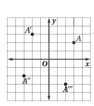
التدريبات الإثرائية (25) فوق

الاسم: ____ التاريخ: ____

1-5 التدريبات الإثرائية

الدوران

الدوران: تحويل هندسي يدوّر المنحنى حول نقطة بزاوية معينة، وقد يكون باتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة. في هذا النشاط اعتبر الدوران حول نقطة الأصل وعكس اتجاه عقارب الساعة. ولتدوير نقطة بزاوية 90° حول نقطة الأصل استعمل القاعدة $(x, y) \to (-y, x)$.



1) مثّل صورة النقطة A بعد دورانها بزاوية 90° مستعملًا القاعدة، وسمّ الصورة A′، ثمّ أوجد إحداثيات A′. **(−2, 3)**

2) مثّل صورة النقطة A′ بعد دورانها بزاوية 90°، وسمّ الصورة A″. ثمّ أوجد إحداثيات A″، مستعملًا النتيجة لكتابة قاعدة لتدوير النقطة التي إحداثياتها (x, y) بزاوية 180°.

$(-3,-2)$; $(x, y) \to (-x, -y)$

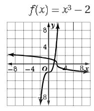
3) مثّل صورة A″ بعد دورانها بزاوية 90°، وسم الصورة A‴. ثمّ اكتب إحداثيات A‴، مستعملًا النتيجة لكتابة قاعدة لتدوير النقطة التي إحداثياتها (x, y) بزاوية 270°.

$(2, -3)$; $(x, y) \to (y, -x)$

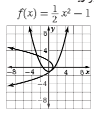
لتدوير دالة، يمكنك رسم صور عدة نقاط ثم التوصيل بينها.

مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، ثم مثّل كلّ دالة بعد تدويرها بزاوية 90°:

4) $f(x)=x^3-2$

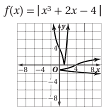


5) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$

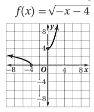


مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، ثم مثّل كلّ دالة بعد تدويرها بزاوية 270°:

6) $f(x)=\lvert x^3+2x-4\rvert$



7) $f(x)=\sqrt{-x-4}$



8) إذا دوّرنا منحنى الدالة $f(x)=2x-3$ بزاوية 90°، فما الدالة التي تمثّل منحنى الدالة بعد تدويرها؟

$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

الصف: الثالث الثانوي — 25 — الفصل 1: تحليل الدوال

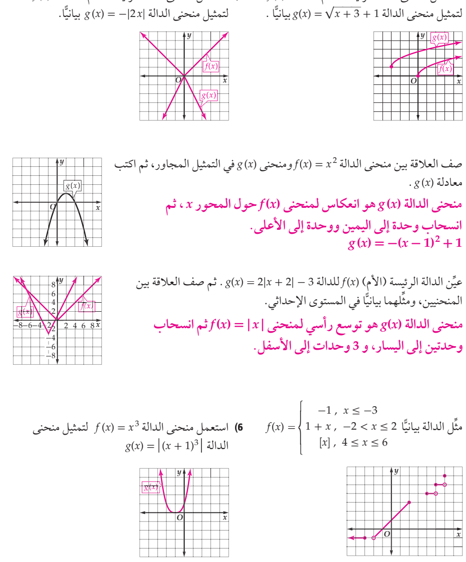
مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 1

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (8) دون ضمن فوق



5-1 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

1) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ بيانيًّا .

2) استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = -|2x|$ بيانيًّا.

3) صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى $g(x)$ في التمثيل المجاور، ثم اكتب معادلة $g(x)$.

منحنى الدالة $g(x)$ هو انعكاس لمنحنى $f(x)$ حول المحور x ، ثم انسحاب وحدة إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى.
$g(x) = -(x-1)^2 + 1$

4) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = 2|x+2| - 3$. ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

منحنى الدالة $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى $f(x) = |x|$ ثم انسحاب وحدتين إلى اليسار، و 3 وحدات إلى الأسفل.

5) مثِّل الدالة بيانيًّا $f(x) = \begin{cases} -1 , & x \le -3 \\ 1 + x , & -2 < x \le 2 \\ [x] , & 4 \le x \le 6 \end{cases}$

6) استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3$ لتمثيل منحنى الدالة $g(x) = |(x+1)^3|$

8

الفصل الأول تحليل الدوال

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

إيجاد قيم الدوال.

الدرس 1-6

إجراء العمليات على الدوال.

إيجاد تركيب الدوال.

ما بعد الدرس 1-6

إيجاد معكوس العلاقات والدوال العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا تم بيع منتجين بمتوسط شهري مختلف، فكيف يمكنك المقارنة بين المتوسطين؟
  اطرح مبيعات أحد المنتجين من مبيعات الآخر.
- تهتم شركة بالنسبة بين عدد البيوت التي تم بيعها والبيوت المعروضة للبيع، فما العبارة التي تدل على هذه النسبة؟
  قسمة عدد البيوت التي تم بيعها على عدد البيوت المعروضة للبيع.

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

Function Operations and Composition of Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أُجري العمليات على الدوال.
- أجدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين
composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال: درست في الصف الثاني الثانوي عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود، وفي هذا الدرس ستتعلمُ إجراءَ العمليات نفسها على الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع:	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب:**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح:	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة:**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x,\ g(x) = \sqrt{x+2},\ h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^2 + 4x) + (\sqrt{x+2})$$
$$= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$(f-h)(x) = f(x) - h(x)$$
$$= (x^2 + 4x) - (3x - 5)$$
$$= x^2 + 4x - 3x + 5$$
$$= x^2 + x + 5$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x)$$
$$= (x^2 + 4x)(3x - 5)$$
$$= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x$$
$$= 3x^3 + 7x^2 - 20x$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$ ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in R\}$.

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (60, 61)	• تنويع التعليم ص (60, 63)	• تنويع التعليم ص (63, 64)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

✅ **تحقق من فهمك** انظر الهامش

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\bullet g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x)=x-4,\ g(x)=\sqrt{9-x^2}$ 1B) $f(x)=x^2-6x-8,\ g(x)=\sqrt{x}$

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين: يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

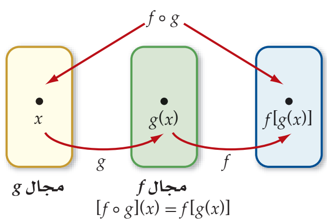
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y=(x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y=x-3$ والدالة التربيعية $y=x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي **تركيب دالتين**

يعرف **تركيب الدالتين** f وَ g على النحو الآتي:

$[f\circ g](x)=f[g(x)]$

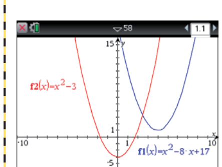
ويتكون مجال الدالة $f\circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f\circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيث تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

تنبيه!

ترتيب الدوال عند التركيب: في معظم الأحيان $f\circ g$, $g\circ f$ دالتان مختلفتان. بمعنى آخر إن تركيب الدوال ليس إبداليًا. ففي المثال 2 $[f\circ g](x)=x^2-8x+17$ لكن $[g\circ f](x)=x^2-3$ وهما دالتان مختلفتان. والتمثيل البياني أدناه يبيّن ذلك.



مثال 2 **تركيب دالتين**

إذا كانت $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x-4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f\circ g](x)$

$[f\circ g](x)=f[g(x)]$	تعريف $f\circ g$
$=f(x-4)$	$g(x)=x-4$
$=(x-4)^2+1$	عوّض $(x-4)$ بدلًا من x في $f(x)$
$=x^2-8x+16+1$	بسّط
$=x^2-8x+17$	

b) $[g\circ f](x)$

$[g\circ f](x)=g[f(x)]$	تعريف $g\circ f$
$=g(x^2+1)$	$f(x)=x^2+1$
$=(x^2+1)-4$	عوّض (x^2+1) بدلًا من x في $g(x)$
$=x^2-3$	بسّط

c) $[f\circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f\circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع a عندما $x=2$.

$[f\circ g](2)=(2)^2-8(2)+17=5$ عوّض 2 مكان x في $x^2-8x+17$

العمليات على الدوال

مثال 1 يبيِّن كيفية إجراء العمليات على الدوال.

✅ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 إذا كانت $f(x)=x^2-2x$ و $h(x)=-2x^2+1$ و $g(x)=3x-4$ فأوجد الدالة وحدد مجالها في كل مما يأتي:

a) $(f+g)(x)$

$(f+g)(x)=x^2+x-4$

المجال: $(-\infty,\infty)$

b) $(f-h)(x)$

$(f-h)(x)=3x^2-2x-1$

المجال: $(-\infty,\infty)$

c) $(f\bullet g)(x)$

$(f\bullet g)(x)=3x^3-10x^2+8x$

المجال: $(-\infty,\infty)$

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$\left(\frac{h}{f}\right)(x)=\frac{-2x^2+1}{x^2-2x}$

المجال:

$\{x\mid x\neq 0, x\neq 2, x\in R\}$

تركيب الدوال

المثالان 2 , 3 يبيِّنان كيفية تركيب دالتين وإيجاد ناتج التركيب بوجود قيود على مجالها.

مثال 4 يبيِّن كيفية تجزئة دالة مركبة.

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال دالة مركبة.

إجابات (تحقق من فهمك):

1A) $(f+g)(x)=x-4+\sqrt{9-x^2}$, $D=[-3,3]$; $(f-g)(x)=x-4-\sqrt{9-x^2}$, $D=[-3,3]$;
$(f\bullet g)(x)=x\sqrt{9-x^2}-4\sqrt{9-x^2}$, $D=[-3,3]$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$, $D=(-3,3)$

1B) $(f+g)(x)=x^2-6x-8+\sqrt{x}$, $D=[0,\infty)$; $(f-g)(x)=x^2-6x-8-\sqrt{x}$, $D=[0,\infty)$;
$(f\bullet g)(x)=x^2\sqrt{x}-6x\sqrt{x}-8\sqrt{x}$, $D=[0,\infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$, $D=(0,\infty)$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$ ، $[g \circ f](x)$ ، $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$

$-3x^2 + 16, -9x^2 - 6x + 4, -11$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$

$6x^2 + 24x + 20, 6x^2 - 2, 146$

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$ ، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ ، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x^2 - 9)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$ عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$ ، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$، ونطرح منها 2. لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(\sqrt{x - 3})$ $g(x) = \sqrt{x - 3}$

$= (\sqrt{x - 3})^2 - 2$ عوّض $\sqrt{x - 3}$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x - 3 - 2 = x - 5$ بسّط

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$ ؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين: من المهم تعرف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

مثالان إضافيان

2 إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$ فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = 2x$

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = \sqrt{2x^2 - \frac{1}{2}}$

c) $[f \circ g](2)$

$[f \circ g](2) = 4$

3 أوجد مجال الدالة $f \circ g$، متضمنًا القيود الضرورية. ثم أوجد $f \circ g$ في الحالتين الآتيين:

a) $f(x) = \sqrt{x} - 1,$ $g(x) = (x - 1)^2$.

المجال :

$\{x \mid x \leq 0$ أو $x \geq 2, x \in R\}$

$[f \circ g](x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

المجال :

$\{x \mid x < -1$ أو $x > 1, x \in R\}$

$[f \circ g](x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

المحتوى الرياضي

تركيب الدوال عملية تركيب الدوال بشكل عام ليست إبدالية، لكن هناك بعض أزواج من الدوال يكون فيها $f(g(x)) = g(f(x))$. إذا كان $f(g(x)) = g(f(x)) = x$، فإن كلًّا من f و g دالة عكسية للأخرى.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية

اطلب إلى الطلاب استعمال الجداول الإلكترونية، واختر أحد أمثلة الدرس، واطلب إليهم أيضًا العمل في مجموعات لعمل قائمة بالمدخلات (المجال)، والمخرجات (المدى) للدالة الأولى ، ثم اطلب إليهم استعمال مدى هذه الدالة مجالًا للدالة الثانية. وعليهم إبراز أية قيود على مجال الدالة المركبة على الجداول الإلكترونية.

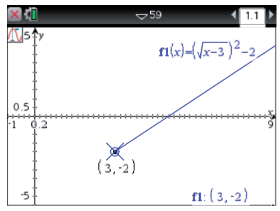
تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية، بحيث يفكر كل طالب بدالة ، ثم يعمل الطالبان معًا لإيجاد مجموع الدالتين والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، وقسمتهما، ثم ناتج تركيبهما.

3A) إجابة ممكنة:
$[f \circ g](x) = |x|$،
المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

3B) إجابة ممكنة:
$[f \circ g](x) = \dfrac{5}{x^2 + x}$،
المجال:
$\{x \mid x \neq 0, x \neq -1, x \in \mathbf{R}\}$



التحقق: استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. أدخل الدالة $f1(x) = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. فيظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانيّة بالضغط على مفتاح menu، ثم على 5: تتبع المسار، واختر منها 1: تتبع مسار التمثيل؛ لمساعدتك على تحديد مجال $f \circ g$ والذي يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞.

تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \sqrt{x + 1}\,, g(x) = x^2 - 1$ **3B)** $f(x) = \frac{5}{x}\,, g(x) = x^2 + x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك تجد دالتين (f, g مثلًا) بحيث يكون تركيبهما هو h.

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

لاحظ أن h هو الجذر التربيعي للدالة $x^3 - 4$؛ لذا فإننا نختار $f(x) = \sqrt{x}\,, g(x) = x^3 - 4$. أي أنه يمكننا كتابة h كتركيب للدالتين $f(x) = \sqrt{x}\,, g(x) = x^3 - 4$، وعندئذ:

$$h(x) = \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x + 5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2\,, g(x) = x + 5$، وعندئذ:

$$h(x) = 2(x + 5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

تحقق من فهمك

4A) $h(x) = x^2 - 2x + 1$ $f(x) = x^2\,, g(x) = x - 1$

4B) $h(x) = \frac{1}{x + 7}$ $f(x) = \frac{1}{x}\,, g(x) = x + 7$

يمكنك استعمال تركيب دالتين لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$. أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L\,(L + 40) = L^2 + 40L$، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	عوّض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بسّط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

الربط مع الحياة

مؤثرات حركية

يعمل المصممون في العديد من الأعمال لتصميم مؤثرات حركية تستعمل في التلفاز وألعاب الفيديو؛ لذا يجب أن يكون مصممو الألعاب فنانين، ويتلقى أغلبهم تدريبًا في كليات متخصصة.

مثالان إضافيان

4 أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$.

a) $h(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

إجابة ممكنة: $g(x) = x + 2$، $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $h(x) = 3x^2 - 12x + 12$

إجابة ممكنة: $g(x) = x - 2$، $f(x) = 3x^2$

5 **رسوم متحركة:** صمم رسّام صورةً على شكل دائرة طول نصف قطرها 25 بكسل. ثم بدأ بزيادة طول نصف القطر بمقدار 10 بكسل في الثانية.

a) اكتب دوالَّ توضح عمل المصمّم.

$R(t) = 25 + 10t$; $A(R) = \pi R^2$

b) أوجد $A \circ R$. وماذا تمثل هذه الدالة؟ $A \circ R = 100\pi t^2 + 500\pi t + 625\pi$ الدالة تمثل مساحة الدائرة كدالة في الزمن.

c) ما الوقت اللازم لتصبح مساحة الدائرة أربعة أضعاف مساحتها الأصلية؟ 2.5 ثانية

إجابات (تحقق من فهمك):

5A) $c(x) = x - 100$، $d(x) = 0.85x$

5B) $[c \circ d](x) = 0.85x - 100$, $[d \circ c](x) = 0.85x - 85$

$[c \circ d](x)$ تمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من الخصم أولًا ثم القسيمة، $[d \circ c](x)$ تمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من القسيمة أولًا ثم الخصم.

5C) إجابة ممكنة: الاستفادة من الخصم أولًا ثم القسيمة أو $[c \circ d](x)$ يجعل السعر أقل. فمثلًا إذا أراد طالب شراء حاسوب سعره 1000 ريال، فإنه يدفع 750 ريالًا إذا استفاد من الخصم أولًا ثم القسيمة، ويدفع 765 ريالًا إذا استفاد من القسيمة أولًا ثم الخصم.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون الحركيون: قسّم الطلاب إلى مجموعات عدد عناصرها من 2 إلى 4. واكتب الأعداد الصحيحة من -10 إلى 10 على بطاقات رقمية منفصلة. واطلب إلى أحدهم القيام بدور استقبال للدالة الأولى في الدالة المركبة، ويقوم باقي الطلاب بتمرير البطاقات الرقمية إلى موظف الاستقبال الذي يقوم بدوره برفض البطاقة أو قبولها اعتمادًا على ما إذا كان رقم البطاقة عنصرًا من مجال الدالة الأولى أم لا. وبعد المراجعة يقوم طالب آخر بدور موظف استقبال للدالة الثانية. يمكن للطلاب تطبيق هذه الطريقة لتحديد مجال الدالة المركبة.

الدرس 1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين 61

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب. انظر الهامش.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d.

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

1-3) انظر الهامش.

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1) **4-10) انظر ملحق الإجابات.**

1) $f(x) = x^2 + 4$، $g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$، $g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$، $g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$، $g(x) = 9x$

5) $f(x) = x - 7$، $g(x) = x + 7$

6) $f(x) = \frac{6}{x}$، $g(x) = x^3 + x$

7) $f(x) = \frac{x}{4}$، $g(x) = \frac{3}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$، $g(x) = 4\sqrt{x}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$، $g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

10) $f(x) = \sqrt{x+6}$، $g(x) = \sqrt{x-4}$

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية. (مثال 2) **11-14) انظر ملحق الإجابات.**

11) $f(x) = 2x - 3$، $g(x) = 4x - 8$

12) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$، $g(x) = -5x + 6$

13) $f(x) = x^2 - 16$، $g(x) = x^2 + 7x + 11$

14) $f(x) = 2 + x^4$، $g(x) = -x^2$

15-20) انظر ملحق الإجابات.

حدِّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$، $g(x) = x^2 - 4$

16) $f(x) = \frac{2}{x-3}$، $g(x) = x^2 + 6$

17) $f(x) = \sqrt{x+4}$، $g(x) = x^2 - 4$

18) $f(x) = \frac{5}{x}$، $g(x) = \sqrt{6-x}$

19) $f(x) = -\frac{4}{x}$، $g(x) = \sqrt{x+8}$

20) $f(x) = \sqrt{x+5}$، $g(x) = x^2 + 4x - 1$

21) **النظرية النسبية:** في النظرية النسبية، $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية، و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية، وكتلته الأصلية 100 kg. (مثال 4) **21a-d) انظر ملحق الإجابات.**

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد $m(10), m(10000), m(1000000)$.

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تقترب v من c من اليسار.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 31–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: في الأسئلة 20–11 إذا وجد الطلاب الدالة المركبة بشكل خاطئ بسبب التعويض غير الصحيح، فأكد لهم أن الدالة الثانية تعوض في الدالة الأولى.

خطأ شائع: في الأسئلة 29–22، ذكّر الطلاب بأنه يوجد عدة حلول للمسألة الواحدة؛ لمساعدتهم على التحقق من صحة حلولهم؛ لذا اطلب إليهم إيجاد الدالة المركبة وطريقة إيجادها.

إجابات:

1) $(f+g)(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4;$
المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$(f-g)(x) = x^2 - \sqrt{x} + 4$
المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$(f \cdot g)(x) = x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}$
المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x^{\frac{3}{2}} + 4x^{-\frac{1}{2}}$
المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

2) $(f+g)(x) = -x^3 + x + 5$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x) = -x^3 - x + 11$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f \cdot g)(x) = -x^4 + 3x^3 + 8x - 24$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{8 - x^3}{x - 3}$
المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

3) $(f+g)(x) = x^2 + 6x + 8$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x) = x^2 + 4x + 4$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f \cdot g)(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 3$
المجال: $\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	74–82 ،73 ،65 –68 ،1–31
ضمن المتوسط	1–57 (فردي)، 58، 64، 65–68، 73، 74–82
فوق المتوسط	32–82

31a) $h[f(x)]$؛ تحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

أوجد دالتين f, g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4) **22-29) انظر ملحق الإجابات.**

22) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

23) $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

24) $h(x) = |4x+8| - 9$

25) $h(x) = [-3(x-9)]$

26) $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

27) $h(x) = (\sqrt{x} + 4)^3$

28) $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

29) $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

30) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$. **30b, d) انظر ملحق الإجابات.**

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته. $f(v) = \frac{h}{25v}$

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h. $\lambda = \frac{h}{200}$

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

31) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افترض أن $f(x) = x - 300000$، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5) **31a) انظر الهامش.**

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة. **6000 ريال**

أوجد دالتين f, g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$. **32-34) انظر الهامش.**

32) $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

33) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

34) $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

أوجد $f(x+1)$, $f(-6)$, $f(0.5)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك: **35-37) انظر الهامش.**

35) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

36) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

37) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ في كل مما يأتي: **38, 39) انظر الهامش.**

38) $f(x) = x + 8$
$g(x) = x^2 - 6$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

39) $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 - 3$
$h(x) = \frac{1}{x}$

40) إذا كانت $f(x) = x + 2$، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$ **$g(x) = x^2 + 4$**

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$ **$g(x) = 4x + 8$**

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$ **$g(x) = 9x^2$**

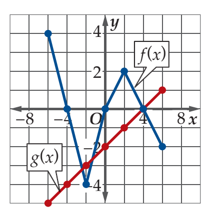
b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$ **$g(x) = 50x^2 + 25$**

42) إذا كان $f(x) = 4x^2$، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$ **$g(x) = \frac{1}{4x}$**

b) $[f \cdot g](x) = 4x$ **$g(x) = \frac{1}{x}$**

باستعمال منحنيي الدالتين $f(x)$, $g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



43) $(f+g)(2)$ **1**

44) $(f-g)(-6)$ **9**

45) $(f \cdot g)(4)$ **0**

46) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ **$\frac{4}{3}$**

47) $(f \circ g)(-4)$ **0**

48) $(g \circ f)(6)$ **−3**

إجابات:

32–37) إجابات ممكنة للمسائل.

32)
$f(x) = x - \frac{4}{x^2+1}; g(x) = \sqrt{x-1}$

33) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7}; g(x) = -7x$

34) $f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}};$
$g(x) = x + 4$

35) $f(0.5) = -0.75, f(-6) = 22,$
$f(x+1) = x^2 + 4x + 1$

36) $f(0.5) = 8.7, f(-6) = 11.6,$
$f(x+1) = \frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$

37) $f(0.5) = 2.4, f(-6) = 650.9,$
$f(x+1) = \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 18 - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

38) $[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$

39) $[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$

49a) $\{m | m > 0, m \in R\}$؛ لا يمكن أن تكون كتلة جسم ما سالبة أو صفرًا.

49b) $7.22\ m/s$ تقريبًا

49c) تتناقص سرعتها.

49d) إجابة ممكنة:
$v(m) = f\left(g(x)\right); f(m) = \sqrt{m}$
$g(m) = \frac{(24.9435)(303)}{m}$

50) $f(x) = x^2; g(x) = \sqrt{x} + 4;$
$h(x) = x - 7$

51) $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2 + 8;$
$h(x) = x - 5$

52) $f(x) = \frac{3}{x}; g(x) = x^2 + 4;$
$h(x) = x - 3$

53) $f(x) = \frac{4}{x+1}; g(x) = x^2;$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: اطلب إلى الطلاب استعمال المكتبة أو الإنترنت لإيجاد أمثلة تطبيقية على استعمال العمليات على الدوال وتركيبها. بعد تحديد الأمثلة، عليهم تطوير أمثلة من واقع الحياة خاصة بهم على أن يقوم كل طالب بتكوين مثال باستعمال إحدى العمليات، ومثال آخر باستعمال تركيب الدوال.

49) كيمياء: إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة 30°C بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$ ، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول. **(49a-d) انظر الهامش.**

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟فسّر معناها.

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة 30°C .

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد ثلاث دوال f, g, h، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي: **(50-53) انظر الهامش.**

50) $a(x) = (\sqrt{x-7}+4)^2$ 51) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2+8}$

52) $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2+4}$ 53) $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x}+3)^2+1}$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة: **(54-57) انظر ملحق الإجابات.**

54) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}+3$

55) $f(x) = \sqrt{x+6}$ ، $g(x) = \sqrt{16+x^2}$

56) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \sqrt{9-x^2}$

57) $f(x) = \frac{6}{2x+1}$ ، $g(x) = \frac{4}{4-x}$

58) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية. **انظر ملحق الإجابات.**

a) **جبريًا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c) **بيانيًا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d) **لفظيًا:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

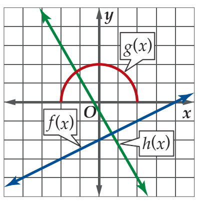
e) **تحليليًا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟

f) **تحليليًا:** أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

a) $f(x) = x - 6$ c) $f(x) = x^5$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$ d) $f(x) = 2x - 3$

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 60 مثّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 61-63:



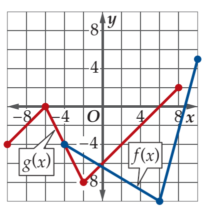
59) $(f+h)(x)$ **انظر ملحق الإجابات.**

60) $(h-f)(x)$

61) $(f+g)(x)$

62) $(h+g)(x)$

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



63) $(f \circ g)(x)$ 64) $(g \circ f)(x)$ **(63, 64) انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

65) الدالتان f, g فرديتان. **فردية** 66) الدالتان f, g زوجيتان. **زوجية**

67) f زوجية، g فردية. **زوجية** 68) f فردية، g زوجية. **زوجية**

تمثيلات متعددة

السؤال 58 يستعمل الطلاب التحليل الجبري والتعبير اللفظي والتمثيل البياني لاستقصاء الدالة العكسية.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب الكتابة حول ما تعلموه في الدرس 5 – 1 عن الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية عليها، وكيف ساعدتهم هذه المعلومات في تعلم العمليات على الدوال.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 6—1 ,5—1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

63) $f(x)$ معرّفة على $[-10, 8]$ و $g(x)$ غير معرفة عند قيم $g(x)$ حيث $x \in (-4, 2)$، لذا فإن مجال الدالة هو: $\{x \mid -10 \le x \le -4$ أو $2 \le x \le 8, x \in R\}$

64) $f(x)$ معرّفة على $[-4, 10]$ و $g(x)$ معرفة عند جميع قيم $f(x)$، لذا فإن مجال الدالة $(g \circ f)(x)$ هو: $\{x \mid -4 \le x \le 10, x \in R\}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع اطلب إلى الطلاب استعمال دالة واحدة لإيجاد تركيب الدالة مع نفسها حيث تُسمى هذه العملية التكرار. وإذا كانت $f(x)$ دالة، و x_0 قيمة ابتدائية، فعندئذٍ تُسمَّى $f(x_0) = x_1$ التكرار الأول، وتُسمى $f(f(x_0)) = f(x_1) = x_2$ التكرار الثاني وهكذا، اطلب إلى كل طالب إيجاد التكرار الثالث لدالته.

تحدَّ: في كل مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x) = x$ بحيث تحقق الشرط المعطى. **69-72) انظر الهامش.**

69) $(f \cdot f)(x) = x$

70) $(f + f)(x) = x$

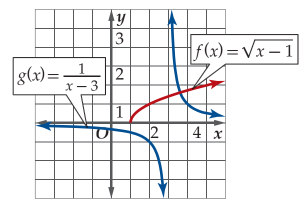
71) $[f \circ f](x) = x$

72) $[f \circ f \circ f](x) = x$

73) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا، أم ليست صحيحة أبدًا. وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية، فإن $f \circ g$ دالة خطية". **انظر ملحق الإجابات.**

74) **اكتب:** كيف تحدد مجال الدالة $[f \circ g](x)$ باستعمال الشكل الآتي: **انظر ملحق الإجابات.**



مراجعة تراكمية

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية مقرّبة إلى أقرب جزء من مئة، ثم حدّد قيم x التي تقع عندها هذه القيم: (الدرس 1-4)

75) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ **75-77) انظر الهامش.**

76) $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

77) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-3)

78) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 4}$, $[-3, 3]$ **بين -2 وَ -1 ، وبين 1 وَ 2**

79) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x}$, $[1, 5]$ **بين 2 وَ 3**

80) **علاقة:** في إحصائية أجريت لعدد الموظفين من الجنسين في أحد المستشفيات لعدة سنوات متتالية، كانت نتائجها كما في الجدول الآتي: (الدرس 1-1)

السنة	1427	1428	1429	1430	1431
عدد الإناث (x)	43	48	54	54	48
عدد الذكور (y)	150	148	137	156	146

a) مثّل البيانات التي تربط عدد الإناث بعدد الذكور والموجودة في الجدول بيانيًّا.

80a-c) انظر الهامش

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

81) إذا كانت $g(x) = x^2 + 9x + 21$ ، $h(x) = 2(x-5)^2$، فإن $h[g(x)]$ تساوي: **B**

A $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

B $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

C $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

D $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

82) إذا كان $g(2)=5$, $f(3)=4$, $g(3)=2$, $f(2)=3$، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟ **B**

A 2

B 3

C 4

D 5

إجابات:

69) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x}$.

70) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{x}{2}$

71) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{1}{x}$

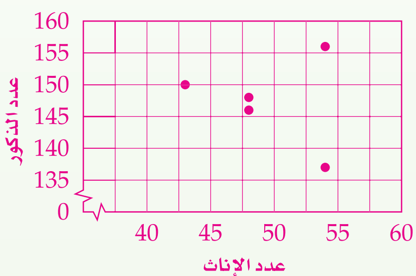
72) إجابة ممكنة: $f(x) = |x|$

75) $(0, 4)$ عظمى محلية، $(1, 3)$ صغرى محلية.

76) $(1.29, 1.3)$ عظمى محلية، $(-1.29, -7.3)$ صغرى محلية.

77) $(-0.75, -2.11)$ عظمى مطلقة.

80a)



80b) المجال: $\{43, 48, 54\}$

المدى: $\{137, 146, 148, 150, 156\}$

80c) لا، ترتبط القيمتان 48 وَ 54 من المجال بقيمتين من المدى.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات إعادة التعليم

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

العمليات على الدوال يمكن إجراء عمليات الجمع، الطرح، الضرب، والقسمة على دالتين لتكوين دالة جديدة. ويكون مجال الدالة الجديدة هو تقاطع مجالي الدالتين عدا القيم التي تجعل المقام صفرًا.

مثال 1 إذا كانت $f(x)=x^2-x-6$ و $g(x)=x+2$، فأوجد كلًّا من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجال كل منهما:

a) $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=x^2-x-6+x+2$$
$$=x^2-4$$

مجال كل من g ، f هو $(-\infty,\infty)$، لذا فإن مجال $(f+g)$ هو $(-\infty,\infty)$.

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$
$$=\frac{x^2-x-6}{x+2}$$
$$=\frac{(x-3)(x+2)}{x+2}=x-3$$

مجال كل من f و g هو $(-\infty,\infty)$، لكن $x=-2$ تجعل مقام الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ صفرًا، لذا فإن مجالها هو $\{x \mid x\neq -2, x\in \mathbf{R}\}$.

مثال 2 إذا كانت $f(x)=x^2-3$, $g(x)=\frac{1}{x}$، فأوجد كلًّا من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجال كل منهما:

a) $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=x^2-3-\frac{1}{x}$$

مجال f هو $(-\infty,\infty)$، ومجال g هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ ؛ لذا فإن مجال $(f-g)$ هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

b) $(f\cdot g)(x)$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$
$$=(x^2-3)\frac{1}{x}$$
$$=x-\frac{3}{x}$$

مجال f هو $(-\infty,\infty)$، ومجال g هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ ؛ لذا فإن مجال $(f.g)$ هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

تمارين

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$، حيث $f(x)$ و $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين، وحدِّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x)=x^2-1, g(x)=\frac{2}{x}$

$\frac{x^3-x+2}{x}$ ؛ المجال هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
$\frac{x^3-x-2}{x}$ ؛ المجال هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
$\frac{2x^2-2}{x}$ ؛ المجال هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.
$\frac{x^3-x}{2}$ ؛ المجال هو $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

2) $f(x)=x^2+4x-7, g(x)=\sqrt{x}$

$x^2+4x-7+\sqrt{x}$ ؛ المجال هو $[0,\infty)$.
$x^2+4x-7-\sqrt{x}$ ؛ المجال هو $[0,\infty)$.
$x^2\sqrt{x}+4x\sqrt{x}-7\sqrt{x}$ ؛ المجال هو $[0,\infty)$.
$\frac{x^2+4x-7}{\sqrt{x}}$ ؛ المجال هو $(0,\infty)$.

الصف: الثالث الثانوي 26 الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات إعادة التعليم (27) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

تركيب الدوال نستعمل قيمة إحدى الدالتين في **تركيب الدوال** لإيجاد قيمة الدالة الثانية عند تلك القيمة. إذا أُعطيت الدالتان f و g، فإنه يمكن تعريف تركيب الدالتين $f\circ g$ على الصورة $[f\circ g](x)=f[g(x)]$. ويتضمن مجال $f\circ g$ كل قيم x من مجال الدالة g التي تكون عندها قيم $g(x)$ في مجال f.

مثال إذا كانت $f(x)=3x^2+2x-1$ و $g(x)=4x+2$، فأوجد $[f\circ g](x)$ و $[g\circ f](x)$.

$[f\circ g](x)=f[g(x)]$	تعريف تركيب دالتين
$=f(4x+2)$	ضع $4x+2$ مكان $g(x)$
$=3(4x+2)^2+2(4x+2)-1$	ضع $4x+2$ مكان x في $f(x)$
$=3(16x^2+16x+4)+8x+4-1$	بسِّط
$=48x^2+56x+15$	
$[g\circ f](x)=g[f(x)]$	تعريف تركيب دالتين
$=g(3x^2+2x-1)$	ضع $3x^2+2x-1$ مكان $f(x)$
$=4(3x^2+2x-1)+2$	ضع $3x^2+2x-1$ مكان x في $g(x)$
$=12x^2+8x-2$	بسِّط

تمارين

أوجد قيمة: $[f\circ g]$ (4) , $[g\circ f]$ (x) , $[f\circ g]$ (x) لكل زوج من الدوال الآتية:

1) $f(x)=2x+1, g(x)=x^2-2x-4$
$2x^2-4x-7; 4x^2-5; 9$

2) $f(x)=3x^2-4, g(x)=\frac{1}{x}$
$\frac{3-4x^2}{x^2}; \frac{1}{3x^2-4}; -\frac{61}{16}$

3) $f(x)=x^3, g(x)=5x$
$125x^3; 5x^3; 8000$

4) $f(x)=4x-2, g(x)=\sqrt{x+3}$
$4\sqrt{x+3}-2; \sqrt{4x+1}; 4\sqrt{7}-2$

5) $f(x)=3x-5, g(x)=x^2+1$
$3x^2-2; 9x^2-30x+26; 46$

6) $f(x)=\frac{1}{x-1}, g(x)=x^2-1$
$\frac{1}{x^2-2}; \frac{2x-x^2}{x^2-2x+1}; \frac{1}{14}$

7) $f(x)=2x-3, g(x)=\frac{1}{x-2}$
$\frac{8-3x}{x-2}; \frac{1}{2x-5}; -2$

8) $f(x)=x-8, g(x)=x+4$
$x-4; x-4; 0$

الصف: الثالث الثانوي 27 الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات حل المسألة (28) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 تدريبات حل المسألة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين

1) **عرض رياضي:** تشكل مجموعة من الطلاب دائرة طول نصف قطرها r. عند سماع إشارة البدء، يبدأ الطلاب بالرجوع إلى الخلف، ويُعبَّر عن طول نصف قطر الدائرة بالأقدام بالمعادلة $f(t)=2.5t$، حيث t الزمن بالثواني من إشارة البدء. أوجد دالة التركيب التي تُعبِّر عن مساحة الدائرة بعد t ثانية مستعملًا صيغة مساحة الدائرة $g(r)=\pi r^2$ ، ثم أوجد المساحة إلى أقرب جزء من مئة بعد 4 ثوانٍ.

$g[f(t)]=6.25\pi t^2; 314.2\ \text{ft}^2$

2) **شموع:** يقوم شخص بصناعة شموع وبيعها في السوق المحلي. فإذا كانت الدالة $c(h)=4h$ تُعبِّر عن عدد الشموع التي يصنعها بعد h من الساعات، وتُعبِّر الدالة $f(c)=12+0.25c$ عن تكاليف صنع c شمعة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة التركيب التي تعبِّر عن تكاليف صناعة الشمع بعد h ساعة.

$f[c(h)]=12+h$

b) إذا انخفضت تكاليف إنتاج c من الشموع بمقدار 10%، فاكتب دالة التخفيض بعد التكاليف $s(x)$، ثم اكتب دالة تركيب تعبِّر عن تكاليف الإنتاج بعد h ساعة خلال فترة تخفيض تكاليف الإنتاج.

$s(x)=0.9x;$
$s\{f[c(h)]\}=10.8+0.9h$

3) **علوم:** إذا كانت الدالة $t(x)=\frac{\sqrt{2x}}{28}+6.25$ تعبِّر عن درجة الحرارة السيليزية لسائل في كأس كبيرة بعد x من الثواني، فأوجد دالتين s, r بحيث يكون $t(x)=[S\circ r]$، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x)=x$

إجابة ممكنة: $s(x)=\frac{x}{28}+6.25$؛
$r(x)=\sqrt{2x}$

4) **رحلة:** يضع شخصان ميزانية لرحلة مشتركة يرغبان في القيام بها، تكلفة الرحلة بالريالات للشخص الأول يُعبَّر عنها بالدالة $f(x)=45x+350$. وللشخص الثاني بالدالة $g(x)=60x+475$، حيث x عدد أيام الرحلة.

a) أوجد الدالة $(f+g)(x)$، وحدِّد مجالها.

$(f+g)(x)=105x+825;$
المجال هو $\{x \mid x\geq 0, x\in Z\}$.

b) ماذا يعني جمع الدالتين في a ؟

المبلغ الذي سيصرفه الشخصان معًا في الرحلة.

c) أوجد $(f+g)(7)$ ، وبيِّن معنى الإجابة.

1560 ريالًا، المبلغ الذي سيصرفه الاثنان معًا في رحلة مدتها 7 أيام.

d) أعد الخطوات a–c للدالة $(g-f)(x)$.

a) $(g-f)(x)=15x+125$
المجال هو $\{x \mid x\geq 0, x\in Z\}$.
b) المبلغ الذي سيصرفه الثاني زيادة على الأول.
c) 230 ريالًا مقدار ما يصرفه الثاني زيادة على الأول في سبعة أيام.

الصف: الثالث الثانوي 28 الفصل 1: تحليل الدوال

التدريبات الإثرائية (29) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

1-6 التدريبات الإثرائية

تطبيقات على تركيب الدوال

تطبيقات على تركيب الدوال: يمكن إيجاد دالة بمتغير واحد تمثِّل مساحة المربع، إذ يُعبر عن مساحة المربع A بعلاقة صريحة مع طول ضلعه s على الصورة : $A=f(s)=s^2$. وعادة ما تمثل الكميات الفيزيائية بدوال بعدة متغيرات، وقد يكون كل منها دالة بعدة متغيرات أخرى إضافية. فمثلًا المسافة التي تقطعها سيارة بكمية محددة من الوقود تعتمد على كتلتها، ونوع الوقود المستعمَل، ونظافة المحرك وعوامل أخرى، وكل منها يعتمد عل متغيرات أخرى إضافية. إن إيجاد قيمة كمية معينة عند قيم محددة للمتغيرات يكون أسهل بإيجاد دالة واحدة تتكون من تركيب هذه الدوال جميعها، ثم التعويض بدلًا من المتغيرات.

إن التردد f لبندول الساعة هو عدد الاهتزازات (الأرجحات) الكاملة (p) التي يتحركها البندول في 60 ثانية.
ويكون الزمن اللازم لإتمام دورة واحدة: $f(p)=\frac{60}{p}$، وعندها تكون f دالة اهتزازة البندول بدلالة p، ومن ناحية أخرى، فإن اهتزازة البندول دالة مع طوله L بالسنتمترات: $p(L)=0.2\sqrt{L}$.
وأخيرًا طول البندول L دالة بدلالة طوله ℓ عند درجة حرارة $0°$ سيليزية. إن العلاقة بين طول البندول L ومعامل التمدد للمادة e ودرجة الحرارة C وطوله في $0°$ سيليزية يُعبِّر عنه بالقاعدة: $L(\ell, C, e)=\ell(1+eC)$.

1) a) عبِّر عن دالة تردد البندول $f(p(L(\ell, C, e)))$ جبريًّا بدلالة طوله بالسنتمترات عند درجة $0°$ سيليزية، حيث $e=0.00002$.

$$f(p(L(\ell, C, e)))=\frac{300\sqrt{\ell(1+0.00002C)}}{\ell(1+0.00002C)}$$

b) أوجد التردد إلى أقرب جزء من عشرة لبندول من النحاس عند درجة حرارة $300°$ سيلزية إذا كان طول البندول 15 سم عند درجة $0°$ سيليزية .

77.2 اهتزازة في الدقيقة

2) يُعبر عن الحجم V لبالون أرصاد كروي طول نصف قطره r بالقاعدة $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$. إذا مُلئ البالون بالهواء على أن يزداد طول نصف قطره بمعدل ثابت $r(t)=\frac{1}{2}t+2$، حيث r بالأمتار، t عدد الثواني من بدء ملئه بالهواء، فأجب عما يأتي:

a) أوجد $V(r(t))$.

$$V(r(t))=\frac{\pi t^3}{6}+2\pi t^2+8\pi t+\frac{32}{3}\pi$$

b) أوجد الحجم بعد 10 ثوانٍ من بدء ملئه بالهواء، معتبرًا $\pi=3.14$.

$1436.03\ \text{m}^3$

الصف: الثالث الثانوي 29 الفصل 1: تحليل الدوال

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (9) دون ضمن فوق

6-1 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f\cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، وحدّد مجال كلٍّ من الدوال الناتجة:

1) $f(x) = 2x^2 + 8, g(x) = 5x - 6$

$2x^2 + 5x + 2, (-\infty, \infty) =$ المجال

$2x^2 - 5x + 14, (-\infty, \infty) =$ المجال

$10x^3 - 12x^2 + 40x - 48,$

$(-\infty, \infty) =$ المجال

$\frac{2x^2+8}{5x-6}, \left\{x \mid x \neq \frac{6}{5}, x \in \mathbf{R}\right\} =$ المجال

2) $f(x) = x^3, g(x) = \sqrt{x+1}$

$x^3 + \sqrt{x+1}, [-1, \infty) =$ المجال

$x^3 - \sqrt{x+1}, [-1, \infty) =$ المجال

$x^3\sqrt{x+1}, [-1, \infty) =$ المجال

$\frac{x^3}{\sqrt{x+1}}, (-1, \infty) =$ المجال

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](3)$ لكل زوج من الدوال الآتية:

3) $f(x) = x + 5, g(x) = x - 3$

$x + 2; x + 2; 5$

4) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, g(x) = 3x$

$54x^3 - 27x^2 + 1; 6x^3 - 9x^2 + 3; 1216$

5) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, g(x) = 2x - 3$

$8x^2 - 34x + 34; 4x^2 - 10x - 1; 4$

6) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5, g(x) = 2x - 1$

$12x^2 - 16x + 10; 6x^2 - 4x + 9; 70$

حدّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في السؤالين الآتيين:

7) $f(x) = \sqrt{x-2}$

$g(x) = 3x$

$\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}, x \in \mathbf{R}\right\}; f \circ g = \sqrt{3x-2}$

8) $f(x) = \frac{1}{x-8}$

$g(x) = x^2 + 5$

$\left\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in \mathbf{R}\right\}; f \circ g = \frac{1}{x^2-3}$

أوجد دالتين f و g في كلٍّ من السؤالين 9, 10 ، بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. على ألا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$

9) $h(x) = \sqrt{2x-6} - 1$

إجابة ممكنة:

$f(x) = \sqrt{x} - 1, g(x) = 2x - 6$

10) $h(x) = \frac{1}{3x+3}$

إجابة ممكنة:

$f(x) = \frac{1}{3x}, g(x) = x + 1$

11) **مطعم:** دخل ثلاثة أشخاص مطعمًا، وطلب كلٌّ منهم الوجبة نفسها. إذا تقاضى صاحب المطعم 18% من تكلفة الوجبة بدل خدمة، فاكتب الدوال الثلاث على النحو الآتي: الأولى تمثّل تكلفة الوجبات الثلاث قبل استيفاء بدل الخدمة، والثانية تكلفة الوجبة بعد استيفاء الخدمة، وأما الثالثة فتمثّل تركيب الدالتين الذي يعطي تكلفة الوجبات الثلاث متضمنة بدل الخدمة.

$f(x) = 3x$ ، حيث x تكلفة الوجبة الواحدة، $g(x) = 1.18x$ ، $g(f(x)) = 3.54x$

الفصل الأول تحليل الدوال

9

ملحوظات المعلم

1-7 العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

فيما سبق:
درستُ إيجاد تركيب دالتين. (الدرس 6–1)

والآن:
- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثل دالة أم لا.
- أجدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

المفردات:
العلاقة العكسية
inverse relation
الدالة العكسية
inverse function
الدالة المتباينة
one-to-one function
www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

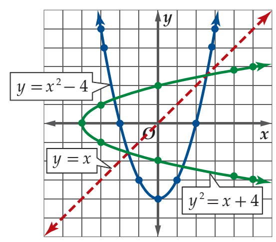
الجدول B

السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية: العلاقات في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن العلاقة A **علاقة عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجودًا في إحدى العلاقتين، فإن (a, b) يكون موجودًا في الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة
$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية
$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالًّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لـ f، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.
لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

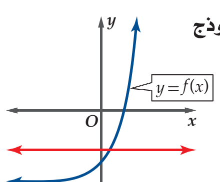
قراءة الرياضيات
رمز الدالة العكسية:
يجب ألا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



1 التركيز

الترابط الرأسي
ما قبل الدرس 1-7
إيجاد تركيب دالتين.
الدرس 1-7
استعمال الخط الأفقي على منحنى الدالة؛ لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثل دالة أم لا.
إيجاد الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.
ما بعد الدرس 1-7
تحليل التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود. والدوال النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".
واسأل:
- ما الدالة التي تعطي مساحة المربع؟ $A(s) = s^2$
- إذا كان طول ضلع مربع 5 وحدات، فأوجد مساحته. 25 وحدة مربعة
- اكتب دالة لحساب طول ضلع المربع إذا عُلمت مساحته. ثم أوجد طول ضلع مربع مساحته 100. $S = \sqrt{A}$; 10
- اكتب دالة لحساب المسافة إذا كانت السرعة ثابتة، والزمن متغيرًا، ثم اكتب دالة لإيجاد الزمن إذا كانت المسافة متغيرة، والسرعة ثابتة. المسافة: $d = f(t) = rt$، الزمن: $t = f(d) = \frac{d}{r}$

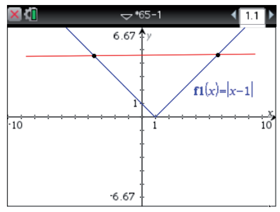
مصادر الدرس 1-7

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (70)	• تنويع التعليم ص (70)	• تنويع التعليم ص (73)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (30) • تدريبات حل المسألة، ص (32)	• تدريبات حل المسألة، ص (32) • التدريبات الإثرائية، ص (33)	• تدريبات حل المسألة، ص (32) • التدريبات الإثرائية، ص (33)

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

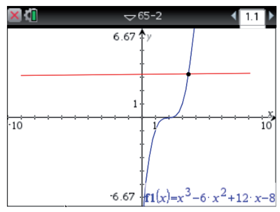
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x - 1|$



يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.

تحقق من فهمك

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$ نعم

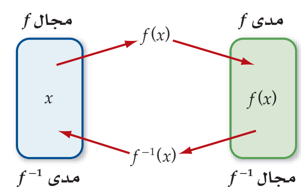
1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$ لا

تنبيه!

اختبار الخط الأفقي
عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 3: تكبير أو 4: تصغير أو اضبط الشاشة للتأكد.

إيجاد الدالة العكسية: إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لـِ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـِ y، ولا توجد قيمة لـِ y ترتبط بأكثر من قيمة لـِ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

الدوال العكسية

مثال 1 يبيِّن كيفية اختبار لتحديد وجود دالة عكسيَّة بيانيًّا.

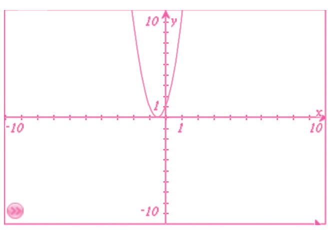
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

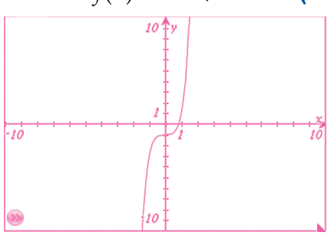
1 مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا؟

a) $y = 4x^2 + 4x + 1$



لا

b) $f(x) = x^5 + x^3 - 1$

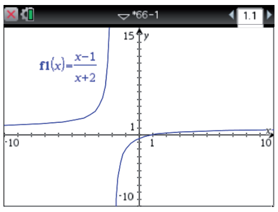


نعم

مثـال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًا

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

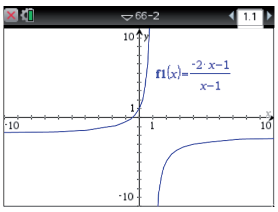
a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$



يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

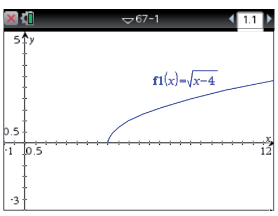
والآن أوجد f^{-1}.

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$	الدالة الأصلية
$y = \dfrac{x-1}{x+2}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \dfrac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x, y
$xy + 2x = y - 1$	اضرب الطرفين في $(y+2)$، ثم طبق خاصية التوزيع
$xy - y = -2x - 1$	ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	حل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x) = \dfrac{-2x-1}{x-1}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y، لاحظ أن $x \neq 1$



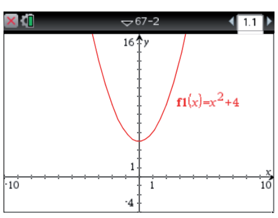
يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1}.

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$



يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1}.

$f(x) = \sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y = \sqrt{x-4}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x و y
$x^2 = y - 4$	ربّع الطرفين
$y = x^2 + 4$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$، ومداها $[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

✓ تحقق من فهمك

2A) $f(x) = -16 + x^3$
2B) $f(x) = \dfrac{x+7}{x}$
2C) $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$

2A) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$
2B) $f^{-1}(x) = \dfrac{7}{x-1}; x \neq 1$
2C) غير موجودة

قراءة الرياضيات

الدوال القابلة للعكس: يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

إيجاد الدوال العكسية

مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد الدالة العكسية جبريًّا.
مثال 3 يبيِّن كيفية التحقق من أن دالتين متعاكستان.
مثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد معكوس دالة هندسيًّا.
مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال الدوال العكسية.

مثال إضافي

2 في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

a) $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$، f^{-1} موجودة،
$f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2x-1}$

b) $f(x) = 2\sqrt{x-1}$، f^{-1} موجودة ومجالها $[0, \infty)$
$f^{-1}(x) = \dfrac{x^2}{4} + 1$

التعليم باستعمال التقنيات

الحاسبة البيانية: قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية بحيث تستعمل كل مجموعة حاسبة بيانية واحدة، على أن يقوم أحدهما باختيار دالة لها معكوس، ويقوم الثاني بتمثيلها، فإذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي. يقوم الطالب الأول بإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، ويقوم الثاني بتمثيلها؛ للتحقق من أنها هي ومعكوسها متماثلان حول المستقيم $y = x$. اطلب إلى المجموعات أن تتبادل الأدوار فيما بينها، ويتعين على كل منها أن تجد أربع دوال لكلٍّ منها معكوس.

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًّا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

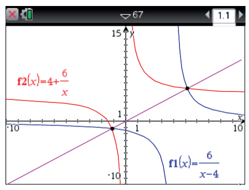
مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x} + 4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$



بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

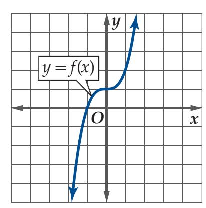
3B) $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0,\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

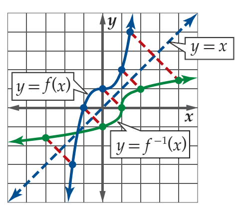
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

إرشادات للدراسة

الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

3A) $f(g(x)) = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right)$
$= 18 - 18 + x$
$= x;$
$g(f(x)) = 6 - \frac{18 - 3x}{3}$
$= 6 - 6 + x$
$= x$

3B) $f(g(x)) = \left(\sqrt{x - 10}\right)^2 + 10$
$= x - 10 + 10$
$= x;$
$g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 10 - 10}$
$= x$

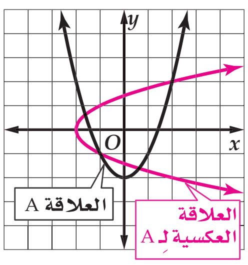
مثالان إضافيان

3 أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$، $g(x) = \frac{3}{2}(x - 2)$ دالة عكسية للأخرى.

$$f(g(x)) = f\left(\frac{3}{2}(x-2)\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(x-2)\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2}{3}x + 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2 - 2\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right) = x$$

4 استعمل التمثيل البياني للعلاقة A لتمثيل معكوسها.



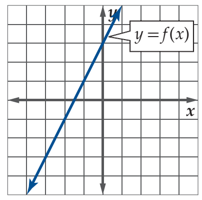
المحتوى الرياضي

اختبار الخط الأفقي التمثيل البياني للدالة العكسية هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأصلية في المستقيم $y = x$. وبما أن اختبار الخط الرأسي يختبر إن كانت العلاقة دالة أم لا، فيمكن إيجاد صورة الخط الرأسي بالانعكاس في المستقيم $y = x$. وصورة ناتج هذا الانعكاس هو خط أفقي يمكن استعماله في اختبار إن كان للدالة معكوس.

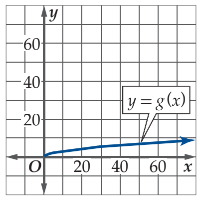
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا: (4A-B) انظر الهامش.

(4A



(4B



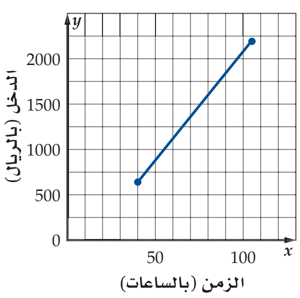
مثال 5 من واقع الحياة — استعمال الدالة العكسية

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

الربط مع الحياة

ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلًا فعليًا أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".

الدخل الأسبوعي لعامل



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$ أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة $f(x)$ متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \frac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى هو 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. و بما أن $f(40) = 640$ ، $f(105) = 2200$، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

$f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

تحقق من فهمك

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من x ، $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريالًا في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

5A) يحقق منحنى الدالة اختبار الخط الأفقي، لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وبذلك تكون دالتها العكسية موجودة، $f^{-1}(x) = \frac{x + 360}{0.13}$.

5B) في الدالة العكسية تمثل x مقدار التوفير الشهري، $f^{-1}(x)$ الراتب الشهري.

5C) $x \geq 2769.23$

5D) 6615.38 ريالًا تقريبًا

مثال إضافي

5 **صناعة :** تتكون تكلفة صناعة نوع من السيارات من قسمين ؛ ثابت ومقداره 96000 ريال، ومتغير مقداره 800 ريال عن كلٍّ سيارة يتم صنعها. أي أن التكلفة الكلية $f(x)$ لصناعة x من السيارات يُعبر عنها بالدالة: $f(x) = 96000 + 800x$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.
تحقق الدالة $f^{-1}(x)$ اختبار الخط الأفقي. $f^{-1}(x) = \frac{x - 96000}{800}$

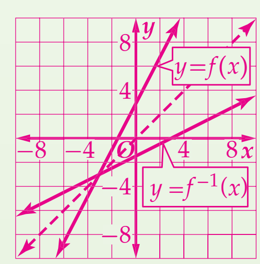
b) ماذا تمثّل كلٌّ من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية ؟ تمثل x التكلفة الكلية، بينما تمثل $f^{-1}(x)$ عدد السيارات.

c) حدد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضح إجابتك. يجب أن يكون مجال $f(x)$ الأعداد الصحيحة غير السالبة. ومجال $f^{-1}(x)$ من مضاعفات 800 وأكبر من 96000.

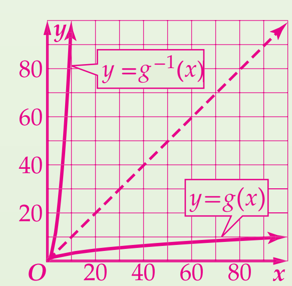
d) أوجد عدد السيارات إذا كانت التكلفة الكلية 216000 ريال.
150 سيارة

إجابات (تحقق من فهمك) :

(4A



(4B



تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب تمثيل الدالة المحايدة $f(x) = x$ على مستوى بياني كبير مستعملين ألوانًا واضحة، ثم اطلب إليهم تعيين نقاط من الدالة $f(x) = x^3$ عند قيم x الآتية: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. ومن ثم تمثيل الدالة العكسية بإيجاد هذه النقاط بالانعكاس في المستقيم $y = x$. واطلب إليهم عمل جدول بقيم الدالتين واستعماله لتفسير سبب استبدال المتغيرين x, y في الدالة الأصلية عند إيجاد الدالة العكسية.

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$ **لا**

2) $y = x^2 - 16x + 64$ **لا**

3) $y = 3x - 8$ **نعم**

4) $y = 4$ **لا**

5) $y = \sqrt{x + 4}$ **نعم**

6) $y = -4x^2 + 8$ **لا**

7) $y = \frac{8}{x + 2}$ **نعم**

8) $y = \frac{1}{4}x^3$ **نعم**

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$

10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$

11) $f(x) = \sqrt{x + 8}$

12) $f(x) = \sqrt{6 - x^2}$

13) $f(x) = |x - 6|$

14) $g(x) = \frac{x - 6}{x}$

15) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8 - x}}$

16) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x + 3}}$

17) $h(x) = \frac{x + 4}{3x - 5}$

18) $g(x) = |x + 1| + |x - 4|$

19-9 انظر الهامش.

19) **سرعة:** تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2)

a) أوجد الدالة العكسية لِـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3) **25-20 انظر ملحق الإجابات.**

20) $f(x) = 4x + 9$, $g(x) = \frac{x - 9}{4}$

21) $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{\frac{5 - x}{3}}$

22) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$, $g(x) = \sqrt{4x - 32}$

23) $f(x) = (x + 8)^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$

24) $f(x) = 2x^3 - 6$, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 6}{2}}$

25) $f(x) = \frac{x - 6}{x + 2}$, $g(x) = \frac{2x + 6}{1 - x}$

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3) **26a-c انظر ملحق الإجابات.**

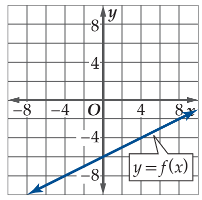
a) أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟

b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.

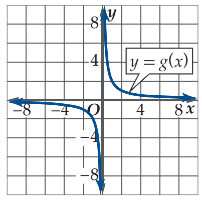
c) مَثِّل كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4) **30-27 انظر ملحق الإجابات.**

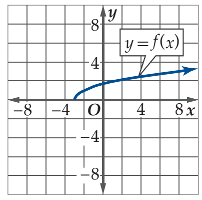
27)



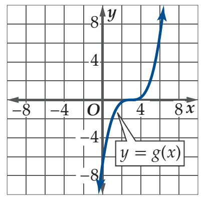
28)



29)



30)



31) **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالًا في الأسبوع، ويتقاضى أيضًا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات. أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًّا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$ حيث تمثل x قيمة المبيعات. (مثال 5) **31a-d انظر ملحق الإجابات.**

a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

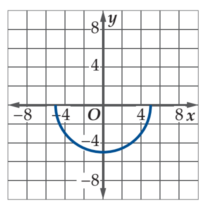
b) ماذا تمثّل كل من x, $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.

d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

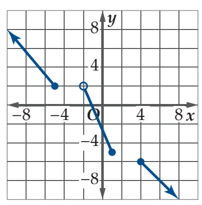
حدد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

32)



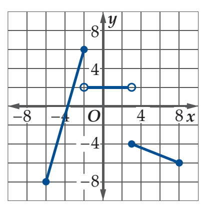
غير موجودة

33)



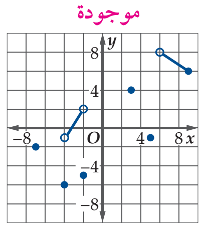
موجودة

34)



غير موجودة

35)



موجودة

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 31–1 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: قد يخطئ بعض الطلاب في إيجاد $f^{-1}(x)$ باعتبارها $\frac{1}{f(x)}$. لذا ذكّرهم بأن f^{-1} رمز وليس متغيرًا مرفوعًا للأس -1؛ بمعنى آخر، f^{-1} هي معكوس الدالة f في حين أن $\frac{1}{f}$ مقلوب f.

خطأ شائع: في المسائل 25–20 ساعد الطلاب على استعمال التعويض وإجراء عمليات الاختصار بتذكيرهم باستعمال الأقواس على نحوٍ صحيح عند التعويض.

إجابات:

9) غير موجودة.

10) غير موجودة.

11) نعم، $f^{-1}(x) = x^2 - 8;\ x \geq 0$

12) غير موجودة.

13) غير موجودة.

14) نعم، $g^{-1}(x) = \frac{6}{1 - x};\ x \neq 1$

15) نعم، $f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2};\ x > 0$

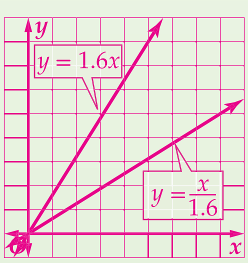
16) نعم، $g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2};\ x > 0$

17) نعم، $h^{-1}(x) = \frac{5x + 4}{3x - 1};\ x \neq \frac{1}{3}$

18) غير موجودة.

19a) $y = \frac{x}{1.6}$ ، y السرعة بالميل لكل ساعة، x السرعة بالكيلو متر لكل ساعة.

19b)



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–31 ، 56–58 ، 60–69
ضمن المتوسط	1–37 (فردي)، 38، 39، 41، 43، 48، 51–54 (فردي) ، 55–58، 60–69
فوق المتوسط	32–69

كون جدولًا للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب. **36-37 انظر الهامش.**

36)

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

37)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

38) **درجات حرارة:** تُستعمل الدالة $f(x)=\frac{9}{5}x+32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x)=\frac{5}{9}(x+459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

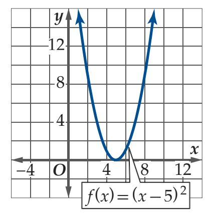
a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

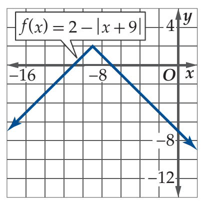
b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

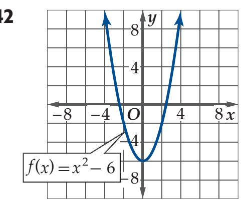
c) أوجد $(k\circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

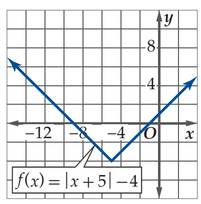
d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$، فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها. **(38a-d) انظر الهامش.**

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها: **(39-40) انظر الهامش.**

39) 

40) 

41) 

42) 

43) **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريالات للزهرة الواحدة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟ **(43a-d) انظر ملحق الإجابات.**

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}: **(44-47) انظر الهامش.**

44) $f(x)=\sqrt{x-6}$

45) $f(x)=x^2+9$

46) $f(x)=\frac{3x+1}{x-4}$

47) $f(x)=\frac{8x+3}{2x-6}$

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. و اذكر أية قيود على المجال:

48) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , -4\ge x \\ -2x+5 & , -4<x \end{cases}$ **انظر ملحق الإجابات.**

49) $f(x)=\begin{cases} -4x+6 & , -5\ge x \\ 2x-8 & , -5<x \end{cases}$ **$f^{-1}(x)$ غير موجودة.**

50) **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. فكانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم 50 ريالًا فقط. **$r(x)=x-50$**

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط. **$d(x)=0.9x$**

c) اكتب قاعدة تمثّل $T=r\circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل؟ **(c-d) انظر الهامش.**

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟ **900 ريال تقريبًا.**

(51-54) انظر ملحق الإجابات.

إذا كانت $f(x)=8x-4, g(x)=2x+6$ فأوجد:

51) $(f^{-1}\circ g^{-1})(x)$

52) $(g^{-1}\circ f^{-1})(x)$

53) $(f\circ g)^{-1}(x)$

54) $(g\circ f)^{-1}(x)$

تنبيه!

خطأ شائع: في المسائل 38–36، قد يجد الطلاب صعوبة في التحقق من وجود دالة عكسية: لعدم وجود التمثيل البياني للدوال، لذا اطلب إليهم تمثيل $f(x)$ وتطبيق اختبار الخط الأفقي.

إجابات:

36) f^{-1} موجودة.

x	-4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	-6	-4	-1	3	6	10

37) f^{-1} غير موجودة؛ لأن f غير متباينة.

38a) $f^{-1}(x)=\frac{5}{9}(x-32)$ ؛ f^{-1} تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات فهرنهايتية إلى درجات سيليزية.

38b) $f[f^{-1}(x)]=\frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x-32)\right)+32$

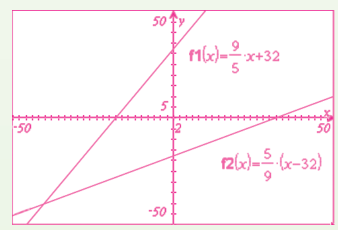
$=x-32+32$

$=x$

$f^{-1}[f(x)]=\frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x+32\right)-32\right)$

$=\frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right)$

$=x$



38c) $k[f(x)]=x+273.15$ ؛ تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات سيليزية إلى درجات مطلقة (كلفن).

38d) 333.15 درجة مطلقة.

39) إجابة ممكنة:

$x\ge 5; f^{-1}(x)=\sqrt{x}+5$

40) إجابة ممكنة: $x\le -9; f^{-1}(x)=x-11$

41) إجابة ممكنة: $x\ge 0; f^{-1}(x)=\sqrt{x+6}$

42) إجابة ممكنة: $x\ge -5; f^{-1}(x)=x-1$

44) الدالة f، المجال: $\{x \mid x\ge 6, x\in R\}$، المدى: $\{y \mid y\ge 0, y\in R\}$

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x\ge 0, y\in R\}$، المدى: $\{y \mid y\ge 6, x\in R\}$

45) f^{-1} غير موجودة.

46) الدالة f المجال: $\{x \mid x\ne 4, x\in R\}$، المدى: $\{y \mid y\ne 3, x\in R\}$

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x\ne 3, \in R\}$، المدى: $\{y \mid y\ne 4, x\in R\}$.

47) الدالة f المجال: $\{x \mid x\ne 3, x\in R\}$، المدى: $\{y \mid y\ne 4, x\in R\}$.

الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x\ne 4, x\in R\}$ المدى: $\{y \mid y\ne 3, x\in R\}$.

50c) $T(x)=0.9x-50$

50d) $T^{-1}(x)=\frac{x+50}{0.9}$ ؛ تمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

55a-d) انظر ملحق الإجابات.

55) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة وجود أو عدم وجود دالة عكسية لكلٍّ من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفه.

c) **بيانيًّا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليليًّا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفه.

مسائل مهارات التفكير العليا
56-58) انظر ملحق الإجابات.

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برِّر إجابتك.
"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

59) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - ax + 8$ ، $f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a. 4

60) انظر ملحق الإجابات.

60) **تبرير:** هل توجد دالة $f(x)$ تحقق اختبار الخط الأفقي، وتحقق المعادلتين $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ في الوقت نفسه؟

مراجعة تراكمية
لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$، ثم أوجد مجال دالة التركيب: (الدرس 1-6) 61,62) انظر الهامش.

61) $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي: (الدرس 1-5)

63) $f(x) = x^2$ 63-65) انظر الهامش.

a) $y = (0.2x)^2$

b) $y = (x - 5)^2 - 2$

c) $y = 3x^2 + 6$

64) $f(x) = x^3$

a) $y = |x^3 + 3|$

b) $y = -(2x)^3$

c) $y = 0.75(x + 1)^3$

65) $f(x) = |x|$

a) $y = |2x|$

b) $y = |x - 5|$

c) $y = |3x + 1| - 4$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

66) $f(x) = x^3 - x, [0, 3]$ 8

67) $f(x) = x^4 - 2x + 1, [-5, 1]$ -106

تدريب على اختبار
68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟ A

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًّا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟ D

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

تنويع التعليم
فوق

توسّع: هل يوجد للدالة $f(x) = [x]$ دالة عكسية؟ فسّر إجابتك. لا؛ لأن الدالة $f(x)$ لا تحقق اختبار الخط الأفقي ؛ لذا فإنه يوجد عناصر في مجال العلاقة العكسية لِـ $f(x)$ ترتبط بأكثر من عنصر في المدى.

تمثيلات متعددة
في السؤال 55 يستعمل الطلاب التمثيل البياني والتحليل الجبري لاستقصاء معكوس كل من الدالة الفردية والدالة الزوجية.

4 التقويم
فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب وصف كيفية التحقق من وجود دالة عكسية لدالة معطاة. استعمال اختبار الخط الأفقي

التقويم التكويني
تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 1-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات:
61) $[f \circ g] = x^2 + 8x + 7$ ، ومجالها $\{x \mid x \in R\}$.
$[g \circ f] = x^2 - 5$ ومجالها $\{x \mid x \in R\}$

62) $[f \circ g] = \frac{1}{2}x - 4$ ومجالها $\{x \mid x \in R\}$.
$[g \circ f] = \frac{1}{2}x - 1$ ومجالها $\{x \mid x \in R\}$

63a) توسع أفقي.

63b) انسحاب 5 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل.

63c) توسع رأسي بمقدار 3، وانسحاب بمقدار 6 وحدات إلى أعلى.

64a) انسحاب 3 وحدات إلى أعلى، وانعكاس حول المحور x، للجزء من المنحنى الموجود تحت المحور x.

64b) انعكاس حول المحور x، وتضيق أفقي.

64c) انسحاب وحدة واحدة إلى اليسار، وتضيق رأسي.

65a) تضيق أفقي.

65b) انسحاب 5 وحدات إلى اليمين.

65c) تضيق أفقي، وانسحاب 4 وحدات إلى أسفل، ثم انسحاب إلى اليسار بمقدار $\frac{1}{3}$ وحدة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 1

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (30) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

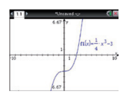
1-7 تدريبات إعادة التعليم

العلاقات والدوال العكسية

الدوال العكسية والدوال المتباينة تكون كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجودًا في إحداهما فإن الزوج المرتب (a, b) يكون موجودًا في الأخرى.
ويُرمز للدالة العكسية للدالة f بالرمز $f^{-1}(x)$.
يوجد للدالة دالة عكسية إذا وفقط إذا قطع أي مستقيم أفقي منحنى الدالة في نقطة واحدة على الأكثر، وهذا يُعرف **باختبار الخط الأفقي**. وإذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي، فتكون دالة متباينة؛ لأن x ترتبط بقيمة واحدة فقط من y.

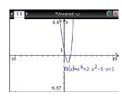
مثال مثّل كل دالة من الدالتين الآتيتين بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة أم لا، وأجب بـِ «نعم» أو «لا».

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3$



نعم، يوجد دالة عكسية؛ لأنه ليس بالإمكان إيجاد مستقيم أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة واحدة، وعليه فإن $f^{-1}(x)$ موجودة.

b) $g(x) = x^4 + 2x^2 - 5x + 1$



لا، لا يوجد دالة عكسية؛ لأنه يمكن إيجاد مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة، وعليه فإن $g^{-1}(x)$ غير موجودة.

تمارين

مثّل منحنى كل دالة من الدوال الآتية مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة أم لا، وأجب بـِ «نعم» أو «لا»:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ **نعم**

2) $f(x) = x^2 - 5$ **لا**

3) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 6x - 4$ **لا**

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$ **نعم**

5) $f(x) = -x^3 + 6$ **نعم**

6) $f(x) = -x^3 + 2x$ **لا**

الصف: الثالث الثانوي | 30 | الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات إعادة التعليم (31) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

1-7 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

العلاقات والدوال العكسية

إيجاد الدوال العكسية لإيجاد الدالة العكسية جبريًا، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: استعمل اختبار الخط الأفقي للتأكد من وجود دالة عكسية.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل بين الرمزين x و y.

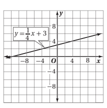
الخطوة 3: حُلّ بالنسبة إلى y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: ضع قيودًا على المجال إن وجدت.

يمكنك التحقق من صحة حلك بإثبات أن $f[f^{-1}(x)] = x$ و $f^{-1}[f(x)] = x$، بمعنى آخر، أن يعطي التركيب الناتج عن الدالة وعكسها الدالة المحايدة دائمًا.
إذا أُعطيت منحنى دالة، فإنه يمكنك تمثيل دالتها العكسية بيانيًا بتحديد نقاط على منحنى $f(x)$، ثم تحديد صورها بالانعكاس حول المحور $y = x$. غيّر موقعي الإحداثيين x، y، ثم صل النقاط بمستقيم أو منحنى أملس.

مثال تحقق مما إذا كانت الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ موجودة، وإن كانت موجودة، فأوجد قاعدتها.

الخطوة 1: من التمثيل البياني تحقق الدالة اختبار الخط الأفقي، لذا يوجد دالة عكسية لها.



الخطوة 2: $y = \frac{1}{4}x + 3$ ضع y مكان $f(x)$.
$x = \frac{1}{4}y + 3$ بدّل بين x , y.

الخطوة 3: $4x = y + 12$ حُلّ بالنسبة إلى y.
$y = 4x - 12$
$f^{-1}(x) = 4x - 12$ ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

الخطوة 4: لا يوجد قيود على المجال.

تمارين

تحقق مما إذا كانت الدالة العكسية للدالة f موجودة في كل مما يأتي، وإن كانت موجودة، فأوجد قاعدتها، وضع أي قيود على مجالها:

1) $f(x) = 2x - 4$ **نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$؛ لا توجد قيود.**

2) $f(x) = (x-1)^2 + 2$ **لا**

3) $f(x) = \frac{5}{x-2}$ **نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x}; x \neq 0$**

4) $f(x) = x^3 + 4$ **نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-4}$؛ لا توجد قيود.**

الصف: الثالث الثانوي | 31 | الفصل 1: تحليل الدوال

تدريبات حل المسألة (32) دون ضمن فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

1-7 تدريبات حل المسألة

العلاقات والدوال العكسية

1) **كهربائي:** إذا كان المبلغ الذي يتقاضاه كهربائي يُعبَّر عنه بالدالة $f(x) = 60 + 55x$، حيث x عدد ساعات العمل.

a) أوجد الدالة العكسية للدالة المعطاة.
$f^{-1}(x) = \frac{x-60}{55}$

b) ماذا يمثّل x في الدالة العكسية؟
ما يتقاضاه الكهربائي

c) إذا تقاضى الكهربائي 225 ريالًا، فكم ساعة عَمِل؟
3 ساعات

2) **توفير:** يوفر عبد الله 15% من دخله الشهري مضافًا إليه 200 ريال.

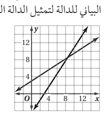
a) أوجد الدالة التي تُعبّر عن المبلغ الشهري الذي يوفّره عبد الله، حيث x دخله الشهري.
$f(x) = 0.15x + 200$

b) أوجد الدالة العكسية للدالة f.
$f^{-1}(x) = \frac{x-200}{0.15}$

c) تحقق من أن كلًا من $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى.
$f[f^{-1}(x)] = 0.15\left(\frac{x-200}{0.15}\right) + 200 = x$
$f^{-1}[f(x)] = \frac{0.15x + 200 - 200}{0.15} = x$

3) **بندول:** إذا كان الوقت بالثواني الذي يستغرقه بندول لإتمام اهتزازة واحدة ذهابًا وإيابًا يُعبّر عنه بالدالة $f(x) = 2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$، $x \geq 0$، حيث x طول البندول بالأمتار، فأوجد الدالة العكسية للدالة $f(x)$.
$f^{-1}(x) = \frac{9.8x^2}{4\pi^2}$

4) **تخفيضات:** يبيّن التمثيل البياني الآتي معدل تكلفة شحن بضاعة في موسم التخفيضات. استعمل التمثيل البياني للدالة لتمثيل الدالة العكسية.



5) **كرة سلة:** يُعبّر عن مساحة سطح كرة طول نصف قطرها x بالدالة $f(x) = 4\pi x^2$.

a) ما مجال هذه الدالة؟ **$(0, \infty)$**

b) أوجد الدالة العكسية لهذه الدالة موضحًا ماذا يمثّل كلّ من المتغيرين فيها.
$f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{4\pi}}$
x مساحة سطح الكرة، $f^{-1}(x)$ طول نصف قطر الكرة.

c) إذا كانت مساحة سطح كرة سلة 278 بوصة مربعة، فأوجد طول نصف قطرها مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.
4.7 in

6) **أجور:** يتقاضى موقف للسيارات أجرة مقدارها 4.50 ريالات عن كل ساعة أو جزء منها، حيث تمثّل الدالة f تكلفة الوقوف x من الساعات في هذا الموقف $f(x) = \begin{cases} 4.5[x], & [x] = x \\ 4.5[x+1], & [x] < x \end{cases}$، فهل يوجد دالة عكسية لهذه الدالة؟ وضّح إجابتك.
لا؛ إذا مثلت الدالة بيانيًا فإنها لا تحقق اختبار الخط الأفقي.

الصف: الثالث الثانوي | 32 | الفصل 1: تحليل الدوال

التدريبات الإثرائية (33) فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

1-7 التدريبات الإثرائية

الانعكاس في لعبة الحروف

الانعكاس في لعبة الحروف: لحل هذا اللغز، املأ الفراغ أمام كل إرشاد، علمًا بأن عدد حروف الإجابة الصحيحة مساويًا عدد الأعداد الموجودة إلى يسار الإرشاد. ثم املأ الجدول بالحروف المناسبة لحل اللغز، ومعرفة الجملة التي تحصل عليها، واستعمل القاموس لمساعدتك على حل الإرشادات.

ضع الحرف (الحروف) أو الكلمات الآتية في الفراغ المخصص، ثم انقلها إلى الجدول عند الأعداد المحددة.

HALF ONE LEFT VE

ISE RATIO WHEN STRAIGHT

الإرشادات:

1) إذا كان العنصر (e, v) ينتمي إلى علاقةٍ ما، فإن العلاقة العكسية تتضمن (__ , __). **V E** (17 28)

2) نجد الدالة العكسية للدالة $2x$ بحساب __ قيمة x. **H A L F** (2 29 6 27)

3) الحرف الأول والحرفان الأخيران من مدلول الرمز f^{-1} باللغة الإنجليزية__. **I S E** (31 33 14)

4) ناتج ضرب عدد في معكوسه الضربي. **O N E** (20 11 34)

5) النسبة بين عددين تُسمى __. **R A T I O** (24 16 19 10 4)

6) لحل معادلة مصفوفية على الصورة $AX = B$، اضرب كل طرف من طرفي المعادلة من جهة __ في النظير الضربي للمصفوفة A. **L E F T** (35 3 21 8)

7) يتناسب متغيران تناسبًا عكسيًا __ يكون ناتج ضربهما ثابتًا. **W H E N** (13 9 22 5)

8) شكل التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الخطية هو __. **S T R A I G H T** (26 32 30 23 25 12 15 1)

	1 T	2 H	3 E		4 O	5 N	6 L	7 Y		8 T	9 H	10 I	11 N	12 G	
13 W	14 E		15 H	16 A	17 V	18 E		19 T	20 O		21 F	22 E	23 A	24 R	
	25 I	26 S		27 F	28 E	29 A	30 R		31 I	32 T	33 S	34 E	35 L	36 F	

الصف: الثالث الثانوي | 33 | الفصل 1: تحليل الدوال

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 7 - 1

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (10) دون ضمن فوق

1-7 العلاقات والدوال العكسية

مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبِّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

1) $f(x) = 3|x| + 2$ لا

2) $f(x) = -\sqrt{x+3} - 1$ نعم

3) $f(x) = x^5 + 5x^3$ نعم

4) $f(x) = \frac{x}{5} + 9$ نعم

في كلٍّ مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدّد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب: غير موجودة.

5) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ $f^{-1}(x) = x^3 + 1$

6) $f(x) = \frac{2x-1}{x+7}$ $f^{-1}(x) = \frac{7x+1}{2-x}; x \neq 2$

7) $f(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$ غير موجودة

8) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $f^{-1}(x) = x^2 + 2; x \geq 0$

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g دالة عكسية للأخرى في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

9) $f(x) = 2x + 3; g(x) = \frac{x-3}{2}$

$f[g(x)] = 2\left(\frac{x-3}{2}\right) + 3 = x$

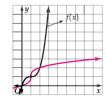
$g[f(x)] = \frac{2x+3-3}{2} = x$

10) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 6; x \geq 0; g(x) = \sqrt{2x+12}$

$f[g(x)] = \frac{(\sqrt{2x+12})^2}{2} - 6 = x$

$g[f(x)] = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{2} - 6\right) + 12} = x$

11) استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل أدناه لتمثيل $f^{-1}(x)$:



12) **مكافحة الحرائق:** تستعمل الطائرات الماء في إطفاء حرائق الغابات. ويعطى الزمن الذي يستغرقه الماء للوصول إلى الأرض بالثواني بالدالة $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{4}$ ، حيث h ارتفاع الطائرة بالقدم. أوجد الدالة العكسية لها. وإذا استغرق الماء 8 ثوانٍ للوصول إلى الأرض، فأوجد ارتفاع الطائرة. $f^{-1}(x) = 16x^2; 1024 \text{ ft}$

الفصل الأول تحليل الدوال

10

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1–10، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14).

الفصل 1

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال (الدرس 1–1)

- المجموعات الجزئية الشائعة من مجموعة الأعداد الحقيقية هي: الأعداد النسبية، الأعداد غير النسبية، الأعداد الصحيحة، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية.
- الدالة هي علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.
- يحقق منحنى أي دالة اختبار الخط الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 1–2)

- قد تكون المنحنيات متماثلةً حول المحور y ، أو المحور x ، أو نقطة الأصل.
- الدالة الزوجية متماثلة حول المحور y ، والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الدرس 1–3)

- إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فنقول: إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L . وتكتب $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
- قد تكون الدالة غير متصلة، ونوع عدم الاتصال هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الدرس 1–4)

- تكون الدالة إما متزايدةً أو متناقصةً أو ثابتةً على فترات معينة.
- تتضمن القيم القصوى القيمة العظمى المحلية، والصغرى المحلية، والعظمى المطلقة، والصغرى المطلقة.
- يعطى متوسط معدل التغير بين نقطتين بالقاعدة $m_{\text{sec}} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الدرس 1–5)

تتضمن التحويلات الهندسية على الدالة الرئيسة (الأم) : الانسحاب، الانعكاس، التمدد.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الدرس 1–6)

إن حاصل جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتركيب أي دالتين ينتج دوال جديدةً .

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 1–7)

- تكون كلٌّ من العلاقتين A , B عكسية للأخرى إذا وفقط إذا وجد (b, a) في إحداهما فإنه يوجد (a, b) في الأخرى.
- تكون كلٌّ من الدالتين f, f^{-1} عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x, f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات

الصفة المميزة للمجموعة (ص. 10)
رمز الفترة (ص. 11)
الدالة (ص. 11)
رمز الدالة (ص. 13)
المتغير المستقل (ص. 13)
المتغير التابع (ص. 13)
الدالة متعددة التعريف (ص. 14)
الأصفار (ص. 20)
الجذور (ص. 20)
التماثل حول مستقيم (ص. 21)
التماثل حول نقطة (ص. 21)
الدالة الزوجية (ص. 23)
الدالة الفردية (ص. 23)
الدالة المتصلة (ص. 28)
النهاية (ص. 28)
الدالة غير المتصلة (ص. 28)
عدم الاتصال اللانهائي (ص. 28)
عدم الاتصال القفزي (ص. 28)
عدم الاتصال القابل للإزالة (ص. 28)
عدم الاتصال غير قابل للإزالة (ص. 31)
سلوك طرفي التمثيل البياني (ص. 32)
المتزايدة (ص. 38)
المتناقصة (ص. 38)
الثابتة (ص. 38)
النقطة الحرجة (ص. 40)
العظمى (ص. 40)
الصغرى (ص. 40)
القصوى (ص. 40)
متوسط معدل التغير (ص. 42)
القاطع (ص. 42)
الدالة الرئيسة (الأم) (ص. 48)
الدالة الثابتة (ص. 48)
الدالة المحايدة (ص. 48)
الدالة التربيعية (ص. 48)
الدالة التكعيبية (ص. 48)
دالة الجذر التربيعي (ص. 48)
دالة المقلوب (ص. 48)
دالة القيمة المطلقة (ص. 49)
الدالة الدرجية (ص. 49)
دالة أكبر عدد صحيح (ص. 49)
التحويل الهندسي (ص. 49)
الانسحاب (ص. 50)
الانعكاس (ص. 51)
التمدد (ص. 52)
تركيب دالتين (ص. 59)
العلاقة العكسية (ص. 66)
الدالة العكسية (ص. 66)
الدالة المتباينة (ص. 67)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المفردة التي تحتها خط حتى تصبح صحيحة.

1) تعين الدالة لكل عنصر في مجالها عنصراً واحداً فقط في مداها. صحيحة
2) المنحنيات المتماثلة حول نقطة يمكن تدويرها °180 حول النقطة، فتبدو كأنها لم تتغير. صحيحة
3) للدالة الفردية نقطة تماثل. صحيحة
4) لا يتضمن منحنى الدالة المتصلة فجوةً أو انقطاعًا.
5) الدالة الفردية متماثلة حول المحور y. خاطئة، الزوجية صحيحة
6) الدالة $f(x)$ التي تتناقص قيمها مع تزايد قيم x تسمى دالةً متناقصةً. صحيحة
7) تتضمن القيم القصوى لدالة قيماً عظمى محليةً أو صغرى محليةً. صحيحة
8) انسحاب المنحنى عبارة عن صورة مرآة للمنحنى الأصلي حول مستقيم.
9) تحقق الدالة المتباينة اختبار الخط الأفقي. صحيحة خاطئة، انعكاس
10) الدالة المتباينة لها محور تماثل. خاطئة، الدالة العكسية

74 الفصل 1 تحليل الدوال

مراجعة الدروس

مراجعة : إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 1 ص (8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

17) المجال: $\{x|x \in R\}$

18) المجال: $\{x|x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

19) المجال: $\{a|a \neq -5, a \in R\}$

20) المجال: $\{x|x \neq \pm 2, x \in R\}$

21) المجال: $[-8, 8]$
المدى: $[0, 8]$

22) المجال: $\{x|x \in R\}$
المدى: $(-\infty, -3)$

23) $-9 ; \frac{9}{4}$

24) $-27 ; -3,9$

25) $0 ; 0, 4, -4$

26) $\sqrt{2} - 1 ; -1$

ملخص الدروس

1-1 الدوال (الصفحات 17 - 10)

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا:

11) $3x - 2y = 18$ **دالة**

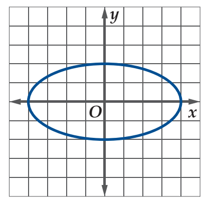
12) $y^3 - x = 4$ **دالة**

13)

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

دالة

14)



ليست دالة

إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$، فأوجد كلًّا من القيمتين الآتيتين:

15) $f(5)$ **14**

16) $f(-3x)$ $\mathbf{9x^2 + 9x + 4}$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية: **20-17) انظر الهامش.**

17) $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$

18) $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19) $h(a) = \frac{5}{a + 5}$

20) $v(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

في العلاقة $x = y^2 - 8$ حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

حل بالنسبة إلى y.

$y^2 - 8 = x$ الدالة الأصلية

$y^2 = x + 8$ أضف 8 للطرفين

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

في هذه العلاقة، y لا تمثّل دالة في المتغير x؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -8 ترتبط بقيمتين من قيم y.

مثال 2

إذا كانت $g(x) = -3x^2 + x - 6$، فأوجد $g(2)$.

عوض 2 مكان x في العبارة: $-3x^2 + x - 6$.

$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $x = 2$

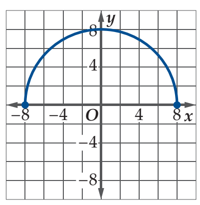
$= -12 + 2 - 6 = -16$ بسّط

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الصفحات 27 - 18)

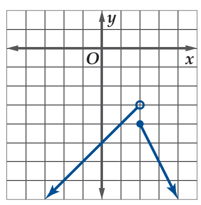
22, 21) انظر الهامش

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي:

21)



22)



أوجد المقطع y ، والأصفار لكل دالة مما يأتي: **26-23) انظر الهامش.**

23) $f(x) = 4x - 9$

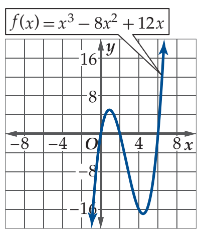
24) $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25) $f(x) = x^3 - 16x$

26) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$

مثال 3

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد مقطعها y وأصفارها. ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.



التقدير بيانيًّا :

يتضح من الشكل أن منحنى $f(x)$ يقطع المحور y عند $(0, 0)$؛ لذا فإن المقطع y هو 0 .

المقاطع x (أصفار الدالة) تبدو قريبةً من 6 ,2 ,0 .

الحل جبريًّا :

لإيجاد المقطع y ، أوجد $f(0)$.

$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$

حلل المعادلة المرتبطة بالدالة إلى العوامل x لإيجاد أصفار الدالة.

$0 = x(x^2 - 8x + 12)$

$= x(x - 2)(x - 6)$

أصفار الدالة f هي 6 ,2 ,0 .

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

إجابات:

27) متصلة عند $x = 4$؛ الدالة معرفة عند $x = 4$. تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول x إلى 4 من الجهتين $f(4) = 4$.

28) متصلة عند $x=10$ ؛ الدالة معرفة عند $x=10$. تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول x إلى 10 من الجهتين، $f(10) = 4$.

29) متصلة عند $x = 0$ ؛ الدالة معرفة عند $x = 0$. تؤول الدالة إلى 0 عندما تؤول x إلى 0 من الجهتين؛ $f(0) = 0$؛ متصلة عند $x = 7$; الدالة معرفة عند $x = 7$. الدالة تؤول إلى 0.5 عندما تؤول x إلى 7 ، $f(7) = 0.5$.

30) غير متصلة عندما $x = 2$ ؛ غير معرفة عند $x = 2$ عدم الاتصال لا نهائي. الدالة متصلة عند $x = 4$ ؛ الدالة معرفة عند $x = 4$. الدالة تؤول إلى $\frac{1}{3}$ عندما تؤول x إلى 4 من الجهتين $f(4) = \frac{1}{3}$.

31) متصلة عند 1؛ الدالة معرفة عند $x = 1$؛ تؤول الدالة إلى 2 عندما تؤول x إلى 1 من الجهتين؛ $f(1) = 2$

32) يوضح التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$، فإن $f(x)\to-\infty$؛ وعندما $x\to-\infty$ ، فإن $f(x)\to\infty$.

33) يوضح التمثيل البياني أنه عندما $x\to\infty$، فإن $f(x)\to0$ ؛ وعندما $x\to-\infty$ ، فإن $f(x)\to0$.

34) f متزايدة على $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة على $(-0.5, 0.5)$، ثم متزايدة على $(0.5, \infty)$ ؛ يوجد قيمة عظمى محلية عند $(-0.5, 3.5)$ ؛ وقيمة صغرى محلية عند $(0.5, 2.5)$.

الفصل 1 دليل الدراسة و المراجعة

1-3 الاتصال والنهايات (الصفحات 37 - 28)

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع عدم الاتصال لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. **27-31) انظر الهامش.**

27) $f(x) = x^2 - 3x\,, x = 4$

28) $f(x) = \sqrt{2x - 4}\,, x = 10$

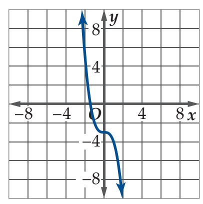
29) $f(x) = \frac{x}{x+7}\,, x = 0\,, x = 7$

30) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}\,, x = 2\,, x = 4$

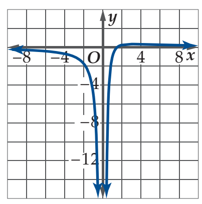
31) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 \,, & x < 1 \\ 2x \,, & x \geq 1 \end{cases}\,, x = 1$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل منهما: **32-33) انظر الهامش.**

32)



33)



مثال 4

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{x-4}$ متصلة عند $x = 0\,, x = 4$. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$f(0) = -0.25$، لذلك f معرفة عند 0 . وتقترب قيم الدالة من -0.25 عندما تقترب x من 0 .

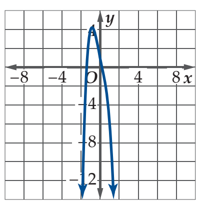
x	−0.1	−0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	−0.244	−0.249	−0.25	−0.251	−0.256

بما أن $f(0) = -0.25\,, \lim_{x\to0} f(x) = -0.25$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x = 0$.

بما أن f غير معرفة عند $x = 4$ فإن f غير متصلة عند 4 وهو عدم اتصال لا نهائي.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = -2x^4 - 5x + 1$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.



اختبر منحنى $f(x)$.

عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

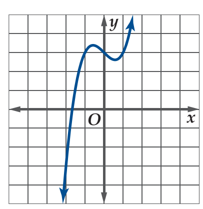
عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الصفحات 46 - 38)

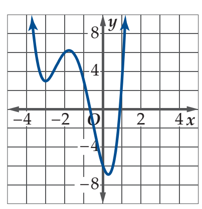
34-35) انظر الهامش.

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.

34)



35)



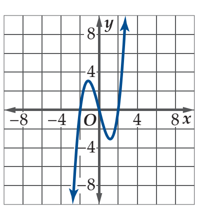
أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

36) $f(x) = -x^3 + 3x + 1,\ [0, 2]$ **−1**

37) $f(x) = x^2 + 2x + 5,\ [-5, 3]$ **0**

مثال 6

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.



الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1, 3)$ ، وقيمة صغرى محلية عند $(1, -3)$.

35) f متناقصة على $(-\infty, -3)$، ومتزايدة على $(-3, -1.5)$، ومتناقصة على $(-1.5, 0.5)$ ، ومتزايدة على $(0.5, \infty)$ ؛ يوجد قيمة صغرى محلية عند $(-3, 3)$، وقيمة عظمى محلية للدالة عند $(-1.5, 6)$، وأيضًا قيمة صغرى محلية عند $(0.5, -7)$.

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الصفحات 57 - 48)

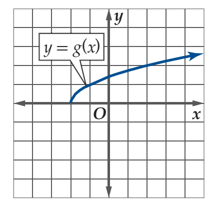
(38-41) انظر الهامش.

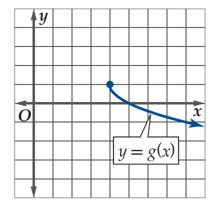
أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وَصِف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

38) $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$ 39) $g(x) = -(x-6)^2 - 5$

40) $g(x) = \dfrac{1}{2(x+7)}$ 41) $g(x) = \frac{1}{4}[x] + 3$

صف العلاقة بين الدالتين $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (42, 43) انظر الهامش.

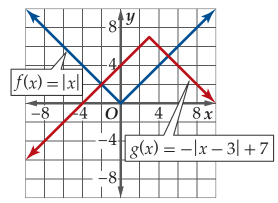
42) 

43) 

مثال 7

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -|x-3| + 7$ ، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثّلهما في مستوى إحداثي واحد.

الدالة الرئيسة (الأم) لِـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. ينتج منحنى الدالة g من منحنى الدالة f بانعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى.



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الصفحات 65 - 58)

(44-47) انظر ملحق الإجابات.

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من الدالتين $f(x), g(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

44) $f(x) = x + 3$
$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$

45) $f(x) = 4x^2 - 1$
$g(x) = 5x - 1$

46) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$
$g(x) = 4x^2 - 3$

47) $f(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = \frac{1}{x^2}$

(48-50) انظر ملحق الإجابات.

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](2)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

48) $f(x) = 4x - 11, g(x) = 2x^2 - 8$

49) $f(x) = x^2 + 2x + 8, g(x) = x - 5$

50) $f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = x^2$

(51,52) انظر ملحق الإجابات.

اكتب مجال $f \circ g$ متضمنًا أية قيود إذا لزم، ثم أوجد $f \circ g$.

51) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
$g(x) = 2x - 6$

52) $f(x) = \sqrt{x-2}$
$g(x) = 6x - 7$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x + 7$ ، فأوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ ، ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^3 - 1) + (x + 7)$$
$$= x^3 + x + 6$$

مجال $(f+g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (x^3 - 1) - (x + 7)$$
$$= x^3 - x - 8$$

مجال $(f-g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (x^3 - 1)(x + 7)$$
$$= x^4 + 7x^3 - x - 7$$

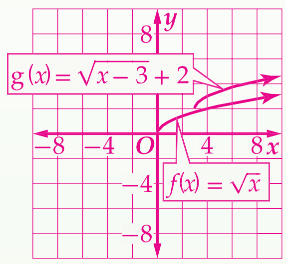
مجال $(f \cdot g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$$

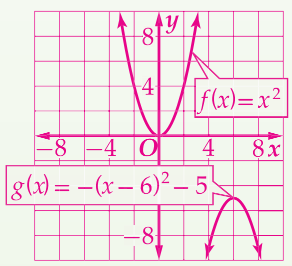
مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$.

إجابات:

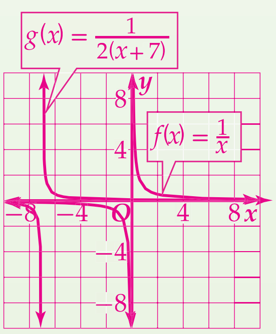
38) $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بالانسحاب 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.



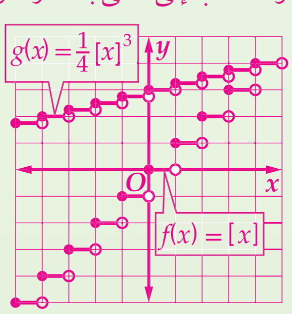
39) $f(x) = x^2$ ؛ منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكاس في المحور x، وانسحاب 6 وحدات إلى اليمين، و 5 وحدات إلى أسفل.



40) $f(x) = \frac{1}{x}$ ؛ منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانسحاب 7 وحدات إلى اليسار، وتضيق رأسي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$.



41) $f(x) = [x]$ ؛ منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ بمعامل $\frac{1}{4}$ ، وانسحاب إلى أعلى بمقدار 3 وحدات.



42) ينتج منحنى الدالة (x) و بانسحاب مقداره وحدتان لليسار، $g(x) = \sqrt{x+2}$

43) ينتج منحنى الدالة $g(x)$ بانعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 4 وحدات لليمين، وانسحاب مقداره 1 وحدة إلى أعلى، $g(x) = -\sqrt{x-4} + 1$.

1-7 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 66 - 73)

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. **53-55 انظر ملحق الإجابات.**

53) $y = 2x$ 54) $y = -4x + 8$

55) $y = 2\sqrt{x+3}$ 56) $y = \frac{1}{x} - 3$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثّل دالةً أم لا. **57-60 انظر ملحق الإجابات.**

57) $f(x) = |x| + 6$ 58) $f(x) = x^3$

59) $f(x) = -\frac{3}{x+6}$ 60) $f(x) = x^3 - 4x^2$

مثال 9

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = x^3 - 9$.

بدّل مكاني x, y لتحصل على المعادلة $x = y^3 - 9$ ، ثم حل بالنسبة إلى y .

$$x = y^3 - 9$$
$$x + 9 = y^3$$
$$\sqrt[3]{x+9} = y$$

أي أن الدالة العكسية هي $y = \sqrt[3]{x+9}$.

تطبيقات ومسائل

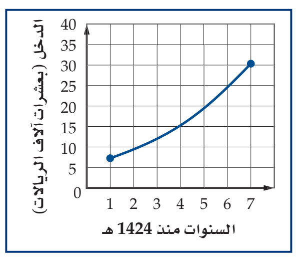
61) **الهواتف المحمولة:** قدمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا على الهواتف المحمولة بحيث يدفع المشترك 40 ريالًا في الشهر. ويتضمن ذلك 500 دقيقة مكالمات نهارية مجانية كحد أقصى خلال الشهر، ويدفع 0.2 ريال عن كل دقيقة نهارية تزيد على 500 دقيقة. (الدرس 1-1)

a) اكتب الدالة $p(x)$ للتكلفة الشهرية لإجراء مكالمات نهارية مدتها x دقيقة. **61a-c انظر الهامش.**

b) كم سيدفع مشترك إذا أجرى مكالمات نهارية مدتها 450 دقيقةً، 550 دقيقةً؟

c) مثّل الدالة $p(x)$ بيانيًّا.

62) **أعمال:** يبين التمثيل البياني أدناه الدخل الذي حققه متجر صغير في الفترة من عام 1425 هـ إلى 1431 هـ (الدرس 1-2)



a) قدِّر دخل المتجر سنة 1428 هـ **إجابة ممكنة: 150 ألف ريال تقريبًا**

b) قدِّر السنة التي حقق فيها المتجر دخلًا مقداره 100000 ريال. **1427 هـ**

63) **رواتب:** بعد 5 سنوات من عمل وليد في إحدى الشركات تقاضى زيادةً على راتبه مقدارها 1500 ريال شهريًّا. هل الدالة التي تمثّل راتب وليد متصلة أم غير متصلة؟ برِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

لا، إجابة ممكنة: في اللحظة التي ازداد فيه راتبه هناك انفصال قفزي في الدالة التي تمثل راتب وليد.

64) **كرة قدم:** يبين الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجلها لاعب في خمسة مواسم كروية. (الدرس 1-4)

السنة	1424	1425	1426	1427	1428
عدد الأهداف	5	36	23	42	42

a) وضح لماذا يمثّل عدد الأهداف عام 1426 هـ قيمةً صغرى محليةً. **انظر الهامش.**

b) إذا كان متوسط معدل التغير لعدد الأهداف بين عامي 1428 و1431هـ يساوي 5 أهداف لكل عام. فكم هدفًا سجل اللاعب عام 1431 هـ؟ **57 هدفًا**

65) **فيزياء:** رُمي حجر أفقيًّا من على حافة جرف، وكان مقدار سرعته معطى بالدالة: $v(t) = \sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ السرعة بالمتر لكل ثانية. مثل بيانيًّا دالة السرعة خلال أول 6 ثوانٍ من رمي الحجر. (الدرس 1-5) **65) انظر الهامش.**

66) **ثقافة مالية:** إذا كان ثمن شريحة الإنترنت 500 ريال. وقدمت إحدى الشركات العرض التالي: خصم 10% من ثمن الشريحة و20 ريالًا عند تفعيلها. كم سيكون ثمن الشريحة بعد تفعيلها. (الدرس 1-6) **430 ريالًا**

67) **قياس:** تذكر أن 1 بوصةً تساوي 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1-7)

a) اكتب دالة $A(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من البوصات المربعة إلى السنتمترات المربعة. **انظر الهامش.**

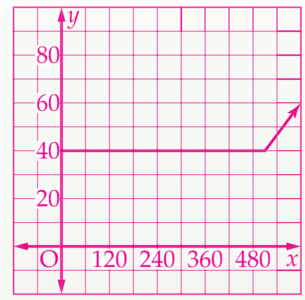
b) أوجد $A^{-1}(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من السنتمترات المربعة إلى البوصات المربعة.

إجابات:

61a)
$$p(x) = \begin{cases} 40 , 0 \le x \le 500 \\ 40 + 0.2(x - 500) , x > 500 \end{cases}$$

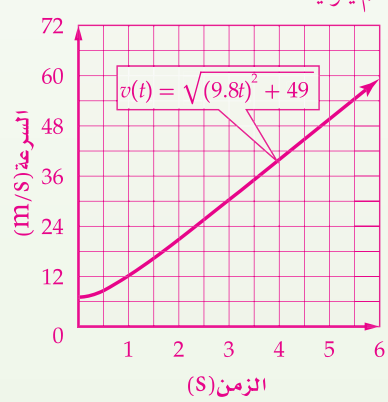
61b) 40 , 50

61c)



64a) إجابة ممكنة: لأن عدد الأهداف يتناقص ثم يتزايد.

65)



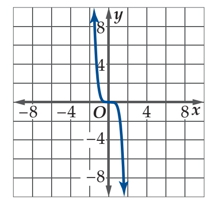
67a) $A(x) = 6.4516x \text{ cm}^2$

67b) $A^{-1}(x) = \frac{1}{6.4516} x \text{ in}^2$

الفصل 1 اختبار الفصل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

1) $x = y^2 - 5$ **ليست دالة**

2)  **دالة**

3) $y = \sqrt{x^2+3}$ **دالة**

4) **موقف سيارات:** يتقاضى موقف للسيارات مبلغ 3 ريالات مقابل كل ساعة أو جزءٍ من الساعة لأول ثلاث ساعات، فإذا زادت المدة عن الثلاث ساعات، فإنه يتقاضى 15 ريالًا عن المدة كلها.

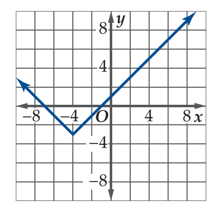
a) اكتب دالة $c(x)$ تمثّل تكلفة وقوف سيارة مدة x من الساعات.

b) أوجد $c(2.5)$.

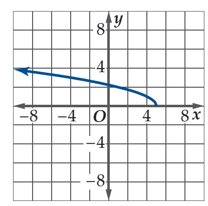
c) عيّن مجال الدالة $c(x)$، وبرر إجابتك.

4a-c) انظر الهامش.

حدد مجال كل دالة من الدالتين الممثلتين أدناه ومداها:

5) 

المجال: $(-\infty, \infty)$، المدى $[-3, \infty)$

6) 

6) المجال: $(-\infty, 5]$، المدى $[0, \infty)$

أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

7) $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$ **$-12; -1, 3$**

8) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ **$0; -3, -1, 0$**

9) **اختيار من متعدد:** أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x؟ **D**

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3 y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 3$، وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة.

10) $f(x) = \begin{cases} 2x & , \ x < 3 \\ 9 - x & , \ x \geq 3 \end{cases}$ **متصلة**

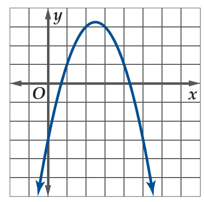
11) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ **غير متصلة، عدم اتصال قابل للإزالة**

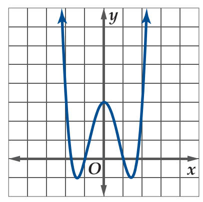
أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدالتين الآتيتين في الفترة $[-2, 6]$:

12) $f(x) = -x^4 + 3x$ **-157**

13) $f(x) = \sqrt{x+3}$ **$\frac{1}{4}$**

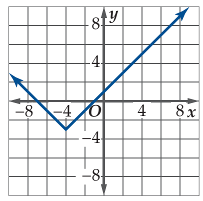
استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة. **14-15) انظر الهامش.**

14) 

15) 

16) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 14 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيِّن نوعها. **انظر الهامش.**

17) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية يمثّلها التمثيل البياني المجاور؟ **C**



A $f(x) = |x-4| - 3$

B $f(x) = |x-4| + 3$

C $f(x) = |x+4| - 3$

D $f(x) = |x+4| + 3$

18) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -(x+3)^3$، ثم مثِّل الدالة $g(x)$ بيانيًّا. **انظر الهامش.**

إذا كانت $f(x) = x - 6$ ، $g(x) = x^2 - 36$، فأوجد كل دالة من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجالها. **19, 20) انظر الهامش.**

19) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

20) $[g \circ f](x)$

21) **درجة الحرارة:** تستعمل معظم دول العالم الدرجات السيليزية C لقياس درجة الحرارة. والمعادلة التي تربط بين درجات الحرارة السيليزية C والفهرنهايتية F هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) اكتب C كدالة بالنسبة إلى F. **$C = \frac{5}{9}(F - 32)$**

b) أوجد دالتين f و g بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$. **$g(x) = x - 32, f(x) = \frac{5}{9}x$**

بيّن ما إذا كان للدالة f دالة عكسية أم لا في كل مما يأتي، أوجدها في حالة وجودها، وحدّد أية قيود على مجالها. **22-25) انظر الهامش.**

22) $f(x) = (x-2)^3$

23) $f(x) = \frac{x+3}{x-8}$

24) $f(x) = \sqrt{4-x}$

25) $f(x) = x^2 - 16$

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (15–23).

إجابات:

4a) $c(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq 3 \\ 15 & x > 3 \end{cases}$

4b) 9 ريالات

4c) المجال: $[0, 24]$

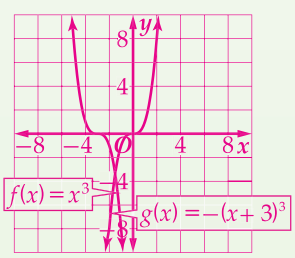
إجابة ممكنة: يجب أن يكون عدد الساعات أكبر من صفر وأقل من 24 ساعة.

14) f متزايدة على $(-\infty, 2.5)$، ومتناقصة على $(2.5, \infty)$.

15) f متناقصة على $(-\infty, -1.5)$، ومتزايدة على $(-1.5, 0)$، ثم متناقصة على $(0, 1.5)$ ومتزايدة على $(1.5, \infty)$.

16) 2.5، عظمى مطلقة.

18) $f(x) = x^3$



19) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x+6}$؛

المجال: $\{x \mid x \neq \pm 6 \text{ و } x \in R\}$

20) $[g \circ f](x) = x^2 - 12x$؛

المجال: $\{x \mid x \in R\}$.

22) نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

23) نعم؛ $f^{-1}(x) = \frac{8x+3}{x-1}, x \neq 1$

24) نعم؛ $f^{-1}(x) = 4 - x^2, x \geq 0$

25) لا يوجد.

مخطط المعالجة

المستوى 1: ضمن المتوسط	المستوى 2: دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	**إذا** أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصادر الآتية:	**فاختر** المصدر الآتي:
كتاب الطالب: الدروس 1-1، 1-2، 1-3، 1-4، 1-5، 1-6، 1-7	زيارة الموقع www.obeikaneducation.com
دليل المعلم: مشروع الفصل، ص (8)	
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

الدرس 1-1 ، ص (96 - 15)

21a) $\frac{-13}{79}$

21b) $\frac{16t+11}{48t^2+20t+1}$

21c) $\frac{-8a+23}{12a^2-46a+43}$

22a) 12

22b) $\frac{375x^3}{25x^2+5x-4}$

22c) $\frac{-192b^3+1152b^2-2304b+1536}{16b^2-68b+68}$

26) $\{x \mid x \neq -4, x \neq -1, x \in \mathrm{R}\}$
أو $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$

27) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 8, x \in \mathrm{R}\}$
أو $(-\infty, -5) \cup (-5, 8) \cup (8, \infty)$

28) $\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$ أو $(-\infty, \infty)$

29) $\{x \mid -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}, x \in \mathrm{R}\}$ أو $\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$

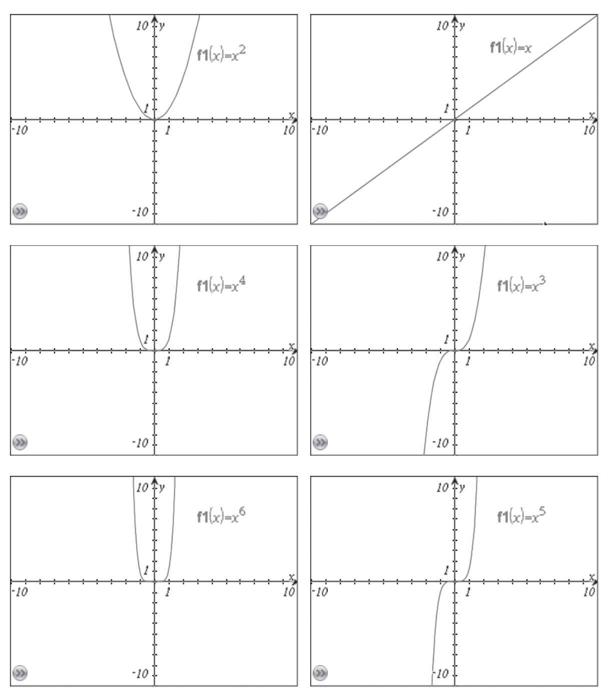
30) $\{x \mid x > 0.25, x \in \mathrm{R}\}$ أو $(0.25, \infty)$

31) $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0, x \in \mathrm{R}\}$
أو $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$

50) لا؛ إجابة ممكنة: لأن كل قيمة من قيم المدى ترتبط بقيمتين من المجال، ولحل المعادلة بالنسبة إلى y يكون هناك قيمتان موجبة وسالبة، والقيمة المطلقة لا تعطي قيمة y .

51) نعم؛ إجابة ممكنة: لأن كل قيمة في المدى ترتبط بقيمة واحدة من المجال، لذا تمثل دالة.

52a)



52b)

n	المدى
1	$(-\infty, \infty)$
2	$[0, \infty)$
3	$(-\infty, \infty)$
4	$[0, \infty)$
5	$(-\infty, \infty)$
6	$[0, \infty)$

52c) إجابة ممكنة: يكون المدى $[0, \infty)$ إذا كانت n زوجية.

52d) إجابة ممكنة: يكون المدى $(-\infty, \infty)$ إذا كانت n فردية.

53) سلمان, إجابة ممكنة: المجال هو
$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$ أو
$\{x \mid x \neq -2, x = 2, x \in \mathrm{R}\}$

54) $(-\infty,-3) \cup (-3,-1) \cup (-1, 5) \cup (5,\infty)$ أو
$\{x \mid x \neq -3, x \neq -1, x \neq 5, x \in \mathrm{R}\}$؛
إجابة ممكنة: أفضل طريقة الصفة المميزة للمجموعة لأنه بدلًا من كتابة أربع فترات تقع ضمنها x نكتب ثلاث قيم غير ممكنة لـِ x، والمجموعة التي يمكن أخذ x منها، أي أنه عند تحديد قيمة ما على فترات متعددة، تكون الصفة المميزة للمجموعة أكثر فعالية.

59) إجابة ممكنة: تكون العلاقة دالة إذا ارتبطت كل قيمة x من المجال (مدخلة) بقيمة y واحدة فقط من المدى (مخرجة).

60) إجابة ممكنة: إذا ارتبط كل عنصر من المجال (إحداثي x) في مجموعة الأزواج المرتبة بعنصر واحد من المدى
(إحداثي y مختلف) تكون العلاقة دالة.

61) إجابة ممكنة: إذا ارتبطت كل قيمة لـِ x في الجدول بقيمة واحدة مختلفة لـِ y تكون العلاقة دالة.

62) إجابة ممكنة: إذا رسم خط رأسي عند أي قيمة x على التمثيل البياني وقطعه في نقطة واحدة تكون العلاقة دالة (اختبار الخط الرأسي)

63) إجابة ممكنة: تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة.

الدرس 2-1 ، ص (27 - 24)

11) لا يوجد مقطع y، صفر الدالة هو 1 .

$$0 = \sqrt{x-1}$$
$$(0)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$0 = x - 1$$
$$x = 1$$

12) المقطع y، هو 0 ،
أصفار الدالة $-1, 0, \frac{3}{2}$؛

$$0 = 2x^3 - x^2 - 3x$$
$$0 = x(2x^2 - x - 3)$$
$$0 = x(2x-3)(x+1)$$

$x = 0$ أو $2x - 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$

$x = 0$ أو $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -1$

13) المقطع y هو 0 ، صفر الدالة هو 0 .

$$0 = \sqrt[3]{x}$$
$$(0)^3 = (\sqrt[3]{x})^3$$
$$0 = x$$

14) المقطع y هو -2 ، صفرا الدالة هما: $-\frac{1}{2}$ وَ $\frac{2}{3}$.

$$0 = 6x^2 - x - 2$$

$$0 = (2x + 1)(3x - 2)$$

$2x + 1 = 0$ أو $3x - 2 = 0$

$2x = -1$ أو $3x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{2}{3}$

17)

x	y	(x, y)
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
2	$-\sqrt{3}$	$(2, -\sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل. وبما أن $x^2 + 4(-y)^2 = 16$ ، تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور x .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$\sqrt{3}$	$(-2, \sqrt{3})$
-1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(-1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

بما أن $(-x)^2 + 4y^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
-3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$-\sqrt{3}$	$(-2, -\sqrt{3})$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
0	2	$(0, 2)$

بما أن $(-x)^2 + 4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

18) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x

x	y	(x, y)
1	2	$(1, 2)$
1	-2	$(1, -2)$
2	$\sqrt{5}$	$(2, \sqrt{5})$
2	$-\sqrt{5}$	$(2, -\sqrt{5})$
3	$\sqrt{6}$	$(3, \sqrt{6})$
3	$-\sqrt{6}$	$(3, -\sqrt{6})$

بما أن $x = (-y)^2 - 3$ تكافئ $x = y^2 - 3$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

19) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-4	4	$(-4, 4)$
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
2	-2	$(2, -2)$
3	-3	$(3, -3)$
4	-4	$(4, -4)$

بما أن $-x = -(-y)$ تكافئ $x = -y$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

20) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ، ومحور y ، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, -\frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9x^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25y^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$. فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{-2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{-\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

21) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-4	-16	$(-4, -16)$
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	$-\frac{1}{4}$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$
1	$\frac{1}{4}$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$
2	2	$(2, 2)$
4	16	$(4, 16)$

بما أن $-y = \frac{(-x)^3}{4}$ تكافئ $y = \frac{x^3}{4}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

22) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-10	1	$(-10, 1)$
-5	2	$(-5, 2)$
-1	10	$(-1, 10)$
1	-10	$(1, -10)$
5	-2	$(5, -2)$
10	-1	$(10, -1)$

بما أن $-y = -\frac{10}{(-x)}$ تكافئ $y = -\frac{10}{x}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل .

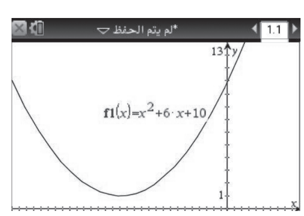
23) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y

x	y	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
-2	-16	$(-2, -16)$
-1	-7	$(-1, -7)$
1	-7	$(1, -7)$
2	-16	$(2, -16)$
3	9	$(3, 9)$

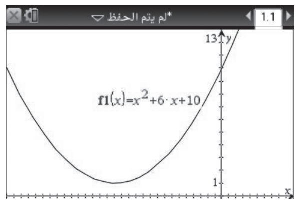
بما أن $y = (-x)^4 - 8(-x)^2$ تكافئ $y = x^4 - 8x^2$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

24) لا يوجد تماثل.

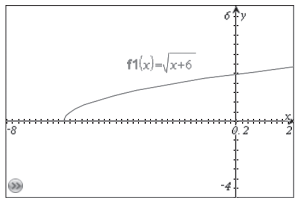
25) ليست فردية وليست زوجية



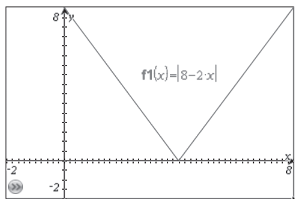
26) ليست فردية وليست زوجية



27) ليست فردية وليست زوجية

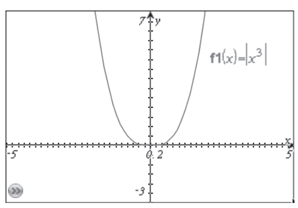


28) ليست فردية وليست زوجية

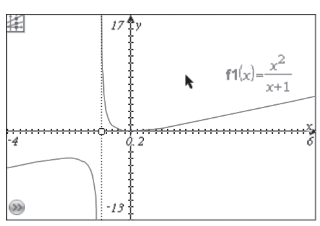


29) الدالة زوجية، ومتماثلة حول محور y

$$f(-x) = |(-x)^3| = |-x^3| = f(x)$$

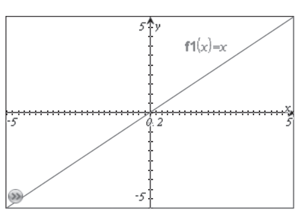


30) ليست فردية وليست زوجية

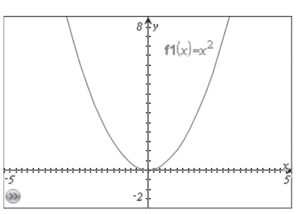


33a)

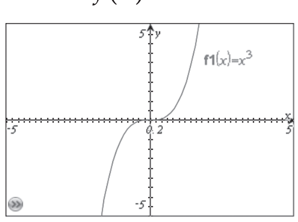
$f(x) = x$



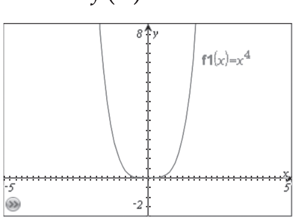
$f(x) = x^2$



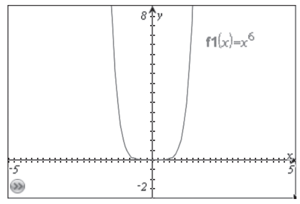
$f(x) = x^3$

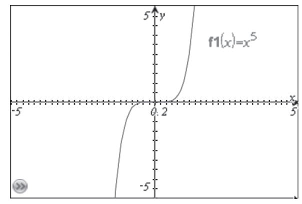


$f(x) = x^4$



$f(x)=x^6$ $\qquad$ $f(x)=x^5$





(33b $f(x)=x$: المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\in R\}$

$f(x)=x^2$: المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\geq 0, y\in R\}$

$f(x)=x^3$: المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\in R\}$

$f(x)=x^4$: المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\geq 0, y\in R\}$

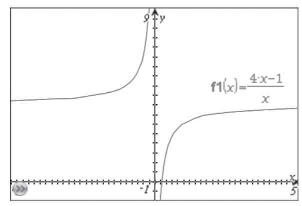
$f(x)=x^5$: المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\in R\}$

$f(x)=x^6$: المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\geq 0, y\in R\}$

(33c دوال $f(x)=x, f(x)=x^3, f(x)=x^5$ متماثلة حول نقطة الأصل.
دوال $f(x)=x^2, f(x)=x^4, f(x)=x^6$ متماثلة حول المحور y.

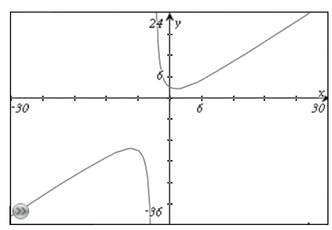
(33d المجال $=\{x \mid x\in R\}$، المدى $=\{y \mid y\in R\}$؛ $f(x)=x^{35}$
دالة فردية ، لذا فهي متماثلة حول نقطة الأصل.

(35



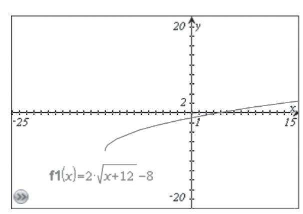
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-1}{x} \\ 0 &= \frac{4x-1}{x} \\ 4x-1 &= 0 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

(36



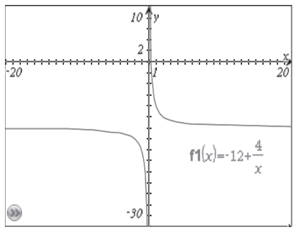
لا توجد أصفار.

(37



$$\begin{aligned} h(x) &= 2\sqrt{x+12}-8 \\ 0 &= 2\sqrt{x+12}-8 \\ 8 &= 2\sqrt{x+12} \\ 4 &= \sqrt{x+12} \\ 16 &= x+12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

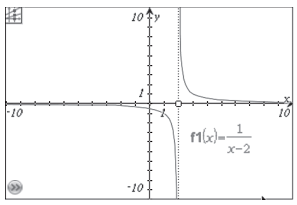
(38



$$\begin{aligned} g(x) &= -12+\frac{4}{x} \\ \frac{4}{x}+-12 &= 0 \\ \frac{4}{x} &= 12 \\ 12x &= 4 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(43b إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تقترب الدالة من $-\infty$.
وعندما تقترب x من 2 من اليمين تقترب الدالة من ∞.

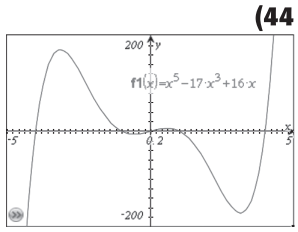
(43c



إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تتناقص قيم الدالة بلا حدود. وعندما تقترب x من 2 من اليمين تتزايد قيم الدالة بلا حدود.

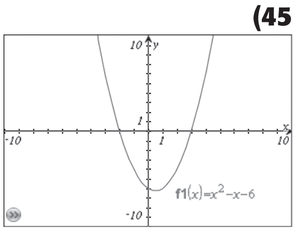
(43d إجابة ممكنة: عندما تتزايد x بشكل كبير، وتكون $x > 3$ ، يتزايد مقام الكسر بشكل كبير. وهذا يؤدي إلى تناقص قيمة الكسر، لكنه لا يصل إلى الصفر، وعليه لا يقطع المنحنى المحور x . وهذا ينطبق على قيم x التي تتناقص بمعدلات كبيرة عندما تكون $x < -1$. وعندما تكون x سالبة تكون القيمة سالبة ، ولكنها لا تصل إلى الصفر. عندما تقترب x من 2 يبدأ الفرق d بين x وَ 2 بالتناقص ، وأما عندما تكون $-1 < d < 1$ ، فيصبح المقام أصغر من البسط، مما يجعل قيمة الكسر كبيرة، وإذا كان الفرق موجبًا فستؤول قيمة الكسر إلى ما لانهاية ، أما إذا كان الفرق سالبًا فستؤول قيمة الكسر إلى سالب ما لانهاية. الدالة غير معرفة عند 2؛ لأن الفرق في المقام لا يكون صفرًا.

(44



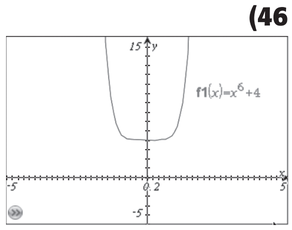
تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية

(45



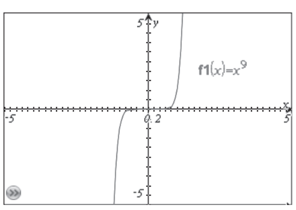
لا يوجد تماثل؛ ليست فردية ولا زوجية

(46



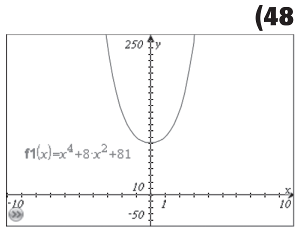
تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

(47



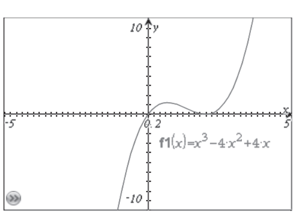
تماثل حول نقطة الأصل؛ الدالة فردية

(48



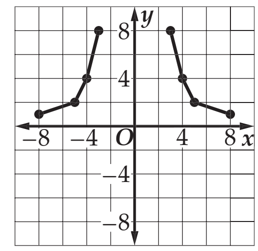
تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

(49

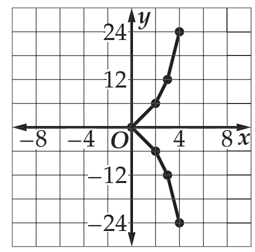


لا يوجد تماثل، ليست فردية وليست زوجية

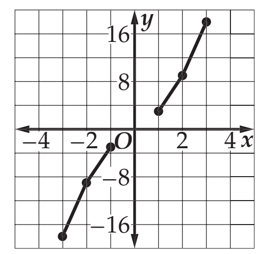
50)



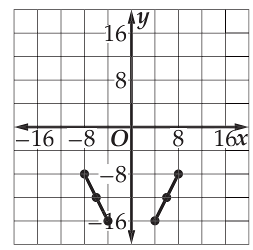
51)



52)

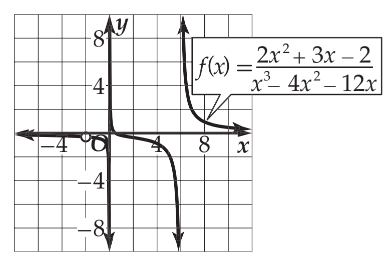


53)



54 يمكن أن تقطع الدالة المحور x أكثر من مقطع (أكثر من صفر)؛ لأن قيمة x لا تعتمد على قيمة y. في حين قيمة y تعتمد على قيمة x، ويجب أن ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y. إذا قطعت العلاقة المحور y أكثر من مقطع فإنها لا تحقق اختبار الخط الرأسي، ولا تكون دالة.

55 المجال = $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 6) \cup (6, \infty)$ ،
المدى = $\{y \mid y \in R\}$



من التمثيل البياني يمكن أن تكون x أي عدد حقيقي ما عدا $-2, 0, 6$ وتكون y أي عدد حقيقي.

56 خطأ. إجابة ممكنة: إذا كانت $n = 0$، يكون المدى $\{y \mid y = 0\}$. وإذا كانت n سالبة يكون المدى $\{y \mid y \leq 0, y \in R\}$. وعليه يكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$ عندما تكون n موجبة فقط.

57 صحيح. إجابة ممكنة: إذا كانت $n = 0$، فإن المدى $\{y \mid y = 0\}$. وإذا كانت n سالبة تكون الدالة معرفة في المجال $\{x \mid x \leq 0, x \in R\}$، ويكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$. وكذلك، إذا كانت n موجبة تكون الدالة معرفة في المجال $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$ ويكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$.

58 خطأ؛ $y = x^3$. دالة فردية، صورة النقطة $(2,8)$ بانعكاس في المستقيم $y = -x$ هي النقطة $(-8, -2)$ و ليست النقطة $(-2, 8)$.

59 صحيح. إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا زوجيًا فإن الدالة تُدوّر بمضاعفات $360°$، وهذا يعيد الدالة إلى مكانها الأصلي. وإذا كانت n عددًا فرديًا فإن الدالة تُدوّر بمضاعفات $180°$ حول نقطة الأصل، وهذا مكافئ لانعكاس حول المحور x الذي يعمل على عكس إشارات y، و الذي يبقى على الدالة زوجية. فمثلًا، في الدالة الزوجية $f(x) = f(-x)$ وبعد دورانها بزاوية مقدارها $180°$ تصبح $f(-x) = -f(x)$.

60)

دالة فردية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = a[-(-x)]$	تعريف الدالة $b(x)$
$= a(x)$	$-(-x) = x$
$= -a(-x)$	لأن $a(x)$ فردية
$= -b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

61)

دالة فردية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = -a(-x)$	تعريف الدالة $b(x)$
$= -[-a(x)]$	لأن $a(x)$ فردية
$= a(x)$	لأن $-(-x) = x$
$= -b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

62)

دالة زوجية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = [a(-x)]^2$	تعريف الدالة $b(x)$
$= [-a(x)]^2$	لأن $a(x)$ فردية
$= (-1)^2\,[a(x)]^2$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$
$= [a(x)]^2$	$(-1)^2 = 1$
$= b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

63)

دالة زوجية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = a(\lvert -x \rvert)$	تعريف الدالة $b(x)$
$= a(x)$	لأن $\lvert -x \rvert = x$
$= a(\lvert x \rvert)$	لأن $\lvert x \rvert = x$
$= b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

64)

دالة فردية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = [a(-x)]^3$	تعريف الدالة $b(x)$
$= [-a(x)]^3$	لأن $a(x)$ فردية
$= -[a(x)]^3$	لأن $(-1)^3 = -1$
$= -b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

65 أحيانًا يمثل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور y يمثل دالة أحيانًا ومثله منحنى العلاقة المتماثل حول المستقيم $x = 4$؛ لأن المستقيم $x = 4$ هو إزاحة للمحور y بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

66 لا يمثل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور x لا يمثل دالة ومثله المنحنى المتماثل حول المستقيم $y = 2$؛ لأن المستقيم $y = 2$ هو إزاحة للمحور x بمقدار وحدتين إلى أعلى.

67 لا يمثل دالة. إجابة ممكنة: منحى العلاقة المتماثل حول المحور x، لا يمثل دالة.

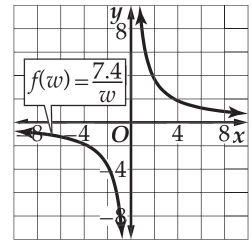
68 إجابة ممكنة: إذا كانت العلاقة متماثلة حول المحور x فإنه توجد نقطتان على خط رأسي واحد وعلى بعدين متساويين من المحور x. وهذا يعني أن عنصرًا من مجال الدالة ارتبط بعنصرين من المدى، وهذا يخالف تعريف الدالة.

الدرس 1-3، ص (37 - 35)

8a نعم متصلة؛ إجابة ممكنة: بما أن $f(4) = \dfrac{7.4}{0.4} = 18.5$؛ فإن الدالة معرفة عند $x = 0.4$. لذا فإن $\lim\limits_{x \to 4} f(w) = 18.5$.

8b غير متصلة؛ للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $w = 0$. إجابة ممكنة: بما أن $f(0)$ غير موجودة، فإن $f(w)$ غير متصلة عند $w = 0$، و $\lim\limits_{x \to 0} f(w)$ غير موجودة لأن $f(w)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليسار، وتتزايد بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليمين. وعليه فإن للدالة عدم اتصال لانهائي عند $w = 0$.

(8c



(15 يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	-10000	-1000	0	1000	10,000
$f(x)$	$4 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{12}$	0	$4 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{16}$

(16 يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$.

x	-10000	-1000	0	1000	10000
$f(x)$	$5 \cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^{9}$	-1	$-5 \cdot 10^{9}$	$-5 \cdot 10^{12}$

(17 يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	$-10,000$	-1000	0	1000	10,000
$f(x)$	-9995	-995	-0.3333	1005	10,005

(18 يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -4$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -4$ عندما $x \to \infty$.

x	$-10,000$	-1000	0	1000	10,000
$f(x)$	-3.9981	-3.9811	-0.8333	-4.0191	-4.0019

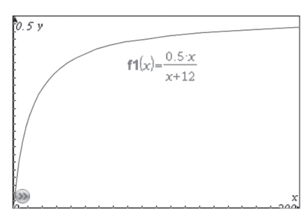
(19 يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	$-10,000$	-1000	0	1000	10,000
$f(x)$	-5000	-500	غير معرفة	499.7	4999.7

(20 يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -2$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -2$ عندما $x \to \infty$.

x	-1000	-100	-10	0	10	100	1000
$f(x)$	-1.99999	-1.9999	-1.997	-5	-1.98	-1.9999	-1.99999

(21a



x	0	10	100	1000	10,000
$R(x)$	0	0.2273	0.4464	0.4941	0.4994

(21b إجابة ممكنة: يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز العامل المساعد فيقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5.

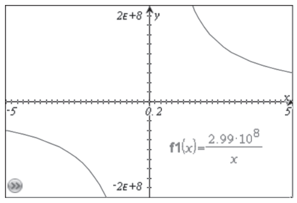
(22 0؛ إجابة ممكنة: عندما $u \to \infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $f(u)$ تقترب من 0.

(23 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0.

(24 0 ؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $f(x)$ تقترب من 0.

(25 0 ؛ إجابة ممكنة: عندما $r \to \infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $h(r)$ تقترب من 0.

(29a

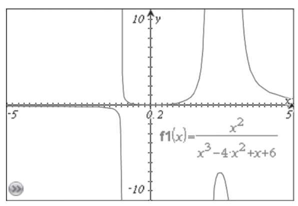


(29b

x	$f(x)$
$-10,000$	-3.10^4
-1000	-3.10^5
-100	-3.10^6
0	غير معرفة
100	3.10^6
1000	3.10^5
10,000	3.10^4

يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$، و $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

(30

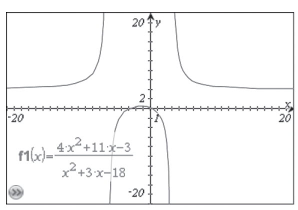


غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -1, x = 2, x = 3$؛ سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

الأصفار: $x = 0$

(31



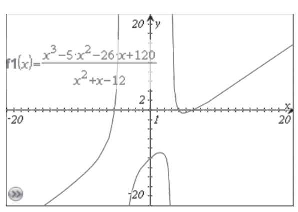
غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -6$ ؛ سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = 4$ ؛

$\lim_{x \to \infty} h(x) = 4$ ؛

الأصفار: $x = -3, \ \frac{1}{4}$

(32



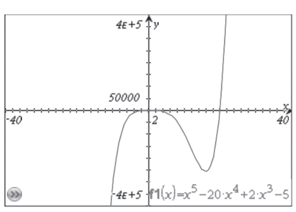
غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -4$. $x = 3$؛ سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty;$

الأصفار: $x = -5, 4, 6$

(33



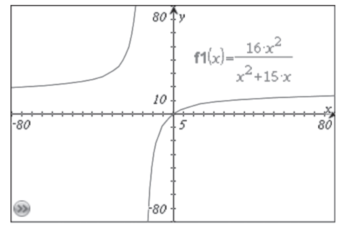
سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

x	$f(x)$
-10000	$-1 \cdot 10^{20}$
-1000	$-1 \cdot 10^{15}$
-100	$-1 \cdot 10^{10}$
0	-5
100	$8 \cdot 10^{9}$
1000	$9.8 \cdot 10^{14}$
10000	$1 \cdot 10^{20}$

34)



x	$f(x)$
−10,000	16.024
−1000	16.244
−100	18.824
0	غير معرفة
100	13.913
1000	15.764
10,000	15.976

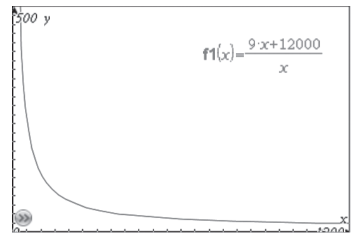
سلوك نهاية الدالة :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 16$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 16$

35a) $f(n) = \frac{9n + 12000}{n}$

35b)



35c) 9 ريالات؛ إجابة ممكنة : عندما تؤول n إلى ∞، فإن $f(n)$ تؤول إلى 9. لذا يكون معدل تكلفة القميص الواحد 9 ريالات عندما يتزايد عدد القمصان المبيعة بشكل كبير.

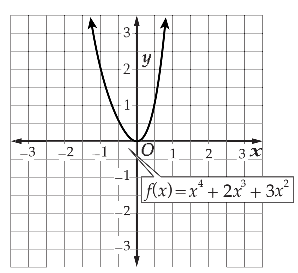
36a) $f_1(x) = \frac{3x^3 + 2}{x^3 + 4}; f_2(x) = \frac{-x^3 + 5}{x^3 + 7}; f_3(x) = \frac{9x^3 - 6}{x^3 + 8}$

36b)

	$f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$					
	a	b	c	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$a > c$	6	−5	3	1	2	2
$a < c$	3	4	12	13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$a = c$	7	1	7	−4	1	1

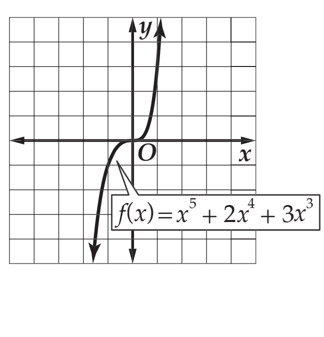
36c) إجابة ممكنة: نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من كل من ∞، و $-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$.

37a)



إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا زوجيًّا، فإن طرفي المنحنى يقتربان من ∞.

37b)

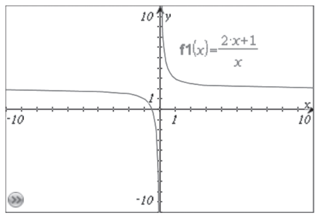


إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا فرديًّا، فإن طرف التمثيل البياني من اليسار يؤول إلى $-\infty$ وطرف المنحنى من اليمين يؤول إلى ∞.

45) إجابة ممكنة : للدالة $f(x) = \frac{x(x+3)}{x}$ عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 0$. وعدم الاتصال هذا يمكن إزالته بالقسمة على x. فيصبح التمثيل البياني للدالة شبيهًا بالتمثيل البياني للدالة $y = x + 3$، وعدم الاتصال عند 0 = x غير ظاهر على الرغم من أنه موجود. الدالة $f(x)$ تختلف عن الدالة $g(x) = x + 3$ لأن $f(x)$ غير معرفة $x = 0$ وتصبح الدالة المتصلة هي

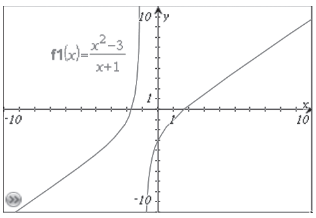
$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & , x \neq 0 \\ 3 & , x = 0 \end{cases}$$

46) $x = -\frac{1}{2}$



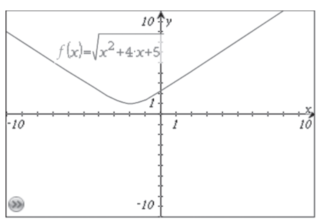
$$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$$
$$0 = \frac{2x + 1}{x}$$
$$0 = 2x + 1$$
$$-1 = 2x$$
$$-\frac{1}{2} = x$$

47) $x = -1.732, x = 1.732$

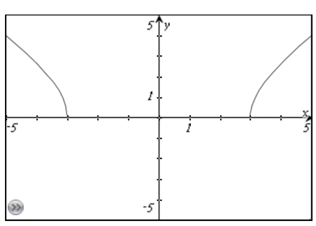


$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$
$$0 = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$
$$0 = x^2 - 3$$
$$3 = x^2$$
$x = \pm\sqrt{3}$ أو
$$x = \pm 1.732$$

48) لا يوجد أصفار.

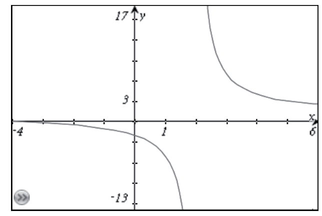


55) $f(-x) = \sqrt{(-x^2) - 9}$
$= \sqrt{x^2 - 9}$
$= f(x)$



الدالة زوجية، ومنحناها متماثل حول المحور y.

56) $f(-x)=\dfrac{-x+4}{-x-2}\neq f(x)$



الدالة ليست زوجية وليست فردية.

الدرس 1-4 ، ص (46 - 39)

1A) f متناقصة على $(-\infty, 2)$ ومتزايدة على $(2, \infty)$

$(-\infty, 2)$

x	-8	-6	-4	-2	0	2
$f(x)$	197	125	69	29	5	-3

$(2, \infty)$

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	-3	5	29	69	125	197

1B) h متزايدة على $(-\infty, -3)$ وثابتة على $(-3, \infty)$

$(-\infty, -3)$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3
$f(x)$	-13	-10	-7	-4	-1	2

$(-3, \infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	2	2	2

6) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0.25 عند $x=-0.5$ و 0.5، وقيمة صغرى محلية مقدارها -9 عند $x=2.5$، ولها قيمة صغرى محلية عند $x=0$ ومقدارها 0.

7) واضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 3 عند $x=-1.5$, 1.5، ولها قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x=0$.

8) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -60 عند $x=-2.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 60 عند $x=2.5$.

9) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1100 عند $x=3.5$، ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها -1300 عند $x=-3.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x=0$.

10) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x=1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x=2$.

11) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -4 عند $x=1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 4 عند $x=-1$، ولها قيمة عظمى مطلقة مقدارها 22 عند $x=4$.

12) عظمى محلية عند $(1.08, 0.04)$؛ وصغرى محلية عند $(-1.08, -10.04)$.

13) صغرى مطلقة عند $(-1.38, -7.08)$.

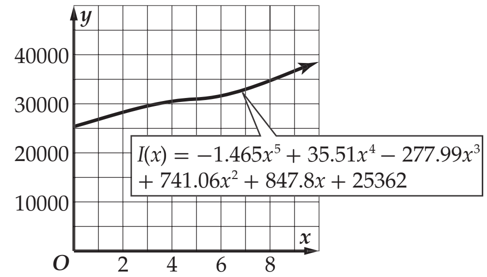
14) عظمى محلية عند $(1.11, 2.12)$؛ صغرى محلية عند $(-0.17, -1.08)$.

15) عظمى محلية عند $(0.41, 0.30)$؛ صغرى محلية عند $(1.62, -7.85)$؛ صغرى مطلقة عند $(-1.64, -11.12)$.

16) عظمى محلية عند $(-3.72, 14.23)$، $(2.49, 1.45)$؛ صغرى محلية عند $(5.90, -6.83)$، $(0.32, -0.11)$.

17) عظمى محلية عند $(-1.66, 3.43)$؛ صغرى محلية عند $(0.93, -3.82)$.

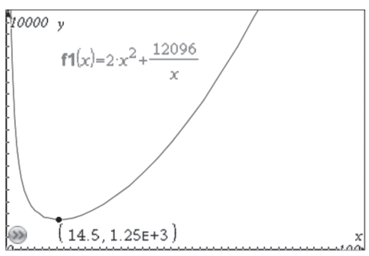
28a)



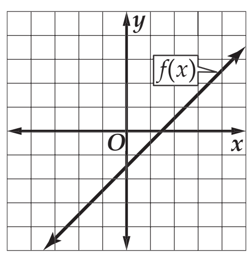
28b) 1280.93 ريالًا؛ إجابة ممكنة : متوسط معدّل التغير في دخل الفرد من عام 1423 إلى عام 1430 لهذا الشخص 1280.90 ريالًا.

28c) متوسط التغير أقل ما يمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424 ومقداره 826.43 ريالًا، وكان أعلى ما يمكن في الفترة من عام 1423 إلى عام 1427 ومقداره 1711.44 ريالًا.

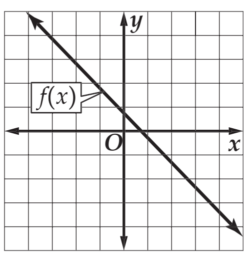
29) $14.5\text{ ft}\times 14.5\text{ ft}\times 14.5\text{ ft}$؛ إجابة ممكنة: الدالة التي تعطي مساحة السطح الخارجي للصندوق بدلالة طول ضلع القاعدة هي $f(w)=2w^2+\dfrac{12.096}{w}$. يظهر تمثيل الدالة أن القيمة الصغرى المطلقة تكون عندما $w=14.5\text{ ft}$.



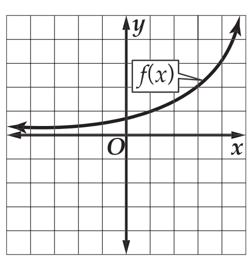
30) إجابة ممكنة:



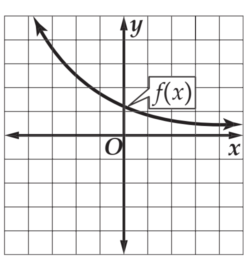
31) إجابة ممكنة:



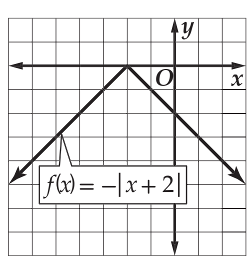
32) إجابة ممكنة:



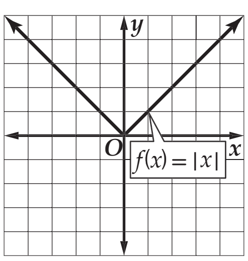
33) إجابة ممكنة:



34) إجابة ممكنة:

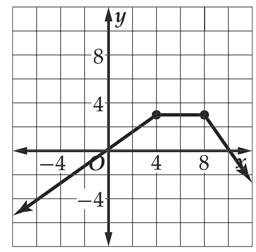


35) إجابة ممكنة:

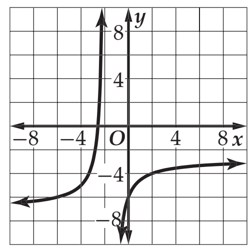


41) إجابة ممكنة: أحد أسباب الاختلاف في متوسط معدّل التغير هو أن عبدالله قد واجهته إشارات ضوئية في أثناء مسيره، مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة، وسبب آخر أنه سلك طرقًا فرعية في الساعة الأولى من الرحلة قبل أن يدخل طريقًا سريعًا في الساعات الثلاث اللاحقة. الفترتان اللتان يبدو فيهما أنه لم يتحرك قد تكونان فترتي استراحة أو لتناول الطعام، وربما كان سبب التوقف وجود حادث أدى إلى توقف حركة السير.

42) إجابة ممكنة:

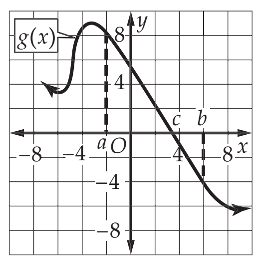


43) إجابة ممكنة:

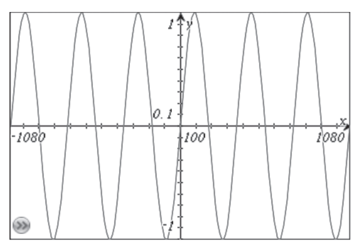


44) إجابة ممكنة: بما أن $f(c)$ قيمة صغرى محلية فإن $f(a)$ أكبر من $f(c)$ عندما a أصغر من c. وعليه إذا تزايدت قيم x من a إلى c فإن قيم الدالة تتناقص.

45) إجابة ممكنة: بما أن $g(a)$ موجبة، و $g(b)$ سالبة، و g متصلة ، فإنه عند إحدى النقاط c بين a و b يجب أن يقطع منحنى g المحور x ويكون $g(c) = 0$؛ أي أن c صفر للدالة.



46) توجد قيمة عظمى محلية عند عدد لا نهائي من قيم x . وكذلك الحال بالنسبة للقيمة الصغرى المحلية. القيمة العظمى المحلية تساوي 1. وتكون عند $\{x \mid x = 90 + 360n, n \in Z\}$ ، والقيمة الصغرى المحلية تساوي -1 ، وتكون عند $\{x | x = 270 + 360n, n \in Z\}$

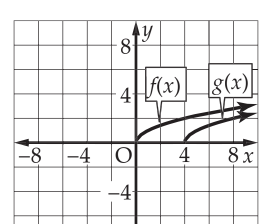


47) إجابة ممكنة: عندما تكون الدالة ثابتة على فترة فإن قيم y متساوية، لذا فإن قيم y لنقاط القاطع متساوية ، ويكون القاطع في هذه الحالة أفقيًا وميله 0.

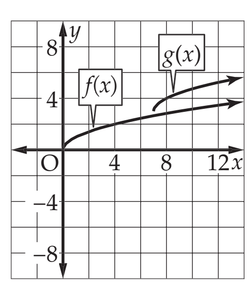
48) إجابة ممكنة: عندما تكون الدالة متزايدة على فترة يكون متوسط معدّل التغير موجبًا، وإذا كانت الدالة متناقصة على فترة يكون متوسط معدّل التغير سالبًا ، وإذا كانت الدالة ثابتة على فترة يكون متوسط التغير صفرًا.

الدرس 5-1 ، ص (57 - 55)

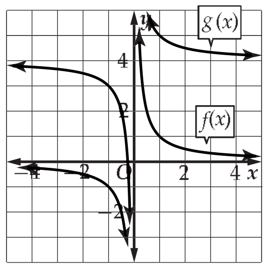
7)



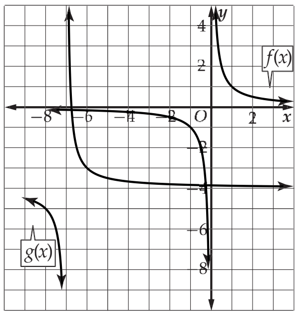
8)



9)



10)



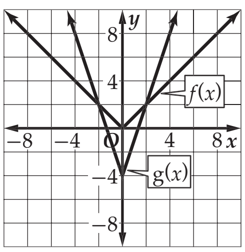
11) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار، $g(x) = [x + 3]$.

12) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بانعكاس حول المحور y ، يتبعه انسحاب مقداره 5 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = [-x + 5]$.

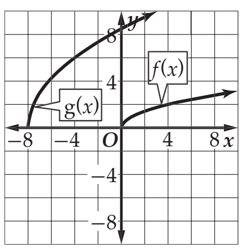
13) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = |x - 8|$.

14) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أسفل ؛ $g(x) = |x - 1| - 2$.

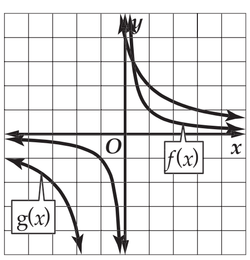
15) $f(x) = |x|$؛ منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار 4 وحدات إلى أسفل للدالة $f(x)$.



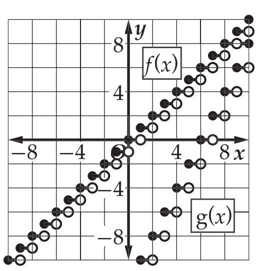
16) $f(x) = \sqrt{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



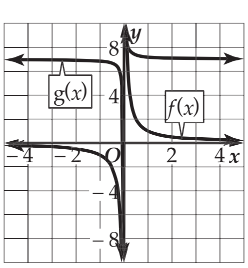
17) $f(x) = \frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



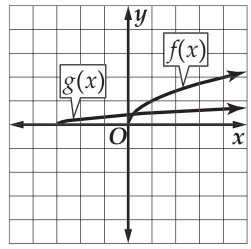
18) الدالة الرئيسية هي $f(x) = [x]$، ومنحنى الدالة $g(x)$ هو انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = [x]$ بمقدار 6 وحدات إلى اليمين، ثم توسع رأسي.



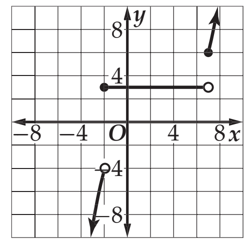
19) $f(x) = \frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى لمنحنى $f(x)$.



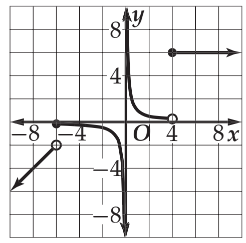
20) $f(x) = \sqrt{x}$ ؛ منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



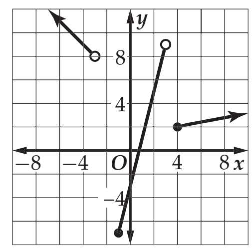
21)



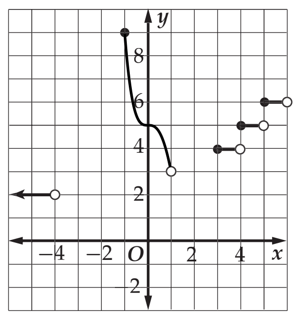
22)



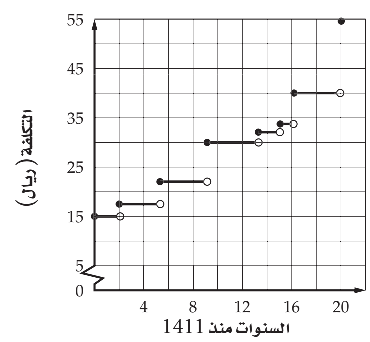
23)



24



25)

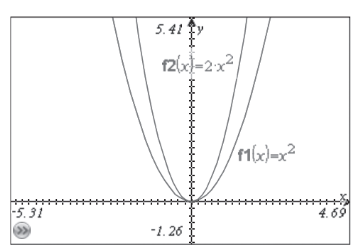


26a) منحنى $c(x)$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، يتبعه انسحاب مقداره 20 وحدة إلى أعلى.

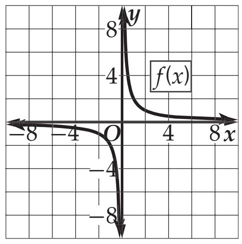
26b) $c(x) = 30 + 0.1[x]$

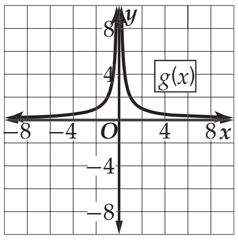
26c) نعم ؛ بعد 100 دقيقة

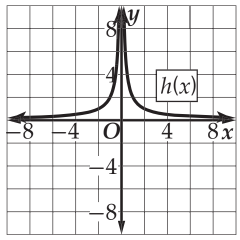
27b)



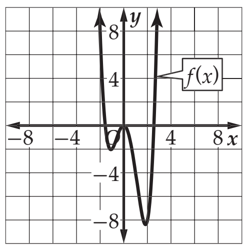
28)

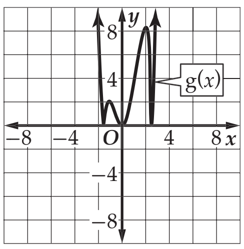


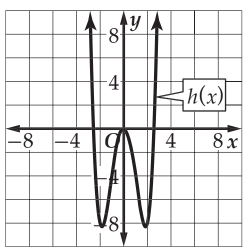




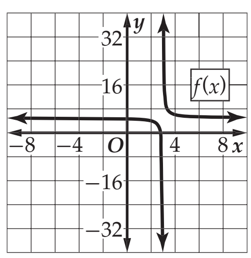
29)

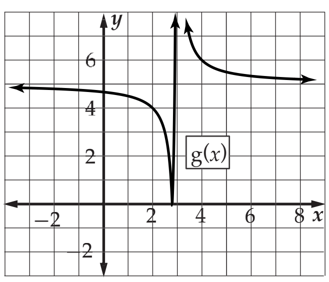


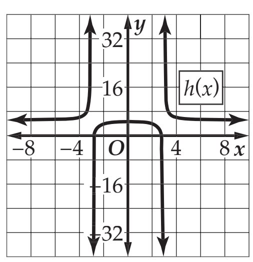




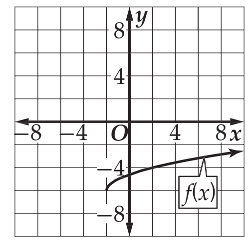
30)

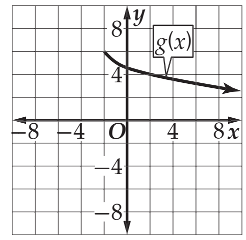


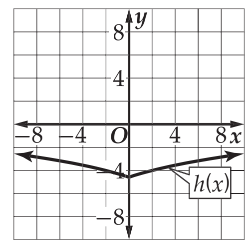




(31







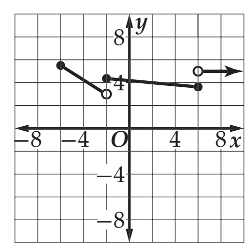
34) انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل.

35) انسحاب بمقدار 10 وحدات إلى أعلى.

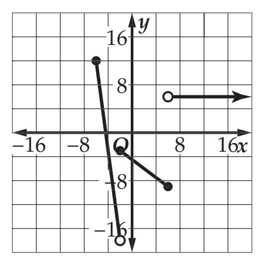
36) توسُّع رأسي، يتبعه انسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار، ثم انسحاب مقداره 7 وحدات إلى أسفل.

37) توسُّع رأسي يتبعه انسحاب مقداره $\frac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار، ثم انسحاب مقداره $\frac{7}{6}$ وحدة إلى أسفل.

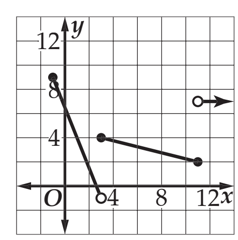
(41



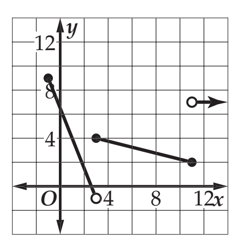
(42



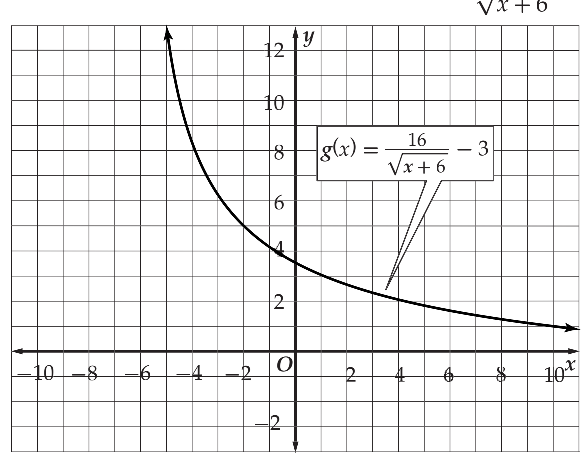
(43



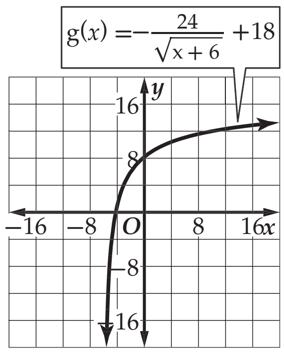
(44



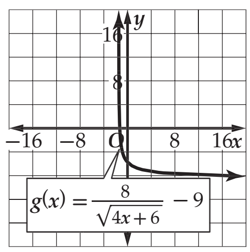
(45 $g(x) = \frac{16}{\sqrt{x+6}} - 3$



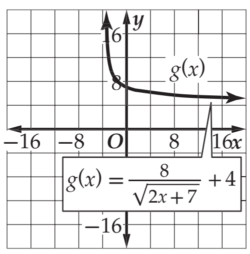
(46 $g(x) = -\frac{24}{\sqrt{x+6}} + 18$



(47 $g(x) = \frac{8}{\sqrt{4x+6}} - 9$



(48 $g(x) = \frac{8}{\sqrt{2x+7}} + 4$



49b) إجابة ممكنة: $h(x)$ تساوي ناتج جمع $f(x)$ و $g(x)$.

49c) $h(x) \stackrel{?}{=} f(x) + g(x)$

$$x^2 + 6x + 10 \stackrel{?}{=} x^2 + 2x + 7 + 4x + 3$$
$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 10$$

50) إجابة ممكنة: كلاهما ؛ في دالة أكبر عدد صحيح، سحب الدالة الأصلية a وحدة لليسار يماثل سحب الدالة الأصلية a وحدة إلى أعلى.

51) إجابة ممكنة: $f(x)$ و $h(x)$ يمثّلان الدالة نفسها؛ فالدالة $g(x)$ انعكاس لِـ $f(x)$ حول المحور x؛ وهذا يعني أن $g(x) = -f(x)$، وبما أن $h(x)$ انعكاس لِـ $g(x)$ حول المحور y فإن $h(x) = g(-x) = -f(-x)$.
ولأن الدالة $f(x)$ فردية، فإن $-f(x) = f(-x)$ وبالتعويض نجد أن

$h(x) = -f(-x) = -f(x) = g(x)$.

52) أحيانًا. إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ زوجية فإن $f(x) = f(-x)$ وتكون $f(x) = |f(x)|$ صحيحة للدوال الزوجية التي تقع قيمها في الربعين الأول والثاني؛ فمثلًا ، عندما $g(x) = x^2 - 4$ فإن $g(1) = g(-1)$ ، وتكون الدالة زوجية. في حين $|g(-1)| \neq g(-1)$

53) أحيانًا: إجابة ممكنة. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = f(-x)$.
وبالتعويض في $-|f(x)|$ ينتج أن $f(-x) = -|f(x)|$ أو $f(x) = -|f(x)|$. وهذا صحيح فقط للدوال الزوجية التي تقع قيمها في الربعين الثالث والرابع. فمثلًا عندما تكون $g(x) = -x^2$، فإن المعادلتين $f(x) = f(-x)$ و $f(x) = -|f(x)|$ صحيحتان.

54) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بانسحاب 6 وحدات إلى اليسار و 8 وحدات إلى أسفل $g(x) = \sqrt{x+6} - 8$.

55) إجابة ممكنة: توسع رأسي للدالة $f(x)$ بمعامل قدرة 4 يكافئ $4f(x)$. تضيق أفقي بمعامل قدره $\frac{1}{4}$ يكافئ $f\left(\frac{1}{4}x\right)$. عند إجراء كل من التحويلين فإن الناتج يكون $f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ خطية. وما عدا ذلك فالناتج لا يكون $f(x)$. فمثلًا إذا كانت $f(x) = x^2$، فإن $4f\left(\frac{1}{4}x\right) = 4\left(\frac{x^2}{16}\right) = \frac{x^2}{4}$ ، و هذه لا تساوي x^2. لذا فإن $4f\left(\frac{1}{4}x\right) \neq f(x)$.

56) إجابة ممكنة: الترتيب مهم؛ لأنه يمكن الحصول على منحنيات مختلفة بترتيب مختلف بين التحويلات الهندسية فمثلًا. إذا كانت (a, b) نقطة على منحنى الدالة الأصلية، وحدث للدالة انسحاب مقداره 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس في المحور x فإن صورة النقطة (a, b) هي $(a, -b-6)$. وبالعكس إذا حدث انعكاس للدالة في المحور x ثم انسحاب مقداره 6 وحدات إلى أعلى فإن صورة (a, b) هي $(a, -b+6)$.

الدرس 6-1 ، ص (65 - 62)

4) $(f+g)(x) = x^2 + 10x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = x^2 - 8x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 9x^3 + 9x^2$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{9}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$

5) $(f+g)(x) = 2x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = -14$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 49$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-7}{x+7}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq -7,\ x \in R\}$

6) $(f+g)(x) = x^3 + x + \frac{6}{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = -x^3 - x + \frac{6}{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 6x^2 + 6$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(\frac{f}{x})(x) = \frac{6}{x^4 + x^2}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

7) $(f+g)(x) = \frac{x^2+12}{4x}$ ؛ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \frac{x^2-12}{4x}$ ؛ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \frac{3}{4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{12}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

8) $(f+g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 4$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

9) $(f+g)(x) = \sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} - 3$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+5} + 3$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2+13x+40} - 3\sqrt{x+8}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5}-3}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \neq 4, x \in R\}$

10) $(f+g)(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-4}$؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+6} - \sqrt{x-4}$؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2+2x-24}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 4, x \in R\}$

11) $[f \circ g](x) = 8x - 19$
$[g \circ f](x) = 8x - 20$; $[f \circ g](6) = 29$

12) $[f \circ g](x) = -50x^2 + 145x - 101$
$[g \circ f](x) = 10x^2 + 25x + 1$; $[f \circ g](6) = -1031$

13) $[f \circ g](x) = x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 105$
$[g \circ f](x) = x^4 - 25x^2 + 155$; $[f \circ g](6) = 7905$

14) $[f \circ g](x) = 2 + x^8$; $[g \circ f](x) = -x^8 - 4x^4 - 4$
$[f \circ g](6) = 1679618$

15) $\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2-3}$

16) $\{x \mid x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x^2+3}$

17) $\{x \mid x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = |x|$

18) $\{x \mid x < 6, x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{5}{\sqrt{6-x}}$

19) $\{x \mid x > -8, x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{-4}{\sqrt{x+8}}$

20) $\{x \mid x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = |x+2|$

21a) $\{v \mid 0 \leq v < c, v \in R\}$؛ لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء؛ لأنك تحصل على $\frac{100}{0}$، وهي كمية غير معرفة. كذلك لا تكون v أكبر من c؛ لأنك تحصل على عدد سالب تحت الجذر التربيعي، وهذه كمية غير معرفة ، وأخيرًا لا تكون السرعة أقل من صفر؛ لأن السرعة ليست سالبة.

21b) $m(10) = 100$ kg; $m(10000) \approx 100.0000001$ kg;
$m(1000000) \approx 100.0005556$ kg

21c) عندما تقترب v من c فإن $\frac{v^2}{c^2}$ تقترب من العدد1، ويقترب المقام من العدد صفر؛ أي أن $m(v)$ تقترب من ∞.

21d) إجابة ممكنة: $m(v) = f(g(v))$

$f(v) = \frac{100}{\sqrt{1-v^2}}$

$g(v) = \frac{v}{c}$

22) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x} + 7; g(x) = 4x + 2$

23) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{6}{x} - 8; g(x) = x + 5$

24) إجابة ممكنة: $f(x) = |x| - 9; g(x) = 4x + 8$

25) إجابة ممكنة: $f(x) = [-3x]; g(x) = x - 9$

26) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \frac{5-x}{x+2}$

27) إجابة ممكنة: $f(x) = x^3; g(x) = \sqrt{x} + 4$

28) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{8}{x^2}; g(x) = x - 5$

29) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-6}; g(x) = x + 4$

30b) قيمة v ليست صفرًا. وإذا كانت كذلك، فلا يوجد طول موجة.

30d) إجابة ممكنة:
$$f(v)=a[b(v)]=\frac{h}{25v},\ b(v)=25v,\ a(v)=\frac{h}{v}$$

54) $[f\circ g](x)=x$ ؛ ومجالها $\{x \neq x \geq -4, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=|x-3|+3$ ؛ ومجالها $\{x : x\in R\}$

55) $[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{16+x^2}+6}$ ؛ ومجالها $\{x : x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\sqrt{x+22}$ ومجالها $\{x \mid x\geq -6, x\in R\}$

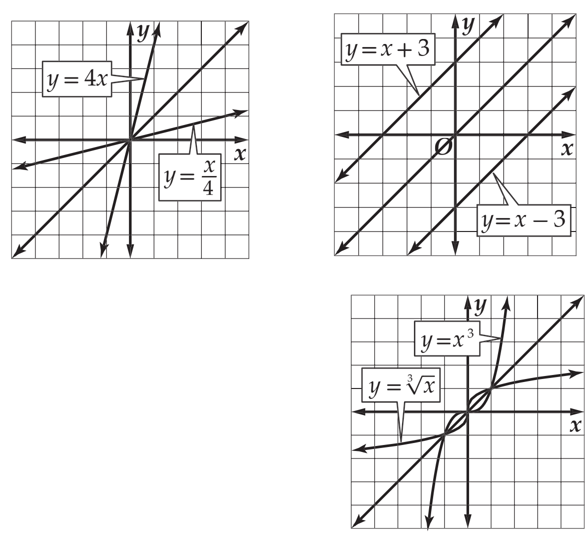
56) $[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{9-x^2}}$ ومجالها $\{x : -3\leq x\leq 3, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\sqrt{9-x}$ ومجالها $\{x \mid 0\leq x\leq 9, x\in R\}$

57) $[f\circ g](x)=\dfrac{24-6x}{12-x}$
ومجالها $\{x|x\neq 4, 12, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\dfrac{4x+2}{4x-1}$
ومجالها $\{x|x\neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, x\in R\}$

58a) لكل دالة منها $[f\circ g](x)=x$

58b) إجابة ممكنة: لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معامِلات غير الواحد، ولا يبقى ثوابت.

58c)

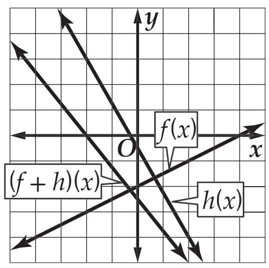


58d) إجابة ممكنة: محور الانعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y=x$.

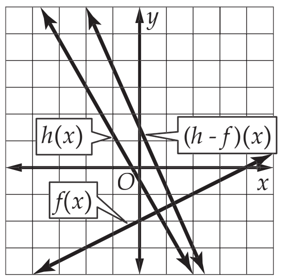
58e) إجابة ممكنة: ويكافئ كل من التركيبين $[f\circ g](x)$
$[g\circ f](x)$ الدالة المحايدة.

58f)
a) $g(x)=x+6$
b) $g(x)=3x$
c) $g(x)=\sqrt[5]{x}$
d) $g(x)=\dfrac{x+3}{2}$

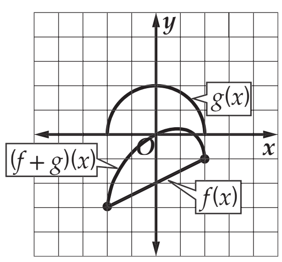
59)



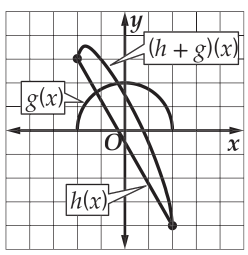
60)



61)



62)



73) إجابة ممكنة : أحيانًا، إذا كانت $g(x)=x^2+x+1$ و $f(x)=\sqrt{x}$، فإن $[f\circ g](x)=\sqrt{x^2+x+1}$، وهذه ليست خطية.

74) إجابة ممكنة: أولًا: يجب أن تكون $g(x)$ معرفة، لذا فإن $x\neq 3$. وثانيًا: يجب أن تكون $f(x)$ معرفة عند قيم $g(x)$، لذا يجب أن تكون $g(x)\geq 1$، وهذا صحيح عندما $3\leq x\leq 4$. وأخيرًا: يجب مراعاة القيود الإضافية على مجال التركيب. والتركيب هو $\sqrt{\frac{4-x}{x-3}}$، ولا يوجد على مجاله قيود إضافية. لذا فإن مجال التركيب هو
$\{x \mid 3<x\leq 4, x\in R\}$

الدرس 1-7 ، ص (71 - 73)

20) $f(g(x))=\dfrac{4(x-9)}{4}+9=x-9+9=x$
$g(f(x))=\dfrac{4x+9-9}{4}=\dfrac{4x}{4}=x$

21) $f(g(x))=-3\left(\sqrt{\dfrac{5-x}{3}}\right)^2+5=\dfrac{-3(5-x)}{3+5}=x$
$g(f(x))=\sqrt{\dfrac{5-(-3x^2+5)}{3}}=\sqrt{\dfrac{3x^2}{3}}=\sqrt{x^2}=x$

22) $f(g(x))=\dfrac{(\sqrt{4x-32})^2}{4}+8=\dfrac{4x-32}{4}+8=x-8+8=x$
$g(f(x))=\sqrt{4\left(\dfrac{x^2}{4}+8\right)-32}=\sqrt{x^2+32-32}=\sqrt{x^2}=x$

23) $f(g(x))=\left(x^{\frac{2}{3}}-8+8\right)^{\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=x$
$g(f(x))=\left[(x+8)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}-8=x+8-8=x$

24) $f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^3 - 6 = \frac{2(x+6)}{2} - 6 = x+6-6 = x$

$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2x^3-6+6}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$

25) $f(g(x)) = \dfrac{\frac{2x+6}{1-x}-6}{\frac{2x+6}{1-x}+2} = \dfrac{\frac{2x+6-6+6x}{1-x}}{\frac{2x+6+2-2x}{1-x}}$

$= \dfrac{2x+6-6+6x}{2x+6+2-2x} = \dfrac{8x}{8} = x$

$g(f(x)) = \dfrac{\frac{2(x-6)}{x+2}+6}{1-\frac{x-6}{x+2}} =$

$\dfrac{\frac{2x-12+6(x+2)}{x+2}}{\frac{x+2-(x-6)}{x+2}} = \dfrac{2x-12+6x+12}{x+2-x+6} = \dfrac{8x}{8} = x$

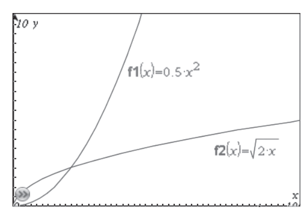
26a) $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{m}}$؛ $g(x)$ هي السرعة بالمتر/ ثانية، x هي طاقة الحركة بالجول، m الكتلة بالكيلو جرام

26b) $f[g(x)] = f\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{2x}{m} = x$

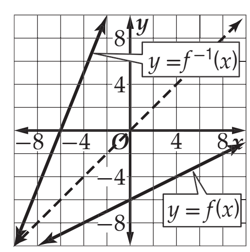
$g[f(x)] = g\left(\frac{1}{2}mx^2\right) = \left(\sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}mx^2\right)}{m}}\right) = \sqrt{x^2} = x$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ ، فإن كلا الدالتين عكسية للأخرى.

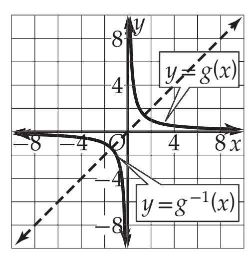
26c)



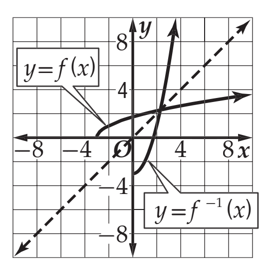
27)



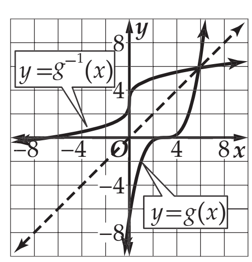
28)



29)



30)



31a) تحقق الدالة (x) اختبار الخط الأفقي، $f^{-1}(x) = 20(x - 420)$.

31b) تمثل x مقدار ما يتقاضاه فالح خلال أسبوع، أما $f^{-1}(x)$ فتمثل مقدار مبيعات فالح.

31c) $x \geq 0$ لأنه لا يمكن أن تكون مبيعات فالح بالسالب.

31d) 6000 ريال

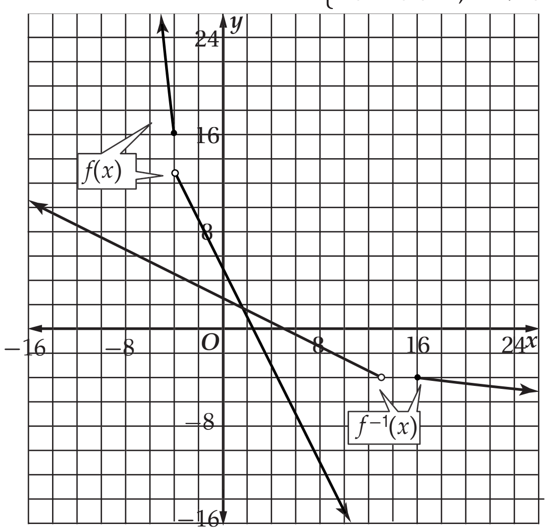
43a) افترض أن x تمثِّل عدد أزهار الجوري $c(x)=5x+3(75-x)$

43b) $c^{-1}(x) = 0.5x - 112.5$ ، x تمثل التكلفة الكلية، $c^{-1}(x)$ تمثل عدد أزهار الجوري.

43c) مجال $c(x)$: $\{x|0 \leq x \leq 75, x \in W\}$
مجال $c^{-1}(x)$: $\{x|225 \leq x \leq 375, x \in R\}$

43d) 35

48) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}, & 16 \leq x \\ 2.5 - 0.5x, & x < 13 \end{cases}$



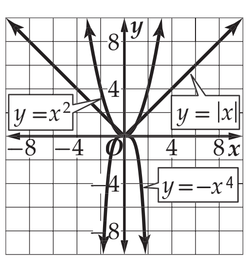
51) $[f^{-1} o g^{-1}](x) = \frac{x+2}{16}$

52) $[g^{-1} o f^{-1}](x) = \frac{x-44}{16}$

53) $(f o g)^{-1}(x) = \frac{x-44}{16}$

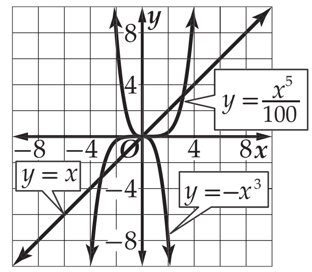
54) $(g o f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{16}$

55a) إجابة ممكنة : لا



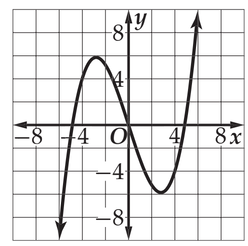
55b) إجابة ممكنة: يمكن التوصل إلى قاعدة تقول: إن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية. إذا كانت الدالة زوجية فإن $f(x) = f(-x)$. وعليه فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة من y؛ مما يؤدي إلى أن الدالة لا تحقق اختبار الخط الأفقي، أي أنه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية.

55c) إجابة ممكنة : نعم



55d) إجابة ممكنة: يوضح الرسم أن للدوال الثلاث دوالَّ عكسيةً ، ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية؛ فمثلًا الدالة $f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{47}{15}x$ فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

منحنى هذه الدالة لا يحقق اختبار الخط الأفقي ، أي أنه لا يوجد دالة عكسية لـ f.



56) إجابة ممكنة: المقطع y للدالة $f^{-1}(x)$ هو $(0, 6)$

57) إجابة ممكنة: مجال الدالة التربيعية بحاجة إلى تحديد، بحيث يظهر نصف المنحنى فقط ليكون لها معكوس، وفي هذه الحالة يكون المجال $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right)$ أو $\left(\frac{-b}{2a}, \infty\right)$ للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

58) إجابة ممكنة: خطأ، الدوال الثابتة خطية، لكنها لا تحقق اختبار الخط الأفقي. لذا فالدوال الثابتة ليست واحدًا لواحد ، وعليه لا توجد لها معكوس.

60) إجابة ممكنة: نعم، وإحدى هذه الدوال $f(x) = \frac{1}{x}$.
على الرغم من أن كلتا النهايتين تؤول إلى 0، إلا أنه لا توجد قيمتان أو أكثر من المجال ترتبطان بقيمة واحدة y ، وعليه فالدالة تحقق اختبار الخط الأفقي.

دليل الدراسة والمراجعة، ص (78 - 77)

44) $(f+g)(x) = 2x^2 + 5x - 3$ ؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x) = -2x^2 - 3x + 9$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$;
$(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$ ؛
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2(x-1)}$ ؛
المجال: $\{x \mid x \neq -3, 1, x \in R\}$

45) $(f+g)(x) = 4x^2 + 5x - 2$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$(f-g)(x) = 4x^2 - 5x$؛
المجال: $= \{x \mid x \in R\}$
$(f \cdot g)(x) = 20x^3 - 4x^2 - 5x + 1$؛ المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x^2 - 1}{5x - 1}$ ؛
المجال: $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{5}, x \in R\right\}$

46) $(f+g)(x) = x^3 + 2x^2 + 2$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$(f-g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$(f \cdot g)(x) = 4x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 26x^2 - 15$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{4x^2 - 3}$؛
المجال: $\left\{x \mid x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in R\right\}$

47) $(f+g)(x) = \frac{x+1}{x^2}$.
المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$؛
$(f-g)(x) = \frac{x-1}{x^2}$؛
المجال: $\{x \mid x \neq 0 ، x \in R\}$،
$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x^3}$؛
المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$،
$\left(\frac{f}{g}\right) = x$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

48) $[f \circ g](x) = 8x^2 - 43$, $[f \circ g](x) = 32x^2 - 176x + 234$; $[f \circ g](2) = -11$

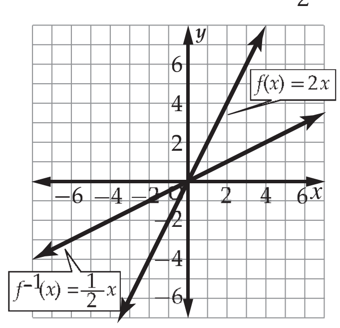
49) $[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 23$; $[f \circ g](x) = x^2 + 2x + 3$; $[f \circ g](2) = 11$

50) $[f \circ g](x) = x^4 - 3x^2 + 4$; $[f \circ g](x) = x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16$; $[f \circ g](2) = 8$

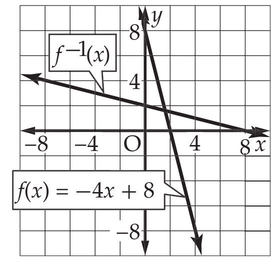
51) $[f \circ g](x) = \frac{1}{2x - 9}$؛
المجال: $\left\{x \mid x \neq \frac{9}{2}, x \in R\right\}$ ؛

52) $[f \circ g](x) = \sqrt{6x - 9}$؛
المجال $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ ؛

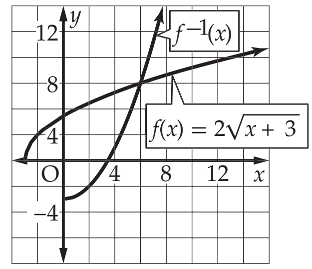
53) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$



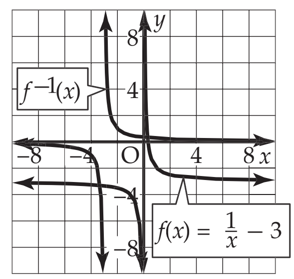
54) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 2$



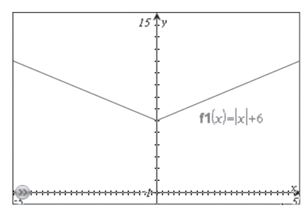
55) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x,\ x \geq o$



56) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+3}$

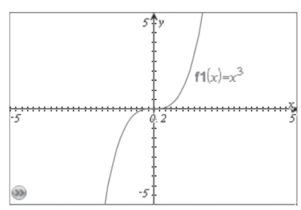


57)



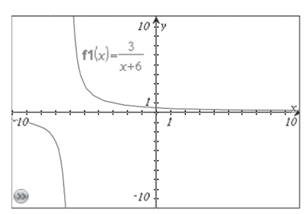
لا

58)

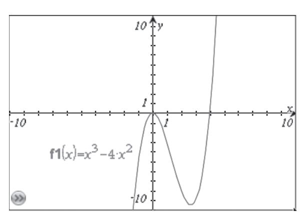


نعم

59)



60)



الفصل 2

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (81)

	الدرس 2-1 (3) حصص	استكشاف 2-2 حصة واحدة	الدرس 2-2 (4) حصص	الدرس 2-3 (3) حصص
العنوان	**الدوال الأسية**	**معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الأسية**	**حل المعادلات والمتباينات الأسية**	**اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية**
الأهداف	• تعرف الدالة الأسية وتمثيلها البياني. • تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا. • تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات أسية بيانيًا أو باستعمال ميزة الجداول.	• حل معادلات أسية. • حل متباينات أسية. • حل مسائل تتضمن نموًّا أسيًّا واضمحلالًا أسيًّا.	• إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. • تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًّا.
المفردات	الدالة الأسية النمو الأسي عامل النمو الاضمحلال الأسي عامل الاضمحلال		المعادلة الأسية الربح المركب المتباينة الأسية	اللوغاريتم الدالة اللوغاريتمية
تمثيلات متعددة	ص (88)		ص (96)	
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (11) دون ضمن فوق		**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (12) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (14) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (13) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• الكاميرا التوثيقية		• مدونة	• السبورة التفاعلية
تنويع التعلم	ص (84, 88)		ص (93, 94, 96)	ص (98, 103)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل
ص(104)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة و التقويم	المجموع
(22) حصة	(4) حصص	(26) حصة

الدرس 4-2 (3) حصص	الدرس 5-2 (4) حصص	الدرس 6-2 (3) حصص	توسع 6-2 حصة واحدة
خصائص اللوغاريتمات	**حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية**	**اللوغاريتمات العشرية**	**معمل الحاسبة البيانية : حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية**
• تطبيق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية. • تبسيط عبارات ، وإيجاد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.	• حل معادلات لوغاريتمية. • حل متباينات لوغاريتمية.	• حل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية. • إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.	• استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات لوغاريتمية.
	المعادلة اللوغاريتمية المتباينة اللوغاريتمية	اللوغاريتم العشري صيغة تغيير الأساس	
	ص (116)	ص (123)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (18) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (14) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (22) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (15) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (26) دون • تدريبات حل المسألة، ص (28) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (29) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (16) دون ضمن فوق	المواد اللازمة • الحاسبة البيانية
• السبورة التفاعلية	• تسجيل مرئي	• السبورة التفاعلية	
ص (108, 110)	ص (113, 116)	ص (120, 123)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (127-132)
- اختبار الفصل ص (133)

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 2**	
	التهيئة للفصل 2 ، ص (81)	مخطط المعالجة، ص (81)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (30, 31) www.obeikaneducation.com	تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2 www.obeikaneducation.com
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (104) اختبار منتصف الفصل، ص (32) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2 www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (127-132) اختبار الفصل، ص (133) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2 www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 2**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (34, 36, 38) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (40) اختبار المفردات ، ص (33) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (42) اختبار تراكمي ، ص (43) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 2 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون البصريون بما أن الطلاب يدرسون العديد من الخصائص لأول مرة في هذا الفصل؛ لذا اقترح عليهم عمل ملصقات لها، على أن تكون مختصرة قدر الإمكان، مع استعمال الألوان لتسهيل فهم الخاصية بمجرد النظر إليها.

خصائص اللوغاريتمات

$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

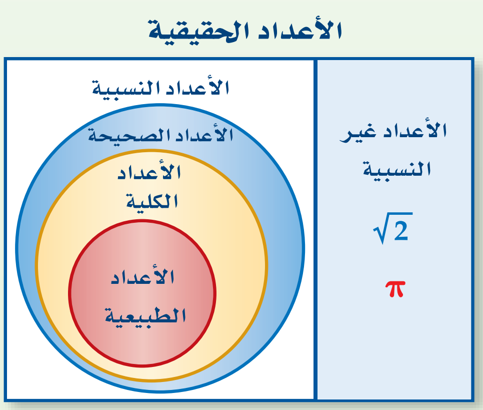
$\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$

$\log_a(M^p) = p\log_a M$

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى طالبين أن يفترضا بدء استثمار بمبلغ 10000 ريال، واختر معدل ربح يتم إضافته إلى رأس المال باستمرار، واطلب إليهما حساب المبلغ الكلي بعد 5، 10، 15، 20 سنة، وتمثيله في كل مرة باستعمال الأعمدة البيانية.

البديل 2 دون المتوسط دون

راجع الطلاب في مفهوم العدد الحقيقي، والنسبي، والصحيح، والكلي، والطبيعي، ثم اطلب إلى كل منهم رسم مخطط ڤن لمجموعات الأعداد المذكورة، ووضع مثال لكل مجموعة أعداد على الشكل .



البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب إعداد بحث باستعمال شبكة الإنترنت حول جداول اللوغاريتمات العشرية للأعداد، ثم اطلب إليهم أن يستعملوا الجداول لإيجاد قيم لوغاريتمات عشرية مثل $\log_{10}125$ ، ويقارنوا بين النتيجة التي توصلوا إليها والنتيجة باستعمال الآلة الحاسبة للوغاريتم نفسه.

المحتوى الرياضي

الفصل 2

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 2

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- استعمال آليات تتضمن خصائص الأسس في تبسيط العبارات.

الفصل 2

- تحليل موقف ممثّل بدالة أسّية، وتكوين معادلة لحل مسألة.
- تطوير تعريف اللوغاريتم من خلال استكشاف العلاقات بين الدوال الأسية ومعكوساتها.
- استعمال الدوال الرئيسة (الأم) لاستكشاف أثر تغير قيم المعالم في التمثيلات البيانية للدوال الأسية، واللوغاريتمية، ووصف المحددات على المجال والمدى واختبار سلوك خطوط التقارب.
- تحديد الحلول لمعادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية بيانيًّا وجبريًّا وباستعمال الجداول.
- تفسير معقولية الحلول لمعادلات أسية ولوغاريتمية وتحديدها.

ما بعد الفصل 2

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

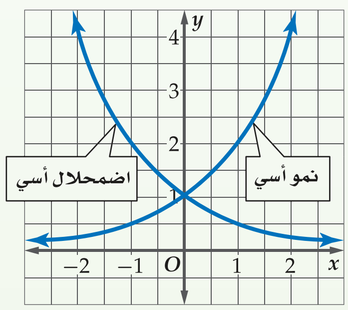
- استعمال العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية في بعض تطبيقات التفاضل والتكامل في الدراسة اللاحقة.

نظرة على الدروس

2-1 تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا

تُسمى المعادلة على الصورة $y = b^x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ دالة أسية. مجال الدالة الأسية هو جميع الأعداد الحقيقية، وهناك نوعان من الدوال الأسية هما :

- دوال النمو الأسي، وذلك عندما تكون $b > 1$.
- دوال الاضمحلال الأسي، وذلك عندما تكون $0 < b < 1$.



- الدالة الأسية متصلة بحيث يمكن رسم منحناها دون رفع القلم عن الورقة.
- وهي كذلك دالة متباينة؛ أي أنها تحقق اختبار الخط الأفقي.

وللتمثيل البياني للدالة الأسية خط تقارب أفقي، وهذا يعني أن تمثيلها البياني يقترب من خط أفقي. وبالنسبة للدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = b^x$، فإن خط التقارب الأفقي هو المحور x .

وجميع تحويلات الدوال الرئيسة (الأم) التي سبق أن درستها يمكن تطبيقها على تمثيل الدالة الأسية البياني.

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

يظهر المتغير في الدوال الأسية على صورة أس. ويمكن استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية، فعندما يتساوى أساسا حدَّين أسِّيين، مثل:

$3^x = 3^7$ ، تكون الأسس متساوية، ومن ذلك $x = 7$ ، وعندما لا تكون الأساسات متساوية، كما في $3^x = 9^4$، فلا بد من إعادة كتابتها أولًا، وفي هذا المثال يمكن كتابة العدد 9 على الصورة 3^2، حيث ، $9^4 = (3^2)^4 = 3^8$ ومنه $3^x = 3^8$، لذا $x = 8$

كذلك في المتباينات الأسية تظهر المتغيرات على صورة أس، ويمكن استعمال خاصية التباين للدالة الأسية لحل متباينات أسية والتي تشير إلى أن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$، لقيم $b > 1$، وكذلك عند $\geq$ وَ $\leq$.

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

معكوس $y = b^x$ بشكل عام هو $x = b^y$.

ويُسمى b في المعادلة $x = b^y$ بالأساس، على حين يشار إلى y بأنها لوغاريتم x ، وتكتب هذه العلاقة عادة على الصورة $y = \log_b x$ ، حيث $b > 0, b \neq 1$ ، وتقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b ، وتُسمى دالة لوغاريتمية.

والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ متصل وهو واحد لواحد ومجاله جميع الأعداد الحقيقية الموجبة، ويمثل المحور y خط تقارب رأسيًا له. وجميع التحويلات على الدوال الأم التي درستها سابقًا يمكن تطبيقها على الدوال اللوغاريتمية.

2-4 خصائص اللوغاريتمات

وُجِدَتْ اللوغاريتمات لتبسط العمليات الحسابية، فوفقًا لخصائص اللوغاريتمات في الضرب والقسمة يتحول لوغاريتم حاصل الضرب إلى مجموع لوغاريتمات عوامله، بينما لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم البسط مطروحًا منه لوغاريتم المقام، فمثلًا $\log_3 (5 \cdot 7) = \log_3 5 + \log_3 7$.

وتنص خاصية لوغاريتم القوة على أن لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب القوة في اللوغاريتم، فمثلًا $\log_5 3^7 = 7\log_5 3$.

إن استعمال خصائص اللوغاريتمات يساعدنا على حل المعادلات اللوغاريتمية.

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

عند حل معادلات أو متباينات لوغاريتمية يكون من المهم تذكّر خصائص اللوغاريتمات، وكذلك تذكر تعريف الدالة اللوغاريتمية، وأن مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، وهذا يعني أن لوغاريتم الصفر أو أي عدد سالب يكون غير معرّف لأي أساس. ومن المهم أيضًا التحقق من حلول المعادلة اللوغاريتمية بتعويضها في المعادلة الأصلية؛ كي لا يكون مصدرها لوغاريتمًا للصفر أو أي عدد سالب.

2-6 اللوغاريتمات العشرية

تُسمى اللوغاريتمات ذات الأساس 10 لوغاريتمات عشرية، فلا يكتب الأساس 10 عادة. فاللوغاريتم $\log_{10} x$ يكتب عادة على الصورة $\log x$، وتحتوي معظم الآلات الحاسبة على المفتاح LOG لحساب اللوغاريتمات العشرية. ويمكن استعمال اللوغاريتمات لحل معادلات أسية ليس من السهل كتابتها على صورة أسّ لأساس مشترك، فلحل المعادلة الأسية $5^x = 41$، خذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة، ثم حل بالنسبة لـ x. يمكن حساب قيم عبارات لوغاريتمية لأي أساس باستعمال صيغة تغيير الأساس، والذي يحول اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

الفصل 2 ملاحظات

مشروع الفصل

قياس شدّة الصوت

يستعمل الطلاب ما تعلموه عن الدوال الأسية واللوغاريتمية لتفسير ملاحظات وظواهر تتعلق بمستويات الصوت.

- أحضر مقياس مستوى الصوت من مختبر العلوم، ومصدرين متماثلين للصوت؛ مُجفِّفي شعر مثلًا، أو ساعتي تنبيه أو ما شابه ذلك.
- قسّم الطلاب إلى مجموعات تتكون من 3 أو 4 طلاب، واطلب إليهم أن يقيسوا شدة أصوات في غرفة هادئة بوضع المقياس على بعد أقدام قليلة مقابل المصدر وتسجيل مستوى شدة الصوت، ثم يسجلوا مستوى شدة الصوت للمصدرين معًا عند نفس نقطة البعد عن مقياس الصوت. واطلب إليهم تكرار ذلك مع مصدرين آخرين للصوت.
- وبغض النظر عن مصدر الصوت فستجد أن استعمال مصدرين متشابهين معًا يجعل قراءة المقياس تساوي 3 أمثال قراءته للمصدر الواحد؛ لذا اطلب إلى المجموعات استعمال معرفتهم باللوغاريتمات لتفسير صحة هذه الظاهرة.
- وأخيرًا، اطلب إلى الطلاب أن يتنبؤوا بشدة صوت 3, 4, 5 مصادر صوت متماثلة.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: تسمى y في الدالة $x = b^y$ لوغاريتم x للأساس b، وتكتب: $y = \log_b x$.

وتقرأ "y تساوي لوغاريتم x للأساس b"

مثال: $3 = \log_2 8$

سؤال: كيف تكتب $3^5 = 243$ بالصورة اللوغاريتمية؟

$\log_3 243 = 5$

الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ تمثيل دوال كثيرات الحدود وتحويلاتها بيانيًا.

والآن:

- أتعرّف الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أمثّل الدوال الأسّية واللوغاريتمية بيانيًا.
- أحل مسائل باستعمال الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- أحل معادلات ومتباينات أسية ولوغاريتمية.

لماذا؟

علوم: ترتبط العلوم والرياضيات ارتباطًا وثيقًا. ويظهر ذلك جليًا في الفيزياء والكيمياء والأحياء، وغيرها. وتحتاج هذه الفروع إلى مهارات رياضية عالية. وستتعلم في هذا الفصل جوانب رياضية ذات صلة قوية بعلوم: الحاسوب، والفيروسات، والحشرات، ونمو البكتيريا، وانقسام الخلايا، وعلم الفلك، والأعاصير، والهزات الأرضية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (28).

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 2

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

بسّط كل عبارة مما يأتي مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

1) $a^4a^3a^5$ a^{12}

2) $(2xy^3z^2)^3$ $8x^3y^9z^6$

3) $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$ $\frac{-3x^6}{2y^3z^5}$

4) $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$ $\frac{4r^4}{81n^4t^2}$

5) **كثافة:** تُعرّف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة على الحجم. فإذا كانت كتلة جسم $7.5 \times 10^3 g$، وحجمه $1.5 \times 10^3\ cm^3$، فما كثافته؟ $5 g/cm^3$

أوجد الدالة العكسية لكل دالة مما يأتي: **6-14) انظر الهامش.**

6) $f(x) = 2x + 5$

7) $f(x) = x - 3$

8) $f(x) = -4x$

9) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$

10) $f(x) = \frac{x-1}{2}$

11) $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، أم لا. وضح إجابتك:

12) $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$

13) $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$

14) **طعام:** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريالات، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال. فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافًا إليها x من الإضافات، فأوجد $f^{-1}(x)$، موضحًا ماذا تعني.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

المجال (domain):
مجموعة الإحداثيات x للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

المدى (range):
مجموعة الإحداثيات y للأزواج المرتبة التي تمثل العلاقة.

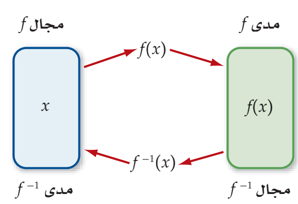
الدالة (function):
علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

سلوك طرفي التمثيل البياني (end behaviour):
سلوك تمثيل $f(x)$ البياني عندما تقترب x من مالانهاية $(x \to +\infty)$ أو سالب مالانهاية $(x \to -\infty)$.

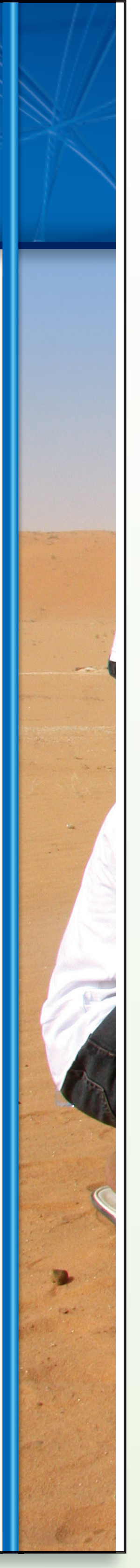
خط التقارب (asymptote):
مستقيم يقترب منه تمثيل الدالة البياني.

الدالة المتباينة (one-to-one function):
هي دالة تحقق اختبار الخط الأفقي؛ أي لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة.

الدالة العكسية (inverse function):
تكون كل من الدالتين f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:
$f(f^{-1}(x)) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$.



الدالة المتصلة (continuous function):
هي الدالة التي يخلو منحناها من الانقطاعات أو الفجوات؛ أي يمكن تمرير القلم على منحناها دون أن نضطر لرفعه.



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا ... فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة،

فقم بمراجعة تبسيط العبارات الجبرية الأسية، والدالة العكسية.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

6) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

7) $f^{-1}(x) = x + 3$

8) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x$

9) $f^{-1}(x) = 4x + 12$

10) $f^{-1}(x) = 2x + 1$

11) $f^{-1}(x) = 3x - 12$

12) نعم؛ لأن $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

13) لا؛ لأن $[f \circ g](x) = 4x - 5$

14) $f^{-1}(x) = 2x - 8$، وهي تعطي عدد الإضافات التي يحصل عليها شخص دفع x ريالًا.

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

2-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-1

تمثيل دوال خطية، وخاصة، وتربيعية بيانيًا.

الدرس 2-1

تعرف الدالة الأسيّة وتمثيلها البياني.

تمثيل دوال النمو الأسّي بيانيًا.

تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًا.

ما بعد الدرس 2-1

حل معادلات أسيّة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

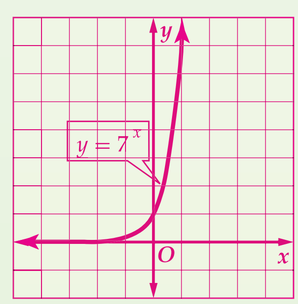
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- لماذا لا تعد الدالة $y = 3(2)^x$ دالةً تربيعية؟ لأن المتغير المستقل x في هذه الدالة هو الأس، والأساس هو العدد 2، بينما المتغير المستقل x في الدالة التربيعية هو الأساس، والأس هو العدد 2
- ما قيمة y عندما $x = 0$؟ $y = 3$
- هل توجد قيمة للمتغير المستقل x تجعل قيمة المتغير y صفرًا؟ لا

إجابة:

(1A



$1, D = \{x | x \in R\}$

$R = \{y | y > 0\}$

2-1 الدوال الأسّية
Exponential Functions

فيما سبق:

درستُ دوال كثيرات الحدود وتمثيلها بيانيًا. (الدرس 1-1)

والآن:

- أتعرف الدالة الأسية.
- أمثّل الدالة الأسية.
- أمثّل دوال النمو الأسي بيانيًا.
- أمثّل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.

المفردات:

الدالة الأسية
exponential function

النمو الأسّي
exponential growth

عامل النمو
growth factor

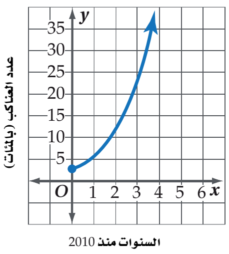
الاضمحلال الأسّي
exponential decay

عامل الاضمحلال
decay factor

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

قد تبدو عناكب الرتيلاء (Tarantulas) مخيفة بأجسامها الكبيرة المغطاة بالشعر وأرجلها الكبيرة، ولكنها غير مؤذية للإنسان، ويبيّن التمثيل المجاور الزيادة في أعدادها عبر الزمن.



لاحظ أن هذا التمثيل ليس خطيًا، وليس تربيعيًا أيضًا، وإنما يمثّل الدالة $y = 3(2)^x$، والتي هي مثال على الدالة الأسية.

تمثيل الدوال الأسّية: **الدالة الأسّية** هي دالة مكتوبة على الصورة $y = ab^x$ حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.

لاحظ أن الأساس في الدالة الأسية ثابت، وأن الأس هو المتغير المستقل.

مفهوم أساسي — **الدالة الأسية**

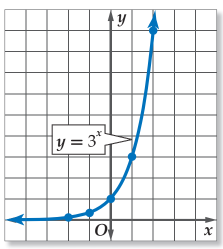
التعبير اللفظي: الدالة الأسية هي دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة $y = ab^x, a \neq 0, b > 0, b \neq 1$

أمثلة: $y = (\frac{1}{2})^x$ $\quad y = 4^x$ $\quad y = 2(3)^x$

مثال 1 — **تمثيل الدالة الأسيّة عندما $a > 0$ ، $b > 1$**

a) مثّل الدالة $y = 3^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدد مجال الدالة ومداها.

x	3^x	y
−2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
−1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
1	3^1	3
2	3^2	9



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، وهذا يعني أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0, 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $3^{0.7}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

يظهر التمثيل البياني جميع القيم الحقيقية للمتغير x والقيم المرتبطة بها للمتغير y، حيث $y = 3^x$، لذا فإذا كانت $x = 0.7$ فإن $y \approx 2.2$. (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $3^{0.7} \approx 2.157669$).

تحقق من فهمك

1A) مثّل الدالة $y = 7^x$ بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجال الدالة ومداها. انظر الهامش.

1B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $7^{0.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك. 2.6

يتضح من المثال (1) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت (قيمته 1)، فإن قيم y تزداد أيضًا بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل 3 أمثال القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متزايدة، كما أن المحور x هو خط تقارب أفقي لها.

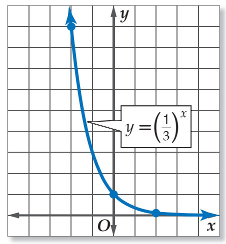
مصادر الدرس 2 – 1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (84)	• تنويع التعليم ص (84)	• تنويع التعليم ص (88)
كتاب التمارين	• ص (11)	• ص (11)	• ص (11)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

مثـال 2 تمثيل الدالة الأسيّة عندما $0 < b < 1$ ، $a > 0$

a) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجال الدالة ومداها.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$



عيّن الأزواج المرتبة الواردة في الجدول، ثم صل بينها بمنحنى. لاحظ أن التمثيل البياني للدالة يقطع المحور y عندما $y = 1$، أي أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 1)$، لذا فمقطع المحور y هو 1، ومجال الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية، ومداها جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$ إلى أقرب جزء من عشرة.

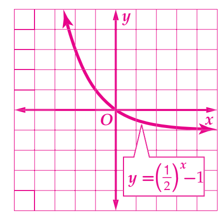
عندما $x = -1.5$، فإن قيمة $y \approx 5.2$. (استعمل الآلة الحاسبة للتحقق من أن $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5} \approx 5.19615$).

✓ تحقق من فهمك

2A) مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجال الدالة ومداها.

2B) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2.5} - 1$ إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك. 4.7

(2A



1, $D = \{x \mid x \in R\}$
$R = \{y \mid y > -1\}$

يتضح من المثال (2) أعلاه أنه كلما ازدادت قيم x بمقدار ثابت قيمته 2، فإن قيم y تتناقص بنسبة ثابتة، فكل قيمة لـ y تمثّل $\frac{1}{9}$ القيمة السابقة لها مباشرة، لذا فالدالة متناقصة، كما أن المحور x هو خط تقاربٍ أفقي لها.

النمو الأسّي: تسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ دالة **النمو الأسّي**.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متزايد

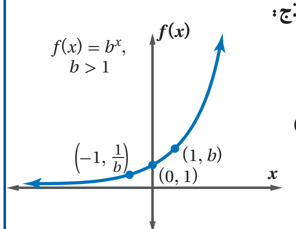
المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

النموذج:



إرشادات للدراسة

$a < 0$
إذا كانت قيمة a سالبة، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x.

تمثيل الدوال الأسية بيانيًا

مثال 1 يبين كيفية تمثيل الدالة $y = ab^x$ عندما $b > 1$ ، $a > 0$

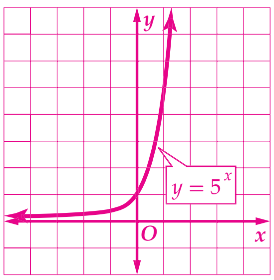
المثال 2 يبين كيفية تمثيل الدالة $y = ab^x + c$ عندما $0 < b < 1$ ، $a > 0$.

✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

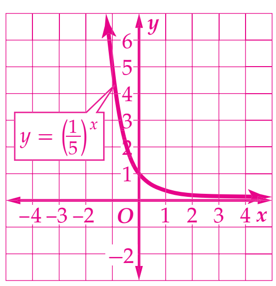
مثالان إضافيان

1 مثّل الدالة $y = 5^x$ بيانيًّا، ثم حدّد مجالها ومداها.



المجال = $\{x \mid x \in R\}$
المدى= $\{y \mid y > 0\}$

2 مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.



المجال = جميع الأعداد الحقيقية
المدى = $\{y \mid y > 0\}$

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر طالبًا ليحل مثالاً أمام الطلاب، واطلب إليه أن ينشئ جدول قيم للدالة، ويوضح كيفية تمثيل الدالة بيانيًّا. وكلّف أحد الطلاب بتوثيق الحل باستعمال الكاميرا.

المحتوى الرياضي

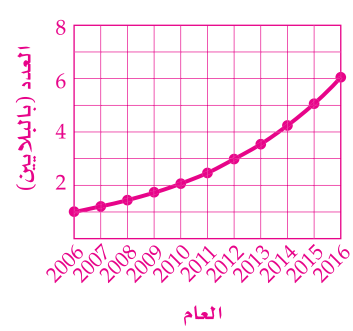
الدوال الأسية الدالة $f(x) = b^x$، حيث b عدد حقيقي موجب، و $b \neq 1$ هي دالة أسّية. عندما تكون $b > 1$ فإن الدالة لا تقطع المحور x، بل يكون لها مقطع واحد للمحور y، وهي دالة متزايدة ولها خط تقارب أفقي هو المحور x، وعندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة لا تقطع المحور x، بل يكون لها مقطع واحد للمحور y. والتمثيل البياني للدالة متناقص وله خط تقارب أفقي هو المحور x.

النمو الأسّي

مثال 3 يبيِّن كيفية تمثيل دالة أسّية بيانيًا لنمذجة موقف حياتي للنموِّ.

مثال إضافي

3 **إنترنت:** بلغ عدد مستعملي الإنترنت في العالم عام 2006 نحو 1020000000 مستعمل، وفي ذلك الوقت كانت نسبة نمو عدد مستعملي الإنترنت 19.5%. إذا استمر نمو عدد المستعملين بالنسبة نفسها، فأوجد معادلة أسية تمثل عدد مستعملي الإنترنت منذ ذلك الوقت حتى عام 2016، ثم مثّلها بيانيًا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية.



$y = (1020000000)\ (1.195)^t$

لاحظ أن قيم $f(x)$ تزداد كلما زادت قيم x. ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متزايدة. يمكنك تمثيل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة النمو الأسي $A(t) = a\,(1 + r)^t$، حيث t الفترة الزمنية، a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للنمو في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(r + 1)$ ويُسمى **عامل النمو**.

وتستعمل دوال النمو الأسي عادةً لتمثيل النمو السكاني.

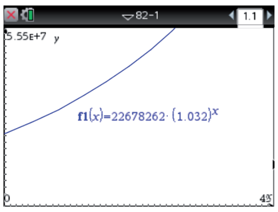
مثال 3 من واقع الحياة — تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا

تعداد سكاني: بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة 1425-1431 3.2% سنويًّا تقريبًا. إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ، فأوجد معادلة أسية تمثِّل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة، ثم مثِّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

a) أوجد دالة النمو الأسي مستعملاً $a = 22678262,\ r = 0.032$

$y = 22678262\ (1.032)^t$

b) مثِّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتحصل على الشكل المجاور.



✓ **تحقق من فهمك** انظر ملحق الإجابات.

3) **ثقافة مالية:** يتوقع أن يزداد إنفاق عائلة بما نسبته 8.5% سنويًّا، إذا كان إنفاق العائلة عام 1430هـ هو 80000 ريال، فأوجد معادلة أسية تمثِّل إنفاق العائلة منذ عام 1430هـ، ثم مثِّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

الربط مع الحياة

تُعد الإحصاءات السكانية أحد أهم مصادر البيانات التي يتطلبها التخطيط التنموي في المجالات الاقتصادية والاجتماعية. وقد أُجري أول تعداد سكاني في المملكة عام 1394 هـ، وكان عدد سكان المملكة حينئذ 7 ملايين نسمة تقريبًا.

تنبيه!

النسبة المئوية

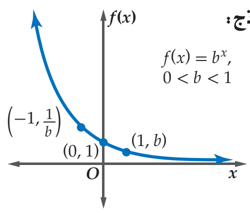
تذكَّر أن جميع أشكال النسب المئوية تتحول إلى كسور عشرية. فمثلًا، $12.5\% = 0.125$

الاضمحلال الأسّي: تُسمى الدالة الأسيّة $f(x) = b^x$، حيث $0 < b < 1$ دالة **الاضمحلال الأسّي**.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

الدالة الرئيسة (الأم): $f(x) = b^x,\ 0 < b < 1$

النموذج:



خصائص منحنى الدالة: متصل، متباين، متناقص

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى: مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)

خط التقارب: المحور x

مقطع المحور y: 1

يمكنك تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا بنفس طريقة تمثيل دوال النمو الأسي، ونلاحظ أن قيم $f(x)$ تقل كلما زادت قيم x، ولذلك نقول: إن $f(x)$ دالة متناقصة.

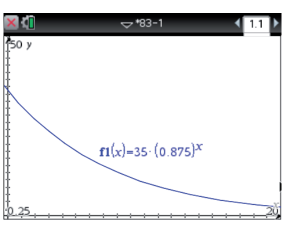
وكما في النمو الأسي، فإنه يمكنك تمثيل النقص في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الاضمحلال الأسي $A(t) = a\,(1 - r)^t$، حيث a القيمة الابتدائية، r النسبة المئوية للاضمحلال في الفترة الزمنية الواحدة. لاحظ أن أساس العبارة الأسية هو $(1 - r)$، ويُسمى **عامل الاضمحلال**.

وتستعمل دوال الاضمحلال الأسي عادة في التطبيقات المالية.

مثال 4 من واقع الحياة — تمثيل دوال الاضمحلال الأسّي بيانيًّا

شاي: يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من الكافيين، ويمكن للأشخاص اليافعين التخلص من 12.5% تقريبًا من كمية الكافيين من أجسامهم في الساعة.

a) أوجد دالة أسّية تمثِّل كمية الكافيين المتبقية في جسم اليافعين بعد شرب كوب من الشاي الأخضر، ثم مثِّلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.



الربط مع الحياة

الشاي الأخضر قليل الأكسدة بخلاف الشاي الأسود، وقد أثبتت بعض الدراسات العلمية والطبية أن الذين يشربون الشاي الأخضر أقل عُرضةً للإصابة بأمراض القلب وأنواع معينة من السرطان.

تنويع التعليم

دون ضمن

توسّع: كلِّف الطلاب بالبحث في الإنترنت أو أي مصدر آخر عن تطبيقات حياتية تتضمن دوال النمو الأسي، ثم ناقش ما توصل إليه الطلاب من تطبيقات.

$$y = a(1-r)^t$$
$$= 35(1-0.125)^t$$
$$= 35(0.875)^t$$

لاحظ التمثيل البياني للدالة باستعمال الحاسبة البيانية.

b) قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد 3 ساعات من شربه كوبًا من الشاي الأخضر.

$y = 35(0.875)^t$	المعادلة من الفرع a
$= 35(0.875)^3$	عوّض 3 بدلًا من الزمن t
≈ 23.45	استعمل الحاسبة

سيبقى في جسم هذا الشخص 23.45mg من الكافايين تقريبًا بعد 3 ساعات.

$y = 68\ (0.875)^x$، 52.06 mg تقريبًا
للتمثيل البياني انظر الهامش.

تحقق من فهمك

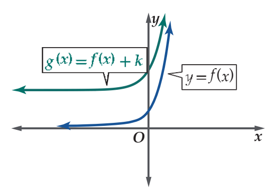
4) يحتوي كوب من الشاي الأسود على 68mg من الكافايين. أوجد معادلة أسية تمثّل كمية الكافايين المتبقية في جسم شخص يافع بعد شربه كوبًا من الشاي الأسود، ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم قدّر كمية الكافايين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب.

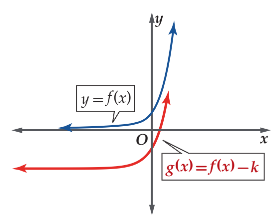
التحويلات الهندسية: تؤثّر التحويلات الهندسية في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من دالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي كما هو الحال في باقي الدوال.

مفهوم أساسي **الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي**

الانسحاب الرأسي

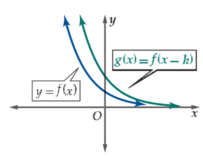
منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

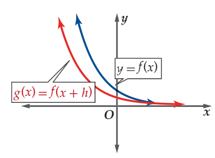




الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x-h)$ هو انسحاب لمنحنى $f(x)$:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





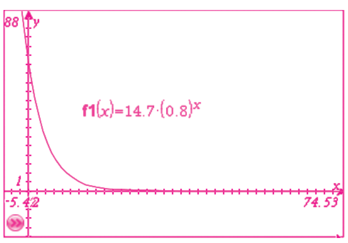
الاضمحلال الأسّي

مثال 4 يبيّن كيفية تمثيل دوال الاضمحلال الأسي بيانيًّا.

مثال إضافي

4 **ضغط الهواء:** يبلغ الضغط الجوي 14.7 lb/in² على سطح الأرض. ويتناقص بنسبة 20% كلما ارتفعنا 1mi إلى أعلى، ويستمر هذا التناقص حتى ارتفاع 50 mi عن سطح الأرض.

a) أوجد معادلة أسية تمثل الضغط الجوي للارتفاعات 0-50 mi. ومثّلها بيانيًّا مستعملًا الحاسبة البيانية. $y = 14.7\ (0.8)^x$



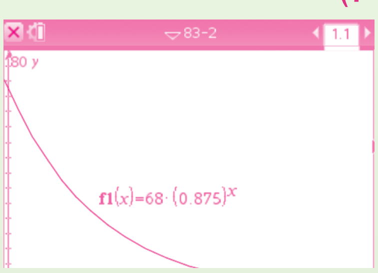
b) قدّر الضغط الجوي على ارتفاع 10 mi. 1.6 lb/in²

تنبيه!

خطأ شائع تأكد أن الطلاب لا يخلطون بين دوال كثيرات الحدود والدوال الأسية، فالدالتان $y = x^2$, $y = 2^x$ كل منهما تحتوي أسًّا، إلا أن الدالة $y = x^2$ هي دالة كثيرة حدود، والدالة $y = 2^x$ هي دالة أسية.

إجابة (تحقق من فهمك):

(4



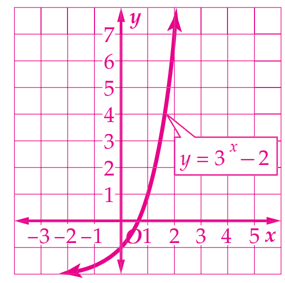
النمو الأسّي

مثال 5 يبيِّن كيفية تمثيل تحويلات دوال النمو الأسّي بيانيًّا.

مثال إضافي

5 مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.

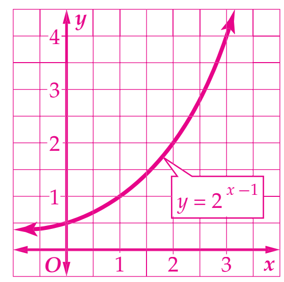
a) $y = 3^x - 2$



المجال $= \{x \mid x \in R\}$

المدى $= \{y \mid y > -2\}$

b) $y = 2^{x-1}$

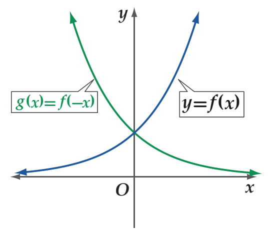


المجال $= \{x \mid x \in R\}$،

المدى $= \{y \mid y > 0\}$

مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحور y

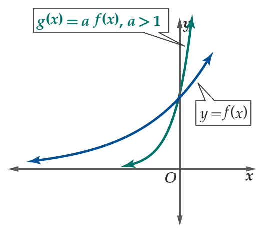
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y .



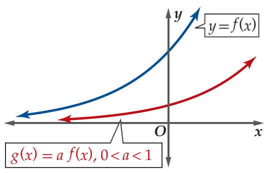
مفهوم أساسي — التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.



تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



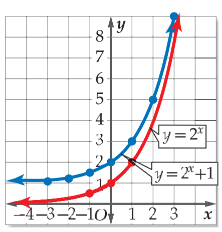
مثال 5 تحويلات التمثيلات البيانية لدوال النمو الأسي

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها:

a) $y = 2^x + 1$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 2^x$. بما أن $2>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,2)$، $(0,1)$، $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$، والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 2^x$، بما أن $k=1$ فإن المعادلة $y = 2^x + 1$ تمثِّل انسحابًا لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم) $y = 2^x$ وحدة واحدة إلى أعلى. وبالاستعانة بالأزواج المرتبة الواردة في الجدول أيضًا، فإن التمثيل البياني للدالة $y = 2^x + 1$ يكون كما هو موضح أدناه.

x	$2^x + 1$	y
-3	$2^{-3} + 1$	$1\frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} + 1$	$1\frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} + 1$	$1\frac{1}{2}$
0	$2^0 + 1$	2
1	$2^1 + 1$	3
2	$2^2 + 1$	5



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y > 1\}$

إرشادات للدراسة

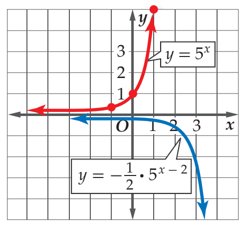
سلوك طرفي التمثيل البياني

مجال الدالتين في المثال 5 هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R). تذكر أن سلوك طرفي التمثيل البياني هو سلوك التمثيل البياني مع اقتراب x من مالانهاية أو سالب مالانهاية. نلاحظ في المثال (5a) أنه مع اقتراب x من مالانهاية، تقترب y من مالانهاية أيضًا، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من 1. وفي المثال (5b) عندما تقترب x من مالانهاية فإن y تقترب من سالب مالانهاية، وأما عندما تقترب x من سالب مالانهاية، فإن y تقترب من الصفر.

86 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

b) $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = 5^x$. بما أن $5>1$ فالدالة دالة نمو أسي، لذا استعمل النقاط $(1,b)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{b}\right)$ أي النقاط $(1,5)$، $(0,1)$، $\left(-1,\frac{1}{5}\right)$ والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = 5^x$



- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني حول المحور x ويضيق رأسيًّا.
- $h = 2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي للتمثيل البياني.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، والمدى هو $\{y \mid y < 0\}$

تحقق من فهمك (5A, 5B انظر ملحق الإجابات.

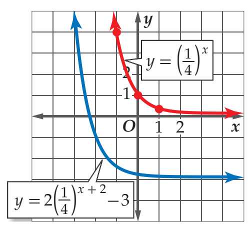
5A) $y = 2^{x+3} - 5$ 5B) $y = 0.1(6)^x - 3$

مثال 6 تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا

مثّل الدالة $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$ بيانيًّا، وحدّد مجالها ومداها.

حدِّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. بما أن $0 < \frac{1}{4} < 1$؛ فالدالة دالة اضمحلال أسي، لذا استعمل النقاط $\left(1,\frac{1}{4}\right)$، $(0,1)$، $(-1,4)$

والتمثيل البياني للدالة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.



- $a = 2$: يتسع التمثيل البياني رأسيًّا.
- $h = -2$: يسحب التمثيل البياني وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى أسفل.

تحقق من فهمك

6) $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$ انظر الهامش.

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية، والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من −3 .

تدرب وحل المسائل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك. (مثال 1)

1) $y = 2^x$ ، $2^{1.5}$ (1-4 انظر ملحق الإجابات.

2) $y = 2(8)^x$ ، $2(8)^{-0.5}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا، وأوجد مقطع المحور y، وحدّد مجالها ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني؛ لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك. (مثال 2)

3) $y = 2\left(\frac{1}{6}\right)^x$ ، $2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5}$

4) $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ، $3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5}$

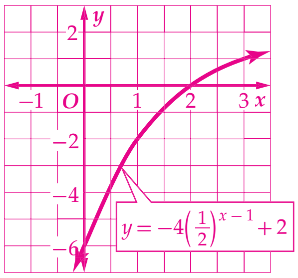
5) **حاسوب:** يزداد انتشار فيروس في شبكة حاسوبية بمعدل 25% كل دقيقة. إذا دخل الفيروس إلى جهاز واحد عند البداية، فأوجد دالة أسية تمثل النمو في انتشار الفيروس منذ البداية، ثم مثلها بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانيّة. (مثال 3) انظر الهامش.

الاضمحلال الأسّي

مثال 6 يبيِّن كيفية تمثيل تحويلات دوال الاضمحلال الأسي بيانيًا.

مثال إضافي

6) 5) $y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$



المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدى = $\{y \mid y < 2\}$

3 التدريب

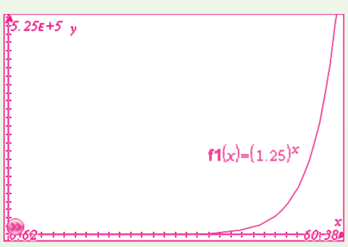
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-21 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات :

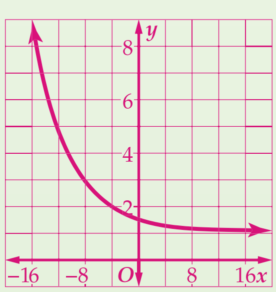
5) $y = (1.25)^t$



بعد الساعة الأولى يكون الفيروس انتشر في 652530 حاسوبًا تقريبًا

تحقق من فهمك :

6)



المجال = $\{x \mid x \in R\}$

المدى = $\{y \mid y > 1\}$

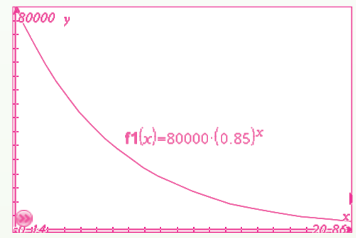
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-21، 27–28، 34-41
ضمن المتوسط	1–25 (فردي)، 27–32، 34–41
فوق المتوسط	22-41

تمثيلات متعددة
يستعمل الطلاب في السؤال 26 جدول القيم، والتمثيلات البيانية، والتحليل لاستكشاف الدوال الأسّية وتمييز أنماط النمو الأسي من أنماط الاضمحلال الأسي.

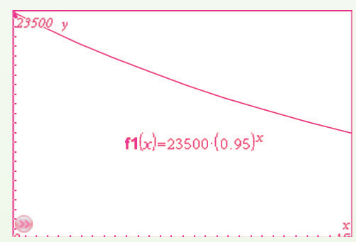
إجابات:

6) $y = 80000\,(0.85)^t$



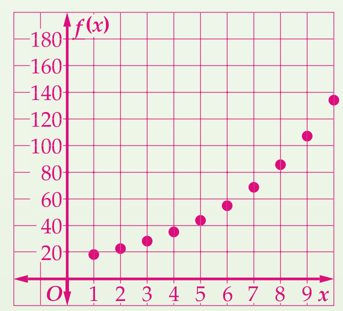
بعد 20 سنة يكون ثمنها 3100 ريال تقريبًا.

20) $y = 23500\,(0.95)^t$



في المباراة 15 يكون الحضور 10887 تقريبًا.

23b)



6) **سيارات:** سيارة كان سعرها 80000 ريال، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة. أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها، ثم مثِّلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية. ثم قدِّر سعر السيارة بعد 20 سنة من شرائها. **(مثال 4)** انظر الهامش.

(7-12) انظر ملحق الإجابات.

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها: **(مثال 5)**

7) $f(x) = 2(3)^x$
8) $f(x) = 4^{x+1} - 5$
9) $f(x) = 2^{x+1} + 3$
10) $f(x) = 3^{x-2} + 4$
11) $f(x) = 3(2)^x + 8$
12) $f(x) = 0.25(4)^x - 6$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها، ومداها: **(مثال 6)**
(13-18) انظر ملحق الإجابات.

13) $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$
14) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$
15) $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$
16) $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$
17) $f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3$
18) $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9$

19) **علوم:** يتكاثر نحل في خلية، فيزداد العدد بمعدل 30% كل أسبوع. إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة، فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدِّر عدد النحل بعد 10 أسابيع. انظر ملحق الإجابات.

20) **كرة قدم:** تناقص عدد الحضور لمباريات فريق كرة قدم بمعدل 5% لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم. أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t)، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500، ومثلها بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم قدِّر عدد الحضور في المباراة 15. انظر الهامش.

21) **هواتف:** تناقص عدد الهواتف العمومية في الآونة الأخيرة نتيجة انتشار الهواتف المحمولة. فإذا كان عدد الهواتف العمومية بالآلاف في إحدى المدن يعطى بالدالة $P(x) = 2.28(0.9)^x$ في السنة x منذ عام 1420 هـ. انظر ملحق الإجابات.

a) مثِّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) وضِّح ماذا يمثل مقطع $P(x)$ وخط التقارب في هذه الحالة.

22) **صحة:** أخذ مريض حقنة، وفي كل يوم تلى ذلك، استهلك جسمه 10% مما تبقى من المادة المحقونة.

a) مثِّل الدالة التي تعبِّر عن هذا الموقف بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

b) متى يكون في جسم المريض أقل من 50% من المادة المحقونة؟ بعد اليوم السادس

c) كم يبقى من المادة المحقونة في الجسم بعد 9 أيام؟ أقل من 40% بقليل

23) **نظرية الأعداد:** تتبع متتابعة عددية نمطًا معينًا، حيث يساوي كل حد فيها 125% من الحد السابق له، فإذا كان الحد الأول يساوي 18 فأجب عما يأتي:

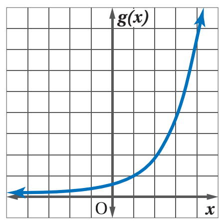
a) اكتب الدالة التي تمثل هذا الموقف. $f(x) = 18(1.25)^{x-1}$

b) مثِّل الدالة لأول 10 حدود بيانيًّا. انظر الهامش.

c) ما قيمة الحد العاشر؟ قرِّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. 134

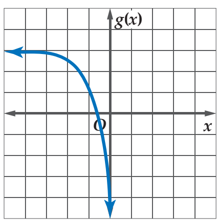
إذا كانت $f(x)$ هي الدالة الرئيسة (الأم) لكل دالة ممثلة بيانيًّا أدناه، والتمثيل البياني لـ $g(x)$ هو تحويل للتمثيل البياني لـ $f(x)$، فأوجد الدالة $g(x)$: انظر الهامش.

24)



$g(x) = 4\,(2)^{x-3} = \frac{1}{2}\,(2)^x$

25)



$g(x) = 4\,(2)^{x-3} = \frac{1}{2}\,(2)^x$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستعمل لحل هذا التمرين جداول القيم أدناه للدوال الأسية $f(x), g(x), h(x)$. انظر ملحق الإجابات.

x	−1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	2.5	2	1	−1	−5	−13	−29

x	−1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$	5	11	23	47	95	191	383

x	−1	0	1	2	3	4	5
$h(x)$	3	2.5	2.25	2.125	2.0625	2.0313	2.0156

a) **بيانيًّا:** مثِّل كل دالة بيانيًّا في الفترة $-1 \le x \le 5$ على ورقة تمثيل بياني مستقلة.

b) **لفظيًّا:** أي الدوال معاملها (a) سالب؟ وضِّح إجابتك.

c) **تحليليًّا:** أي الدوال تمثل نموًّا أسيًّا؟ وأيها تمثل اضمحلالًا أسيًّا؟

27) **مدارس:** يزداد عدد خريجي إحدى المدارس بمعدل 1.055 كل عام منذ عام 1424هـ. إذا كان عدد الخريجين عام 1424هـ 110 طلاب، فإن الدالة $N = 110\,(1.055)^t$ تمثل عدد الخريجين في العام t بعد العام 1424هـ. ما عدد الخريجين المتوقع في عام 1335هـ؟
198 طالبًا تقريبًا

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يلقوا 50 قطعة نقد ويعدوا القطع التي يظهر عليها الشعار، ثم اطلب إليهم أن يستثنوا القطع التي ظهر عليها الشعار ويعيدوا تطبيق النشاط على القطع المتبقية ويستمروا في ذلك، مسجلين عدد القطع التي يظهر عليها الشعار في كل مرة، ثم اطلب إليهم تمثيل نواتج التجربة بيانيًّا، وذلك بتعيين نقاط بحيث يمثل الإحداثي x فيها رقم المحاولة، ويمثل الإحداثي y عدد مرات ظهور الشعار والتوصيل بين النقاط بمنحنى، واطلب إليهم أيضًا أن يفسروا نظريًّا لماذا يمكن تمثيل بياناتهم بالمعادلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

مسائل مهارات التفكير العليا

28) **تحدٍّ:** اكتب دالة أسية يمر منحناها بكل من النقطتين $(1, 6)$, $(0, 3)$
إجابة ممكنة: $f(x) = 3(2)^x$

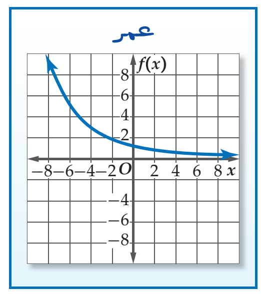
29) **تبرير:** حدد ما إذا كانت كل من الجمل الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضِّح إجابتك. انظر (29, 30) ملحق الإجابات.

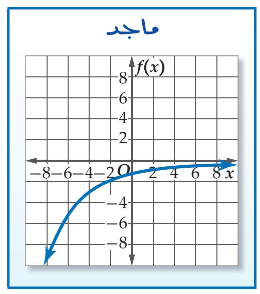
a) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور y.

b) التمثيل البياني للدالة الأسية التي على الصورة $y = ab^{x-h} + k$ يقطع المحور x.

c) إذا كان b عددًا صحيحًا، فإن الدالة $f(x) = |b|^x$ هي دالة نمو أسي.

30) **اكتشف الخطأ:** طُلب إلى عمر وماجد أن يمثّلا الدالة $f(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$ بيانيًّا. أي منهما تمثيله صحيح؟ وضِّح إجابتك.





31) **تحدٍّ:** تتناقص مادة بنسبة 35% مما تبقى كل يوم، إذا بقي منها 8 mg بعد 8 أيام، فكم ملجرامًا من المادة كان موجودًا في البداية؟ 251 mg تقريبًا

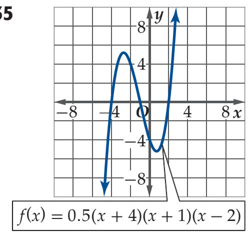
32) **مسألة مفتوحة:** أعطِ قيمة للثابت b تجعل الدالة $f(x) = \left(\frac{8}{b}\right)^x$ دالة اضمحلال أسّي. إجابة ممكنة: 10

33) **اكتب:** صِف التحويل الذي ينقل الدالة $g(x) = b^x$ إلى الدالة $f(x) = ab^{x-h} + k$. انظر ملحق الإجابات.

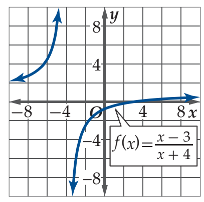
مراجعة تراكمية

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًّا: (الدرس 1-4) انظر ملحق الإجابات.

34)



35)



استعمل منحنى الدالة $f(x)$ لتمثيل كل من الدالتين $g(x) = |f(x)|$, $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: (الدرس 1-5) انظر (36, 37) ملحق الإجابات.

36) $f(x) = -4x + 2$ 37) $f(x) = \sqrt{x+3} - 6$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (الدرس 1-6)

38) $f(x) = x^2 - 2x$
$g(x) = x + 9$

39) $f(x) = \frac{x}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 1$

انظر (38, 39) ملحق الإجابات.

تدريب على اختبار

40) أي من الأعداد الآتية لا ينتمي إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{4 - 2x}$؟ A

A 3   **C** 1

B 2   **D** 0

41) إذا كانت $g(x) = 4x$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ فما قيمة $(f \circ g)(2)$؟ C

A $\sqrt{3}$ **C** 3

B $4\sqrt{3}$ **D** 8

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال 30 أن ضرب أي دالة في عدد سالب يعكس تمثيلها البياني حول المحور x.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اكتب خمس دوال أسية مختلفة بعدة نسخ. وأعط دالة لكل طالب ليكتب إن كانت الدالة تمثّل دالة نمو أسي أم دالة اضمحلال أسي. واطلب إليهم أن يسلموا أوراقهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: ____________ التاريخ: ________

2-1 تدريبات إعادة التعليم

الدوال الأسّية

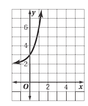
النمو الأسّي تكتب دالة النمو الأسّي على الصورة $y = b^x$، حيث $b > 1$. ويمكن إجراء تحويلات هندسية على التمثيل البياني للدوال الأسية من خلال تغيير قيم الثوابت a, h, k، في المعادلة الأسية: $f(x) = ab^{x-h} + k$.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال النمو الأسي هي: $f(x) = b^x, b > 1$	1) الدالة متصلة، ومتباينة ومتزايدة. 2) المجال: جميع الأعداد الحقيقية. 3) يشكل المحور x خطًّا تقاربيًّا لمنحنى الدالة. 4) المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. 5) تقع النقطة $(0,1)$ على منحنى الدالة.

مثال مثّل الدالة $y = 4^x + 2$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

كوّن جدول قيم، ومثّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

x	-1	0	1	2	3
y	2.25	3	6	18	66

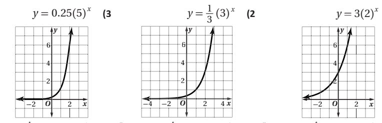


المجال: جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى: الأعداد الحقيقية التي تزيد على 2.

تمارين

مثّل بيانيًّا كل دالة مما يأتي، وحدِّد مجالها ومداها:

1) $y = 3(2)^x$ 2) $y = \frac{1}{3}(3)^x$ 3) $y = 0.25(5)^x$

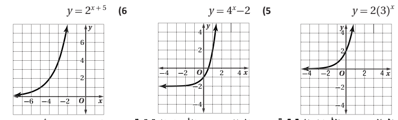


1) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$**

2) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$**

3) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$**

4) $y = 2(3)^x$ 5) $y = 4^x - 2$ 6) $y = 2^{x+5}$



4) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$**

5) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > -2\}$**

6) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$**

الصف: الثالث الثانوي   6   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم (7) دون

الاسم: ____________ التاريخ: ________

2-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

الدوال الأسّية

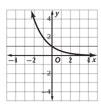
الاضمحلال الأسّي يلخص الجدول الآتي خصائص دوال الاضمحلال الأسي.

الدالة الرئيسة (الأم) لدوال الاضمحلال $f(x) = b^x, 0 < b < 1$	1) الدالة متصلة، ومتباينة، ومتناقصة. 2) المجال: جميع الأعداد الحقيقية. 3) يشكل المحور x خطًّا تقاربيًّا لمنحنى الدالة. 4) المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. 5) تقع النقطة $(0\,,1)$ على منحنى الدالة.

مثال مثّل الدالة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

كوّن جدول قيم، ومثّل النقاط على المستوى البياني، ثم صل بينها بمنحنى أملس.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	0.5	0.25

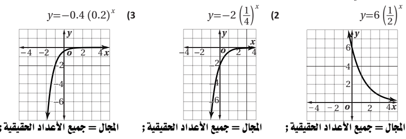


المجال: جميع الأعداد الحقيقة، المدى: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

تمارين

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها:

1) $y=6\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 2) $y=-2\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 3) $y=-0.4\,(0.2)^x$

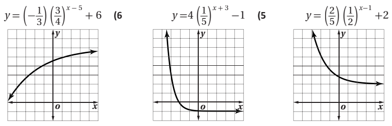


1) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 0\}$**

2) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y < 0\}$**

3) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y < 0\}$**

4) $y = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$ 5) $y = 4\left(\frac{1}{5}\right)^{x+3} - 1$ 6) $y = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-5} + 6$



4) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > 2\}$**

5) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y > -1\}$**

6) **المجال = جميع الأعداد الحقيقية ؛ المدى = $\{y|y < 6\}$**

الصف: الثالث الثانوي   7   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات حل المسألة (8) دون ضمن فوق

الاسم: ____________ التاريخ: ________

2-1 تدريبات حل المسألة

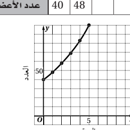
الدوال الأسية

1) **كرات الجولف:** يغلف مصنع لإنتاج كرات الجولف كل 3 كرات في كيس، ويضع كل 3 أكياس في علبة هدايا وكل 3 علب في رزمة، ويضع كلّ 3 رزم في صندوق، وكل 3 صناديق في حاوية للشحن لإرسالها إلى تجار التجزئة. فكم كرة في حاوية الشحن الواحدة؟
243

2) **طي الورق:** إذا قام محمد بطيٍّ ورقة سمكها $0.01\ in$ من منتصفها مرة تلو الأخرى حتى تجاوز عدد الطبقات 25 طبقة، فتوقف عن الطيّ، فكم مرة طوى محمد الورقة؟ وكم طبقة أصبحت؟ وما سمك مجموع الطبقات عندئذٍ؟
5 مرات، 32 طبقة، $0.32\ in$

3) **جمعيات:** يزداد عدد موظفي مصنع للنسيج والزخارف باطّراد، إذ يزداد العدد سنويًّا بمقدار 20% تقريبًا. فإذا بدأت الجمعية بـ 40 عضوًا، فأكمل الجدول، ومثّل عدد الأعضاء بيانيًّا لفترة 5 سنوات.

السنة	0	1	2	3	4	5
عدد الأعضاء	40	48				



4) **أحذية:** تتزايد أسعار الأحذية بمعدل 5.1% كل سنة. فإذا كان سعر حذاء 50 ريالًا في عام 1420هـ، فكم سيكون سعره بعد 25 سنة؟
173.40 ريالًا

5) **نقود:** وضع سامي مبلغًا في مشروع مرابحة يدرّ أرباحًا بمعدل 3% سنويًّا. فإذا كان المبلغ الذي وضعه P ريالًا، وكان t عدد السنوات، وتضاف الأرباح إلى رأس المال في نهاية كل سنة، فأجب عمّا يأتي:

a) اكتب معادلة لتجد المبلغ A، بعد t سنة على افتراض أنه لم يضف إلى المبلغ أو يسحب منه.
$A=P(1.03)^t$

b) إذا كان المبلغ الذي بدأ به يساوي 500 ريال ولم يضف إليه أو يأخذ منه، فكم يصبح هذا المبلغ بعد 10 سنوات؟
671.96 ريالًا

c) ما أقل عدد من السنوات يلزم؛ ليتضاعف المبلغ؟
24 سنة

الصف: الثالث الثانوي   8   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

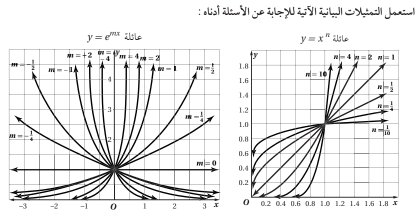
التدريبات الإثرائية (9) فوق

الاسم: ____________ التاريخ: ________

2-1 التدريبات الإثرائية

عائلات المنحنيات

استعمل التمثيلات البيانية الآتية للإجابة عن الأسئلة أدناه:



1) استعمل التمثيل البياني لعائلة الدوال $y=x^n$ لوصف العلاقة بين منحنيات الدوال: $y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^1, y = x^2$ (رُسم كل من منحنيي $y = \sqrt{x}, y = x^2$ عندما $x \geq 1$ على شكل مستقيمات فقط ليكون التمثيل واضحًا).

كل من المنحنيين عندما $n = \frac{1}{2}$، و $n = 2$ صورة للآخر بالانعكاس حول المستقيم $y = x^1$.

2) مثّل بيانيًّا $y = x^n$ لقيم $n = \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, 4, 10$ على شبكة رسم بياني مع منحنيات الدوال $y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^1, y = x^2$.

انظر تمثيلات الطلاب.

3) ما المنطقتان في الربع الأول اللتان لا تحتويان على نقاط من منحنيات عائلة الدالة $y = x^n$؟

$\{(x,y)|x \geq 1, 0 < y \leq 1\}, \{(x,y)|0 < x \leq 1, y \geq 1\}$

4) مثّل بيانيًّا عائلة منحنيات الدوال $y = e^{mx}$ على المستوى البياني أعلاه عندما $m = 1, m = -1$.
(استعمل الحاسبة لإيجاد قيم الدالة لإكمال التمثيل البياني، حيث e عدد غير نسبي وتساوي 2.71828 تقريبًا).

انظر تمثيلات الطلاب.

5) صف العلاقة بين هذين المنحنيين والمحور y.

المنحنيان عندما $m = 1, m = -1$ كل منهما صورة للآخر بالانعكاس حول المحور y.

6) مثّل الدوال $y = e^{mx}$ بيانيًّا لقيم $m = 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 2, \pm 4$.

انظر تمثيلات الطلاب.

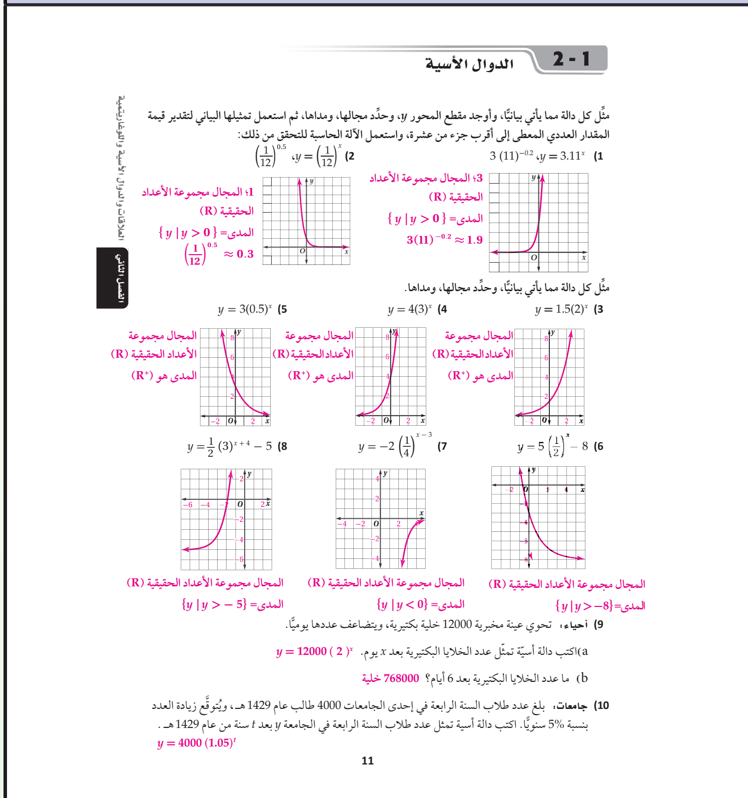
الصف: الثالث الثانوي   9   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (11) دون ضمن فوق



2 - 1 الدوال الأسية

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وأوجد مقطع المحور y، وحدِّد مجالها، ومداها، ثم استعمل تمثيلها البياني لتقدير قيمة المقدار العددي المعطى إلى أقرب جزء من عشرة، واستعمل الآلة الحاسبة للتحقق من ذلك:

1) $y = 3.11^x$، $3\,(11)^{-0.2}$

3؛ المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى= $\{\,y \mid y > 0\,\}$
$3(11)^{-0.2} \approx 1.9$

2) $y = \left(\frac{1}{12}\right)^x$، $\left(\frac{1}{12}\right)^{0.5}$

1؛ المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى= $\{\,y \mid y > 0\,\}$
$\left(\frac{1}{12}\right)^{0.5} \approx 0.3$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها، ومداها.

3) $y = 1.5(2)^x$

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى هو (R^+)

4) $y = 4(3)^x$

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى هو (R^+)

5) $y = 3(0.5)^x$

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى هو (R^+)

6) $y = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8$

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى= $\{y \mid y > -8\}$

7) $y = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى= $\{y \mid y < 0\}$

8) $y = \frac{1}{2}(3)^{x+4} - 5$

المجال مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
المدى= $\{y \mid y > -5\}$

9) أحياء: تحوي عينة مخبرية 12000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها يوميًّا.

a) اكتب دالة أسيّة تمثّل عدد الخلايا البكتيرية بعد x يوم. $y = 12000\,(2)^x$

b) ما عدد الخلايا البكتيرية بعد 6 أيام؟ 768000 خلية

10) جامعات: بلغ عدد طلاب السنة الرابعة في إحدى الجامعات 4000 طالب عام 1429 هـ، ويُتوقَّع زيادة العدد بنسبة 5% سنويًّا. اكتب دالة أسية تمثل عدد طلاب السنة الرابعة في الجامعة y بعد t سنة من عام 1429 هـ.
$y = 4000\,(1.05)^t$

الفصل الثاني العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

11

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

التقويم التكويني

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات أسية بيانيًا أو باستعمال ميزة الجداول.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire.

إرشادات التدريس

ذكّر الطلاب بوضع الأسس بين قوسين في الخطوة 1 من النشاط.

2 التدريس

العمل في مجموعات تعاونية

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، واطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط وحل التمارين 1-5.

نشاط 1

- قبل البدء بمناقشة النشاط، استعمل معادلة بسيطة مثل $2x = 6$ لتذكّر الطلاب بكيفية حل المعادلات بيانيًا. ثم مثّل المعادلتين $y = 2x$ و $y = 6$ بيانيًا، وحدد نقطة التقاطع.
- اسأل الطلاب: ما أهمية وضع الأسس بين أقواس في الخطوة 1 من النشاط؟
- اطلب إلى الطلاب تعويض حل النشاط في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

تدريب

اطلب إلى الطلاب حل التمارين 2-5.

استكشاف 2-2

معمل الحاسبة البيانية:

حل المعادلات والمتباينات الأسية

Solving Exponential Equations and Inequalities

يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، لحل المعادلات الأسية بيانيًا أو باستعمال خاصية الجدول. ولعمل ذلك اكتب المعادلات الأسية على صورة نظام من المعادلات.

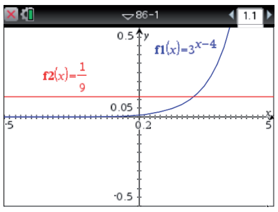
نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلة $3^{x-4} = \frac{1}{9}$

الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًا في صورة دالتين مستقلتين، وأدخل 3^{x-4} في f1، و $\frac{1}{9}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

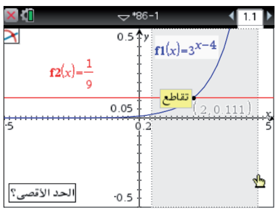
on 3^{x-4} enter tab $\frac{1}{9}$ enter



الخطوة 2: استعمال ميزة نقاط التقاطع.

إن ميزة **نقاط التقاطع** في قائمة **تحليل الرسم البياني** تمكنك من تقدير الزوج المرتب الذي يمثّل نقطة التقاطع.

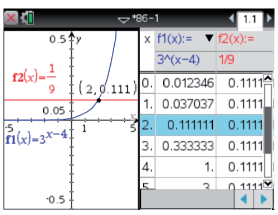
اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرِّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2, 0.111)؛ أي أن الحل هو 2



الخطوة 3: استعمال خاصية الجدول

تستعمل هذه الخاصية عادة لإنشاء جدول لقيم الدالة؛ يسهم في تحليلها (تحديد أصفارها، وتحديد خطوط التقارب لها، وتحديد نقطة تقاطع دالتين، .. إلخ). تحقق من صحة حلّك باستعمال **خاصية الجدول**. اعمل جدولًا في شاشة جانبية، وذلك بالضغط على مفتاح: menu واختر منها 7: الجدول ثم اختر 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

يبيِّن الجدول قيم x وقيم $f(x)$ أو المناظرة لها y لكل تمثيل بياني؛ فعندما $x = 2$، يكون للدالتين القيمة نفسها، وهي $0.111 \approx \frac{1}{9}$، وهذا يعني أن حل المعادلة هو 2 .



التحقق عوّض عن x بـ 2 في المعادلة الأصلية.

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	المعادلة الأصلية
$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	بتعويض 2 بدلًا من x
$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	بالتبسيط
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓	الحل صحيح

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل معادلة مما يأتي :

1) $9^{x-1} = \frac{1}{81}$ **−1**

2) $4^{x+3} = 2^{5x}$ **2**

3) $5^{x-1} = 2^{x}$ **1.76**

4) $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$ **−1.2**

5) $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$ **−2.6**

6) $6^{3x} = 8^{x-1}$ **−0.6309**

نشاط 2

- تأكد من فهم الطلاب لماذا نعيد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

تدريب

اطلب إلى الطلاب حل التمارين 12-7

3 التقويم

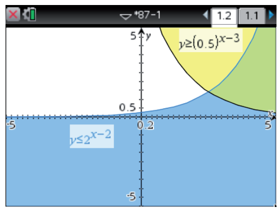
التقويم التكويني

استعمل السؤالين 12 ,4 لتقويم مدى إتقان الطلاب لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات أسّية.

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل متباينات أسية.

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية لحل المتباينة $2^{x-2} \ge 0.5^{x-3}$



الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة.

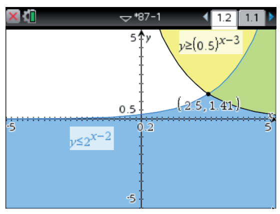
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي: $y \ge 2^{x-2}$ أو $y \le 2^{x-2}$، والمتباينة الثانية هي: $y \ge 0.5^{x-3}$.

ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

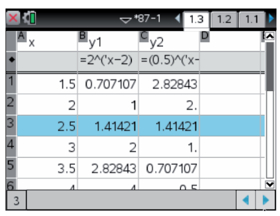
on del $\le$ 2^{x-2} enter tab del $\ge$ 0.5^{x-3} enter

فتكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.



الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل

مجموعة إحداثيات x للنقاط التي تقع في منطقة تقاطع التظليلين تمثل مجموعة الحل للمتباينة الأصلية، و باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** وذلك بالضغط على مفتاح menu ، واختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم اختيار 4: نقاط التقاطع والضغط في أي نقطة على الشاشة وتحريك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب (2.5 ,1.41)، حيث يمكن استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \ge 2.5\}$.



الخطوة 3: استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

تحقق من الحل باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات . أنشئ جدولًا لقيم x بزيادة 0.5 في كل مرة، وذلك بالضغط على المفاتيح: on ، واكتب $y1 = 2^{x-2}$ في العمود الثاني، $y2 = 0.5^{x-3}$ في العمود الثالث واختر مرجع المتغير في كل مرّة. لاحظ أنه لقيم x الأكبر من $x = 2.5$ تكون $y1 > y2$، وهذا يؤكد أن حل المتباينة هو $\{x \mid x \ge 2.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل كل متباينة مما يأتي :

7) $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$ $\{x \mid x > 1.8\}$

8) $16^{x-1} > 2^{2x+2}$ $\{x \mid x > 3\}$

9) $3^x - 4 \le 5^{\frac{x}{2}}$ $\{x \mid x < 2\}$

10) $5^{x+3} \le 2^{x+4}$ $\{x \mid x \le -2.2\}$

11) $12^{x-5} \ge 9.32$ $x \ge 5.8983$

12) $12^{4x-7} < 4^{2x+3}$ $x < 3.008$

13) **اكتب:** وضح لماذا يكون تمثيل نظام من المعادلات بيانيًا صالحًا لحل معادلات أو متباينات أسية.

لأن حل المعادلة الأسية يعتمد على تمثيل كلٍّ من طرفيها بيانيًّا (نظام من معادلتين)، ثم تقدير الزوج المرتب الذي يمثِّل نقطة التقاطع، والتي تمثل حلًّا للمعادلة الأسية، وبالمثل فإن حل المتباينة الأسية يعتمد على تمثيل متباينتين تمثّلان طرفَي المتباينة، وإيجاد منطقة الحل المشتركة.

من المحسوس إلى المجرد:

اطلب إلى الطلاب توضيح كيف تتغير مجموعة الحل في النشاط 2 إذا كانت المتباينة $2^{x-2} \le 0.5^{x-3}$

91 استكشاف 2-2 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات الأسية

2-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-2

تمثيل الدوال الأسّية بيانيًّا.

الدرس 2-2

حل معادلات أسيّة.

حل متباينات أسيّة.

حل مسائل تتضمن نموًّا أسيًّا واضمحلالًا أسيًّا.

ما بعد الدرس 2-2

تطوير تعريف اللوغاريتمات من خلال استكشاف ووصف العلاقة بين الدوال الأسية ومعكوسها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما قيمة x التي تمثّل عام 1430 هـ؟ 5
- ما عدد المشتركين الذي يمكن تمثيله بالقيمة $y = 5.2$؟ 5200000
- كم سيكون عدد المشتركين عام 1432 هـ؟ 19928000 مشترك تقريبًا

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسّية
Solving Exponential Equations and Inequalities

فيما سبق:

درستُ تمثيل الدوال الأسية بيانيًا. (الدرس 1−2)

والآن:

- أحل معادلات أسية.
- أحل متباينات أسية.
- أحل مسائل تتضمن نموًا أسيًا واضمحلالًا أسيًا.

المفردات:

المعادلة الأسية
exponential equation

الربح المركب
compound interest

المتباينة الأسية
exponential inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتزايد اشتراكات مواقع الإنترنت بطريقة سريعة، فتأخذ شكل دالة أسية. فإذا كان عدد الاشتراكات في أحد المواقع يُعطى بالمعادلة $y = 2.2(1.37)^x$، حيث x عدد السنوات منذ عام 1425 هـ، و y عدد المشتركين بالملايين.

فيمكنك استعمال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد عدد المشتركين في سنة معينة، أو تحديد السنة التي يكون فيها عدد المشتركين عند مستوى معين.

حل المعادلات الأسية: تظهر المتغيرات في **المعادلة الأسية** في موقع الأسس.

مفهوم أساسي — خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0,\ b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. و إذا كان $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسية لحل معادلات أسية.

مثال 1 — حل المعادلات الأسية

حُلّ كل معادلة مما يأتي:

a) $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	$8 = 2^3$
$2^x = 2^9$	خاصية قوة القوة
$x = 9$	خاصية المساواة للدوال الأسية

b) $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	$9 = 3^2$
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	خاصية قوة القوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$-2 = 2x$	بطرح $4x$ من كلا الطرفين
$-1 = x$	بقسمة كلا الطرفين على 2

تحقق من فهمك

1A) $4^{2n-1} = 64$ 2

1B) $5^{5x} = 125^{x+2}$ 3

مصادر الدرس 2 – 2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (93)	• تنويع التعليم ص (93 , 94 , 96)	• تنويع التعليم ص (94 , 96)
كتاب التمارين	• ص (12)	• ص (12)	• ص (12)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

يمكنك استعمال معلومات عن النمو أو الاضمحلال لكتابة دالة أسية.

مثال 2 من واقع الحياة — كتابة دالة أسّية

علوم: بدأ سلطان تجربة مخبرية بـ 7500 خلية بكتيرية. وبعد أربع ساعات أصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000 خلية.

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.

في بداية التجربة كان الزمن (x) صفر ساعة، وعدد الخلايا (y) يساوي 7500 خلية بكتيرية، لذا عوّض هذه القيم لإيجاد المقطع y أو قيمة a.

$y = ab^x$ الدالة الأسية

$7500 = a\,b^0$ بالتعويض عن x بالعدد 0، وعن y بالعدد 7500

$7500 = a$ $b^0 = 1$

وعندما $x = 4$، يصبح عدد الخلايا البكتيرية 23000، عوّض هذه القيم في الدالة الأسية لتحديد قيمة b.

$23000 = 7500 \cdot b^4$ بالتعويض عن x بالعدد 4، وعن y بالعدد 23000، وعن a بالعدد 7500

$3.067 \approx b^4$ بقسمة كلا الطرفين على 7500

$\sqrt[4]{3.067} \approx b$ بإيجاد الجذر الرابع للطرفين

$1.323 \approx b$ باستعمال الحاسبة

الدالة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية هي $y = 7500(1.323)^x$.

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة؟

$y = 7500(1.323)^x$ المعادلة التي تمثل عدد الخلايا البكتيرية

$= 7500(1.323)^{12}$ بالتعويض عن x بالعدد 12

≈ 215664 باستعمال الحاسبة

سيكون هنالك 215664 خلية بكتيرية تقريبًا بعد 12 ساعة.

تحقق من فهمك

2) إعادة تصنيع: أنتج مصنع 3.2 ملايين عبوة بلاستيكية عام 1426 هـ، وفي عام 1430 هـ أنتج 420000 عبوة بإعادة تصنيع العبوات التي أنتجها عام 1426 هـ.

2A) مفترضًا أن إعادة التصنيع استمرت بالمعدل نفسه، اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل عدد العبوات المعاد تصنيعها y بعد x سنة مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين. $y = 3200000(0.60)^x$

2B) كم تتوقع أن يكون عدد العبوات المُعادة التصنيع عام 1471 هـ؟ صفر تقريبًا

الربط مع الحياة

قبل إعادة تدوير البلاستيك يتم غسله بمادة الصودا الكاوية المضاف إليها الماء الساخن. ولا ينصح باستعمال العبوات المعاد تدويرها للمواد الغذائية.

تستعمل الدوال الأسية في مسائل تتضمن **الربح المركب**؛ وهو الربح الذي يحسب المبلغ المستثمر (رأس المال) مضافًا إليه أي أرباح سابقة، وليس فقط عن رأس المال كما هو في الربح البسيط.

مفهوم أساسي — الربح المركب

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدل الربح السنوي المتوقع، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

حل المعادلات الأسّية

مثال 1 يبيِّن كيفية حل المعادلات الأسية.

مثال 2 يبيِّن كيفية كتابة دالة أسية لتمثيل موقف حياتي.

مثال 3 يبيِّن كيفية إيجاد الربح المركّب باستعمال دالة أسّية.

مثالان إضافيان

1 حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $3^x = 9^4$ 8

b) $2^{5x} = 4^{2x-1}$ −2

2 **سكان:** يقدر عدد سكان إحدى المدن عام 1420 هـ بـ 1321045 نسمة، وفي عام 1427 هـ قدّر بـ 1512986 نسمة.

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لتمثيل عدد السكان. ليكن x عدد السنوات منذ عام 1420 هـ. $y = 1321045(1.0196)^x$

b) تنبأ بعدد سكان تلك المدينة عام 1433 هـ. 1700221

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

المحتوى الرياضي

حل المعادلات الأسية يمكن حل المعادلات الأسّية البسيطة من خلال إعادة كتابة طرف، أو كلا طرفي المعادلة على أن تكون الأساسات متساوية، وعندئذٍ يمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال الأسّية لإيجاد قيم المتغيرات.

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا أردت أن يتحقق الطلاب من صحة حلهم للمعادلة،

فذكرهم بتعويض هذا الحل في المعادلة الأصلية؛ للتأكد من أنه يحققها.

مثال إضافي

3 يعطي استثمار ما ربحًا مركبًّا معدل نسبته 5.4% سنويًّا، ويتم إضافة الأرباح إلى رأس المال 4 مرات سنويًّا، فإذا تم استثمار مبلغ 40000 ريال، فكم سيصبح المبلغ الكلي بعد 8 سنوات؟

61435.6 ريالًا

حل المتباينات الأسية

مثال 4 يبيِّن كيفية حل المتباينات الأسية.

مثال إضافي

4 حل المتباينة $5^{3-2x} > \frac{1}{625}$

$x < \frac{7}{2}$

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة وشرح خاصية المساواة للدوال الأسية مع تضمينها أمثلة متنوعة في مدونة الفصل.

مثال 3 الربح المركب

مال: استثمر حمد مبلغ 25000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.2%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة مقربًا إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

افهم: أوجد المبلغ الكلي المتوقع بعد 15 سنة.

خطط: بما أنه تتم إضافة الأرباح إلى رأس المال، إذن استعمل صيغة الربح المركب.

$P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

حُلّ:

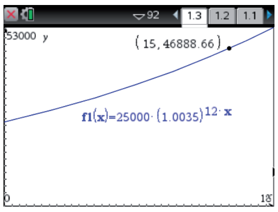
$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ صيغة الربح المركب

$= 25000\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$ $P = 25000, r = 0.042, n = 12, t = 15$

≈ 46888.66 باستعمال الحاسبة

تحقق: مثّل المعادلة المناظرة بيانيًّا $f(x) = 25000(1.0035)^{12x}$، ثم أوجد قيمة y عندما $x = 15$ على الرسم بالضغط على مفتاح menu ثم اختر 8: الهندسة واختر منها 1: النقاط والمستقيمات ومنها 2: نقطة على المستقيم ثم اضغط على الرسم البياني لتحدد نقطة يظهر الزوج المرتب الذي يمثلها.

اضغط esc ثم حدِّد الإحداثي x للنقطة واكتب 15، سيظهر الإحداثي y المقابل 46888.66، إذن الإجابة صحيحة.



تنبيه!

نسب مئوية: تذكر تحويل جميع النسب المئوية إلى كسور عشرية، مثل: $4.2\% = 0.042$

تنبيه!

تقريب الأعداد: يمكنك تقريب الأعداد الظاهرة على الشاشة، بحيث تظهر على الرسم بالشكل المناسب وذلك بالضغط على مفتاح on واختيار 5 الإعدادات ثم اختيار 2: إعدادات المستند... واختيار التقريب المناسب، وستظهر الأعداد بحسب عدد المنازل المطلوبة.

✓ تحقق من فهمك

3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 12%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنواتٍ مقربًا الناتج إلى أقرب منزلتين عشريتين؟

3) 181939.67 ريالًا تقريبًا؛

p = 100000,

r = 0.12,

t = 5 , n = 24

$A = 100000\left(1 + \frac{0.12}{24}\right)^{24\times5}$

$= 181939.67$

حل المتباينات الأسية: **المتباينة الأسية** هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

مفهوم أساسي — خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$، فإن $x > 6$، و إذا كان $x > 6$، فإن $2^x > 2^6$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين ≥

مفهوم أساسي — خاصية التباين لدالة الاضمحلال

التعبير اللفظي: إذا كان $0 < b < 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $y < x$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$، فإن $x < 5$، و إذا كان $x < 5$، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا مع رمز التباين ≥

مثال 4 حل المتباينات الأسية

حُلّ المتباينة $16^{2x-3} < 8$

$16^{2x-3} < 8$	المتباينة الأصلية
$(2^4)^{2x-3} < 2^3$	$16 = 2^4, 8 = 2^3$
$2^{8x-12} < 2^3$	خاصية قوة القوة
$8x - 12 < 3$	خاصية التباين للدوال الأسية
$8x < 15$	بجمع 12 للطرفين
$x < \frac{15}{8}$	بقسمة الطرفين على 8

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ساعد الطلاب على تطوير حسهم الاستثماري من خلال توفير مبلغ من المال لاستثماره، واطلب إليهم أن يبحثوا في الإنترنت أو في الصحف عن استثمارات بمعدلات ربح مناسبة. وعليهم أن يسجلوا معلومات موثقة تشمل اسم المشروع الاستثماري، ومعدل نسبة الربح، وزمن إضافة الأرباح إلى رأس المال، والقيود التي يجب الالتزام بها. ثم اطلب إليهم أن يمثّلوا المبلغ الكلي مع مرور الزمن بيانيًّا.

2 - 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

1) $4^{x+35} = 64^{x-3}$ $x = 22$
2) $\left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2}$ $x = \frac{4}{5}$
3) $3^{x-4} = 9^{x+28}$ $x = -60$
4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1}$ $x = \frac{1}{5}$
5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1}$ $x = -\frac{1}{13}$
6) $3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$ $x = 0$
7) $400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$ $x = -\frac{10}{7}$
8) $10^{2x+7} = 1000^{x}$ $x = 7$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

9) $(0, 5), (4, 3125)$ $y = 5(5)^x$
10) $(0, 8), (4, 2048)$ $y = 8(4)^x$
11) $(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75)$ $y = 0.75(7)^x$
12) $(0, -0.2), (-3, -3.125)$ $y = -0.2(0.4)^x$
13) $(0, 15), \left(2, \frac{15}{16}\right)$ $y = 15\left(\frac{1}{4}\right)^x$
14) $(0, 0.7), \left(\frac{1}{2}, 3.5\right)$ $y = 0.7(25)^x$

حُلَّ كل متباينة مما يأتي:

15) $400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$ $x > -\frac{10}{7}$
16) $10^{2x+7} \ge 1000^x$ $x \le 7$
17) $\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \le 64^{x-1}$ $x \ge \frac{11}{9}$
18) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-6} < 4^{4x+5}$ $x > \frac{8}{11}$
19) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x+8} \le 216^{x-3}$ $x \ge -\frac{7}{5}$
20) $128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x}$ $x < -\frac{7}{9}$

21) **علوم:** إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t، وعددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه، فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العينتين؟ $t = 38$

12

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-20 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

27) إجابة ممكنة:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$ المعادلة الأصلية

$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 2^{-4x-1}$ ، $8 = 2^3$ $\quad 2^{-4x-1} = (2^3)^{2x+1}$

$2^{-4x-1} = 2^{6x+3}$ اضرب القوى

$-4x - 1 = 6x + 3$ خاصية المساواة للدوال الأسية

$-10x = 4$ حل المعادلة الخطية

$x = \frac{-4}{10} = -\frac{2}{5}$

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x-1} \ge \frac{1}{243}$ $x \ge -2$

4B) $2^{x+2} > \frac{1}{32}$ $x > -7$

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مثال 1)

1) $8^{4x+2} = 64$ 0
2) $5^{x-6} = 125$ 9
3) $3^{5x} = 27^{2x-4}$ 12
4) $16^{2y-3} = 4^{y+1}$ $\frac{7}{3}$
5) $2^{6x} = 32^{x-2}$ -10
6) $49^{x+5} = 7^{8x-6}$ $\frac{8}{3}$
7) $81^{a+2} = 3^{3a+1}$ -7
8) $256^{b+2} = 4^{2-2b}$ -1
9) $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$ $\frac{5}{3}$
10) $8^{2y+4} = 16^{y+1}$ -4

11) **علوم:** الانقسام هو عملية حيوية يتم فيها انشطار الخلية إلى خليتين مطابقتين تمامًا للخلية الأصلية، وتنقسم إحدى أنواع الخلايا البكتيرية كل 15 دقيقة. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسّية على الصورة $c = ab^t$ تمثل عدد الخلايا البكتيرية c المتكونة من انقسام خلية واحدة بعد t من الدقائق. $c = 2^{\frac{t}{15}}$

b) إذا بدأت خلية بكتيرية واحدة بالانقسام، فكم خلية ستكون بعد ساعة؟ 16 خلية

12) **مال:** ورث خالد مبلغ 100000 ريال عن والده عام 1430 هـ، واستثمره في مشروع تجاري، وقدّر خالد أن المبلغ المستثمَر سيصبح 169588 ريالًا بحلول عام 1442 هـ. (مثال 2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ تمثل المبلغ y بدلالة عدد السنوات x منذ عام 1430 هـ. $y = 100000(1.045)^x$

b) افترض أن المبلغ استمر في الزيادة بالمعدل نفسه، فكم سيصبح عام 1450 هـ إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ 241171.40 ريالًا

13) استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4.3%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3) 94533.78 ريالًا تقريبًا

14) استثمر ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 2.25%، بحيث تُضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريًّا. ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين؟ (مثال 3) 57223.22 تقريبًا

حل كل متباينة مما يأتي: (مثال 4)

15) $4^{2x+6} \le 64^{2x-4}$ $x \ge 4.5$
16) $25^{y-3} \le \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3}$ $y \le \frac{-3}{5}$
17) $625 \ge 5^{a+8}$ $a \le -4$
18) $10^{5b+2} > 1000$ $b > \frac{1}{5}$
19) $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$ $c > \frac{3}{4}$
20) $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$ $t \le -40$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

21) $(3, 100), (0, 6.4)$ $y = 6.4(2.5)^x$
22) $(4, 81), (0, 256)$ $y = 256(0.75)^x$
23) $(5, 371293), (0, 128)$ $y = 128(4.926)^x$
24) $(4, 21609), (0, 144)$ $y = 144(3.5)^x$

25) **علوم:** وُضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C، فتناقصت درجة حرارة الشاي، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t دقيقة بالدالة $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة. 45.02° C تقريبًا

b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة. 28.94° C تقريبًا

c) إذا كانت درجة الحرارة المناسبة لشرب الشاي هي 60°C، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساويةً لها أم أقل منها بعد 10 دقائق؟ أقل منها

26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتمترات طرديًّا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعًا للأس $\frac{3}{2}$، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6m، وقطر قاعدة جذعها 19.1cm، فاكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة عندما يكون ارتفاعها h متر. $d = 1.3\,h^{\frac{3}{2}}$

حُلّ كل معادلة أسية مما يأتي: 27) انظر الهامش.

27) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$
28) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$ $\frac{1}{7}$
29) $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$ -6
30) $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$ $-\frac{4}{13}$
31) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$ $\frac{11}{8}$
32) $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$ 1

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-20، 26 ، 29-32 ، 34 ، 40-53
ضمن المتوسط	1-25 (فردي) ، 2-6 ، 27-31 (فردي) ، 33-35 ، 36 ، 38 ، 39 ، 40-53
فوق المتوسط	21-53

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 35 النموذج الحسي وجدول القيم والمعادلة والتحليل لوصف دالة أسيّة.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب وصف قيم b الممكنة في تعبير الدالة الأسية على الصورة $y = b^x$.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-1، 2-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (30)

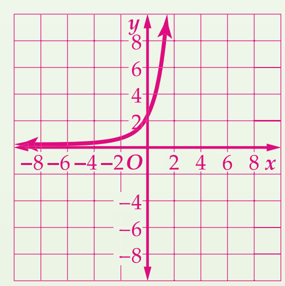
إجابات:

33c) التقدير أكبر من العدد الحقيقي للسكان بـ 375 مليونًا.

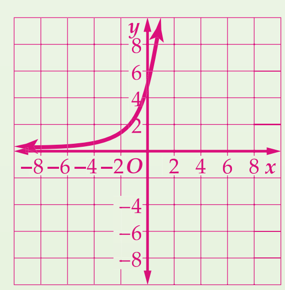
33d) 9.3498 مليارات تقريبًا، وبما أن التنبؤ بعدد السكان عام 2000 كان أكبر من العدد الحقيقي، فقد يكون هذا التنبؤ أكبر مما سيكون عليه في الواقع في ذلك الوقت.

39) صحيحة دائمًا؛ لأن 2^x موجبة لجميع قيم x، بينما $-(8^{20x})$ سالبة لجميع قيم x.

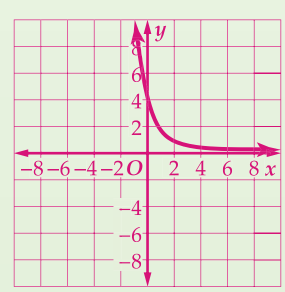
40)



41)



42)



---

33) سكان: بلغ عدد سكان العالم عام 1950م 2.556 مليار نسمة، وبحلول عام 1980م أصبح 4.458 مليارات نسمة.

a) اكتب دالة أسية على صورة $y = ab^x$ يمكن أن تمثّل تزايد عدد سكان العالم من عام 1950م إلى عام 1980م بالمليار، حيث x عدد السنوات منذ عام 1950م (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف) $y = 2.556(1.0187)^x$

b) افترض أن تزايد عدد السكان استمر بالمعدل نفسه، فقدّر عدد سكان العالم عام 2000. **6.455 مليارات تقريبًا**

c) إذا كان عدد سكان العالم عام 2000م هو 6.08 مليارات نسمة تقريبًا، فقارن بين تقديرك والعدد الحقيقي للسكان. **انظر الهامش**

d) استعمل الدالة التي توصلت إليها في فرع a لتقدير عدد سكان العالم عام 2020م. ما دقة تقديرك؟ وضّح إجابتك. **انظر الهامش**

34) ثقافة مالية: يُفاضل سعيد بين خيارين للاستثمار الطويل الأمد، ويريد أن يختار أحدهما. **انظر ملحق الإجابات.**

a) اكتب دالة كل من الخيار الأول والخيار الثاني للاستثمار.

b) مثّل بالحاسبة البيانية منحنًى يوضح المبلغ الكلي من كل استثمار بعد t سنة.

c) أي الخيارين أفضل في الاستثمار الخيار الأول أم الثاني؟ فسّر إجابتك؟

35) تمثيلات متعددة: ستستكشف في هذا التمرين الزيادة المتسارعة في الدوال الأسية . قصّ ورقة إلى نصفين، وضع بعضهما فوق بعض، ثم قصّهما معًا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض، وكرّر هذه العملية عدة مرات.

a) **حسيًا:** عُدّ قطع الورق الناتجة بعد القص الأول، ثم بعد القص الثاني، والثالث، والرابع. **2، 4، 8، 16**

b) **جدوليًا:** دوّن نتائجك في جدول. **انظر ملحق الإجابات.**

c) **رمزيًا:** استعمل النمط في الجدول لكتابة معادلة تمثل عدد قطع الورق بعد القص x مرة. $y = 2^x$

d) **تحليليًا:** يُقدر سُمك الورقة الاعتيادية بنحو 0.003in، اكتب معادلة تمثل سُمك رزمة الورق بعد قصها x مرة. $y = 0.003(2)^x$

e) **تحليليًا:** ما سُمك رزمة من الورق بعد قصها 30 مرة؟ **3221225.47 in تقريبًا**

مسائل مهارات التفكير العليا

36) تحدٍّ: حُلّ المعادلة الأسية $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$. **37.1610**

37) مسألة مفتوحة: اكتب معادلة أسية يكون حلها $x = 2$. **إجابة ممكنة: $4^x = 4^2$**

38) برهان: أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$. **انظر ملحق الإجابات.**

39) تبرير: حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. وضح إجابتك. **انظر الهامش**

$2^x > -(8^{20x})$ لجميع قيم x.

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: (الدرس 2-1) **40-42 انظر الهامش**

40) $y = 2(3)^x$ 41) $y = 5(2)^x$ 42) $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

حُلّ كل معادلة مما يأتي: (مهارة سابقة)

43) $\sqrt{x+5} - 3 = 0$ **4** 44) $\sqrt{3t-5} - 3 = 4$ **18**

45) $\sqrt[4]{2x-1} = 2$ **8.5** 46) $(5x+7)^{\frac{1}{5}} + 3 = 5$ **5**

47) $(3x-2)^{\frac{1}{5}} + 6 = 5$ **$\frac{1}{3}$** 48) $(7x-1)^{\frac{1}{3}} + 4 = 2$ **−1**

أوجد $[g \circ h](x)$, $[h \circ g](x)$ لكل زوج من الدوال الآتية: (الدرس 1-6)

49) $h(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x + 4$ **$[g \circ h](x) = 6x + 1$, $[h \circ g](x) = |x|$**

50) $h(x) = x + 4$, $g(x) = |x|$ **$[g \circ h](x) = |x + 4|$, $[h \circ g](x) = |x| + 4$**

51) أوجد الدالة العكسية للدالة: $f(x) = 2x + 1$ (الدرس 1-7) **$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$**

تدريب على اختبار

52) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$ ؟ **C**

A −1 C 1

B 0 D 2

53) إذا كانت $f(x) = 5x$ ، فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟ **A**

A −25 C 5

B −5 D 25

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب توسعة حل المثال 3 ، وذلك بزيادة عدد مرات إضافة الأرباح إلى المبلغ الأصلي. ولتكن هذه الإضافة يوميًا $(n = 354)$، ثم استكشف ما الذي سيحصل لو تغيرت n إلى عشرات الآلاف المرات في العام. لاحظ في هذه الحالة أن المبلغ الكلي يمكن أن يصل إلى الحد الأعلى، وهو 46938.51 ريالًا .

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون: دون المتوسط   ضمن: ضمن المتوسط   فوق: فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 تدريبات إعادة التعليم

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حَلُّ معادلات أسيّة تنطبق جميع خصائص الأسس النسبية على الأسس الحقيقية، تذكر أن $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, (a^m)^n = a^{mn}, a^m \div a^n = a^{m-n}$.

خاصية المساواة على الدوال الأسيّة	إذا كان b عددًا موجبًا غير الواحد الصحيح، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

مثال 1 حلّ المعادلة $4^{x-1} = 2^{x+5}$.

$4^{x-1} = 2^{x+5}$	المعادلة الأصلية
$(2^2)^{x-1} = 2^{x+5}$	إعادة كتابة 4 على صورة 2^2
$2(x-1) = x+5$	خاصية المساواة للدوال الأسية
$2x-2 = x+5$	خاصية التوزيع
$x = 7$	بطرح x، وإضافة 2 إلى الطرفين.

مثال 2 اكتب دالة أسيّة على الشكل $y = ab^x$ يمر منحناها بالنقطتين $(0, 3)$ ، $(4, 81)$.

لما كان المنحنى يمر بالنقطة $(0, 3)$ فالمقطع y هو 3، لذا فإن $a = 3$. ولما كانت النقطة الأخرى $(4, 81)$ فإن $b = \sqrt[4]{\frac{81}{3}}$ وبالتبسيط $\sqrt[4]{\frac{81}{3}} = \sqrt[4]{27} \approx 2.280$، وتكون المعادلة $y = 3(2.28)^x$

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي:

1) $3^{2x-1} = 3^{x+2}$ **3**
2) $2^{3x} = 4^{x+2}$ **4**
3) $3^{2x-1} = \frac{1}{9}$ $\mathbf{-\frac{1}{2}}$
4) $4^{x+1} = 8^{2x+3}$ $\mathbf{-\frac{7}{4}}$
5) $8^{x-2} = \frac{1}{16}$ $\mathbf{\frac{2}{3}}$
6) $25^{2x} = 125^{x+2}$ **6**
7) $9^{x+1} = 27^{x+4}$ **−10**
8) $36^{2x+4} = 216^{x+5}$ **7**
9) $\left(\frac{1}{64}\right)^{x-2} = 16^{3x+1}$ $\mathbf{\frac{4}{9}}$

اكتب دالة أسية على الشكل $y = ab^x$ للمنحنى الذي يمر بالنقطتين المعطاتين في كل مما يأتي:

10) $(0, 4)$, $(2, 36)$ $\mathbf{y = 4(3)^x}$
11) $(0, 6)$, $(1, 81)$ $\mathbf{y = 6(13.5)^x}$
12) $(0, 5)$, $(6, 320)$ $\mathbf{y = 5(2)^x}$
13) $(0, 2)$, $(5, 486)$ $\mathbf{y = 2(3)^x}$
14) $(0, 8), \left(3, \frac{27}{8}\right)$ $\mathbf{y = 8\left(\frac{3}{4}\right)^x}$
15) $(0, 1)$, $(4, 625)$ $\mathbf{y = (5)^x}$
16) $(0, 3)$, $(3, 24)$ $\mathbf{y = 3(2)^x}$
17) $(0, 12)$, $(4, 144)$ $\mathbf{y = 12(1.861)^x}$
18) $(0, 9)$, $(2, 49)$ $\mathbf{y = 9(2.333)^x}$

الصف: الثالث الثانوي   10   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

حلّ متباينات أسيّة المتباينة الأسيّة هي المتباينة التي تتضمن دوالّ أسيّة.

خاصية التباين للدوال الأسيّة	إذا كان $b > 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$	إذا كان $0 < b < 1$ فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال حلّ المتباينة: $5^{2x-1} > \frac{1}{125}$.

$5^{2x-1} > \frac{1}{125}$	المتباينة الأصلية
$5^{2x-1} > 5^{-3}$	إعادة كتابة $\frac{1}{125}$ على الصورة 5^{-3}
$2x-1 > -3$	خاصية التباين للدوال الأسية
$2x > -2$	بجمع 1 لكل طرف
$x > -1$	بقسمة كل طرف على 2

مجموعة الحل $\{x | x > -1, x \in R\}$.

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي:

1) $3^{x-4} < \frac{1}{27}$ $\mathbf{x < 1}$
2) $4^{2x-2} > 2^{x+1}$ $\mathbf{x > \frac{5}{3}}$
3) $5^{2x} < 125^{x-5}$ $\mathbf{x > 15}$
4) $10^{4x+1} > 100^{x-2}$ $\mathbf{x > -\frac{5}{2}}$
5) $7^{3x} < 49^{1-x}$ $\mathbf{x < \frac{2}{5}}$
6) $8^{2x-5} < 4^{x+8}$ $\mathbf{x < \frac{31}{4}}$
7) $16 \geq 4^{x+5}$ $\mathbf{x \leq -3}$
8) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{243}\right)^{3x-2}$ $\mathbf{x \leq \frac{13}{9}}$
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} > 8^{2x}$ $\mathbf{x < \frac{3}{7}}$
10) $\frac{1}{81} < 9^{2x-4}$ $\mathbf{x > 1}$
11) $32^{3x-4} > 128^{4x+3}$ $\mathbf{x > -\frac{41}{13}}$
12) $27^{2x-5} < \left(\frac{1}{9}\right)^{5x}$ $\mathbf{x < \frac{15}{16}}$
13) $\left(\frac{1}{25}\right)^{2x-1} \leq 125^{3x+1}$ $\mathbf{x \geq -\frac{1}{13}}$
14) $\left(\frac{7}{343}\right)^{x-3} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{2x+1}$ $\mathbf{x \geq -4}$
15) $\left(\frac{9}{27}\right)^{6x-1} \geq \left(\frac{27}{9}\right)^{-x+6}$ $\mathbf{x \leq -1}$

الصف: الثالث الثانوي   11   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات حل المسألة (12) دون ضمن فوق

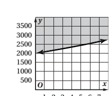
الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

1) إذا كانت A جملة مبلغ 1200 ريال في مشروع استثماري حيث $A = 1200\left(1 + \frac{0.052}{12}\right)^{48}$، فما معدل الربح السنوي؟
5.2 %

2) استثمرت نهى مبلغ 2000 ريال في مشروع استثماري يدر أرباحًا تصل نسبتها إلى 4% سنويًّا على الأقل، وأرادت أن تعرف كم سيصبح مبلغها خلال السنوات القليلة القادمة. مثّل المتباينة $y \geq 2000(1 + 0.04)^x$ بيانيًّا لتجد ذلك .



3) **أعمال:** بدأ أحمد مشروعه الاستثماري وقد كان لديه 23 زبونًا، وبعد 7 سنوات أصبح لديه 393 زبونًا. اكتب معادلة أسيّة تصف نمو المشروع.
$\mathbf{y = 23(1.5)^x}$

4) **سكان:** كان عدد سكان العالم عام 1421 هـ 6071675206 نسمة، وأصبح في عام 1429 هـ 6679493893 نسمة . اكتب معادلة أسيّة تمثّل نمو سكان العالم خلال السنوات الثماني مقربًا الأساس إلى أقرب جزء من ألف .
$\mathbf{y = 6071675206(1.012)^x}$

5) **أعمال:** أسّس كلّ من محمد وأمجد عام 1421 هـ شركة خاصة به. وقد بدأ محمد بموظَّفَين اثنين، وفي عام 1424هـ أصبح عنده 50 موظفًا، في حين بدأ أمجد بـِ 32 موظفًا، وفي عام 1428هـ أصبح عنده 310 موظفين. أيْ أن شركتي محمد وأمجد حقّقتا نموًّا أسّيًّا.

a) اكتب معادلة أسيّة تمثل النمو في كلّ من الشركتين .
محمد : $\mathbf{y = 2(2.924)^x}$;
أمجد : $\mathbf{y = 32(1.383)^x}$

b) احسب عدد الموظفين في كل من الشركتين عام 1426.
شركة محمد فيها: 427 موظفًا
وشركة أمجد فيها : 162 موظفًا

الصف: الثالث الثانوي   12   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التدريبات الإثرائية (13) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-2 التدريبات الإثرائية

مقياس ريختر

أدرك تشارلز ريختر وبينو جوتنبرغ في كاليفورنيا عام 1935 أن الأمواج الزلزالية التي تنبعث عن الهزة الأرضية يمكن أن تكون طريقة لتقدير قوة الهزة. وقد طوّرا مقياس ريختر باستعمال أداة أندرسون–وود (راسمة الزلازل). واكتشفا أن قوة الهزة M تساوي لوغاريتم السعة A للأساس 10 للموجة المسجلة بواسطة راسمة الزلازل مضافًا إليها عامل تصحيح يعتمد على موقع الراسمة، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $M = log_{10} A + CF$.
وتقاس كمية الطاقة الناتجة عن الزلزال Es بوحدة قياس "erg"، والتي يمكن حسابها من الدالة $Es = 10^{11.8 + 1.5M}$.

1) أكبر هزة أرضية سجلت في تشيلي عام 1960م، وأنتجت طاقة تعادل 1.995×10^{25} erg تقريبًا.

a) ما قوة هذه الهزة على مقياس ريختر مقربًا إلى أقرب عُشر درجة؟
9.0

b) افترض أن راسمة الزلازل التي سجلت هذه الهزة لها معامل تصحيح مقداره 6.2، فما مقدار سعة الموجة الناتجة عن الهزة مقربًا إلى أقرب جزء من مئة؟
630.96

2) يطلق أكبر سلاح نووي حراري قوة تدميرية تعادل 32 مليون طن من مادة الديناميت (TNT). فكم تعادل هذه الكمية بوحدة الإرج؟ علمًا بأن ناتج قسمة كمية الطاقة الناجمة عن الهزة الأرضيةعلى 6.4×10^8 يعادل عدد أونصات الديناميت (TNT) التي تعطي مقدار القوة المدمرة نفسها.
6.55×10^{20} erg تقريبًا

3) إذا استعمل الديناميت في المختبر لتفتيت صخرة، وكانت الطاقة الزلزالية المنطلقة هي 3.548×10^9 erg، فكم أونصة من مادة الديناميت تكون قد استعملت؟
5.5 أونصات تقريبًا

الصف: الثالث الثانوي   13   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (12) دون ضمن فوق

2 - 2 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

1) $4^{x+35} = 64^{x-3}$ $x = 22$

2) $\left(\frac{1}{64}\right)^{0.5x-3} = 8^{9x-2}$ $x = \frac{4}{5}$

3) $3^{x-4} = 9^{x+28}$ $x = -60$

4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+2} = 64^{x-1}$ $x = \frac{1}{5}$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 16^{3x+1}$ $x = -\frac{1}{13}$

6) $3^{6x-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}$ $x = 0$

7) $400 = \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$ $x = -\frac{10}{7}$

8) $10^{2x+7} = 1000^{x}$ $x = 7$

اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي:

9) $(0, 5), (4, 3125)$ $y = 5(5)^x$

10) $(0, 8), (4, 2048)$ $y = 8(4)^x$

11) $(0, \frac{3}{4}), (2, 36.75)$ $y = 0.75(7)^x$

12) $(0, -0.2), (-3, -3.125)$ $y = -0.2(0.4)^x$

13) $(0, 15), \left(2, \frac{15}{16}\right)$ $y = 15\left(\frac{1}{4}\right)^x$

14) $(0, 0.7), \left(\frac{1}{2}, 3.5\right)$ $y = 0.7(25)^x$

حُلَّ كل متباينة مما يأتي:

15) $400 > \left(\frac{1}{20}\right)^{7x+8}$ $x > -\frac{10}{7}$

16) $10^{2x+7} \geq 1000^x$ $x \leq 7$

17) $\left(\frac{1}{16}\right)^{3x-4} \leq 64^{x-1}$ $x \geq \frac{11}{9}$

18) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-6} < 4^{4x+5}$ $x > \frac{8}{11}$

19) $\left(\frac{1}{36}\right)^{x+8} \leq 216^{x-3}$ $x \geq -\frac{7}{5}$

20) $128^{x+3} < \left(\frac{1}{1024}\right)^{2x}$ $x < -\frac{7}{9}$

21) **علوم:** إذا كان عدد الخلايا البكتيرية في عينة A يساوي 36^{2t+8} خلية عند الزمن t، وعددها في عينة B يساوي 216^{t+18} عند الزمن نفسه، فمتى يصبح عدد الخلايا متساويًا في العينتين؟ $t = 38$

12

الفصل الثاني العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية
Logarithms and Logarithmic Functions

فيما سبق:
درستُ إيجاد الدالة العكسية لدالة. (الدرس 7-1)

والآن:
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية.
- أمثل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

المفردات:
اللوغاريتم
logarithm
الدالة اللوغاريتمية
logarithmic function

www.obeikaneducation.com

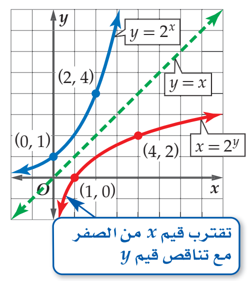
لماذا؟

يُرجِّح كثير من العلماء أن سبب انقراض سلالة الديناصورات هو النيازك التي ضربت الأرض. ويستعمل الفلكيون مقياس باليرمو (Palermo) لتصنيف أجسام الفضاء كالنيازك وغيرها اعتمادًا على مدى تأثيرها في كوكب الأرض. ولجعل المقارنة بين هذه الأجسام أكثر سهولة تم تطوير المقياس باستعمال اللوغاريتمات، إذ يمكن إيجاد قيمة مقياس باليرمو PS لجسم فضائي من خلال الدالة $R = 10^{PS}$، حيث R الخطر النسبي الذي يسببه ذلك الجسم، ويمكن كتابة هذه الدالة بصيغة أخرى تسمى الدالة اللوغاريتمية.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية: يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية $f(x) = 2^x$ بيانيًا من خلال تبديل قيم x و y للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

$y = 2^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$x = 2^y$	
x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



يظهر من الجدول والتمثيل البياني أعلاه أن الدالة العكسية للدالة $y = 2^x$ هي $x = 2^y$. وبصورة عامة، فإن الدالة العكسية للدالة $y = b^x$ هي $x = b^y$. يسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ **لوغاريتم** x، ويكتب عادة على الصورة $y = \log_b x$، ويقرأ y تساوي لوغاريتم x للأساس b.

إرشادات للدراسة
تسمى $\log_b x = y$ الصورة اللوغاريتمية، وتسمى $b^y = x$ الصورة الأسية المكافئة لها.

مفهوم أساسي — **اللوغاريتم للأساس b**

التعبير اللفظي: إذا كان x, b عددين موجبين، حيث $b \neq 1$، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$، ويُعرّف على أنه الأُس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افترض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن: لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$\log_b x = y \quad \text{إذا وفقط إذا} \quad b^y = x$$

مثال: $\log_3 27 = y \longleftrightarrow 3^y = 27$

2-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-3
إيجاد الدالة العكسية لدالة.

الدرس 2-3
إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.
تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

ما بعد الدرس 2-3
إيجاد حلول معادلات لوغاريتمية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- سمِّ أشياء تسبح في الفضاء بالقرب من الكرة الأرضية؟ إجابة ممكنة: كويكبات، نيازك، مذنبات.
- ما المقصود بمدى التأثير؟ إجابة ممكنة: احتمالية اصطدام مجسم بالأرض.

مصادر الدرس 2-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (98 , 103)	• تنويع التعليم ص (98 , 103)
كتاب التمارين	• ص (13)	• ص (13)	• ص (13)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتمات لكتابة المعادلات اللوغاريتمية على الصورة الأسّية .

تنبيه!

أساس اللوغاريتم: قد يختلط عليك معرفة أي الأعداد هو الأساس وأيها الأس في المعادلات اللوغاريتمية؛ لذا استعمل لونين مختلفين لكتابة كل منهما في أثناء الحل؛ لمساعدتك على تنظيم حساباتك.

مثال 1 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسّية:

a) $\log_2 8 = 3$

$\log_2 8 = 3 \longrightarrow 8 = 2^3$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\log_4 \frac{1}{256} = -4 \longrightarrow \frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق من فهمك

1A) $\log_4 16 = 2$ $\quad 16 = 4^2$

1B) $\log_3 729 = 6$ $\quad 729 = 3^6$

يمكن استعمال تعريف اللوغاريتمات أيضًا لكتابة المعادلات الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

مثال 2 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

a) $15^3 = 3375$

$15^3 = 3375 \rightarrow \log_{15} 3375 = 3$

b) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$4^{\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow \log_4 2 = \frac{1}{2}$

تحقق من فهمك

2A) $4^3 = 64$ $\quad \log_4 64 = 3$

2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$ $\quad \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

يمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية.

مثال 3 إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_{16} 4$

$\log_{16} 4 = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$4 = 16^y$ تعريف اللوغاريتم

$4^1 = 4^{2y}$ $\quad 16 = 4^2$

$1 = 2y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

$\frac{1}{2} = y$ اقسم كلا الطرفين على 2

لذا فإن $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

b) $\log_7 \frac{1}{49}$

$\log_7 \frac{1}{49} = y$ بفرض أن العبارة اللوغاريتمة تساوي y

$\frac{1}{49} = 7^y$ تعريف اللوغاريتم

$7^{-2} = 7^y$ $\quad \frac{1}{49} = 7^{-2}$

$-2 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

لذا فإن $\log_7 \frac{1}{49} = -2$

تحقق من فهمك

3A) $\log_3 81$ $\quad 4$

3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$ $\quad -8$

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية عند تقديم اللوغاريتمات للطلبة، استعمل لونًا مختلفًا للأجزاء المتناظرة في جميع الدوال الأسية واللوغاريتمية. فمثلًا استعمل 3 ألوان مختلفة لكل من x, y, b عند بيان أن $\log_b x = y$ تناظر $x = b^y$.

الدوال والعبارات اللوغاريتمية

مثال 1 يبيِّن كيفية التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية.

مثال 2 يبيِّن كيفية التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية.

المثالان 4 ، 3 يبيِّنان كيفية إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية باستعمال تعريف اللوغاريتمات والخصائص الأساسية لها.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة الأسية:

a) $\log_3 9 = 2$ $\quad 9 = 3^2$

b) $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$ $\quad \frac{1}{100} = 10^{-2}$

2 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة اللوغاريتمية:

a) $5^3 = 125$ $\quad \log_5 125 = 3$

b) $27^{\frac{1}{3}} = 3$ $\quad \log_{27} 3 = \frac{1}{3}$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: بعد مناقشة تعريف اللوغاريتمات؛ اكتب المعادلة $y = 2x$ على السبورة، ثم اطلب إلى الطلاب حلها بالنسبة للمتغير x . $x = \frac{1}{2}y$ ، وحل المعادلة $y = x^2$ أيضًا بالنسبة للمتغير x . $x = \pm\sqrt{y}$ والآن اكتب المعادلة $y = 2^x$ على السبورة، واطلب إلى الطلاب حلها بالنسبة للمتغير x. وقد يربك ذلك الطلاب؛ لذا وضِّح لهم أن المعادلة المقصودة هي $x = \log_2 y$ ، وأكِّد لهم أن اللوغاريتم يُعرَّف على أنه معكوس دالة أسّية.

إرشادات للدراسة

الأس الصفري:
- تذكر أنه لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$.
- $\log_b 0$ غير معرَّف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x.

الخصائص الأساسية للوغاريتمات: من تعريف الدوال الأسية واللوغاريتمات يمكنك استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات.

مفهوم أساسي: الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0$ ، $b \neq 1$ ، x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية	التبرير
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_b b = 1$	$b^1 = b$
$\log_b b^x = x$	$b^x = b^x$
$b^{\log_b x} = x, x > 0$	$\log_b x = \log_b x$

مثال 4: استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كل مما يأتي إن أمكن:

a) $\log_5 125$

$\log_5 125 = \log_5 5^3$ $5^3 = 125$

$= 3$ $\log_b b^x = x$

c) $12^{\log_{12} 4.7}$

$12^{\log_{12} 4.7} = 4.7$ $b^{\log_b x} = x$

b) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3}$ $0.001 = 10^{-3}$

$= -3$ $\log_b b^x = x$

d) $\log_{10}(-5)$

بما أن $f(x) = \log_b x$ معرَّف فقط عندما $x > 0$ ، فإن $\log_{10}(-5)$ غير معرَّف في مجموعة الأعداد الحقيقية.

✓ تحقق من فهمك

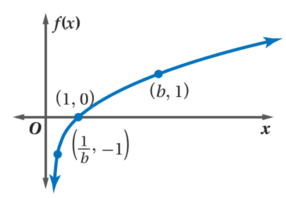
4A) $\log_9 81$ 2

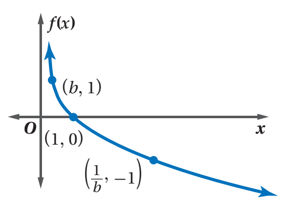
4B) $3^{\log_3 1}$ 1

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا: تُسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ ، وكل من العددين b , x موجبًا **دالة لوغاريتمية**. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية.

مفهوم أساسي: الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

	$f(x) = \log_b x,\ b > 1$	$f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$
الدالة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \log_b x,\ b > 1$	$f(x) = \log_b x,\ 0 < b < 1$
خصائص منحنى الدالة:	متصل، متباين، متزايد	متصل، متباين، متناقص
المجال:	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(\mathbf{R}^+)$	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $(\mathbf{R}^+)$
المدى:	مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbf{R})$	مجموعة الأعداد الحقيقية $(\mathbf{R})$
خط التقارب:	المحور y	المحور y
مقطع المحور x:	1	1





مثالان إضافيان

3) أوجد قيمة $\log_3 243$ 5

4) أوجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\log_8 512$ 3

b) $22^{\log_{22} 15.2}$ 15.2

إرشادات للمعلم الجديد

سرعة بما أن الطلاب لم يتعرفوا دوال اللوغاريتمات سابقًا، ويتوقع أن تسبب لهم بعض الإرباك؛ لذا فقد يحتاجون إلى المزيد من الوقت لاستيعاب موضوع هذا الدرس، قبل إكمال باقي دروس الفصل.

المحتوى الرياضي

اللوغاريتمات تُقرأ المعادلة $y = \log_b x$ على النحو الآتي: "y تساوي لوغاريتم x للأساس b"، والأساس b هو دائمًا عدد موجب لا يساوي الواحد. وبما أن المعادلة $y = \log_b x$ مكافئة للمعادلة الأسية $x = b^y$ ، فإن اللوغاريتم هو أسّ، إذْ إنه الأس الذي يُرفع إليه الأساس b ليساوي العدد x.

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثال 5 يبيِّن كيفية تمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

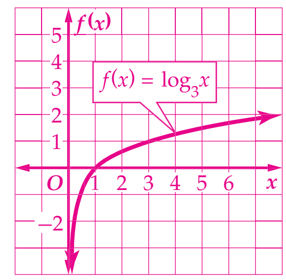
مثال 6 يبيِّن كيفية استعمال التحويلات الهندسية لتمثيل دوال لوغاريتمية بيانيًا.

مثال 7 يبيِّن كيفية إيجاد معكوس الدالة الأسية، وذلك لحل مثال من واقع الحياة.

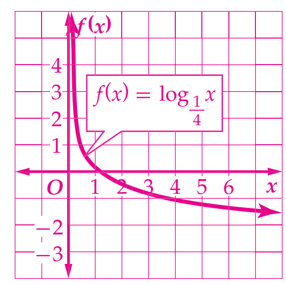
مثال إضافي

5 مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:

a) $f(x) = \log_3 x$



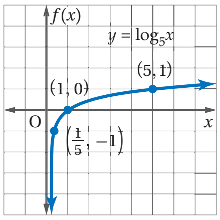
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$



مثال 5 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = \log_5 x$



الخطوة 1: حدّد الأساس.

$b = 5$

الخطوة 2: حدد نقاطًا على التمثيل البياني .

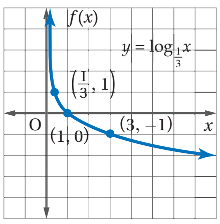
بما أن $5 > 1$، فاستعمل النقاط

$\left(\frac{1}{b}, -1\right), (1, 0), (b, 1)$

أي النقاط $(5, 1)$، $(1, 0)$، $\left(\frac{1}{5}, -1\right)$.

الخطوة 3: مثّل النقاط على المستوى الإحداثي. ثم ارسم المنحنى، ولاحظ أنه متصل ومتزايد، إذ تتزايد $f(x)$ من 0 إلى ما لا نهاية.

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$



الخطوة 1: $b = \frac{1}{3}$

الخطوة 2: $0 < \frac{1}{3} < 1$

لذا استعمل النقاط $(3, -1)$ ، $(1, 0)$ ، $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

الخطوة 3: ارسم المنحنى.

✓ تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \log_2 x$ انظر الهامش.

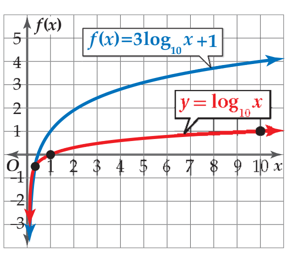
5B) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$ انظر الهامش.

وتمامًا كما في الدوال الأسية، فإنه يمكنك تطبيق التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا.

مثال 6 تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا:

a) $f(x) = 3\log_{10} x + 1$



حدّد نقاط التمثيل البياني للدالة الأم $y = \log_{10} x$. بما أن 10>1 فاستعمل النقاط $(10 , 1)$ ، أي النقاط $\left(\frac{1}{b} , -1\right)$ ، $(1 , 0)$ ، $(b , 1)$ ، $\left(\frac{1}{10} , -1\right)$ ، $(1 , 0)$ والتمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{10} x$.

- $a = 3$: يتسع التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 0$: لا يوجد انسحاب أفقي.
- $k = 1$: يسحب التمثيل البياني وحدة واحدة إلى أعلى.

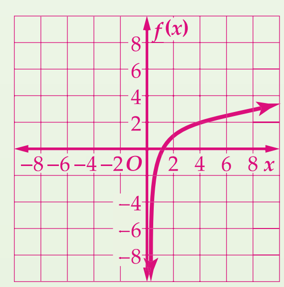
إرشادات للدراسة

سلوك طرفي التمثيل البياني

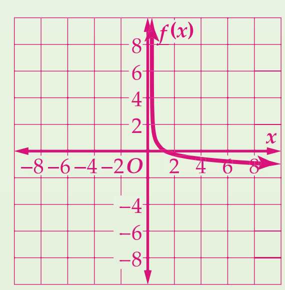
لاحظ في المثال 6a أنه مع اقتراب x من موجب مالانهاية فإن $f(x)$ تقترب إلى موجب مالانهاية أيضًا.

إجابات (تحقق من فهمك):

5A)



5B)

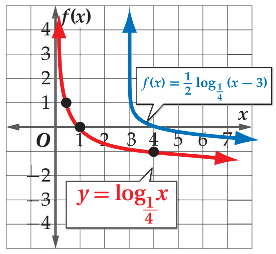


100 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

b) $f(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

التمثيل البياني للدالة المعطاة هو تحويل للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$.

- $a = \frac{1}{2}$: يضيق التمثيل البياني رأسيًا.
- $h = 3$: يسحب التمثيل البياني 3 وحدات إلى اليمين.
- $k = 0$: لا يوجد انسحاب رأسي.



تحقق من فهمك انظر الهامش

6A) $f(x) = 2\log_3(x-2)$

6B) $f(x) = \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 5$

مثال 7 من واقع الحياة — إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

هزات أرضية: يقيس مقياس ريختر شدة الهزة الأرضية، وتعادل شدة الهزة الأرضية عند أي درجة 10 أمثال شدة الهزة الأرضية للدرجة التي تسبقها؛ أيْ أن شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر تعادل 10 أمثال شدة هزة أرضية سجلت 6 درجات على المقياس نفسه. ويمكن تمثيل شدة الهزة الأرضية بالدالة $y = 10^{x-1}$، حيث x الدرجة على مقياس ريختر.

a) استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "الربط مع الحياة" لمعرفة شدة أقوى هزة أرضية في القرن العشرين.

$y = 10^{x-1}$ — الدالة الأصلية

$= 10^{9.2-1}$ — عوّض 9.2 بدلاً من x

$= 10^{8.2}$ — بسّط

$= 158489319.2$ — استعمل الحاسبة

b) أوجد معادلة على الصورة $y = \log_{10} x + c$ للدالة العكسية.

بما أن الدالة $y = 10^{x-1}$ متباينة، فإن لها دالة عكسية.

$y = 10^{x-1}$ — المعادلة الأصلية

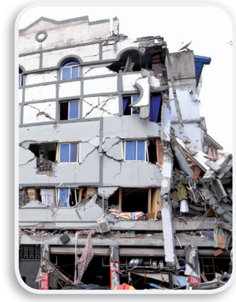
$x = 10^{y-1}$ — بدل بين x و y وحل بالنسبة لـ y

$y - 1 = \log_{10} x$ — تعريف اللوغاريتمات

$y = \log_{10} x + 1$ — أضف العدد 1 لكلا الطرفين

تحقق من فهمك

7) أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$. $y = \log_{0.5} x$



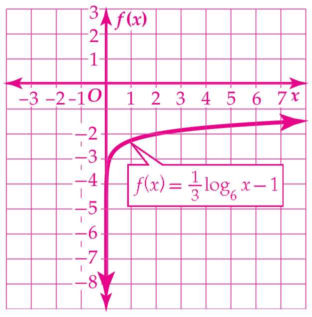
الربط مع الحياة

أقوى هزة أرضية في القرن العشرين ضربت تشيلي عام 1960م، وبلغت قوتها 9.2 درجات على مقياس ريختر، ودمرت قرى كاملة، وقتلت آلاف السكان.

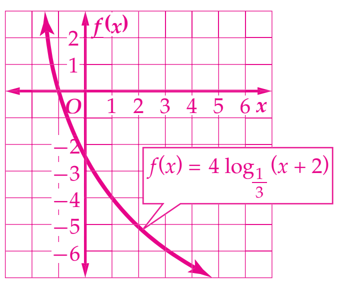
مثالان إضافيان

6 مثّل كلّ دالة مما يأتي بيانيًّا:

a) $f(x) = \frac{1}{3}\log_6 x - 1$



b) $f(x) = 4\log_{\frac{1}{3}}(x+2)$



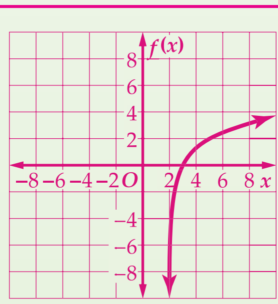
7 **الضغط الجوي:** يُعرّف الضغط الجوي عند سطح الأرض بوحدة أتموسفير واحدة، ويتناقص بنسبة 20% كلما ارتفعنا إلى أعلى 1mi. ويمكن تمثيل الضغط الجوي بالدالة: $P = 0.8^x$، حيث x الارتفاع بالأميال.

a) أوجد الضغط الجوي عند نقطة على ارتفاع 8 mi عن سطح الأرض. 0.168 atm

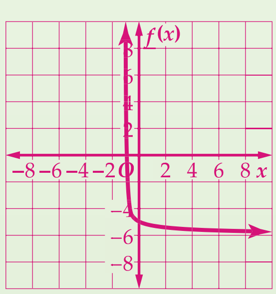
b) أوجد معادلة لمعكوس الدالة P. $P = \log_{0.8} x$

إجابات (تحقق من فهمك):

6A)



6B)



3 التدريب

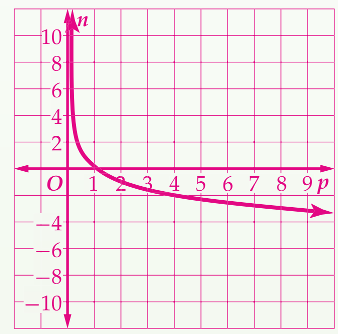
التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 43-1 للتأكد من مدى فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

43b)



47a) $S(3) = 30$، $S(15) = 50$، $S(63) = 70$

47b) إذا أنفق 3000 ريال على الدعاية والإعلان، فستكون مبيعات الشركة 30000 ريال ، وإذا أنفق 15000 ريال، فستكون مبيعات الشركة 50000 ريال، وإذا أنفق 63000 ريال عليهما، فستكون مبيعات الشركة 70000 ريال.

47d) يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زاد المبلغ المنفق على الدعاية والإعلان يقل انحناء المنحنى، ومن الفرع a، لاحظ أيضًا أن زيادة الانفاق على الدعاية من 3 آلاف ريال إلى 15 ألف ريال أدت إلى زيادة المبيعات بمقدار 20 ألف ريال، وأن زيادة الانفاق على الدعاية من 15 ألف ريال إلى 63 ألف ريال أدت إلى زيادة المبيعات بمقدار 20 ألف ريال أيضًا فقط، لذا فإن أثر الدعاية يتناقص عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها في هذه الشركة.

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسية: (مثال 1)

1) $\log_8 512 = 3$ $\quad 8^3 = 512$

2) $\log_5 625 = 4$ $\quad 5^4 = 625$

3) $\log_2 16 = 4$ $\quad 2^4 = 16$

4) $\log_7 343 = 3$ $\quad 7^3 = 343$

5) $\log_9 \frac{1}{81} = -2$ $\quad 9^{-2} = \frac{1}{81}$

6) $\log_3 \frac{1}{27} = -3$ $\quad 3^{-3} = \frac{1}{27}$

7) $\log_{12} 144 = 2$ $\quad 12^2 = 144$

8) $\log_9 1 = 0$ $\quad 9^0 = 1$

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية: (مثال 2)

9) $11^3 = 1331$ $\quad \log_{11} 1331 = 3$

10) $16^{\frac{3}{4}} = 8$ $\quad \log_{16} 8 = \frac{3}{4}$

11) $9^{-1} = \frac{1}{9}$ $\quad \log_9 \frac{1}{9} = -1$

12) $6^{-3} = \frac{1}{216}$ $\quad \log_6 \frac{1}{216} = -3$

13) $2^8 = 256$ $\quad \log_2 256 = 8$

14) $4^6 = 4096$ $\quad \log_4 4096 = 6$

15) $27^{\frac{2}{3}} = 9$ $\quad \log_{27} 9 = \frac{2}{3}$

16) $25^{\frac{3}{2}} = 125$ $\quad \log_{25} 125 = \frac{3}{2}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (المثالان 3, 4)

17) $\log_{13} 169$ $\quad 2$

18) $\log_2 \frac{1}{128}$ $\quad -7$

19) $\log_6 1$ $\quad 0$

20) $\log_4 1$ $\quad 0$

21) $\log_{10} 10$ $\quad 1$

22) $\log_{10} 0.01$ $\quad -2$

23) $\log_3 \frac{1}{9}$ $\quad -2$

24) $\log_4 \frac{1}{64}$ $\quad -3$

25) $\log_6 216$ $\quad 3$

26) $\log_{27} 3$ $\quad \frac{1}{3}$

27) $\log_{32} 2$ $\quad \frac{1}{5}$

28) $\log_{121} 11$ $\quad \frac{1}{2}$

29) $\log_{\frac{1}{5}} 3125$ $\quad -5$

30) $\log_{\frac{1}{8}} 512$ $\quad -3$

31) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$ $\quad 3$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (المثالان 5, 6) (41-32) انظر ملحق الإجابات.

32) $f(x) = \log_3 x$

33) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$

34) $f(x) = 4\log_4 (x - 6)$

35) $f(x) = 2\log_{\frac{1}{10}} x - 5$

36) $f(x) = 4\log_2 x + 6$

37) $f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

38) $f(x) = -3\log_{\frac{1}{12}} x + 2$

39) $f(x) = 6\log_{\frac{1}{8}} (x + 2)$

40) $f(x) = -8\log_3 (x - 4)$

41) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 1) - 9$

42) **علوم:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. أوجد معكوس الدالة اللوغاريتمية المعطاة. (مثال 7) $R = 10^{PS}$

43) **تصوير:** تمثل الصيغة $n = \log_2 \frac{1}{p}$ درجة زر ضبط الإضاءة في آلة التصوير والمستعملة عند نقص الإضاءة، حيث p نسبة ضوء الشمس في منطقة التقاط الصورة. (مثال 7)

a) أعدت آلة تصوير خالد لتلتقط الصورة تحت ضوء الشمس المباشر، ولكن الجو كان غائمًا. إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تعادل $\frac{1}{4}$ الإضاءة في اليوم المشمس، فأي درجات زر ضبط الإضاءة يجب أن يستعملها خالد لتعويض نقص الإضاءة؟ 2

b) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر الهامش.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع b لتقدير نسبة إضاءة الشمس إذا قلت درجة زر ضبط الإضاءة 3 درجات. هل يؤدي ذلك إلى زيادة الإضاءة أم نقصانها؟ $\frac{1}{8}$؛ نقصان الإضاءة

44) **تربية:** لقياس مدى احتفاظ الطلاب بالمعلومات، يتم عادة اختبارهم بعد وقت من تعلمها، ويمكن تقدير درجة سلمان في مادة الرياضيات بعد انتهاء الفصل الدراسي باستعمال المعادلة $y(t) = 85 - 6\log_2 (t + 1)$، حيث t عدد الأشهر التي مضت بعد انتهاء الفصل الدراسي.

a) ما درجة سلمان في نهاية الفصل الدراسي $(t = 0)$؟ 85

b) ما درجته بعد مضي 3 أشهر؟ 73

c) ما درجته بعد مضي 15 شهرًا؟ 61

45) مثّل الدالة $f(x) = 15\log_{14} (x + 1) - 9$ بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات

46) **تحليليًّا:** اكتب معادلة لدالة يكون تمثيلها البياني يشبه التمثيل البياني للدالة $y = \log_3 x$ بعد إزاحتها 4 وحدات إلى اليسار ووحدة إلى أعلى. $y = \log_3 (x + 4) + 1$

47) **إعلانات:** تزداد المبيعات عادة مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان، وتقدر قيمة المبيعات لشركة بآلاف الريالات بالمعادلة، $S(a) = 10 + 20\log_4 (a + 1)$، حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان بآلاف الريالات، $a \geq 0$. (a, b, d) انظر الهامش.

a) تعني القيمة $S(0) \approx 10$ أنه إذا لم يُنفق شيء على الدعاية والإعلان، ستكون المبيعات 10000 ريال. أوجد كلًّا من: $S(3), S(15), S(63)$.

b) فسّر معنى كل من القيم التي أوجدتها في الفرع a.

c) مثّل الدالة بيانيًّا. انظر ملحق الإجابات.

d) استعمل التمثيل البياني في الفرع c، وإجابتك في الفرع a لتفسير تناقص أثر الدعاية عند إنفاق مبالغ كبيرة عليها.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-43، 45، 48، 51-53، 55-71
ضمن المتوسط	1-47 (فردي)، 49، 51-53، 55-71
فوق المتوسط	44-71

48) **أحياء:** زمن الجيل بالنسبة للخلايا البكتيرية هو الزمن اللازم ليصبح عددها مثليْ ما كان عليه. فإذا كان زمن الجيل G لنوع معين من البكتيريا يُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{3.3 \log_b f}$، حيث t الفترة الزمنية، b عدد الخلايا البكتيرية عند بداية التجربة، f عدد الخلايا البكتيرية عند نهاية التجربة.

a) يبلغ زمن الجيل لبكتيريا مجهرية 16h ، ما الزمن الذي تحتاج إليه 4 خلايا بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 1024 ؟ **264 h أو 11 يومًا**

b) إذا كان زمن الجيل لنوع من البكتيريا المخبرية 5h، فما الوقت الذي تحتاج إليه 20 خلية بكتيرية من هذا النوع ليصبح عددها 160000 خلية؟ **66 h أو يومان و 18 h**

c) تتكاثر بكتيريا E.coli بسرعة، بحيث تتكاثر 6 منها لتصبح 1296 خلال 4.4h . احسب زمن الجيل لبكتيريا E.coli . **20 min أو $\frac{1}{3}$ h**

مسائل مهارات التفكير العليا

49) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى؟ فسر إجابتك.

$\log_3 9$	$\log_2 4$	$\log_2 16$	$\log_4 16$

$\log_2 16$؛ لأن قيمته 4، أما قيمة العبارات الأخرى تساوي 2

50) **تحدٍّ:** إذا كان $y = \log_b x$ ، حيث b, x, y أعداد حقيقية، فإن الصفر ينتمي إلى المجال دائمًا أو أحيانًا أو لا ينتمي أبدًا. وضح إجابتك. **انظر الهامش.**

51) **اكتشف الخطأ:** يقول فهد: إن التمثيل البياني لجميع الدوال اللوغاريتمية يقطع المحور y في النقطة (1, 0) ؛ لأن أي عدد مرفوع للأس صفر يساوي 1، ولكن سليمان لم يوافقه الرأي. أيهما على صواب؟ فسر إجابتك. **انظر الهامش.**

52) **اكتشف الخطأ:** أوجدت كل من مها ومريم قيمة $\log_{\frac{1}{7}} 49$ ، أيٌّ منهما إجابتها صحيحة؟ برر إجابتك. **انظر الهامش.**

مها	مريم
$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$	$\log_{\frac{1}{7}} 49 = y$
$49^y = \frac{1}{7}$	$(\frac{1}{7})^y = 49$
$(7^2)^y = (7)^{-1}$	$(7^{-1})^y = 7^2$
$7^{2y} = (7)^{-1}$	$(7)^{-y} = 7^2$
$2y = -1$	$y = -2$
$y = -\frac{1}{2}$	

53) **تبرير:** قارن بين كلٍّ من: $\log_7 51, \log_8 61, \log_9 71$ دون استعمال الحاسبة، وبيّن أيها الأكبر قيمة. وضّح إجابتك. **انظر الهامش.**

54) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ لكل من الحالات الآتية: **انظر الهامش.**

a) y تساوي 25

b) y عدد سالب

c) y بين 0 و 1

d) x تساوي 1

55) **اكتب:** إذا كان $g(x) = a \log_{10} (x - h) + k$ تحويلًا للدالة اللوغاريتمية $\log_{10} x$ ، فاشرح كيفية تمثيل هذا التحويل بيانيًّا. **انظر ملحق الإجابات**

مراجعة تراكمية

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 1–2) **(56–59) انظر ملحق الإجابات.**

56) $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

57) $y = -2.5(5)^x$

58) $y = 30^{-x}$

59) $y = 0.2(5)^{-x}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي: (الدرس 2–2)

60) $3^{n-2} > 27$ **$n > 5$**

61) $2^{2n} \leq \frac{1}{16}$ **$n \leq -2$**

62) $16^n < 8^{n+1}$ **$n < 3$**

63) $32^{5p+2} \geq 16^{5p}$ **$p \geq -2$**

64) إذا كان $4^{x+2} = 48$ ، فأوجد قيمة 4^x؟ (الدرس 2-2) **3**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2–2)

65) $9^x = \frac{1}{81}$ **-2**

66) $2^{6x} = 4^{5x+2}$ **-1**

67) $49^{3p+1} = 7^{2p-5}$ **$-\frac{7}{4}$**

68) $9^{x^2} = 27^{x^2-2}$ **$\pm\sqrt{6}$**

تدريب على اختبار

69) ما قيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$؟ **C**

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{3}{4}$ C $\frac{4}{3}$ D 2

70) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$؟ **D**

A 5 B $\frac{1}{5}$ C $-\frac{1}{5}$ D -5

71) ما مقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟ **A**

A 0 B 1 C 2 D 3

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكِّر الطلاب في السؤال 51 بأن فهدًا لم يفكر إلا في الدوال اللوغاريتمية على الصورة: $f(x) = a\log_b x$.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب أن يناقشوا كيف ستساعدهم دراسة اللوغاريتمات في هذا الدرس على حل معادلات لوغاريتمية في الدرس القادم.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 2-3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (30)

إجابات:

50) لا ينتمي أبدًا؛ لأنه إذا انتمى الصفر للمجال، ستصبح المعادلة $y = \log_b 0$ وعندها $b^y = 0$. ولكن لأي عدد حقيقي b لا يوجد أس حقيقي y بحيث يكون $b^y = 0$

51) سليمان؛ لأن التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية يمر بالنقطة (1,0)، ولا يمر بالنقطة (0,1)

52) مريم؛ استعملت مها تعريف اللوغاريتمات بشكل خاطئ.

53) إجابة ممكنة: $\log_7 51$؛ قيمته أكبر قليلًا من 2، وقيمة $\log_8 61$ أقل من 2 بقليل أيضًا، وقيمة $\log_9 71$ أقل من 2 بقليل.

(54a–d) إجابات ممكنة.

54a) $\log_2 33554432 = 25$

54b) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$

54c) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$

54d) $\log_7 1 = 0$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أشر إلى مسألة القسمة $\frac{32}{4} = 8$ التي يمكن كتابتها على الصورة $\frac{2^5}{2^2} = 2^3$. واسأل الطلاب أن يكتبوا لوغاريتمًا أساسه 2 في كل من المقسوم، والمقسوم عليه، وناتج القسمة، ثم اطلب إليهم أن يكتبوا معادلة تربط بين هذه اللوغاريتمات. $\log_2 32 = 5, \log_2 4 = 2, \log_2 8 = 3, \log_2 32 - \log_2 4 = \log_2 8$

103 الدرس 2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-3 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتميّة

العبارات والدوال اللوغاريتميّة

تعريف اللوغاريتم للأساس b	افترض أن b و x عددان موجبان، وأن $b \neq 1$، يُرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $log_b x$، ويعرّف بالأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

والدالة العكسية للدالة الأسيّة $y = b^x$ هي $x = b^y$، ويسمى المتغير y في المعادلة $x = b^y$ لوغاريتم x، ويكتب على الصورة $y = log_b x$.

مثال 1 اكتب معادلة أسيّة تكافئ $log_3 243 = 5$.

$3^5 = 243$

مثال 2 اكتب معادلة لوغاريتمية تكافئ $6^{-3} = \frac{1}{216}$.

$log_6 \frac{1}{216} = -3$

مثال 3 أوجد قيمة $log_8 16$

لما كانت $8^{\frac{4}{3}} = 16$، فإن $log_8 16 = \frac{4}{3}$.

تمارين

اكتب كلّ معادلة مما يأتي على صورة أسيّة:

1) $log_{15} 225 = 2$ — $\mathbf{15^2 = 225}$
2) $log_3 \frac{1}{27} = -3$ — $\mathbf{3^{-3} = \frac{1}{27}}$
3) $log_4 32 = \frac{5}{2}$ — $\mathbf{4^{\frac{5}{2}} = 32}$

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

4) $2^7 = 128$ — $\mathbf{log_2 128 = 7}$
5) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ — $\mathbf{log_3 \frac{1}{81} = -4}$
6) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{343}$ — $\mathbf{log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{343} = 3}$
7) $7^{-2} = \frac{1}{49}$ — $\mathbf{log_7 \frac{1}{49} = -2}$
8) $2^9 = 512$ — $\mathbf{log_2 512 = 9}$
9) $64^{\frac{2}{3}} = 16$ — $\mathbf{log_{64} 16 = \frac{2}{3}}$

أوجد قيمة كلّ عبارة ممّا يأتي:

10) $log_4 64$ — **3**
11) $log_2 64$ — **6**
12) $log_{100} 100000$ — **2.5**
13) $log_5 625$ — **4**
14) $log_{27} 81$ — $\mathbf{\frac{4}{3}}$
15) $log_{25} 5$ — $\mathbf{\frac{1}{2}}$
16) $log_2 \frac{1}{128}$ — **−7**
17) $log_{10} 0.00001$ — **−5**
18) $log_4 \frac{1}{32}$ — **−2.5**

الصف: الثالث الثانوي   14   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم (15) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتميّة

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا تسمى الدالة $y = log_b x$، حيث $b \neq 1$ دالة لوغاريتمية. ويمثّل منحنى الدالة $f(x) = log_b x$ منحنى الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتميّة. وخصائص الدالة الرئيسة (الأم) هي:

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية، $f(x) = log_b x$	1) الدالة متصلة، ومتباينة. 2) مجال الدالة جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. 3) يشكل المحور y خط تقارب لمنحنى الدالة. 4) المدى: مجموعة جميع الأعداد الحقيقية. 5) تقع النقطة $(1, 0)$ على منحنى الدالة.

يمكن إجراء تحويلات هندسية على منحنيات الدوال اللوغاريتمية بتغيير قيم a, h, k في الدالة $f(x) = a\, log_b (x - h) + k$.

مثال مثّل الدالة $f(x) = -3\, log_{10} (x - 2) + 1$ بيانيًّا.

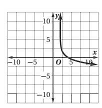
الدالة نتجت عن إجراء التحويلات الهندسية الآتية على منحنى الدالة $f(x) = log_{10} x$.

$|a| = 3$: توسع رأسي للمنحنى.

$a < 0$: انعكاس للمنحنى حول المحور x.

$h = 2$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدتين إلى اليمين.

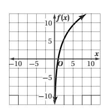
$k = 1$: انسحاب للمنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى.



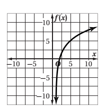
تمارين

مثّل كلّ دالة مما يأتي:

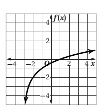
1) $f(x) = 4\, log_2 x$



2) $f(x) = 4\, log_3 (x - 1)$



3) $f(x) = 2\, log_4 (x + 3) - 2$



الصف: الثالث الثانوي   15   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات حل المسألة (16) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-3 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

1) **كيمياء:** نجد درجة الحموضة pH لمحلول بالصيغة $pH = -log_{10} H$، حيث يرمز H إلى تركيز أيون الهيدروجين. فما مقدار pH لمحلول إلى أقرب جزء من مئة عندما تكون قيمة H 1356 ؟

−3.13

2) **اكتشف الخطأ:** أراد سالم أن يجد قيمة x في المعادلة $2(3)^x = 34$. فحوّل المعادلة إلى الصورة اللوغاريتمية $log_3 2x = 17$، ثم كتب $2x = 3^{17}$ واستعمل الآلة الحاسبة فوجد أن $x = 64570081$.

فهل كانت إجابته صحيحة؟ وإن لم تكن صحيحة، فماذا كان خطؤه؟ و ما الجواب الصحيح؟

لا، يجب أن يكون قد حوّل المعادلة إلى الصورة $x = log_3 17; x = 2.58$.

3) **صوت:** تعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل L بالمعادلة: $L = 10\, log_{10} \frac{I}{M}$. أوجد I بدلالة M عندما تكون قيمة L هي 120 ديسبل.

$\mathbf{I = 1000000000000\, M}$ **أو** $\mathbf{10^{12} M}$

4) **هزات أرضية:** يمكننا قياس شدة هزة أرضية بمقياس ريختر باستعمال الصيغة $y = 10^{R-1}$، حيث y القيمة المطلقة لشدة الهزة، R قراءة مقياس ريختر.

العدد على مقياس ريختر	القيمة المطلقة للشدة
1	1
2	10
3	100
4	1000
5	10000

إذا كانت القيمة المطلقة لشدة هزة تساوي 6000000، فما العدد المقابل على مقياس ريختر؟

7.8 تقريبًا

5) **ألعاب:** تلعب نهلة وعفاف اللعبة الآتية: تختار كلّ منهما دالة لوغاريتمية وتقارنان بينهما أيها تعطي قيمة أكبر. فاختارت نهلة الدالة $f(x) = 10\, log_2 x$، في حين اختارت عفاف الدالة $g(x) = 2 log_{10} x$.

a) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 7$؟

دالة نهلة؛ قيمة دالة نهلة عند $x = 7$ هي 28.07، وقيمة دالة عفاف عند $x = 7$ هي 1.69

b) أي الدالتين قيمتها أكبر عندما $x = 1$؟

القيمتان متساويتان، وكل منهما تساوي 0

c) هل تعتقد أن الأساس أو العدد الذي نريد إيجاد لوغاريتمه أكثر أهمية في تحديد قيمة الدالة اللوغاريتمية؟

تختلف إجابات الطلاب.

الصف: الثالث الثانوي   16   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

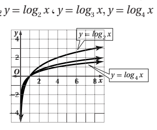
التدريبات الإثرائية (17) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-3 التدريبات الإثرائية

المقارنة بين منحنيات الدوال اللوغاريتمية

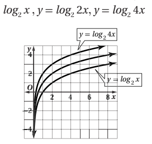
1) مثّل الدوال: $y = log_2 x$ ، $y = log_3 x, y = log_4 x$ بيانيًّا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ عند زيادة n وثبات قيمة a ؟

يتغير مقدار التمدد (التضييق الرأسي).

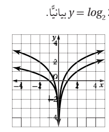
2) مثّل الدوال: $y = log_2 x$, $y = log_2 2x, y = log_2 4x$ بيانيًّا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ مع زيادة قيمة a وثبات قيمة n ؟

يتغير مقدار التمدد (التضييق الأفقي).

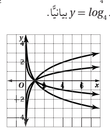
3) مثّل الدوال: $y = log_2 (-2x),\ y = log_2 (-x), y = log_2 x,$ $y = log_2 2x$ بيانيًّا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ لقيم a ، $-a$ مع ثبات قيمة n؟

منحنيات الدوال $y = log_n -ax$ صور لمنحنيات الدوال $y = log_n ax$ بالانعكاس حول المحور y.

4) مثّل الدوال: $y = log_{\frac{1}{2}} x, y = log_2 x, y = log_{\frac{1}{4}} x,$ $y = log_4 x$ بيانيًّا.



ما الذي يمكن أن تستنتجه عن منحنيات الدوال $y = log_n ax$ لقيم $n, \frac{1}{n}$ مع ثبات قيمة a ؟

المنحنيات $y = log_{\frac{1}{n}} ax$ صورة للمنحنيات $y = log_n ax$ بالانعكاس حول المحور x.

الصف: الثالث الثانوي   17   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (13) دون ضمن فوق

3 - 2 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي على الصورة الأسيَّة:

1) $\log_6 216 = 3$ $6^3 = 216$

2) $\log_2 64 = 6$ $2^6 = 64$

3) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ $3^{-4} = \frac{1}{81}$

4) $\log_{10} 0.00001 = -5$ $10^{-5} = 0.00001$

5) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ $25^{\frac{1}{2}} = 5$

6) $\log_{32} 8 = \frac{3}{5}$ $32^{\frac{3}{5}} = 8$

اكتب كل معادلة أسّية مما يأتي على الصورة اللوغاريتمية:

7) $5^3 = 125$ $\log_5 125 = 3$

8) $7^0 = 1$ $\log_7 1 = 0$

9) $3^4 = 81$ $\log_3 81 = 4$

10) $3^{-4} = \frac{1}{81}$ $\log_3 \frac{1}{81} = -4$

11) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$ $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$

12) $7776^{\frac{1}{5}} = 6$ $\log_{7776} 6 = \frac{1}{5}$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

13) $\log_3 81$ 4

14) $\log_{10} 0.0001$ -4

15) $\log_2 \frac{1}{16}$ -4

16) $\log_{\frac{1}{3}} 27$ -3

17) $\log_9 1$ 0

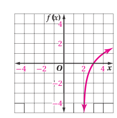
18) $\log_8 4$ $\frac{2}{3}$

19) $\log_7 \frac{1}{49}$ -2

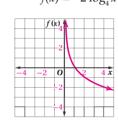
20) $\log_6 6^4$ 4

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

21) $f(x) = \log_2 (x-2)$



22) $f(x) = -2 \log_4 x$



23) **صوت:** تستعمل المعادلة $L = 10 \log_{10} R$ لإيجاد شدة الصوت L بالديسيبل، حيث R الشدة النسبية للصوت. والأصوات التي تزيد شدتها على 120 dB ذات أثر سلبي على الإنسان. ما الشدة النسبية لصوتٍ شدته 120 dB؟ 10^{12}

24) **استثمار:** استثمر ماجد 100000 ريال في مشروع متوقِّعًا ربحًا سنويًّا نسبته 4%، وتُضاف الأرباح سنويًّا إلى رأس المال، إذا كان المبلغ الكلي المتوقَّع A بعد 5 سنوات من الاستثمار دون أي سحب أو إضافة يُعطى بالمعادلة $\log_{10} A = \log_{10} [100000(1 + 0.04)^5]$، فاكتب المعادلة على الصورة الأسّية. $A = 10000(1 + 0.04)^5$

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية   الفصل الثاني

13

ملحوظات المعلم

الدروس من 1-2 إلى 3-2

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (32).

الفصل 2 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1–2 إلى 3–2

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: (الدرس 1-2)

1) $f(x) = 3(4)^x$ (1–4) انظر ملحق الإجابات.

2) $f(x) = -(2)^x + 5$

3) $f(x) = -0.5(3)^{x+2} + 4$

4) $f(x) = -3\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + 8$

5) **علوم:** بدأت تجربة مخبرية بـ 6000 خلية بكتيرية، وبعد ساعتين أصبح عددها 28000 خلية. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد الخلايا البكتيرية y بعد x ساعة إذا استمر ازدياد عدد الخلايا البكتيرية بالمعدل نفسه، مقربًا الناتج إلى أقرب 4 منازل عشرية.
$y = 6000(2.16025)^x$

b) ما العدد المتوقع للخلايا البكتيرية بعد 4 ساعات؟
130667 تقريبًا

6) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, 125)$, $(3, 1000)$؟ (الدرس 1-2) D

A $f(x) = 125(3)^x$

B $f(x) = 1000(3)^x$

C $f(x) = 125(1000)^x$

D $f(x) = 125(2)^x$

7) **سكان:** كان عدد سكان إحدى المدن 45000 نسمة عام 1995م، وتزايد عددهم ليصبح 68000 نسمة عام 2007م. (الدرس 2-2)

a) اكتب دالة أسية على الصورة $y = ab^x$ يمكن استعمالها لتمثيل عدد سكان المدينة y بعد x سنة منذ عام 1995م، مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية.
$f(x) = 45000(1.035)^x$

b) استعمل الدالة لتقدير عدد سكان المدينة عام 2015م.
89540 تقريبًا

حُل كلًا من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

8) $11^{2x+1} = 121^{3x}$ $x = \frac{1}{4}$

9) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$ -8

حُل كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

10) $5^{2x+3} \le 125$ $x \le 0$

11) $16^{2x+3} < 64$ $x < \frac{-3}{4}$

12) $\left(\frac{1}{32}\right)^{x+3} \ge 16^{3x}$ $x \le \frac{-15}{17}$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 3-2) انظر ملحق الاجابات.

13) $f(x) = 3\log_2(x-1)$

14) $f(x) = -4\log_3(x-2) + 5$

15) $f(x) = 2 + \log_4(1+x)$

16) **اختيار من متعدد:** ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $(625)^{\frac{1}{4}} = 5$؟ (الدرس 3-2) A

A $\log_{625} 5 = \frac{1}{4}$

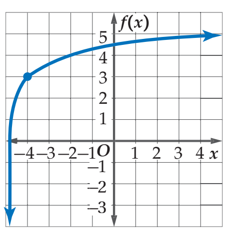
B $\log_5 625 = 4$

C $\log_5 625 = \frac{1}{4}$

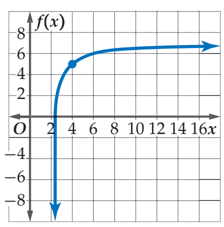
D $\log_{\frac{1}{4}} 5 = 625$

17) **اختيار من متعدد:** أي التمثيلات البيانية الآتية هو تمثيل الدالة $f(x) = \log_3(x+5) + 3$ البياني؟ (الدرس 3-2) A

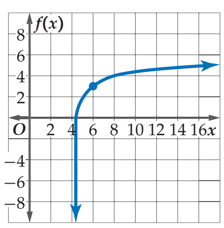
A



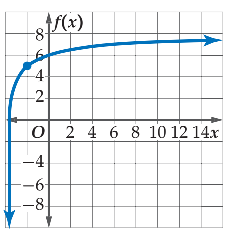
C



B



D



أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 3-2)

18) $\log_4 32$ $\frac{5}{2}$

19) $\log_5 5^{12}$ 12

20) $\log_{16} 4$ $\frac{1}{2}$

21) اكتب المعادلة $\log_9 729 = 3$ على الصورة الأسية. (الدرس 3-2)
$9^3 = 729$

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-2، 2-2، 1-2	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (80)		

2-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-4

إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.

الدرس 2-4

تطبيق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.

تبسيط عبارات، وإيجاد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

ما بعد الدرس 2-4

حل معادلات لوغاريتمية باستعمال طرق جبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- هل عصير الليمون حمض أم قاعدة؟ حمض
- هل البيض حمض أم قاعدة؟ قاعدة
- كم مرّة تساوي درجة pH للبيض درجته للماء النقي؟ $10^{7.8-7} = 10^{0.8} \approx 6.31$

2-4 خصائص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم عبارات لوغاريتمية. (الدرس 3–2)

والآن:

- أطبق خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية.
- أبسّط عبارات وأجد قيمها باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

المادة	مستوى pH
عصير الليمون	2.1
الخل	3.5
الطماطم	4.2
القهوة	5.0
الحليب	6.4
الماء النقي	7.0
البيض	7.8

يُعد الاحتفاظ بمستوى معين من الحموضة في الأطعمة أمرًا مهمًّا لبعض الأشخاص الذين يعانون حساسية في المعدة. إذ تحتوي بعض الأطعمة على أحماض أكثر مما تحتوي عليه من القواعد. ويستعمل تدريج pH لقياس درجة الحموضة أو القاعدية، فانخفاضه يدل على حمضية الوسط، وارتفاعه يدل على قاعديته. ويُعد هذا المقياس مثالًا آخر على المقاييس اللوغاريتمية التي تعتمد على قوة العدد 10. فقيمة pH للقهوة تساوي 5 بينما تساوي 7 للماء النقي؛ لذا فإن تركيز أيون القهوة الهيدروجيني (H^+) يعادل 100 مرة تركيزه في الماء النقي. لأن $pH = -\log_{10}[H^+]$، فإنه يمكنك كتابة المعادلة الآتية:

$$pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}} = -\log_{10}[H^+]_{\text{للقهوة}} + \log_{10}[H^+]_{\text{للماء النقي}}$$ والتي تكتب بالشكل :

$$\log_{10}\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = pH_{\text{للقهوة}} - pH_{\text{للماء النقي}}$$ وذلك باستعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات التي ستتعلمها في هذا الدرس. وبتحويل هذه الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية، ثم التعويض، تجد أن:

$$\frac{(H^+)_{\text{للقهوة}}}{(H^+)_{\text{للماء النقي}}} = 10^{7-5} = 10^2 = 100$$

خصائص اللوغاريتمات: تتحقق خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية كما هو الحال في الدوال الأسية.

> **مفهوم أساسي — خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية**
>
> **التعبير اللفظي:** إذا كان b عددًا موجبًا حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
>
> **مثال:** إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$، فإن $x = 8$، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

وبما أن اللوغاريتمات ترتبط بالأسس، فيمكنك اشتقاق خصائصها من خصائص الأسس، ويمكنك اشتقاق خاصية الضرب في اللوغاريتمات من خاصية الضرب في الأسس.

> **مفهوم أساسي — خاصية الضرب في اللوغاريتمات**
>
> **التعبير اللفظي:** لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.
>
> **الرموز:** إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:
> $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$.
>
> **مثال:** $\log_2[(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

لإثبات صحة هذه الخاصية، افترض أن $b^m = x$ ، و $b^n = y$، وباستعمال تعريف اللوغاريتمات، فإن $m = \log_b x$, $n = \log_b y$.

$b^m b^n = xy$	عوّض
$b^{m+n} = xy$	خاصية ضرب القوى
$\log_b b^{m+n} = \log_b xy$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$m + n = \log_b xy$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$\log_b x + \log_b y = \log_b xy$	عوّض عن m, n بالقيمتين $\log_b x, \log_b y$ على الترتيب

يمكنك استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم عبارات لوغاريتمية.

مصادر الدرس 4 – 2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (108)	• تنويع التعليم ص (108)	• تنويع التعليم ص (108 , 110)
كتاب التمارين	• ص (14)	• ص (14)	• ص (14)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

مـثال 1 استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ لتقريب قيمة $\log_4 192$.

$\log_4 192 = \log_4 (4^3 \times 3)$ $\quad 192 = 64 \times 3 = 4^3 \times 3$

$= \log_4 4^3 + \log_4 3$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= 3 + \log_4 3$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\approx 3 + 0.7925 \approx 3.7925$ $\quad \log_4 3 \approx 0.7925$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$. **2.5**

تذكّر أن قسمة القوى ذات الأساس نفسه تكون بطرح الأسس. وخاصية القسمة في اللوغاريتمات شبيهة بها.
افترض أن $b^m = x, b^n = y$ ، إذن $\log_b x = m, \log_b y = n$

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{x}{y}$$

$b^{m-n} = \frac{x}{y}$ خاصية قسمة القوى

$\log_b b^{m-n} = \log_b \frac{x}{y}$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$m - n = \log_b \frac{x}{y}$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$\log_b x - \log_b y = \log_b \frac{x}{y}$ عوّض عن m ، n بالقيمتين $\log_b x$ ، $\log_b y$ على الترتيب

مفهوم أساسي خاصية القسمة في اللوغاريتمات

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

مـثال 2 استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

استعمل $\log_6 5 \approx 0.8982$ لتقريب قيمة $\log_6 7.2$.

$\log_6 7.2 = \log_6 (\frac{36}{5})$ $\quad 7.2 = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} = \frac{6^2}{5}$

$= \log_6 6^2 - \log_6 5$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$= 2 - 0.8982$ الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$= 1.1018$ $\quad \log_6 5 \approx 0.8982$

تحقق من فهمك

1) استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$ ؛ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$. **1.37 تقريبًا**

خصائص اللوغاريتمات

مثال 1 يبيِّن كيفية استعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات لتقريب قيم العبارات اللوغاريتمية.

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات؛ لتقريب قيم العبارات اللوغاريتمية.

مثالان إضافيان

1 استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة $\log_5 250$. **3.4307**

2 استعمل $\log_9 3 = 0.5$ ؛ لتقريب قيمة $\log_9 \frac{1}{3}$. **−0.5**

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية قم بحل أمثلة متنوعة على السبورة التفاعلية مستعملاً خصائص مختلفة للوغاريتمات، واحفظ كل مثال في صفحة ملاحظات وعنونها باسم الخاصية التي استعملتها فيه، ثم أرسل هذه الصفحات إلكترونيًّا إلى كل طالب؛ لاتخاذها مصدرًا آخر خارج الفصل.

إرشادات للمعلم الجديد

حل المسألة عند مناقشة خاصية الضرب في اللوغاريتمات، أشر إلى أن اللوغاريتمات المستعملة في المثال تبين أن الخاصية تنطبق على جميع اللوغاريتمات، وليس فقط على تلك التي يمكن تبسيطها.

مثال 3 من واقع الحياة — استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات

علوم: يُعطى الأس الهيدروجيني للمحلول pH بالعلاقة: $pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$ حيث $[H^+]$ يمثل تركيز أيون الهيدروجين بوحدة مول لكل لتر. أوجد تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له 4.2.

افهم: أُعطي في المسألة صيغة إيجاد pH، وقيمة pH للمطر الحمضي. والمطلوب معرفة تركيز أيون الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي.

خطط: اكتب المعادلة وحلها لإيجاد $[H^+]$.

حُلّ:

$pH = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	المعادلة الأصلية
$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 = \log_{10} 1 - \log_{10} [H^+]$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 = 0 - \log_{10} [H^+]$	$\log_{10} 1 = 0$
$4.2 = -\log_{10} [H^+]$	بسّط
$-4.2 = \log_{10} [H^+]$	اضرب كلا الطرفين في -1
$10^{-4.2} = [H^+]$	تعريف اللوغاريتم

إذن يوجد $10^{-4.2}$ أو 0.000063 مول من الهيدروجين تقريبًا في اللتر الواحد من المطر الحمضي.

تحقق:

$4.2 = \log_{10} \frac{1}{[H^+]}$	$pH = 4.2$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} \frac{1}{10^{-4.2}}$	عوّض $[H^+] = 10^{-4.2}$
$4.2 \stackrel{?}{=} \log_{10} 1 - \log_{10} 10^{-4.2}$	خاصية القسمة في اللوغاريتمات
$4.2 \stackrel{?}{=} 0 - (-4.2)$	الخصائص الأساسية للوغاريتمات
$4.2 = 4.2$ ✓	

الربط مع الحياة

المطر الحمضي أكثر حمضية من المطر الطبيعي، حيث يتكون من اختلاط الدخان، وأبخرة المشتقات النفطية وغيرها برطوبة الجو. والمطر الحمضي مسؤول عن التعرية، كما يظهر في الصورة أعلاه.

✓ تحقق من فهمك

3) استعمل الجدول الوارد في فقرة "لماذا؟" وأوجد تركيز أيون الهيدروجين في عصير الليمون. **10^{-12} أو 0.0079 تقريبًا**

تذكّر أن قوة القوة توجد بضرب الأسس، وخاصية لوغاريتم القوة شبيهة بها.

مفهوم أساسي — خاصية لوغاريتم القوة

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

الرموز: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b ، حيث $b \neq 1$، فإن

$$\log_b x^m = m \log_b x$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

ستبرهن خاصية لوغاريتم القوة في السؤال 48

خصائص اللوغاريتمات

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال خاصية القسمة في اللوغاريتمات لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال إضافي

3 **علوم:** أوجد تركيز الهيدروجين في لتر من المطر الحمضي قيمة pH له تساوي 5.5 .
$10^{-5.5}$ أو 0.0000032 مول من الهيدروجين

مثــال 4 استعمال خاصية لوغاريتم القوة

إذا كان $\log_2 5 \approx 2.3219$ ، فقرّب قيمة $\log_2 25$

$\log_2 25 = \log_2 5^2$ — $5^2 = 25$

$= 2 \log_2 5$ — خاصية لوغاريتم القوة

$\approx 2(2.3219) \approx 4.6438$ — $\log_2 5 = 2.3219$

تحقق من فهمك

4) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فقرّب قيمة $\log_3 49$. 3.5424 تقريبًا

إرشادات للدراسة

التحقق من الإجابة
يمكنك التحقق من إجابة مثال 4 بإيجاد قيمة $2^{4.6438}$ مستعملاً الحاسبة والإجابة التي ستحصل عليها هي 25 تقريبًا، ولكون $\log_2 25 \approx 4.6438$ فهذا يعني أن $25 \approx 2^{4.6438}$.

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لتبسيط العبارات اللوغاريتمية.

مثــال 5 تبسيط العبارات اللوغاريتمية

دون استعمال الآلة الحاسبة، احسب قيمة $\log_4 \sqrt[5]{64}$.

بما أن أساس اللوغاريتم 4، عبّر عن $\sqrt[5]{64}$ على صورة قوة 4 .

$\log_4 \sqrt[5]{64} = \log_4 64^{\frac{1}{5}}$ — $\sqrt[5]{64} = 64^{\frac{1}{5}}$

$= \log_4 (4^3)^{\frac{1}{5}}$ — $4^3 = 64$

$= \log_4 4^{\frac{3}{5}}$ — خاصية قوة القوة

$= \frac{3}{5} \log_4 4$ — خاصية لوغاريتم القوة

$= \frac{3}{5}(1) = \frac{3}{5}$ — $\log_b b = 1$

تحقق من فهمك

5A) $\log_6 \sqrt[3]{36}$ $\frac{2}{3}$

5B) $\log_7 \sqrt[6]{49}$ $\frac{1}{3}$

يمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة، إذ يمكنك تحويل الضرب إلى جمع، والقسمة إلى طرح، والقوى والجذور إلى ضرب.

تقريب العبارات اللوغاريتمية

مثال 4 يبيِّن كيفية استعمال خاصية لوغاريتم القوة لتقريب قيمة العبارات اللوغاريتمية.

مثال إضافي

4 إذا كان $\log_5 6 \approx 1.1133$ ، فقرّب قيمة $\log_5 216$. 3.3399

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

مثال 5 يبيِّن كيفية تبسيط عبارات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

مثال إضافي

5 احسب قيمة $\log_3 \sqrt[5]{729}$ $\frac{6}{5}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحس الرياضي حُث الطلاب على التحقق من إجاباتهم باستعمال التقدير، ففي المثال 4: بما أن $16 = 2^4$ و $32 = 2^5$؛ لذا فمن المعقول أن يقع $\log_2 25$ بين 4 و 5 .

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: بعد مناقشة المثال (5) مباشرة، اطلب إلى طالبين إعادة حله معًا دون الرجوع إلى الحل المكتوب، واطلب إليهما تبادل الأدوار في توضيح خطوات الحل، وكذلك مناقشة معقولية حلهما.

مثال 6 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_2 12x^5y^{-2}$

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $12, x^5, y^{-2}$

$$\log_2 12x^5y^{-2} = \log_2 12 + \log_2 x^5 + \log_2 y^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_2 12 + 5\log_2 x - 2\log_2 y$$ خاصية لوغاريتم القوة

b) $\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2}$

$$\log_2 a^2 b^{-3} c^{-2} = \log_2 a^2 + \log_2 b^{-3} + \log_2 c^{-2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$$= 2\log_2 a - 3\log_2 b - 2\log_2 c$$ خاصية لوغاريتم القوة

c) $\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}}$

$$\log_3 \frac{x-1}{\sqrt[5]{3-2x}} = \log_3 (x-1) - \log_3 \sqrt[5]{3-2x}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 (x-1) - \log_3 (3-2x)^{\frac{1}{5}}$$ خاصية لوغاريتم القوة

تحقق من فهمك

6A) $\log_{13} 6a^3bc^4$

$\log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$

6B) $\log_6 5x^3y^7z^{0.5}$

$\log_6 5 + 3\log_6 x + 7\log_6 y + 0.5\log_6 z$

6C) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{2x+1}$

$\log_4 (1-x)^{\frac{1}{3}} - \log_4 (2x+1)$

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات السابقة في إعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المطولة إلى الصورة المختصرة.

مثال 7 كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6)$

$$4\log_3 x - \frac{1}{3}\log_3 (x+6) = \log_3 x^4 - \log_3 (x+6)^{\frac{1}{3}}$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_3 x^4 - \log_3 \sqrt[3]{x+6}$$ $(x+6)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x+6}$

$$= \log_3 \frac{x^4}{\sqrt[3]{x+6}}$$ خاصية القسمة في اللوغاريتمات

$$= \log_3 \frac{x^4\sqrt[3]{(x+6)^2}}{x+6}$$ بإنطاق المقام

b) $0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x$

$$0.5\log_7 (x+2) + 6\log_7 2x = \log_7 (x+2)^{0.5} + \log_7 (2x)^6$$ خاصية لوغاريتم القوة

$$= \log_7 \sqrt{x+2} + \log_7 64x^6$$ $(x+2)^{0.5} = \sqrt{x+2},\ 2^6 = 64$

$$= \log_7 64x^6\sqrt{x+2}$$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تحقق من فهمك

7A) $-5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$

$\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$

7B) $\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4}\log_3 (x+1)$

$\log_3 \frac{2x-1}{\sqrt[4]{x+1}}$

تنبيه!

لوغاريتم المجموع
لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات ، $\log_a (x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$.

كتابة العبارات اللوغاريتمية

مثال 6 يبيِّن كيفية كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المطولة.

مثال 7 يبيِّن كيفية كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة.

مثالان إضافيان

6 اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

a) $\log_3 25a^{-4}b^6$

$2\log_3 5 - 4\log_3 a + 6\log_3 b$

b) $\log_7 7^6 x^3y^{-2}$

$6 + 3\log_7 x - 2\log_7 y$

c) $\log_5 \frac{3+2x}{\sqrt[7]{1-3x}}$

$\log_5 (3+2x) - \log_5 (1-3x)^{\frac{1}{7}}$

7 اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

a) $2\log_5 y + 0.5\log_5(x - 1)$

$\log_5 y^2\ \sqrt{x-1}$

b) $3\log_2 (x-1)\ 4\log_2 3y$

$\log_2 \frac{(x-1)^3}{81y^4}$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-36، 38-41، 46، 47، 48، 50 – 66
ضمن المتوسط	1-37 (فردي)، 38-46 (زوجي)، 46، 47، 50 – 66
فوق المتوسط	37 – 66

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 36-1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

إجابات:

(11 إفرست 26855.44 باسكال، تريسوني 34963.34 باسكال، بونيتي 36028.42 باسكال

(24 $\log_9 6 + 3\log_9 x + 5\log_9 y + \log_9 z$

(25 $\log_{11} a - 4\log_{11} b + 12\log_{11} c + 7\log_{11} d$

(26 $2\log_7 h + 11\log_7 j - 5\log_7 k$

(27 $\log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$

(28 $6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$

(29 $\log_2 (3x+2) - \frac{1}{7}\log(1-5x)$

(30 $\log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}} = \log_5 \frac{x^3\sqrt{6-x}}{6-x}$

(31 $\log_7 \frac{32x^5\sqrt{(5x+1)^2}}{5x+1} = \log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}}$

تدرب وحل المسائل

استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$ ،$\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

(1 $\log_4 15$ **1.9535**

(2 $\log_4 \frac{5}{3}$ **0.3685**

(3 $\log_4 \frac{3}{4}$ **−0.2075**

(4 $\log_4 0.6$ **−0.3685**

استعمل $\log_4 5 \approx 1.1610 , \log_4 3 \approx 0.7925 , \log_4 2 = 0.5$ لتقريب قيمة كل مما يأتي: (المثالان 1, 2)

(5 $\log_4 30$ **2.4535**

(6 $\log_4 20$ **2.1610**

(7 $\log_4 \frac{2}{3}$ **−0.2925**

(8 $\log_4 \frac{4}{3}$ **0.2075**

(9 $\log_4 9$ **1.5850**

(10 $\log_4 8$ **1.5**

(11 **تسلق الجبال:** يتناقص الضغط الجوي مع زيادة الارتفاع، ويمكن إيجاد قيمة الضغط الجوي عند الارتفاع a متر باستعمال العلاقة $a = 15500(5 - \log_{10} P)$ ، حيث P الضغط بالباسكال. أوجد قيمة الضغط الجوي بالباسكال عند قمم الجبال المذكورة في الجدول أدناه. (مثال 3) **انظر الهامش.**

القمة الجبلية	الارتفاع (m)
إفرست	8850
تريسوني	7074
بونيتي	6872

إذا كان $\log_3 5 \approx 1.465 , \log_5 7 \approx 1.2091, \log_6 8 \approx 1.1606$ ، $\log_7 9 \approx 1.1292$ ، فقرّب قيمة كل مما يأتي: (مثال 4)

(12 $\log_3 25$ **2.93**

(13 $\log_5 49$ **2.4182**

(14 $\log_6 48$ **2.1606**

(15 $\log_7 81$ **2.2584**

(16 $\log_6 512$ **3.4818**

(17 $\log_7 729$ **3.3876**

احسب قيمة كل عبارة مما يأتي: (مثال 5)

(18 $\log_5 \sqrt[4]{25}$ **$\frac{1}{2}$**

(19 $\log_2 \sqrt[5]{32}$ **1**

(20 $3\log_7 \sqrt[4]{49}$ **1**

(21 $4\log_2 \sqrt{8}$ **6**

(22 $50\log_5 \sqrt{125}$ **75**

(23 $\log_3 \sqrt[6]{243}$ **$\frac{5}{6}$**

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة: (مثال 6) **24-29 انظر الهامش.**

(24 $\log_9 6x^3y^5z$

(25 $\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7$

(26 $\log_7 h^2j^{11}k^{-5}$

(27 $\log_4 10t^2uv^{-3}$

(28 $\log_5 a^6b^{-3}c^4$

(29 $\log_2 \frac{3x+2}{\sqrt[7]{1-5x}}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة: (مثال 7)

(30 $3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x)$ **(30, 31 انظر الهامش.**

(31 $5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1)$

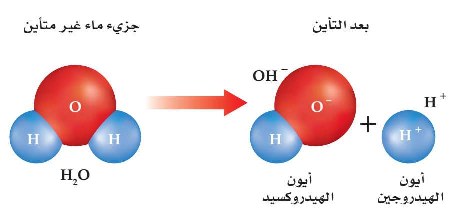
(32 $7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c)$ **$\log_3 \frac{a^7b}{64c^2}$**

(33 $2\log_8 (9x) - \log_8 (2x-5)$ **$\log_8 \frac{81x^2}{(2x-5)}$**

(34 $2\log_6 (5a) + \log_6 b + 7\log_6 c$ **$\log_6 25a^2bc^7$**

(35 $\log_2 x - \log_2 y - 3\log_2 z$ **$\log_2 \frac{x}{yz^3}$**

(36 **كيمياء:** ثابت التأين للماء K_w هو حاصل ضرب تركيز أيونات الهيدروجين $[H^+]$ في تركيز أيونات الهيدروكسيد $[OH^-]$.



أي أن صيغة ثابت التأين للماء هي $K_w = [H^+][OH^-]$ حيث تشير الأقواس إلى التركيز بالمول لكل لتر.

a) عبّر عن $\log_{10} K_w$ بدلالة $\log_{10} [H^+]$ و $\log_{10} [OH^-]$.

a) $\log_{10} K_w = \log_{10} [H^+] + \log_{10} [OH^-]$

b) بسِّط المعادلة في الفرع a إذا علمت أن قيمة الثابت K_w هي 1×10^{-14}

$-14 = \log_{10} [H^+] + \log_{10} [OH^-]$

c) إذا كان تركيز أيونات الهيدروجين في عينة من الماء 1×10^{-9} مول لكل لتر ، فما تركيز أيونات الهيدروكسيد؟

1×10^{-5} mol/L

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اعرض على الطلاب ما يأتي:

$\log_{10} 3 \approx 0.4771$

$\log_{10} 30 \approx 1.4771$

$\log_{10} 300 \approx 2.4771$

$\log_{10} 3000 \approx 3.4771$

واطلب إليهم توقع قيمة $\log_{10} 30000$. **4.4771**

واطلب إليهم أيضًا استعمال خصائص اللوغاريتمات لتوضيح ذلك النمط. **تفسير ممكن: 3 ، 30 ، 300 ، 3000 يمكن كتابتها على الصورة 3×100 ، 3×101 ، 3×102 ، 3×103 على الترتيب، وبعد ذلك يمكن كتابة كل لوغاريتم عشري منها على صورة مجموع لوغاريتمين عشريين ، فمثلًا يمكن كتابة:**

$\log_{10} 3000$ على الصورة $\log_{10} 3 \cdot 10^3$ ونتيجة لذلك فإن:

$\log_{10} (3 \cdot 10^3) = \log_{10} 3 + \log_{10} 10^3 = \log_{10} (3) + 3 = 3.4771$

حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

37) $\log_8 (x-3) = \log_8 x - \log_8 3$ خطأ

38) $\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x$ صحيحة

39) $\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k$ خطأ

40) $\log_2 y^5 = 5\log_2 y$ صحيحة

41) $\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3$ صحيحة

42) $\log_4 (z+2) = \log_4 z + \log_4 2$ خطأ

43) $\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4$ خطأ

44) $\log_9 \frac{x^2y^3}{z^4} = 2\log_9 x + 3\log_9 y - 4\log_9 z$ صحيحة

45) **هزات أرضية:** يبين الجدول أدناه بعض الهزات الأرضية القوية التي ضربت بعض البلدان، وقوة كل منها على مقياس ريختر. إذا علمت أن قوة الهزة M تُعطى بالعلاقة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث تمثل x شدة الهزة الأرضية، فأجب عما يأتي:

السنة	المكان	الدرجة على مقياس ريختر
1939 م	تركيا	8.0
1963 م	يوغسلافيا	6.0
1970 م	البيرو	7.8
1988 م	أرمينيا	7.0
2004 م	مراكش	6.4

a) أي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 10 أمثال شدة الأخرى؟ وأي هزتين كانت شدة إحداهما تعادل 100 مثل شدة الأخرى؟ 45a) انظر الهامش.

b) كم درجة على مقياس ريختر تسجل هزة أرضية إذا كانت شدتها تعادل 1000 مثل شدة هزة يوغسلافيا عام 1963م؟ 9.0 درجات

46) استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$؟ 46) انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالاً على عبارة لوغاريتمية لكل حالة مما يأتي، ثم عبّر عنه بالصورة المطوّلة:

a) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة.
إجابة ممكنة: $\log_b \frac{xz}{5} = \log_b x + \log_b z - \log_b 5$

b) لوغاريتم حاصل ضرب وقوة.
إجابة ممكنة: $\log_b m^4p^6 = 4\log_b m + 6\log_b p$

c) لوغاريتم حاصل ضرب وقسمة وقوة. انظر الهامش.

48) **برهان:** استعمل خصائص الأسس لبرهنة خاصية لوغاريتم القوة. انظر الهامش

49) **تحدٍ:** بسّط العبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}} (a^2)$ لتجد القيمة العددية الدقيقة لها. انظر الهامش.

50) **اكتشف المختلف:** حدد العبارة المختلفة عن العبارات الثلاث الأخرى، وفسّر إجابتك: انظر الهامش.

$\log_b 24 = \log_b 20 + \log_b 4$	$\log_b 24 = \log_b 2 + \log_b 12$
$\log_b 24 = \log_b 4 + \log_b 6$	$\log_b 24 = \log_b 8 + \log_b 3$

51) استعمل $\log_4 3 \approx 0.7925$، $\log_4 5 \approx 1.1610$ لتقريب قيمة $\log_4 18$ 2.085

مراجعة تراكمية

استعمل منحنى f لتصف التحويل الهندسي الذي يُنتج منحنى g، ثم مثّل منحنى كل منهما بيانيًا في كل مما يأتي (الدرس 2-1) انظر ملحق الإجابات.

52) $f(x) = 2^x;\ g(x) = -2^x$

53) $f(x) = 5^x;\ g(x) = 5^{x+3}$

54) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x;\ g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي: (الدرس 2-3)

55) $\log_{10} 0.001$ -3 56) $\log_4 16^x$ $2x$ 57) $\log_3 27^x$ $3x$

58) **كهرباء:** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير، والتي يستهلكها جهاز باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$، حيث P القدرة بالواط، R المقاومة بالأوم. ما كمية التيار الكهربائي التي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120w$، و $R = 3\Omega$. قرّب الناتج إلى أقرب عُشر. (مهارة سابقة) 6.3 أمبير تقريبًا

حدد ما إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى، مع ذكر السبب: (الدرس 1-7)

59) $f(x) = x + 73,\ g(x) = x - 73$ نعم

60) $g(x) = 7x - 11,\ h(x) = \frac{1}{7}x + 11$ لا

حُلّ كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

61) $3^{4x} = 3^{3-x}$ $\frac{3}{5}$

62) $3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3}$ 10

63) $49^x = 7^{x^2-15}$ $-3, 5$

64) $\log_2 (x+6) = 5$ $x = 26$

تدريب على اختبار

65) ما قيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$؟ A

A) $\log_5 2$
B) $\log_5 0.5$
C) $\log_5 3$
D) 1

66) ما المقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x+1) + 3$؟ A

A) 3
B) 2
C) 1
D) 0

4 التقويم

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-4، 2-3، بإعطائهم اختبارًا قصيرًا.

تعلم لاحق أخبر الطلاب أنهم سيتعلمون في الدرس التالي حل معادلات باستعمال اللوغاريتم العشري (لوغاريتم الأساس 10). واطلب إليهم كتابة رأيهم فيما تعلموه في هذا الدرس وعلاقته بالدرس التالي.

إجابات:

45a) أرمينيا ويوغسلافيا، أو تركيا وأرمينيا؛ تركيا ويوغسلافيا.

46) افترض أن الطرف الأيسر يساوي y أي أن $y = \log_a x$، وهذا يعني أن $x = a^y$، والآن بقي أن تثبت أن الطرف الأيمن يساوي y أيضًا

$$\frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\log_b a^y}{\log_b a} = y\frac{\log_b a}{\log_b a} = y$$

47c) إجابة ممكنة:

$$\log_b \frac{x^3y^4}{z^5} = 3\log_b x + 4\log_b y - 5\log_b z$$

48)
$$m^p = m^p$$
$$\left(b^{\log_b m}\right)^p = b^{\log_b (m^p)}$$
$$b^{p\log_b m} = b^{\log_b (m^p)}$$
$$\log_b mp = \log_b (m^p)$$
$$p\log_b m = \log_b (m^p)$$

49)
$$\log_{\sqrt{a}} (a^2) = x$$
$$(\sqrt{a})^x = a^2$$
$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^x = a^2$$
$$a^{\frac{x}{2}} = a^2$$
$$\frac{x}{2} = 2$$
$$x = 4$$

50) $\log_b 24 \neq \log_b 20 + \log_b 4$ جميع العبارات الأخرى تساوي $\log_b 24$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم

خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات يمكن استعمال خصائص الأسس للتوصل إلى خصائص اللوغاريتمات الآتية.

خاصية الضرب على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b$.
خاصية القسمة على اللوغاريتمات	لكل الأعداد الموجبة a, b, x و $x \neq 1$ $\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$.
خاصية القوة على اللوغاريتمات	لكل عدد حقيقي p، و m, b عددان موجبان، و $b \neq 1$ $\log_b m^p = p \log_b m$.

مثال استعمل $\log_3 28 \approx 3.0331$ وَ $\log_3 4 \approx 1.2619$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

a) $\log_3 36$

$\log_3 36 = \log_3 (3^2 \cdot 4)$
$= \log_3 3^2 + \log_3 4$
$= 2 + \log_3 4$
$\approx 2 + 1.2619$
≈ 3.2619

b) $\log_3 7$

$\log_3 7 = \log_3 \left(\frac{28}{4}\right)$
$= \log_3 28 - \log_3 4$
$\approx 3.0331 - 1.2619$
≈ 1.7712

c) $\log_3 256$

$\log_3 256 = \log_3 (4^4)$
$= 4 \cdot \log_3 4$
$\approx 4(1.2619)$
≈ 5.0476

تمارين

استعمل $\log_{12} 3 \approx 0.4421$ وَ $\log_{12} 7 \approx 0.7831$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

1) $\log_{12} 21$ **1.2252**
2) $\log_{12} \frac{7}{3}$ **0.3410**
3) $\log_{12} 49$ **1.5662**
4) $\log_{12} 36$ **1.4421**
5) $\log_{12} 63$ **1.6673**
6) $\log_{12} \frac{27}{49}$ **−0.2399**
7) $\log_{12} \frac{81}{49}$ **0.2022**
8) $\log_{12} 16807$ **3.9155**
9) $\log_{12} 441$ **2.4504**

استعمل $\log_5 3 \approx 0.6826$ وَ $\log_5 4 \approx 0.8614$ لإيجاد قيمة تقريبية لكل عبارة مما يأتي:

10) $\log_5 12$ **1.5440**
11) $\log_5 100$ **2.8614**
12) $\log_5 0.75$ **−0.1788**
13) $\log_5 144$ **3.0880**
14) $\log_5 \frac{27}{16}$ **0.3250**
15) $\log_5 375$ **3.6826**
16) $\log_5 1.\overline{3}$ **0.1788**
17) $\log_5 \frac{9}{16}$ **−0.3576**
18) $\log_5 \frac{81}{5}$ **1.7304**

الصف: الثالث الثانوي 18 الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم (19) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

خصائص اللوغاريتمات

الصورتان المختصرة والمطولة للعبارات اللوغاريتمية يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية من الصورة المختصرة إلى الصورة المطولة وبالعكس.

مثال 1 اكتب العبارة $\log_5 20x^4 y^{-3}$ بالصورة المطولة.

العبارة المعطاة هي لوغاريتم حاصل ضرب $20, x^4, y^{-3}$

$\log_5 20 x^4 y^{-3} = \log_5 20 + \log_5 x^4 + \log_5 y^{-3}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_5 20 + 4 \log_5 x - 3 \log_5 y$ خاصية لوغاريتم القوة

مثال 2 اكتب العبارة $3 \log_6 x + \frac{1}{5} \log_6 (x+4)$ بالصورة المختصرة.

$3 \log_6 x + \frac{1}{5} \log_6 (x+4) = \log_6 x^3 + \log_6 (x+4)^{\frac{1}{5}}$ خاصية لوغاريتم القوة

$= \log_6 x^3 + \log_6 \sqrt[5]{x+4}$ $\quad (x+4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x+4}$

$= \log_6 x^3 \sqrt[5]{x+4}$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

تمارين

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

1) $\log_7 4a^2 b^5$ **$\log_7 4 + 2 \log_7 a + 5 \log_7 b$**
2) $\log_3 6x^3 y^{-2}$ **$\log_3 6 + 3 \log_3 x - 2 \log_3 y$**
3) $\log_2 \frac{5x^2 y}{z^5}$ **$\log_2 5 + 2 \log_2 x + \log_2 y - 5 \log_2 z$**

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

4) $3 \log_9 x + 4 \log_9 y^3 - \log_9 (x+1)$ **$\log_9 \frac{x^3 y^{12}}{x+1}$**
5) $\log_{11} (x+1) + \log_{11} (x-1) - \log_{11} x$ **$\log_{11} \frac{x^2 - 1}{x}$**

الصف: الثالث الثانوي 19 الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات حل المسألة (20) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-4 تدريبات حل المسألة

خصائص اللوغاريتمات

1) **حساب ذهني:** عرف عبدالعزيز أن $\log_5 2 \approx 0.4307$ وَ $\log_5 3 \approx 0.6826$. فما الأس الذي يُرفع إليه العدد 5 ليحصل على العدد 6 باستعمال هذه المعطيات؟ مقربًا الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.
1.1133

2) **قوى:** يختبر كيميائي مشروبًا غازيًّا، علمًا بأن درجة الحموضة pH لمحلول ما تتعين باستعمال العبارة $-\log_{10} C$، حيث C درجة تركيز أيون الهيدروجين. فإذا كان pH لمشروب غازي معروف يساوي 2.5، وقد زيد تركيز أيونات الهيدروجين 100 مرة، فما مقدار pH الجديدة للمحلول؟
0.5

3) **الرياضيات والحظ:** يحل سالم مسألة تتضمن لوغاريتمات. وقد أجرى الخطوات جميعها على نحو صحيح باستثناء خطوة واحدة، إذ كتب $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 (a+b)$ خطأً. وبعد أن عوّض قيم a، b حصل على جواب صحيح، فإذا كانت قيمة a هي 11، فما القيمة التي يجب أن تأخذها b؟
1.1

4) **أطوال:** كان لدى هاشم وتدان، طول الأول $\log_7 21$، وطول الثاني $\log_7 25$. عبّر عن مجموع الطولين بحدٍّ لوغاريتمي واحد.
$\log_7 525$

5) **قياسات:** حاولت فاطمة أن تحدد كميات تقابل المصطلحات الآتية: نحيل، صغير، متوسط، كبير، ضخم، هائل، وعملاق. فالتقطت عددًا من الأشياء وصنّفتها بحسب قياساتها، ولاحظت أن القياسات تظهر على صورة أسيّة، وتوصلت إلى أن قيمة S هي $\frac{1}{3} \log_3 V$ حيث V الحجم بالأقدام المكعبة، استعمل الجدول لتجد المصطلح المناسب.

القياس	المصطلح
$-2 \le S < -1$	نحيل
$-1 \le S < 0$	صغير
$0 \le S < 1$	متوسط
$1 \le S < 2$	كبير
$2 \le S < 3$	ضخم
$3 \le S < 4$	هائل
$4 \le S < 5$	عملاق

a) اشتق عبارة لـ S بدلالة ℓ لتطبقها على مكعب طول ضلعه ℓ.
$\log_3 l$

b) ما عدد المكعبات التي يمكن أن تضعها فاطمة معًا للحصول على جسم تصنّفه على أنه ضخم؟ علمًا بأن طول ضلع المكعب قدم واحدة.
729

c) هل من الممكن أن يكون الجسم الناتج عن ضم الجسم الكبير إلى الجسم الضخم جسمًا هائلًا؟
ليس بالضرورة؛ فقد يكون هائلًا أو عملاقًا.

الصف: الثالث الثانوي 20 الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التدريبات الإثرائية (21) فوق

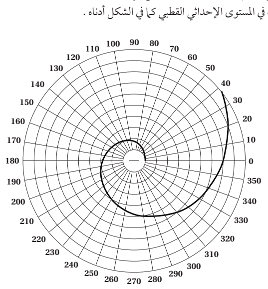
الاسم: ________ التاريخ: ________

2-4 التدريبات الإثرائية

الدوّامة اللوغاريتمية

افترض أن زاوية في وضع قياسي ورأسها عند القطب O، وضلعها الابتدائي ينطبق على المحور الإحداثي الذي نسميه المحور القطبي. وتحدد النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية بالإحداثيات القطبية (r, θ)، حيث r المسافة المتجهة من القطب O إلى النقطة P، θ قياس الزاوية.

يمكن أن نرسم المنحنيات في المستوى الإحداثي القطبي كما في الشكل أدناه .



1) استعمل الآلة الحاسبة لإكمال جدول الدالة $\log_2 r = \frac{\theta}{120}$.

إرشاد: لإيجاد قيمة θ على الحاسبة اضغط (LOG r) ÷ LOG 2)) × 120

r	1	2	3	4	5	6	7	8
θ	0°	120°	190°	240°	279°	310°	337°	360°

2) مثّل النقاط التي وجدتها في التمرين 1 على الشكل أعلاه، ثم صل بينها بمنحنى. ويسمى هذا النوع من الدوامة الدوامة اللوغاريتمية؛ لأن قياسات الزوايا تتناسب مع لوغاريتمات أنصاف الأقطار.

الصف: الثالث الثانوي 21 الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (14) دون ضمن فوق

4 - 2 خصائص اللوغاريتمات

استعمل $\log_{10} 7 \approx 0.8451$ ، $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ لتقريب قيمة كلٍّ مما يأتي:

1) $\log_{10} 35$ **1.5441**
2) $\log_{10} 25$ **1.3980**
3) $\log_{10} \frac{7}{5}$ **0.1461**
4) $\log_{10} \frac{5}{7}$ **−0.1461**
5) $\log_{10} 245$ **2.3892**
6) $\log_{10} 175$ **2.2431**
7) $\log_{10} 0.2$ **−0.6990**
8) $\log_{10} \frac{25}{7}$ **0.5529**

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة:

9) $\log_2 [(2x)^3 (x+1)]$
$3 + 3\log_2 x + \log_2 (x+1)$

10) $\log_8 [(4x+2)^3 (x-4)]$
$3\log_8 (4x+2) + \log_8 (x-4)$

11) $\log_{13} \frac{3x^4}{\sqrt[3]{7x-3}}$
$\log_{13} 3 + 4\log_{13} x - \frac{1}{3}\log_{13} (7x-3)$

12) $\log_2 \frac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{x+5}}$
$3\log_2 (x+1) - \frac{1}{3}\log_2 (x+5)$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

13) $3\log_2 (5x+6) - \frac{1}{2}\log_2 (x-4)$ $\log_2 \frac{(5x+6)^3}{\sqrt{x-4}}$

14) $2 - \log_7 6 - 2\log_7 x$ $\log_7 \frac{49}{6x^2}$

15) $\log_3 8 + \log_3 x - 2\log_3 (x+4)$ $\log_3 \frac{8x}{(x+4)^2}$

16) $\log_{10} y + \log_{10} 3 - \frac{1}{3}\log_{10}(x) + 2\log_{10} z$ $\log \frac{3yz^2}{\sqrt[3]{x}}$

17) $\log_3 y + \log_3 x - \frac{1}{2}\log_3 x + 3\log_3 z$ $\log_3 \frac{xyz^3}{\sqrt{x}}$

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

18) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$
3

19) $\log_{100} 10000$
2

20) $\log_2 \sqrt[5]{4}$
$\frac{2}{5}$

21) **صوت:** تذكر أن شدة الصوت L بالديسيبل تُعطَى بالعلاقة $L = 10\log_{10} R$، حيث R شدة الصوت النسبية. إذا أصبحت الشدة النسبية لصوت ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبل تزيد شدة الصوت؟ **4.8 dB تقريبًا**

14

الفصل الثاني العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

2-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 2-5

إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية.

الدرس 2-5

حل معادلات لوغاريتمية.

حل متباينات لوغاريتمية.

ما بعد الدرس 2-5

إيجاد حلول معادلات أسية باستعمال الطرق الجبرية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ضمن أي فئات مقياس فوجيتا يقع إعصار سرعة الرياح المصاحبة له 100 mi/h؟ F-1
- ما مجال سرعة الرياح المصاحبة لإعصار من الفئة F–4؟ 207–260 mi/h
- كم مرّة وقعت أعاصير من الفئة F-6؟ 0
- ما قيمة d عندما تكون $w = 65$ mi/h؟ $d = 1$ mil

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية
Solving Logarithmic Equations and Inequalites

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية. (الدرس 2–4)

والآن:

- أحل معادلات لوغاريتمية.
- أحل متباينات لوغاريتمية.

المفردات:

المعادلة اللوغاريتمية
logarithmic equation

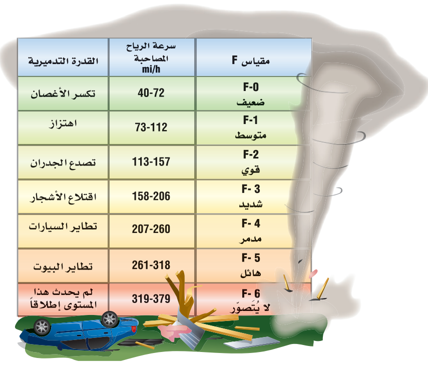
المتباينة اللوغاريتمية
logarithmic inequality

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُقاس شدة الأعاصير بمقياس يُدعى فوجيتا (Fujita)، ويرمز إليه بالرمز F، ويصنّف هذا المقياس الأعاصير إلى سبع فئات من F–0 إلى F–6 بحسب: سرعة الرياح المصاحبة للإعصار (w) والتي تعطى بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ حيث تمثل d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل، وطول مساره، وعرضه، وقدرته التدميرية، والفئة F–6 هي فئة أشد الأعاصير تدميرًا.

إن معرفة المعادلة السابقة تمكنك من إيجاد المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل عند أية قيمة لسرعة الرياح المصاحبة معطاة بالميل لكل ساعة.



مقياس F	سرعة الرياح المصاحبة mi/h	القدرة التدميرية
F-0 ضعيف	40-72	تكسر الأغصان
F-1 متوسط	73-112	اهتزاز
F-2 قوي	113-157	تصدع الجدران
F- 3 شديد	158-206	اقتلاع الأشجار
F- 4 مدمر	207-260	تطاير السيارات
F- 5 هائل	261-318	تطاير البيوت
F- 6 لا يُتَصوّر	319-379	لم يحدث هذا المستوى إطلاقاً

حل المعادلات اللوغاريتمية: تحتوي **المعادلات اللوغاريتمية** على لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة على حل معادلات لوغاريتمية.

مثال 1 حل معادلات باستعمال تعريف اللوغاريتم

حُلّ المعادلة $\log_{36} x = \frac{3}{2}$ ، ثم تحقق من صحة حلّك.

$\log_{36} x = \frac{3}{2}$ المعادلة الأصلية

$x = 36^{\frac{3}{2}}$ تعريف اللوغاريتم

$x = (6^2)^{\frac{3}{2}}$ $36 = 6^2$

$x = 6^3 = 216$ خاصية قوة القوة

التحقق: عوّض عن x بـ 216 في المعادلة الأصلية .

$\log_{36} x \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ المعادلة الأصلية

$\log_{36} 216 \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ عوّض 216 بدلًا من x

$\log_{36} (36)(6) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ حلّل

$\log_{36} 36 + \log_{36} (36)^{\frac{1}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ خاصيتا ضرب اللوغاريتمية ولوغاريتم القوة

$1 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}$ بسّط

$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ ✓ الحل صحيح

تحقق من فهمك

(1A $\log_9 x = \frac{3}{2}$ 27

(1B $\log_{16} x = \frac{5}{2}$ 1024

ويمكنك استعمال خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية لحل معادلات لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مصادر الدرس 5 – 2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (113)	• تنويع التعليم ص (113 , 116)	• تنويع التعليم ص (116)
كتاب التمارين	• ص (15)	• ص (15)	• ص (15)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

مثال 2 على اختبار

حُلّ المعادلة $\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$.

A -2 **B** -1 **C** 2 **D** 4

اقرأ فقرة الاختبار: المطلوب هو إيجاد قيمة x في المعادلة اللوغاريتمية.

حل فقرة الاختبار:

$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 3x$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 4 = 3x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x^2 - 3x - 4 = 0$	اطرح $3x$ من كلا الطرفين
$(x - 4)(x + 1) = 0$	حلّل إلى العوامل
$x + 1 = 0$ أو $x - 4 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -1$ أو $x = 4$	حُل كل معادلة

التحقق: عوِّض بكل من القيمتين في المعادلة الأصلية.

$x = -1$

$\log_2 [(-1)^2 - 4] \stackrel{?}{=} \log_2 3(-1)$

$\log_2 (-3) = \log_2 (-3)$ ✗

$x = 4$

$\log_2 (4^2 - 4) \stackrel{?}{=} \log_2 3(4)$

$\log_2 12 = \log_2 12$ ✓

بما أن $\log_2 (-3)$ غير معرف، فالإجابة -1 مرفوضة، والإجابة الصحيحة هي D

تحقق من فهمك

2) حُلّ المعادلة $\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x$. C

A -3 **B** -1 **C** 5 **D** 15

إرشادات للدراسة

التعويض
اختصارًا للوقت، يمكنك تعويض كل متغير بقيمته في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحل.

ويمكنك استعمال خصائص اللوغاريتمات في حل المعادلات اللوغاريتمية.

مثال 3 حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات

حُلّ المعادلة $\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$	المعادلة الأصلية
$\log_6 x(x - 9) = 2$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$x(x - 9) = 6^2$	تعريف اللوغاريتم
$x^2 - 9x - 36 = 0$	بسِّط ثم اطرح 36 من كلا الطرفين
$(x - 12)(x + 3) = 0$	حلّل
$x + 3 = 0$ أو $x - 12 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = -3$ ، $x = 12$	حُل كل معادلة

إرشادات للدراسة

تحديد الحلول الدخيلة
يمكن تحديد الحلول الدخيلة من خلال إيجاد مجال المعادلة، ففي مثال3 مجال $\log_6 x$ هو $x>0$، بينما مجال $\log_6 (x-9)$ هو $x>9$؛ لذا يكون مجال المعادلة هو $x>9$ ، وبما أن $-3 \not> 9$ فإن $x=-3$ ليس حلًا للمعادلة.

حل المعادلات اللوغاريتمية

مثال 1 يبيِّن كيفية حل معادلات تحتوي لوغاريتمًا واحدًا.

مثال 2 يبيِّن كيفية حل معادلات تحتوي لوغاريتمات في كلا الطرفين.

مثال 3 يبيِّن كيفية حل معادلات باستعمال خاصية الضرب في اللوغاريتمات.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1. حُلّ المعادلة $\log_4 x = \frac{5}{2}$ 32

2. **مثال على اختبار:** حلّ المعادلة:
$\log_4 x^2 = \log_4(-6x - 8)$ C
A 4 **C** -2 و -4
B 2 **D** لا يوجد حل

3. حلّ المعادلة
$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) = \log_2(2x + 24)$
9

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا احتاج بعض الطلاب إلى مساعدة في تحديد مواقع الأعداد في الصورتين الأسية واللوغاريتمية المتكافئتين للمعادلات،

فاطلب إليهم عمل ملصقات ملونة تظهر عدة معادلات متكافئة بالصورتين الأسية واللوغاريتمية مثل $2^3 = 8$ ، $\log_2 8 = 3$، واقترح عليهم أن يستعملوا لونًا مختلفًا لكل من الأعداد 8 ,3 ,2 .

حل المتباينات اللوغاريتمية

مثال 4 يبيِّن كيفية حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مثال 5 يبيِّن كيفية حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه.

مثالان إضافيان

4 حُلّ المتباينة $\log_6 x > 3$.
$\{x | x > 216\}$

5 حل المتباينة $\log_7 (2x + 8) > \log_7 (x + 5)$.
$\{x | x > -3\}$

التحقق:

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-3 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (-3) + \log_6 (-12) \stackrel{?}{=} 2$

بما أن $\log_6 (-3)$ و $\log_6 (-12)$ غير معرفين فإن -3 حل مرفوض.

$\log_6 x + \log_6 (x - 9) = 2$

$\log_6 12 + \log_6 (12 - 9) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 12 + \log_6 3 \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 (12 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 2$

$\log_6 36 \stackrel{?}{=} 2$

$2 = 2$ ✓

وبذلك يكون الحل هو $x = 12$.

تحقق من فهمك

3A) $2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$ 9

3B) $\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2$ 4

حل المتباينات اللوغاريتمية: **المتباينة اللوغاريتمية** هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر، ويمكن استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

إذا كان $b > 1$, $x > 0$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

إذا كان $b > 1$ و $\log_b x < y$ ، فإن $x < b^y$

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين ≤ ، ≥

إرشادات للدراسة

حل المعادلة اللوغاريتمية: عند حل متباينة لوغاريتمية يستثنى قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرّفًا.

مثال 4 حل متباينات تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة

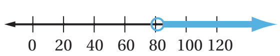
حُلّ المتباينة $\log_3 x > 4$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 x > 4$ المتباينة الأساسية

$x > 3^4$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$x > 81$ بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x | x > 81 , x \in R\}$



التحقق: عوّض بعدد أقل من 81، وعدد أكبر من 81 في المتباينة الأصلية.

$x = 9$

$\log_3 9 \stackrel{?}{>} 4$

$2 > 4$ ✗

$x = 243$

$\log_3 243 \stackrel{?}{>} 4$

$5 > 4$ ✓

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

حل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك.

4A) $\log_4 x \geq 3$ $\{x \mid x \geq 64\}$

4B) $\log_2 x < 4$ $\{x \mid 0 < x < 16\}$

114 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

يمكنك استعمال الخاصية الآتية لحل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه في كلا الطرفين.
استثن من حلّك القيم التي ينتج عن تعويضها في المتباينة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي **خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية**

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$
$x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين $\leq$ ، $\geq$

مثال 5 حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

حل المتباينة $\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

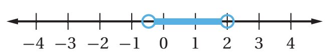
$\log_4 (x + 3) > \log_4 (2x + 1)$ المتباينة الأساسية

$x + 3 > 2x + 1$ خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

$2 > x$ اطرح $x + 1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x + 3 \leq 0$ أو $2x + 1 \leq 0$ ($x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\right\}$.



التحقق: عوّض بعدد يقع بين $-\frac{1}{2}, 2$ ، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2} ، 2)$.

$x = 1$

$\log_4 (1+3) \overset{?}{>} \log_4 (2+1)$

$\log_4 4 \overset{?}{>} \log_4 3$

$\log_4 4 > \log_4 3$ ✓ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$x = 3$

$\log_4 (3+3) \overset{?}{>} \log_4 (2\times3+1)$

$\log_4 6 \overset{?}{>} \log_4 7$

$\log_4 6 > \log_4 7$ ✗ الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

5) حل المتباينة $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq 3\right\}$

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لإعداد عرض مرئي (Video) يتعلق بكيفية حل معادلة لوغاريتمية. وتحقق من أنهم يفسرون كل خطوة في عملهم، وبخاصة كيفية إعادة كتابة المعادلة اللوغاريتمية على صورة معادلة أسّية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	1-27، 32، 35، 36، 38-51
ضمن ضمن المتوسط	1-27 (فردي)، 29، 30، 31، 32، 34، 35-37، 38-51
فوق فوق المتوسط	28-51

تدرب وحل المسائل

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 1)

1) $\log_8 x = \frac{4}{3}$ **16**

2) $\log_{16} x = \frac{3}{4}$ **8**

3) $\log_{81} x = \frac{3}{4}$ **27**

4) $\log_{25} x = \frac{5}{2}$ **3125**

5) $\log_8 \frac{1}{2} = x$ $-\frac{1}{3}$

6) $\log_6 \frac{1}{36} = x$ **−2**

7) $\log_x 32 = \frac{5}{2}$ **4**

8) $\log_x 27 = \frac{3}{2}$ **9**

حُلّ كل معادلة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك: (المثالان 2, 3)

9) $5 \log_2 x = \log_2 32$ **2**

10) $3 \log_2 x = \log_2 8$ **2**

11) $\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ **8**

12) $\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$ **2**

13) $\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40$ **2**

14) $\log_7 (x-3) + \log_7 (x-2) = \log_7 (2x+24)$ **9**

15) $\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36$ **108**

16) $3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_{10} 36 = \log_{10} x$ $85\frac{1}{3}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة حلّك: (مثال 4)

17) $\log_5 x > 3$ $\{x \mid x > 125\}$

18) $\log_8 x \le -2$ $\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{64}\}$

19) $\log_6 x < -3$ $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\}$

20) $\log_4 x \ge 4$ $\{x \mid x \ge 256\}$

21) $\log_3 x \ge -4$ $\{x \mid x \ge \frac{1}{81}\}$

22) $\log_2 x \le -2$ $\{x \mid 0 < x \le \frac{1}{4}\}$

حُلّ كل متباينة مما يأتي ثم تحقق من صحة حلك: (مثال 5)

23) $\log_4 (2x + 5) \le \log_4 (4x - 3)$ $\{x \mid x \ge 4\}$

24) $\log_8 (2x) > \log_8 (6x - 8)$ $\left\{x \mid 2 > x > \frac{4}{3}\right\}$

25) $\log_2 (4x - 6) > \log_2 (2x + 8)$ $\{x \mid x > 7\}$

26) $\log_7 (x + 2) \ge \log_7 (6x - 3)$ $\{x \mid 0.5 < x \le 1\}$

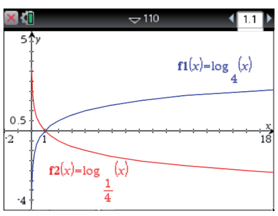
27) **صوت:** يعطى ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$، حيث R هي شدة الصوت. احسب شدة صوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل. 10^8

28) **علوم:** تُقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x تمثل شدة الهزة الأرضية.

a) كم تبلغ شدة هزة أرضية سجلت 7 درجات على مقياس ريختر؟ 10^6 أو 1000000

b) كم مرة تبلغ شدة هزة أرضية قوتها 8 درجات بمقياس ريختر مقارنة بشدة هزة أرضية قوتها 5 درجات على المقياس نفسه؟ 10^3 أو 1000 مرة أكبر

29) **تمثيلات متعددة:** ستكتشف في هذه المسألة العلاقة بين الدالتين $y = \log_4 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$. (29a-29c) انظر ملحق الإجابات.



a) **تحليليًا:** قارن بين منحنيي الدالتين من حيث خطوط التقارب ومقاطع المحور x؟

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين منحنيي الدالتين.

c) **تحليليًا:** صف العلاقة بين كل من الدالتين $y = \log_4 x$ و $y = -1(\log_4 x)$ وما مجال ومدى كل منهما؟

30) **علوم:** تُعطى سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل.

a) اكتب المعادلة بصورة أسية. $d = 10^{\frac{w-65}{93}}$

b) ما سرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلًا؟ 317.975 mi/h

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-27 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 29 الآلة الحاسبة البيانية TI-nspire، والتحليل الجبري والمنطقي للمقارنة بين التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب كتابة شرح طريقة حل معادلات لوغاريتمية على الصورة $\log_8 n = \frac{7}{3}$ خطوة خطوة على ورقة، وأن يسلموا إجاباتهم قبل مغادرتك غرفة الصف.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-4، 2-5 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (31)

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب أن يجدوا قيمتي $\log_3 1$, $\log_3 9$. 0, 2، ثم يتوقعوا قيمة $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$. وبعد تنفيذ عملية التوقع اطلب إليهم أن يتحققوا مما إذا كان رفع العدد 3 إلى القيمة المتنبأ بها يساوي $\frac{1}{9}$ أم لا. ثم اطلب إليهم توقع قيمة $\log_3\left(\frac{1}{n}\right)$. $-\log_3 n$

31) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع I وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$.

a) أوجد عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1 واط لكل متر مربع، وكذلك لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع. **120, 100**

b) إذا كانت شدة الصوت 1 واط لكل متر مربع تعادل 100 مرة من شدة الصوت الذي مقداره 10^{-2} واط لكل متر مربع، فهل تضاعف عدد وحدات الديسبل بمقدار 100 مرة؟ **انظر الهامش.**

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **اكتشف الخطأ:** تقوم لينا وريم بحل المتباينة $\log_2 x \geq -2$. أي منهما حلها صحيح؟ **انظر الهامش.**

ريم	لينا
$\log_2 x \geq -2$	$\log_2 x \geq -2$
$x \geq 2^{-2}$	$x \leq 2^{-2}$
$x \geq \frac{1}{4}$	$0 < x \leq \frac{1}{4}$

33) **تحدٍّ:** أوجد قيمة $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$ **$6\frac{17}{20}$**

34) **تبرير:** نص خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية هو: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$. كيف يصبح نص الخاصية إذا كان $0 < b < 1$، وضِّح إجابتك. **انظر الهامش.**

35) **اكتب:** وضح العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسيّة المناظرة لها. **انظر الهامش.**

36) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على معادلة لوغاريتمية ليس لها حل. **انظر الهامش.**

37) **تبرير:** ضع خطًّا تحت التعبير الذي يجعل الجملة صحيحة، مع ذكر السبب: (علمًا بأن جميع المعادلات اللوغاريتمية المذكورة على الصورة $y = \log_b x$).

a) إذا كان أساس اللوغاريتم أكبر من 1 وتقع قيمة x بين 0, 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

b) إذا كان أساس اللوغاريتم بين 0, 1 وقيمة x أكبر من 1، فإن قيمة y تكون (أصغر من، أكبر من، مساوية لـ) الصفر.

c) المعادلة $y = \log_b 0$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

d) المعادلة $y = \log_b 1$ (لا حل لها، لها حل واحد، لها عدد لا نهائي من الحلول) بالنسبة لـ b.

38) **اكتب:** فسِّر لماذا يقطع منحنى أي دالة لوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ المحور x عند النقطة $(1, 0)$ ولا يقطع المحور y. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-2)

39) $3^{3x-2} > 81$ **$x > 2$**

40) $3^{4x-7} = 27^{2x+3}$ **$x = -8$**

41) $8^{x-4} = 2^{4-x}$ **$x = 4$**

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: (الدرس 2-3)

42) $\log_4 256$ **4**

43) $\log_2 \frac{1}{8}$ **−3**

44) $\log_6 216$ **3**

45) $\log_7 2401$ **4**

بسّط كلًّا مما يأتي. مفترضًا أن أيًّا من المتغيرات لا يساوي الصفر: (مهارة سابقة)

46) $x^5 \cdot x^3$ **x^8**

47) $(2p^2n)^3$ **$8p^6n^3$**

48) $\frac{x^4y^6}{xy^2}$ **x^3y^4**

49) $\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0$ **1**

تدريب على اختبار

50) أي الدوال الأسية الآتية يمر تمثيلها البياني بالنقطتين $(0, -10), (4, -160)$؟ **A**

A $f(x) = -10(2)^x$

B $f(x) = 10(2)^x$

C $f(x) = -10(4)^x$

D $f(x) = 10(4)^x$

51) أي مما يأتي يمثل حلًّا للمعادلة $\log_4 x - \log_4 (x-1) = \frac{1}{2}$؟ **D**

A $-\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{2}$

C -2

D 2

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب عند حل السؤال 32 بأن هناك فرقًا بين عملية رفع عدد إلى أسس سالبة، وضرب عدد في -1، كذلك ضرورة استثناء قيم المتغير التي لا يكون اللوغاريتم عندها معرفًا.

إجابات:

31b) إجابة ممكنة: من الفرع a أعلاه، عدد وحدات الديسبل لصوت شدته 1 واط لكل متر مربع هو 120، وعدد وحدات الديسبل لصوت شدته 10^{-2} واط لكل متر مربع هو 100؛ لذا فإن عدد وحدات الديسبل يزداد بمقدار 20 وحدة فقط.

32) إجابة ممكنة: ريم؛ لأن لينا عكست إشارة المتباينة.

34) إجابة ممكنة: إذا كان $0 < b < 1$ فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا $x < y$؛ انعكست إشارة المتباينة؛ لأن الكسر الأصغر من 1 يكون أصغر عند رفعه لقوة أكبر.

35) الدالة اللوغاريتمية على الصورة $y = \log_b x$ هي الدالة العكسية للدالة الأسية من الصورة $y = b^x$، ومجال أحدهما يساوي مدى الأخرى، كما أن مدى أحدهما يساوي مجال الدالة الأخرى.

36) إجابة ممكنة:

$\log_3(x+4) = \log_3(3x+12)$

38) مقطع المحور y للدالة الأسية $y = b^x$ هو $(0, 1)$، وعند قلب الإحداثيين x, y فإن المقطع y يتغير إلى مقطع المحور x عند النقطة $(1, 0)$، وبما أنه لا يوجد مقطع المحور x عند النقطة $(0, 1)$ للدالة الأسية، فإنه لن يكون هناك نقطة تناظرها $(0, 1)$ للدالة اللوغاريتمية على المحور y، وهذا يعني أنه منحنى الدالة اللوغاريتمية لا يقطع المحور y.

الفصل 2 مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 2

دون: دون المتوسط   ضمن: ضمن المتوسط   فوق: فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل معادلات لوغاريتمية

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية	إذا كانت b عددًا موجبًا غير الواحد فإن $log_b x = log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال 1 حلّ المعادلة $log_2 2x = 3$

$log_2 2x = 3$ المعادلة الأصلية

$2x = 2^3$ تعريف اللوغاريتم

$2x = 8$ بسّط

$x = 4$ بسّط

الحل: $x = 4$.

مثال 2 حلّ المعادلة

$\boldsymbol{log_2 (x+17) = log_2 (3x+23)}$

لمّا كان أساسا اللوغاريتمات متساويين، فإن $(x + 17)$ تساوي $(3x + 23)$.

$(x+17) = (3x+23)$

$-6 = 2x$

$x = -3$

تمارين

حلّ كل معادلة مما يأتي :

1) $log_2 32 = 3x$ — $\boldsymbol{\frac{5}{3}}$

2) $log_3 2c = -2$ — $\boldsymbol{\frac{1}{18}}$

3) $log_{2x} 16 = -2$ — $\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

4) $log_{25} \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ — **10**

5) $log_4 (5x+1) = 2$ — **3**

6) $log_8 (x-5) = \frac{2}{3}$ — **9**

7) $log_4 (3x-1) = log_4 (2x+3)$ — **4**

8) $log_2 (x^2-6) = log_2 (2x+2)$ — **4**

9) $log_{x+4} 27 = 3$ — **−1**

10) $log_2 (x+3) = 4$ — **13**

11) $log_x 1000 = 3$ — **10**

12) $log_8 (4x+4) = 2$ — **15**

13) $log_2 x = log_2 12$ — $\boldsymbol{x = 12}$

14) $log_3 (x-5) = log_3 13$ — $\boldsymbol{x = 18}$

15) $log_{10} x = log_{10} (5x-20)$ — $\boldsymbol{x = 5}$

16) $log_5 x = log_5 (2x-1)$ — $\boldsymbol{x = 1}$

17) $log_4 (x+12) = log_4 4x$ — $\boldsymbol{x = 4}$

18) $log_6 (x-3) = log_6 2x$ — **لا يوجد حلّ .**

الصف: الثالث الثانوي   22   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم (23) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حلّ المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حل متباينات لوغاريتمية:

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية	إذا كان $b > 1$, $x > 0$ وكان $log_b x > y$، فإن $x > b^y$. إذا كان $b > 1$, $x > 0$ وكان $log_b x < y$، فإن $0 < x < b^y$. إذا كان $b > 1$ فإن $log_b x > log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ و $log_b x < log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$.

مثال 1 حلّ المتباينة

$\boldsymbol{log_5 (4x-3) < 3}$

$log_5 (4x-3) < 3$ المتباينة الأصلية

$0 < 4x-3 < 5^3$ خاصية المتباينة

$3 < 4x < 125+3$ بسّط

$\frac{3}{4} < x < 32$ بسّط

الحل هو $\{x | \frac{3}{4} < x < 32\}$.

مثال 2 حلّ المتباينة

$\boldsymbol{log_3(3x-4) < log_3 (x+1)}$

لمّا كان أساس اللوغاريتمات أكبر من 1 ، فإن $3x - 4 < x + 1$.

$2x < 5$

$x < \frac{5}{2}$

ولمّا كان كلٌّ من $3x - 4$ و $x + 1$ يجب أن يكون عددًا موجبًا، فإن عليك حل $3x - 4 = 0$؛ للحصول على الحد الأدنى للمتباينة .

فالحل هو $\{x | \frac{4}{3} < x < \frac{5}{2}\}$.

تمارين

حلّ كلّ متباينة مما يأتي :

1) $log_2 2x > 2$ — $\boldsymbol{\{x | x > 2\}}$

2) $log_5 x > 2$ — $\boldsymbol{\{x | x > 25\}}$

3) $log_2 (3x+1) < 4$ — $\boldsymbol{\left\{x | -\frac{1}{3} < x < 5\right\}}$

4) $log_4 2x > -\frac{1}{2}$ — $\boldsymbol{\left\{x | x > \frac{1}{4}\right\}}$

5) $log_3 (x+3) < 3$ — $\boldsymbol{\{x | -3 < x < 24\}}$

6) $log_{27} 6x > \frac{2}{3}$ — $\boldsymbol{\left\{x | x > \frac{3}{2}\right\}}$

7) $log_{10} 5x < log_{10} 30$ — $\boldsymbol{\{x | 0 < x < 6\}}$

8) $log_{10} x < log_{10} (2x-4)$ — $\boldsymbol{\{x | x > 4\}}$

9) $log_{10} 3x < log_{10} (7x-8)$ — $\boldsymbol{\{x | x > 2\}}$

10) $log_2 (8x+5) > log_2 (9x-18)$ — $\boldsymbol{\{x | 2 < x < 23\}}$

11) $log_{10} (3x+7) < log_{10} (7x-3)$ — $\boldsymbol{\left\{x | x > 2\frac{1}{2}\right\}}$

12) $log_2 (3x-4) < log_2 2x+7$ — $\boldsymbol{\left\{x | 1\frac{1}{3} < x < 11\right\}}$

الصف: الثالث الثانوي   23   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 تدريبات حل المسألة

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

1) **علوم:** تقاس قوة الهزات الأرضية بمقياس لوغاريتمي ذي درجات يُسمى مقياس ريختر، وتُعطى قوة الهزة الأرضية M بالمعادلة $M = 1 + log_{10} x$ ، حيث x تمثّل شدة الهزة الأرضية. كم تبلغ شدة هزة أرضية سجّلت 5.5 درجات على مقياس ريختر؟

$\boldsymbol{10^{4.5}}$

2) **قوى:** يحاول فيصل حلّ المعادلة: $log_4 2x = 5$. وقد حصل على الإجابة الخطأ أدناه. فما الخطأ؟ وما الإجابة الصحيحة؟

1	$log_4 2x = 5$
2	$2x = 4^5$
3	$x = \frac{4^5}{2}$
4	$x = 2^5$
5	$x = 32$

انتقل فيصل من الخطوة 2 إلى الخطوة 3 بقسمة المعادلة على 2 بطريقة خطأ . والإجابة الصحيحة هي 512

3) **أرقام:** يريد مبرمج حاسوب أن يكتب صيغة تعبّر عن عدد الأرقام في عدد ما باستعمال العدد n، حيث n عدد صحيح موجب. فمثلًا إذا كان $n = 343$، فيتعين أن تكون الإجابة 3، وإذا كان $n = 10000$، فيتعين أن تكون 5. فإذا كان $8 \le log_{10} n < 9$، فكم رقمًا في العدد n ؟

9

4) **لوغاريتمات:** يعرف سعود أن $log_b x = 3$ و $log_b y = 5$. وهذا مماثل لـِ $b^3 = x$ و $b^5 = y$. اضرب القيمتين بعضهما في بعض، وأعدْ كتابة المعادلة لتحوي لوغاريتمات. ما قيمة $log_b xy$؟

$\boldsymbol{xy = b^8}$ **أو** $\boldsymbol{xy = b^3 b^5}$

وبصيغة أخرى $\boldsymbol{log_b xy = 8}$

الصف: الثالث الثانوي   24   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التدريبات الإثرائية (25) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-5 التدريبات الإثرائية

حل نظام من معادلتين

يمكن استعمال خصائص الدوال اللوغاريتمية في حل نظام من معادلتين لوغاريتميتين.

مثال حُلَّ النظام $\boldsymbol{log_7 (2x-y) = 1}$

$\boldsymbol{log_7 (x+y) = \frac{1}{2} log_7 64}$

لكتابة النظام دون استعمال اللوغاريتمات، استعمل خصائص الدوال اللوغاريتمية وإعادة كتابة العبارات اللوغاريتمية على الصورة الأسية:

$log_7 (2x-y) = 1 \Rightarrow 2x - y = 7$

$log_7 (x+y) = \frac{1}{2} log_7 64 \Rightarrow x + y = 8$

وبحلّ النظام $2x - y = 7$

$x + y = 8$

نجد أن $x = 5 , y = 3$

التحقق

$log_7 (2x-y) = 1$ $log_7 (x+y) = \frac{1}{2} log_7 64$

$log_7 (2 \times 5 - 3) \stackrel{?}{=} 1$ $log_7 (5+3) \stackrel{?}{=} log_7 64^{\frac{1}{2}}$

$log_7 (7) \stackrel{?}{=} 1$ $log_7 8 = log_7 8$

$1 = 1$

تمارين

حلّ كل نظام مما يأتي:

1) $log_{10} (x+4y) = 1$

$\log_{10} (x-y) = \frac{1}{3} \log_{10} 125$

$\boldsymbol{x = 6 , \ y = 1}$

2) $log_5 (3x+2y) = 1$

$log_5 (x+y) = \frac{1}{3} log_5 8$

$\boldsymbol{x = 1 , \ y = 1}$

الصف: الثالث الثانوي   25   الفصل 2: العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 2

دون: دون المتوسط — ضمن: ضمن المتوسط — فوق: فوق المتوسط

كتاب التمارين (15) — دون — ضمن — فوق

5 - 2 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك.

1) $x + 5 = \log_4 256$ — $x = -1$

2) $\log_3 (4x - 17) = 5$ — $x = 65$

3) $\log_{13} (x^2 - 4) = \log_{13} 3x$ — $x = 4$

4) $\log_6 (3 - x) \le \log_6 (x - 1)$ — $\{x|3 > x \ge 2\}$

5) $\log_8 (-6x) = 1$ — $x = -\frac{4}{3}$

6) $\log_{10} (x - 5) = \log_{10} 2x$ — لا يوجد حل

7) $\log_7 n = \frac{2}{3}\log_7 8$ — 4

8) $\log_{10} u = \frac{3}{2}\log_{10} 4$ — 8

9) $\log_6 x + \log_6 9 = \log_6 54$ — 6

10) $\log_8 48 - \log_8 w = \log_8 4$ — 12

11) $\log_9 (3u + 14) - \log_9 5 = \log_9 2u$ — 2

12) $4 \log_2 x + \log_2 5 = \log_2 405$ — 3

13) $\log_3 y = -\log_3 16 + \frac{1}{3}\log_3 64$ — $\frac{1}{4}$

14) $\log_2 d = 5 \log_2 2 - \log_2 8$ — 4

15) $\log_{10} (3m - 5) + \log_{10} m = \log_{10} 2$ — 2

16) $\log_{10} (b + 3) + \log_{10} b = \log_{10} 4$ — 1

17) $\log_8 (t + 10) - \log_8 (t - 1) = \log_8 12$ — 2

18) $\log_3 (a + 3) + \log_3 (a + 2) = \log_3 6$ — 0

19) $\log_{10} (r + 4) - \log_{10} r = \log_{10} (r + 1)$ — 2

20) $\log_4 (x^2 - 4) - \log_4 (x + 2) = \log_4 1$ — 3

21) $\log_{10} 4 + \log_{10} w = 2$ — 25

22) $\log_8 (n - 3) + \log_8 (n + 4) = 1$ — 4

23) $3 \log_5 (x^2 + 9) - 6 = 0$ — ± 4

24) $\log_{16} (9x + 5) - \log_{16} (x^2 - 1) = \frac{1}{2}$ — 3

25) $\log_6 (2x - 5) + 1 = \log_6 (7x + 10)$ — 8

26) $\log_2 (5y + 2) - 1 = \log_2 (1 - 2y)$ — 0

27) $\log_{10} (c^2 - 1) - 2 = \log_{10} (c + 1)$ — 101

28) $\log_7 x + 2 \log_7 x - \log_7 3 = \log_7 72$ — 6

29) $\log_8 (-6x) < 1$ — $\{x|0 > x > -\frac{4}{3}\}$

30) $\log_9 (x + 2) > \log_9 (6 - 3x)$ — $\{x|1 < x < 2\}$

31) $\log_{81} x \le 0.75$ — $\{x|27 \ge x > 0\}$

32) $\log_2 (x + 6) < \log_2 17$ — $\{x|11 > x > -6\}$

33) $\log_{12} (2x - 1) > \log_{12} (5x - 16)$ — $\{x|3\frac{1}{5} < x < 5\}$

34) $\log_{10} (x - 5) > \log_{10} 2x$ — لا يوجد حل

35) $\log_2 (x + 3) < \log_2 (1 - 3x)$ — $\{x|-3 < x < -\frac{1}{2}\}$

الفصل الثاني — العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

15

ملحوظات المعلم

2-6 اللوغاريتمات العشرية
Common Logarithms

فيما سبق:
درستُ تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل معادلات لوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

(الدروس من 3–2 إلى 5–2)

والآن:
- أحل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
- أجد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

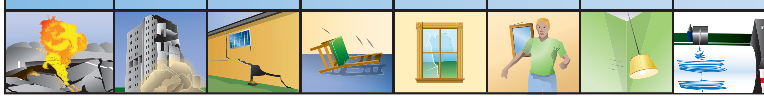
المفردات:
اللوغاريتم العشري common logarithm

صيغة تغيير الأساس Change of Base Formula

www.obeikaneducation.com

لماذا؟
يستعمل علماء الهزات الأرضية مقياس ريختر لقياس قوة الهزات الأرضية أو شدتها، ويتم تحديد قوة الهزة الأرضية بحساب لوغاريتم شدة الهزة المسجلة بجهاز السيزموجراف (seismographs).

درجة مقياس ريختر	1	2	3	4	5	6	7	8
الشدة	10^1 مايكرو	10^2 ضعيفة	10^3 ضعيفة	10^4 خفيفة	10^5 متوسطة	10^6 قوية	10^7 قوية جدًا	10^8 عظمى
التأثر في المناطق السكنية.	لا يشعر بها، ولكن يتم تسجيلها.	عادة لا يشعر بها، ولكن تتأرجح بعض المعلقات.	يشعر بها، ولكن لا تحدث أضرارًا أو قليلة الأضرار.	يشعر بها، وتحدث أضرارًا بسيطة.	تدمير بسيط للمباني في منطقة محدودة.	تدمير في منطقة قد تصل مساحتها إلى $100\ mi^2$.	قوة تدمير كبيرة في مناطق شاسعة.	تدمير كبير جدًا في مناطق شاسعة جدًا تصل إلى مئات الأميال.



يستعمل مقياس ريختر لوغاريتمات الأساس 10 لحساب قوة الهزة الأرضية، فمثلًا تُعطى قوة هزة أرضية سجلت 6.4 درجات على مقياس ريختر بالمعادلة $6.4 = 1 + \log_{10} x$ ، حيث x شدة الهزة الأرضية.

اللوغاريتمات العشرية: لعلك لاحظت أن دالة لوغاريتم الأساس 10 على الصورة "$y = \log_{10} x$" تستعمل في كثير من التطبيقات. وتُسمى لوغاريتمات الأساس 10 **اللوغاريتمات العشرية** ، وتُكتب دون كتابة الأساس 10.

$$\log_{10} x = \log x,\ x > 0$$

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log_x$ كونه أمرًا أساسيًا، ويستعمل المفتاح LOG لإيجاد قيمته.

قراءة الرياضيات
اللوغاريتم العشري
عند كتابة اللوغاريتم دون أساس، فإن ذلك يعني أن الأساس هو 10 أي أن $\log x$ تعني $\log_{10} x$.

مثال 1 إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري
استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

a) $\log 5$

اضغط على المفاتيح: LOG 5 ENTER تجد أن:

$\log 5 \approx 0.6990$

b) $\log 0.3$

اضغط على المفاتيح: LOG 0.3 ENTER تجد أن:

$\log 0.3 \approx -0.5229$

تحقق من فهمك
1A) $\log 7$ **0.8451**

1B) $\log 0.5$ **−0.3010**

2-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي
ما قبل الدرس 2-6
تبسيط عبارات لوغاريتمية وحل المعادلات الوغاريتمية باستعمال خصائص اللوغاريتمات.

الدرس 2-6
حل معادلات ومتباينات أسية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.
إيجاد قيمة عبارات لوغاريتمية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

ما بعد الدرس 2-6
تحليل موقف أو مسألة حياتية ممثلة بدالة أسّية وحلها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز
اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:
- كيف تُقارن بين درجة مقياس ريختر لهزة عظمى، وهزة خفيفة؟ ضعف الدرجة
- كم مرة تعادل شدة الهزة العظمى من الهزة الخفيفة؟ 10000 مرة
- صف تأثير هزة شدتها 10^8 على المناطق السكنية؟ تدمير كبير جداً في مناطق شاسعة جداً تصل إلى مئات الأميال.

مصادر الدرس 2 – 6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (120 , 123)	• تنويع التعليم ص (120 , 123)
كتاب التمارين	• ص (16)	• ص (16)	• ص (16)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

ترتبط اللوغاريتمات العشرية ارتباطًا وثيقًا بقوى العدد 10. تذكّر أن اللوغاريتم هو أس، فمثلًا في المعادلة $y = \log x$، y هو الأس الذي يرفع إليه العدد 10 للحصول على قيمة x .

$$\log x = y \quad \longleftrightarrow \quad 10^y = x$$
$$\log 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 10^0 = 1$$
$$\log 10 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad 10^1 = 10$$
$$\log 10^m = m \quad \longleftrightarrow \quad 10^m = 10^m$$

تستعمل اللوغاريتمات العشرية لقياس ارتفاع الصوت.

الربط مع الحياة

الديسبل (dB) هو وحدة قياس ارتفاع الصوت، على سبيل المثال: 90—100dB تعادل ارتفاع صوت الرعد، 140dB تعادل ارتفاع صوت إطلاق صاروخ إلى الفضاء.

مثال 2 من واقع الحياة — حل معادلات لوغاريتمية

شدة الصوت: يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل، ويُعطى بالقانون $L = 10 \log \frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حدًّا من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. إذا سُمع صوت ما ارتفاعه 66.6 dB تقريبًا. فكم مرة تساوي شدة هذا الصوت شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان إذا كانت $m = 1$؟

$L = 10 \log \frac{I}{m}$ المعادلة الأصلية

$66.6 = 10 \log \frac{I}{1}$ $L = 66.6, m = 1$

$6.66 = \log I$ اقسم كل طرف على 10 ثم التبسيط

$I = 10^{6.66}$ الصورة الأسية

$I \approx 4570882$ استعمل الحاسبة

شدة هذا الصوت تساوي 4570000 مرة تقريبًا من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان.

تحقق من فهمك

2) **هزات أرضية:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر. 2×10^{25} إيرج تقريبًا

إرشادات للدراسة

وحدة الجول:
تذكر أن الجول هو وحدة قياس الطاقة، وكذلك الإيرج، حيث 1 إيرج = 4^{-7} جول

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسّية بدلالة الأساس نفسه، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين.

مثال 3 — حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلّ المعادلة $4^x = 19$ وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$4^x = 19$ المعادلة الأصلية

$\log 4^x = \log 19$ خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

$x \log 4 = \log 19$ خاصية لوغاريتم القوة

$x = \frac{\log 19}{\log 4}$ اقسم كلا الطرفين على $\log 4$

$x \approx 2.1240$ استعمل الحاسبة

الحل هو 2.1240 تقريبًا .

اللوغاريتمات العشرية

مثال 1 يبيِّن كيفية استعمال الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري.

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال معكوس اللوغاريتم أو الصيغة الأسّية لحل معادلات لوغاريتمية في التطبيقات الحياتية.

مثال 3 يبيِّن كيفية حل معادلات أسّية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

مثال 4 يبيِّن كيفية حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتمات العشرية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

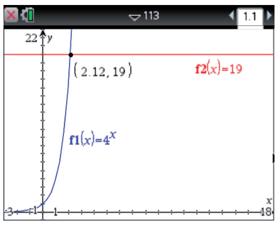
a) $\log 6$ 0.7782 تقريبًا

b) $\log 0.35$ -0.4559 تقريبًا

2 **محركات نفاثة:** عُد إلى المثال 2. يمكن أن تصل شدة صوت المحرك النفاث إلى ما يقارب 125 dB، فكم مرة تساوي شدة ذلك الصوت من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان؟
$10^{12.5}$ أو 3×10^{12} تقريبًا، أي 3 تريليونات تقريبًا.

3 حل المعادلة: $5^x = 62$.
2.5643 تقريبًا

تحقق: يمكنك التحقق من الإجابة بيانيًّا باستعمال ميزة **نقاط التقاطع** في الحاسبة البيانية TI–nspire.
مثّل المعادلة $f1(x) = 4^x$ والمستقيم $f2(x) = 19$ بيانيًّا على الشاشة نفسها. ثم أوجد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين بالضغط على مفتاح menu، ثم اختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع، ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة، وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(2.12, 19)$. الإحداثي x لنقطة التقاطع قريب من الإجابة التي تم إيجادها جبريًّا. ✓



تحقق من فهمك

3A) $3^x = 15$ تقريبًا 2.4650

3B) $6^x = 42$ تقريبًا 2.0860

يمكنك استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسّية لحل متباينات أسّية.

مثال 4 حل متباينات أسّية باستعمال اللوغاريتم العشري

حُلَّ المتباينة $3^{5y} < 7^{y-2}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$\log 3^{5y} < \log 7^{y-2}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$5y \log 3 < (y-2)\log 7$	خاصية لوغاريتم القوة
$5y \log 3 < y \log 7 - 2 \log 7$	خاصية التوزيع
$5y \log 3 - y \log 7 < -2 \log 7$	اطرح $y \log 7$ من كلا الطرفين
$y(5 \log 3 - \log 7) < -2 \log 7$	خاصية التوزيع
$1.5405y < -2 \log 7$	$5 \log 3 - \log 7 = 1.5405$
$y < \frac{-2 \log 7}{5 \log 3 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على 1.5405
$\{y \mid y < -1.0972, y \in R\}$	استعمل الحاسبة

التحقق: اختبر $y = -2$

$3^{5y} < 7^{y-2}$	المتباينة الأصلية
$3^{5(-2)} \overset{?}{<} 7^{(-2)-2}$	$y = -2$
$3^{-10} \overset{?}{<} 7^{-4}$	بسّط
$\frac{1}{59049} < \frac{1}{2401}$ ✓	خاصية الأس السالب

تحقق من فهمك

4A) $3^{2x} \geq 6^{x+1}$ $\{x \mid x \geq 4.4190\}$

4B) $4^y < 5^{2y+1}$ $\{y \mid y > -0.8782\}$

إرشادات للدراسة

حل المتباينات
تذكّر أن تعكس اتجاه رمز التباين عند ضرب كلا طرفي المتباينة في عدد سالب أو قسمتهما عليه. وبما أن $5 \log 3 - \log 7 > 0$ فلا يجب عكس اتجاه رمز التباين.

المحتوى الرياضي

اللوغاريتم العشري تُسمّى لوغاريتمات الأساس 10 باللوغاريتمات العشرية. فعندما لا يكتب أساس اللوغاريتم فالمقصود هو الأساس 10، ويمكنك إيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية لأي أساس باستعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك بتحويله إلى تعبير يحتوي لوغاريتمات عشرية.

مثال إضافي

4 حل المتباينة $3^{7x} > 2^{5x-3}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.
$\{x \mid x > -0.4922\}$

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير عند مناقشة الطلاب في صيغة تغيير الأساس، أشر إلى أنه لا يشترط تغيير الأساس إلى الأساس 10، ولكنه الأساس الأكثر شيوعًا.

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض على السبورة القالب: $\log_{\square}\square = \frac{\log_b \square}{\log_b \square}$، وعوّض قيمًا في اللوغاريتم إلى يسار المعادلة؛ لتوضيح صيغة تغيير الأساس، ويمكنك عمل هذا أيضًا مع خصائص الضرب والقسمة والقوة.

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون المنطقيون: ذكّر الطلاب بأن معادلة مثل $4^x = 19$، والتي وردت في المثال **3** يمكن إعادة كتابتها على الصورة اللوغاريتمية $x = \log_4 19$، ومع أنه لا يمكن إيجاد قيمة هذا اللوغاريتم بشكل مباشر، إلا أنه يمكن استعمال صيغة تغيير الأساس للحصول على قيمة x وتساوي 2.1240 تقريبًا.

صيغة تغيير الأساس: يمكنك استعمال **صيغة تغيير الأساس** لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف.

مفهوم أساسي | **صيغة تغيير الأساس**

الرموز: لأي أعداد موجبة n, b, a، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ←

لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ←

مثال: $\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$

لإثبات صيغة تغيير الأساس، افرض أن $\log_a n = x$.

$a^x = n$	تعريف اللوغاريتم
$\log_b a^x = \log_b n$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log_b a = \log_b n$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	اقسم كلا الطرفين على $\log_b a$
$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$	$x = \log_a n$

يمكنك استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة عبارة لوغاريتمية تحتوي لوغاريتمات مختلفة الأساس، وذلك بتحويل جميع اللوغاريتمات إلى لوغاريتمات عشرية.

تاريخ الرياضيات

الخوارزمي

هو أبو عبدالله محمد بن موسى الخوارزمي (780–848م) لُقب بأبي الجبر، وهو عالم عربي، أسس علم الجبر ووضع أسسه وابتكر حساب اللوغاريتمات.

مثال 5 استعمال صيغة تغيير الأساس

اكتب $\log_3 20$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_3 20 = \frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 3}$	صيغة تغيير الاساس
≈ 2.7268	استعمل الحاسبة

تحقق من فهمك

5) اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

5) $\frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} \approx 1.1606$

صيغة تغيير الأساس

المثالان 5 ، 4 يبيِّنان كيفية تحويل العبارات اللوغاريتيمية إلى عبارات لوغاريتمية عشرية باستعمال صيغة تغيير الأساس.

مثال إضافي

5 اكتب $\log_5 140$ باستعمال اللوغاريتم العشري، ثم احسب قيمته مقربة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$\log_5 140 = \frac{\log_{10} 140}{\log_{10} 5} \approx 3.0704$

6 **أحياء:** يعرّف الزمن اللازم لأحد أنواع الحيوانات ليصبح عدد تجمعه مثلي عدده الأصلي فترة حياة الجيل، ويعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الزمن اللازم للتكاثر، و G فترة حياة الجيل. إذا كانت فترة حياة الجيل لهذا النوع 6 سنوات، فما زمن التكاثر t اللازم لـ 5 أفراد ليصبح عددهم 3125؟ 75 سنة

121 الدرس 6-2 اللوغاريتمات العشرية

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-32 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلبة بحسب مستوياتهم.

مثال 6 استعمال صيغة تغيير الأساس

حواسيب: البرامج الحاسوبية عبارة عن مجموعة من التعليمات تسمى خوارزميات، ولتنفيذ مهمة في برنامج حاسوبي يجب تحليل ترميز الخوارزمية، ويعطى الزمن اللازم بالثواني R لتحليل خوارزمية مكونة من n خطوة بالصيغة $R = \log_2 n$. حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوة.

$R = \log_2 n$ المعادلة الأصلية

$= \log_2 240$ $n = 240$

$= \frac{\log 240}{\log 2}$ صيغة تغيير الأساس

≈ 7.9 بسّط

الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 240 خطوةيساوي 7.9 ثوانٍ تقريبًا.

تحقق من فهمك

6) حدد الزمن اللازم لتحليل خوارزمية مكونة من 160خطوة. 7.32

تدرب وحل المسائل

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 1)

1) $\log 5$ 0.6990
2) $\log 21$ 1.3222
3) $\log 0.4$ −0.3979
4) $\log 3$ 0.4771
5) $\log 11$ 1.0414
6) $\log 3.2$ 0.5051
7) $\log 8.2$ 0.9138
8) $\log 0.9$ −0.0458
9) $\log 0.04$ −1.3979

10) **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E المقيسة بوحدة الإيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 8.5 درجات على مقياس ريختر. (مثال 2)
3.55×10^{24} إيرج

11) **صوت:** أغلق حسن نوافذ سيارته فانخفض ارتفاع الصوت من 85 dB إلى 73 dB، إذا علمت أن ارتفاع الصوت L بالديسبل يُعطى بالعلاقة $L = 10\log\frac{I}{m}$، حيث I شدة الصوت، m أدنى حد من شدة الصوت تسمعها أذن الإنسان. (مثال 2)

a) فكم مرّة من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت قبل إغلاق نوافذ السيارة إذا كانت m = 1؟
316227766 مرة تقريبًا

b) كم مرةً من شدة أدنى صوت تسمعه أذن الإنسان تساوي شدة الصوت بعد إغلاق نوافذ السيارة؟ أوجد نسبة انخفاض شدة الصوت بعد إغلاق النوافذ.
19952623 مرة تقريبًا ؛ 93.7% تقريبًا

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 3)

12) $6^x = 40$ 2.0588
13) $2.1^{a+2} = 8.25$ 0.8442
14) $7^{x^2} = 20.42$ ±1.2451
15) $11^{b-3} = 5^b$ 9.1237
16) $8^x = 40$ 1.7740
17) $9^{b-1} = 7^b$ 8.7429
18) $15^{x^2} = 110$ ±1.3175
19) $2^y = \sqrt{3^{y-1}}$ −3.8188

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-32 ، 36 ، 38 ، 39، 42-48
ضمن المتوسط	1-33 فردي ، 35 ، 36 ، 38 ، 39 ، 40-48
فوق المتوسط	33-48

حل كلًّا مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 4)

20) $5^{4n} > 33$ $\{n \mid n > 0.5431\}$

21) $6^{p-1} \le 4^{p}$ $\{p \mid p \le 4.4190\}$

22) $3^{y-1} \le 4^{y}$ $\{y \mid y \ge -3.8188\}$

23) $5^{p-2} \ge 2^{p}$ $\{p \mid p \ge 3.5129\}$

24) $2^{4x} \le 20$ $\{x \mid x \le 1.0805\}$

25) $6^{3n} > 36$ $\{n \mid n > 0.6667\}$

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف: (مثال 5) **26-31) انظر الهامش.**

26) $\log_3 7$

27) $\log_2 16$

28) $\log_4 9$

29) $\log_3 21$

30) $\log_5 (2.7)^2$

31) $\log_7 \sqrt{5}$

32) **شحن:** اشترت إحدى شركات خدمة الشحن سيارة شحن جديدة بسعر 168000 ريال. افترض أن $t = \log_{(1-r)} \frac{V}{P}$ ، حيث t الزمن بالسنوات الذي مر منذ الشراء، P سعر الشراء، V السعر الحالي ، r المعدل السنوي لانخفاض السعر. (مثال 6) **سنتان**

a) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 120000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 15% سنويًّا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟

b) إذا كان السعر الحالي للشاحنة 102000 ريال، وانخفض سعرها بمعدل 10% سنويًّا، فما الزمن الذي مر منذ شرائها لأقرب سنة؟ **5 سنوات**

33) **علوم البيئة:** يقوم مهندس بيئي بفحص مياه الشرب في أحد الآبار الجوفية؛ للتأكد من عدم تلوثها بمادة الزرنيخ، والتي يُقدر معدلها الطبيعي في ماء الشرب بِـ 0.025 ppm (حيث ppm تعني جزءًا من المليون) ، كما أن الرقم الهيدروجيني pH لمادة الزرنيخ يجب أن يقل عن 9.5، حتى يكون الماء صالحًا للشرب.

a) إذا كان تركيز أيون الهيدروجين في الماء 1.25×10^{-11}، فهل يعني ذلك ارتفاع الرقم الهيدروجيني لمادة الزرنيخ علمًا بأن قانون تركيز أيون الهيدروجين هو $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$ ؟ **نعم؛ لأن $10.9 > 9.5$**

b) إذا وجد المهندس 1mg من الزرنيخ في عينة حجمها 3L من ماء بئر، فهل هذا الماء صالح للشرب؟ **لا**

(إرشاد: 1 kg من الماء يعادل 1 L تقريبًا. $1 \text{ ppm} = 1 \text{ mg/kg}$)

c) ما تركيز أيون الهيدروجين الذي يقابل الرقم الهيدروجيني $\text{pH} = 9.5$ والذي يجعل الماء غير صالح للشرب؟ **3.16×10^{-10}**

34) **هزات أرضية:** يمكن تحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M باستعمال المعادلة $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4.4}}$، حيث E كمية الطاقة الزلزالية التي تطلقها الأرض عند حدوث الهزة الأرضية مقيسة بوحدة الجول.

a) استعمل خصائص اللوغاريتمات لتكتب المعادلة بالصورة المطولة. **$M = \frac{2}{3}(\log E - 4.4)$**

b) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 7.94×10^{11} جول عند حدوث هزة أرضية. كم قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر؟ **5**

c) أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 4.47×10^{12} جول عند حدوث زلزال ألوم رول في كاليفورنيا عام 2007 م. كما أطلقت الأرض طاقة زلزالية مقدارها 1.58×10^{18} جول عند حدوث زلزال انكورج في ألاسكا عام 1964. كم مرّة تفوق قوة زلزال أنكورج قوة زلزال ألوم روك على مقياس ريختر؟ **1.67**

d) بصورة عامة ، لا يمكن الشعور بالهزة الأرضية إلاّ إذا بلغت قوتها 3 درجات على مقياس ريختر أو أكثر. ما الطاقة الزلزالية بالجول التي تطلقها الأرض عند حدوث هزة أرضية لها هذه القوة على مقياس ريختر؟ **7.94×10^{8} جول**

35) **تمثيلات متعددة:** ستحل في هذه المسألة المعادلة الأسية $4^x = 13$.

a) **جدوليًّا:** أدخل الدالة $y = 4^x$ في الحاسبة البيانية وأنشئ جدول قيم للدالة، وذلك بتغيير قيم x بمقدار 0.1 في كل مرة. وابحث عن قيمتين تقع بينهما قيمة x المقابلة للقيمة $y = 13$ في الجدول. **الحل يقع بين 1.8 و 1.9**

b) **بيانيًّا:** مثّل بيانيًّا المعادلة $y = 4^x$ والمستقيم $y = 13$ على الشاشة نفسها، واستعمل أمر intersect لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. **(1.85, 13)**

c) **عدديًّا:** حُلّ المعادلة جبريًّا. هل طريقتا الحل تعطيان النتيجة نفسها؟ فسّر إجابتك. **انظر الهامش.**

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 35 الآلة الحاسبة البيانية والجبر لحل معادلة أسية بطريقتين، بيانيًّا وجبريًّا ويقارنون النتائج.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدتهم معرفة خصائص اللوغاريتمات على حل معادلات أسية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 6-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (31)

إجابات:

26) $\frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$

27) $\frac{\log 16}{\log 2} = 4$

28) $\frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$

29) $\frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$

30) $\frac{\log 7.29}{\log 5} \approx 1.2343$

31) $\frac{\log \sqrt{5}}{\log 7} \approx 0.4135$

35c) نعم جميع الطرق تعطي النتيجة نفسها 1.85؛ لأنك بدأت من المعادلة نفسها وإن لم يكن كذلك فقد ارتكبت بعض الأخطاء.

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: ذكّر الطلاب بأنه يمكن استعمال القانون $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لإيجاد المبلغ الكلي من استثمار مبلغ ما بربح مركب. واطلب إليهم استعمال اللوغاريتمات لإيجاد عدد السنوات التي يتطلبها استثمار مبلغ 50000 ريال ليصبح 80000 ريال إذا كان معدل نسبة الربح 5% ، ويتم إضافته إلى رأس المال شهريًّا. **9.42 سنوات تقريبًا**

تنبيه!

اكتشف الخطأ ذكّر الطلاب في السؤال **36** بأن خاصية لوغاريتم القوة: $\log_b m^p = p \log_b m$، p تمثل أسًّا لِـ m.

إجابات :

36) بلال؛ لأن خالد نسي أن يضرب في العدد 3 عند أخذ اللوغاريتم لكل طرف.

38) إجابة ممكنة: $\log_b x = \frac{\log x}{\log b} = \frac{1}{\log b} \log x$؛ لذا اللوغاريتم ذو الأساس b هو حاصل ضرب ثابت في اللوغاريتم العشري المناظر له. عندما $b>1$، فإن منحنى f يتمدد أو يتقلص رأسيًّا. ومثال ذلك إذا كان $b=2$ فإن المنحنى يتمدد ولكن عندما $b=25$، فإن المنحنى يتقلص. وعندما $b<1$، فبالإضافة إلى التمدد أو التقلص الرأسي فإن المنحنى منعكس حول المحور x.

40) اللوغاريتمات: هي أسس. ولحل معادلات لوغاريتمية: اكتب كلًّا من الطرفين بالصورة الأسية، وحلها باستعمال خاصية المعكوس للأسس واللوغاريتمات. ولحل معادلات أسية: استعمل خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية وخاصية القوة في اللوغاريتمات.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** حَلَّ كل من بلال وخالد المعادلة الأسية $4^{3p} = 10$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك. **انظر الهامش.**

بلال	خالد
$4^{3p} = 10$	$4^{3p} = 10$
$\log 4^{3p} = \log 10$	$\log 4^{3p} = \log 10$
$3p \log 4 = \log 10$	$p \log 4 = \log 10$
$p = \frac{\log 10}{3 \log 4}$	$p = \frac{\log 10}{\log 4}$

37) **تحدٍّ:** حل المعادلة $\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 3$ لتجد قيمة x . وفسّر كل خطوة. **انظر ملحق الإجابات.**

38) **اكتب:** منحنى $g(x) = \log_b x$ هو في حقيقة الأمر تحويل هندسي لمنحنى $f(x) = \log x$. استعمل صيغة تغيير الأساس لتجد التحويل الهندسي الذي يربط بين هذين المنحنيين. ثم اشرح تأثير اختلاف قيم b على منحنى اللوغاريتم العشري . **انظر الهامش.**

39) **برهان:** أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ و $\log_{27} 3$. واكتب تخمينًا حول العلاقة بين $\log_a b , \log_b a$، وبرهن تخمينك. **انظر ملحق الإجابات.**

40) **اكتب:** فسِّر العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات، وضمّن تفسيرك أمثلة شبيهة بتلك التي توضح كيفية حل معادلات لوغاريتمية باستعمال الأسس، وحل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتمات. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

41) $\log_5 x = \log_5 4 \frac{1}{2} + \log_5 7$ **14**

42) $2 = \log_2 (x + 3) - 2 \log_2 x$ **6**

43) $\log_6 5x = \log_6 5 + \log_6 \frac{16}{5} - \log_6 48$ **15**

حُلّ كل متباينة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك: (الدرس 2-5)

44) $\log_8 (3y-1) < \log_8 (y+5)$ $\quad \frac{1}{3} < y < 3$

45) $\log_9 (9x+4) \le \log_9 (11x-12)$ $\quad \{x \mid x \ge 8\}$

46) افترض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم، وأن عددها يتناقص بنسبة 5% في السنة.
تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$ لتقدير عدد السنوات t ليصبح عدد هذا النوع من الطيور p طائرًا. بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر؟ (الدرس 2-5) **C**

A سنتان

B 5 سنوات

C 3 سنوات

D 8 سنوات

تدريب على اختبار

47) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $f(x) = x^2 + 4x + 3 , g(x) = x - 5$؟ **B**

A $x^2 + 4x - 2$

B $x^2 - 6x + 8$

C $x^2 - 9x + 23$

D $x^2 - 14x + 6$

48) أي مما يأتي يمثِّل حلًّا للمعادلة $27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$؟ **F**

A -4

B -2

C 2

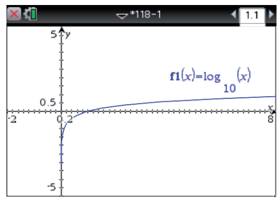
D 4

124 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

معمل الحاسبة البيانية:

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

Solving Logarithmic Equations and Inqualites



لقد قمت بحل معادلات لوغاريتمية جبريًّا، ويمكنك أيضًا حلها بيانيًّا أو باستعمال جدول.

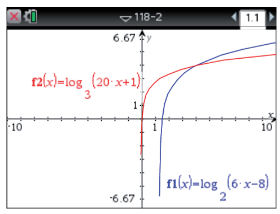
فالحاسبة البيانية TI–nspire تحتوي على $y = \log_{10} x$ باعتباره أمرًا أساسيًّا.

اضغط على المفاتيح: enter (log x on لعرض التمثيل البياني للدالة $y = \log_{10} x$،

ويمكن أيضًا تمثيل الدوال اللوغارتمية بأساسات لا تساوي عشرة من دون استعمال صيغة تغيير الأساس، وذلك باستعمال أوامر مباشرة لكتابة الدالة اللوغاريتمية.

نشاط 1

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلة: $\log_2 (6x - 8) = \log_3 (20x + 1)$.



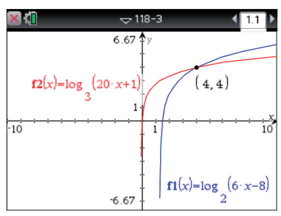
الخطوة 1: تمثيل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل كل طرف بيانيًّا على أنه دالة مستقلة.

أدخل $\log_2 (6x - 8)$؛ لتكون f1، و $\log_3 (20x + 1)$ لتكون f2 .

ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على المفاتيح:

on ctrl 10^x $\log_2 (6x - 8)$ enter tab ctrl 10^x $\log_3 (20x + 1)$ enter

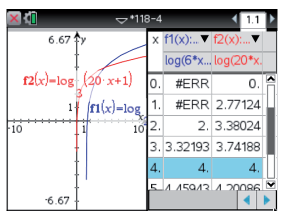


الخطوة 2: استعمال ميزة **نقاط التقاطع**

استعمل ميزة 4: نقاط التقاطع في قائمة 6: تحليل الرسم البياني، لتقدير إحداثيِّ الزوج المرتب لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

اضغط على مفتاح menu واختر 6: تحليل الرسم البياني واختر منها 4: نقاط التقاطع،

ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(4, 4)$، وحيث إن الإحداثي x لنقطة التقاطع يساوي 4؛ إذن حل المعادلة يساوي 4



الخطوة 3: استعمل خاصية **الجدول** لتتحقق من الحلّ.

تحقق من صحة حلّك باستعمال خاصية **الجدول** وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 7: الجدول ثم اختيار 1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)

اختبر قيم الجدول لتجد قيمة x التي تتساوى عندها قيم y للتمثيلين البيانيين وهي $x = 4$ ،

عند القيمة $x = 4$، تكون قيمَتا y للدالتين متساويتين؛ لذا فإن حل المعادلة يساوي 4.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لحل كل معادلة فيما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك:

(1 $\log_2 (3x + 2) = \log_3 (12x + 3)$ **0, 2**

(2 $\log_6 (7x + 1) = \log_4 (4x - 4)$ **5**

(3 $\log_2 3x = \log_3 (2x + 2)$ **0.7 تقريبًا**

(4 $\log_{10} (1 - x) = \log_5 (2x + 5)$ **−1.5 تقريبًا**

(5 $\log_4 (3x + 7) = \log_3 (5x - 6)$ **3**

(6 $\log_3 (3x - 5) = \log_3 (x + 7)$ **6**

(7 $\log_5 (2x + 1) = \log_4 (3x - 2)$ **2**

(8 $\log_2 2x = \log_4 (x + 3)$ **1**

ملاحظات الدرس

توسع 2-6

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لحل معادلات ومتباينات لوغاريتمية.

المواد اللازمة

- الحاسبة البيانية TI–nspire .

إرشادات التدريس

أشر إلى أنه باستعمال مفتاح **log** يمكن إيجاد اللوغاريتم للأعداد أو العبارات. وذكّر الطلاب بأنه من المفيد وضع العبارات بين أقواس.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية أو ثلاثية متفاوتة القدرات، ثم اطلب إلى كل مجموعة إكمال النشاط، وحل التمارين 4-1.

نشاط 1

- تأكد أن الطلاب قادرون على استعمال الجداول في الحاسبة لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيمتا y متساويتين.
- اطلب إلى الطلاب تعويض الحل في المعادلة الأصلية للتحقق من صحته.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 8-5.

نشاط 2

- تأكد من فهم الطلاب للحاجات لكتابة المتباينة كنظام من المتباينات.
- تأكد أن الطلاب قادرون على استعمال الجداول في الحاسبة لإيجاد قيمة x التي تكون عندها قيم y غير معرّفة، وكذلك قيم x التي عندها قيمتا y متساويتان.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 13-16.

3 التقويم

التقويم التكويني

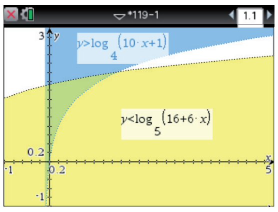
استعمل السؤالين 4, 10 لتقويم مدى إتقان الطلاب لاستعمال الآلة الحاسبة البيانية لحل معادلات ومتباينات لوغاريتمية.

وبطريقة مشابهة، يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة TI–nspire لحل متباينات لوغاريتمية

نشاط 2

استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المتباينة اللوغاريتمية: $\log_4 (10x + 1) < \log_5 (16 + 6x)$.

الخطوة 1: تمثيل المتباينات المناظرة



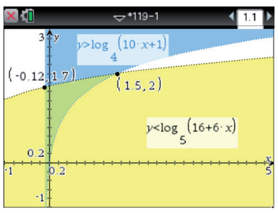
أعد كتابة المسألة على صورة نظام من المتباينات.

المتباينة الأولى هي $y < \log_4 (10x + 1)$، أو $y > \log_4 (10x + 1)$،

والمتباينة الثانية هي $y < \log_5 (16 + 6x)$، ثم مثّلها بالضغط على المفاتيح:

on del > ctrl 10^x $\log_4 (10x - 1)$ enter tab del < $\log_5 (16 + 6x)$ enter

الخطوة 2: تحديد مجموعة الحل



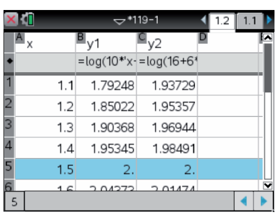
الحد الأيسر لمجموعة الحل هو عندما تكون المتباينة الأولى غير معروفة، وهي كذلك عندما $10x + 1 \leq 0$.

$$10x + 1 \leq 0$$
$$10x \leq -1$$
$$x \leq -\frac{1}{10}$$

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحد الأيمن، وذلك بالضغط على مفتاح menu واختيار 6: تحليل الرسم البياني ومنها 4: نقاط التقاطع ثم اضغط في أي نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، سيظهر الزوج المرتب $(1.5, 2)$،

ويمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

الخطوة 3: استعمال ميزة تطبيق القوائم وجداول البيانات للتحقق من الحل.



ابدأ الجدول عند −0.1، واستعرض قيم x بزيادة 0.1 كل مرة، وحرك المؤشر باحثًا في الجدول.

اضغط على المفاتيح: on ، واكتب $y1 = \log_4 (10x + 1)$ في العمود الثاني،

$y2 = \log_5 (16 + 6x)$ في العمود الثالث، واختر مرجع المتغير في كل مرّة، سترى أن قيم الجدول تؤكد أن مجموعة حل المتباينة هي: $\{x \mid -0.1 < x < 1.5\}$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانيّة TI-nspire لحل كل متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلّك:

9) $\log_7 x < -1$ $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{7}\}$

10) $\log_5 (12x + 5) \leq \log_5 (8x + 9)$ $\{x \mid \frac{-5}{12} < x \leq 1\}$

11) $\log_3 (7x - 6) < \log_3 (4x + 9)$ $\{x \mid \frac{6}{7} < x < 5\}$

12) $\log_5 (3 - 2x) \geq \log_5 (4x + 1)$ $\{x \mid \frac{-1}{4} < x \leq \frac{1}{3}\}$

13) $\log_4 (9x + 1) > \log_3 (18x - 1)$ $\{x \mid 0.06 < x < 0.17\}$

14) $\log_3 (3x - 5) \geq \log_3 (x + 7)$ $\{x \mid x \geq 6\}$

15) $\log_5 (2x + 1) < \log_4 (3x - 2)$ $\{x \mid x > 2\}$

16) $\log_2 2x \leq \log_4 (x + 3)$ $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$

من المحسوس إلى المجرد

اطلب إلى الطلاب توضيح كيف تتغير مجموعة الحل في نشاط 2 إذا كانت المتباينة $\log_4 (10x + 1) > \log_5 (10 + 6x)$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 2

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (26) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-6 تدريبات إعادة التعليم

اللوغاريتمات العشرية

تُسمى اللوغاريتمات: التي أساسها 10 باللوغاريتمات العشرية. وتُكتب العبارة $log_{10} x$ على الصورة $log\, x$ دون كتابة الأساس. ونستعمل المفتاح LOG على الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم العشري.

ويُعبّر عن العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات بالمتطابقة الآتية :

الخاصية العكسية بين اللوغاريتمات والأسس	$10^{log\, x} = x$

مثال 1 أوجد قيمة $log\, 50$ إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

استعمل مفتاح LOG على الآلة الحاسبة؛ لإيجاد القيمة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف $log\, 50 = 1.6990$

مثال 2 حل المعادلة $3^{2x+1} = 12$

$3^{2x+1} = 12$ المعادلة الأصلية

$log\, 3^{2x+1} = log\, 12$ خاصية المساواة على الدوال اللوغاريتمية

$(2x+1)\, log\, 3 = log\, 12$ خاصية القوة على اللوغاريتمات

$2x + 1 = \frac{log\, 12}{log\, 3}$ بقسمة كل طرف على $log\, 3$

$2x = \frac{log\, 12}{log\, 3} - 1$ بطرح 1 من كل طرف

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{log\, 12}{log\, 3} - 1\right)$ بضرب كل طرف في $\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1.0792}{0.4771} - 1\right)$ باستعمال الحاسبة

$x \approx 0.6309$

تمارين

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كلّ من العبارات الآتية، مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $log\, 18$ **1.2553**
2) $log\, 39$ **1.5911**
3) $log\, 120$ **2.0792**
4) $log\, 5.8$ **0.7634**
5) $log\, 42.3$ **1.6263**
6) $log\, 0.003$ **−2.5229**

حلّ كلّ معادلة أو متباينة مما يأتي مقرّبًا الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

7) $4^{3x} = 12$ **0.5975**
8) $6^{x+2} = 18$ **−0.3869**
9) $5^{4x-2} = 120$ **1.2437**
10) $7^{3x-1} \geq 21$ **$\{x \mid x \geq 0.8549\}$**
11) $(2.4)^{x+4} = 30$ **−0.1150**
12) $(6.5)^{2x} \geq 200$ **$\{x \mid x \geq 1.4153\}$**
13) $(3.6)^{4x-1} = 85.4$ **1.1180**
14) $2^{x+5} = 3^{x-2}$ **13.9666**
15) $9^{3x} = 4^{5x+2}$ **−8.1595**
16) $6^{x-5} = 2^{7x+3}$ **−3.6069**

الصف: الثالث الثانوي   26   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات إعادة التعليم (27) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

2-6 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

اللوغاريتمات العشرية

صيغة تغيير الأساس تستعمل الصيغة الآتية لتغيير العبارات التي تتضمن لوغاريتمات بأساسات مختلفة إلى عبارات بلوغاريتمات عشرية.

صيغة تغيير الأساس	$log_a n = \frac{log_b n}{log_b a}$، حيث a, b, n أعداد حقيقية موجبة وَ $a \neq 1$ و $b \neq 1$.

مثال اكتب $log_8 15$ بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$log_8 15 = \frac{log_{10} 15}{log_{10} 8}$ قانون تغيير الأساس

≈ 1.3023 بالتبسيط

فتكون قيمة $log_8 15$ هي 1.3023 تقريبًا

تمارين

اكتب كلاً مما يأتي بدلالة لوغاريتمات عشرية، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $log_3 16$ $\frac{log\, 16}{log\, 3}$, **2.5237**
2) $log_2 40$ $\frac{log\, 40}{log\, 2}$, **5.3219**
3) $log_5 35$ $\frac{log\, 35}{log\, 5}$, **2.2091**
4) $log_4 22$ $\frac{log\, 22}{log\, 4}$, **2.2297**
5) $log_{12} 200$ $\frac{log\, 200}{log\, 12}$, **2.1322**
6) $log_2 50$ $\frac{log\, 50}{log\, 2}$, **5.6439**
7) $log_5 0.4$ $\frac{log\, 0.4}{log\, 5}$, **−0.5693**
8) $log_3 2$ $\frac{log\, 2}{log\, 3}$, **0.6309**
9) $log_4 28.5$ $\frac{log\, 28.5}{log\, 4}$, **2.4164**
10) $log_3 (20)^2$ $\frac{2\, log\, 20}{log\, 3}$, **5.4537**
11) $log_6 (5)^4$ $\frac{4\, log\, 5}{log\, 6}$, **3.5930**
12) $log_8 (4)^5$ $\frac{5\, log\, 4}{log\, 8}$, **3.3333**
13) $log_5 (8)^3$ $\frac{3\, log\, 8}{log\, 5}$, **3.8761**
14) $log_2 (3.6)^6$ $\frac{6\, log\, 3.6}{log\, 2}$, **11.0880**
15) $log_{12} (10.5)^4$ $\frac{4\, log\, 10.5}{log\, 12}$, **3.7851**
16) $log_3 \sqrt{150}$ $\frac{log\, 150}{2\, log\, 3}$, **2.2804**
17) $log_4 \sqrt[3]{39}$ $\frac{log\, 39}{3\, log\, 4}$, **0.8809**
18) $log_5 \sqrt[4]{1600}$ $\frac{log\, 1600}{4\, log\, 5}$, **1.1460**

الصف: الثالث الثانوي   27   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

تدريبات حل المسألة (28) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

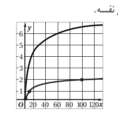
2-6 تدريبات حل المسألة

اللوغاريتمات العشرية

1) **أساسات أخرى:** تريد سلوى أن تجد $log_2 3$ ، ولكن لا يوجد لديها سوى اللوغاريتمات العشرية. وقد وجدت أن $log_{10} 2 \approx 0.3010$ و $log_{10} 3 \approx 0.4771$. استعمل هذه المعلومات لإيجاد $log_2 3$ مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.
1.585

2) **درجة الحموضة pH:** تحسب درجة الحموضة pH لمحلول بالعبارة $-log_{10} C$ ، حيث C ترمز إلى تركيز أيون الهيدروجين بالمول لكل لتر. فإذا كان تركيز أيون الهيدروجين في محلول خميرة صودا يساوي 5×10^{-9} مول لكل لتر، فما قيمة pH في المحلول مقربة إلى أقرب عُشر؟
8.3

3) **التمثيل البياني** الشكل أدناه تمثيل بياني للدالة $y = log_{10} x$ ، استعمل الحقيقة: $\frac{1}{log_{10} 2} \approx 3.32$ لتمثيل منحنى الدالة $y = log_2 x$ على المستوى الإحداثي نفسه.



4) **الصيغة العلمية** نكتب العدد n بالصيغة العلمية على الصورة $n = s \times 10^p$ ، علمًا بأن $1 \leq s < 10$ ، وp عدد صحيح. وضِّح أن $p \leq log_{10} n < p + 1$.

$$n = s \times 10^p$$
$$log\, n = log\, (s \times 10^p)$$
$$= log\, s + log\, 10^p$$
$$= log\, s + p$$

ولمّا كان $1 \leq s < 10$ فإن $0 \leq log\, s < 1$، وبإضافة العدد p إلى جميع أطراف المتباينة نجد أن:
$p \leq log\, n < p + 1$.

5) **جداول اللوغاريتمات** تتصفح مريم بعض كتب العلوم القديمة، وقد وجدت في نهاية أحدها جدول اللوغاريتمات للأساس 10 ، ولكن الصفحة كانت بالية، ومن الصعب قراءة بعض البيانات عليها.

جدول اللوغاريتمات العشرية (مقربة إلى أربع منازل عشرية)	
$log_{10} x$	x
0.3010	2
0.4771	3
?	4
0.6989	5
?	6

a) ما القيم المفقودة في الجدول، مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف؟
$log\, 4 \approx 0.602$
$log\, 6 \approx 0.778$

b) كيف تستعمل هذا الجدول لإيجاد قيمة $log_{10} 1.5$؟
إجابة ممكنة : $log\, 1.5$
$$log\, 1.5 = log\, \frac{3}{2}$$
$$= log\, 3 - log\, 2$$
$$= 0.4771 - 0.3010$$
$$\approx 0.1761$$

الصف: الثالث الثانوي   28   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

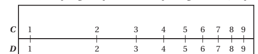
التدريبات الإثرائية (29) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

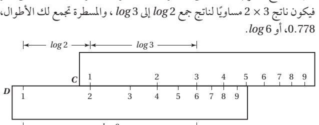
2-6 التدريبات الإثرائية

المسطرة الحاسبة

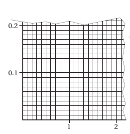
قبل اختراع الآلة الحاسبة كانت تُجرى الحسابات باستعمال المسطرة الحاسبة، وهي عبارة عن مسطرتين C, D تنزلق إحداهما على الأخرى، وتعتمد فكرتها على اللوغاريتمات، وكلتا المسطرتين مُدرّجة وفقًا لقيم اللوغاريتم.



ولإيجاد ناتج الضرب 3×2 على المسطرة الحاسبة حرك المسطرة C إلى اليمين على نحوما هو موضح في الشكل أدناه، فيكون ناتج 3×2 مساويًا لناتج جمع $log\, 2$ إلى $log\, 3$ ، والمسطرة تجمع لك الأطوال، فالمسافة التي تحصل عليها تساوي 0.778، أو $log\, 6$.

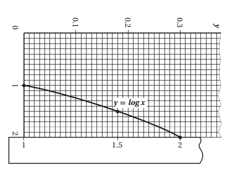


اتبع الخطوات الآتية لعمل مسطرة حاسبة.   **2—1 انظر أعمال الطلاب.**



1) استعمل ورق رسم مربعاته صغيرة، كأن تكون مثلًا 10 مربعات في السنتمتر الواحد. واستعمل التدريج المبيّن في الشكل المجاور، وارسم المنحنى $y = log\, x$ لقيم $x = 1, 1.5$ والأعداد الكلّية من 2 إلى 10، وضع نقطة مظلّلة لكل قيمة.

2) تحتاج إلى شريطين من الورق المقوى يمكن الحصول عليهما بقصِّ قطعة من الورق المقوى قياسها 7×5 من المنتصف. ثم دوّر الشكل الذي رسمته في التمرين 1 واستعمله لتدريج الشريطين اللذين عملتهما. ويبيّن الشكل موقع 2 على الشبكة.



3) بيّن كيف تستعمل المسطرة الحاسبة لقسمة العدد 8 على 2.
اجعل العدد 2 على المسطرة C بمحاذاة العدد 8 على D، وناتج القسمة على D أسفل العدد 1 على مقياس C .

الصف: الثالث الثانوي   29   **الفصل 2:** العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 6 - 2

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (16) دون ضمن فوق

6 - 2 اللوغاريتمات العشرية

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

1) $\log 101$ **2.0043**
2) $\log 2.2$ **0.3424**
3) $\log 0.05$ **−1.3010**

استعمل الصيغة $pH = -\log[H+]$ لإيجاد pH لكل مادة مما يأتي، إذا كان تركيز أيون الهيدروجين فيها على النحو المعطى:

4) **الحليب:** $[H+] = 2.51 \times 10^{-7}$ mol/L **6.6 تقريبًا**
5) **المطر الحمضي:** $[H+] = 2.51 \times 10^{-6}$ mol/L **5.6 تقريبًا**
6) **القهوة:** $[H+] = 1.0 \times 10^{-5}$ mol/L **5**
7) **الحليب الغني بالماغنيسيوم:** $[H+] = 3.16 \times 10^{-11}$ mol/L **10.5 تقريبًا**

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

8) $5^a = 120$ **2.9746**
9) $6^z = 45.6$ **2.1319**
10) $3.5^x = 47.9$ **3.0885**
11) $8.2^y = 64.5$ **1.9802**
12) $4^{2x} = 27$ **1.1887**
13) $2^{a-4} = 82.1$ **10.3593**
14) $5^{w+3} = 17$ **−1.2396**
15) $30^{x^2} = 50$ **±1.0725**
16) $5^{x^2-3} = 72$ **±2.3785**
17) $4^{2x} > 9^{x+1}$ **$x > 3.8188$**
18) $2^{n+1} \le 5^{2n-1}$ **$n \ge 0.9117$**

اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

19) $\log_5 12$ **$\frac{\log 12}{\log 5}$, 1.5440**
20) $\log_8 32$ **$\frac{\log 32}{\log 8}$, 1.6667**
21) $\log_{11} 9$ **$\frac{\log 9}{\log 11}$, 0.9163**
22) $\log_2 18$ **$\frac{\log 18}{\log 2}$, 4.1699**
23) $\log_9 6$ **$\frac{\log 6}{\log 9}$, 0.8155**
24) $\log_7 \sqrt{8}$ **$\frac{\log 8}{2 \log 7}$, 0.5343**

25) **درجة الحموضة:** استعمل الصيغة الواردة في الأسئلة 7-4 أعلاه. إذا كان الرقم الهيدروجيني (pH) لمحلول الخل 2.9، وللحليب 6.6، فكم مرة (تقريبًا) يساوي تركيزُ أيون الهيدروجين في الخل تركيزَه في الحليب؟ **5000 مرة تقريبًا**

26) **أحياء:** تحتوي عينة مخبرية على 1000 خلية بكتيرية، ويتضاعف عددها كل ساعة، ويعطي عددها N بعد t ساعة بالصيغة $N = 1000(2)^t$. ما الزمن اللازم ليصل عدد الخلايا البكتيرية إلى 50000 خلية؟ **5.6 h تقريبًا**

27) **صوت:** تُعطَى شدة الصوت L بالديسيبل بالمعادلة $L = 10 \log R$، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا كانت شدة صوت صفارة إنذار 150 dB، وشدة صوت محرك الطائرة الحربية 120 dB، فكم مرة من شدة الصوت النسبية لصفارة الإنذار تساوي شدةَ الصوت النسبية لمحرك الطائرة الحربية؟ **1000 مرة**

16

الفصل الثاني العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسية (الدرسان 2-1, 2-2)

- تكون الدوال الأسية على الصورة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.
- خاصية المساواة للدوال الأسية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- خاصية التباين للدوال الأسية: إذا كان $b > 1$، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, b > 1$ دالة نمو أسي.
- الدالة الأسية $f(x) = b^x, 0 < b < 1$ دالة اضمحلال أسي.

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الدرس 2-3)

- إذا كان $b > 0, b \neq 1, x > 0$ فإن الصورة الأسية للمعادلة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي $b^y = x$، والصورة اللوغاريتمية للمعادلة الأسية $x = b^y$ هي $\log_b x = y$

خصائص اللوغاريتمات (الدرس 2-4)

- خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية: إذا كان b عددًا موجبًا، حيث $b \neq 1$، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.
- الضرب والقسمة: إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ و $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- لوغاريتم القوة: لأي عدد حقيقي m، وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$ فإن: $\log_b x^m = m \log_b x$.
- صيغة تغيير الأساس: $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$
- خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية: إذا كان $b > 1$، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ و $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

اللوغاريتم العشري (الدرس 2-6)

- اللوغاريتم العشري هو اللوغاريتم الذي أساسه 10.

المفردات

الدالة الأسية ص 82	المتباينة الأسية ص 94
النمو الأسي ص 83	اللوغاريتم ص 97
عامل النمو ص 83	الدالة اللوغاريتمية ص 99
الاضمحلال الأسي ص 84	المعادلة اللوغاريتمية ص 112
عامل الاضمحلال ص 84	المتباينة اللوغاريتمية ص 114
المعادلة الأسية ص 92	اللوغاريتم العشري ص 118
الربح المركب ص 93	صيغة تغيير الأساس ص 121

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) الدالة التي على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 1$ تسمى دالة النمو الأسي.

2) في المعادلة $x = b^y$. المتغير y يسمى لوغاريتم x للأساس b.

3) يسمى اللوغاريتم ذو الأساس 10 اللوغاريتم العشري.

4) المعادلة الأسية هي معادلة يظهر فيها المتغير على صورة أس.

5) يمكنك باستعمال صيغة تغيير الأساس كتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة للوغاريتم بأساس مختلف.

6) يُسمى الأساس $1 - r$ في الدالة الأسية $A(t) = a(1 - r)^t$ عامل الاضمحلال.

7) تُسمى الدالة $y = \log_b x$، حيث $b > 0, b \neq 1$ دالة لوغاريتمية

الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات

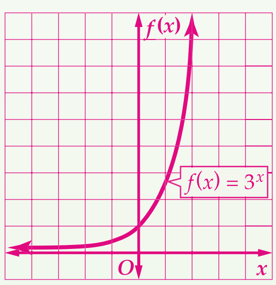
يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبة في حلّ الأسئلة 1–7 فنبّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (23).

إجابات:

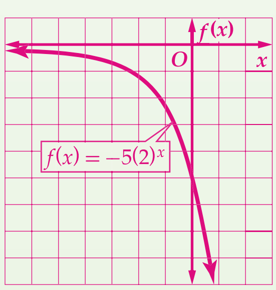
8)



المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

9)



المجال = جميع الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 0\}$

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، ذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 2 ص (27)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

الفصل

2 دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

2-1 الدوال الأسية (الصفحات 89 - 82)

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: انظر الهامش.

8) $f(x) = 3^x$

9) $f(x) = -5(2)^x$

10) $f(x) = 3(4)^x - 6$

11) $f(x) = 3^{2x} + 5$

12) $f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$

13) $f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$

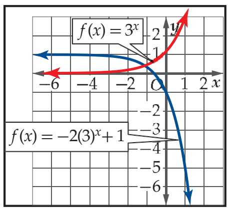
14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3% سنويًّا.

a) اكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنة. $f(t) = 120000(0.97)^t$

b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات؟ 88491 تقريبًا

مثال 1

مثّل الدالة $f(x) = -2(3)^x + 1$ بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها.



المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

المدى هو $\{f(x) \mid f(x) < 1\}$

2-2 حل المعادلات والمتباينات الأسية (الصفحات 96 - 92)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي: (17 $-\frac{3}{4}$

15) $16^x = \frac{1}{64}$ $-\frac{3}{2}$

16) $3^{4x} = 9^{3x+7}$ -7

17) $64^{3n} = 8^{2n-3}$

18) $8^{3-3y} = 256^{4y}$ $\frac{9}{41}$

19) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$ (19 $x > -\frac{2}{3}$

20) $27^{3x} \le 9^{2x-1}$ (20 $x \le -\frac{2}{5}$

21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية. وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبًا.

a) اكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه مقربًا الناتج إلى أقرب ثلاث منازل عشرية. $y = 5000(1.240)^x$

b) ما عدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32h؟ 4880496 تقريبًا

مثال 2

حُلّ المعادلة $4^{3x} = 32^{x-1}$.

$4^{3x} = 32^{x-1}$ المعادلة الأصلية

$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$ أعد الكتابة لتوحيد الأساس

$2^{6x} = 2^{5x-5}$ بسّط

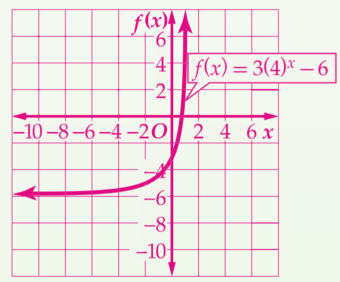
$6x = 5x - 5$ خاصية المساواة للأسس

$x = -5$ بسّط

الحل هو -5.

إجابات:

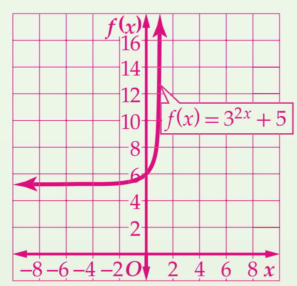
(10



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -6\}$

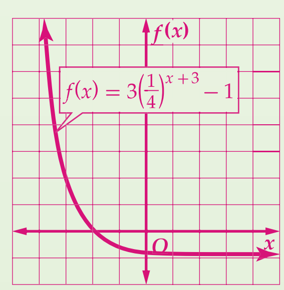
(11



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 5\}$

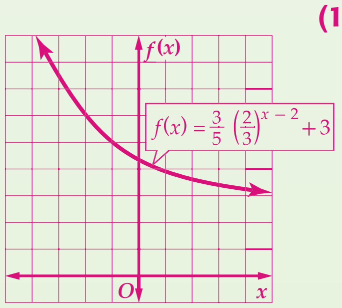
(12



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -1\}$

(13



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 3\}$

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة، فذكِّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

2-3 اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية (الصفحات 103 - 97)

22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ على الصورة الأسية. $2^{-4} = \frac{1}{16}$

23) اكتب $10^2 = 100$ على الصورة اللوغاريتمية. $\log_{10} 100 = 2$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

24) $\log_4 256$ **4**

25) $\log_2 \frac{1}{8}$ **−3**

مثّل الدالتين الآتيتين بيانيًّا: (26-27) انظر الهامش.

26) $f(x) = 2\log_{10} x + 4$

27) $f(x) = \frac{1}{6}\log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

مثال 3

أوجد قيمة $\log_2 64$.

$\log_2 64 = y$ افرض أن العبارة تساوي y

$64 = 2^y$ تعريف اللوغاريتم

$2^6 = 2^y$ $\quad 64 = 2^6$

$6 = y$ خاصية المساواة للدوال الأسية

إذن $\log_2 64 = 6$.

2-4 خصائص اللوغاريتمات (الصفحات 111 - 105)

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة كل مما يأتي:

28) $\log_5 8$ **1.292**

29) $\log_5 64$ **2.5841**

30) $\log_5 4$ **0.8614**

31) $\log_5 \frac{1}{8}$ **−1.292**

32) $\log_5 \frac{1}{2}$ **−0.4307**

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة:

33) $\log_3 2x^5y^2z^3$

34) $\log_5 ab^{-3}c^4d^{-2}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة:

35) $3\log_2 x^2 - \frac{1}{3}\log_2(x-4)$

36) $2\log_2(z-1) - \log_2(2z-1)$

37) **هزات أرضية:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يُسمى مقياس ريختر، وتعطى قوة الهزة M بالمعادلة $M = 1 + \log_{10} x$، حيث x شدة الهزة الأرضية. كم مرة تعادل شدةُ هزة أرضية سجّلت 10 درجات على مقياس ريختر شدةَ هزة أرضية أخرى سجّلت 7 درجات على المقياس نفسه؟ **1000 مرة**

مثال 4

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$, $\log_5 16 \approx 1.7227$ لتقريب قيمة $\log_5 32$.

$\log_5 32 = \log_5(16 \times 2)$ $\quad 32 = 16 \times 2$

$= \log_5 16 + \log_5 2$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

$\approx 1.7227 + 0.4307$ استعمل الحاسبة

≈ 2.1534 بسّط

مثال 5

اكتب $\log_3 x^2y^{-4}z$ بالصورة المطولة:

العبارة هي لوغاريتم حاصل ضرب x^2, y^{-4}, z

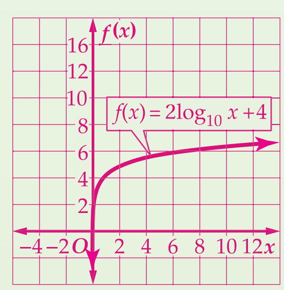
$\log_3 x^2y^{-4}z$

$= \log_3 x^2 + \log_3 y^{-4} + \log_3 z$ خاصية الضرب في اللوغاريتمات

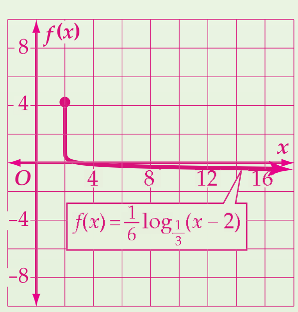
$= 2\log_3 x - 4\log_3 y + \log_3 z$ خاصية لوغاريتم القوة

إجابات:

(26



(27



33) $\log_3 2 + 5\log_3 x + 2\log_3 y + 3\log_3 z$

34) $\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c - 2\log_5 d$

35) $\log_2 \frac{x^6}{\sqrt[3]{x-4}}$

36) $\log_2 \frac{(z-1)^2}{2z-1}$

إجابات:

(40 $\{x \mid 0 < x < 64\}$

(41 $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{125}\}$

الفصل 2 دليل الدراسة و المراجعة

2-5 حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية (الصفحات 112 - 117)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي إن أمكن، ثم تحقق من صحة حلك:

(38 $\log_{16} x = \frac{3}{2}$ **64**

(39 $\log_2 \frac{1}{64} = x$ **−6**

(40 $\log_4 x < 3$

(41 $\log_5 x < -3$

(42 $\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x)$ لا يوجد حل.

(43 $\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x)$ **−6**

(44 $\log_3 (3x + 4) \le \log_3 (x - 2)$ لا يوجد حل.

(45 **صوت:** استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$، حيث L ارتفاع الصوت، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصًا يتكلمون في الوقت نفسه مقارنة بارتفاع صوت شخص واحد. على فرض أن ارتفاع صوت الشخص الواحد يساوي 80 dB . **361.6 مرة**

مثال 6

حُلّ المعادلة $\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_3 3x + \log_3 4 = \log_3 36$	المعادلة الأصلية
$\log_3 3x(4) = \log_3 36$	خاصية الضرب في اللوغاريتمات
$3x(4) = 36$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$12x = 36$	اضرب
$x = 3$	اقسم كلا الطرفين على 12

التحقق:

$$\log_3 3x + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 3\times 3 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 9 + \log_3 4 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 (9 \times 4) \stackrel{?}{=} \log_3 36$$
$$\log_3 36 \stackrel{?}{=} \log_3 36$$

الحل صحيح.

مثال 7

حُلّ المتباينة $\log_{27} x < \frac{2}{3}$، ثم تحقق من صحة حلك.

$\log_{27} x < \frac{2}{3}$	المتباينة الأصلية
$x < 27^{\frac{2}{3}}$	خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية
$x < 9$	بسّط

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid x < 9, x \in R\}$

التحقق:

عوض بعدد أقل من 9، وعدد أكبر من 9 في المتباينة الأصلية

$x = 1$	$x = 27$
$\log_{27} 1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$\log_{27} 27 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$	$1 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}$
$0 < \frac{2}{3}$ ✓	$1 < \frac{2}{3}$ ✗

2-6 اللوغاريتمات العشرية (الصفحات 124 - 118)

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. $m \approx 0.6356$ (48

46) $3^x = 15$ $x \approx 2.4650$

47) $6^{x^2} = 28$ $x \approx \pm 1.3637$

48) $8^{m+1} = 30$

49) $12^{r-1} = 7^r$ $r \approx 4.6102$

50) $3^{5n} > 24$ $n > 0.5786$

51) $5^{x+2} \le 3^x$ $x \le -6.3013$

52) اكتب كلًّا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

a) $\log_4 11$ $\quad$ a) $\frac{\log 11}{\log 4} \approx 1.7297$

b) $\log_2 15$ $\quad$ b) $\frac{\log 15}{\log 2} \approx 3.9069$

53) **مال:** استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري، وتوقع ربحًا سنويًّا نسبته 5%، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر. استعمل القانون $A = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$، حيث A المبلغ الكلي بعد t سنة، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال، r معدّل الربح السنوي، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

a) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي 15000 ريال؟ 8 سنوات تقريبًا

b) كم يكون الزمن المتوقع ليصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ الأصلي؟ 14 سنة تقريبًا

مثال 8

حُلّ المعادلة: $5^{3x} = 7^{x+1}$، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

$5^{3x} = 7^{x+1}$	المعادلة الأصلية
$\log 5^{3x} = \log 7^{x+1}$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$3x \log 5 = (x+1)\log 7$	خاصية القوة للوغاريتمات
$3x \log 5 = x \log 7 + \log 7$	خاصية التوزيع
$3x \log 5 - x \log 7 = \log 7$	اطرح $x \log 7$ من كلا الطرفين
$x(3\log 5 - \log 7) = \log 7$	أخرج x عامل مشترك
$x = \frac{\log 7}{3\log 5 - \log 7}$	اقسم كلا الطرفين على $3\log 5 - \log 7$
$x \approx 0.6751$	استعمل الحاسبة

131 الفصل 2 دليل الدراسة والمراجعة

إجابة:

60b) لا؛ إجابة ممكنة:

$$10\log_{10}\left(\frac{2I}{10^{-12}}\right) =$$

$$10\log_{10}\frac{I}{10^{-12}} + \log_{10}2$$

$$\neq 2\times 10\log_{10}$$

الفصل 2 دليل الدراسة و المراجعة

تطبيقات ومسائل

54) **أسعار:** تزداد أسعار السلع سنويًّا؛ بسبب ما يسمى التضخم. ونتيجة لذلك، يزداد سعر إحدى السلع بمعدل 4.5% سنويًّا، ويُعطى سعر هذه السلعة بالدالة $M(t)=275(1.045)^t$، حيث t عدد السنوات بعد عام 1422هـ. (الدرس 2-1)

a) كم كان سعر السلعة عام 1422هـ؟ **275**

b) إذا استمر تضخم سعر السلعة بمعدل 4.5% سنويًّا، فكم سيكون سعرها عام 1437هـ تقريبًا؟ **532 ريالًا**

55) **سيارات:** ينخفض سعر سيارة جديدة سنويًّا بدءًا من لحظة شرائها، ويُعطى سعر هذه السيارة بعد t سنة من شرائها بالمعادلة $f(t) = 80000(0.8)^t$. (الدرس 2-2)

a) ما معدل انخفاض سعر السيارة سنويًّا؟ **20%**

b) متى يصبح سعر السيارة مساويًا لنصف سعرها الأصلي؟ **بعد 3.11 سنة**

56) **استثمار:** ورثت فاطمة عن والدها مبلغ 250000 ريال، واستثمرته في مشروع، وتزايد كما في الجدول أدناه: (الدرس 2-2)

السنة	المبلغ (ريال)
1412 هـ	250000
1420 هـ	329202
1425 هـ	390989

a) اكتب دالة أسية يمكن استعمالها لإيجاد المبلغ الكلي بعد t سنة من الاستثمار. $A(t) = 250000(1.035)^t$

b) إذا استمر تزايد المبلغ بالمعدل نفسه، ففي أي سنة يصبح المبلغ الكلي 500000 ريال تقريبًا؟ **1432 هـ**

57) **كيمياء:** يُعطى عدد السنوات t اللازمة لاضمحلال الكمية الأصلية N_0 جرام من مادة مشعة لتصبح N جرام بالمعادلة

$$t = \frac{16\log_{10}\frac{N}{N_0}}{\log_{10}\frac{1}{2}}$$ (الدرس 2-3)

a) بشكل تقريبي، بعد كم سنة تقريبًا يضمحل 100g من المادة المشعة لتصبح 30g؟ **28 سنة**

b) ما النسبة التقريبية لما يتبقى من 100g بعد 40 سنة؟ **18%**

58) **زلازل:** مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. وتعتمد درجة مقياس ريختر R على الطاقة الصادرة عن الزلزال E بوحدة الكيلوواط لكل ساعة. وتُعطى R بالعلاقة:

$R = 0.67 \cdot \log_{10}(0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-5)

a) أوجد قيمة R لزلزال أصدر 1000000 كيلو واط في الساعة. **5.2**

b) قدّر كمية الطاقة الصادرة عن زلزال قوّته 7.5 على مقياس ريختر. **2.8×10^9 kWh**

59) **أحياء:** يعرّف زمن الجيل G بأنه الزمن اللازم ليصبح عدد فصيلة نادرة من الحيوانات مثلي ما كان عليه، ويُعطى بالصيغة $G = \frac{t}{2.5\log_b d}$، حيث b العدد الأصلي، d العدد النهائي، t الفترة الزمنية. إذا كان زمن الجيل لهذه الفصيلة 6 سنوات، ويوجد الآن من هذه الفصيلة 5 حيوانات، فما الفترة الزمنية اللازمة ليصبح عدد حيوانات هذه الفصيلة 3125 حيوانًا؟ (الدرس 2-5) **75 سنة**

60) **صوت:** تُعطى العلاقة بين شدة الصوت بالواط لكل متر مربع (I)، وعدد وحدات الديسبل β بالمعادلة $\beta = 10\log_{10}\frac{I}{10^{-12}}$ (الدرس 2-6)

a) حدّد شدة الصوت إذا كان عدد وحدات الديسبل 100. **1×10^{-2}**

b) قارنت سميرة الصوت في الفرع a مع صوت آخر عدد وحدات الديسبل فيه 50 ديسبل ، فاستنتجت أن شدّة الصوت الثاني تساوي نصف شدّة الصوت الأول. هل استنتاجها صحيح؟ برّر إجابتك. **انظر الهامش.**

c) صوت شدّته 1×10^{-8} واط لكل متر مربع. كم يزيد عدد وحدات الديسبل إذا ضوعفت شدته؟ **3.01 dB**

61) **مال:** السعر الأصلي لسلعة 8000 ريال، وازداد سعرها باستمرار؛ بسبب التضخم بطريقة الربح المركب حتى بلغ 12000 ريال بعد 5 سنوات. (الدرس 2-6)

a) إذا كان معدل التضخم 6% سنويًّا، فبعد كم سنة يصبح سعر السلعة 12000 ريال ؟ **حوالي 6.8 سنوات**

b) ما معدل التضخم الذي يصبح عنده سعر السلعة 12000 ريال بعد 5 سنوات؟ **8.1% تقريبًا**

132 الفصل 2 العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الفصل 2
اختبار الفصل

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، وحدد مجالها ومداها: انظر الهامش.

1) $f(x) = 3^{x-3} + 2$

2) $f(x) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} - 3$

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب أربع منازل عشرية كلما لزم ذلك:

3) $8^{c+1} = 16^{2c+3}$ $\quad c = -\frac{9}{5}$

4) $9^{x-2} > \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$ $\quad x > \frac{4}{5}$

5) $2^{a+3} = 3^{2a-1}$ $\quad a \approx 2.1130$

6) $\log_2 (x^2 - 7) = \log_2 6x$ $\quad x = 7$

7) $\log_5 x > 2$ $\quad x > 25$

8) $\log_3 x + \log_3 (x-3) = \log_3 4$ $\quad x = 4$

9) $6^{n-1} \le 11^{n}$ $\quad n \le -2.9560$

استعمل $\log_5 2 \approx 0.4307$ ، $\log_5 11 \approx 1.4899$ ، لتقريب قيمة كل مما يأتي إلى أقرب جزء من عشرة آلاف:

10) $\log_5 44$ $\quad 2.3513$

11) $\log_5 \frac{11}{2}$ $\quad 1.0592$

12) **سكان:** كان عدد سكان مدينة ما قبل 10 أعوام 150000 نسمة، ثم تزايد بعد ذلك عددهم بمعدل ثابت كل سنة، ليصبح الآن 185000 نسمة. (a $y = 150000\ (1.0212)^x$

a) اكتب دالة أسية يمكن أن تمثّل عدد السكان بعد x سنة إذا استمرت الزيادة بالمعدل نفسه مقرّبًا الناتج إلى أقرب منازل عشرية.

b) كم يصبح عدد السكان بعد 25 سنة؟ 253431 نسمة تقريبًا

13) اكتب $\log_9 27 = \frac{3}{2}$ على الصورة الأسية. $9^{\frac{3}{2}} = 27$

14) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\log_4 \frac{1}{64}$؟ A

A -3 $\qquad$ C $\frac{1}{3}$

B $-\frac{1}{3}$ $\qquad$ D 3

15) **زراعة:** تمثّل المعادلة $y = 3962520(0.98)^x$ تراجع عدد المزارع في بلد ما، حيث x عدد الأعوام منذ عام 1380 هـ، و y عدد المزارع.

a) كيف يمكنك أن تعرف أن عدد المزارع يتناقص؟ $b < 1$

b) بأي نسبة يتناقص عدد المزارع؟ 2%

c) تنبأ بعد كم سنة يصبح عدد المزارع مليون مزرعة. 68 سنة تقريبًا

16) **توفير:** استثمر سلمان مبلغ 75000 ريال في مشروع تجاري متوقعًا ربحًا سنويًّا نسبته 9% ، بحيث يتم إضافة الأرباح إلى رأس المال شهريًّا.

a) ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات؟ 117426 ريالًا تقريبًا

b) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي مثلي المبلغ المستثمر عند البداية؟ 8 سنوات تقريبًا

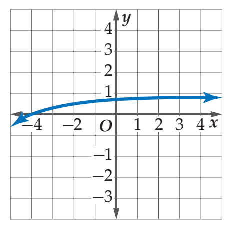
c) بعد كم سنة يتوقع أن يصبح المبلغ الكلي 100000 ريال؟ 3.2 سنوات تقريبًا

17) **اختيار من متعدد:** ما حل المعادلة $\log_4 16 - \log_4 x = \log_4 8$؟ C

A $\frac{1}{2}$ $\qquad$ C 2

B 4 $\qquad$ D 8

18) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية لها التمثيل البياني أدناه؟ C



A $y = \log_{10} (x-5)$

B $y = 5 \log_{10} x$

C $y = \log_{10} (x+5)$

D $y = -5 \log_{10} x$

19) اكتب العبارة اللوغاريتمية $-2 \log_3 x + 6 \log_3 (z-2) + \log_3 t^2$ بالصورة المختصرة. $\log_3 \frac{t^2(z-2)^6}{x^2}$

الفصل 2
اختبار الفصل

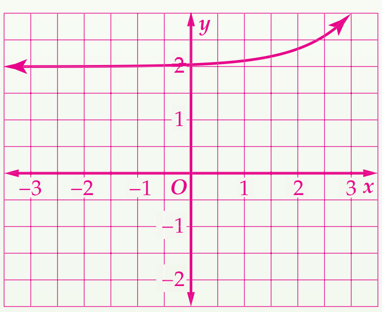
المعالجة:

بناء على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (34–42) .

إجابات:

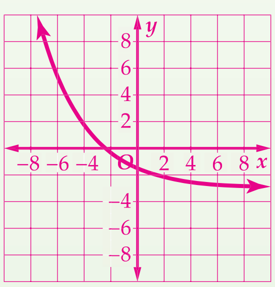
(1



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 2\}$

(2



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -3\}$

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (80)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

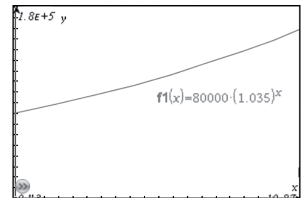
الدرس 1-2 ، ص (17-15)

3) تحقق من فهمك

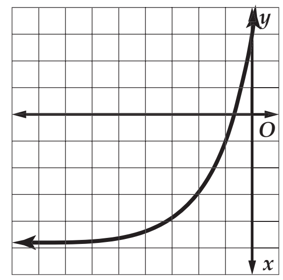
نجد دالة النمو الأسي

$a = 80000$ ، $r = 0.035$

$y = 80000\,(1.035)^t$



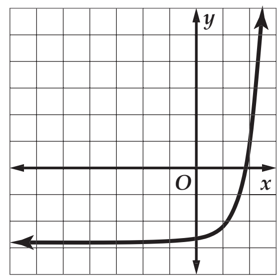
5A)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{y \mid y > -5\}$

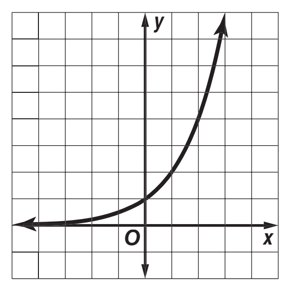
5B)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{y \mid y > -3\}$

1)

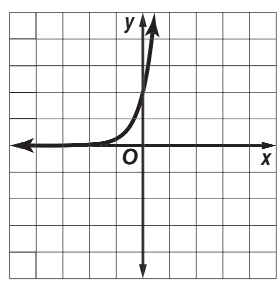


1؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

$2^{1.5} \approx 2.8$

2)

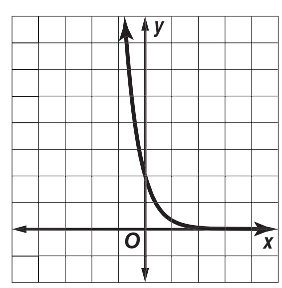


2؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

$2(8)^{-0.5} \approx 0.7$

3)

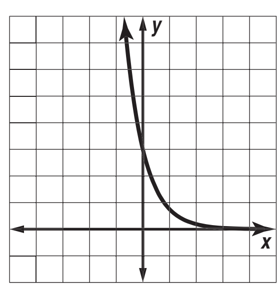


2؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

$2\left(\frac{1}{6}\right)^{1.5} \approx 0.1$

4)

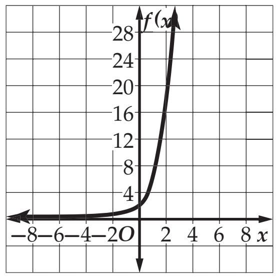


3؛ المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)

المدى = $\{y \mid y > 0\}$

$3\left(\frac{1}{4}\right)^{0.5} = 1.5$

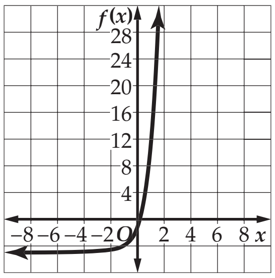
7)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

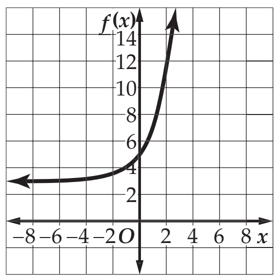
8)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -5\}$

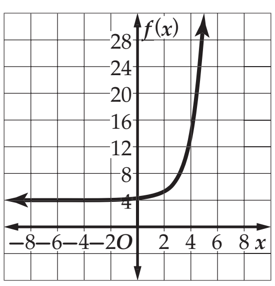
9)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 3\}$

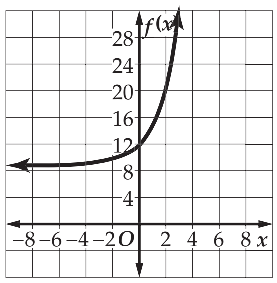
10)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 4\}$

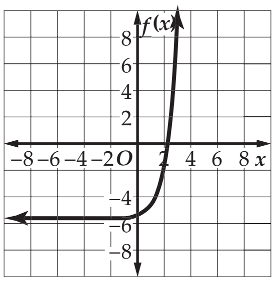
11)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 8\}$

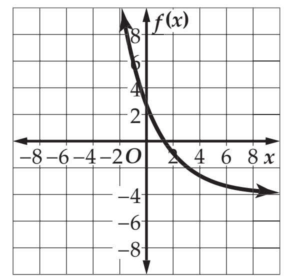
12)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،

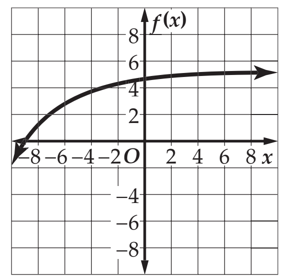
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -6\}$

13)



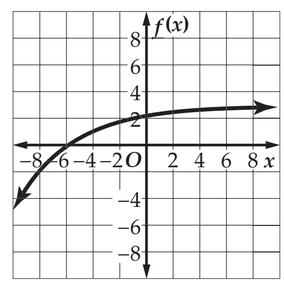
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > -4\}$

14)



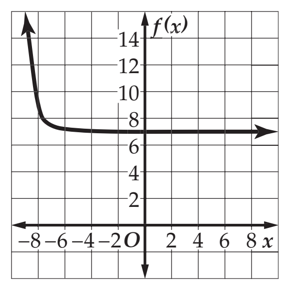
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 5\}$

15)



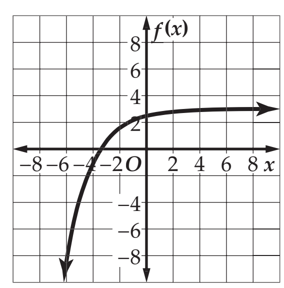
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 3\}$

16)



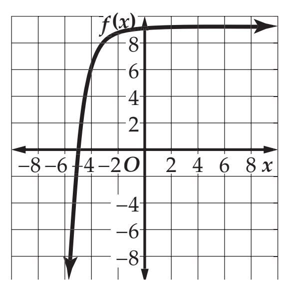
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 7\}$

17)



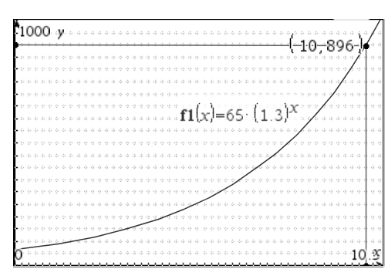
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 3\}$

18)



المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)،
المدى= $\{f(x) \mid f(x) < 9\}$

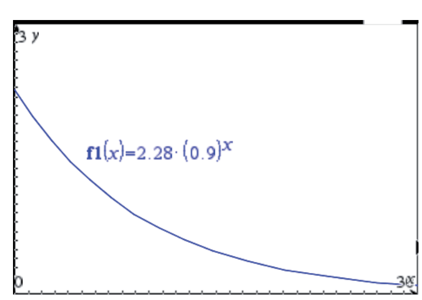
19)



$y = 65(1.3)^t$

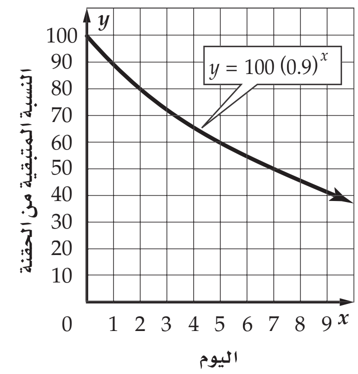
$y \approx 896$

21a)

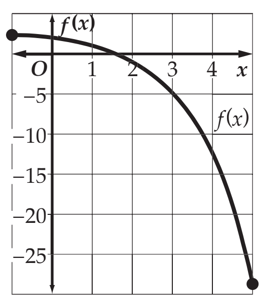


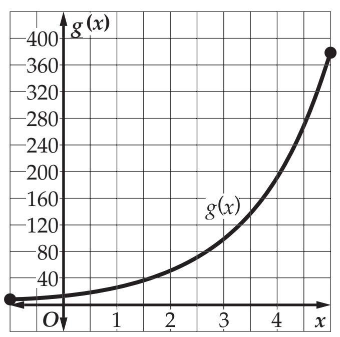
21b) يمثل المقطع $P(x)$ عدد الهواتف العمومية في العام x منذ عام 1420 هـ، وخط التقارب هو المحور x، وسيتناقص عدد الهواتف العمومية ليقترب من 0 ولن يصل إليه، وذلك منطقي؛ لأنه ستكون هنالك حاجة دائمًا للهواتف العمومية.

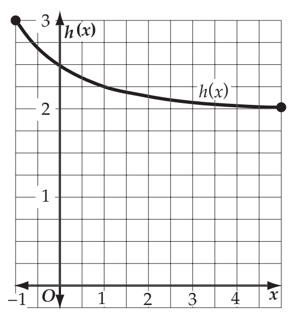
22a)



26a)







26b) إجابة ممكنة: $f(x)$؛ تمثيل الدالة $f(x)$ البياني هو انعكاس حول محور يوازي المحور x.

26c) إجابة ممكنة: $f(x)$ و $g(x)$ دالتا نمو أسي، على حين أن $h(x)$ دالة اضمحلال أسي؛ القيم المطلقة للمخرجات متزايدة لدوال النمو الأسي ومتناقصة لدوال الاضمحلال.

29a) صحيحة دائمًا؛ إجابة ممكنة: مجال الدالة الأسية هو مجموعة الأعداد الحقيقية، لذا $(0, y)$ دائمًا موجودة.

29b) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة. التمثيل البياني للدالة الأسية يقطع المحور x عندما $k < 0$.

29c) صحيحة أحيانًا؛ إجابة ممكنة: الدالة ليست أسية إذا كانت $b = 1$ أو $b = -1$.

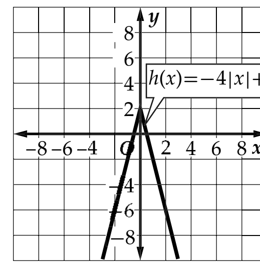
30) ماجد؛ أهمل عمر الضرب في إشارة السالب.

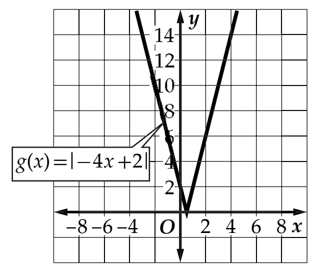
(33 إجابة ممكنة: الدالة الرئيسية (الأم) هي $g(x) = b^x$ يتسع تمثيلها البياني رأسيًّا إذا كانت $|a| < 1$ ، ويضيق رأسيًّا إذا كانت $|a| > 1$، ثم يتبعها انسحاب للتمثيل البياني k وحدة إلى أعلى إذا كانت قيمة k موجبة، و $|k|$ وحدة للأسفل إذا كانت k سالبة، ثم يتبعه انسحاب h وحدة يمينًا إذا كانت h موجبة وَ $|h|$ وحدة يسارًا إذا كانت h سالبة.

(34 الدالة f تتزايد على $(-\infty, -3)$ ، ثم تتناقص على $(-3, 1)$، وتتزايد على $(1, \infty)$.

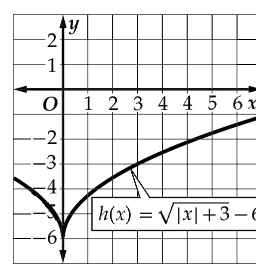
(35 الدالة f تتزايد على $(-\infty, -4)$، ثم تتزايد على $(-4, \infty)$.

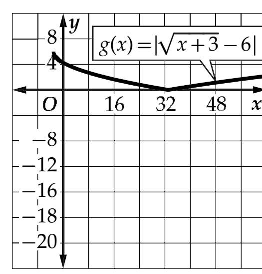
(36





(37





(38 المجال : $(f + g)\ (x) = x^2 - x + 9; (-\infty, \infty)$

المجال : $(f - g)\ (x) = x^2 - 3x - 9; (-\infty, \infty)$

المجال : $(f \cdot g)\ (x) = x^3 + 7x^2 - 18x; (-\infty, \infty)$

المجال : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + 9}; \{x \mid x \neq -9, x \in R\}$

(39 المجال : $(f + g)\ (x) = \frac{x}{x+1} + x^2 - 1\ ; \{x \mid x \neq -1, x \in R\}$

المجال : $(f - g)\ (x) = \frac{x}{x+1} + x^2 - 1\ ; \{x \mid x \neq -1, x \in R\}$

المجال : $(f \cdot g)\ (x) = x^2 - x\ ; \{x \mid x \neq -1, x \in R\}$

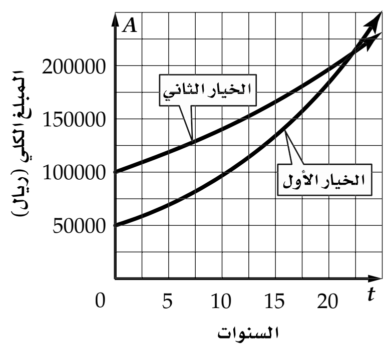
المجال : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}\ ; \{x \mid x \neq \pm 1, x \in R\}$

الدرس 2-2 ، ص (96)

(34a $A = 50000\left(\frac{4.065}{4}\right)^{4t}$

$$A = 50000\left[\left(\frac{12.042}{12}\right)^{12t} + \left(\frac{52.023}{52}\right)^{52t}\right]$$

(34b



(34c إجابة ممكنة:

خلال أول 22 سنة يكون الخيار الثاني أفضل؛ لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الأول.

وبعد 22 سنة يصبح الخيار الأول أفضل لأن المبلغ المتجمع منه أكبر من المبلغ المتجمع من الخيار الثاني.

(35b

عدد مرات القص	عدد القطع
1	2
2	4
3	8
4	16

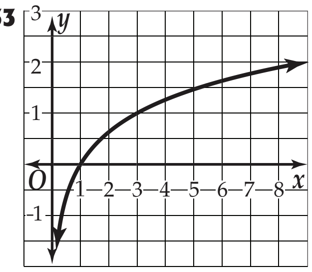
(38

الطرف الأيسر		$27^{2x} \cdot 81^{x+1}$
	$3^3 = 27, 3^4 = 81$	$= (3^3)^{2x} \cdot (3^4)^{x+1}$
قوة القوة		$= 3^{6x} \cdot 3^{4x+4}$
حاصل ضرب القوى		$= 3^{10x+4}$
الطرف الأيمن		$3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$
	$3^2 = 9$	$= 3^{2x+2} \cdot (3^2)^{4x+1}$
قوة القوة		$= 3^{2x+2} \cdot 3^{8x+2}$
حاصل ضرب القوى		$= 3^{10x+4}$

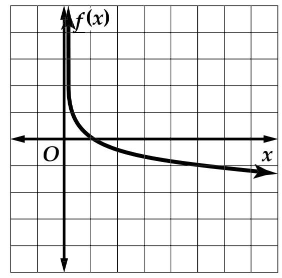
وبما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه فالطرفان متساويان.

الدرس 2-3 ، ص (102,103)

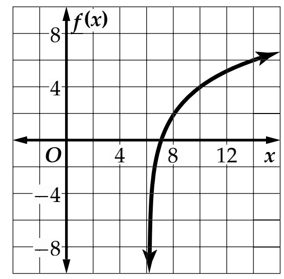
(32



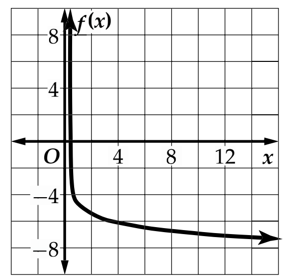
(33



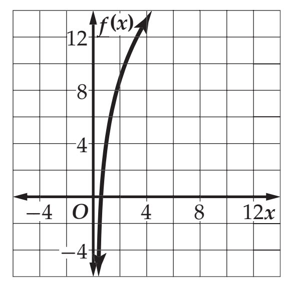
(34



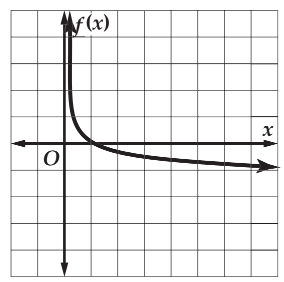
(35



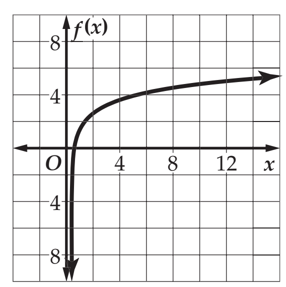
(36



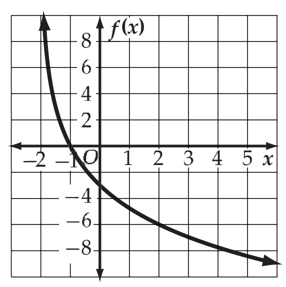
(37



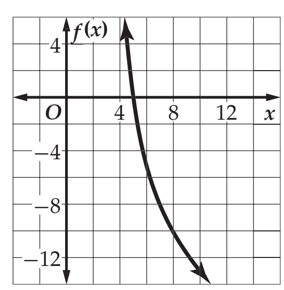
(38



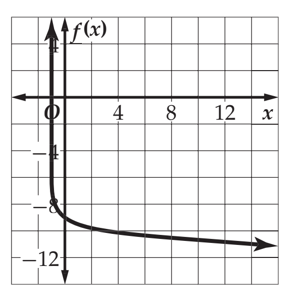
(39



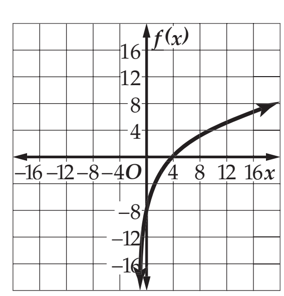
(40



(41

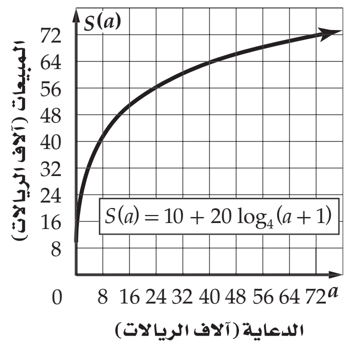


(45



(47c

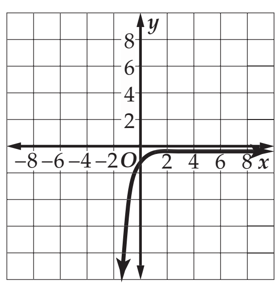
زيادة المبيعات بزيادة
الإنفاق على الدعاية



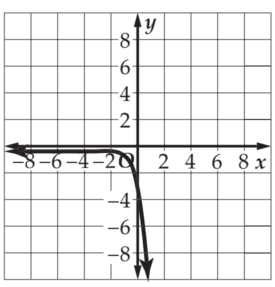
55) إجابة ممكنة:

- إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور x.
- إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا، وإذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.
- يسحب التمثيل البياني h وحدة إلى اليمين إذا كانت $h > 0$، ويسحب $|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت h سالبة.
- يسحب التمثيل البياني k وحدة إلى أعلى إذا كانت $k > 0$، ويسحب $|k|$ وحدة إلى أسفل إذا كانت $k < 0$.

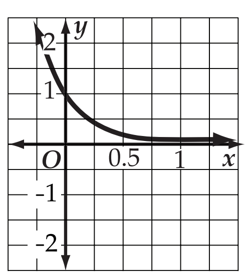
(56



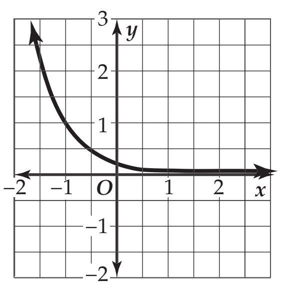
(57



(58

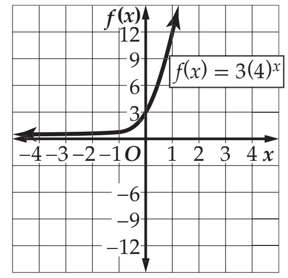


(59



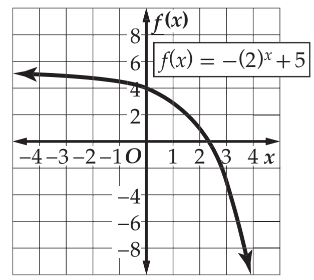
اختبار منتصف الفصل ، ص (104)

1)



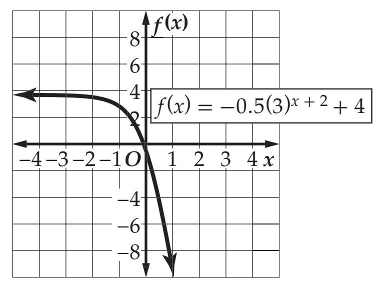
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، المدى = $\{f(x) \mid f(x) > 0\}$

2)



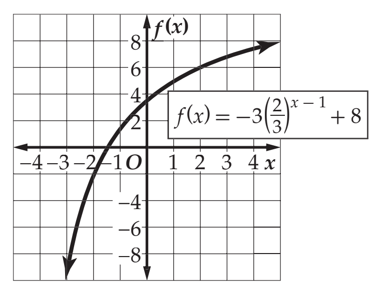
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 5\}$

3)



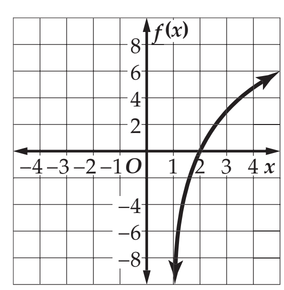
المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R) ، المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 4\}$

4)

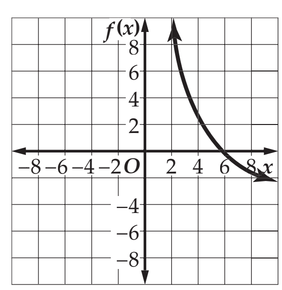


المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، المدى = $\{f(x) \mid f(x) < 8\}$

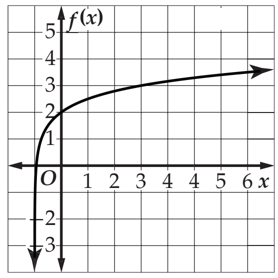
13)



14)

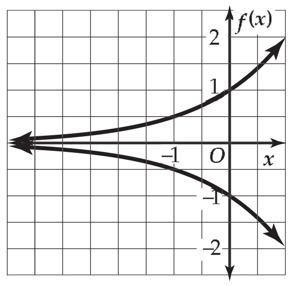


15)

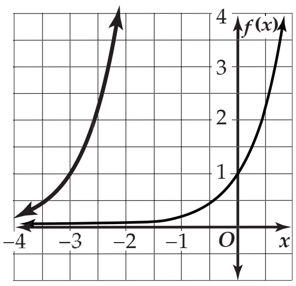


الدرس 4-2 ، ص (111)

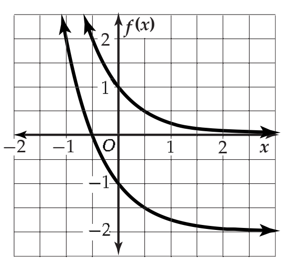
52) انعكاس حول المحور x.



53) انسحاب إلى اليسار 3 وحدات.



54) انسحاب إلى أسفل وحدتان.



الدرس 5-2 ، ص (116)

29a) التمثيلان البيانيان متشابهان، من حيث إن خط التقارب لكل منهما المحور y، ومقطع المحور x لهما 1.

29b) التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المحور x.

29c) التمثيلان البيانيان يمثلان انعكاسًا لبعضهما بعضًا حول المحور x؛ المجال = $\{x|x>0\}$، المدى = مجموعة الأعداد الحقيقية.

الدرس 6-2 ، ص (124)

41)

$\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$	المعادلة الأصلية
$\dfrac{\log_a 3}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a x$	صيغة تغيير الأساس
$\dfrac{\log_a 3}{\frac{1}{2}} = \log_a x$	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
$2\log_a 3 = \log_a x$	بضرب كلٍّ من البسط والمقام في العدد 2
$\log_a 3^2 = \log_a x$	خاصية لوغاريتم القوة
$3^2 = x$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$9 = x$	بالتبسيط

43) $\log_3 27 = 3$ و $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$؛

تخمين: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

برهان:

$\log_a b \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\log_b a}$	العبارة الأصلية
$\dfrac{\log_b b}{\log_b a} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{\log_b a}$	صيغة تغيير الأساس
$\dfrac{1}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$	$\log_b b = 1$

الفصل 3

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (135)

	الدرس 3-1 (3) حصص	الدرس 3-2 (4) حصص	الدرس 3-3 (3) حصص
العنوان	**المتطابقات المثلثية**	**إثبات صحة المتطابقات المثلثية**	**المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما**
الأهداف	• استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد النسب المثلثية. • استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.	• إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل طرف من المعادلة إلى الشكل الموجود في الطرف الآخر. • إثبات صحة المتطابقات المثلثية من خلال تحويل كلا طرفي المعادلة إلى العبارة نفسها.	• إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. • إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.
المفردات	المتطابقة، المتطابقة المثلثية، المتطابقات النسبية، متطابقات المقلوب، متطابقات فيثاغورس ، متطابقات الزاويتين المتتامتين، متطابقات الدوال الزوجية و الدوال الفردية		
تمثيلات متعددة	ص (139)	ص (145)	ص (149)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (17) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (18) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (14) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (19) دون ضمن فوق
التعليم باستعمال التقنيات	• مدونة	• السبورة التفاعلية	• الكاميرا التوثيقية
تنويع التعليم	ص (137, 138, 140)	ص (142,144)	ص (147,149)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل
ص (150)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الخطة الزمنية		
التدريس	المراجعة والتقويم	المجموع
(18) حصة	(3) حصص	(21) حصة

الدرس 3-4 (3) حصص	استكشاف 3-5 حصة واحدة	الدرس 3-5 (4) حصص
المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها	**معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية**	**حل المعادلات المثلثية**
• إيجاد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. • إيجاد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.	• استعمال الحاسبة البيانية لحل المعادلات المثلثية.	• حل المعادلات المثلثية. • تمييز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.
		المعادلات المثلثية
ص (155)		
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (18) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (20) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (22) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (21) دون ضمن فوق
• تسجيل مرئي		• مدوّنة
ص (152,154)		ص (160)

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (164-168)
- اختبار الفصل ص (169)

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 3**	
	التهيئة للفصل 3 ، ص (135)	مخطط المعالجة، ص (135)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (49, 50) www.obeikaneducation.com	تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3 www.obeikaneducation.com
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (150) اختبار منتصف الفصل، ص (51) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3 www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (164) اختبار الفصل، ص (169) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3 www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 3**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (53, 55, 57) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (59) اختبار المفردات ، ص (52) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (61) اختبار تراكمي ، ص (62) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 3 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب   دليل المعلم   مصادر المعلم للأنشطة الصفية   دليل التقويم   شبكة الإنترنت

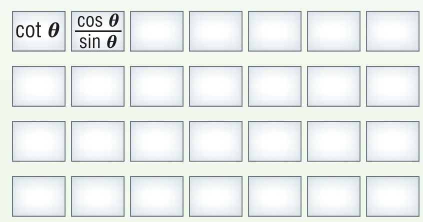
تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون وزّع الطلاب إلى مجموعات ثنائية. واطلب إلى كل مجموعة إعداد بطاقات لمتطابقات مثلثية أساسية، على أن يُكتب على إحدى البطاقتين طرف متطابقة، ويكتب الطرف الآخر للمتطابقة على البطاقة الأخرى لكل من الأنواع الآتية: (المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس، ومتطابقات الزاويتين المتتامتين، ومتطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية). فعلى سبيل المثال، يجب أن يكون للمتطابقات النسبية أربع بطاقات مكتوب عليها:

$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$, $\cot\theta$, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\tan\theta$ ، بحيث يتكون ما مجموعه 28 بطاقة.

ثم يلعب طالبا كل مجموعة لعبة "الذاكرة"، وذلك بوضع جميع البطاقات مقلوبة على سطح الطاولة، واختيار أحد الطالبين زوجًا من البطاقات ، فإن كانتا طرفي متطابقة فإنهما تُبعدان، وإن لم تكونا كذلك فإنهما تعادان. يتبادل الطالبان الأدوار.



المتعلمون المنطقيون وزّع الطلاب إلى مجموعات ثنائية لتكوين معادلات مثلثية جديدة. اطلب إليهم أن يبدؤوا بمعادلة صائبة مثل: $\cos\theta = \cos\theta$. ثم تحويل كل طرف بأن يستبدلوا به تعبيرًا مكافئًا. فعلى سبيل المثال، يمكن تحويل $\cos\theta = \cos\theta$ باستعمال المتطابقات النسبية لتعطي النتيجة الآتية:

$$\frac{\sin\theta}{\tan\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sec\theta} + \cot\theta .$$

ثم اطلب إلى مجموعات الطلاب تبادل المعادلات فيما بينها على أن تتحقق كل مجموعة من أن المعادلة التي كوّنتها المجموعة الأخرى تمثل متطابقة.

البديل 2 دون المتوسط دون

تعاون مع الطلاب على تكوين جدول كالجدول أدناه وإكماله والذي يمكن أن يتخذه الطلاب مرجعًا لتحديد إشارات الدوال المثلثية الأساسية في أرباع المستوى الإحداثي.

الربع	I	II	III	IV
الجيب Sine	+	+	−	−
جيب التمام Cosine	+	−	−	+
الظل Tangent	+	−	+	−

البديل 3 فوق المتوسط فوق

اطلب إلى الطلاب إعداد لغز على شكل كلمات متقاطعة باستعمال مفردات النسب المثلثية في هذا الفصل. واستعمال تعريف المفردة أو مثال عليها للمفردات المتقاطعة أفقيًا ورأسيًا. واطلب إلى كل طالب تصوير نسخ عدّة من اللغز الذي أعدّه لتوزيعه على الطلاب الآخرين. ثم اطلب إلى الطلاب حل هذه الألغاز.

الفصل 3 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 3

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تعرّف الدوال المثلثية الأساسية.
- استعمال قياسات الزوايا بالدرجات وبالراديان.
- تعرّف الزوايا بوصفها أشعة في الوضع القياسي، وبوصفها نقاطًا على دائرة الوحدة.
- استكشاف الخصائص الدورية للدوال المثلثية ودوالها العكسية.

الفصل 3

- تعلّم كيفية إثبات صحة المتطابقات المثلثية واستعمالها.
- إثبات صحة المتطابقات المثلثية.
- حل المعادلات المثلثية باستعمال التحليل إلى العوامل، وخاصية الضرب الصفري، ومعكوسات النسب المثلثية، وسلوك الدوال الدورية.

ما بعد الفصل 3

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

- استعمال الصيغ والمتطابقات المثلثية عند تحليل الانسحاب الأفقي للمنحنيات، والكيفية التي ترتبط فيها هذه الانسحابات بالوصف الجبري للمنحنيات.

ملخص الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية

المعادلة التي تحتوي على دوال مثلثية صحيحة لجميع قيم المتغير التي تكون العبارات معرفة عندها، تسمى **متطابقة مثلثية**. وهناك خمسة أنواع للمتطابقات المثلثية هي: المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس، ومتطابقات الزاويتين المتتامتين، ومتطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المتطابقات المثلثية الأساسية		
المتطابقات النسبية (المقام لا يساوي صفرًا)		
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$	
متطابقات المقلوب (المقام لا يساوي صفرًا)		
$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$
متطابقات فيثاغورس		
$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$	$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$
متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$	$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$	$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$
متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية		
$\sin (-\theta) = -\sin \theta$	$\cos (-\theta) = \cos \theta$	$\tan (-\theta) = -\tan \theta$

هذه المتطابقات مفيدة عند تبسيط العبارات المثلثية وحل مسائل من واقع الحياة.

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

يمكن استعمال التعريفات والمتطابقات المثلثية الأساسية لإثبات صحة المتطابقات. ويتم إثبات صحة المتطابقة عن طريق تحويل أحد طرفيها إلى صورة الطرف الآخر، وذلك بأن نضع مكان عبارات ذلك الطرف عبارات أخرى مكافئة لها حتى يصبح الطرفان متساويين. أو تحويل كلا طرفي المتطابقة إلى عبارة مشتركة. وهناك طرق عدة لكتابة عبارات متطابقة، منها:

- التعويض باستعمال متطابقات فيثاغورس.
- استعمال خاصية التوزيع لتحليل تعبير أو تجميع حدود متشابهة.
- تحويل حدّ من الحدود بضربه في تعبير يكافئ العدد (1).
- إعادة كتابة جميع الدوال المثلثية بدلالة $\sin \theta$ أو $\cos \theta$ عن طريق استعمال المتطابقات النسبية أو متطابقات المقلوب.

تنبيه: لا تجرِ أية عمليات حسابية على كل طرف من المتطابقة التي لم تتحقق من صحتها بعد؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

المتطابقات والمعادلات المثلثية

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما $\sin(a \pm b), \cos(a \pm b), \tan(a \pm b)$ ، لإيجاد قيم الجيب وجيب التمام. كما يمكن استعمال هذه المتطابقات في إثبات صحة متطابقات مثل: $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$.

والمتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما هي:

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

عند استعمال متطابقات: $\sin(a + b), \cos(a + b), \tan(a + b)$، والتعويض عن كلٍّ من a و b بـ θ، ينتج متطابقات جديدة تسمى المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. وهذه المتطابقات هي:

- $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1,$

  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta,$

  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$
- $\tan 2\theta = \dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

ويمكن اشتقاق المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية وعددها ثلاث باستعمال قانون ضعف الزاوية، وهي:

- $\sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$
- $\cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$
- $\tan \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}, \quad \cos a \neq -1$

كما يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية والمتطابقات المثلثية لنصف الزاوية بالإضافة إلى متطابقات أخرى لإيجاد القيمة الدقيقة لبعض العبارات المثلثية. كما يمكن أن تستعمل هذه المتطابقات في إثبات صحة متطابقات مثلثية.

3-5 حل المعادلات المثلثية

المعادلات المثلثية صحيحة فقط عند قيم محددة للمتغير، ويشبه حلها حل المعادلات الجبرية.

- الخطوة الأولى في حل المعادلات المثلثية هي استعمال التحليل إلى العوامل، وخاصية الضرب الصفري، و/ أو إعادة كتابة معادلة معقّدة على صورة سلسلة من معادلات مثلثية أبسط.
- الخطوة الثانية هي استعمال الدوال المثلثية العكسية ليتم عزل المتغير؛ والحصول على حل معادلة مثل $\cos \theta = -1$ ، وحلها بإيجاد قيمة θ.
- الخطوة الثالثة هي استعمال الخاصية الدورية للدوال المثلثية الدورية ليتضمن الحل جميع الحالات.

بعض المعادلات لها عدد لانهائي من الحلول، وبعضها الآخر ليس له حل، لذا فإنه من المفيد التعويض في المعادلة الأصلية للتحقق من صحة الحلول التي توصلت إليها.

مشروع الفصل

مهن إلكترونية

يستعمل الطلاب ما تعلموه حول المتطابقات والمعادلات المثلثية لإجراء مقابلات مع أشخاص يستعملون حساب المثلثات في مهنهم.

- اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، وشجعهم على عمل أبحاث تتناول مهنًا ذات علاقة بالتيار الكهربائي المتردد، مثل الهندسة الكهربائية، أو هندسة الحاسوب.
- شجع الطلاب على إجراء مقابلات شخصية أو عبر الهاتف مع أشخاص يعملون في هذه المهن، على أن يستفسروا منهم عن طريقة استعمال حساب المثلثات في مهنهم. واطلب إليهم إحضار أمثلة ممن تتم مقابلته شخصيًّا إذا أمكن ذلك.
- اطلب إلى كل مجموعة إعداد تقرير يلخص طريقة استعمال حساب المثلثات مهنة الشخص الذي قابلوه.
- اعرض تقارير الطلاب متضمنة صورًا في لوحة الفصل بعنوان "مهن إلكترونية".

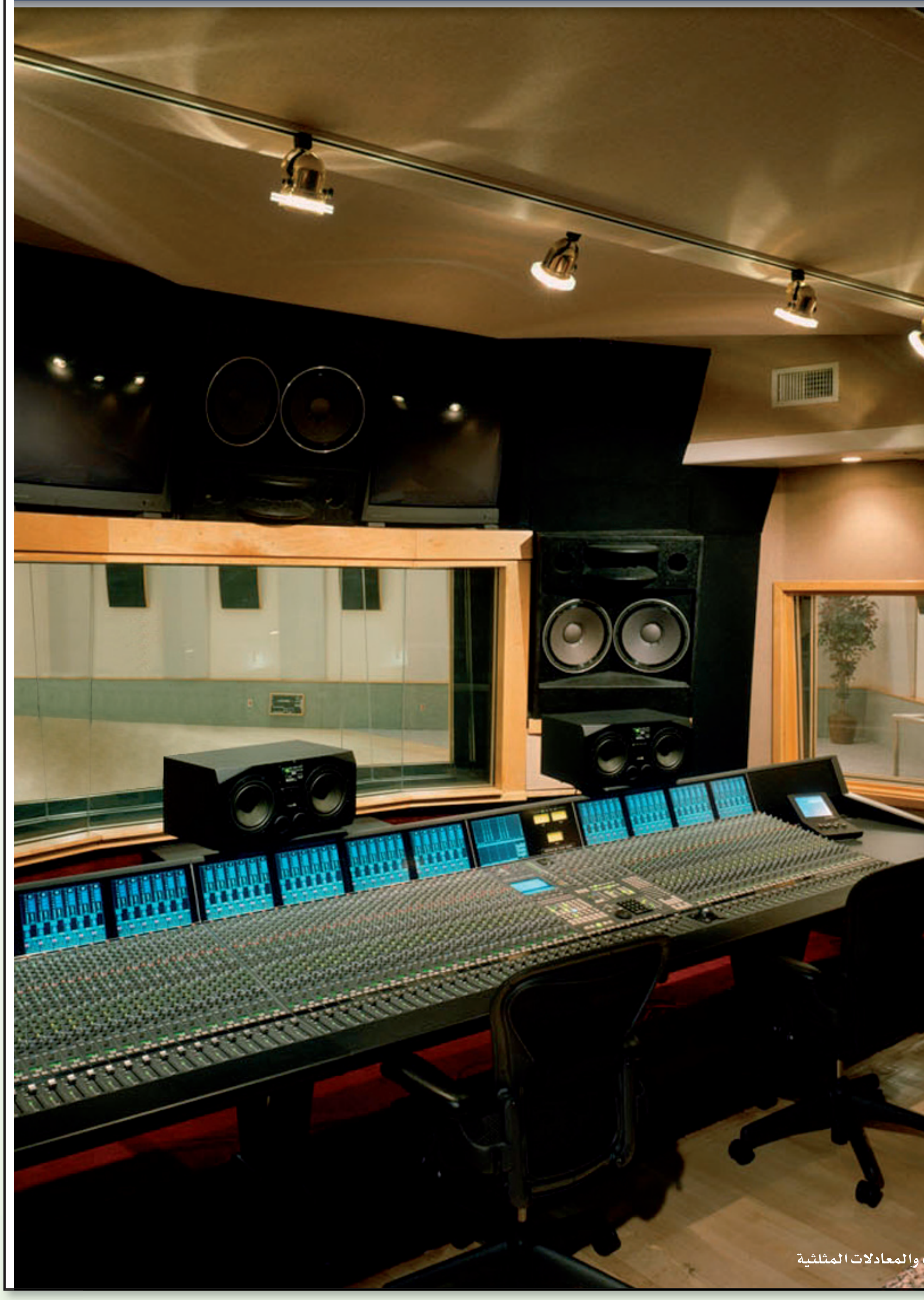
المفردات: قدّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دالة مثلثية صحيحة لجميع قيم المتغيّر.

مثال: المتطابقة $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ هي إحدى متطابقات الدوال الفردية.

سؤال: اكتب متطابقة مثلثية أخرى تعلمتها. تختلف إجابات الطلاب.

الفصل 3
المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations



فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

قراءة سابقة

شجع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (47) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل الثالث

المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة "إذا...فقم" في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1	**ضمن المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل ما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة الطلاب في النسب المثلثية الأساسية وحسابها عندما تكون الزوايا مقيسة بالدرجات وبالراديان.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	**دون المتوسط**
إذا	أخطأ بعض الطلاب في حل 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

التهيئة للفصل 3

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية". **(1–4) انظر الهامش.**

1) $-16a^2 + 4a$
2) $5x^2 - 20$
3) $4x^2 - x + 6$
4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\,\text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\,\text{cm}$، فما عرضها؟ $(x + 2)\,\text{cm}$

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

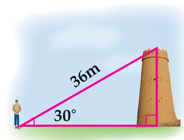
6) $x^2 + 6x = 0$ $\{-6, 0\}$
7) $x^2 + 2x - 35 = 0$ $\{-7, 5\}$
8) $x^2 - 9 = 0$ $\{-3, 3\}$
9) $x^2 - 7x + 12 = 0$ $\{3, 4\}$

10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\,\text{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة. 6

أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

11) $\sin 45°$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12) $\cos 225°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
13) $\tan 150°$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
14) $\sin 120°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15) **قصر المصمك:** يقف سلمان أمام برج قصر المصمك التاريخي كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟ 18 m



البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

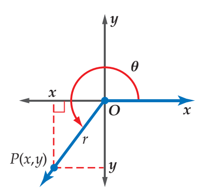
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$



تنويع التعليم

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

إجابات:

1) $-4a(4a-1)$
2) $5(x+2)(x-2)$
3) أولية
4) $(2y+5)(y-3)$

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1—3

إيجاد قيم الدوال المثلثية.

الدرس 1—3

استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد النسب المثلثية.

استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

ما بعد الدرس 1—3

إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

استعمال المتطابقات المثلثية في حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المتغيرات التي تظهر في بسط العبارة التي في الطرف الأيمن من صيغة الإضاءة؟ وفي المقام؟ شدة إضاءة المصدر، شدة الاستضاءة، والمسافة.
- ماذا تساوي النسبة $\sec\theta$ في مثلث قائم الزاوية؟ $\sec\theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$
- ما متطابقة المقلوب للنسبة المثلثية: $\sec\theta$؟ $\frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

3-1 المتطابقات المثلثية
Trigonometric Identities

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية. (مهارة سابقة)

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم النسب المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة identity

المتطابقة المثلثية trigonometric identity

المتطابقات النسبية quotient identities

متطابقات المقلوب resiprocal identities

متطابقات فيثاغورس pythagorean identities

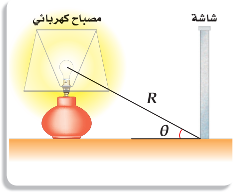
متطابقات الزاويتين المتتامتين cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية odd-even identities

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ ، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$ $\quad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

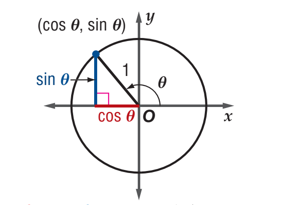
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



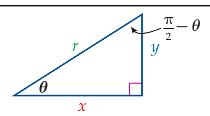
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

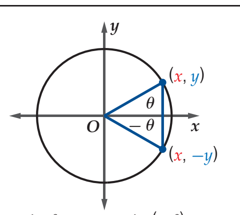
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



$\sin\theta = y$ $\quad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\quad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

مصادر الدرس 1 – 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (137)	• تنويع التعليم ص (137 , 140)	• تنويع التعليم ص (138 , 140)
كتاب التمارين	• ص (17)	• ص (17)	• ص (17)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، والمطابقة $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ؛ لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقات فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ عوِّض $\frac{1}{4}$ بدلًا من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ بإيجاد مربع العدد $\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\text{Arcsin}\,\frac{1}{4}$.

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ استعمال الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$.

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ متطابقات فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ عوِّض $-\frac{3}{5}$ بدلًا من $\cot\theta$

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ بإيجاد مربع العدد $-\frac{3}{5}$

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ $\quad \frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول أدناه على تذكّر أي النسب المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1 , 2	3 , 4
$\cos\theta$	1 , 4	2 , 3
$\tan\theta$	1 , 3	2 , 4
$\csc\theta$	1 , 2	3 , 4
$\sec\theta$	1 , 4	2 , 3
$\cot\theta$	1 , 3	2 , 4

✓ تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1B) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$. $-\frac{7\sqrt{5}}{15}$

المتطابقات المثلثية الأساسية

مثال 1 يبيّن كيفية إيجاد قيم دالة مثلثية لزاوية معينة في ربع محدد.

✓ التقويم التكويني

استعمل تدريبات " تحقق من فهمك " بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan\theta$.
إذا كان $\sec\theta = -2$،
$180° < \theta < 270°$.
$\tan\theta = \sqrt{3}$

b) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\theta$.
إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$،
$90° < \theta < 180°$.
$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

تنويع التعليم

دون ضمن

إذا واجه الطلاب صعوبة في فهم المتطابقات المثلثية،

فقم بتشجيعهم على العمل في مجموعات من ثلاثة طلاب، واطلب إلى كل مجموعة اختيار إحدى المتطابقات المثلثية الأساسية الموجودة في إطار "مفهوم أساسي" والعمل معًا للتحقق من صحتها، مستعملين تعريفات الجيب، وجيب التمام، والظل بدلالة أضلاع المثلث القائم الزاوية.

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

مثـال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة: $\dfrac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\tan\theta}}\qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}}\qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1}=\tan\theta\qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

2A) $\dfrac{\tan^2\theta\csc^2\theta-1}{\sec^2\theta}$ $\sin^2\theta$

2B) $\dfrac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$ $\tan\theta$

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta=\dfrac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$\sec\theta=\dfrac{I}{ER^2}$ المعادلة الأصلية

$E\sec\theta=\dfrac{I}{R^2}$ اضرب كلا الطرفين في E

$E\dfrac{1}{\cos\theta}=\dfrac{I}{R^2}$ $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$E=\dfrac{I\cos\theta}{R^2}$ اضرب كلا الطرفين في $\cos\theta$

b) هل المعادلة في الفرع **a** تكافئ المعادلة $R^2=\dfrac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$R^2=\dfrac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ المعادلة الأصلية

$ER^2=I\tan\theta\cos\theta$ اضرب كلا الطرفين في E

$E=\dfrac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2}$ اقسم كلا الطرفين على R^2

$E=\dfrac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2}$ $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$E=\dfrac{I\sin\theta}{R^2}$ بسِّط

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2=\dfrac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E=\dfrac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع (**a**) هي: $E=\dfrac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau=Fr\sin\theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F). $F=\dfrac{\tau}{r\sin\theta}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية

عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تُكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب$(\sin\theta)$ و/أو بدلالة جيب التمام $(\cos\theta)$.

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبدالله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

تبسط العبارات:

مثال 2 يبيِّن كيفية تبسيط عبارة بكتابتها على صورة دالة مثلثية واحدة إن أمكن.

مثال 3 يبيِّن تبسيط عبارة من واقع الحياة تتضمن دوال مثلثية.

مثالان إضافيان

2 بسّط العبارة :

$\cos^2\theta.\sin\theta(\csc\theta-\sin\theta)$ $\cos^2\theta$

3 **استضاءة** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta=\dfrac{I}{ER^2}$ بالنسبة لـ R .

$R=\sqrt{\dfrac{I\cos\theta}{E}}$

b) هل المعادلة في **a** مكافئة للمعادلة $\dfrac{1}{R^2}=\dfrac{E}{I\sec\theta}$ ؟ لا

المحتوى الرياضي

المتطابقات: يجب على الطلاب أن يتذكروا جيدًا المتطابقات النسبية، ومتطابقات المقلوب، ومتطابقات فيثاغورس. وعلى الرغم من أن تذكر المتطابقات الأخرى مفيد إلا أنه يمكن اشتقاقها من المتطابقات الأساسية.

التعليم باستعمال التقنيات

مدونة: اطلب إلى الطلاب كتابة مدونة تتضمن المتطابقات المثلثية الأساسية، وصيغًا من هذا الفصل.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: يهتم الطلاب ذوو المستوى فوق المتوسط على الأغلب بتعلم كيفية نشوء بعض الأفكار الرياضية؛ لذا زوّدهم بمعلومات حول تاريخ الرياضيات تتضمن إسهامات العلماء المسلمين.

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{1}{2}$**

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{3\sqrt{5}}{5}$**

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{12}{13}$**

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270° < \theta < 360°$ **$\sqrt{2}$**

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$ **$2\sqrt{2}$**

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$ **$\frac{-\sqrt{17}}{4}$**

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$ **$\frac{-3}{5}$**

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$ **$\frac{2\sqrt{77}}{77}$**

بسِّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan\theta\cos^2\theta$ **$\sin\theta\cos\theta$**

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$ **1**

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ **$\cot^2\theta$**

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ **$\sec^3\theta$**

13) $\sin\theta(1+\cot^2\theta)$ **$\csc\theta$**

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta$ **1**

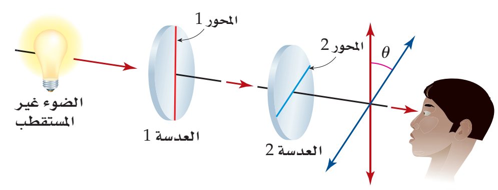
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ **$-\cot\theta$**

16) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$ **$\cos^2\theta$**

17) $2 - 2\sin^2\theta$ **$2\cos^2\theta$**

18) $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta$ **$\sin\theta$**

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$ **$I = I_0\cos^2\theta$**

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها 30° مع محور العدسة الأولى.

27b) $I = \frac{3}{4}I_0$ ؛ شدة الضوء تساوي ثلاثة أرباع شدة الضوء قبل المرور بالعدسة الثانية.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لـ W. **$W = eAS\cos\theta$ (a**

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80$, $\theta = 40°$, $A = 0.75$ ، $S = 1000\ W/m^2$. (قرِّب إلى أقرب جزء من مئة). **$459.63W$**

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية ؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثّل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2\theta\sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة، بيانيًا. **انظر الهامش.**

c) **تحليليًا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين ؛ فإن المعادلة تمثّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع (b) متطابقان؟ **نعم**

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثّل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات) **نعم**

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:

$F_n - mg\cos\theta = 0$, $mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلّج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ. **$\mu_k = \tan\theta$**

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب جدول القيم إضافة إلى الحاسبة البيانية في السؤال 21، لتحديد ما إذا كانت المعادلة المعطاة تمثّل متطابقة أم لا.

3 التدريب

التقويم التكويني

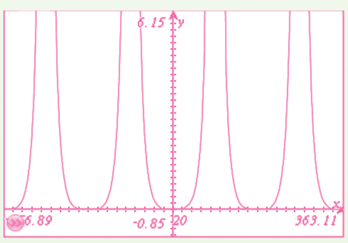
استعمل الأسئلة 1-17 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشادات للمعلم الجديد

النسب المثلثية: يمكنك استعمال التعريفات الأساسية لكل من الجيب، وجيب التمام، والظل بوصفها نسبة تعتمد على الضلع المقابل، والضلع المجاور، والوتر في المثلث القائم الزاوية لتوضيح أن $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

إجابة:

(21b



تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–17، 22، 27–40
ضمن المتوسط	1–17 (فردي)، 18–22، 24–40
فوق المتوسط	18–40

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$ **-1**

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$ **$\sin\theta$**

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك. **انظر الهامش.**

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة. **إجابة ممكنة: $x = 45°$**

27) **تبرير:** وضِّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\frac{ER^2}{I}$. **انظر الهامش.**

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. **انظر الهامش.**

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثِّل متطابقة. **انظر الهامش.**

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta\sin\theta$ **انظر الهامش.**

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة: $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$ **أقسم جميع الحدود على $\sin^2\theta$**

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من علاء وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.
سامي؛ لأن علاءً استعمل العلاقة الخاطئة $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{c}+\frac{a}{b}$

علاء	سامي
$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$	$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$
$=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$	$=\dfrac{\sin^2\theta}{1}$
$=\tan^2\theta+1$	$=\sin^2\theta$
$=\sec^2\theta$	

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي، اكتب قياس الزاوية بالراديان، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم. (مهارة سابقة)

33) $\text{Cos}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **$\frac{2}{3}\pi=2.09$**

34) $\tan\left(\text{Cos}^{-1}\frac{6}{7}\right)$ **0.60**

35) $\sin\left(\text{Arctan}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **0.5**

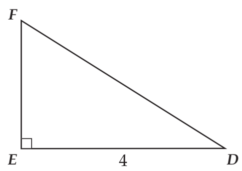
36) $\cos\left(\text{Arcsin}\frac{3}{5}\right)$ **0.8**

37) أوجد قيمة K التي تجعل الدالة: $f(x)=\begin{cases}K+x^2, & x<5\\ 3x+2, & x\geq 5\end{cases}$ متصلة عند $x=5$. (الدرس 3-1) **$K=-8$**

38) حل المعادلة: $2^x=32^{x-2}$. (الدرس 2-2) **$x=2.5$**

تدريب على اختبار

39) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$، فما طول $\overline{DF}$؟ **A**



A 5 B 4 C 3.2 D 10

40) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0<x<90°$، فما قيمة $\tan x$؟ **B**

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يتعين على الطلاب في السؤال 25، أن يعرفوا أن حل أحمد هو الصحيح؛ لذا اشرح لهم أنه لا يمكن استعمال البرهان الاستقرائي لإثبات صحة المتطابقة. لكن أي مثال مضاد يعد كافيًا لإثبات أن المعادلة لا تمثل متطابقة.

وعليهم أن يعرفوا أيضًا في السؤال 32، أن جواب سامي هو الصحيح؛ لأن $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$. وهكذا يكون حل علاء خطأً؛ لأن $\frac{a}{b+c}\neq\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$. بيِّن للطلاب أنه عند تبسيط العبارات المثلثية فإنهم يستعملون الخصائص نفسها كما يبسّطون أي عبارة نسبية.

4 التقويم

تعلم لاحق: اطلب إلى الطلاب إلقاء نظرة على الدرس 3-2 اللاحق، واطلب إليهم تحديد كيف يمكن أن يساعدهم الدرس الحالي على فهم الدرس اللاحق.

إجابات:

25) أحمد؛ لم يبرهن سعيد صحة المتطابقة عند جميع قيم θ، وقد يكون هناك قيم أخرى لا تحقق المعادلة.

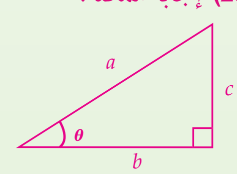
27) $\sec\theta=\frac{I}{ER^2}$

$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{I}{ER^2}$

$I\cos\theta=ER^2$

$\cos\theta=\frac{ER^2}{I}$

28) إجابة ممكنة:



$\sin^2\theta+\cos^2\theta=$

$\frac{c^2}{a^2}+\frac{b^2}{a^2}=$

$\frac{c^2+b^2}{a^2}=$

$\frac{a^2}{a^2}=1$

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: اسأل الطلاب: هل يمكن دائمًا تبسيط أي عبارة مثلثية بكتابتها على صورة دالة مثلثية واحدة؟ واطلب إليهم أن يكتبوا مثالًا إذا كان ذلك غير ممكن، أو يوضحوا لماذا يكون ذلك ممكنًا.

29) $\tan(-a)=\frac{\sin(-a)}{\cos(-a)}$

$=\frac{-\sin a}{\cos a}$

$=-\frac{\sin a}{\cos a}$

$=-\tan a$

30) إجابة ممكنة:

$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ ، $\sin^2\theta\sec\theta$

الفصل 3

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط — ضمن ضمن المتوسط — فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-1 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثية

إيجاد قيم الدوال المثلثية: المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية تكون صحيحة لجميع القيم التي تكون عندها كل عبارة في المعادلة معرفة.

المتطابقات المثلثية الأساسية	المتطابقات النسبية	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
	متطابقات المقلوب	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
	متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

مثال أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$ إذا كان $\csc\theta = -\frac{11}{5}$ و $180° < \theta < 270°$.

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ متطابقة مثلثية

$\cot^2 + 1 = \left(-\frac{11}{5}\right)^2$ عوض $-\frac{11}{5}$ بدلًا من $\csc\theta$.

$\cot^2\theta + 1 = \frac{121}{25}$ ربِّع $-\frac{11}{5}$

$\cot^2\theta = \frac{96}{25}$ اطرح 1 من كلا الطرفين

$\cot = \pm\frac{4\sqrt{6}}{5}$ خذ الجذر التربيعي لكل طرف

ولمّا كانت θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cot\theta$ موجب، وعليه فإن $\cot\theta = \frac{4\sqrt{6}}{5}$.

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من العبارات الآتية إذا كانت $0° < \theta < 90°$:

1) إذا كان $\cot\theta = 4$، فأوجد $\tan\theta$. **$\frac{1}{4}$**

2) إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$، فأوجد $\csc\theta$. **2**

3) إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$، فأوجد $\cos\theta$. **$\frac{4}{5}$**

4) إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{3}$، فأوجد $\sec\theta$. **$\frac{3\sqrt{2}}{4}$**

5) إذا كان $\tan\theta = \frac{4}{3}$، فأوجد $\cos\theta$. **$\frac{3}{5}$**

6) إذا كان $\sin\theta = \frac{3}{7}$، فأوجد $\tan\theta$. **$\frac{3\sqrt{10}}{20}$**

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسبتين المثلثيتين الآتيتين إذا كانت $90° < \theta < 180°$:

7) إذا كان $\cos\theta = -\frac{7}{8}$، فأوجد $\sec\theta$. **$-\frac{8}{7}$**

8) إذا كان $\csc\theta = \frac{12}{5}$، فأوجد $\cot\theta$. **$-\frac{\sqrt{119}}{5}$**

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسبتين المثلثيتين الآتيتين إذا كانت $270° < \theta < 360°$:

9) إذا كان $\cos\theta = \frac{6}{7}$، فأوجد $\sin\theta$. **$-\frac{\sqrt{13}}{7}$**

10) إذا كان $\csc\theta = -\frac{9}{4}$، فأوجد $\sin\theta$. **$-\frac{4}{9}$**

الصف: الثالث الثانوي 6 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات إعادة التعليم (7) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-1 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتطابقات المثلثية

تبسيط العبارات: تُكتب أبسط صورة للعبارات المثلثية على صورة قيمة عددية أو بدلالة دالة مثلثية واحدة إن أمكن. ويمكن استعمال المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات التي تحتوي على دوال مثلثيّة.

مثال 1 بسّط العبارة: $(1 - \cos^2\theta)\sec\theta\cot\theta + \tan\theta\sec\theta\cos^2\theta$

$$(1-\cos^2\theta)\sec\theta\cot\theta + \tan\theta\sec\theta\cos^2\theta = \sin^2\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos^2\theta$$
$$= \sin\theta + \sin\theta$$
$$= 2\sin\theta$$

مثال 2 بسّط العبارة: $\frac{\sec\theta \cdot \cot\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\csc\theta}{1 + \sin\theta}$

$$\frac{\sec\theta \cdot \cot\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\csc\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1 - \sin\theta} - \frac{\frac{1}{\sin\theta}}{1 + \sin\theta}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sin\theta}(1 + \sin\theta) - \frac{1}{\sin\theta}(1 - \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sin\theta} + 1 - \frac{1}{\sin\theta} + 1}{1 - \sin^2\theta}$$
$$= \frac{2}{\cos^2\theta}$$

تمارين

بسّط كل عبارة من العبارات الآتية:

1) $\frac{\tan\theta \cdot \csc\theta}{\sec\theta}$ **1**

2) $\frac{\sin\theta \cdot \cot\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta}$ **$\cos\theta$**

3) $\frac{\sin^2\theta - \cot\theta \cdot \tan\theta}{\cot\theta \cdot \sin\theta}$ **$-\cos\theta$**

4) $\frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$ **$1 + \sin\theta$**

5) $\frac{\tan\theta \cdot \cos\theta}{\sin\theta} + \cot\theta \cdot \sin\theta \cdot \tan\theta \cdot \csc\theta$ **2**

6) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{\tan\theta \cdot \cos\theta}$ **$\csc\theta$**

7) $3\tan\theta \cdot \cot\theta + 4\sin\theta \cdot \csc\theta + 2\cos\theta \cdot \sec\theta$ **9**

8) $\frac{1 - \cos^2\theta}{\tan\theta \cdot \sin\theta}$ **$\cos\theta$**

الصف: الثالث الثانوي 7 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

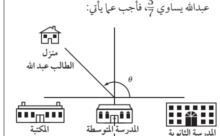
تدريبات حل المسألة (8) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-1 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثية

1) **خرائط:** يبيّن الشكل أدناه خريطة بعض المباني في إحدى المدن. فإذا كان جيب الزاوية θ المتكون من المدرسة الثانوية، والمدرسة المتوسطة، ومنزل الطالب عبدالله يساوي $\frac{3}{7}$، فأجب عما يأتي:

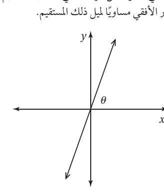


a) ما قيمة جيب تمام الزاوية θ؟ **$-2\frac{\sqrt{10}}{7}$**

b) ما قيمة ظل الزاوية θ؟ **$-\frac{3\sqrt{10}}{20}$**

c) ما قيمة جيب الزاوية المتكون من المكتبة، والمدرسة المتوسطة، ومنزل الطالب عبدالله، وما قيم جيب تمامها، وظلها؟ **$\frac{3}{7}, \frac{2\sqrt{10}}{7}, \frac{3\sqrt{10}}{20}$**

2) **هندسة:** عند رسم مستقيم غير رأسي في المستوى الإحداثي، يكون ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي مساويًا لميل ذلك المستقيم.



في الشكل أعلاه جيب تمام الزاوية θ التي يصنعها المستقيم مع المحور الأفقي هو $\frac{1}{3}$.

a) اشرح طريقتين لإيجاد ميل المستقيم، وارسم مثلثًا توضيحيًا يكون فيه طول الضلع المجاور للزاوية θ وحدة واحدة، وطول الوتر 3 وحدات.
استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد طول الساق الأخرى للمثلث. واحسب قيمة الظل أو استعمل قيمة جيب التمام ومتطابقة فيثاغورس لإيجاد قيمة جيب الزاوية، ثم استعمل المتطابقة $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ لإيجاد قيمة ظل الزاوية وهو يمثل ميل المستقيم.

b) احسب قيمة ظل الزاوية، وجيبها. **$2\sqrt{2}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$**

c) ما ميل المستقيم؟ **$2\sqrt{2}$**

الصف: الثالث الثانوي 8 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

التدريبات الإثرائية (9) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-1 التدريبات الإثرائية

مدارات الكواكب

مدار الكوكب الذي يدور حول الشمس يكون على صورة قطع ناقص، وتكون الشمس إحدى بؤرتيه. لتكن هذه البؤرة هي قطب المستوى القطبي، ويتجه المحور القطبي من المركز إلى البؤرة الأخرى، وتعطى المسافة بين الكوكب والشمس (r) بالعلاقة الآتية:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

حيث e هي الاختلاف المركزي، و a نصف طول محور القطع الناقص الرئيس، و a متوسط المسافة بين الكوكب والشمس.

مثال **متوسط المسافة بين كوكب الزهرة والشمس هو 67.24×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار كوكب الزهرة 0.006788، أوجد أصغر مسافة بين الشمس والزهرة، وأكبر مسافة بينهما.**

تكون أصغر مسافة عندما $\theta = \pi$.

$$r = \frac{67.24 \times 10^6(1 - 0.006788^2)}{1 - 0.006788\cos\pi} = 66.78 \times 10^6 \text{ ميل}$$

وتكون أكبر مسافة عندما $\theta = 0$.

$$r = \frac{67.24 \times 10^6(1 - 0.006788^2)}{1 - 0.006788\cos 0} = 67.70 \times 10^6 \text{ ميل.}$$

حلّ المسألتين الآتيتين:

1) متوسط المسافة بين المريخ والشمس هو 141.64×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار المريخ هو 0.093382، أوجد أصغر مسافة بين المريخ والشمس، وأكبر مسافة بينهما.
أكبر مسافة: 15.49×10^7 ميل.
أصغر مسافة: 12.84×10^7 ميل.

2) أصغر مسافة بين الأرض والشمس هي 91.445×10^6 ميل، والاختلاف المركزي لمدار الأرض هو 0.016734، أوجد متوسط المسافة بين الشمس والأرض، وأكبر مسافة بينهما؟
أكبر مسافة: 93.0×10^6 ميل.
متوسط المسافة: 91.47×10^6 ميل.

الصف: الثالث الثانوي 9 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (17) دون ضمن فوق

3-1 المتطابقات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0° < \theta < 90°$.

1) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ $\quad \frac{12}{13}$

2) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = 4$ $\quad \sqrt{17}$

4) $\cot\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = \frac{2}{5}$ $\quad \frac{5}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $180° < \theta < 270°$.

5) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{15}{17}$ $\quad -\frac{17}{8}$

6) $\cot\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -\frac{3}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $270° < \theta < 360°$.

7) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{10}$ $\quad -\frac{3\sqrt{91}}{91}$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -8$ $\quad \frac{8\sqrt{7}}{21}$

9) $\sin\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{\sqrt{5}}{5}$

10) $\cot\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ $\quad -\frac{\sqrt{2}}{4}$

بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

11) $\csc\theta\tan\theta$ $\quad \sec\theta$

12) $\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\theta}$ $\quad \cos^2\theta$

13) $\sin^2\theta\cot^2\theta$ $\quad \cos^2\theta$

14) $\cot^2\theta + 1$ $\quad \csc^2\theta$

15) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{1-\cos^2\theta}$ $\quad \csc^2\theta$

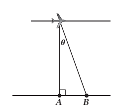
16) $\frac{\csc\theta - \sin\theta}{\cos\theta}$ $\quad \cot\theta$

17) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$ $\quad \csc\theta$

18) $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ $\quad 2\tan\theta$

19) $\sec^2\theta\cos^2\theta + \tan^2\theta$ $\quad \sec^2\theta$

20) **التصوير الجوي:** يُبيّن الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A . وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بُعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وعندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، بحسب العلاقة: $\sin\theta(\csc\theta - \sin\theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos\theta$ فقط. $\quad \cos^2\theta$



21) **الأمواج:** المعادلة $y = a\sin\theta t$ تُمثّل ارتفاع الأمواج على العوامة عند الزمن t بالثواني. عبّر عن a بدلالة $\csc\theta t$. $\quad a = y\csc\theta t$

17

الفصل الثالث المتطابقات والمعادلات المثلثية

ملحوظات المعلم

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:

درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.

(الدرس 1−3)

والآن:

- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا؟

عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$، حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

بسّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 **إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

أثبت أن المعادلة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$ تمثّل متطابقة.

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$	الطرف الأيسر
$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$	اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$
$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$	$(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$
$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$	$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$
$= 1+\cos\theta$ ✓	اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة

توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$. انظر الهامش.

3-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-2

استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.

الدرس 3-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية بتحويل طرف من المعادلة إلى الشكل الموجود في الطرف الآخر.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية من خلال تحويل كلا طرفي المعادلة إلى العبارة نفسها.

ما بعد الدرس 3-2

استعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما لإثبات صحة متطابقات مثلثية أخرى أو تبسيطها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- أيّ المتغيرات يظهر في بسط الطرف الأيمن من معادلة زاوية الميلان؟ وأيها يظهر في المقام؟ v في البسط، R , g في المقام
- كيف تستطيع التعبير عن $\tan\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$؟ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- هل $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ يساوي $\frac{v^2}{gR}$ أو $\frac{gR}{v^2}$؟ $\frac{v^2}{gR}$

إجابة (تحقق من فهمك):

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta =$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} - \cos^2\theta =$

$\cos^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right) =$

$\cos^2\theta(\csc^2\theta - 1)$

$\cot^2\theta\cos^2\theta$

مصادر الدرس 2 − 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (142)	• تنويع التعليم ص (142)	• تنويع التعليم ص (142 , 144)
كتاب التمارين	• ص (18)	• ص (18)	• ص (18)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، يمكنك تعزيز إجابتك عدديًّا، وذلك باختيار قيمة لـ θ. وتعويضها في العبارة التي يمثلها البديل الذي اخترته، ثم مقارنتها بقيمة العبارة الواردة في نص السؤال، ولكن ذلك لايمكن أن يكون بديلًا عن تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$	C $\cot^2\theta$
B $\csc\theta$	D $\csc^2\theta$

تنبيه!

تبسيط الطرفين تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عملية التحقق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اقلب المقام واضربه بالبسط}$$

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{اضرب}$$

الجواب هو C.

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات كي تتحقق من صحة حلك اختر قيمة لـ θ، وعوّضها في العبارة الجديدة، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta-\cos^2\theta)$ ؟ C

A $\cot^2\theta$	C $\cos^2\theta$
B $\tan^2\theta$	D $\sin^2\theta$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات " تحقق من فهمك " بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

تحويل أحد طرفي المعادلة :

مثال 1 يبيِّن كيفية إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها.

مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد عبارة تكافئ عبارة مثلثية معطاة.

مثالان إضافيان

1 أثبت صحة المتطابقة $\csc\theta\cos\theta\tan\theta=1$.

الطرف الأيسر $\csc\theta\cos\theta\tan\theta$

$$=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=1\ \checkmark$$

ويساوي الطرف الأيمن

2 **تدريب على اختبار:**

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\csc\theta}{\cos\theta}-\tan\theta$ ؟ A

A $\cot\theta$	C 0
B $\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta}$	D $\cos^2\theta$

تنويع التعليم

دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون وزِّع الطلاب في مجموعات ثنائية، ثم اطلب إليهم العمل معًا لإثبات صحة بعض المتطابقات في الأسئلة 10–1. وأن يسجلوا الاستراتيجيات التي وجدوها مفيدة، و يقارنوا بين قائمة استراتيجياتهم والقائمة المقترحة في نهاية هذه الصفحة من كتاب الطالب. واسألهم: أيّ الاستراتيجيات ثبت نجاحها؟ وأيها فشل؟ ولماذا؟

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلِّل أو اضرب كلًا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت أن المعادلة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$ تمثّل متطابقة.

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$. انظر الهامش.

تدرب وحل المسائل **(1-10, 12-23)** انظر ملحق الإجابات.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2) **D**

A $\sin^2\theta$ **C** $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ **D** $\csc^2\theta$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1-15، 25-40، 44، 46-47، 49-57
ضمن المتوسط	1-15 (فردي)، 18-40 (زوجي)، 42–47 ، 49-57
فوق المتوسط	16-57

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: حلّ أمثلة على السبورة واحتفظ بملاحظات حولها. ثم ضع ملاحظاتك عند نهاية الحصة على موقع الصف الإلكتروني، فقد يساعد ذلك الطلاب على التركيز على الدروس بدلًا من كتابة الملاحظات حول كل خطوة من خطوات الإثبات.

تحويل طرفي المتطابقة:

مثال 3 يبيِّن كيفية إثبات صحة متطابقة مثلثية من خلال تحويل كل طرف من طرفيها إلى صيغة مشتركة.

مثال إضافي

3 أثبت أن المعادلة

$$\csc\theta + \sec\theta = \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$$

تمثل متطابقة.

$$\csc\theta + \sec\theta \stackrel{?}{=} \frac{1+\cot\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta\left(1+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} \checkmark$$

3 التدريب

التقويم التكويني:

استعمل الأسئلة 1–15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابة (تحقق من فهمك):

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \cot\theta\tan\theta$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

تمثيلات متعددة
يستعمل الطلاب في السؤال 43 التمثيل البياني والتحليل، ليتوصلوا إلى الصيغة العامة لحل المعادلة المثلثية $2\sin x = 1$.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم تعلّم المتطابقات المثلثية الأساسية في الدرس (3-1) في إثبات صحة متطابقات أكثر تعقيدًا في درس اليوم.

التقويم التكويني
تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 3-1, 3-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (49)

إجابات:

41) $y = -\dfrac{gx^2}{2{v_0}^2}(1 + \tan^2\theta) + x\tan\theta$

44) $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$؛ لأن باقي المعادلات هي متطابقات فيثاغورس وهذه المعادلة ليست منها.

46) إجابة ممكنة: هل استعملت المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؟

47) إجابة ممكنة: لأنهما أكثر دالتين مثلثيتين شيوعًا.

48) بما أن α, β زاويتان متتامتان فإن

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta =$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2(90 - \alpha)$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$
$$= 1$$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\dfrac{1 + \tan\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2 + \sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

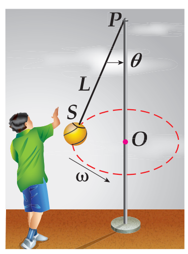
20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًّا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية θ المحصورة بين الحبل والعمود تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8/s^2$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ؟ وضح إجابتك.
نعم؛ للتوضيح انظر إجابات الطلاب.



25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره 16.7m. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.
إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟". **6.5 m/s**

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو −1 :

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$ **1**

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$ **−1**

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$ **1**

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$ **1**

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$ **1**

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **−1**

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$ **1**

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$ **−1**

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$ **$\cos\theta$**

35) $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta}$ **$\tan\theta$**

36) $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ **1**

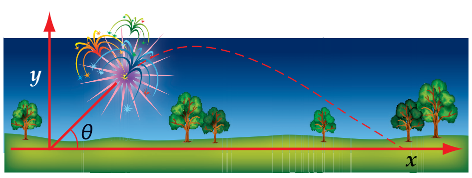
37) $\tan\theta\cos\theta$ **$\sin\theta$**

38) $\cot\theta\tan\theta$ **1**

39) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **1**

40) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$ **2**

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \dfrac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية. أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. انظر الهامش.



المحتوى الرياضي

تحويل طرف أو طرفي المعادلة: يمكن إثبات صحة متطابقة بتحويل أحد طرفي المعادلة أو كليهما في الوقت نفسه. وربما يفضل بعض الطلاب تحويل أحد الطرفين تجنبًا للتشويش.

تنويع التعليم
فوق

توسّع: المعادلة $\sin x + \cos x = 1$ ليست متطابقة، مما يعني أنها ليست صحيحة لكل قيم x؛ لذا أوجد قيم x التي تجعل هذه المعادلة صحيحة. $0° + k \cdot 360°$ (أو) $90° + k \cdot 360°$، حيث k أي عدد صحيح.

42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$. $P = \dfrac{I_0^2 R}{\csc^2 2\pi f t}$

$P = I_0^2 R (1 - \cos^2 2\pi f t)$ (42a

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $1 = 2\sin x$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين. $\sin x = \frac{1}{2}$ (43a

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمِّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

43b-d انظر ملحق الاجابات.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك. انظر الهامش

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$
$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 2\sin^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

45) **تبرير:** بيِّن لماذا تُعدّ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos\theta}$ ليست متطابقة. مثال مضاد: $45°, 30°$

46) **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

(46-47 انظر الهامش.

47) **اكتب:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin\theta)$ وجيب التمام $(\cos\theta)$ في معظم الأحيان.

48) **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. انظر الهامش.

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

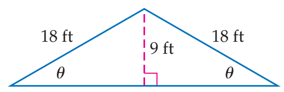
أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 1–3)

50) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

51) $\csc\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$ $\frac{5}{4}$

52) $\cos\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{5}{3}$، $270° < \theta < 360°$ $\frac{3}{5}$

53) **هندسة معمارية:** يمثِّل الشكل أدناه سقف منزل مغطى بالقرميد. أوجد θ. (مهارة سابقة) $30°$



بسّط العبارتين الآتيتين. (الدرس 1–3)

54) $\sin\theta\cos\theta(1 + \cot^2\theta)$ $\cot\theta$

55) $\dfrac{\sin^4\theta - \cos^4\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$ 1

تدريب على اختبار

56) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos\theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$؟ D

A $\dfrac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

B $\dfrac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$

C $\cot\theta\sin\theta$

D $\tan\theta\csc\theta$

57) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثِّل متطابقة:

$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta = \sin\theta\cos\theta$

انظر ملحق الإجابات.

145 الدرس 3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

الفصل 3

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (10) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-2 تدريبات إعادة التعليم

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

تحويل أحد طرفي المعادلة إلى الطرف الآخر. استعمل المتطابقات المثلثية الأساسية والتعريفات لإثبات صحة متطابقات مثلثية. وعادة يكون البدء بالطرف المعقد من المعادلة وتبسيطه للوصول إلى الطرف الآخر.

مثال أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

a) $\frac{\sin\theta}{\cot\theta} - \sec\theta = -\cos\theta$

مبتدئًا من الطرف الأيسر.

$$\frac{\sin\theta}{\cot\theta} - \sec\theta$$
$$\frac{\frac{\sin\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\frac{\sin^2 - 1}{\cos\theta}$$
$$\frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$-\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

b) $\frac{\tan\theta}{\csc\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

مبتدئًا من الطرف الأيسر.

$$\frac{\tan\theta}{\csc\theta} + \cos\theta$$
$$\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}} + \cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\sec\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن من المعادلة.

تمارين

أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة:

1) $1 + \csc^2\theta \cdot \cos^2\theta = \csc^2\theta$

$$1 + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \cos^2\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta$$

2) $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \frac{\cot\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$

$$\frac{\sin\theta(1+\cos\theta) - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{\sin\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{1-\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{\frac{\sin^2\theta + \sin^2\theta\cos\theta - \cos\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta(\sin^2\theta - 1)}{\sin^3\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{1 + \cos\theta(-\cos^2\theta)}{\sin^3\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$
$$\frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta} = \frac{1-\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$

الصف: الثالث الثانوي — 10 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-2 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

يمكن استعمال الاقتراحات الآتية لإثبات صحة المتطابقات المثلثية:

- عوّض متطابقة أو أكثر من المتطابقات الأساسية لتبسيط العبارة.
- حلّل العبارة إلى العوامل لتبسيطها أو اضرب العوامل.
- اضرب كلًّا من البسط والعبارة في العبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف من المتطابقة بدلالة الجيب وجيب التمام فقط، ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.

مثال أثبت أن: $\frac{\tan^2\theta + 1}{\sin\theta \cdot \tan\theta \cdot \sec\theta + 1} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$ متطابقة.

$$\frac{\tan^2\theta + 1}{\sin\theta \cdot \tan\theta \cdot \sec\theta + 1} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta - \tan^2\theta$$
$$\frac{\sec^2\theta}{\sin\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} + 1} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1} \stackrel{?}{=} \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \stackrel{?}{=} 1$$
$$1 = 1$$

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي متطابقة:

1) $\csc\theta \cdot \sec\theta = \cot\theta + \tan\theta$

$$\frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$$
$$\frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$$

2) $\frac{\tan^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\sec\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\cos\theta}$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

3) $\frac{\cos\theta \cdot \cot\theta}{\sin\theta} = \frac{\csc\theta}{\sin\theta \cdot \sec^2\theta}$

$$\frac{\cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\sin\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}}$$
$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

4) $\frac{\csc^2\theta - \cot^2\theta}{\sec^2\theta} = \cot^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$$\frac{\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}(\sin^2\theta)$$
$$\cos^2\theta\left(\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta\left(\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right) \stackrel{?}{=} \cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta = \cos^2\theta$$

الصف: الثالث الثانوي — 11 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات حل المسألة (12) دون ضمن فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-2 تدريبات حل المسألة

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

1) **تمثيل الدوال:** يحتاج سليم لأداء واجباته المنزلية المتعلقة بالمتطابقات المثلثية إلى تمثيل الدالة: $y = \frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\sec^2 x}$ بيانيًّا. ويعتقد أنه من الأسهل تمثيل الدالة إذا أعاد كتابتها دون وجود مقام، أو باستعمال مقدار يحتوي على دالة مثلثية واحدة فقط إن أمكن. وبعد إجراء عدد من الخطوات قرر سليم أنه يستطيع تمثيل الدالة $y = -\sin^4 x$ بدلًا من الدالة المعطاة.

a) هل من الممكن أن يبسّط سليم الدالة على الصورة التي يدّعيها؟

نعم

b) وإذا مثّل الدالتين بيانيًّا على المستوى البياني نفسه، فعلامَ سيحصل؟

سيحصل على المنحنى نفسه.

c) ماذا يعني ذلك بالنسبة للعبارتين: $\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\sec^2 x}$ و $-\sin^4 x$؟

العبارتان متساويتان، أي أن $\frac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\sec^2 x} = -\sin^4 x$ **تمثل متطابقة.**

2) **فيزياء:** لحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة F لتحريك جسم بالعلاقة $W = Fd\cos\theta$، حيث تمثل d الإزاحة التي تحركها الجسم، وَ θ تمثل الزاوية بين الإزاحة d والقوة F.

أثبت أن $w = \frac{Fd\cot\theta}{\csc\theta}$ تكافئ العلاقة السابقة للشغل

$$w = \frac{Fd\cot\theta}{\csc\theta} = Fd\frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}{\frac{1}{\sin\theta}} = \frac{Fd\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= Fd\cos\theta$$

الصف: الثالث الثانوي — 12 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

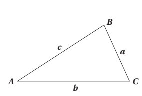
التدريبات الإثرائية (13) فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

3-2 التدريبات الإثرائية

صيغة هيرون

تستعمل صيغة هيرون لإيجاد مساحة المثلث إذا عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة.



لتكن K تمثل مساحة المثلث ABC، فإن:

$$K = \frac{1}{2}bc\sin A$$

ربّع الطرفين $K^2 = \frac{b^2c^2\sin^2 A}{4}$

$$K^2 = \frac{b^2c^2(1-\cos^2\theta)}{4}$$
$$= \frac{b^2c^2(1+\cos A)(1-\cos A)}{4}$$

استعمال قانون جيب التمام $= \frac{b^2c^2}{4}\left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$

بسّط $= \frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}$

افترض أن $r = \frac{a+b+c}{2}$، فإن $r-c = \frac{a+b-c}{2}$، $r-b = \frac{a+c-b}{2}$، $r-a = \frac{b+c-a}{2}$

عوّض $K^2 = r(r-a)(r-b)(r-c)$

$$K = \sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}$$

صيغة هيرون	مساحة $\triangle ABC$ هي $\sqrt{r(r-a)(r-b)(r-c)}$، حيث $r = \frac{a+b+c}{2}$.

استخدم صيغة هيرون في إيجاد مساحة المثلث ABC لكلٍّ مما يأتي:

1) $a = 3, b = 4.4, c = 7$
4.1

2) $a = 8.2, b = 10.3, c = 9.5$
36.8

3) $a = 31.3, b = 92.0, c = 67.9$
782.9

4) $a = 0.54, b = 1.32, c = 0.78$
لا تكوّن الأضلاع مثلثًا.

5) $a = 321, b = 178, c = 298$
26160.9

6) $a = 0.05, b = 0.08, c = 0.04$
0.00082

7) $a = 21.5, b = 33.0\ c = 41.7$
351.6

8) $a = 2.08, b = 9.13, c = 8.99$
9.3

الصف: الثالث الثانوي — 13 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (18) دون ضمن فوق

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

1) $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$

$\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=$

$\frac{1}{\cos^2\theta}=$

$\sec^2\theta$

2) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}=1$

$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=1$

3) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)=\cos^2\theta$

$(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

$=1-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta$

4) $\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1=\sec^4\theta$

$\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1=$

$(\tan^2\theta+1)^2=$

$(\sec^2\theta)^2=$

$\sec^4\theta$

5) $\cos^2\theta\cot^2\theta=\cot^2\theta-\cos^2\theta$

$\cot^2\theta-\cos^2\theta=$

$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta=$

$\frac{\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=$

$\frac{(\cos^2\theta)(1-\sin^2\theta)}{\sin^2\theta}=$

$\frac{\cos^2\theta}{1}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=$

$\cos^2\theta\cot^2\theta$

6) $\sin^2\theta(\csc^2\theta+\sec^2\theta)=\sec^2\theta$

$(\sin^2\theta)(\csc^2\theta+\sec^2\theta)=$

$(\sin^2\theta)\left(\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)=$

$1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=$

$1+\tan^2\theta=$

$\sec^2\theta$

7) **فيزياء:** مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذف من سطح الأرض هو $v^2=\frac{2gh}{\sin^2\theta}$ ، حيث θ زاوية القذف، و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم. و g مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحّة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta}=\frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}$$

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta}=\frac{2gh}{1-\cos^2\theta}=\frac{2gh}{1-\frac{1}{\sec^2\theta}}=\frac{2gh}{\frac{\sec^2\theta-1}{\sec^2\theta}}=\frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta-1}$$

8) **ضوء:** تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من خلال المعادلة $I=ER^2\sec\theta$ ، حيث E مقدار الإنارة بالشمعة لكل قدم مربعة على السطح، و R المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ الزاوية بين شعاع الضوء والخط العامودي على السطح. برهن المتطابقة التالية: $ER^2(1+\tan^2\theta)\cos\theta=ER^2\sec\theta$.

$$ER^2(1+\tan^2\theta)\cos\theta=ER^2\sec^2\theta\cos\theta=ER^2\sec^2\theta\cdot\frac{1}{\sec\theta}=ER^2\sec\theta$$

18

الفصل الثالث — التطابقات والمعادلات المثلثية

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

3-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-3

إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

الدرس 3-3

إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

ما بعد الدرس 3-3

استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- أين سمعت كلمة "تداخل" أيضًا؟ إجابة ممكنة: التلفاز والمذياع.
- كيف ترتبط الدوال المثلثية بترددات جهاز التلفاز؟ يمكن أن تمثل هذه الترددات بدوال مثلثية.
- اكتب بعض الطرق التي تستعملها لتجنب فقد الإشارة من جهاز التلفاز. إجابة ممكنة: تغيير التردد، إغلاق أي مصدر قد يصدر موجات تتداخل مع موجات جهاز التلفاز.

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

Sum and Difference of Angles Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا. (مهارة سابقة)

والآن:

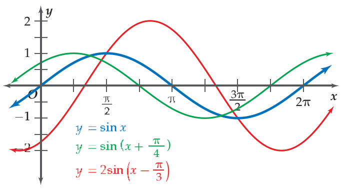
- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟ تُسبّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا.

ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل المجاور، تتضمّن جمع الزاويتين x, $\frac{\pi}{4}$. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$.

مفهوم أساسي: متطابقات المجموع والفرق

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	• $\tan (A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 إيجاد القيم المثلثية

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin 105° = \sin (60° + 45°) \qquad A = 60°, B = 45°$$

$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45° \qquad \text{متطابقة المجموع}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{عوّض}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \qquad \text{بسّط}$$

b) $\cos (-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\cos (-120°) = \cos (60° - 180°) \qquad A = 60°, B = 180°$$

$$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180° \qquad \text{متطابقة الفرق}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \qquad \text{عوّض}$$

$$= -\frac{1}{2} \qquad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ $\quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

1B) $\cos (-15°)$ $\quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة: كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $0°$, $360°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

مصادر الدرس 3 – 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (147 , 149)	• تنويع التعليم ص (147 , 149)
كتاب التمارين	• ص (19)	• ص (19)	• ص (19)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

$c = 3 \sin 165°t$ — الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ — $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ — المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ — $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ — متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوّض مستعملاً الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

✓ تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين. $2 \sin (315t - 30t)$

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة. $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 — إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ — الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ — متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ — عوّض

$= \sin \theta$ ✓ — بسّط

وهو الطرف الأيمن من المتطابقة.

متطابقات المجموع والفرق

مثال 1 يبيِّن كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين وطرحهما لإيجاد القيم الدقيقة للعبارات المثلثية.

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين لحل مسائل من واقع الحياة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات " تحقق من فهمك " بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

a) $\sin 75°$ $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

b) $\cos (-75°)$ $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

2 **إلكترونيات:** يمر تيار كهربائي متردد في دائرة كهربائية، وتُعطى شدة التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 4 \sin 255t$ ، حيث تقاس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين. $C = 4 \sin(210t + 45t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة. $(-\sqrt{2} - \sqrt{6})$ أمبير

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون اللغويون: اطلب إلى الطلاب تحديد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين من جهة، ومتطابقات النسب المثلثية لناتج طرح زاويتين من جهة أخرى. ثم اطلب إليهم كتابة جمل قصيرة لوصف نتائجهم.

التعليم باستعمال التقنيات

الكاميرا التوثيقية اختر مجموعة من الطلاب، واطلب إليهم أن يوضحوا كيفية استعمال متطابقات المجموع ومتطابقات الفرق من خلال أمثلة متعددة، وتوثيق ذلك باستعمال الكاميرا التوثيقية.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال متطابقات النسب المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية.

مثال إضافي

3 أثبت أن كل معادلة من المعادلتين الآتيتين تمثل متطابقة:

a) $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(360° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos 360° \cos\theta + \sin 360° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta$ ✓

b) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(\pi - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\cos\pi \cos\theta + \sin\pi \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta$ ✓

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–15 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

إجابات:

21) $\csc\frac{5\pi}{12}$

إجابة ممكنة: $= \dfrac{1}{\sin\frac{5\pi}{12}}$

$= \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)}$

$= \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

$= \dfrac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{6 - 2}$

$= \sqrt{6} - \sqrt{2}$

---

b) $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$	عوِّض
$= \cos\theta$ ✓	بسِّط

وهو الطرف الأيمن من المتطابقة.

(3A $\sin(90° - \theta)$

$= \sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta$

$= 1\cos\theta - 0\sin\theta$

$= \cos\theta$

(3B $\tan(\frac{\pi}{4} + \theta)$

$= \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

تحقق من فهمك

(3A $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ **(3B** $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

(1 $\cos 165°$ $\quad -\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

(2 $\cos 105°$ $\quad \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

(3 $\cos 75°$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(4 $\cos\frac{\pi}{12}$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(5 $\sin 135°$ $\quad \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(6 $\sin(-210°)$ $\quad \dfrac{1}{2}$

(7 $\cos 135°$ $\quad \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

(8 $\tan 195°$ $\quad 2 - \sqrt{3}$

(9 كهرباء: يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120° t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين. **9a) إجابة ممكنة:** $c = 2\sin(90t + 30t)$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة. $\sqrt{3}$ أمبير

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (مثال 3)

(10–15) انظر ملحق الإجابات.

(10 $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

(11 $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

(12 $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

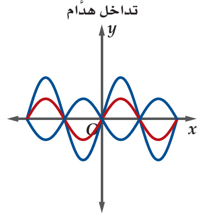
(13 $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

(14 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

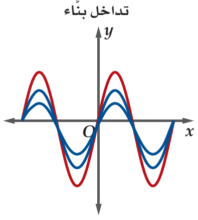
(15 $\tan(\theta + 45°) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

(16 إلكترونيات: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بنّاء، وبعكس ذلك يكون هدّامًا.

تداخل هدّام



تداخل بنّاء



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:
$y_1 = 10\sin(2t + 210°)$, $y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسِّر معناه بالنسبة للموجتين.
0، تداخل هدام

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

(17 $\tan 165°$ $\quad -2 + \sqrt{3}$

(18 $\sec 1275°$ $\quad \sqrt{2} - \sqrt{6}$

(19 $\sin 735°$ $\quad \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(20 $\tan\frac{23\pi}{12}$ $\quad -2 + \sqrt{3}$

(21 $\csc\frac{5\pi}{12}$ انظر الهامش.

(22 $\cot\frac{113\pi}{12}$ $\quad 2 - \sqrt{3}$

(23 بيِّن أنه يمكن كتابة المقدار $\dfrac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$، حيث A, θ زاويتان حادتان. انظر ملحق الإجابات.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–15، 19، 20، 25، 26، 29، 32–44
ضمن المتوسط	1–15 (فردي)، 16–22، 24، 25–29 (فردي)، 32–44
فوق المتوسط	16–44

24) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$.

a) جدوليًّا: أكمل الجدول. **b, c) انظر ملحق الإجابات.**

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$
45°	60°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
90°	30°	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

b) بيانيًّا: افترض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من: $y = \sin(x + x - 15°)$، $y = \sin x + \sin(x - 15°)$ على الشاشة نفسها.

c) تحليليًّا: حدّد ما إذا كانت $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسِّر إجابتك.

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: **25–28) انظر ملحق الإجابات.**

25) $\sin(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26) $\cos(A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27) $\sec(A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

28) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

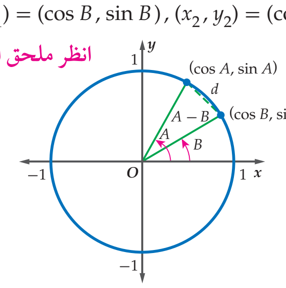
29) تبرير: بسِّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق. **$\sin(-2\theta)$**

$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$

انظر ملحق الإجابات.

30) تحدٍّ: اشتق المتطابقة $\cot(A+B)$ بدلالة $\cot A, \cot B$.

31) برهان: الشكل أدناه، يُبيّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة؛ لإيجاد قيمة d، حيث $(x_1, y_1) = (\cos B, \sin B)$، $(x_2, y_2) = (\cos A, \sin A)$ **انظر ملحق الإجابات.**



32) اكتب: استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام. **انظر إجابات الطلاب.**

33) مسألة مفتوحة: في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$. اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C. وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها. **انظر الهامش.**

مراجعة تراكمية

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين: (الدرس 3–1)

34) $\sin\theta \csc\theta - \cos^2\theta$ **$\sin^2\theta$**

35) $\cos^2\theta \sec\theta \csc\theta$ **$\cot\theta$**

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3–1)

36) $\sec\theta$، إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{2}$، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{\sqrt{5}}{2}$**

37) $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{3}$، $180° < \theta < 270°$ **$\frac{-\sqrt{5}}{3}$**

38) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{7}{12}$، $90° < \theta < 180°$ **$\frac{\sqrt{193}}{12}$**

39) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$، $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{7}}{4}$**

40) $\tan\theta$، إذا كان $8\cos\theta - 5 = 0$، $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ **$\frac{\sqrt{39}}{5}$**

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 3–2)

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$ **41, 42) انظر الهامش.**

42) $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \tan^2\theta$

تدريب على اختبار

43) ما القيمة الدقيقة للعبارة: **B**

$\sin(60° + \theta)\cos\theta - \cos(60° + \theta)\sin\theta$؟

A $\frac{1}{2}$ C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\sqrt{3}$

44) سؤال ذو إجابة قصيرة: إذا كان $\cos\theta + 0.3 = 0$، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot\theta$. **$\frac{3\sqrt{91}}{91}$**

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 24 المعلومات المنظمة في جدول، بالإضافة إلى الحاسبة البيانية لإثبات عدم صحة فرضية حول المتطابقات المثلثية.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب وضع قائمة بالزوايا التي تقع قياساتها بين: 360° و 0° والتي يستطيعون إيجاد نسبها المثلثية بسهولة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين وطرحهما. ثم اطلب إليهم الاحتفاظ بالقائمة؛ لتكون مرجعًا لهم عند التحضير للاختبارات.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 3–3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (49)

إجابات:

33) إجابة ممكنة:

$A = 35°, B = 60°, C = 85°$

$0.7002 + 1.7321 + 11.4301$

$\stackrel{?}{=} (0.7002)(1.7321)(11.4301)$

$13.86 = 13.86$ ✓

41) $\dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} \stackrel{?}{=} \cos\theta + \sin\theta$

$\sin\theta \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cos\theta \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=}$

$\cos\theta + \sin\theta$

$\cos\theta + \sin\theta = \cos\theta + \sin\theta$ ✓

42) $\sec\theta(\sec\theta - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos\theta}\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\tan^2\theta = \tan^2\theta$ ✓

تنويع التعليم

ضمن فوق

توسّع: أخبر الطلاب أن $\sin 20° \approx 0.3420$. واطلب إليهم أن يستعملوا هذه المعلومة لإيجاد كل من $\sin 65°$، $\cos 65°$. **0.9063, 0.42 26**

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون: دون المتوسط | ضمن: ضمن المتوسط | فوق: فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثيّة لمجموع زاويتين والفرق بينهما

متطابقات المجموع والفرق: تفيد الصيغ الآتية في إيجاد قيمة العبارات المثلثية لزوايا محددة مثل $sin\ 15°$، بمعرفة قيم الجيب وجيب التمام للزاويتين $60°$ و $45°$

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $sin(A+B) = sin A\ cos B + cos A\ sin B$	• $sin(A-B) = sin A\ cos B - cos A\ sin B$
• $cos(A+B) = cos A\ cos B - sin A\ sin B$	• $cos(A-B) = cos A\ cos B + sin A\ sin B$
• $tan(A+B) = \frac{tan A + tan B}{1 - tan A\ tan B}$	• $tan(A-B) = \frac{tan A + tan B}{1 - tan A\ tan B}$

مثال أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

a) $cos\ 345°$

$cos\ 345° = cos(300° + 45°)$

$= cos\ 300° \cdot cos\ 45° - sin\ 300° \cdot sin\ 45°$ متطابقة المجموع

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ عوّض

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ بسّط

b) $sin(-105°)$

$sin(-105°) = sin(45° - 150°)$

$= sin\ 45° \cdot cos\ 150° - cos\ 45° \cdot sin\ 150°$ متطابقة الفرق

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$ عوّض

$= -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ بسّط

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $sin\ 105°$ — $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) $cos\ 285°$ — $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

3) $cos(-75°)$ — $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) $cos(-165°)$ — $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

5) $sin\ 195°$ — $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

6) $cos\ 420°$ — $\frac{1}{2}$

7) $sin(-75°)$ — $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

8) $cos\ 135°$ — $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

9) $cos(-15°)$ — $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

10) $sin\ 345°$ — $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

11) $tan\ 15°$ — $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

12) $sin\ 495°$ — $\frac{\sqrt{2}}{2}$

الصف: الثالث الثانوي 14 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات إعادة التعليم (15) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: يمكن استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لإثبات صحة متطابقات مثلثية.

مثال 1 أثبت أن المعادلة: $cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right) = sin\ \theta$ تمثل متطابقة.

$cos\left(\theta + \frac{3\pi}{2}\right)$ الطرف الأيسر

$= cos\ \theta \cdot cos\frac{3\pi}{2} - sin\ \theta \cdot sin\frac{3\pi}{2}$ متطابقة المجموع

$= cos\ \theta . 0 - sin\ \theta . (-1)$ عوّض

$= sin\ \theta$ بسّط

مثال 2 أثبت أن المعادلة: $sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + cos(\theta + \pi) = -2\ cos\ \theta$ تمثل متطابقة.

$sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + cos(\theta + \pi)$ الطرف الأيسر

$= sin\ \theta \cdot cos\frac{\pi}{2} - cos\ \theta \cdot sin\frac{\pi}{2} + cos\ \theta \cdot cos\ \pi - sin\ \theta \cdot sin\ \pi$ متطابقتا المجموع والفرق

$= sin\ \theta \cdot 0 - cos\ \theta \cdot 1 + cos\ \theta \cdot (-1) - sin\ \theta \cdot 0$ عوّض

$= -2cos\ \theta$ بسّط

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

1) $sin(90° + \theta) = cos\ \theta$

$$sin(90° + \theta) = sin\ 90° \cdot cos\ \theta + cos\ 90° \cdot sin\ \theta$$
$$= 1 \cdot cos\ \theta + 0 \cdot sin\ \theta$$
$$= cos\ \theta$$

2) $cos(270° + \theta) = sin\ \theta$

$$cos(270° + \theta) = cos\ 270° \cdot cos\ \theta - sin\ 270° \cdot sin\ \theta$$
$$= 0 \cdot cos\ \theta - (-1) \cdot sin\ \theta$$
$$= sin\ \theta$$

3) $sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = sin\ \theta$

$$sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = sin\frac{2\pi}{3} \cdot cos\ \theta - cos\frac{2\pi}{3} \cdot sin\ \theta + cos\ \theta \cdot cos\frac{5\pi}{6} + sin\ \theta \cdot sin\frac{5\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot cos\ \theta - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot sin\ \theta + cos\ \theta\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + sin\ \theta \cdot \frac{1}{2}$$
$$= sin\ \theta$$

4) $cos\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right) - sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\ sin\ \theta$

$$cos\frac{3\pi}{4} \cdot cos\ \theta - sin\frac{3\pi}{4} \cdot sin\ \theta - \left(sin\ \theta \cdot cos\frac{\pi}{4} - cos\ \theta \cdot sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot cos\ \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot sin\ \theta - \left(sin\ \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - cos\ \theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{2}\ sin\ \theta$$

الصف: الثالث الثانوي 15 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

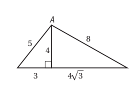
تدريبات حل المسألة (16) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

1) **فن:** صمَّم فنان لوحة فسيفساء، فوضع بلاطتين على شكل مثلثين قائمَي الزاوية معًا لصنع مثلث جديد، أبعاد إحدى البلاطتين 3 سم، و4 سم و5 سم، وأبعاد البلاطة الأخرى 4 سم، و$4\sqrt{3}$ سم و 8 سم كما في الشكل أدناه.



a) ما القيمة الدقيقة لجيب تمام الزاوية A؟

$\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$

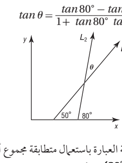
b) ما قياس الزاوية A؟

$96.9°$

c) هل المثلث الجديد المكون من المثلثين القائمين هو مثلث قائم الزاوية أيضًا؟

لا

2) **مسارات طائرات:** المستقيمان L_1, L_2 يمثلان مسارَي طائرتين، إذا أُعطي ظل الزاوية θ المبينة بالشكل أدناه بالعلاقة: $tan\ \theta = \frac{tan\ 80° - tan\ 50°}{1 + tan\ 80°\ tan\ 50°}$



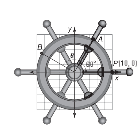
a) أعد كتابة العبارة باستعمال متطابقة مجموع أو فرق

$tan(80° - 50°)$

b) أوجد القيمة الدقيقة للعبارة في الفقرة a:

$tan\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) **سفن:** تعتمد دقة القيادة في السفينة على الزاوية التي يُدار بها مقود السفينة، حيث يتغير اتجاه حركة السفينة؛ تبعًا لتغير الزاوية؛ في الشكل أدناه تظهر زاوية دوران مقود السفينة، بحيث تنتقل النقطة A إلى النقطة B، إذا كانت إحداثيات B هي: $(10\ cos(\theta + 60°), 10\ sin(\theta + 60°))$



a) أعد كتابة الإحداثي x للنقطة B، بدلالة دالةٍ أو أكثر متغيرها θ

$5\ cos\ \theta - 5\sqrt{3}\ sin\ \theta$

b) أعد كتابة الإحداثي y للنقطة B، بدلالة دالةٍ أو أكثر متغيرها θ

$5\ sin\ \theta + 5\sqrt{3}\ cos\ \theta$

الصف: الثالث الثانوي 16 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

التدريبات الإثرائية (17) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-3 التدريبات الإثرائية

متطابقات الضرب للجيب وجيب التمام

عند جمع المتطابقات المثلثية لجيب مجموع زاويتين والفرق بينهما، نحصل على متطابقة جديدة هي:

$$sin(A+B) = sin A\ cos B + cos A\ sin B$$
$$sin(A-B) = sin A\ cos B - cos A\ sin B$$
$$(i) \quad sin(A+B) + sin(A-B) = 2\ sin A\ cos B$$

تفيد المتطابقة الجديدة في التحويل من حاصل ضرب دالتين مثلثيتين إلى صورة مجموع دالتين.

مثال اكتب $sin3\theta\ cos\theta$ في صورة مجموع.

افترض أن $A = 3\theta$ و $B = \theta$ في المتطابقة (i)؛ لذا فإن:

$2\ sin\ 3\theta\ cos\ \theta = sin(3\theta + \theta) + sin(3\theta - \theta)$. وعليه فإن:

$sin\ 3\theta\ cos\ \theta = \frac{1}{2} sin\ 4\theta + \frac{1}{2} sin\ 2\theta$

وعند طرح المتطابقتين $sin(A+B)$ و $sin(A-B)$

نحصل على متطابقة مشابهة لِـ (i)، تفيد في التحويل من حاصل الضرب إلى صورة الفرق بين نسبتين.

$$(ii) \quad sin(A+B) - sin(A-B) = 2\ cos A\ sin B$$

1) أوجد متطابقتين تفيدان في التحويل من حاصل الضرب $2\ cos A\ cos B$ وَ $2\ sin A\ sin B$، إلى صورة مجموع أو فرق باستعمال متطابقتَي $cos(A+B)$ وَ $cos(A-B)$.

$$2\ cos A\ cos B = cos(A+B) + cos(A-B)$$
$$2\ sin A\ sin B = cos(A-B) - cos(A+B)$$

2) أوجد قيمة: $sin\ 105°\ cos\ 75°$.

$$\frac{1}{2}[sin(105° + 75°) + sin(105° - 75°)] = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

3) عبّر عن $cos\ \theta\ sin\frac{\theta}{2}$ في صورة فرق.

$$2cos\ \theta\ sin\frac{\theta}{2} = sin\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right) - sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right)$$
$$cos\ \theta\ sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} sin\ 3\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} sin\frac{\theta}{2}$$

الصف: الثالث الثانوي 17 الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

كتاب التمارين (19) دون ضمن فوق

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
2) $\cos 375°$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
3) $\sin(-165°)$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
4) $\sin(-105°)$ $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
5) $\sin 150°$ $\frac{1}{2}$
6) $\cos 240°$ $-\frac{1}{2}$
7) $\sin 225°$ $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
8) $\sin(-75°)$ $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
9) $\sin 195°$ $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

10) $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$$\begin{aligned}\cos(180° - \theta) &= \cos 180° \cos\theta + \sin 180° \sin\theta\\ &= -1\cos\theta + 0\sin\theta\\ &= -\cos\theta\end{aligned}$$

11) $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$

$$\begin{aligned}\sin(360° + \theta) &= \sin 360° \cos\theta + \cos 360° \sin\theta\\ &= 0\cos\theta + 1\sin\theta\\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

12) $\sin(45° + \theta) - \sin(45° - \theta) = \sqrt{2}\sin\theta$

$$\begin{aligned}&\sin(45° + \theta) - \sin(45° - \theta)\\ &= \sin 45° \cos\theta + \cos 45° \sin\theta - (\sin 45° \cos\theta - \cos 45° \sin\theta)\\ &= 2 \cdot \cos 45° \sin\theta\\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\theta\\ &= \sqrt{2}\sin\theta\end{aligned}$$

13) $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$

$$\begin{aligned}&\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\\ &= \cos x \cos\frac{\pi}{6} + \sin x \sin\frac{\pi}{6} + \sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\\ &= \sin x\end{aligned}$$

14) **الطاقة الشمسية:** في 21 من شهر مارس، تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير: $E \sin(90° - \phi)$، حيث ϕ خط العرض الجغرافي للموقع، و E مقدار ثابت. استخدم صيغة النسب المثلثية للفرق بين الزوايا لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $(\cos\phi)$ للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ. $E\cos\phi$

15) **كهرباء:** تُحدّد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة: $c = 2\sin(120t)$ بعد t ثانية.

إجابة ممكنة:

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين. $c = 2\sin(90t + 30t)$

b) استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ ثانية.

$\sqrt{3}$ أمبير

19

الفصل الثالث المتطابقات والمعادلات المثلثية

ملحوظات المعلم

الدروس من 3-1 إلى 3-3

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (51).

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-3

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 3-1)

1) $\csc\theta \cot\theta \sec\theta$ **$\csc\theta$**

2) $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ **1**

3) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$ **$\cos\theta$**

4) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$ **1**

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3-1)

5) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{4}{5}$**

6) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{1}{2}$، $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{5}}{2}$**

7) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{\sqrt{7}}{3}$**

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$؟ (الدرس 3-1) **D**

A $\cos\theta$ C $\tan\theta$

B $\csc\theta$ D $\sec\theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 3-2)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله. **$11.5°$ تقريبًا**

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟ **4m/s تقريبًا**

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-2) **(10-13) انظر ملحق الإجابات.**

10) $\cot^2\theta + 1 = \frac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

11) $\frac{\cos\theta \csc\theta}{\cot\theta} = 1$

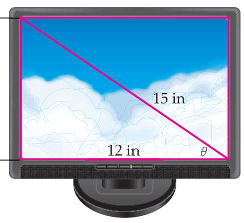
12) $\frac{\sin\theta \tan\theta}{1-\cos\theta} = (1+\cos\theta)\sec\theta$

13) $\tan\theta(1-\sin\theta) = \frac{\cos\theta \sin\theta}{1+\sin\theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 3-1)

a) أوجد قيمة h. **9 in**

b) بيِّن أن $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **انظر ملحق الإجابات.**



أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-2) **(15-17) انظر ملحق الإجابات.**

15) $\frac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$

16) $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

17) $\cot\theta(1-\cos\theta) = \frac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1+\cos\theta}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 3-3)

18) $\cos 105°$ **$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$**

19) $\sin(-135°)$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

20) $\tan 15°$ **$2-\sqrt{3}$**

21) $\cot 75°$ **$2-\sqrt{3}$**

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$؟ (الدرس 3-3) **C**

A $\sqrt{2}$ C $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) أثبت أن المعادلة الآتية تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-2)

$\cos 30° \cos\theta + \sin 30° \sin\theta = \sin 60° \cos\theta + \cos 60° \sin\theta$

انظر ملحق الإجابات.

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-3 , 3-2 , 3-1	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (134)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما. (الدرس 3-3)

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v ، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D ، وأقصى ارتفاع H :

$D = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta,\ H = \frac{v^2}{2g}\sin^2\theta$ ، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة ، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 30

مثال 1 — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، فإننا نجد $\cos\theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ؛ لإيجاد $\cos\theta$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ — اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos\theta$ موجب أي $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ — $\sin\theta = \frac{2}{3},\ \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ — اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$. $\frac{-4\sqrt{2}}{9}$

3-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 3-4

إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

الدرس 3-4

إيجاد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

إيجاد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

ما بعد الدرس 3-4

حل معادلات مثلثية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الفرق بين $\sin 2\theta$ و $\sin^2\theta$؟ فسّر إجابتك. $\sin 2\theta$ تمثّل جيب الزاوية التي تساوي مثلي الزاوية θ، في حين تمثل $\sin^2\theta$ مربّع قيمة $\sin\theta$.
- هل التعبير عن $\frac{H}{D}$ بصورة دالة بدلالة θ يتضمن المتغير v؟ لا، عند التبسيط، يمكن اختصار $\frac{v^2}{v^2} = 1$.
- هل تتضمن العبارة $\frac{H}{D}$ المتغير g؟ فسّر إجابتك. لا، قيمة $\frac{1}{2g} \div \frac{1}{g}$ هي $\frac{1}{2}$ ؛ لذا لا يحتوي التعبير على المتغير g.

مصادر الدرس 3-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (152)	• تنويع التعليم ص (152)	• تنويع التعليم ص (154)
كتاب التمارين	• ص (20)	• ص (20)	• ص (20)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

مثـال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $0° < \theta < 90°$ ؛ $\sin\theta = \frac{2}{3}$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\sin\theta, \cos\theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ ، $\sin\theta = \frac{2}{3}$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ تعريف دالة الظل

$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ ، $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ بالقسمة وإنطاق المقام

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ متطابقة ضعف الزاوية

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$ ، $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}}$ ربّع المقام

$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$ بسّط

$= \frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{1} = 4\sqrt{5}$ ، $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $90° < \theta < 180°$ ؛ $\cos\theta = -\frac{1}{3}$:

2A) $\cos 2\theta$ $-\frac{7}{9}$

2B) $\tan 2\theta$ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin(A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ ، أو $\sin 2\theta$ ، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos(A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ ، أو $\cos 2\theta$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

المثالان 2 ,1 يبيّنان كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لعبارة ما باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 2\theta$ إذا كان $0 < \theta < 90°$ ؛ $\sin\theta = \frac{3}{4}$.
-0.125

2 أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي، علمًا بأن $0° < \theta < 90°$ ؛ $\cos\theta = \frac{4}{5}$.

a) $\tan 2\theta$ $\frac{24}{7}$

b) $\sin 2\theta$ $\frac{24}{25}$

إرشادات للمعلم الجديد

الحسّ الرياضي: ذكّر الطلاب بالمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$، وأن هناك صيغتين أخريين نحصل عليهما من هذه المتطابقة وذلك بطرح $\sin^2\theta$ أو $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين. وذكّرهم أيضًا أن $\cos2\theta$ ثلاث صيغ؛ وذلك لوجود 3 صيغ مختلفة للمتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون قدِّم في هذا الدرس آخر المتطابقات المثلثية في هذا الفصل. وزّع الطلاب في مجموعات صغيرة، واطلب إليهم عمل بطاقات لجميع المتطابقات، وكتابة طرف المتطابقة الأيسر على بطاقة وطرفها الأيمن على بطاقة أخرى، ثم يقومون بخلط البطاقات، ووضعها مقلوبة على الطاولة، ثم اطلب إليهم أن يلعبوا لعبة الذاكرة بقلب البطاقات حتى الحصول على طرفي كل متطابقة.

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin\theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	استعمل متطابقة فيثاغورس
$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$	$\sin\theta = -\frac{4}{5}$
$\cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$	$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$
$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$	اطرح
$\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	متطابقة نصف الزاوية
$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}$	$\cos\theta = -\frac{3}{5}$
$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$	بسّط
$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ و $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ و $135°$. إذن، $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos 67.5°$. $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.007\sin^2 L$

$\cos 67.5° = \cos\frac{135°}{2}$	$67.5° = \frac{135°}{2}$
$= \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$، $67.5°$ في الربع الأول، فالقيمة موجبة
$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$	$1 = \frac{2}{2}$
$= \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}}$	اطرح
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}}$	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$
$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$	اضرب
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	بسّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin\frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin\theta = \frac{2}{3}$، θ تقع في الربع الثاني. $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

المحتوى الرياضي

اشتقاق الصيغ: تُعَدُّ صيغ الدوال المثلثية لضعف الزاوية حالات خاصة من الصيغ التي تم دراستها في الدرس السابق. ويمكن الحصول على صيغ الدوال المثلثية لضعف الزاوية من خلال افتراض تساوي قيمتي الزاويتين A ، B في الصيغ المثلثية لمجموع زاويتين.

متطابقات نصف الزاوية

مثال 3 يبيِّن كيفية استعمال متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة للدّالة المثلثية لزاوية موجودة في ربع محدد.

مثال 4 يبيِّن كيفية تبسيط معادلة تحتوي على عبارات مثلثية.

مثال 5 يبيِّن كيفية إثبات صحة متطابقات مثلثية باستعمال متطابقات النسب المثلثية لضعف الزاوية.

مثال إضافي

3 a) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\cos\frac{\theta}{2}$، علمًا أن $\sin\theta = \frac{3}{5}$، θ تقع في الربع الثاني. $\sqrt{\frac{1}{10}}$ أو $\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 165°$. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

تنبيه!

تجنب الأخطاء: ركز على "إرشادات للدراسة" الموجودة في الهامش بجانب المثال 3، حيث إن معرفة الإشارة المناسبة للجواب في بداية الحسابات تساعد بعض الطلاب على تجنّب نسيان هذه الخطوة عند الانتهاء من حساباتهم.

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي: وزِّع الطلاب في مجموعات، وزوّد كل مجموعة بمسألة تتناول إما متطابقات ضعف الزاوية أو متطابقات نصف الزاوية. واطلب إلى كل مجموعة تسجيل عرضٍ مرئي يبينون خلاله كيفية اختيار الصيغة المناسبة لحل المسألة، محاولًا تنويع مسائل الطلاب قدر الإمكان.

مثال 4 من واقع الحياة التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta} \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}} \quad \text{بسِّط كلًا من البسط والمقام}$$

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta} \quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta} \quad \text{بسِّط}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta} \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{بسِّط}$$

$$= \frac{1}{4}\tan\theta \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

الربط مع الحياة

نافورة الملك فهد هي أحد معالم الجمال في مدينة جدة، فقد أقيمت على جزيرة قرابة الشاطئ، وتضخ الماء رأسيًا إلى ارتفاع 312m .

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض.

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.007\sin 2L$

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45°$. 980.578

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت أن المعادلة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$ تمثّل متطابقة.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} \quad \text{الطرف الأيمن}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \quad \text{اضرب كلًا من البسط والمقام في } \sin\theta$$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} \quad \text{اضرب في } \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta} \quad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \checkmark \quad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta;\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$$

وهو الطرف الأيسر؛ أي أن المعادلة تمثّل متطابقة.

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$. انظر الهامش.

مثالان إضافيان

4 **نافورة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. وأوجد $\frac{D}{H}$.
$\frac{4}{\tan\theta}$ أو $4\cot\theta$

5 أثبت أن المعادلة $\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) = \sin^3\theta$ تمثل متطابقة.

$$\sin\theta(\cos^2\theta - \cos 2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$$
$$\sin\theta[\cos^2\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)] \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$$
$$\sin\theta(\cos^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$$
$$\sin\theta(\sin^2\theta) \stackrel{?}{=} \sin^3\theta$$
$$\sin^3\theta = \sin^3\theta \checkmark$$

إجابة (تحقق من فهمك):

5)
$$4\cos^2 x - \sin^2 2x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$$
$$4\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$$
$$4\cos^2 x(1 - \sin^2 x) \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$$
$$4\cos^2 x\cos^2 x \stackrel{?}{=} 4\cos^4 x$$
$$4\cos^4 x = 4\cos^4 x \checkmark$$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب كتابة $\sin 4\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$.

إجابة ممكنة: $\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta$

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ إذا كان: (الأمثلة 1-3) **(1-7) انظر الهامش.**

1) $\sin\theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin\theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos\theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan\theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin\theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin\theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan\theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin\frac{\pi}{8}$ $\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

9) $\cos 15°$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

10) $\sin 75°$ $\quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

11) $\tan 165°$ $\quad -\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

12) $\tan\frac{5\pi}{12}$ $\quad \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s. إذا كان المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسِّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. $d = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟ **81 ft تقريبًا**

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (مثال 5) **(14-15) انظر الهامش.**

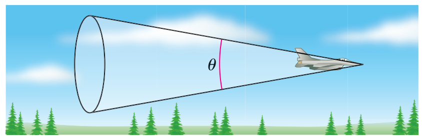
14) $\tan\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$ **(16-17) انظر ملحق الإجابات.**

17) $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام. **a)** $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1}{M}$

b) إذا كان $\cos\theta = \frac{17}{18}$، فاستعمل العبارة التي وجدتها في **a** لحساب قيمة عدد ماخ. **6**

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0\sin t\theta$، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = I_0^2 R\sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$. $P = \frac{1}{2}I_0^2R - \frac{1}{2}I_0^2R\cos 2t\theta$

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها 95 ft/s. برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° + A, \theta = 45° - A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13. **انظر ملحق الإجابات.**

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$، إذا كان:

21) $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$ $\quad \frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

22) $\sin\theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{7}$

23) $\tan\theta = -3; 90° < \theta < 180°$ $\quad -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

24) $\sec\theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$ $\quad \frac{-3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}, -3\sqrt{7}$

25) $\cot\theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$ $\quad \frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{12}{5}$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية. **انظر ملحق الإجابات.**

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

b) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (a) لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

c) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًا في الفترة $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

d) **تحليليًا:** اعتمد على التمثيل البياني في (c) لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًا.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة من 17–1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 26 التمثيل البياني لإيجاد متطابقات مثلثية وذلك باستعمال الحاسبة البيانية.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	17–1، 20، 22، 25، 27، 44–29
ضمن المتوسط	17–1 (فردي)، 26–18 (زوجي)، 27، 44–29
فوق المتوسط	44–18

إجابات:

1) $\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}$

2) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$

3) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

4) $\frac{-240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

5) $\frac{-4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{6}, \frac{\sqrt{6}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{6}$

6) $\frac{240}{289}, -\frac{161}{289}, \frac{5\sqrt{34}}{34}, -\frac{3\sqrt{34}}{34}$

7) $\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}, \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

14)

$$\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \tan\theta \checkmark$$

15)

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \tan\frac{\theta}{2} \checkmark$$

تنبيه!

اكتشف الخطأ: يتعين على الطلاب في السؤال 27 أن يعرفوا أن سعيدًا أخطأ عندما عوض عن $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ بـ $\frac{\sqrt{4}}{4}$، كما أن سلمان أخطأ أيضًا عندما عوض عن $\cos 30°$ بـ $\frac{1}{2}$ بدلًا من $\frac{\sqrt{3}}{2}$؛ لذا بيّن للطلاب أن الخطوتين $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$، $\sin 15° = \sin \frac{30°}{2}$ صحيحتان. ولكن خطوة سعيد الرابعة يجب أن تكون $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$، وخطوات سلمان بعد السطر الأول يجب أن تكون

$$\sin \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب توضيح كيفية تحديد إن كانت المسألة تتضمن استعمال المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية أو المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 4–3 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (50)

مسائل مهارات التفكير العليا

انظر ملحق الإجابات

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لـ $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ برِّر إجابتك.

سعيد

$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

$\sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{4}}{4}$

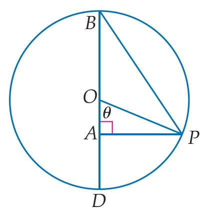
سلمان

$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$

$= 0.5$

28) **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها، لتبرهن أن: انظر الهامش
$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



29) **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$. انظر ملحق الإجابات.

30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\sin 2\theta$، واستعمل الصيغة $\cos(A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$. انظر ملحق الإجابات

31) **تبرير:** اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية. انظر ملحق الإجابات.

32) **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32 \text{ ft/s}^2)$ انظر الهامش

مراجعة تراكمية

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: (الدرس 3–2) انظر الهامش

33) $\cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

34) $\sin^2 \theta + \tan^2 \theta = (1 - \cos^2 \theta) + \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta}$

35) $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 3–3)

36) $\sin 135°$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

37) $\cos 105°$ $\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

38) $\sin 285°$ $\quad \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

39) $\cos 210°$ $\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}$

40) $\sin(-240°)$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

41) $\cos(-120°)$ $\quad -\frac{1}{2}$

42) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 78° \cos 18° + \sin 78° \sin 18°$. (الدرس 3–3) $\frac{1}{2}$

تدريب على اختبار

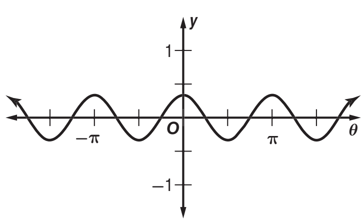
43) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 < \theta < 90°$. A

للتوضيح انظر ملحق الإجابات

A $2 - \sqrt{3}$ C $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B $\sqrt{3} - 2$ D $\sqrt{3}$

44) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي: B



A $y = 3 \cos 2\theta$ C $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$ D $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

إجابات:

28) الزاوية $\angle PBD$ هي زاوية محيطية تقابل القوس نفسه الذي تقابله الزاوية المركزية $\angle POD$؛ لذا فإن $m\angle PBD = \frac{1}{2} m\angle POD$، وباستعمال المثلث القائم، تجد أن

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{PA}{BA} = \frac{PA}{1 + OA} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

32) $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$

وتكون أكبر قيمة للمقدار $\frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$ عندما $\sin 2\theta = 1$ ويتحقق هذا عندما $2\theta = 90°$ وبالتالي فإن $\theta = 45°$

33)

$\cot \theta + \sec \theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

$\cot \theta + \sec \theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

$\cot \theta + \sec \theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$

$\cot \theta + \sec \theta = \cot \theta + \sec \theta$

34)

$\sin^2 \theta + \tan^2 \theta \stackrel{?}{=} (1 - \cos^2 \theta) + \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta}$

$\sin^2 \theta + \tan^2 \theta \stackrel{?}{=} \sin^2 \theta + \frac{\sec^2 \theta}{\csc^2 \theta}$

$\sin^2 \theta + \tan^2 \theta \stackrel{?}{=} \sin^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} \div \frac{1}{\sin^2 \theta}$

$\sin^2 \theta + \tan^2 \theta \stackrel{?}{=} \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

$\sin^2 \theta + \tan^2 \theta \stackrel{?}{=} \sin^2 \theta + \tan^2 \theta$ ✓

35)

$(\sin \theta - \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin \theta \cos \theta$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin \theta \cos \theta$

$1 - 2\sin \theta \cos \theta \stackrel{?}{=} 1 - 2\sin \theta \cos \theta$ ✓

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 3

دون المتوسط | ضمن المتوسط | فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) دون

الاسم: ____________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات إعادة التعليم

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثيّة لضعف الزاوية:

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية	المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ، $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ، $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ ، $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$

مثال أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$، إذا كان: $\sin\theta = -\frac{9}{10}$، حيث $180° < \theta < 270°$

الخطوة 1: استعمل المتطابقة: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$؛ لإيجاد $\cos\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{9}{10}\right)^2$ — $\sin\theta = -\frac{9}{10}$

$\cos^2\theta = \frac{19}{100}$ — اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{19}}{10}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos\theta$ سالب، وعليه فإن: $\cos\theta = -\frac{\sqrt{19}}{10}$

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$، باستعمال المتطابقة: $\sin^2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta = 2\left(-\frac{9}{10}\right)\left(-\frac{\sqrt{19}}{10}\right) = \frac{9\sqrt{19}}{50}$$

وتكون قيمة $\sin 2\theta$ هي $\frac{9\sqrt{19}}{50}$

الخطوة 3: أوجد قيمة $\cos 2\theta$ باستعمال المتطابقة: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2\left(-\frac{9}{10}\right)^2 = -\frac{31}{50}$$

فتكون قيمة $\cos 2\theta$ هي $-\frac{31}{50}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$، وَ $\cos 2\theta$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $\sin\theta = \frac{1}{4}, 0° < \theta < 90°$ — $\mathbf{\frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}}$

2) $\sin\theta = -\frac{1}{8}, 270° < \theta < 360°$ — $\mathbf{-\frac{3\sqrt{7}}{32}, \frac{31}{32}}$

3) $\cos\theta = -\frac{3}{5}, 180° < \theta < 270°$ — $\mathbf{\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}}$

4) $\cos\theta = -\frac{4}{5}, 90° < \theta < 180°$ — $\mathbf{-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}}$

5) $\sin\theta = -\frac{3}{5}, 270° < \theta < 360°$ — $\mathbf{-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}}$

6) $\cos\theta = -\frac{2}{3}, 90° < \theta < 180°$ — $\mathbf{-\frac{4\sqrt{5}}{9}, -\frac{1}{9}}$

الصف: الثالث الثانوي — 18 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات إعادة التعليم (19) دون

الاسم: ____________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

المتطابقات المثلثيّة لنصف الزاوية:

المتطابقات المثلثيّة لنصف الزاوية	المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها. $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}, \cos\theta \neq -1$

مثال أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$، إذا كان $\sin\theta = \frac{2}{3}$، $90° < \theta < 180°$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ — $\sin\theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2\theta = \frac{5}{9}$ — بسّط

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ — متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)}{2}}$ — $\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$ — بسّط

$= \pm\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$ — أنطق المقام

لّما كانت θ تقع بين $90°$ و $180°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $45°$ و $90°$؛ لذا يكون $\sin\frac{\theta}{2}$ موجبًا ويساوي $\frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}$

تمارين

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ لكلٍّ مما يأتي:

1) $180° < \theta < 270°, \cos\theta = -\frac{3}{5}$ — $\mathbf{\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}}$

2) $90° < \theta < 180°, \cos\theta = -\frac{4}{5}$ — $\mathbf{\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}}$

3) $270° < \theta < 360°, \sin\theta = -\frac{3}{5}$ — $\mathbf{\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}}$

4) $90° < \theta < 180°, \cos\theta = -\frac{2}{3}$ — $\mathbf{\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\cos\left(22\frac{1}{2}\right)°$ — $\mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

6) $\sin 67.5°$ — $\mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

7) $\cos\frac{7\pi}{8}$ — $\mathbf{-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

الصف: الثالث الثانوي — 19 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

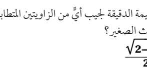
تدريبات حل المسألة (20) دون ضمن فوق

الاسم: ____________ التاريخ: ________

3-4 تدريبات حل المسألة

المتطابقات المثلثيّة لضعف الزاوية ونصفها

1) **هندسة:** المثلث الكبير الموضح في الشكل أدناه هو مثلث متطابق الساقين وقائم الزاوية، ورُسم المثلث الصغير الموجود بداخله عن طريق تنصيف زاويتَي قاعدة المثلث المتطابق الساقين القائم الزاوية.



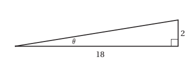
a) ما القيمة الدقيقة لجيب أيٍّ من الزاويتين المتطابقتين للمثلث الصغير؟ $\mathbf{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

b) ما القيمة الدقيقة لجيب التمام لأيٍّ من الزاويتين المتطابقتين للمثلث الصغير؟ $\mathbf{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

c) ما القيمة الدقيقة لجيب زاوية رأس المثلث الصغير؟ $\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

d) ما القيمة الدقيقة لجيب التمام لزاوية رأس المثلث الصغير؟ $\mathbf{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

2) **منحدر:** يمثل الشكل أدناه طريقَ منحدرٍ لتحميل البضائع في الشاحنات، وقد تم بناؤه بصورة غير صحيحة بالأبعاد الموضحة، إذ يتعين أن يكون قياس زاوية المنحدر ضعف قياس الزاوية الموجودة في الشكل.



a) أوجد القيمة الدقيقة لجيب زاوية المنحدر التي يتعين أن تُصنع مع الأرض وجيب تمامها. $\mathbf{\frac{9}{41}, \frac{40}{41}}$

b) إذا بُنيَ المنحدر بصورةٍ صحيحةٍ، فما قياس الزاويتين الحادتين؟ **12.7° , 77.3° تقريبًا**

الصف: الثالث الثانوي — 20 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

التدريبات الإثرائية (21) فوق

الاسم: ____________ التاريخ: ________

3-4 التدريبات الإثرائية

المتطابقات المثلثيّة لمضاعفات الزوايا

يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية التي درستها؛ لإيجاد صيغ متطابقات مثلثية لمضاعفات الزوايا.

مثال أثبت أن المعادلة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ تمثل متطابقة.

$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta)$ — $3\theta = 2\theta + \theta$

$= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$ — متطابقة مجموع

$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\sin\theta$ — متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$ — توزيع الضرب على الجمع

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$ — $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$ — توزيع الضرب على الجمع

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ ✓ — بسّط

تمارين

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثل متطابقة:

1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\boldsymbol{\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta \cos\theta + (1-2\sin^2\theta)\sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 2\sin\theta(1-\sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3 0} ✓$$

2) $\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

$$\boldsymbol{\tan 3\theta = \tan(2\theta+\theta) = \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta\tan\theta} = \frac{\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\tan\theta} = \frac{2\tan\theta + \tan\theta - \tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^3\theta}} ✓$$

3) $\cos 4\theta = 2\cos^2(2\theta) - 1$

$$\boldsymbol{\cos 4\theta = \cos 2 \cdot 2\theta = 2\cos^2(2\theta) - 1} ✓$$

4) $\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$

$$\boldsymbol{\sin 3\theta = \sin(2\theta+\theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta = 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta + (2\cos^2\theta-1)\sin\theta = \sin\theta(2\cos^2\theta + 2\cos^2\theta - 1) = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)} ✓$$

5) $\cos^3\theta = \frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4}$

$$\boldsymbol{\frac{3\cos\theta + \cos 3\theta}{4} = \frac{3\cos\theta + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{4} = \frac{4\cos^3\theta}{4} = \cos^3\theta} ✓$$

الصف: الثالث الثانوي — 21 — الفصل 3: المتطابقات والمعادلات المثلثية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 3

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (20) دون ضمن فوق

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان:

1) $\cos \theta = \frac{5}{13}; 0° < \theta < 90°$
$\frac{120}{169}, -\frac{119}{169}, \frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}$

2) $\sin \theta = \frac{8}{17}; 90° < \theta < 180°$
$-\frac{240}{289}, \frac{161}{289}, \frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}$

3) $\cos \theta = \frac{1}{4}; 270° < \theta < 360°$
$-\frac{\sqrt{15}}{8}, -\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{10}}{4}$

4) $\sin \theta = -\frac{2}{3}; 180° < \theta < 270°$
$\frac{4\sqrt{5}}{9}, \frac{1}{9}, \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}}}{6}, -\frac{\sqrt{18-6\sqrt{5}}}{6}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\tan 105°$
$-2-\sqrt{3}$

6) $\tan 15°$
$2-\sqrt{3}$

7) $\cos 67.5°$
$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$
$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta - \sin \theta}{2 \tan \theta}$

$$\frac{\tan \theta - \sin \theta}{2\tan \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta}{2\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{2\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{\sin \theta (1-\cos \theta)}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{1-\cos \theta}{2} = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

10) $\sin 4\theta = 4 \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta$

$$\begin{aligned} &\sin 4\theta \\ &= \sin 2(2\theta) \\ &= 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \\ &= 2(2 \sin \theta \cos \theta)(\cos 2\theta) \\ &= 4 \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

11) **صور جوية:** في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور الفيلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0 \cos^4 \theta$ ، حيث θ الزاوية بين الخط العامودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 درجة الوضوح للنقطة الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ في إثبات أن:
$E_0 \cos^4 \theta = E_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0(\cos^2 \theta)^2 = E_0(1-\sin^2 \theta)^2$$

$$= E_0\left(1 - \frac{2\sin^2 \theta}{2}\right)^2 = E_0\left(1 - \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 = E_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

الفصل الثالث
المتطابقات والمعادلات المثلثية

20

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

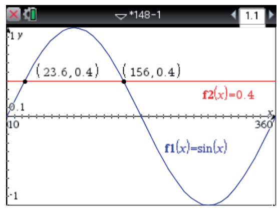
استكشاف 3-5

معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5 الإعدادات ومنها 2: إعدادات المستند... ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1(x) = \sin x, f2(x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on trig sin x enter tab 0.4 enter

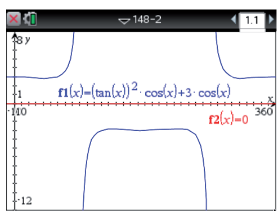
- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4: تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة وحدد القيمة الصغرى لـ x بـ $0°$ ، والقيمة العظمى لـ x بـ $360°$، كذلك حدد القيمة الصغرى لـ y بـ -1 ، والقيمة العظمى لـ y بـ 1

الخطوة 2: تحديد الحلول

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 4: نقاط التقاطع ، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \le x < 360°$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 23.6°$, $x \approx 156.0°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1: تمثيل الدالتين بيانيًّا

- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x, f2(x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on (trig tan x ^ 2 ▶ ▶ trig cos x + 3 trig cos x enter tab 0 enter

الخطوة 2: تحديد الحلول

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7 ; 0° \le x < 360°$ **$44.4°, 135.6°$**

2) $\tan x = \cos x ; 0° \le x < 360°$ **$38.17°, 141.8°$**

3) $3 \cos x + 4 = 0.5 ; 0° \le x < 360°$ **لا يوجد حلول حقيقية**

4) $0.25 \cos x = 3.4 ; -720° \le x < 720°$ **لا يوجد حلول حقيقية**

5) $\sin 2x = \sin x ; 0° \le x < 360°$ **$0°, 60°, 180°, 300°$**

6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0 ; -360° \le x < 360°$ **$-360°, -180°, 0°, 180°$**

استكشاف 3-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف: استعمال الحاسبة البيانية لحل المعادلات المثلثية.

المواد اللازمة

الآلة الحاسبة البيانية TI — nspire .

إرشادات التدريس

في النشاط 1 يمكن إيجاد الحلول التقريبية باستعمال ميزة Trace. وعلى أية حال فإن ميزة Intersection Point (s) تعطي حلولًا أكثر دقة في معظم المواقف. ذكّر الطلاب باستعمال الأوامر المناسبة لتمثيلاتهم.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية متفاوتة القدرات يساعد بعضهم بعضًا على تصحيح أخطاء الضغط على المفاتيح، ثم اطلب إليهم إكمال تنفيذ النشاطين 1, 2 وحل التمرين 1.

واسأل:

- كيف ترتبط حلول المعادلات بنقط تقاطع المنحنيات؟ الحلول هي قيم x لنقط التقاطع.
- كيف يمكنك أن تحدّد عدم وجود حل للمعادلة؟ منحنيا f1 و f2 لا يتقاطعان.

تدريب. اطلب إلى الطلاب حل التمارين 6–2.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل السؤال 6 لتقويم مدى فهم الطلاب لطريقة تأثير فترات قيم x في الحلول.

من المحسوس إلى المجرد

أسأل الطلاب حول الطريقة التي يؤثر فيها تحديد فترة مختلفة أو عدم وجود فترة في حلول التمارين 6–1.

157 استكشاف 3-5 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية

3-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 5-3

إثبات صحة متطابقات مثلثية.

الدرس 5-3

حل معادلات مثلثية.

تمييز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

ما بعد الدرس 5-3

استعمال حساب المثلثات لحل مسائل من واقع الحياة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المسافة التي تقطعها نقطة على العجلة في الدورة الواحدة؟ 40π أو 125.66 مترًا تقريبًا.
- ما المسافة التي يقطعها أيُّ موقع على العجلة في دقيقة واحدة؟ 60π، أو 188.5 مترًا تقريبًا.
- ما قيمة $20 \cos 3\pi t$ عندما $t = 0$؟ 20

3-5 حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية. (الدروس من 3–2 إلى 3–4)

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:
$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية : درست نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$، إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

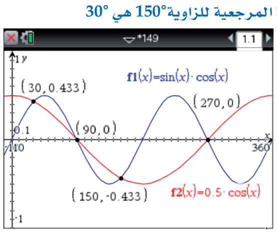
$\cos\theta\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلّل

$\cos\theta = 0$ أو $\sin\theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ الزاوية المرجعية للزاوية $150°$ هي $30°$

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$



التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin\theta\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}\cos\theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقاط، ولكننا نهتم بالنقاط الموجودة في الفترة بين $0°$ وَ $180°$ فقط.

b) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin\theta - 2)(2\sin\theta + 1) = 0$ حلّل

$2\sin\theta + 1 = 0$ أو $\sin\theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2\sin\theta = -1$ ، $\sin\theta = 2$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\sin\theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin\theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

مصادر الدرس 5 – 3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (160)	• تنويع التعليم ص (160)	
كتاب التمارين	• ص (21)	• ص (21)	• ص (21)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

التحقق:

$$2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0 \qquad\qquad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$

$$2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0 \qquad 2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0 \qquad 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0 \qquad \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \checkmark \qquad 0 = 0 \checkmark$$

تحقق من فهمك

1A) حُلَّ المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

1B) $\sin^2\theta + 2\cos^2\theta = 4$ لا يوجد حل

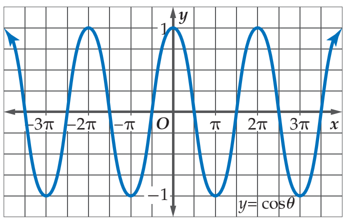
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0, 2\pi]$ بالراديان، أو $[0°, 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك ، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلَّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\cos\theta + 1 = 0$$
$$\cos\theta = -1$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي ... $\pi, 3\pi, 5\pi$، وكذلك ... $-\pi, -3\pi, -5\pi$ ، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π . طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$ ؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

تحقق من فهمك

2A) حُلَّ المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُلَّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حلّ مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على −20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

(2A $\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ حيث k أي عدد صحيح

(2B $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلات المثلثية:

مثال 1 يبيِّن كيفية حل المعادلات المثلثية في فترة معينة.

مثال 2 يبيِّن كيفية حل المعادلات المثلثية لزوايا بالراديان.

مثال 3 يبيِّن كيفية حل مسائل من واقع الحياة تتضمن معادلات مثلثية.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 a) حل المعادلة $2\cos^2\theta - 1 = \sin\theta$ إذا كانت $0° \le \theta \le 180°$. $30°, 150°$

b) حل المعادلة $\sin\theta\cos\theta = \cos^2\theta$ إذا كان: $0 \le \theta \le 2\pi$ $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$

2 a) حل المعادلة $2\tan x - \sqrt{3} = \tan x$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

b) حل المعادلة $2\cos\theta = -1$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ، حيث k هو أيّ عدد صحيح.

3 **مدينة الألعاب:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس. بعد كم من الزمن سيكون ارتفاع العجلة الدوّارة على بعد $(21 + 10\sqrt{2})$ مترًا عن سطح الأرض، بدءًا من دورانها لأول مرة؟

$10\sqrt{2} + 21 = 21 - 20\cos 3\pi t$;

$10\sqrt{2} = -20\cos 3\pi t$;

$-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 3\pi t$;

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\pi t$

$\frac{3}{4}\pi = 3\pi t$

$\frac{1}{4} = t$

$\frac{1}{4}$ دقيقة، أو 15 ثانية.

إرشادات للمعلم الجديد

تبرير يوضح المثال 2 كيفية البحث عن أنماط في الحل؛ لذا اطلب إلى الطلاب البحث عن أزواجٍ من الحلول يكون الفارق بينها إما π وإما 2π.

حلول دخيلة

مثال 4 يبيِّن كيفية حل معادلة مثلثية، واختبار إن كان لها حلول دخيلة أم لا.

مثال إضافي

4 حل المعادلة الآتية: $\cos\theta = 1 - \sin\theta$ إذا كان: $0° \leq \theta \leq 360°$

$0°, 90°, 360°$

المحتوى الرياضي

عدد لا نهائي من الحلول: العديد من المعادلات المثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول، وإذا لم يكن هنالك فترة لتحديد عدد الحلول فيجب التعبير عن العدد اللانهائي من الحلول باستعمال التعبير عن الحلول بوصفه مضاعفات. وعندما يوجد الحل لكل دورة كاملة حول نقطة الأصل، فإن الحلول جميعها تكتب على الصيغة: $a° + k \cdot 360°$؛ حيث k هي أيّ عدد صحيح.

التعليم باستعمال التقنيات

مدوَّنة اطلب إلى الطلاب كتابة مدوّنة حول كيفية حل المعادلات المثلثية، واطلب إليهم أيضًا وصف كيف تشبه هذه العملية حل الأنواع الأخرى من المعادلات وكيف تختلف عنها.

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ — k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ — $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ — اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟ **20 ثانية تقريبًا**

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \leq \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ — المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ — ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ — $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ — بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta\,(1 + \cos\theta)$ — حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ — خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 180° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 180° \\ 0 &\stackrel{?}{=} 1 + (-1) \\ 0 &= 0 \ ✓ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 90° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 90° \\ 1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ 1 &= 1 \ ✓ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 1 + \cos\theta \\ \sin 270° &\stackrel{?}{=} 1 + \cos 270° \\ -1 &\stackrel{?}{=} 1 + 0 \\ -1 &\neq 1 \ ✗ \end{aligned}$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$ **متطابقة، لها عدد لا نهائي من الحلول؛ لأن جميع قيم θ تمثل حلولًا لها.**

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب أثناء دراستهم هذا الدرس وضع قائمة بالأخطاء الشائعة التي وقعوا فيها على السبورة. وشجِّعهم على إضافة بعض المقترحات حول كيفية تفادي مِثل هذه الأخطاء. فعلى سبيل المثال، أحد الأخطاء الشائعة هو أن تكون الحاسبة مضبوطة على نظام الدرجات، في حين يجب أن تكون مضبوطة على نظام الراديان؛ لأن حل المسألة يتطلب ذلك، والعكس صحيح.

حلول دخيلة

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال المتطابقات لحل معادلة مثلثية.

مثال إضافي

5 حُلّ المعادلة $\tan^4\theta - 4\sec^2\theta = -7$ لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات.

$\theta = 60° + 180°k, 120° + 180°k,$
$45° + 90° \cdot k$
حيث k هو أي عدد صحيح.

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط
ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1 + \tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلّل

$\tan^2\theta - 3 = 0$ أو $\tan^2\theta + 1 = 0$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan^2\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي: $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

5A) $90° + k \cdot 180°$

5B) $210° + 360°k$
$330° + 360°k$

161 الدرس 5-3 حل المعادلات المثلثية

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 29–1 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب حسب مستوياتهم.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب توضيح كتابة معادلة تتضمن $\sin^2\theta$ ويكون لها حل وحيد في المجال $90° < \theta < 270°$.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس، بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (50)

إجابات:

5) $\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, \pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

6) $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$

7) $2k\pi, \frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi$

8) $\pi+2k\pi$

9) $90°+k\cdot180°$

10) $k\cdot180°, 90°+k\cdot360°$

11) $45°+k\cdot90°$

12) $30°+k\cdot360°$, $150°+k\cdot360°$, $90°+k\cdot180°$

13a) عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات، ويكون ذلك بعد 213، أو 335 يومًا بعد يوم 21 مارس. وهذا يعني أنه في يوم 20 أكتوبر أو 19 فبراير. ستكون عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ ساعات.

13b) كل يوم منذ 19 فبراير إلى 20 أكتوبر. تفسير ممكن: بما أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو، لذا فإن الأيام بين 19 فبراير إلى 20 أكتوبر يتزايد طول نهارها حتى يوم 22 يونيو، ثم تبدأ ساعات النهار بالنقصان حتى 20 أكتوبر.

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta+2\cos\theta+1=0;\ 0°\le\theta\le360°$ **180°**

2) $2\cos^2\theta+\cos\theta=1;\ 0°\le\theta\le360°$ **60°, 180°, 300°**

3) $-2\sin^2\theta=7-15\sin\theta;\ 0°\le\theta\le360°$ **30°, 150°**

4) $\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}=0;\ 0°\le\theta\le240°$ **150°, 210°**

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta-1=0$

6) $2\cos^2\theta=1$ (5-12) انظر الهامش.

7) $\sin\frac{\theta}{2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}=0$

8) $2\cos^2\theta+4\cos\theta=-2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos2\theta-\sin^2\theta+2=0$

10) $\sin^2\theta-\sin\theta=0$

11) $2\sin^2\theta-1=0$

12) $\cos\theta-2\cos\theta\sin\theta=0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d=3\sin\frac{2\pi}{365}t+12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3) انظر الهامش.

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta+\cos^2\theta=0$ لجميع قيم θ **$\frac{\pi}{2}+\pi k$**

15) $\sin2\theta-\cos\theta=0$ لجميع قيم θ **$\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k$**

16) $\tan\theta=1$ لجميع قيم θ **$\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$**

17) $\cos^2\theta=\frac{1}{4};\ 0°\le\theta\le360°$ **60°, 120°, 240°, 300°**

18) $2\sin^2\theta=1;\ 90°<\theta<270°$ **135°, 225°**

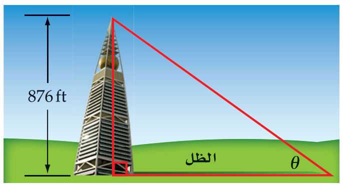
19) $\sin2\theta-\cos\theta=0;\ 0\le\theta\le2\pi$ **$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$**

20) $4\sin^2\theta-1=0;\ 180°<\theta<360°$ **210°, 330°**

21) $\tan\theta-\sin\theta=0$ لجميع قيم θ **$k\cdot180°$**

22) $4\sin^2\theta=4\sin\theta-1$ لجميع قيم θ **$30°+k\cdot360°, 150°+k\cdot360°$**

23) **ناطحات سحاب:** يبلغ ارتفاع برج الفيصلية في الرياض 876 ft. أوجد θ إذا كان طول ظله في الشكل أدناه 685 m؟ **52° تقريبًا**



24) **أنهار:** تمثل الدالة: $y=3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right]+8$، عمق نهر خلال أحد الأيام؛ حيث $x=0,1,2,\dots,24$، 0 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟ **11 m**

b) في أي وقت تحصل على أقصى عمق؟ **7:00 صباحًا، 7:00 مساءً**

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

25) $(\cos\theta)(\sin2\theta)-2\sin\theta+2=0$ **$\frac{\pi}{2}+2\pi k$**

26) $2\sin^2\theta+(\sqrt{2}-1)\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **$\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{4}+2\pi k, \frac{7\pi}{4}+2\pi k$**

27) $2\sin\theta=\sin2\theta$ **πk**

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

28) $\sin2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ **$30°+360°k, 150°+360°k, 330°+360°k$**

29) $1-\sin^2\theta-\cos\theta=\frac{3}{4}$ **$120°+360°k, 240°+360°k$**

30) **الماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1\sin i=n_2\sin r$، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء، و i قياس زاوية السقوط، و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر الألماس هو 35°، فما قياس زاوية الانكسار؟ **13.71°**

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا الألماس حقيقيًّا ونقيًّا أم لا. انظر الهامش

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–29، 31، 34–48
ضمن المتوسط	1–29 (فردي)، 30، 31، 33–48
فوق المتوسط	30–48

30b) بقياس زوايا سقوط الضوء وانعكاساتها لتحديد معامل انكسار الضوء، فإذا كان معامل الانكسار 2.42 يكون ماسًا نقيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش

هلا	ليلى
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$	$-\sin\theta = -\sin\theta$
$2\cos\theta = 1$	$2\cos\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$	$\cos\theta = 0$
$\theta = 60°, 300°$	$\theta = 90°, 270°$

32) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة. $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ أو $\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ للتوضيح انظر ملحق الإجابات.

33) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟ انظر الهامش.

34) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية. انظر الهامش.

35) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0° \le \theta \le 360°$. 35) إجابة ممكنة: $2\cos\theta = 0; 90°, 270°$

36) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\cot^2 x + 1 = 2$ ، $\csc x = \sqrt{2}$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

(37–44) انظر ملحق الإجابات.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (الدرس 3-4)

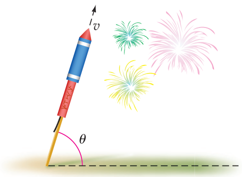
37) $\cos 165°$ 38) $\sin 22\frac{1}{2}°$ 39) $\sin\frac{7\pi}{8}$ 40) $\cos\frac{7\pi}{12}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: (الدرس 3-3)

41) $\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$ 42) $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

43) $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ 44) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

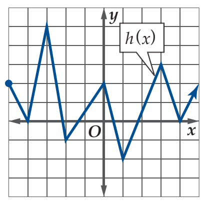
45) **ألعاب نارية:** إذا أطلق صاروخ من سطح الأرض، فإن أعلى ارتفاع يصل إليه يعطى بالصيغة $h = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ ، حيث θ زاوية الانطلاق، و v السرعة المتجهة الابتدائية للصاروخ، و g تسارع الجاذبية الأرضية وتساوي 9.8m/sec. انظر ملحق الإجابات.



a) أثبت أن $\frac{v^2\tan^2\theta}{2g\sec^2\theta} = \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}$ تمثّل متطابقة.

b) إذا أطلق الصاروخ من سطح الأرض بزاوية 80° ، وسرعة ابتدائية مقدارها 110m/s ، فأوجد أقصى ارتفاع يصل إليه. (الدرس 3-2)

46) استعمل التمثيل البياني في الشكل المجاور؛ لتحدد مجال الدالة $h(x)$ ومداها. (مهارة سابقة) انظر ملحق الإجابات.



تدريب على اختبار

47) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$ ؟ A

A $\frac{5\pi}{2}$ B $\frac{7\pi}{4}$ C 2π D $\frac{3\pi}{4}$

48) ماحَل المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟ D

A 30° أو 150° C 210° أو 330°

B 60° أو 120° D 240° أو 300°

تنبيه!

اكتشف الخطأ: في السؤال 31، يتعين على الطلاب أن يلاحظوا أن هلا قسمت طرفي المعادلة على $\sin\theta$، وأن ليلى أعادت كتابة $2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ بطريقة غير صحيحة. واشرح للطلاب أنه إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{2}$ فإن θ يجب أن تكون في الربع الأول أو الربع الرابع؛ لذا فإن $\theta = 60°$ أو 300°. وبيّن لهم أيضًا أن العبارة: $2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta$ يمكن أن تكتب على الشكل $2 \cdot B \cdot C - B$، وهذه العبارة لا تساوي $2 \cdot C$.

31) كلاهما إجابتهما خاطئة؛ لأن هلا قسمت كلًّا من الطرفين على $\sin\theta$، وهذا خطأ، وكذلك ليلى طرحت $\sin\theta$ من الطرفين بشكل خاطئ أيضًا.

33) كل نوع من المعادلات يحتاج إما إلى جمع وإما إلى طرح وإما إلى ضرب وإما إلى قسمة كل طرف على العدد نفسه. وتُحلّ المعادلات التربيعية والمثلثية غالبًا باستعمال التحليل. ولا تحتاج المعادلات الخطية والتربيعية إلى متطابقات لحلها، ويمكن حلها جبريًّا، في حين يمكن تمثيل بعض المعادلات المثلثية بيانيًّا بسهولة باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. أما المعادلة الخطية فلها على الأكثر حل واحد. والمعادلة التربيعية لها على الأكثر حلّان. أما المعادلة المثلثية فلها عادة عدد لا نهائي من الحلول إلّا إذا كانت قيم المتغير مقيّدة أو مشروطة.

34) لأن الدوال المثلثية دورية؛ فإضافة دورة كاملة لأي حل للمعادلة ينتج حلًّا لها.

36) نعم لأن

$$\cot^2 x + 1 = 2$$
$$\csc^2 x = 2$$
$$\csc x = \sqrt{2}$$
$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\pi}{4}$$
$$\csc x = \sqrt{2}$$
$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\pi}{4}$$

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 3

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-5 تدريبات إعادة التعليم

حلّ المعادلات المثلثيّة

حلّ المعادلات المثلثيّة : يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لحل المعادلات المثلثية، والتي تكون صحيحة فقط لقيم معينة للمتغير.

مثال 1 حلّ المعادلة: $4\sin^2\theta - 1 = 0$ إذا كانت: $0° < \theta < 360°$.

$4\sin^2\theta - 1 = 0$

$4\sin^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

$\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

$\theta = 30°, 150°, 210°, 330°$

مثال 2 حلّ المعادلة: $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$ لقيم θ جميعها، ثم اكتب قياس θ بالراديان وبالدرجات.

$\sin 2\theta + \cos\theta = 0$

$2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta = 0$

$\cos\theta(2\sin\theta + 1) = 0$

$\cos\theta = 0$ أو $2\sin\theta + 1 = 0$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = 90° + k \cdot 180°$؛ $\theta = 210° + k \cdot 360°$

$\theta = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$؛ $330° + k \cdot 360°$

$\frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \theta = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

تمارين

حلّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية في الفترة المعطاة:

1) $0 \le \theta < 2\pi, 2\cos^2\theta + \cos\theta = 1$
$\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$

2) $0 \le \theta < 2\pi, \sin^2\theta\ \cos^2\theta = 0$
$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

3) $0° \le \theta < 360°, \cos 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
15°, 165°, 195° 345°

4) $0 \le \theta < 2\pi, 2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$
$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

حلّ المعادلتين الآتيتين لكل قيم θ، حيث قياس θ بالراديان:

5) $4\sin^2\theta - 3 = 0$
$\frac{\pi}{3} + k\cdot\pi, \frac{2\pi}{3} + k\cdot\pi$

6) $2\cos\theta\sin\theta + \cos\theta = 0$
$\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi, \frac{3\pi}{2} + k\cdot 2\pi, \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi$

حلّ المعادلتين الآتيتين لجميع قيم θ، حيث قياس θ بالدرجات:

7) $\cos 2\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{2}$
$45° + k.90°$

8) $\tan 2\theta = -1$
$67.5° + k.360°, 157.5° + k.360°$

الصف: الثالث الثانوي 22 **الفصل 3 :** المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات إعادة التعليم (23) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

حلّ المعادلات المثلثية

الحلول الدخيلة : لا توجد حلول لبعض المعادلات المثلثية، فعلى سبيل المثال، لا يوجد حلّ للمعادلة $\sin\theta = 3$؛ لأن جميع قيم $\sin\theta$ تحقق المتباينة: $-1 \le \sin\theta \le 1$

مثال حلّ المعادلة: $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

$2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$ المعادلة المعطاة

$(\cos\theta + 2)(2\cos\theta - 1) = 0$ بالتحليل

$\cos\theta + 2 = 0$ أو $2\cos\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = -2$ ، $2\cos\theta = 1$

$\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}$

لا يوجد حل للمعادلة $\cos\theta = -2$ ؛ لأن جميع قيم $\cos\theta$ تحقق المتباينة: $-1 \le \cos\theta \le 1$؛ مما يعني أن الحلين هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{3}$

تمارين

حلّ كلّ معادلة مما يأتي، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$:

1) $\sin^2\theta + \frac{7}{2}\sin\theta + \frac{3}{2} = 0$
$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

2) $2\tan^4\theta = \sec^2\theta$
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

3) $8\cos\theta = 4\cos^2\theta + 3$
$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

4) $2\csc^2\theta = -(3\csc\theta + 1)$
$\frac{3\pi}{2}$

5) $2\sin^2\theta = 6 - 5\sqrt{2}\sin\theta$
$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

6) $2\cos^4\theta + 9\sin^2\theta = 5$
$\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

الصف: الثالث الثانوي 23 **الفصل 3 :** المتطابقات والمعادلات المثلثية

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-5 تدريبات حل المسألة

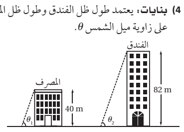
حلّ المعادلات المثلثية

1) **قلعة رمليّة :** يمكن تمثيل مستوى الماء على أحد الشواطئ بالدالة: $y = 7 + 7\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$، حيث y تمثل المسافة بالأقدام عن حدّ الجزر، و t تمثل عدد الساعات بدءًا من الساعة 6 صباحًا. فإذا عملت ليلى قلعةً رملية تبعد 10.5 أقدام عن حدّ الجزر عند الساعة الـ 2 بعد الظهر، فعند أيّ وقت من نفس اليوم ستصل مياه البحر إلى القلعة الرملية؟
3P. M, 7P. M

2) **بطارية :** يمكن تمثيل كمية الضوء المنبعث من مصباح شحن البطارية في أثناء شحنها بالمعادلة: $y = 60 + 60\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$، حيث y الإضاءة بوحدة اللومن الصادرة من المصباح، و t عدد الثواني منذ بدء الومضات.
ما الزمن الذي تتطلبه كمية الإضاءة المنبعثة لتصبح مساوية 110 لومن؟
1.3 ثانية

3) **طائرة ورقية :** أمسكت هند طرف خيط مشدود لطائرة ورقية طوله $400\,ft$ ، إذا كان ارتفاع يد هند عن الأرض $5\,ft$، وارتفاع الطائرة الورقية عندها $5 + 200\sqrt{3}$ ، أوجد الزاوية θ التي يصنعها الخيط مع الأرض، باستعمال العلاقة: $h = d\sin\theta + c$ ، حيث h ارتفاع الطائرة عن الأرض، و d طول خيط الطائرة، و c ارتفاع يد هند عن الأرض.
60°

4) **بنايات :** يعتمد طول ظل الفندق وطول ظل المصرف على زاوية ميل الشمس θ.



a) عبّر عن طول ظل كلٍّ منهما بصورة دالة بدلالة زاوية الميل.
$S_1 = \frac{40}{\tan\theta_1}$; $S_2 = \frac{82}{\tan\theta_2}$

b) ما قياس زاوية ميل الشمس التي يكون عندها ظل المصرف مساويًا ارتفاع الفندق؟
26° تقريبًا

الصف: الثالث الثانوي 24 **الفصل 3 :** المتطابقات والمعادلات المثلثية

التدريبات الإثرائية (25) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

3-5 التدريبات الإثرائية

تحديد زاوية إطلاق قذيفة

المسافة الأفقية التي يقطعها جسمٌ مقذوفٌ تعطى بالعلاقة: $d = \frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $32\,ft/s^2$ ، و v السرعة الابتدائية المتجهة للمقذوف.

1) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
$d = \frac{v^2\sin 2\theta}{g}$

2) باستعمال السؤال 1، أوجد صيغةً تساعد على حساب الزاوية θ.
$\sin 2\theta = \frac{dg}{v^2}$

3) إذا أراد لاعب كرة قدمٍ ركل كرةٍ بسرعةٍ مقدارها $48\,ft/sec$ ؛ لتقطع مسافةً أفقيةً مقدارها $36\,ft$ ، فما قياس الزاوية التي يركل بها الكرة؟
15°

4) إذا أطلق سهمٌ بسرعة $60\,ft/s$ ، فقطع مسافةً أفقيةً مقدارها $18\,ft$، فأوجد الزاوية التي قُذِف بها السهم.
4.6° تقريبًا

الصف: الثالث الثانوي 25 **الفصل 3 :** المتطابقات والمعادلات المثلثية

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 3

دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (21) دون ضمن فوق

3-5 حل المعادلات المثلثية

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

1) $\sqrt{2}\cos\theta = \sin 2\theta;\ 0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ — $45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 270^\circ$

2) $\sin 2\theta = \cos\theta;\ 90^\circ \le \theta < 180^\circ$ — $90^\circ, 150^\circ$

3) $\cos 4\theta = \cos 2\theta;\ 180^\circ \le \theta < 360^\circ$ — $180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

4) $\cos\theta + \cos(90 - \theta) = 0;\ 0 \le \theta < 2\pi$ — $3\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

5) $2 + \cos\theta = 2\sin^2\theta;\ \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$ — $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$

6) $\tan^2\theta + \sec\theta = 1;\ \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$ — $\frac{2\pi}{3}$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

7) $\cos^2\theta = \sin^2\theta$ — $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

8) $\cot\theta = \cot^3\theta$ — $\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

9) $\sqrt{2}\sin^3\theta = \sin^2\theta$ — $k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

10) $\cos^2\theta\sin\theta = \sin\theta$ — $k\pi$

11) $2\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ — $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

12) $\sec^2\theta = 2$ — $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

13) $\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta$ — $90^\circ + k \cdot 180^\circ$

14) $\csc^2\theta - 3\csc\theta + 2 = 0$ — $30^\circ + k \cdot 360^\circ, 90^\circ + k \cdot 360^\circ, 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

15) $\frac{3}{1 + \cos\theta} = 4(1 - \cos\theta)$ — $60^\circ + k \cdot 180^\circ\ ,\ 120^\circ + k \cdot 180^\circ$

16) $\sqrt{2}\cos^2\theta = \cos^2\theta$ — $90^\circ + k \cdot 180^\circ,$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

17) $4\sin^2\theta = 3$ — $\frac{\pi}{3} + k\pi\ ,\ \frac{2\pi}{3} + k\pi$ أو: $60^\circ + k \cdot 180^\circ\ ,\ 120^\circ + k \cdot 180^\circ$

18) $4\sin^2\theta - 1 = 0$ — $\frac{\pi}{6} + k\pi\ ,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi$ أو: $30^\circ + k \cdot 180^\circ\ ,\ 150^\circ + k \cdot 180^\circ$

19) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta = -1$ — $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ أو $30^\circ + k \cdot 360^\circ, 90^\circ + k \cdot 360^\circ\ ,\ 150^\circ + k \cdot 360$

20) $\cos 2\theta + \sin\theta - 1 = 0$ — $k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو: $k \cdot 180^\circ, 30^\circ + k \cdot 360^\circ, 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

21) **كهرباء:** يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $j = 3\sin 240t$ ، حيث j شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب عبارة تصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.

$t = 0.75k$

الفصل الثالث التطابقات والمعادلات المثلثية

21

ملحوظات المعلم

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 3–1, 3–2, 3–5)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–3)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 3–4)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}, \cos \theta \neq -1$$

المفردات

المتطابقة (ص. 136)	متطابقات الزاويتين
المتطابقات المثلثية (ص. 136)	المتتامتين (ص. 136)
المتطابقات النسبية (ص. 136)	متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص. 136)
متطابقات المقلوب (ص. 136)	المعادلات المثلثية (ص. 158)
متطابقات فيثاغورس (ص. 136)	

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين. في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية $75°$ إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$ و $15°$.

2) المتطابقة $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هي مثال على المتطابقات النسبية.

3) المتطابقة المثلثية هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال المتطابقة المثلثية لضعف الزاوية في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية $30°$.

5) تكون المعادلة المثلثية صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال المتطابقة المثلثية لنصف الزاوية في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ مثالان على متطابقات المقلوب.

8) يمكن استعمال المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين في إيجاد كل من $\sin 120°$, $\cos 120°$ إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين $30°$, $90°$.

9) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على متطابقات فيثاغورس.

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1–9، فنبِّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (52).

مراجعة الدروس

3-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 140 - 136)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{2}}{2}$**

11) $\sec\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$ **$-\sqrt{3}$**

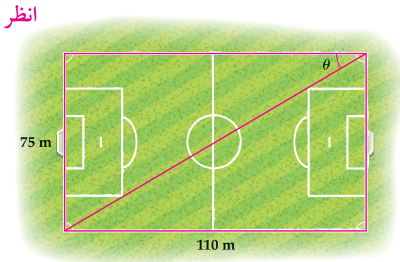
12) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$ **$\frac{1}{2}$**

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$ **$-\frac{4}{5}$**

14) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$، $270° < \theta < 360°$ **$-\frac{\sqrt{41}}{5}$**

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ.

انظر الهامش



بسّط كل عبارة مما يأتي:

16) $1 - \tan\theta\sin\theta\cos\theta$ **$\cos^2\theta$**

17) $\tan\theta\csc\theta$ **$\sec\theta$**

18) $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$ **$\csc\theta$**

19) $\cos\theta(1 + \tan^2\theta)$ **$\sec\theta$**

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta\sec\theta\cot\theta$.

$$\cos\theta\sec\theta\cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة الدروس

مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 3 ص (46)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابة:

15) أولاً، أوجد طول القطر:

$$c^2 = 75^2 + 110^2$$

$$c^2 = 5625 + 12100$$

$$= 17725$$

$$c = 5\sqrt{709};$$

$$\sin\theta = \frac{75}{5\sqrt{709}}$$

$$= \frac{15\sqrt{709}}{709}$$

3-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 141 - 145)

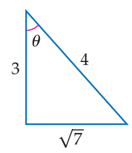
أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة: 20-23 انظر الهامش

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta = \sin\theta + \cos\theta$

21) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

22) $\sec^2\theta - 1 = \dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

23) **هندسة:** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$



مثال 3

أثبت أن المعادلة $\dfrac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = \cot\theta + \csc\theta$ تمثّل متطابقة.

$\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$ الطرف الأيسر

$= \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta}$ بسّط

$= \cot\theta + \csc\theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

3-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 146 - 149)

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

25) $\cos 15°$ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

26) $\sin 210°$ $-\dfrac{1}{2}$

27) $\sin 105°$ $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

28) $\tan 75°$ $\sqrt{3}+2$

29) $\cos 105°$ $\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية: 30-32 انظر ملحق الإجابات

30) $\sin(\theta + 90) = \cos\theta$

31) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

32) $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75°$.

استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$
$$= \sin 30°\cos 45° + \cos 30°\sin 45°$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

إجابات:

20) $\tan\theta\cos\theta + \cot\theta\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ✓

21) $\dfrac{\cos\theta}{\cot\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta \div \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta \div \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\cos\theta \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta + \cos\theta$

$\sin\theta + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ✓

22) $\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sec^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \tan^2\theta$

$\sec^2\theta - 1 = \sec^2\theta - 1$ ✓

23) $\tan^2\theta + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 1 = \dfrac{7}{9} + 1$

$= \dfrac{7}{9} + \dfrac{9}{9} = \dfrac{16}{9};$

$\sec^2\theta = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{16}{9}$

3-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 151 - 156)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \cos 2\theta, \sin 2\theta$ ، إذا علمت أن:
33-36) انظر ملحق الإجابات

33) $\cos\theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin\theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos\theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ ؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع (b) .

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\frac{\theta}{2}$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos\theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ اقسم ، بسّط ، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

3-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 157 - 163)

حل كل معادلة مما يأتي ، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \le \theta < 360°$ **$60°, 300°$**

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$ **$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$**

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \le \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \le \theta < 360°$ **$270°$**

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \le \theta < 2\pi$ **$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$**

39) **$90°, 210°, 270°, 330°$**

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ حلّل

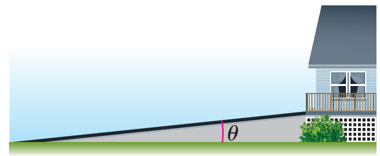
$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

تطبيقات ومسائل

42) إنشاءات: يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل . (الدرس 3-1)



أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

$\sin\theta = \frac{\sqrt{145}}{145}$

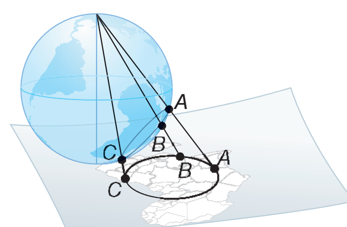
$\cos\theta = \frac{12\sqrt{145}}{145}$

43) ضوء: تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 3-1)

$I = I_0\left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}\right)$

44) خرائط: يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 3-2) انظر الهامش



45) موجات: يُسمى تداخل موجتين بنّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنّاء؟

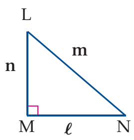
$y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ ، $y_2 = 20\sin(3t + 45°)$

(الدرس 3-3)

$y_1 + y_2 = 0$

إذن، التداخل هدام

46) هندسة: استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$. (الدرس 3-4) انظر الهامش



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة: (الدرس 3-4) انظر الهامش

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1+\cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) مقذوفات: إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة ، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثوانٍ. (الدرس 3-5) $60°$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

إجابات:

44) $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$

$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

46) إجابة ممكنة: $\sin 2 = 2\sin N\cos N$

$= 2\frac{n}{m}\cdot\frac{l}{m}$

$= \frac{2nl}{m^2}$

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta$

$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta$

$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cot\theta$

$\cot\theta = \cot\theta$ ✓

48) $1+\cos 2\theta \stackrel{?}{=} \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

$1+2\cos^2\theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{2}{\sec^2\theta}$

$2\cos^2 = 2\cos^2\theta$

المعالجة:

بناء على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لاتزال تشكل تحديًا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (53–61).

اختبار الفصل

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$ ؟ **D**

A $\cot\theta$ C $\sec\theta$

B $\tan\theta$ D $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$. انظر الهامش

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$. انظر الهامش.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$ ؟ **D**

A $\frac{5}{3}$ C $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ D $\frac{4}{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

5) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$ $-\frac{3\sqrt{7}}{7}$

6) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ، $90° < \theta < 180°$ $-\sqrt{3}$

7) $\sec\theta$ ، إذا كان $\csc\theta = -2$ ، $180° < \theta < 270°$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8) $\sec\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $0° < \theta < 90°$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة: 9-12) انظر ملحق الإجابات

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta\sec^2\theta$

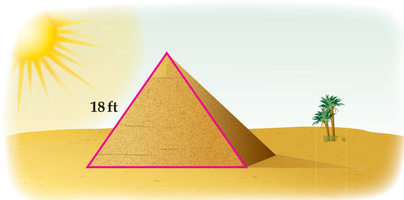
12) $\frac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$ ؟ **B**

A $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ C $1-\sqrt{2}$

B $\sqrt{2}-1$ D $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع ، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع ، طول ضلعه 18 ft.



انظر الهامش

a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$ ، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

16) $\sin 480°$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17) $\cos 75°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

18) $\sin 165°$ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها ، إذاكان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ انظر الهامش

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$ $\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

حُلّ المعادلتين الآتيتين ، حيث $0° \le \theta \le 360°$:

21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$ **0°, 360°**

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ **0°, 60°, 180°, 300°, 360°**

إجابات

(2
$$\cos(30° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin(60° + \theta)$$
$$\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \checkmark$$

(3
$$\cos(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$\cos\theta\cos\pi + \sin\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$(\cos\theta)(-1) + (\sin\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$$
$$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$$

(14a افترض أن ارتفاع المثلث a
$$a^2 + 9^2 = 18^2$$
$$a^2 = 18^2 - 9^2$$
$$a^2 = 243$$
$$a = 9\sqrt{3}$$

(14b
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta;$$
$$\sin 2(30) = 2\sin 30\cos 30$$
$$\sin 60 = 2\left(\frac{9}{18}\right)\left(\frac{9\sqrt{3}}{18}\right)$$
$$= \frac{162\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\sin 60 = \frac{9\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(19
$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$$
$$\frac{4\pi}{3} + 2\pi k$$

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط	المستوى 2 دون المتوسط
إذا أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	**إذا** أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر أحد المصدرين الآتيين:	**فاختر** المصدر الآتي:
كتاب الطالب الدروس 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 3-5	
دليل المعلم مشروع الفصل، ص (134)	**زيارة الموقع** www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع www.obeikaneducation.com	

الدرس 3-2 ، ص (143-145)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^2\theta$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$
$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta$$
$$= \cot^2\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \cot^2\theta + 1$$
$$= \csc^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$1 + \sec^2\theta\sin^2\theta$$
$$= 1 + \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\sin^2\theta$$
$$= 1 + \tan^2\theta$$
$$= \sec^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sin\theta\sec\theta\cot\theta$$
$$= \sin\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \stackrel{?}{=} (\csc\theta - \cot\theta)^2$

نبدأ بالطرف الأيمن $(\csc\theta - \cot\theta)^2$

$$= \csc^2\theta - 2\cot\theta\csc\theta + \cot^2\theta$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - 2\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$
$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

ويساوي الطرف الأيسر

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \stackrel{?}{=} \tan\theta - \cot\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{(1-\cos^2\theta)-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \tan\theta - \cot\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

7) $\tan\theta \stackrel{?}{=} \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$$
$$= \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta}}$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \tan\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

8) $\cos\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta\cot\theta$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\sin\theta\cot\theta$$
$$= \sin\theta\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \cos\theta \checkmark$$

ويساوي الطرف الأيسر

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta)$$
$$= \sin\theta\tan\theta + \sin\theta\sec\theta - \tan\theta - \sec\theta$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta - 1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= -\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta)$$

$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)$$

$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

12) $\sec\theta - \tan\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sec\theta - \tan\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

ويساوي الطرف الأيمن

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\frac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \sec\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

14) $\sec\theta\csc\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta + \cot\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sec\theta\csc\theta$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\tan\theta + \cot\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

15) $\sin\theta + \cos\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin^2\theta - (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin\theta + \cos\theta)}{\sin\theta - \cos\theta}$$

$$= \sin\theta + \cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

16) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 \stackrel{?}{=} \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 2\cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 1$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\frac{2+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta}}$$

$$= \left(2+\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\right)\cdot\frac{\cos\theta\sin\theta}{1}$$

$$= 2\cos\theta\sin\theta + 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

17) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

ويساوي الطرف الأيسر

18) $\csc\theta - 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\frac{\cot^2\theta}{\csc\theta+1}$$

$$= \frac{\csc^2\theta - 1}{\csc\theta + 1}$$

$$= \frac{(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1)}{\csc\theta + 1}$$

$$= \csc\theta - 1$$

ويساوي الطرف الأيسر

19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = 1$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta \stackrel{?}{=} 1$

نبدأ بالطرف الأيسر

$$\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta$$
$$= \sin\theta\cos\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \cos^2\theta$$
$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$$
$$= 1$$

ويساوي الطرف الأيمن

21) $\sec\theta - \cos\theta \stackrel{?}{=} \tan\theta\sin\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sec\theta - \cos\theta$$
$$= \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

نبسط الطرف الأيمن

$$\tan\theta\sin\theta$$
$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

22) $\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

نبدأ بالطرف الأيمن

$$\cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$$
$$= \cot^2\theta + \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}$$
$$= \cot^2\theta + 1$$
$$= \csc^2\theta$$

ويساوي الطرف الأيسر

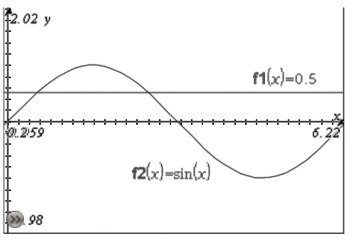
23) $\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} \stackrel{?}{=} \sin\theta - \cos\theta$

نبدأ بالطرف الأيسر

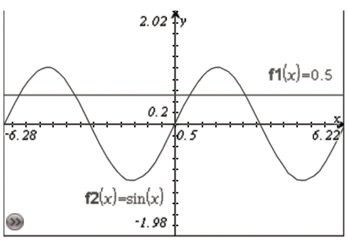
$$\frac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta}$$
$$= \frac{\sec\theta}{\csc\theta\sec\theta} - \frac{\csc\theta}{\csc\theta\sec\theta}$$
$$= \frac{1}{\csc\theta} - \frac{1}{\sec\theta}$$
$$= \sin\theta - \cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

43b) يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$ عند النقاط $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ ، على الفترة $[0, 2\pi)$.



43c) يتقاطع التمثيل البياني للدالتين $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$ عند النقاط $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ ، على الفترة $[-2\pi, 2\pi)$



43d) إجابة ممكنة: بما أن الجيب دالة دورية، تكون حلول المعادلة هي $x = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ وَ $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ، حيث n عدد صحيح.

49) الثانية:

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\frac{1}{\cos^2\theta} \stackrel{?}{=} \sec^2\theta$$
$$\sec^2\theta \stackrel{?}{=} \sec^2\theta \checkmark$$

الثالثة:

$$1 + \cot^2\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$
$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta$$

$$\csc\theta \stackrel{?}{=} \csc^2\theta\ ✓$$

57)

$$\sin^3\theta\cos\theta + \cos^3\theta\sin\theta$$

$$= \sin\theta\cos\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$= \sin\theta\cos\theta\,(1)$$

$$= \sin\theta\cos\theta$$

الدرس 3-3 ، ص (148-149)

10)

$$\sin(90° + \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$$

$$\sin 90°\cos\theta + \cos 90°\sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$$

$$1\cdot\cos\theta + 0\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \cos\theta\ ✓$$

11)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$0\cdot\cos\theta - 1\cdot\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$-\sin\theta = -\sin\theta\ ✓$$

12)

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$\frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}\cot\theta \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$\frac{(\sin\theta)\cdot 0 + (\cos\theta)\cdot 1}{(\cos\theta)\cdot 0 - (\sin\theta)\cdot 1} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \stackrel{?}{=} -\cot\theta$$

$$-\cot\theta = -\cot\theta\ ✓$$

13)

$$\sin(\theta + \pi) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$\sin\theta\cos\pi + \cos\theta\sin\pi \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$(\sin\theta)(-1) + (\cos\theta)(0) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$-\sin\theta = -\sin\theta\ ✓$$

14)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$(0)(\cos\theta) - (1)(\sin\theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$$

$$-\sin\theta = -\sin\theta\ ✓$$

15)

$$\tan(\theta + 45°) \stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$\frac{\tan\theta + \tan 45°}{1 - \tan\theta\tan 45°} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$\frac{\tan\theta + 1}{1 - (\tan\theta)(1)} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

$$\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}\ ✓$$

23)

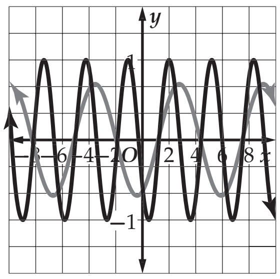
$$\frac{(\sin A + \tan\theta\cos A)}{\cos A - \tan\theta\sin A}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\tan\theta\cos A}{\cos A}\right)}{\frac{\cos A}{\cos A} - \frac{\tan\theta\sin A}{\cos A}}$$

$$= \frac{(\tan A + \tan\theta)}{1 - \tan A\tan\theta}$$

$$= \tan(A + \theta)$$

24b)



24c) $\sin(30° + 45°) = \sin 30° + \sin 45°$

فالطرف الأيمن يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ ، أو 1.21 تقريبًا. وبما أن قيمة جيب أية زاوية لا يمكن أن تكون أكبر من 1؛ فإن الجملة $\sin(A + B) = \sin A + \sin B$ لا تمثل متطابقة.

25)

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\tan A + \tan B}{\sec A\sec B}$$

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}$$

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\sin(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\sin A\cos B + \cos A\sin B}{1}$$

$$\sin(A + B) = \sin(A + B)\ ✓$$

26)

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \tan A\tan B}{\sec A\sec B}$$

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}$$

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\cos(A + B) \stackrel{?}{=} \frac{\cos A\cos B - \sin A\sin B}{1}$$

$$\cos(A + B) = \cos(A + B)\ ✓$$

27)

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\sec A \sec B}{1+\tan A \tan B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos A}\cdot\frac{1}{\cos B}}{1+\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}}\cdot\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$\sec(A-B) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos(A-B)}$$

$$\sec(A-B) = \sec(A-B)\ \checkmark$$

28)

$$\sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$(\sin A\cos B)^2-(\cos A\sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A\cos^2 B+\sin^2 A\sin^2 B - \sin^2 A\sin^2 B-\cos^2 A\sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A(\cos^2 B+\sin^2 B)-\sin^2 B(\sin^2 A+\cos^2 A) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$(\sin^2 A)(1)-(\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A-\sin^2 B$$

$$\sin^2 A-\sin^2 B = \sin^2 A-\sin^2 B\ \checkmark$$

30)

$$\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)}$$

$$= \frac{1}{\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}}$$

$$= \frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\cot A}\cdot\frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}\cdot\frac{\cot A\cot B}{\cot A\cot B}$$

$$= \frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

31)

$$d=\sqrt{(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2}$$

$$d^2=(\cos A-\cos B)^2+(\sin A-\sin B)^2$$

$$d^2=(\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B)+(\sin^2 A-2\sin A\sin B+\sin^2 B)$$

$$d^2=\cos^2 A+\sin^2 A+\cos^2 B+\sin^2 B-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$d^2=1+1-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$$

$$d^2=2-2\cos A\cos B-2\sin A\sin B=2-2\cos(A-B)$$

اختبار منتصف الفصل، ص (150)

10)

$$\cot^2\theta+1 \stackrel{?}{=} \frac{\cot\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta}{\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta}$$

$$\csc^2\theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\csc^2\theta=\csc^2\theta\ \checkmark$$

11)

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\cot\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cot\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1=1\ \checkmark$$

12)

$$\frac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} (1+\cos\theta)\sec\theta$$

$$\frac{\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} (1+\cos\theta)\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos\theta(1-\cos\theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos\theta}+1$$

$$\frac{1}{\cos\theta}+1=\frac{1}{\cos\theta}+1\ \checkmark$$

13)

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}\cdot\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos\theta\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot(1-\sin\theta)$$

$$\tan\theta(1-\sin\theta)=\tan\theta(1-\sin\theta)\ \checkmark$$

14b)

$$\cot\theta=\frac{12}{9}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{12}{15}}{\frac{9}{15}}=\frac{12}{9}$$

بما أن $\frac{12}{9}=\frac{12}{9}$

إذن $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

15) $\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta + 1} \cdot \dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta(\sec\theta + 1)}{\sec^2\theta - 1} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sin\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\tan\theta(\sec\theta + 1)}{\tan^2\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$\dfrac{\sec\theta + 1}{1} \cdot \dfrac{1}{\tan\theta} \stackrel{?}{=} (\sec\theta + 1)\cot\theta$

$(\sec\theta + 1)\cot\theta = (\sec\theta + 1)\cot\theta \checkmark$

16) $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \tan^2\theta - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \sin^2\theta$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta\,(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta\,(\sin^2\theta)}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \stackrel{?}{=} \sin^2\theta \cdot \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \sin^2\theta \cdot \tan^2\theta \checkmark$

17) $\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1 + \cos\theta} \cdot \dfrac{1 - \cos\theta}{1 - \cos\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta\,(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta\,(1 - \cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta\,(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}(1 - \cos\theta)$

$\cot\theta(1 - \cos\theta) = \cot\theta\,(1 - \cos\theta) \checkmark$

23) $\cos 30^\circ \cos\theta + \sin 30^\circ \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin 60^\circ \cos\theta + \cos 60^\circ \sin\theta$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta \checkmark$

الدرس 3-4 ، ص (155, 156)

16) $\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2}{\cot\theta - \tan\theta} \cdot \dfrac{\tan\theta}{\tan\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\tan\theta}{\cot\theta\tan\theta - \tan^2\theta}$

$\tan 2\theta \stackrel{?}{=} \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$\tan 2\theta = \tan 2\theta \checkmark$

17) $\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin\theta}{2}$

$\dfrac{\sin\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2} \checkmark$

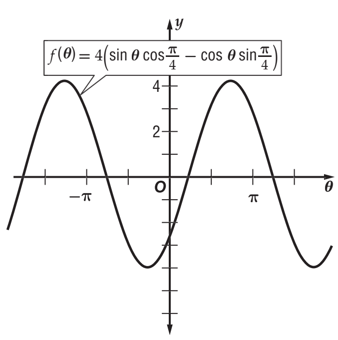
20) إذا كانت $\theta = 45^\circ + A$

$$d = \frac{v^2\sin 2\,(45^\circ + A)}{g} = \frac{v^2\sin(90^\circ + 2A)}{g} = \frac{v^2(\sin 90^\circ\cos 2A + \cos 90^\circ\sin 2A)}{g} = \frac{v^2(1 \cdot \cos 2A + 0 \cdot \sin 2A)}{g} = \frac{v^2\cos 2A}{g}$$

إذا كانت $\theta = 45^\circ - A$

$$d = \frac{v^2\sin 2\,(45^\circ - A)}{g} = \frac{v^2\sin(90^\circ - 2A)}{g} = \frac{v^2(\sin 90^\circ\cos 2A - \cos 90^\circ\sin 2A)}{g} = \frac{v^2(1 \cdot \cos 2A - 0 \cdot \sin 2A)}{g} = \frac{v^2\cos 2A}{g}$$

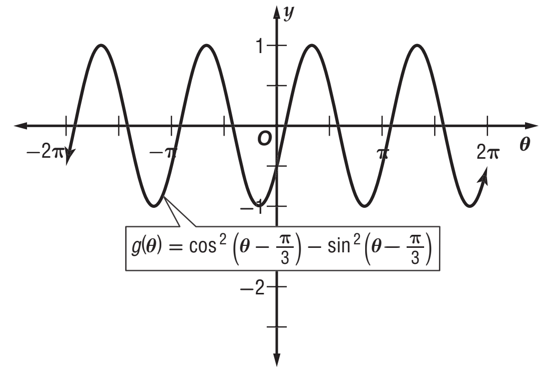
26a)



26b) $4\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

$4\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = 4\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{4} - \cos\theta\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$,

26c)



26d) $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right);$

$$\cos\left(2\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$= \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

27) كلاهما خطأ؛ حيث طرح سعيد الجذور التربيعية بطريقة غير صحيحة، كما استعمل سلمان متطابقة نصف الزاوية، ولكنه أخطأ في إيجاد قيمة $\cos 30°$ في المتطابقة فكتبها $\frac{1}{2}$ بدلاً من $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

29) إذا أعطيت فقط قيمة $\cos\theta$ فإن $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها. وإذا أعطيت فقط قيمة $\sin\theta$ ، فإن $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ هي أفضل متطابقة يمكن استعمالها. وإذا أعطيت القيمتين $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، فإن $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ هي الأفضل.

30) $\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$$
$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$
$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

31)

$1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$	متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية
$1 - 2\sin^2\frac{A}{2} = \cos A$	عوّض $\frac{A}{2}$ بدلًا من θ و A بدل 2θ.
$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$	حلّ بالنسبة لـ $\sin^2\frac{A}{2}$.
$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.
$2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$	متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية
$2\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \cos A$	عوّض $\frac{A}{2}$ بدلًا من θ ، و A بدلاً من 2θ.
$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$	حلّ بالنسبة لـ $\cos^2\frac{A}{2}$.
$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$	خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

43) $\tan\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$
$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}}$$
$$= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2}{1}}$$
$$= |2 - \sqrt{3}|$$
$$= 2 - \sqrt{3}$$

الدرس 5-3 ، ص (163)

32) $\sin 2x < \sin x$

$$\sin 2x - \sin x < 0$$
$$2\sin x\cos x - \sin x < 0$$
$$\sin x\,(2\cos x - 1) < 0$$

وحتى يكون المقدار $\sin x(2\cos x - 1)$ سالبًا يجب أن يكون المقداران $2\cos x - 1$ ، $\sin x$ مختلفين في الإشارة ويتحقق ذلك في كل من الفترتين

$\frac{\pi}{3} < x < \pi, \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$ ، ولهذا فإن حل المتباينة الأصلية هو:

$$\frac{\pi}{3} < x < \pi, \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$$

37) $\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ أو $-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

38) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

39) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

40) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ أو $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

41) $\sin(270 - \theta) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

نبسط الطرف الأيسر

$$\sin(270 - \theta)$$
$$= \sin 270\cos\theta - \cos 270\sin\theta$$
$$= -\cos\theta - 0 \cdot \sin\theta$$
$$= -\cos\theta$$

ويساوي الطرف الأيمن

(42 $\cos(90+\theta) \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$\cos 90 \cos\theta - \sin 90 \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$0 \cdot \cos\theta - 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} -\sin\theta$

$-\sin\theta = -\sin\theta$

(43 $\cos(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$\cos 90° \cos\theta + \sin 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$0 \cdot \cos\theta + 1 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \sin\theta$

$\sin\theta = \sin\theta \checkmark$

(44 $\sin(90° - \theta) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\sin 90° \cos\theta - \cos 90° \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$1 \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta - 0 \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta \checkmark$

(45

(a $\dfrac{v^2 \sin^2\theta}{2g} \stackrel{?}{=} \dfrac{v^2 \tan^2\theta}{2g \sec^2\theta}$

$\dfrac{v^2 \sin^2\theta}{2g} = \dfrac{v^2 \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{2g \dfrac{1}{\cos^2\theta}}$

$\dfrac{v^2 \sin^2\theta}{2g} = \dfrac{v^2 \sin^2\theta}{2g}$

(b $h = \dfrac{(110)^2 \sin^2 80}{2(9.8)} \approx 598.73 \text{ m}$

(46 المجال: $[-5, \infty)$

المدى: $[-5, \infty)$

دليل الدراسة والمراجعة، ص (166, 167)

(30 $\sin(\theta + 90) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\sin\theta \cos 90° + \cos\theta \sin 90° \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$(\sin\theta)(0) + (\cos\theta)(1) \stackrel{?}{=} \cos\theta$

$\cos\theta = \cos\theta \checkmark$

(31 $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$\sin\dfrac{3\pi}{2}\cos\theta - \cos\dfrac{3\pi}{2}\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$(-1)\cos\theta - (0)\sin\theta \stackrel{?}{=} -\cos\theta$

$-\cos\theta = -\cos\theta \checkmark$

(32 $\tan(\theta - \pi) \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\dfrac{\tan\theta - \tan\pi}{1 + \tan\theta \tan\pi} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\dfrac{\tan\theta - 0}{1 + (\tan\theta)(0)} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\dfrac{\tan\theta}{1} \stackrel{?}{=} \tan\theta$

$\tan\theta = \tan\theta \checkmark$

(33 $\sin 2\theta = \dfrac{24}{25}, \cos 2\theta = \dfrac{7}{25}, \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$, and $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(34 $\sin 2\theta = \dfrac{\sqrt{15}}{8}, \cos 2\theta = \dfrac{7}{8}, \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{15}}}{4},$

$\cos\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{15}}}{4}$

(35 $\sin 2\theta = -\dfrac{4\sqrt{5}}{9}, \cos 2\theta = -\dfrac{1}{9}, \sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$, and

$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(36a $c^2 = 90^2 + 90^2; c^2 = 8100 + 8100;$

$c^2 = 16200; c = 90\sqrt{2}$

(36b $\sin 45° = \dfrac{90}{90\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(36c $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}; \sin\dfrac{90}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 90}{2}};$

$\sin\dfrac{90}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-0}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

اختبار الفصل، ص (169)

(9

$\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sin\theta\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\cos\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\dfrac{1}{\cos\theta} \stackrel{?}{=} \sec\theta$

$\sec\theta = \sec\theta \checkmark$

(10

$\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

$\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\cos\theta}{\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}}$

$\dfrac{\cos^2}{1-\sin\theta} \stackrel{?}{=} \cos\theta \cdot \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

$\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \checkmark$

(11

$(\tan\theta + \cot\theta)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta \sec^2\theta$

$\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta \sec^2\theta$

$\left(\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2}{\cos\theta \sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta \sec^2\theta$

$\left(\dfrac{1}{\cos\theta \sin\theta}\right)^2 \stackrel{?}{=} \csc^2\theta \sec^2\theta$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} \cdot \dfrac{1}{\sin^2\theta} \stackrel{?}{=} \csc^2\theta \sec^2\theta$

$\sec^2\theta \csc^2\theta = \csc^2\theta \sec^2\theta \checkmark$

(12

$\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\dfrac{1}{\sec\theta} + \dfrac{\sec\theta}{\sec\theta} \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} \cdot \dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$

$\cos\theta + 1 \stackrel{?}{=} \dfrac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$

$\cos\theta + 1 = 1 + \cos\theta \checkmark$

الفصل 4

مخطط الفصل

التقويم التشخيصي
اختبار سريع ص (171)

	الدرس 4-1 (3) حصص	الدرس 4-2 (4) حصص	الدرس 4-3 (3) حصص
العنوان	**القطوع المكافئة**	**القطوع الناقصة والدوائر**	**القطوع الزائدة**
الأهداف	• تحليل معادلات قطوع مكافئة وتمثيلها بيانيًا. • كتابة معادلات قطوع مكافئة.	• تحليل معادلات القطوع الناقصة والدوائر وتمثيلها بيانيًا. • كتابة معادلات القطوع الناقصة والدوائر.	• تحليل معادلات القطوع الزائدة وتمثيلها بيانيًا. • كتابة معادلات القطوع الزائدة.
المفردات	القطع المخروطي، المحل الهندسي، القطع المكافئ، البؤرة، الدليل، محور التماثل، الرأس، الوتر البؤري	القطع الناقص، البؤرتان، المحور الأكبر، المركز، المحور الأصغر، الرأسان، الرأسان المرافقان، الاختلاف المركزي	القطع الزائد، المحور القاطع، المحور المرافق
تمثيلات متعددة	ص (179)		ص (195)
مصادر الدرس	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (6) دون • تدريبات حل المسألة، ص (8) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (9) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (22) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (10) دون • تدريبات حل المسألة، ص (12) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (13) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (23) دون ضمن فوق	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (14) دون • تدريبات حل المسألة، ص (16) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (17) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (24) دون ضمن فوق
التقنيات لكل درس	• تسجيل مرئي	• إنترنت	• صفحة على شبكة الإنترنت
تنويع التعليم	ص (173, 176, 179)	ص (181, 187)	ص (190, 195)

التقويم التكويني
اختبار منتصف الفصل
ص (197)

المفاتيح: دون دون المتوسط ضمن ضمن المتوسط فوق فوق المتوسط

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

خطة زمنية مقترحة		
التدريس	مراجعة وتقويم	المجموع
(19) حصة	(3) حصص	(22) حصة

الدرس 4-4 (4) حصص	توسع 4-4 حصة واحدة	الدرس 4-5 (3) حصص	توسع 4-5 حصة واحدة
تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها	**معمل الحاسبة البيانية** أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية	**المعادلات الوسيطية**	**معمل الحاسبة البيانية** التمثيل بالمعادلات الوسيطية
• تحديد أنواع القطوع المخروطية من معادلاتها. • إيجاد دوران المحورين لكتابة معادلات قطوع مخروطية بعد دورانها.	• استعمال الحاسبة البيانية لتقريب حلول أنظمة من المعادلات والمتباينات غير الخطية.	• تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا. • حل مسائل تتعلق بحركة المقذوفات.	• استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة الوسيطية.
		المعادلة الوسيطية، المتغير الوسيط، اتجاه المنحنى، المنحنى الوسيطي	
ص (204)		ص (213)	
مصادر المعلم للأنشطة الصفية • تدريبات إعادة التعليم، ص (18) دون • تدريبات حل المسألة، ص (20) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (21) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (25) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية	**مصادر المعلم للأنشطة الصفية** • تدريبات إعادة التعليم، ص (22) دون • تدريبات حل المسألة، ص (24) دون ضمن فوق • التدريبات الإثرائية، ص (25) ضمن فوق **كتاب التمارين** • ص (26) دون ضمن فوق	**المواد اللازمة** • الآلة الحاسبة البيانية
• السبورة التفاعلية		• مدونة	
ص (200)		ص (211, 213)	

التقويم الختامي
- دليل الدراسة والمراجعة ص (215-218)
- اختبار الفصل ص (219)

التقويم والمعالجة

	التشخيص	المعالجة
التقويم التشخيصي	**بداية الفصل 4**	
	التهيئة للفصل 4 ، ص (171)	مخطط المعالجة، ص (171)
	بداية كل درس	
	فيما سبق، والآن، لماذا؟	مراجعة المفاهيم والمهارات الأساسية مع الطلاب
التقويم التكويني	**خلال كل درس وبعده**	
	تحقق من فهمك، لكل مثال مسائل مهارات التفكير العليا مراجعة تراكمية أمثلة إضافية تنبيه! الخطوة 4، التقويم الاختبارات القصيرة ، ص (68, 69) www.obeikaneducation.com	تنويع التعليم تنويع الواجبات المنزلية تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4 www.obeikaneducation.com
	منتصف الفصل	
	اختبار منتصف الفصل، ص (197) اختبار منتصف الفصل، ص (70) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4 www.obeikaneducation.com
	نهاية الفصل	
	دليل الدراسة والمراجعة، ص (215) اختبار الفصل، ص (219) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4 www.obeikaneducation.com
التقويم الختامي	**بعد انتهاء الفصل 4**	
	اختبار الفصل، النماذج 1, 2A, 2B ، ص (72, 74, 76) اختبار الفصل، النموذج 3 ، ص (78) اختبار المفردات ، ص (71) اختبار الفصل ذو الإجابة المطولة ، ص (80) اختبار تراكمي ، ص (81) www.obeikaneducation.com	تدريبات إعادة التعليم، الفصل 4 www.obeikaneducation.com

كتاب الطالب — دليل المعلم — مصادر المعلم للأنشطة الصفية — دليل التقويم — شبكة الإنترنت

تنويع التعليم

البديل 1 جميع المستويات دون ضمن فوق

المتعلمون اللغويون وزِّع الطلاب في مجموعات، واطلب إليهم اختيار قطع مخروطي؛ لتحضير درس وتقديمه إلى الصف. على كل مجموعة أن تعد وسيلة بصرية واحدة على الأقل، وأن تحضّر ثلاثة أمثلة لتوضيح المحتوى. وعلى طلاب الصف أن يشاركوا في توجيه الأسئلة والإجابة عنها. وينبغي لكل مجموعة أن تكتب خلاصةً لخطة الدرس بالإضافة إلى الوسيلة البصرية، وذلك عند انتهاء التقديم.

المتعلمون المتفاعلون وزِّع الطلاب في مجموعات صغيرة، وعيّن لهم معادلات قطوع مخروطية تشابه التمارين 11–5 في الدرس 4–4 ؛ ليحددوا نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة. واطلب إليهم أن يستعملوا طرقًا مختلفة لتحديد نوع القطع المخروطي مثل: استعمال المميز، وتمثيل المعادلة بيانيًّا وتحويل المعادلة إلى الصيغة القياسية.

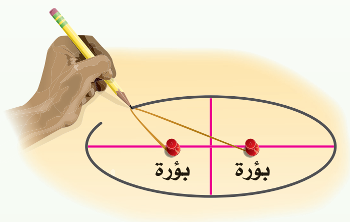
البديل 2 دون المتوسط دون

اطلب إلى كل طالب أن يعمل جدولاً يتضمن خلاصة عن كل قطع مخروطي تعلمه في هذا الفصل.

زوّد الطلاب بقائمة الخصائص التي ينبغي أن توجد في وصف كل قطع مخروطي مثل: الشكل العام والصيغة القياسية للمعادلة ووصف المميز وتحديد خصائص المعادلة وهكذا..

البديل 3 فوق المتوسط فوق

شجّع الطلاب على إجراء أبحاث يتم من خلالها رسم مختلف القطوع المخروطية، ويمكن استعمال الدبابيس والخيوط والأقلام في ذلك. فيمكن مثلًا رسم قطع ناقص كما هو موضّح في الشكل أدناه.



تحدّ الطلاب في إيجاد نماذج للقطوع المخروطية تعتمد الأبعاد الثلاثة. شجعهم على البحث في الإنترنت، أو استعمال برمجيات للرياضيات من أجل إنجاز هذه المهمة.

المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الفصل 4

مواضيع ذات علاقة من الجبر

- تحديد الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًّا.
- تمثيل الحركة باستعمال معادلات تربيعية.
- تحديد الدوال الرئيسة (الأم) ووصفها وتمثيلها بيانيًّا.

الفصل 4

- تحليل معادلات القطوع الآتية: القطع المكافئ، الناقص، الدائرة، والقطع الزائد وكتابتها وتمثيلها بيانيًّا.
- تحديد أنواع القطوع المخروطية باستعمال المعادلات.
- كتابة معادلات القطوع المخروطية بعد دورانها باستعمال دوران المحورين.
- تمثيل القطوع المخروطية بعد دورانها.
- تمثيل المعادلات الوسيطية.
- حل مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

ما بعد الفصل 4

الإعداد لحساب التفاضل والتكامل

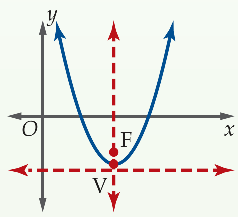
- إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.
- تحديد المعادلات القطبية للقطوع المخروطية.
- كتابة المعادلة القطبية لقطع مخروطي وتمثيلها بيانيًّا.

نظرة على الدروس

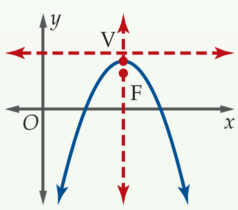
4-1 القطوع المكافئة

تنتج القطوع المخروطية من تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس. القطع المكافئ هو قطع مخروطي يمثِّل المحل الهندسي لنقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى البؤرة مساويًا لبعدها عن مستقيم ثابت يسمى الدليل. يمكن تمثيل القطوع المكافئة بمعادلات ومنحنيات على النحو الآتي:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



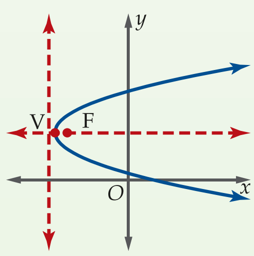
$p > 0$



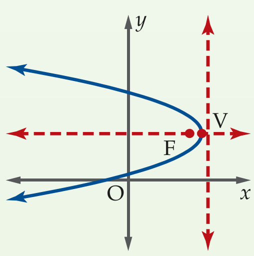
$p < 0$

الاتجاه: رأسي
الرأس: (h, k)
البؤرة: $(h, k+p)$
محور التماثل: $x = h$
الدليل: $y = k - p$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$



$p > 0$



$p < 0$

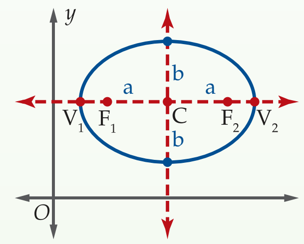
الاتجاه: أفقي
الرأس: (h, k)
البؤرة: $(h+p, k)$
محور التماثل: $y = k$
الدليل: $x = h - p$

القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

4-2 القطوع الناقصة والدوائر

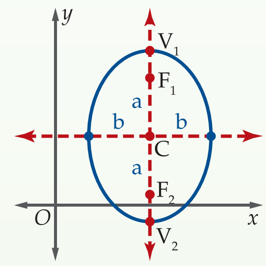
القطع الناقص هو المحل الهندسي لنقاط المستوى التي يكون مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا. يمكن تمثيل القطوع الناقصة بمعادلات ومنحنيات على النحو الآتي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: أفقي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
الرأسان: $(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$
المحور الأكبر: $y = k$
المحور الأصغر: $x = h$
$c^2 = a^2 - b^2$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: رأسي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h, c \pm k)$
الرأسان: $(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$
المحور الأكبر: $x = h$
المحور الأصغر: $y = k$
$c^2 = a^2 - b^2$

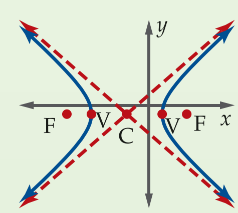
الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) **ونصف قطرها** r **هي:** $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

4-3 القطوع الزائدة

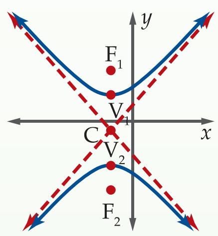
القطع الزائد هو المحل الهندسي لنقاط المستوى التي يكون الفرق المطلق لبعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا. يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يقتربان من خطي تقارب. يقطع المحور القاطع منحنى القطع الزائد ويمر بالرأسين. أمّا المحور المرافق فهو عمودي على المحور القاطع ولا يتقاطع مع منحنى القطع الزائد ويمر بمركز القطع، ويمكن تمثيل القطوع الزائدة بمعادلات أو منحنيات على النحو التالي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

الاتجاه: أفقي
المركز: (h, k)
الرأسان: $(h \pm a, k)$
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
المحور القاطع: $y = k$
المحور المرافق: $x = h$
خطا التقارب: $y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$
$a^2 + b^2 = c^2$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: رأسي
المركز: (h, k)
الرأسان: $(h, k \pm a)$
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
المحور القاطع: $x = h$
المحور المرافق: $y = k$
خطا التقارب: $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
$a^2 + b^2 = c^2$

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

يمكن تحديد نوع القطع الممثّل بالمعادلة
$A\,x^2 + Bxy + Cy^2 + DX + Ey + F = o$
باستعمال المميز والذي يساوي $B^2 - 4AC$.

فإذا كان المميز سالبًا، فإن القطع ناقص، وإذا كان المميز موجبًا، فإن القطع زائد، وإذا كان المميز صفرًا، فإن القطع مكافئ.

عندما تحتوي المعادلة العامة للقطع المخروطي على الحد xy، فإن محوري القطع قد دارا، ولا يكونان موازيين لمحوري الإحداثيات. يمكن كتابة معادلات القطوع بالصورة القياسية عند دوران محوري الإحداثيات بزاوية قياسها θ، ويُرمز للمحورين بـ x' و y'.

تستعمل المعادلتان الآتيتان لكتابة معادلة في المستوى $x'y'$ عندما تكون المعادلة معطاة في مستوى xy.

$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta$ و $y = x'\sin\theta - y'\cos\theta$

عوّض هذه القيم في المعادلة المعطاة لـِ y , x ثم بسّط المعادلة.

ولكتابة معادلة في مستوى xy عندما تكون معطاة في مستوى $x'y'$ وباستعمال زاوية، فإننا نستعمل المعادلتين الآتيتين لـ x' و y' .

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = x\sin\theta - y\cos\theta$

عوّض هذه القيم في المعادلة المعطاة لـِ x' و y' ثم بسّطها.

4-5 المعادلات الوسيطية

يمكن استعمال المعادلات الوسيطية للدلالة على موقع جسم كدالة للزمن. يتحدد شكل المنحنى بالصورة الديكارتية للمعادلة باستعمال x و y. توجد معادلتان وسيطيتان لكل حالة: معادلة تمثل المركبة الأفقية $x = f(t)$ ، والأخرى تمثل المركبة الرأسية $y = g(t)$.

المتغيرات الوسيطية رموز اختيارية، وهي في الغالب زمن أو قياس زاوية. يتم إظهار اتجاه المنحنى بأسهم على المنحنى. ويتضمن تعيين النقاط بحسب ترتيب قيم t المتزايدة على طول المنحنى.

مشروع الفصل

مجرات سماوية

يُطبّق الطلاب ما تعلموه حول القطوع المخروطية؛ ليتفحّصوا مسارات أجسام في الفضاء.

- يمكن للطلاب العمل في مجموعات من ثلاثة طلاب أو أربعة، تقوم كل مجموعة باختيار الكوكب المفضل، ثم تبحث عن حقائق حول مداره البيضي حول الشمس. اطلب إلى كل مجموعة تحديد أبعد مسافة، وأقرب مسافة بين الشمس والكوكب. اطلب إليهم كذلك تحديد نسبة الاختلاف المركزي $\frac{c}{a}$ لمدار كل كوكب.
- اطلب إليهم تحديد كل من a, b, c من خلال افتراض أن الشمس تقع في إحدى البؤرتين، ومن خلال أبعد نقطة للكوكب عن الشمس وأقرب نقطة، إضافة إلى نسبة الاختلاف المركزي.
- اطلب إليهم تحديد معادلة المدار البيضي، مع تحديد أطول مسافة بين الكوكب والشمس، والمسافة بين موقع الكوكب عندما يكون في موقع المنتصف بين أبعد نقطة وأقرب نقطة للكوكب في المدار.
- كل قطع مخروطي له نسبة اختلاف مركزي مصاحب له. اطلب إلى الطلاب البحث عن قاعدة نسبة الاختلاف المركزي لكل من القطوع الناقصة والدوائر والقطوع المكافئة والقطوع الزائدة.

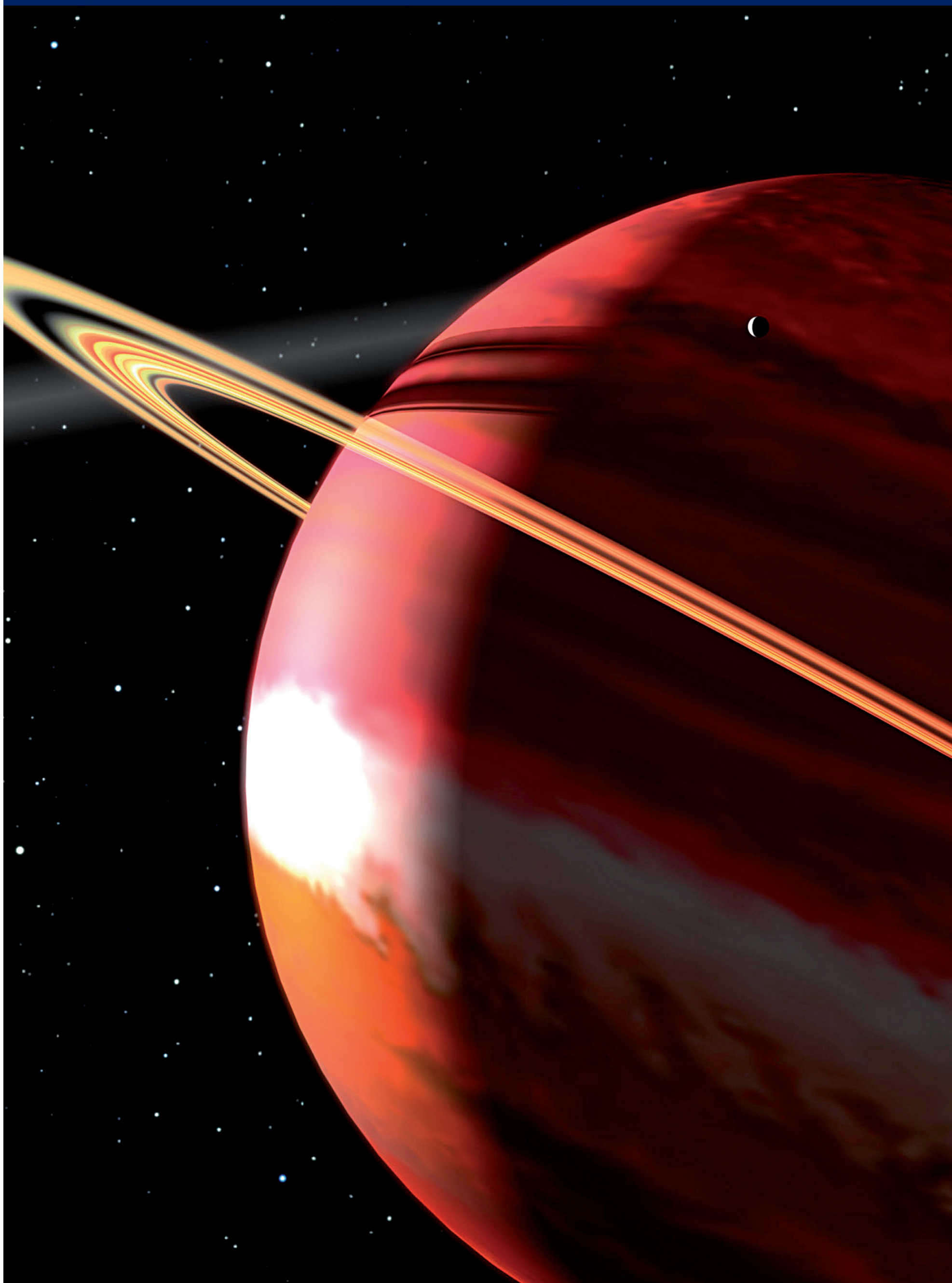
المفردات: قدّم المفردات في الفصل باستعمال الطريقة الآتية:

تعريف: القطع المخروطي هو الشكل الناتج عندما يقطع مستوى ما مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس. تتضمّن بعض القطوع المخروطية الشائعة القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.

مثال: $x^2 + 4y - 6 = 0$ هي معادلة قطع مخروطي.

سؤال: هل تمثل المعادلة $x^2 - 6y + 5 = 0$ قطعًا مخروطيًا؟ بيّن ذلك. نعم هي معادلة قطع مكافئ

الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية
Conic Sections and Parametric Equations



فيما سبق:

درستُ حلَ المعادلات المثلثية. الدرس (3-5)

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضية تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلها البياني.

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة مرة، وأخرى متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (66) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

التهيئة للفصل 4

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي: **1–6) انظر الهامش.**

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$ 2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$ 4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$ 6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.
$x = 25$; $(0, 550)$; $(25, 543.75)$

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ **1** 9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$ **108**

10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **-8** 11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$ **100**

12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$ **121** 13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$ **-172**

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن: **14, 15) انظر الهامش.**

14) $x^2 + 8x$

15) $x^2 - 18x$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًا: **16, 17) انظر ملحق الإجابات.**

16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًّا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثّل هذا الموقف، ومثّلها بيانيًّا.
$f(x) = \frac{50}{x}$ وللتمثيل البياني انظر ملحق الإجابات.

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

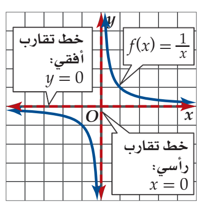
1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.

2) ربّع الناتج في الخطوة (1).

3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



المعالجة

استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد المعالجة المناسبة.
تساعدك العبارة "إذا ... فقم" في الجدول أدناه على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر معالجة لكل مستوى.

مخطط المعالجة

المستوى 1 — ضمن المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من التمارين

فقم بمراجعة محور التماثل والمقطع y والرأس وإيجاد المميز للدالة التربيعية، وإكمال المربع للعبارات التربيعية، وتمثيل دوال المقلوب بيانيًا.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

المستوى 2 — دون المتوسط

إذا أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من التمارين

فقم بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.

زيارة الموقع www.obeikaneducation.com

إجابات:

1) $x = 1;\ -12;\ (1, -13)$

2) $x = -1;\ 6;\ (-1, 5)$

3) $x = -1;\ -8;\ (-1, -10)$

4) $x = 3;\ 3;\ (3, -15)$

5) $x = 2;\ -4;\ (2, -16)$

6) $x = -1;\ -1;\ (-1, -5)$

14) $x^2 + 8x + 16$

15) $x^2 - 18x + 81$

تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها وسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

4-1 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-1

تحديد الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.

الدرس 4-1

تحليل معادلات قطوع مكافئة وتمثيلها بيانيًا.

كتابة معادلات قطوع مكافئة.

ما بعد الدرس 4-1

استعمال دوران المحورين لكتابة معادلات القطع المكافئ بعد الدوران.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما لون الزئبق؟ فضي
- لماذا يُعدّ الزئبق بديلًا جيدًا عن المرآة الاعتيادية أو المعدن المصقول؟ لأنه يعكس صور الأشياء.
- لماذا يُعدّ القطع المكافئ الشكل المثالي لمرآة التلسكوب؟ لأن القطع المكافئ يعكس كل الأشعة المتوازية القادمة إلى النقطة نفسها.

4-1 القطوع المكافئة Parabolas

فيما سبق:

درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:

- أحلّ معادلات قطوع مكافئة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات:

القطع المخروطي conic section

المحل الهندسي locus

القطع المكافئ parabola

البؤرة focus

الدليل directrix

محور التماثل axis of symmetry

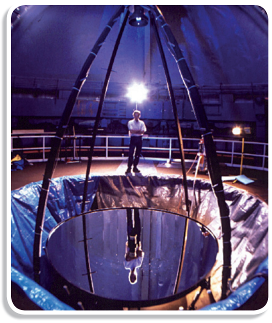
الرأس vertex

الوتر البؤري latus rectum

www.obeikaneducation.com

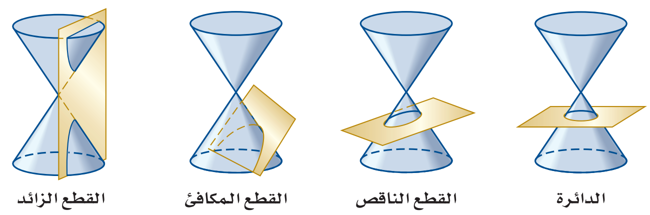
لماذا؟

استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.



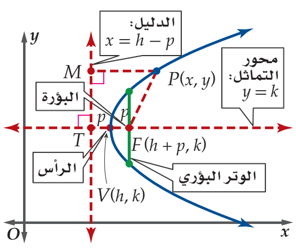
القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذا الفصل هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذا الفصل.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا: **المحل الهندسي** هو مجموعة النقاط التي تحقّق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط المستوية التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى **البؤرة** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمّى **الدليل**.



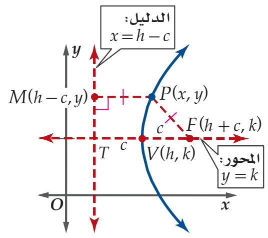
والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ: درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ كمحل هندسي؛ لإيجاد المعادلة العامة للقطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل، أو إلى اليمين أو اليسار.

مصادر الدرس 4 - 1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (173 ,176)	• تنويع التعليم ص (173 ,176)	• تنويع التعليم ص (176 ,179)
كتاب التمارين	• ص (22)	• ص (22)	• ص (22)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-y)^2} \quad \text{قانون المسافة بين نقطتين}$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-c)]^2+0^2 \quad \text{ربّع الطرفين}$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-c)+(h-c)^2 \quad \text{فك الأقواس}$$

$$x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2 \quad \text{فك الأقواس}$$

$$(y-k)^2 = 4xc-4hc \quad \text{بسّط}$$

$$(y-k)^2 = 4c(x-h) \quad \text{حلّل}$$

قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع

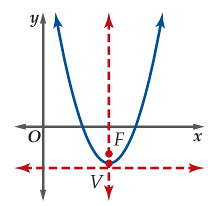
ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.

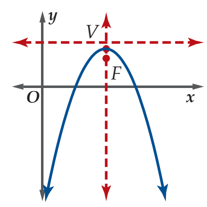
وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

مفهوم أساسي — خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



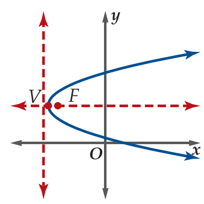
$c > 0$



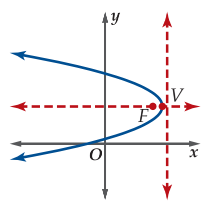
$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k + c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



$c > 0$



$c < 0$

الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h + c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل.

تحليل القطوع المخروطية وتمثيلها بيانيًا

المثالان 2 , 1 يبينان كيفية تحديد خصائص القطع المكافئ واستعمالها لتمثيل منحناه بيانيًّا.

مثال 3 يبين كيفية كتابة معادلة قطع مكافئ على الصورة القياسية.

المحتوى الرياضي

القطع المكافئ خاصية الانعكاس للقطع المكافئ مهمة؛ بسبب تطبيقاتها العملية. افترض أن P نقطة على منحنى القطع المكافئ. إذا رسَمت قطعة مستقيمة تصل بين P والبؤرة ورسَمت نصف مستقيم يمر من P موازيًا لمحور التماثل، فإن كلًّا من القطعة المستقيمة ونصف المستقيم يكوّنان مع المماس عند P زاويتين متطابقتين دائمًا، وهذا يعني أن أي نصف مستقيم منطلق من البؤرة سينعكس على منحنى القطع إلى الخارج موازيًا لمحور التماثل. كما أن أي نصف مستقيم داخل إلى منحنى القطع المكافئ ومواز لمحور التماثل سينعكس في البؤرة. ويمكن مشاهدة هذه الخاصية في أطباق استقبال الأقمار الاصطناعية.

إرشادات للمعلم الجديد

البعد عن الدليل ذكّر الطلاب بأن بعد نقطة عن مستقيم كالدليل مثلًا يُقاس بطول العمود النازل من النقطة على الدليل.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون المنطقيون اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنى قطع مكافئ رأسه في نقطة الأصل، ويمر بالنقاط $(-4, 5), (4, 5), (-2, 1), (2, 1)$. ثم اطلب إليهم تعيين البؤرة عند النقطة $(0, 1)$ والدليل $y = -1$. واطلب إليهم أيضًا اختيار عدّة نقاط على المنحنى، وقياس البعد بين كل نقطة والبؤرة باستعمال مسطرة وقياس البعد أيضًا بين كل نقطة والدليل، وناقش معهم ملاحظاتهم. فمثلًا ناقشهم كيف يؤثر تغيير مواقع البؤرة في الدليل، وكيف أن البؤرة والدليل يؤثران في شكل منحنى القطع المكافئ.

مـثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

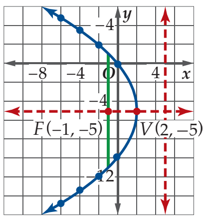
حدّد خصائص القطع المكافئ $(y+5)^2 = -12(x-2)$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y ، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًّا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\|4c\|$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

x	y
0	$-0.1, -9.9$
-2	$1.9, -11.9$
-4	$3.5, -13.5$
-6	$4.8, -14.8$



إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:
- مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x ، وكانت $c < 0$.
- مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y ، وكانت $c < 0$.

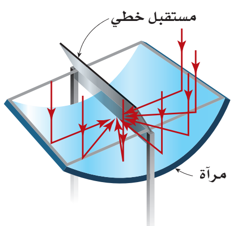
تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات.

1A) $8(y+3) = (x-4)^2$

1B) $2(x+6) = (y+1)^2$

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ

طاقة شمسية : يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$ ، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع ، أين يقع المستقبل الخطِّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟



يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k+c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

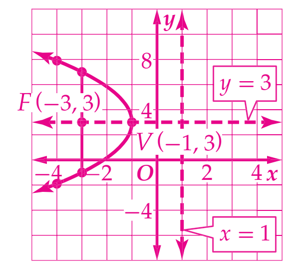
تحقق من فهمك

2) **فلك:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل التلسكوب الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8\,(y-6)$ ، حيث $-5 \le x \le 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟ **11.2 ft فوق الرأس**

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

مثالان إضافيان

1 حدِّد خصائص القطع المكافئ $(y-3)^2 = -8(x+1)$ ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.
المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليسار
الرأس: $(-1, 3)$؛ البؤرة: $(-3, 3)$؛ الدليل: $x = 1$ ؛ محور التماثل: $y = 3$



2 **فلك** تأخذ مرآة منظار فلكي شكلَ قطع مكافئ معادلته $y^2 = 2668x$ حيث يقاس كل من x و y بالبوصات.
ما المسافة بين البؤرة والرأس للجهاز المستقبِل؟ **667 in.**

التعليم باستعمال التقنيات

تسجيل مرئي وزِّع الطلاب إلى مجموعات ، وأعطِ كل مجموعة معادلة قطع مكافئ مختلفة عن المجموعات الأخرى. واطلب إليهم تسجيل فيديو؛ لتوضيح كيفية إيجاد جميع الخصائص والمعلومات عن القطع المكافئ. واطلب إلى كل مجموعة مناقشة الفيديو الذي أعدوه أمام طلاب الصف.

إرشادات للمعلم الجديد

تمثيل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا عندما يعرف الطلاب رأس القطع المكافئ ونقطة على كل جانب من جانبي محور التماثل، فإنه بإمكانهم استعمال التماثل لملاحظة الشكل العام للقطع المكافئ لرسم منحناه.

مثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ المعادلة الأصلية

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$ أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$ كمِّل المربع

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$ $\quad -\frac{1}{4}(-36) = 9$

$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$ حلِّل

$-4(y - 15) = (x - 6)^2$ اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

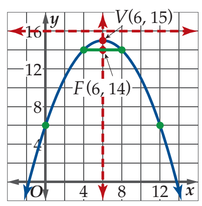
الرأس: $(6, 15)$ $\quad (h, k)$ $\qquad$ الدليل: $y = 16$ $\quad y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $\quad (h, k + c)$ $\qquad$ محور التماثل: $x = 6$ $\quad x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $\quad |4c|$

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.

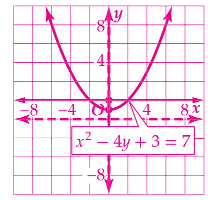
x	y
0	6
4	14
8	14
12	6



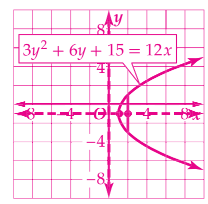
تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$ $\qquad$ **3B)** $3y^2 + 6y + 15 = 12x$

3A) $x^2 = 4(y + 1)$،
الرأس: $(0, -1)$،
البؤرة: $(0, 0)$،
الدليل: $y = -2$
محور التماثل: $x = 0$
طول الوتر البؤري: 4



3B) $(y + 1)^2 = 4(x - 1)$،
الرأس: $(1, -1)$،
البؤرة: $(2, -1)$،
الدليل: $x = 0$
محور التماثل: $y = -1$
طول الوتر البؤري: 4



معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$، وتكون قيمة c هي $3 - 1 = 2$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

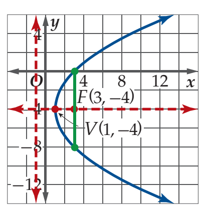
$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ الصورة القياسية

$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$ $\quad c = 2, h = 1, k = -4$

$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$ بسِّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

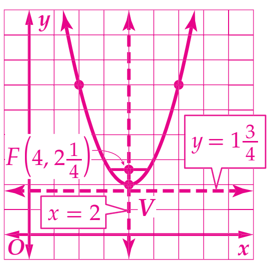
الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

مثال إضافي

3 اكتب المعادلة $x^2 - 8x - y = -18$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى
$(y - 2) = (x - 4)^2$؛
الرأس: $(4, 2)$؛
البؤرة: $\left(4, 2\frac{1}{4}\right)$؛
الدليل: $y = 1\frac{3}{4}$؛
محور التماثل $x = 4$
طول الوتر البؤري 1



معادلات القطوع المكافئة

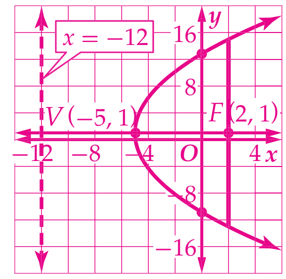
مثال 4 يبيّن كيفية كتابة معادلة قطع مكافئ بمعلومية بعض خصائصه.

مثال إضافي

4 اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

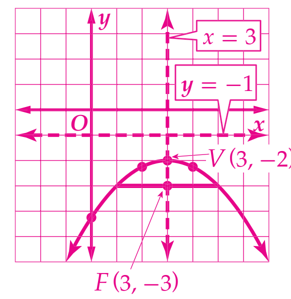
a) البؤرة $(2, 1)$، والرأس $(-5, 1)$.

$(y-1)^2 = 28(x+5)$



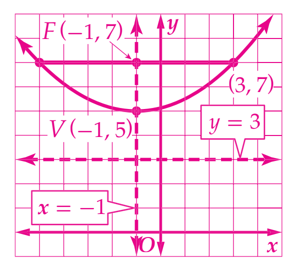
b) الرأس $(3, -2)$، والدليل $y = -1$.

$(x-3)^2 = -4(y+2)$



c) البؤرة $(-1, 7)$، ومفتوح إلى الأعلى ويمر بالنقطة $(3, 7)$.

$(x+1)^2 = 8(y-5)$



b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

بما أن الدليل مستقيم أفقيًّا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

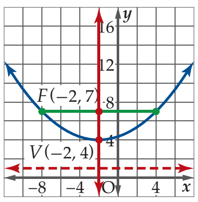
استعمل معادلة الدليل لتجد c.

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1.

عوِّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	الصورة القياسية
$[x-(-2)]^2 = 4(3)(y-4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x+2)^2 = 12(y-4)$	بسِّط

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times 3| = 12$، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

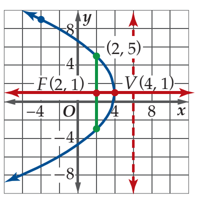
بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h+c, k) = (2, 1)$، والرأس (h, k) هو $(2-c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	الصورة القياسية
$(5-1)^2 = 4c[2-(2-c)]$	$h = 2-c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسِّط
$4 = c^2$	بسِّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$، والرأس هو $(4, 1)$.

$(y-1)^2 = -8(x-4)$

طول الوتر البؤري يساوي $|4c| = |4 \times (-2)| = 8$، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

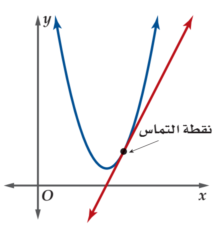
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(9, -2)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

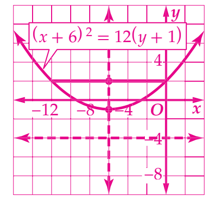
يمكن رسم مماس لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



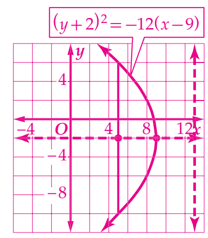
إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

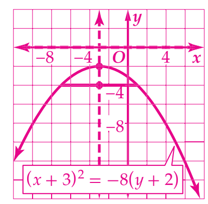
4A) $(x+6)^2 = 12(y+1)$



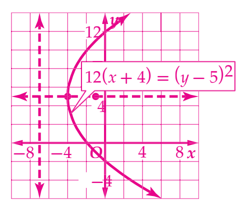
4B) $(y+2)^2 = -12(x-9)$



4C) $(x+3)^2 = -8(y+2)$



4D) $12(x+4) = (y-5)^2$



تنويع التعليم

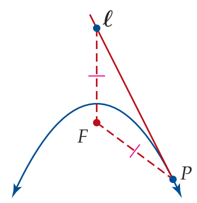
دون ضمن فوق

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى كل طالب رمي كرة قوسيًّا إلى أعلى، وملاحظتها عندما ترتطم بجدار عليه علامات ارتفاع مختلفة. واطلب إليه قياس أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة. وتحديد معادلة تعبّر عن مسارها معتبرًا النقطة التي رميت منها الكرة هي رأس القطع المكافئ. ثم قارن بين نتائج الطلاب وناقشهم في كيفية الحصول على معادلات مختلفة بناءً على الأشكال المختلفة للقطوع المكافئة.

مفهوم أساسي — مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.



مثال 5 — كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

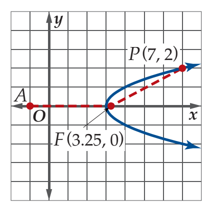
المنحنى مفتوح أفقيًّا.

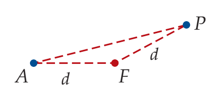
$x = y^2 + 3$ — المعادلة الأصلية

$1(x - 3) = (y - 0)^2$ — الصورة القياسية

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ — صيغة المسافة

$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2}$ — $(x_2, y_2) = (7, 2)$ و $(x_1, y_1) = (3.25, 0)$

$= 4.25$ — بسّط

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل)

بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$m = \frac{2 - 0}{7 - (-1)} = \frac{1}{4}$ — صيغة الميل

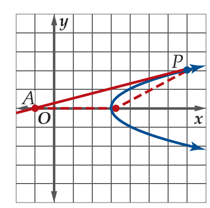
$y - y_1 = m(x - x_1)$ — معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة

$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7)$ — $m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$

$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4}$ — خاصية التوزيع

$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$ — اجمع 2 إلى الطرفين

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 4.1.1



الشكل 4.1.1

تحقق من فهمك

5A) $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$ $y = -8x$

5B) $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$

معادلة مماس القطع المكافئ

مثال 5 يبيّن كيفية كتابة معادلة مماس القطع المكافئ عند نقطة معطاة.

مثال إضافي

5 اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ الذي معادلته $y = x^2 - 2$ عند النقطة $(2, 2)$. $y = 4x - 6$

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 27–1 للتحقق من استيعاب الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع عند إكمال المربع لتحويل المعادلات إلى الصورة القياسية في الأسئلة 14–9، على الطلاب أن يجمعوا العدد نفسه إلى طرفي المعادلة؛ حتى لا تتغير قيمتها. إذا كان هناك معامل ثابت لحدود x، فإن هذا المعامل يجب أن يُضرب في العدد الناتج من إكمال المربع قبل جمعه إلى العدد أو طرحه منه خارج حدود x.

إجابات:

15) $(x+9)^2=-12(y+4)$

16) $(x-3)^2=20(y+2)$

17) $(y+1)^2=24(x+4)$

18) $(y-4)^2=12(x-8)$

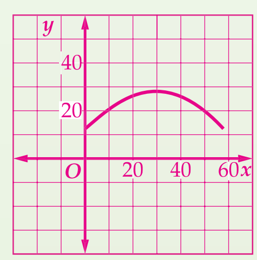
19) $(y+2)^2=-16(x-1)$

20) $x^2=-12(y+2)$

21) $(x+3)^2=8(y-2)$

22) $(y-2)^2=8(x+3)$ أو $(y-2)^2=-8(x+3)$

23b)



تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1) **1-6) انظر ملحق الإجابات.**

1) $(x-3)^2=12(y-7)$

2) $(x+1)^2=-12(y-6)$

3) $(y-4)^2=20(x+2)$

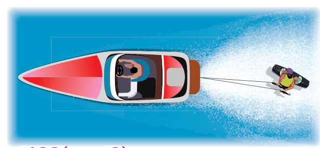
4) $-40(x+4)=(y-9)^2$

5) $(y+5)^2=24(x-1)$

6) $-4(y+2)=(x+8)^2$

7) **لوح تزلُّج:** صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2=8(y-2)$، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2) **4 ft**

8) **قوارب:** يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2-180x+10y+565=0$، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)



$(y+5)^2=180(x-3)$

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟ **45 ft**

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3) **9–14) انظر ملحق الإجابات.**

9) $x^2-17=8y+39$

10) $y^2+33=-8x-23$

11) $3x^2+72=-72y$

12) $60x-80=3y^2+100$

13) $-33=x^2-12y-6x$

14) $-72=2y^2-16y-20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4) **15-22) انظر الهامش.**

15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

17) البؤرة $(2, -1)$ والرأس $(-4, -1)$

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

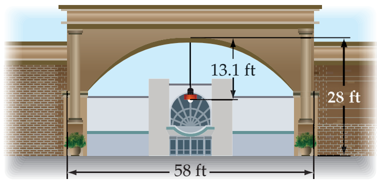
19) البؤرة $(-3, -2)$، والرأس $(1, -2)$

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

21) البؤرة $(-3, 4)$، والرأس $(-3, 2)$

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y=2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبِّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



$(x-29)^2=-52.4(y-28)$

a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y.

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا. **انظر الهامش.**

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2=-\frac{1}{2}(y-3); (-5, -5)$ **$y=-8x-45$**

25) $y^2=\frac{1}{5}(x-4); (24, 2)$ **$y=\frac{1}{20}x+\frac{4}{5}$**

26) $(x+6)^2=3(y-2); (0, 14)$ **$y=4x+14$**

27) $-4x=(y+5)^2; (0, -5)$ **$x=0$**

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

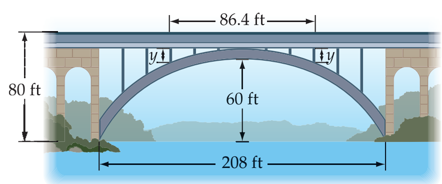
28) الدليل $y=4$ وَ $c=-2$ **مفتوح إلى أسفل**

29) المعادلة هي $y^2=-8(x-6)$ **مفتوح إلى اليسار**

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$ **مفتوح إلى أعلى**

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x=1$ **مفتوح إلى اليمين**

32) **جسور:** يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.



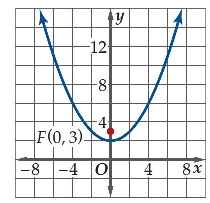
a) اكتب معادلة تمثِّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y. **إجابة ممكنة: $x^2=-180.27(y+20)$**

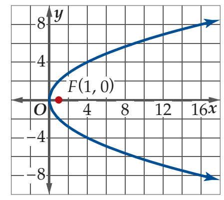
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft. **30.35 m تقريبًا**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–27، 36، 38–50
ضمن المتوسط	1–33 (فردي)، 35، 36، 38–50
فوق المتوسط	28–50

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، في كلٍّ مما يأتي: **(33,34) انظر الهامش.**

33)


34)


35) **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة. **(b, c, e) انظر ملحق الإجابات**

a) **هندسيًّا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ **وحدة واحدة** ii) $y^2 = 8(x-2)$ **وحدتين** iii) $y^2 = 16(x-2)$ **4 وحدات**

b) **بيانيًّا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًّا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيِّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًّا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

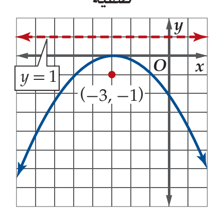
d) **تحليليًّا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا. **اجابة ممكنة: $(x+1)^2 = 4(y+7)$**

e) **تحليليًّا:** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:
$x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$
ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًّا.

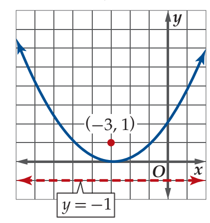
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2+6x-4y+9=0$ بيانيًّا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك. **انظر ملحق الإجابات.**

صفية



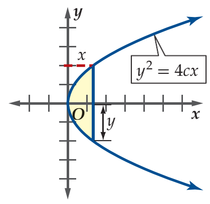
ميمونة



37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك. **انظر ملحق الإجابات.**

38) **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسِّر تبريرك. **انظر ملحق الإجابات.**

39) **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات. **$y^2 = \frac{15}{8}x$**



40) **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أُعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه. **انظر ملحق الإجابات.**

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي: **(الدرس 3-2)**

41) $\log_{16} 4$ **$\frac{1}{2}$** 42) $\log_4 16^x$ **$2x$** 43) $\log_3 27^x$ **$3x$**

حُلَّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي، ثم تحقق من صحة حلك. **(الدرسان 2-5, 2-2)**

44) $8^{2x-1} = 2\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **$x = 1$**

45) $\log_3(-x) + \log_3(6-x) = 3$ **$x = -3$**

46) $\log_3 x \le -3$ **$x \le \frac{1}{27}$**

47) أوجد كلًا مما يأتي إذا كان: **(الدرس 1-1)**
$h(x) = 16 - \frac{12}{2x+3}$

a) $h(-3)$ **20**

b) $h(6x)$ **$16 - \frac{4}{4x+1}$**

c) $h(10-2c)$ **$16 - \frac{12}{23-4c}$**

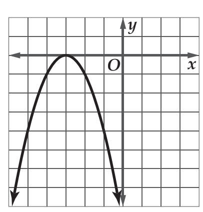
48) إذا كان $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$، فأوجد $\sin\theta + \cos\theta$، حيث θ زاوية في الربع الأول. **(الدرس 3-1)** **$\sqrt{2}$**

تدريب على اختبار

49) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\frac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي **B**

A $x^{-\frac{1}{4}}$ B $\sqrt{x^3}$ C $x^{\frac{3}{4}}$ D $\sqrt{x^5}$

50) ما الدالة الرئيسة (الأم) للدالة الموضّح منحناها جانبًا؟ **D**



A $y = x$

C $y = |x|$

B $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

تمثيلات متعددة يستعمل الطلاب في السؤال 35 الهندسة والتمثيل البياني والتحليل؛ لتكوين تخمينات حول منحنى القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

تنبيه !

اكتشف الخطأ تكتب الطالبتان المعادلة في السؤال 36 على الصورة القياسية $4y = (x+3)^2$. وبما أنّ $C = 1$ فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى كل طالب أن يصف لزميله كيفية ارتباط البؤرة والرأس والدليل بالقطع المكافئ.

إجابات:

33) إجابة ممكنة: $x^2 = 4(y-2)$

34) إجابة ممكنة: $y^2 = 4x$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: وزّع الطلاب في مجموعات ثنائية، واطلب إلى كل منهم أن يرسم مستقيمًا ونقطة خارجة عنه. ثم اطلب إلى كل طالبين في المجموعة تبادل التمثيلين فيما بينهما. اطلب إلى كل طالب أن يمثِّل منحنى القطع المكافئ المحدد بالمستقيم والنقطة، ويعيّن الرأس والبؤرة والدليل ومحور التماثل.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (6) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-1 تدريبات إعادة التعليم

القطوع المكافئة

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا القطع المكافئ هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون بُعدها عن نقطة تسمى **البؤرة**، يساوي بُعدها عن مستقيم معلوم يسّمى **الدليل**. والصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًّا هي $(x-h)^2=4c(y-k)$، وعندما تكون c سالبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى أسفل، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى أعلى. أمّا الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًّا فهي $(y-k)^2=4c(x-h)$. وعندما تكون c سالبةً، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى جهة اليسار، وعندما تكون c موجبة، فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى جهةاليمين.

مثال **حدّد خصائص القطع المكافئ $(x-3)^2=12(y+4)$، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.**

المعادلة في صورتها القياسية والحد التربيعي هو x، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح رأسيًّا. وبما أن $4c=12$ فإن $c=3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى أعلى.

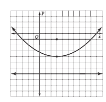
وبما أن المعادلة في الصورة: $(x-h)^2=4c(y-k)$ ؛ إذن: $h=3$ و $k=-4$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس: $(3,-4)$ (h,k) الدليل : $y=-7$ $y=k-c$

البؤرة: $(3,-1)$ $(h,k+c)$ محور التماثل: $x=3$ $x=h$ طول الوتر البؤري: 12 $|4c|$

عيّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل والوتر البؤري، مستعملًا بعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع المكافئ، ثم ارسم منحنًى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتَي الوتر البؤري، ويجب أن يكون متماثلًا حول محور التماثل.

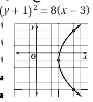
x	0	2	4	6
y	$-3\frac{1}{4}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{11}{12}$	$-3\frac{1}{4}$



تمارين

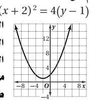
حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا:

1) $(y+1)^2=8(x-3)$



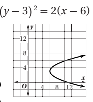
الرأس: $(3,-1)$
البؤرة: $(5,-1)$
الدليل: $x=1$
محور التماثل: $y=-1$
طول الوتر البؤري: 8

2) $(x+2)^2=4(y-1)$



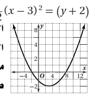
الرأس: $(-2,1)$
البؤرة: $(-2,2)$
الدليل: $y=0$
محور التماثل: $x=-2$
طول الوتر البؤري: 4

3) $(y-3)^2=2(x-6)$



الرأس: $(6,3)$
البؤرة: $\left(6\frac{1}{2},3\right)$
الدليل: $x=5\frac{1}{2}$
محور التماثل: $y=3$
طول الوتر البؤري: 2

4) $\frac{1}{12}(x-3)^2=(y+2)$



الرأس: $(3,-2)$، البؤرة: $(3,1)$
الدليل: $y=-5$
محور التماثل: $x=3$
طول الوتر البؤري: 12

الصف: الثالث الثانوي | 6 | الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات إعادة التعليم (7) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-1 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

القطوع المكافئة

معادلات القطوع المكافئة يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مثال **اكتب معادلة القطع المكافئ، إذا كانت بؤرته $(-4,-3)$ ورأسه $(1,-3)$، ثم مثّله بيانيًّا.**

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y ، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h+c,k)$،
وعليه تكون قيمة c هي $-5=1-4-$، ولمّا كانت c سالبة، فإن المنحنى مفتوح إلى جهة اليسار.

اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية مستعملًا القيم h, c, k.

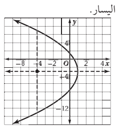
$(y-k)^2=4c(x-h)$ الصورة القياسية

$[y-(-3)]^2=4(-5)(x-1)$ $c=-5, h=1, k=-3$

$(y+3)^2=-20(x-1)$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(y+3)^2=-20(x-1)$.

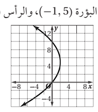
مثّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم القطع المكافئ.



تمارين

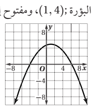
اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا:

1) البؤرة $(-1,5)$، والرأس $(2,5)$



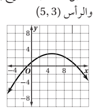
$(y-5)^2=-12(x-2)$

2) البؤرة $(1,4)$؛ ومفتوح إلى أسفل ؛ ويحوي $(-3,1)$



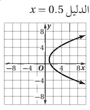
$(x-1)^2=-4(y-5)$

3) الدليل $y=6$؛ ومفتوح إلى أسفل، والرأس $(5,3)$



$(x-5)^2=-12(y-3)$

4) البؤرة $(1.5,1)$؛ ومفتوح إلى جهة اليمين، ومعادلة الدليل $x=0.5$



$(x-1)=2(y-1)^2$

الصف: الثالث الثانوي | 7 | الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

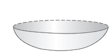
تدريبات حل المسألة (8) دون ضمن فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-1 تدريبات حل المسألة

القطوع المكافئة

1) **عاكسات:** يوضح الشكل الآتي مرآةً عاكسةً على شكل قطع مكافئ، ويمكن نمذجة مقطع طولي للمرآة بالمعادلة $x^2=16y$، أوجد المسافة بين الرأس والبؤرة في هذه المرآة.



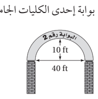
4 وحداتٍ.

2) **قمصان ألعاب:** رُمي قميص يحمل شعار الفريق الفائز بعد المباراة في الهواء بواسطة جهاز بسرعة ابتدائية $32\,ft/s$، إذا كانت المعادلة: $y=-16x^2+32x+5$ تمثل ارتفاع القميص y (بالقدم) فوق الأرض بعد x ثانيةً.

a) اكتب معادلة القطع المكافئ في الصورة القياسية.
$(x-1)^2=-\frac{1}{16}(y-21)$

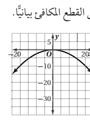
b) ما أقصى ارتفاع يصل إليه القميص؟
$21\,ft$

3) **عمارة:** أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة إحدى الكليات الجامعية كما في الشكل:

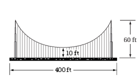


a) اكتب معادلة القطع المكافئ.
$x^2=-40y$

b) مثّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.



4) **جسور:** تبدو السلسلة المعدنية لأحد الجسور المعلقة على شكل قطع مكافئ، والدعامات الرأسية موضحة كما في الشكل الآتي.



a) اكتب معادلة السلسلة المعدنية .
$x^2=800y$

b) أوجد طول الدعامة الرأسية التي تبعد عن المركز 100 قدم.
$22.5\,ft$

الصف: الثالث الثانوي | 8 | الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

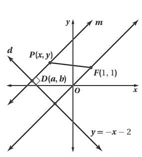
التدريبات الإثرائية (9) فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-1 التدريبات الإثرائية

القطوع المكافئة المائلة

يوضح الشكل المجاور نقطة ثابتة $F(1,1)$، والمستقيم d الذي معادلته $y=-x-2$. إذا كانت $P(x,y)$ تحقق الشرط $PD=PF$، فإن P تقع على قطع مكافئ. وهدفنا هو إيجاد معادلة القطع المكافئ المائل، وهو المحل الهندسي لجميع النقاط التي لها البعد نفسه عن $(1,1)$ والمستقيم $y=-x-2$.
أولًا: أوجد معادلة المستقيم m الذي يمر بالنقطة $P(x,y)$ وعمودي على المستقيم d عند $D(a,b)$، وأوجد الإحداثيين (a,b) للنقطة D بدلالة x و y، ثم استعمل $(PD)^2=(PF)^2$؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ.



ارجع إلى المناقشة أعلاه.

1) أوجد معادلة المستقيم m.

$x-y+(b-a)=0$

2) استعمل معادلتَي المستقيمين m و d؛ لتوضح أن إحداثيَّي النقطة D هما $D(a,b)=\left(\frac{x-y-2}{2},\frac{y-x-2}{2}\right)$.

من معادلة المستقيم m: $-a+b=-x+y$
من معادلة المستقيم d: $a+b=-2$، اطرح لتحصل على $a=\frac{x-y-2}{2}$
واجمع لتحصل على $b=\frac{y-x-2}{2}$

3) استعمل إحداثيات F, P, D، والعلاقة $(PD)^2=(PF)^2$ ؛ لإيجاد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، ودليله المستقيم d.

$x^2-2xy+y^2-8x-8y=0$

4) a) لكل قطع مكافئ محور تماثل، أوجد معادلة محور التماثل للقطع المكافئ المشار إليه أعلاه، وبرّر إجابتك.

$y=x$، لأن $y=x$ تحتوي على $F(1,1)$، و عمودي على المستقيم d.

b) استعمل إجابتك من الجزء a؛ لإيجاد إحداثيَّي رأس القطع المكافئ، وبرّر إجابتك .

$(0,0)$ ؛ لأنّ $(0,0)$ نقطة منتصف المسافة بين النقطة F والمستقيم d.

الصف: الثالث الثانوي | 9 | الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 1 - 4

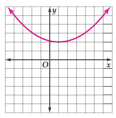
دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (22) دون ضمن فوق

4-1 القطوع المكافئة

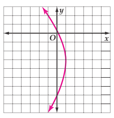
حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $(x-1)^2 = 8(y-2)$



الرأس $(1, 2)$ ؛ البؤرة $(1, 4)$ ؛
معادلة محور التماثل $x = 1$ ؛
الدليل: $y = 0$

2) $y^2 + 6y + 9 = 12 - 12x$

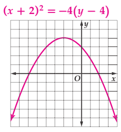


الرأس $(1, -3)$ ؛ البؤرة $(-2, -3)$ ؛
معادلة محور التماثل $y = -3$ ؛
معادلة الدليل $x = 4$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3, 4 ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

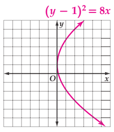
3) الرأس $(-2, 4)$ ، والبؤرة $(-2, 3)$

$(x+2)^2 = -4(y-4)$



4) الرأس $(0, 1)$ ؛ مفتوح أفقيًّا إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

$(y-1)^2 = 8x$



5) اكتب المعادلة $x^2 + 8x = -4y - 8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه.

$(x+4)^2 = -4(y-2); (-4, 2); (-4, 1); x = -4; y = 3$

6) **قمر اصطناعي:** افترض أن طبقًا هوائيًّا على شكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبل 2 ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجّه إلى أعلى. أوجد معادلةً تمثِّل مقطعًا عرضيًّا للطبق.

$x^2 = 8y$

الفصل الرابع القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

22

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-2

تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًّا.

الدرس 4-2

تحليل معادلات القطوع الناقصة والدوائر وتمثيلها بيانيًّا.

كتابة معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

ما بعد الدرس 4-2

استعمال دوران المحورين لكتابة معادلات القطوع الناقصة والدوائر بعد دورانها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- مِمَّ يتكوّن نظامنا الشمسي؟
الشمس ومجموعة الأجرام التي تدور حولها.
- هل تبقى الأرض على بعد ثابت من الشمس؟ لا، تكون أقرب ما يمكن في يناير، وأبعد ما يمكن في يوليو.
- ما المقصود بأن الشمس في البؤرة؟
الشمس ليست في مركز القطع الناقص، فهي أقرب إلى أحد الأطراف.

4-2

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًّا.

(الدرس 1 – 4)

والآن:

- أُحلل معادلات القطوع الناقصة، والدوائر، وأمثلهما بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

المفردات:

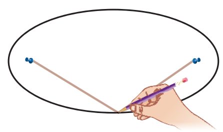
القطع الناقص
ellipse
البؤرتان
foci
المحور الأكبر
major axis
المركز
center
المحور الأصغر
minor axis
الرأسان
vertices
الرأسان المرافقان
co-vertices
الاختلاف المركزي
eccentricity

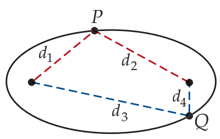
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

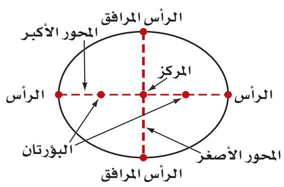
يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليلجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**. و لتوضيح هذا المفهوم تخيل وجود خيط مربوط من طرفيه عند البؤرتين، حيث يمكنك أن ترسم قطعًا ناقصًا باستعمال قلم على أن يبقى الخيط مشدودًا. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت.

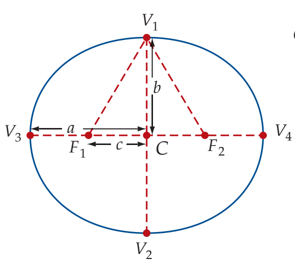




تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر**، وتسمى نقطة منتصف المحور **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمّى نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.



مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة.



بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق ضلع – زاوية – ضلع ($\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_1C}$) فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c.

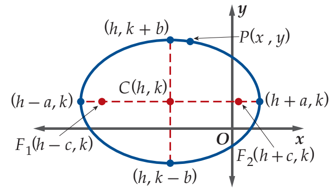
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أن $V_1F_1 = a$، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.

مصادر الدرس 4-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (181)	• تنويع التعليم ص (181)	• تنويع التعليم ص (187)
كتاب التمارين	• ص (23)	• ص (23)	• ص (23)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:



افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$ تعريف القطع الناقص

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$ صيغة المسافة

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$$ خاصية التوزيع ثم التجميع

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$$ اطرح

$$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$ ربّع الطرفين

$$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$$ بسّط

$$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$$ اقسم كلا الطرفين على 4

$$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$ ربّع الطرفين

$$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$ خاصية التوزيع

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$ بسّط

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$ $a^2 - c^2 = b^2$

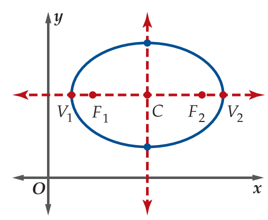
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ اقسم الطرفين على a^2b^2

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)، حيث $a > b$، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h \pm c, k)$

الرأسان: $(h \pm a, k)$

الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$

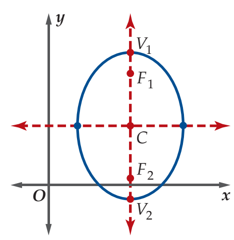
المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a$

المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b$

العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي

المركز: (h, k)

البؤرتان: $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(h, k \pm a)$

الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$

المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a$

المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b$

العلاقة بين a, b, c : $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًا

مثال 1 يبيِّن كيفية تمثيل منحنى القطع الناقص بيانيًّا إذا أُعطيَت معادلته.

مثال 2 يبيِّن كيفية كتابة معادلة قطع ناقص إذا علمت بعض خصائصه.

المثالان 3 , 4 يبيِّنان كيفية تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص واستعماله.

المحتوى الرياضي

البؤرتان عند استعمال النسبة لإيجاد الاختلاف المركزي، فإنّ c هي قياس المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين للقطع الناقص. وبما أنّ a المسافة بين مركز القطع وأحد الرأسين، فإنّ a دائمًا أكبر من c.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب استعمال دبوسين وقلم رصاص وخيط؛ لرسم منحنيات قطوع ناقصة متنوعة كما هو موضح في بداية الدرس 2–4. إذ يمكنهم أن يستعملوا مساطر لقياس أطوال الخيوط التي استعملت لتمثيل القطوع الناقصة وكتابة معادلاتها. ثم ناقش معهم كيفية تأثير تغير مواقع البؤرتين على شكل القطع الناقص.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" التي تلي كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-2, 1)$

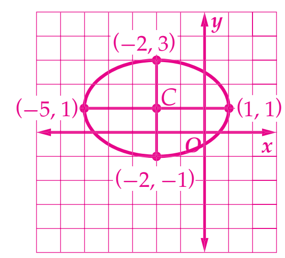
البؤرتان: $(-2\mp\sqrt{5}\,, 1)$

الرأسان: $(1, 1)$، $(-5, 1)$

الرأسان المرافقان: $(-2, 3)$، $(-2, -1)$

المحور الأكبر: $y=1$، وطوله 6

المحور الأصغر: $x=-2$، وطوله 4



b) $4x^2+24x+y^2-10y-3=0$

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-3, 5)$

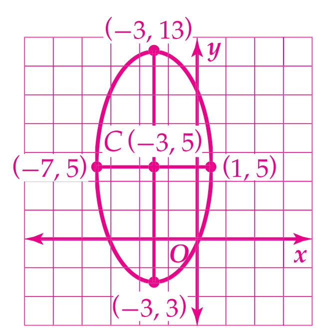
البؤرتان: $(-3, 5\mp 4\sqrt{3})$

الرأسان: $(-3, -3)$، $(-3, 13)$

الرأسان المرافقان: $(-7, 5)$، $(1, 5)$

المحور الأكبر: $x=-3$، وطوله 16

المحور الأصغر: $y=5$، وطوله 8



مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًّا

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

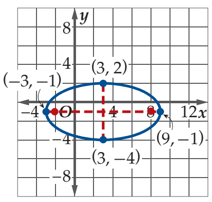
a) $\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث $h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3\pm3\sqrt{3}, -1)$	$(h\pm c, k)$
الرأسان:	$(9, -1)$ و $(-3, -1)$	$(h\pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, 2)$ و $(3, -4)$	$(h, k\pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$، وطوله 12	$y=k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x=3$، وطوله 6	$x=h$، طول المحور الأصغر $2b$

عيِّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



b) $4x^2+y^2-24x+4y+24=0$

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

$$4x^2+y^2-24x+4y+24=0 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$(4x^2-24x)+(y^2+4y)=-24 \quad \text{جمِّع الحدود المتشابهة}$$

$$4(x^2-6x)+(y^2+4y)=-24 \quad \text{حلِّل}$$

$$4(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=-24+4(9)+4 \quad \text{كمِّل المربعين}$$

$$4(x-3)^2+(y+2)^2=16 \quad \text{حلِّل وبسِّط}$$

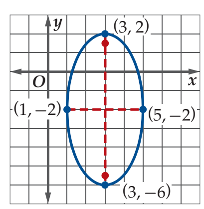
$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16}=1 \quad \text{اقسم الطرفين على 16}$$

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث: $h=3, k=-2, a=\sqrt{16}=4, b=\sqrt{4}=2, c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2\pm2\sqrt{3})$	$(h, k\pm c)$
الرأسان:	$(3, 2)$ و $(3, -6)$	$(h, k\pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(1, -2)$ و $(5, -2)$	$(h\pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x=3$، وطوله 8	$x=h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y=-2$، وطوله 4	$y=k$، طول المحور الأصغر $2b$

عيِّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.



تحقق من فهمك

1A) $\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{16}=1$

1B) $x^2+4y^2+4x-40y+103=0$

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الناقص

إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًّا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًّا، حيث $a^2>b^2$ دائمًا.

(1A

الاتجاه: رأسي

المركز: $(6, -3)$،

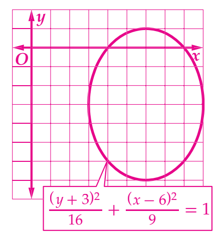
البؤرتان: $(6, -3\pm\sqrt{7})$،

الرأسان: $(6, 1)$ و $(6, -7)$،

الرأسان المرافقان: $(9, -3)$ و $(3, -3)$،

المحور الأكبر: $x=6$،

المحور الأصغر: $y=-3$



(1B

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-2, 5)$،

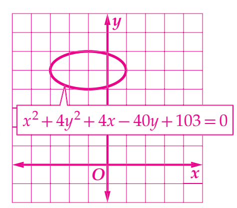
البؤرتان: $(-2\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 5)$،

الرأسان: $(-1, 5)$ و $(-3, 5)$،

الرأسان المرافقان: $(-2, 4.5)$ و $(-2, 5.5)$،

المحور الأكبر: $y=5$،

المحور الأصغر: $x=-2$



التعليم باستعمال التقنيات

إنترنت اطلب إلى الطلاب أن يجدوا مواقع متنوعة على الإنترنت تسمح لهم بتحريك بؤرتي قطع ناقص لتغيير بُعديه، أو تحريك نقاط على منحناه؛ لتوضيح أن مجموع بعدي كل نقطة عن البؤرتين يبقى ثابتًا. ثم اطلب إليهم عرض ما توصلوا إليه على الصف باستعمال السبورة التفاعلية.

مثال إضافي

2 اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) نهايتا المحور الأكبر هما $(5, -2)$، $(-1, -2)$،
ونهايتا المحور الأصغر هما $(2, 0)$ ، $(2, -4)$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

b) الرأسان $(3, -4)$ ، $(3, 6)$،
البؤرتان $(3, -2)$ ، $(3, 4)$

$$\frac{(y-1)^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) **الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.**

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a , b .

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{2-(-8)}{2} = 5$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{-3-(-9)}{2} = 3$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$(h, k) = \left(\frac{-6+(-6)}{2}, \frac{2+(-8)}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (-6, -3)$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي: $\frac{(y+3)^2}{25} + \frac{(x+6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.1 .

b) **الرأسان $(6, 4)$, $(-4, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.**

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$2a = \sqrt{(-4-6)^2 + (4-4)^2}$ صيغة المسافة

$a = 5$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$2c = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-4)^2}$ صيغة المسافة

$c = 3$ بسّط

أوجد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3^2 = 5^2 - b^2$ $a = 5, c = 3$

$b = 4$ بسّط

وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$(h, k) = \left(\frac{-4+6}{2}, \frac{4+4}{2}\right)$ صيغة نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي: $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 4.2.2 .

تحقق من فهمك

2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة. $\frac{(x-6)^2}{225} + \frac{(y-3)^2}{56} = 1$

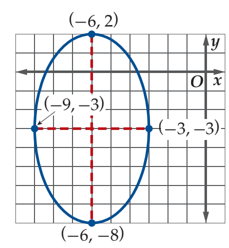
2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة. $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$

إرشادات للدراسة

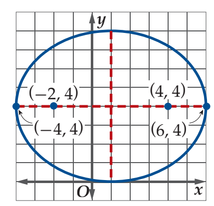
الاتجاه
إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.

إرشادات للدراسة

طول البعد البؤري
طول البعد البؤري يساوي $2c$ دائمًا.



الشكل 4.2.1



الشكل 4.2.2

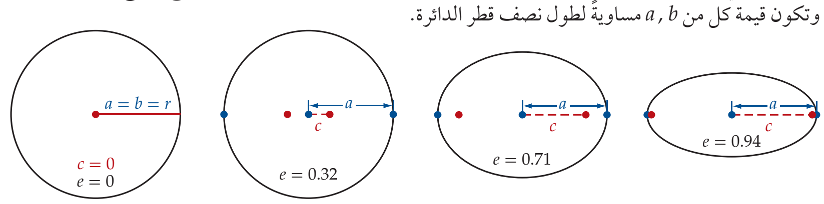
الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة $e = \frac{c}{a}$.

الدرس 2-4 القطوع الناقصة والدوائر 183

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e, c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a, b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثـال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 100 - 9$ $\quad a^2 = 100, b^2 = 9$

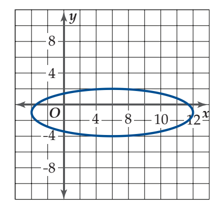
$c = \sqrt{91}$ بسّط

نستعمل قيمتي a, c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$ $\quad a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 4.2.3.



الشكل 4.2.3

تحقق من فهمك

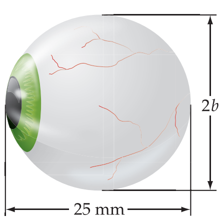
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$ 0.79

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$ 0.32

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$ تعريف الاختلاف المركزي

$0.28 = \frac{c}{12.5}$ $\quad e = 0.28, a = 12.5$

$c = 3.5$ اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$ $\quad c = 3.5, a = 12.5$

$b = 12$ بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm، فما ارتفاعها؟ 23.02 mm

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

مثالان إضافيان

3 حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ 0.66

4 **فلك** الاختلاف المركزي لمدار كوكب أورانوس هو 0.47. وطول المحور الأكبر لمداره حول الشمس 38.36 (وحدة فلكية). فما طول المحور الأصغر لهذا المدار؟ 33.86 وحدة فلكية

إرشادات للمعلم الجديد

الاختلاف المركزي عندما تقترب قيمة e من الصفر، فإن القطع الناقص يقترب من الدائرة. وعندما تقترب قيمة e من 1 ، فإنّ القطع الناقص يقترب من الخط المستقيم.

184 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

معادلة الدائرة

المثالان 6 , 5 يبينان كيفية كتابة معادلة الدائرة على الصورة القياسية إذا علم مركزها ونصف قطرها، أو طرفا قطر فيها.

مثالان إضافيان

5 اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(2, -3)$ ، وطول قطرها 18 .

$(x-2)^2+(y+3)^2=81$

6 اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا القطر فيها $(2, -8)$, $(-4, 6)$.

$(x+1)^2+(y+1)^2=58$

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad e=0 \text{ عندما } a=b$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في } a^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad a \text{ نصف قطر الدائرة}$$

مفهوم أساسي **الصورة القياسية لمعادلة الدائرة**

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2 \quad (h,k)=(-1,2),\ r=\frac{8}{2}=4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3 $\quad x^2+y^2=9$

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10 $\quad (x-5)^2+y^2=25$

مثال 6 كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(7, 6)$, $(-1, -8)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2},\frac{6+(-8)}{2}\right) \quad (x_1,y_1)=(7,6),\ (x_2,y_2)=(-1,-8)$$

$$=\left(\frac{6}{2},\frac{-2}{2}\right) \quad \text{اجمع}$$

$$=(3,-1) \quad \text{بسّط}$$

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين}$$

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2} \quad (x_1,y_1)=(7,6),\ (x_2,y_2)=(3,-1)$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2} \quad \text{اطرح}$$

$$=\sqrt{65} \quad \text{بسّط}$$

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2=65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تحقق من فهمك $\quad (x-2)^2+(y-1)^2=17$

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

185 الدرس 2-4 القطوع الناقصة والدوائر

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–21 للتحقق من استيعاب الطلاب. واستعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه !

خطأ شائع للأسئلة 13 – 10، قد يخلط الطلاب بين صيغة إيجاد البعد بين البؤرتين $c^2 = a^2 - b^2$ وصيغة نظرية فيثاغورس لإيجاد طول وتر مثلث قائم الزاوية $c^2 = a^2 + b^2$.

تنبيه !

خطأ شائع للسؤال 29، قد يجد بعض الطلاب قيمتي a, c مباشرة من الاختلاف المركزي المُعطى، فيعتبرون أن $a = 5$ ، $c = 4$ ، وهذا غير صحيح دائمًا؛ لأن المقدار $\frac{c}{a}$ هو نسبة.

تدرب وحل المسائل

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1) **1-4 انظر ملحق الإجابات.**

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2) **5-9 انظر ملحق الإجابات.**

5) الرأسان $(-7, -3)$, $(13, -3)$ ، والبؤرتان $(-5, -3)$, $(11, -3)$

6) الرأسان $(4, -9)$, $(4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2)$, $(-13, 2)$ ، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0)$, $(-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3)$, $(-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7)$, $(-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

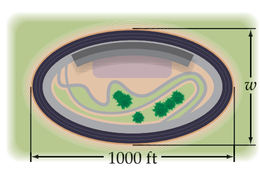
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$ **0.5**

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$ **0.837**

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$ **0.869**

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$ **0.426**

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4) **a-b انظر ملحق الإجابات.**



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5) **15-17 انظر ملحق الإجابات.**

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-4, -3)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$ **18-22 انظر ملحق الإجابات.**

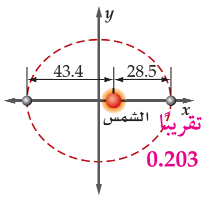
19) $(-4, -10)$, $(4, -10)$

20) $(5, -7)$, $(-2, -9)$

21) $(-6, 4)$, $(4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد. **71.35 مليون ميل تقريبًا**

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار. **0.203**

أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

$(-5, 0); (-8, 0), (-2, 0); (-9, 0), (-1, 0)$

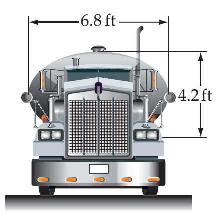
25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

$(-2, 1); (-2, 5), (-2, -3); (-2, 6), (-2, -4)$

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

$(-1, 0); (-1, \mp 7); (-1, \pm\sqrt{65})$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة. **a-b انظر ملحق الإجابات.**



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثِّل المقطع العرضي للخزان. **0.79**

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(-10, 0)$, $(10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$ **$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$**

29) الرأسان المرافقان $(1, 1)$, $(6, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

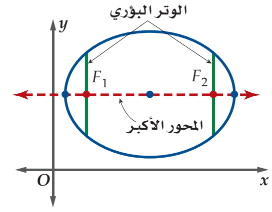
30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$**

29) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون دون المتوسط	41–54 ، 37–38 ، 28–31 ، 24–26 ، 1–21
ضمن ضمن المتوسط	41–54 ، 28–38 ،(1–27 (فردي
فوق فوق المتوسط	22–54

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(3, 2)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{48} = 1$

32) **هندسة** تقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث. $(x - 6.5)^2 + (y - 4.5)^2 = 32.5$

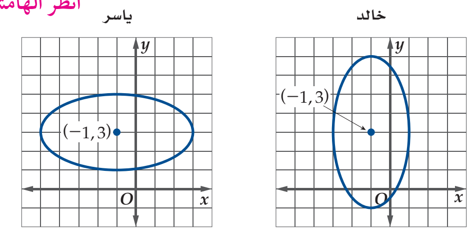
اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي: 33-36) انظر ملحق الإجابات.

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$ **34)** $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$ **36)** $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

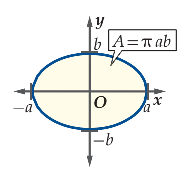
مسائل مهارات التفكير العليا

37) **اكتشف الخطأ:** مثَّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟ انظر الهامش.



38) **تبرير:** حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1, \frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$، حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضّح إجابتك. انظر الهامش.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي: 39-40) انظر الهامش.



39) $b + a = 12, A = 35\pi$

40) $a - b = 5, A = 24\pi$

41) **مسألة مفتوحة:** إذا كانت معادلة دائرة هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني. انظر ملحق الإجابات.

42) **اكتب:** اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b. انظر الهامش.

مراجعة تراكمية

حدد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 4-1) 43-45) انظر ملحق الإجابات.

43) $y = 3x^2 - 24x + 50$ **44)** $y = -2x^2 + 5x - 10$

45) $x = 5y^2 - 10y + 9$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، حيث $0 \le \theta \le 2\pi$. (الدرس 3-5)

46) $\sin\theta = \cos\theta$ $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

47) $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ $\pi, \frac{\pi}{2}$

48) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ $\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن لكل دالة مما يأتي، ثم حدِّد مجالها. (الدرس 1-7)

49) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ 49) $f^{-1}(x) = \frac{-3x-2}{x-1}$ المجال: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

50) $f(x) = \sqrt{5 - x}$ 50) $f^{-1}(x) = 5 - x^2$ المجال: $[0, \infty)$

51) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ 51) غير ممكن

52) مثّل الدالة $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$ بيانيًّا، وحدِّد مداها. (الدرس 2-1) انظر ملحق الإجابات

تدريب على اختبار

53) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟ B

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

54) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟ C

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$ **C** $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$ **D** $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

تنويع التعليم

فوق

توسع: اطلب إلى الطلاب التوصل إلى تخمين مبني على معرفتهم بمعادلة الدائرة والقطع الناقص لكيفية إيجاد مساحة القطع الناقص. وعندما يكتبون تخميناتهم على ورقة، اطلب إليهم البحث عن الصيغة على الإنترنت؛ لمعرفة إن كانت تخميناتهم صحيحة. واطلب إليهم إيجاد محيط القطع الناقص أيضًا ، واسألهم: هل يمكنهم إيجاد تعميم لمحيط القطع الناقص باستعمال ما يعرفونه عن محيط الدائرة؟

تنبيه !

اكتشف الخطأ على الطلاب في السؤال 37 أن يميزوا أن المحور الأكبر للقطع الناقص غير محدد إن كان أفقيًا أو رأسيًّا؛ لذا يكون الحلان صحيحين بناءً على المعلومات المعطاة.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب معادلة القطع الناقص الذي رأسا محوره الأكبر هما $(-3, 0)$ ، $(3, 0)$ ، ورأسا محوره الأصغر هما: $(0, 2)$ ، $(0, -2)$. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-1، 4-2 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (68)

إجابات:

37) كلاهما؛ المحور الأكبر في الشكل الأيسر أفقي، بينما هو رأسي في الشكل الأيمن.

38) إجابة ممكنة: لا.
فإذا كان $b^2 = p$ و $a^2 = p + r$
فإنّ $c = \pm\sqrt{r}$ ، والبؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1$ هما $(0, \pm\sqrt{r})$.
بينما البؤرتان للقطع $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1$ هما $(\pm\sqrt{r}, 0)$.

39) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$ أو $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

40) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$ أو $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$

42) إجابة ممكنة: بما أن $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ فعندما تقترب قيمة a من قيمة b ، فإن قيمة c تقترب من الصفر، وبذلك يقترب الاختلاف المركزي $e = \frac{c}{a}$ من الصفر، وتقترب البؤرتان من المركز، وبذلك يقترب شكل القطع الناقص من الدائرة.

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

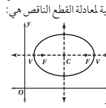
تدريبات إعادة التعليم (10) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

4-2 تدريبات إعادة التعليم

القطوع الناقصة والدوائر

تحليل القطع الناقص و الدائرة و تمثيلهما بيانيًا: القطع الناقص هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوي التي يكون مجموع بُعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **البؤرتين** يساوي مقدارًا ثابتًا. والصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص هي:



$\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$ حيث المحور الأكبر أفقي. وفي هذه الحالة a^2 هو مقام الحد الذي يحوي x.

والصورة القياسية هي $\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=2$ عندما يكون المحور الأكبر رأسيًا.

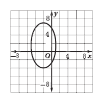
وفي هذه الحالة فإن a^2 هي مقام الحد الذي يحوي y، وفي كلتا الحالتين يكون $c^2=a^2-b^2$.

مثال حدِّد خصائص القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$

المعادلة في الصورة القياسية.

$a^2=25, b^2=9, c^2=a^2-b^2=25-9=16, a^2>b^2$؛ إذن $a=5, b=3, c=4$، استعمل هذه القيم لتحديد رأسي القطع الناقص ومحوريه، بما أن a^2 مقام الحد الذي يحوي y فإن المحور الأكبر يوازي محور y.

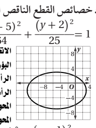
الاتجاه:	رأسي	
المركز:	$(-2, 1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(-2, 5), (-2, -3)$	$(h, k\pm c)$
الرأسان:	$(-2, 6), (-2, -4)$	$(h, k\pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(-5, 1), (1, 1)$	$(h\pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x=-2$، وطوله 10	$x=h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y=1$، وطوله 6	$y=k$، طول المحور الأصغر $2b$



تمارين

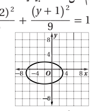
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ ممّا يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

1) $\frac{(x+5)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$



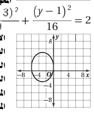
الاتجاه: أفقي، المركز: $(-5, -2)$
البؤرتان: $(-5\pm\sqrt{39}, -2)$
الرأسان: $(-10, -2), (6, -2)$
الرأسان المرافقان: $(-5, 3), (-5, -7)$
المحور الأكبر: $y=-2$، طوله 16
المحور الأصغر: $x=-5$، طوله 10

2) $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$



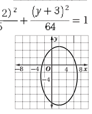
الاتجاه: أفقي، المركز: $(-2, -1)$
البؤرتان: $(-6, -1), (2, -1)$
الرأسان: $(-7, -1), (3, -1)$
الرأسان المرافقان: $(-2, -4), (-2, 2)$
المحور الأكبر: $y=-1$، طوله 10
المحور الأصغر: $x=-2$، طوله 6

3) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=2$



الاتجاه: رأسي، المركز: $(-3, 1)$
البؤرتان: $(-3, 1\pm\sqrt{7})$
الرأسان: $(-3, 5), (-3, -3)$
الرأسان المرافقان: $(0, 1), (-6, 1)$
المحور الأكبر: $x=-3$، طوله 8
المحور الأصغر: $y=1$، طوله 6

4) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{64}=1$



الاتجاه: رأسي، المركز: $(2, -3)$
البؤرتان: $(2, -3\pm\sqrt{39})$
الرأسان: $(2, -11), (2, 5)$
الرأسان المرافقان: $(7, -3), (-3, -3)$
المحور الأكبر: $x=2$، طوله 16
المحور الأصغر: $y=-3$، طوله 10

الصف: الثالث الثانوي 10 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات إعادة التعليم (11) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

4-2 تدريبات إعادة التعليم **(تتمة)**

القطوع الناقصة والدوائر

تحديد أنواع القطوع المخروطية إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي، فبإمكانك أن تحدد نوعه باستعمال خصائص المعادلة. الصيغة القياسية لمعادلة دائرة مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

مثال اكتب كل معادلة من المعادلتين الآتيتين في الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

a) $4x^2+9y^2+24x-36y+36=0$

$4x^2+9y^2+24x-36y+36=0$	المعادلة الأصلية
$4(x^2+6x+?)+9(y^2-4y+?)=-36+?+?$	بإكمال المربع.
$4(x^2+6x+9)+9(y^2-4y+4)=-36+36+36$	$\left(-\frac{4}{2}\right)^2=4, \left(\frac{6}{2}\right)^2=9$
$4(x+3)^2+9(y-2)^2=36$	بالتحليل.
$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$	بقسمة الطرفين على 36

لمّا كانت صيغة المعادلة هي: $\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$، فإن المنحنى يمثل قطعًا ناقصًا مركزه $(-3, 2)$.

b) $x^2-16x-8y+80=0$

$x^2-16x-8y+80=0$	المعادلة الأصلية
$(x^2-16x+?)-8y+80=0$	بإكمال المربع.
$(x^2-16x+64)-8y+80-64=0$	$\left(\frac{16}{2}\right)^2=64$
$(x-8)^2-8(y-2)=0$	حلل.
$(x-8)^2=8(y-2)$	بجمع $8(y-2)$ للطرفين

لمّا كان التربيع لحدٍّ واحدٍ، فإن المنحنى يمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(8, 2)$.

التمارين

اكتب كل معادلة مما يأتي في الصورة القياسية، ثم حدد نوع القطع المخروطي المرتبط بها:

1) $y^2+2y+6x^2-24x=5$

$\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+1)^2}{30}=1$؛ قطع ناقص

2) $y^2+2y+x^2-24x=24$

$(x-12)^2+(y+1)^2=169$؛ دائرة

3) $4x-8+y^2+4y=0$

$(y+2)^2=-4(x-3)$؛ قطع مكافئ

4) $x^2+4x+y^2-2y-49=0$

$(x+2)^2+(y-1)^2=54$؛ دائرة

5) $4x^2+8x+5y^2-30y-11=0$

$\frac{(y-3)^2}{12}+\frac{(x+1)^2}{15}=1$؛ قطع ناقص

6) $6x^2+24x+2y-10=0$

$(x+2)^2=-\frac{1}{3}(y-17)$؛ قطع مكافئ

الصف: الثالث الثانوي 11 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات حل المسألة (12) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

4-2 تدريبات حلّ المسألة

القطوع الناقصة والدوائر

1) **صالة الهمس:** في أحد المتاحف، توجد صالة همس صوتي على شكل قطع ناقص، طول الصالة 84 قدمًا وعرضها 46 قدمًا.

a) اكتب معادلة تمثل شكل الصالة، مفترضًا مركزها عند نقطة الأصل والمحور الأكبر أفقي.

$\frac{x^2}{1764}+\frac{y^2}{529}=1$

b) أوجد موقعَي البؤرتين.

34 ft تقريبًا عن جانبي المركز على المحور الأكبر.

2) **لوحات:** لوحة على شكل قطع ناقص. إذا كان الاختلاف المركزي 0.60، وطول اللوحة 48 cm.

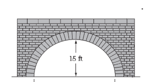
a) فاكتب معادلة القطع الناقص، إذا كان مركز اللوحة عند نقطة الأصل.

$\frac{x^2}{576}+\frac{y^2}{368.64}=1$

b) ما عرض اللوحة؟

38.4 cm

3) **نفق:** مدخل نفق على شكل نصف قطع ناقص كما في الشكل.



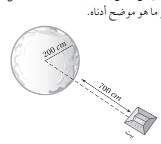
a) اكتب المعادلة التي تمثل القطع الناقص.

$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{225}=1$

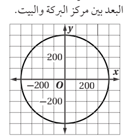
b) احسب ارتفاع النفق فوق نقطة تبعد 10 ft عن المركز.

≈13 ft

4) **بركة:** يزداد طول نصف قطر بركة لتجميع الماء المتدفق من أرض مجاورة بمعدل 100 cm لكل يوم على نحو ما هو موضح أدناه.



a) مثّل بيانيًا الدائرة التي تمثل الماء على الشكل أعلاه، وأوجد البعد بين مركز البركة والبيت.



900 yd؛

b) إذا استمرت بركة الماء في الاتساع بالمعدل نفسه، فبعد كم يوم يصل الماء إلى البيت؟

7 أيام

c) اكتب معادلة بركة الماء في الوقت الحالي ومعادلتها عندما يصل الماء إلى البيت.

$x^2+y^2=40000;$
$x^2+y^2=810000$

الصف: الثالث الثانوي 12 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

التدريبات الإثرائية (13) فوق

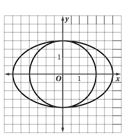
الاسم: ________ التاريخ: ________

4-2 التدريبات الإثرائية

عائلة منحنيات لامي

مجموعة المنحنيات التي تكون معادلاتها في الصورة: $\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1$، حيث: $a\neq 0, b\neq 0, n>0$، تسمى عائلة منحنيات لامي، نسبة إلى عالم الفيزياء والرياضيات الفرنسي لامي(Lamé(1795–1870).

1) مثّل كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًا، وحدّد نوع المنحنى الناتج في كل مرة:



a) $\left|\frac{x}{2}\right|^2+\left|\frac{y}{2}\right|^2=1$

دائرة

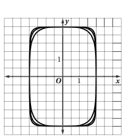
b) $\left|\frac{x}{3}\right|^2+\left|\frac{y}{2}\right|^2=1$

قطع ناقص

2) بناءً على سؤال 1، هل تضم مجموعة منحنيات لامي الدائرة والقطع الناقص.

نعم

3) استعمل قيم a, b, n المعطاة في كلٍّ من الحالات الآتية في معادلة عائلة منحنيات لامي، واكتب المعادلة الناتجة في كل حالة، ثم مثّلها بيانيًا على الشبكة البيانية المجاورة.



a) $a=2, b=3, n=4$

$\left|\frac{x}{2}\right|^4+\left|\frac{y}{3}\right|^4=1$

b) $a=2, b=3, n=6$

$\left|\frac{x}{2}\right|^6+\left|\frac{y}{3}\right|^6=1$

c) $a=2, b=3, n=8$

$\left|\frac{x}{2}\right|^8+\left|\frac{y}{3}\right|^8=1$

4) ما الشكل الذي يقترب إليه منحنى $\left|\frac{x}{2}\right|^n+\left|\frac{y}{3}\right|^n=1$ لقيم n الصحيحة الموجبة الزوجية الكبيرة؟

مستطيل طوله 6 وحداتٍ، و عرضه 4 وحداتٍ، ومركزه نقطة الأصل.

الصف: الثالث الثانوي 13 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 2 - 4

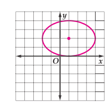
دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (23)   دون ضمن فوق

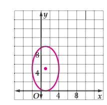
4-2 القطوع الناقصة والدوائر

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$



2) $25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

3) الرأسان $(4, 6)$, $(-12, 6)$ ، و البؤرتان $(2, 6)$, $(-10, 6)$

$\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{(y-6)^2}{28} = 1$

4) البؤرتان $(-2, 7)$, $(-2, 1)$ ، وطول المحور الأكبر 10 وحدات.

$\frac{(y-4)^2}{25} + \frac{(x+2)^2}{16} = 1$

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

5) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

$\frac{3}{5}$

6) $\frac{(y+2)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

$\frac{\sqrt{55}}{8}$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

7) المركز $(-6, 1)$ ، والقطر 8 . $(x+6)^2 + (y-1)^2 = 64$

8) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 3 . $x^2 + y^2 = 9$

9) النقطتان $(-4, 1)$, $(2, 3)$ طرفا قطر فيها. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 40$

10) **نجارة:** يُستعمل قوس على شكل نصف قطع ناقص لتصميم لوحة رأسية لإطار سرير، ويساوي ارتفاع اللوحة الرأسية عند المركز 2 ft ، وعرضها 5 ft عند القاعدة. فأين يجب أن يضع النجار البؤرتين لتصميم اللوحة؟

1.5 ft على جانبي المركز

23

الفصل الرابع   القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

ملحوظات المعلم

4-3 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-3

تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلهما بيانيًّا.

الدرس 4-3

تحليل معادلات القطوع الزائدة وتمثيلها بيانيًّا.

ما بعد الدرس 4-3

استعمال دوران المحورين لكتابة معادلات القطوع الزائدة بعد دورانها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- يظهر مذنب هالي كل 76 عامًا تقريبًا، فإذا كان آخر ظهور له في عام 1986، ففي أي عام تقريبًا سيظهر في المرة التالية؟ **2062**
- ما وجه الاختلاف الرئيس بين القطع الزائد والقطوع المخروطية الأخرى؟ لمنحنى القطع الزائد فرعان.
- أي من القطوع المخروطية التي درستها يمثِّل دالة؟ القطع المكافئ الذي دالته الرئيسة (الأم) هي $y = x^2$، ومحور تماثله رأسيًّا.

4-3 القطوع الزائدة Hyperbolas

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًّا. (الدرس 2–4)

والآن:

- أحلّ معادلات القطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًّا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد hyperbola

البؤرتان foci

المركز center

الرأسان vertices

المحور القاطع transverse axis

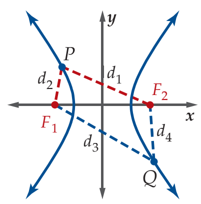
المحور المرافق conjugate axis

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقصٍ؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

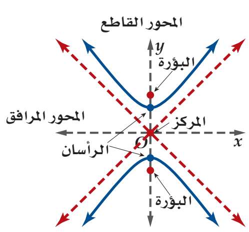
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًّا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.



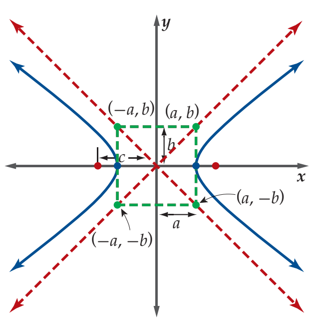
$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، و**رأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالرأسين، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



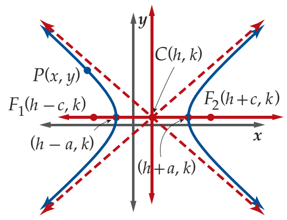
لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، بحيث $c^2 = a^2 + b^2$، وتختلف عمّا في القطع الناقص. بالإضافة إلى أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد والبؤرتين هو $2a$.



مصادر الدرس 4-3

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (190)	• تنويع التعليم ص (190)	• تنويع التعليم ص (195)
كتاب التمارين	• ص (24)	• ص (24)	• ص (24)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:

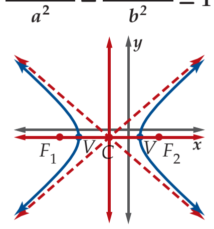
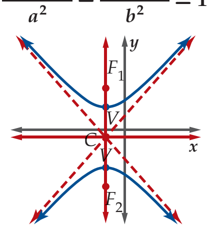


يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$ ، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

تعريف القطع الزائد	$PF_1 - PF_2 = 2a$
صيغة المسافة	$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$
خاصية التوزيع ثم التجميع	$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$
اجمع	$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$
ربِّع الطرفين	$(x-h)^2 + 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2$
بسِّط	$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2 - 4c(x-h)$
اقسم الطرفين على -4 .	$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$
ربِّع الطرفين	$a^2[(x-h)^2 - 2c(x-h) + c^2 + (y-k)^2] = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$
الخاصية التوزيعية	$a^2(x-h)^2 - 2a^2c(x-h) + a^2c^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - 2a^2c(x-h) + c^2(x-h)^2$
بسِّط	$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$
الخاصية التوزيعية	$(a^2-c^2)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$
$a^2 - c^2 = -b^2$	$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$
اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًّا، وهي $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًّا.

مفهوم أساسي خصائص القطع الزائد

	المعادلة في الصورة القياسية: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المعادلة في الصورة القياسية: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
		
الاتجاه:	المحور القاطع أفقي	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$y = k$، وطوله $2a$	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$x = h$، وطوله $2b$	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$

إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا

المثالان 1, 2 يبينان كيفية تحديد خصائص قطع زائد علمت معادلته.

مثال 3 يبين كيفية كتابة معادلة قطع زائد إذا علمت بعض خصائصه.

مثال 4 يبين كيفية إيجاد الاختلاف المركزي لقطع زائد.

المحتوى الرياضي

القطوع الزائدة الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

عندما يكون المحور القاطع رأسيًّا.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

عندما يكون المحور القاطع أفقيًّا. وعندئذٍ يمكن استعمال الإحداثيات $(\pm a, \pm b)$ كرؤوس الإطار المستطيلي الأربعة. كما يمكن رسم خطي التقارب اللذين يحددان شكل القطع الزائد أقطارًا للمستطيل. أمّا المحور القاطع فهو الذي يصل بين الرأسين، ويقطع المنحنى، لكن المحور المرافق لا يقطع المنحنى.

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$، ثم مثِّل منحناه بيانيًا.

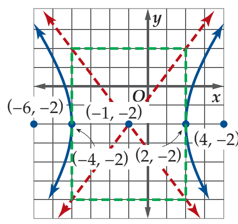
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = -1, k = -2, a = \sqrt{9} = 3, b = \sqrt{16} = 4, c = \sqrt{9+16} = 5$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2), (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2), (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
	$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تحقق من فهمك

1A) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ **1B)** $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$ انظر الهامش

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$	المعادلة الأصلية
$(25y^2 + 100y) - (16x^2 - 96x) = 444$	جمّع الحدود المتشابهة
$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$	حلّل
$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	أكمل المربع
$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$	حلّل وبسّط
$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$h = 3, k = -2, a = \sqrt{16} = 4, b = \sqrt{25} = 5, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

تنبيه!

عندما تمثّل منحنى القطع الزائد بيانيًا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y، فإن اتجاه القطع رأسي.

(1A

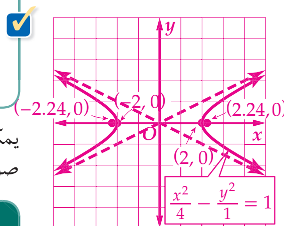
الاتجاه: أفقي

المركز: $(0, 0)$

الرأسان: $(\pm 2, 0)$

البؤرتان: $(\pm\sqrt{5}, 0)$

خطا التقارب $y = \pm\frac{1}{2}x$



إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" التي تلي كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب.

مثال إضافي

1 حدِّد خصائص القطع الزائد في كل من a, b ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} = 1$

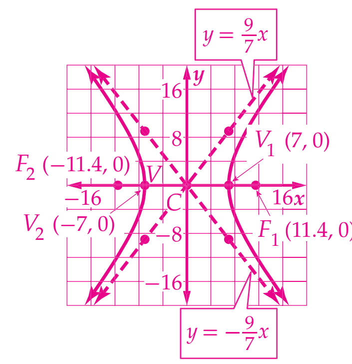
الاتجاه: أفقي

المركز: $(0, 0)$

الرأسان: $(\pm 7, 0)$

البؤرتان: $(\pm 11.4, 0)$

خطا التقارب $y = \pm\frac{9}{7}x$



b) $\frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1$

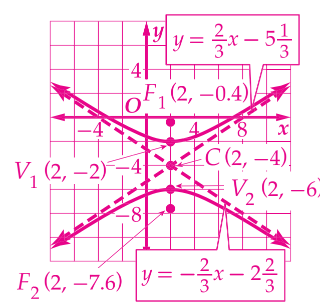
الاتجاه: رأسي

المركز: $(2, -4)$

الرأسان: $(2, -6), (2, -2)$

البؤرتان: $(2, -4 \pm \sqrt{13})$

خطا التقارب $y + 4 = \pm\frac{2}{3}(x - 2)$



تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون اطلب إلى الطلاب عمل ملصق يلخصون فيه خصائص جميع القطوع المخروطية (القطع المكافئ والناقص والدائرة والقطع الزائد) الواردة في هذا الفصل على أن يحتوي هذا الملصق على توضيح لكل قطع مخروطي. وشَجِّعهم على استعمال التمايز اللوني للمتغيرات في المعادلات والتوضيحات لبيان كيفية تأثيرها في القطع المخروطي.

إجابة (تحقق من فهمك):

(1B

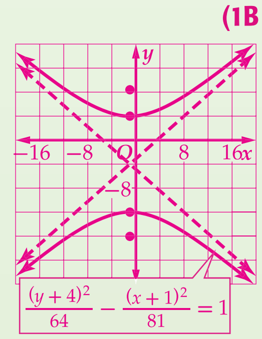
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-1, -4)$

الرأسان: $(-1, -12), (-1, 4)$

البؤرتان: $(-1, -4 \pm \sqrt{145})$

خطا التقارب $y + 4 = \pm\frac{8}{9}(x + 1)$



الاتجاه: رأسي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

المركز: $(3, -2)$ — (h, k)

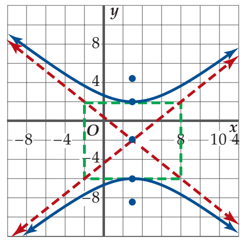
الرأسان: $(3, 2), (3, -6)$ — $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(3, 4.4), (3, -8.4)$ — $(h, k \pm c)$

خطا التقارب: $y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)$ — $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

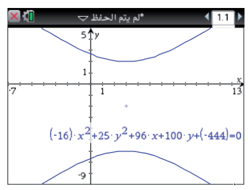
$y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$, $y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5}$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

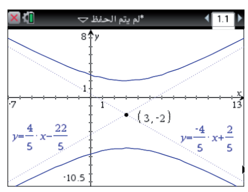


التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،

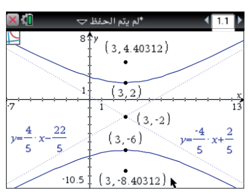
- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح: menu esc on ثم اختيار
  3: إدخال / تحرير الرسم البياني ، 2: معادلة
  6: القطوع المخروطية ، 1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$



- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على menu، ثم اختيار
  6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية
  ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد:
  1: المركز ، 6: الخطوط المقاربة ، 2: الرؤوس
  3: البؤرة



- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

تحقق من فهمك 2A-B) انظر الهامش.

2A) $4y^2-9x^2-8y-36x=68$ 2B) $2x^2-3y^2-12x-36=0$

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (350 - 415)
كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولونيوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

مثال إضافي

2 اكتب معادلة القطع الزائد $4x^2-y^2+24x+4y=28$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$$\frac{(x+3)^2}{15}-\frac{(y-2)^2}{60}=1$$

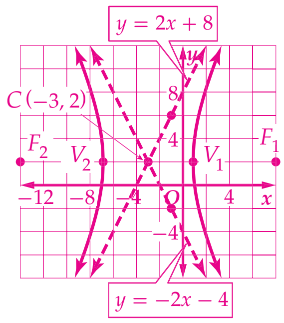
الاتجاه: أفقي

المركز: $(-3, 2)$

الرأسان: $(-3\pm\sqrt{15}, 2)$

البؤرتان: $(-3\pm 5\sqrt{3}, 2)$

خطا التقارب: $y-2=\pm 2(x+3)$



إجابات (تحقق من فهمك):

2A) $$\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$$

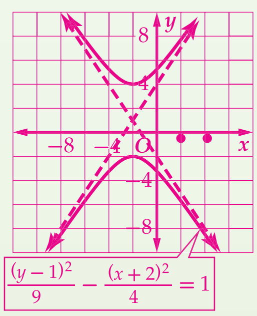
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2, 1)$

الرأسان: $(-2, 4), (-2, -2)$

البؤرتان: $(-2, 1\pm\sqrt{13})$

خطا التقارب: $y-1=\pm\frac{3}{2}(x+2)$



2B) $$\frac{(x-3)^2}{27}-\frac{y^2}{18}=1$$

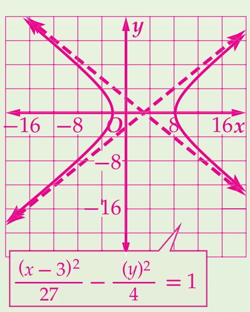
الاتجاه: أفقي

المركز: $(3, 0)$

الرأسان: $(3\pm 3\sqrt{3}, 0)$

البؤرتان: $(3\pm 3\sqrt{5}, 0)$

خطا التقارب: $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$



التعليم باستعمال التقنيات

صفحة على شبكة الإنترنت اطلب إلى الطلاب عمل بحث بالاستعانة بالإنترنت؛ لإيجاد تطبيقات تتضمن قطوعًا زائدة. واطلب إليهم عمل روابط على مواقعهم الاجتماعية في شبكة الإنترنت وتدوين أمثلة يجدونها مثيرة للاهتمام.

مثال إضافي

3 اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) البؤرتان $(5-,1)$ و $(1,1)$؛ وطول المحور القاطع: 4 وحدات.

$$\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{5}=1$$

b) الرأسان $(-3,10)$ و $(-3,-2)$؛ وطول المحور المرافق 6 وحدات.

$$\frac{(y-4)^2}{36}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$$

إرشادات للمعلم الجديد

كتابة المعادلة اطلب إلى الطلاب أن يكتبوا قائمة بالقيم المعطاة لـ a, b, c, h, k، حيث سيساعدهم هذا على تنظيم المعطيات وتحديد المطلوب.

إرشادات للمعلم الجديد

الاختلاف المركزي أكّد للطلاب أنّ المعادلة التي تربط a, b و c في القطع الزائد هي $a^2-b^2=c^2$ وليست $a^2+b^2=c^2$ كما كانت في القطع الناقص. وإضافة إلى ذلك فإن c دائمًا أكبر من a في القطوع الزائدة.

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافية.

مـثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $(-3, -2)$ — نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين (أو الرأسين)

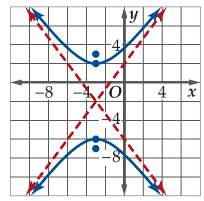
$a=\sqrt{(-3-(-3))^2+(-6-(-2))^2}=4$ — المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c=\sqrt{(-3-(-3))^2+(3-(-2))^2}=5$ — المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b=3$ — $c^2=a^2+b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16}-\frac{(x+3)^2}{9}=1$. انظر الشكل 4.3.1 .



الشكل 4.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$، وخطا التقارب $y=2x-12$, $y=-2x+12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $(-6, 0)$ — نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

$a=3$ — المسافة بين أي من الرأسين والمركز

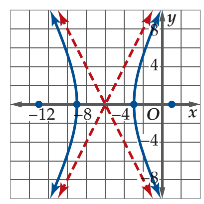
ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a}=2$ — الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3}=2$ — $a=3$

$b=6$ — بسّط

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$ ، انظر الشكل 4.3.2 .



الشكل 4.3.2

✓ تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 6)$, $(3, 2)$، وطول المحور المرافق 10 وحدات. $\frac{(y-4)^2}{4}-\frac{(x-3)^2}{25}=1$

3B) البؤرتان $(2-, 12)$, $(2, -2)$، وخطا التقارب $y=\frac{3}{4}x-\frac{29}{4}$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$. $\frac{(x-7)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e=\frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

192 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$c^2 = 48 + 36$ $a^2 = 48, b^2 = 36$

$c = \sqrt{84}$ بسّط

$e = \frac{c}{a}$ صيغة الاختلاف المركزي

$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$ $a = \sqrt{48}$ ،$c = \sqrt{84}$

≈ 1.32 بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(y-4)^2}{80} - \frac{(x+8)^2}{64} = 1$ **1.5**

4B) $\frac{(x+9)^2}{75} - \frac{(y-2)^2}{15} = 1$ **2.45**

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

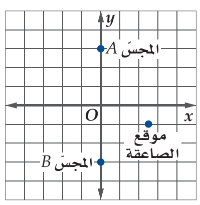
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

أرصاد: يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسمين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



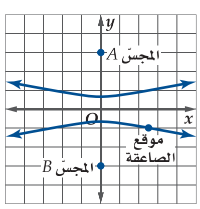
حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكَّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$ العلاقة بين a, b, c

$3^2 = 0.75^2 + b^2$ $c = 3 , a = 0.75$

$8.4375 = b^2$ بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2 , b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثِّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

مثال إضافي

4 حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته: $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{32} = 1$. 1.33

تطبيقات على القطع الزائد

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال القطوع الزائدة في مواقف من واقع الحياة.

مثال إضافي

5 **نظام الملاحة البحري (لوران)** هو نظام تنقُّل طويل المدى للسفن مبني على أساس نبضات موجات المذياع التي لا تعتمد على ظروف الرؤية. افترض أن محطتي لوران E و F تقعان على شاطئ مستقيم، وتبعدان بعضهما عن بعض مسافة 350 ميلًا، وكانت E غرب F. عندما تقترب سفينة من الشاطىء، وتستقبل نبضات موجات الراديو من المحطتين، وكان بعدها عن F يزيد على بعدها عن E بمقدار 80 ميلًا.

a) أوجد معادلة القطع الزائد الذي تقع السفينة على منحناه.
$\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{29025} = 1$

b) أوجد إحداثيي موقع السفينة عندما يكون بعدها عن الشاطئ 125 ميلًا. $(-49.6, 125)$

إرشادات للمعلم الجديد

رسم مخطط على الطلاب أن يرسموا مخططًا لمسائل من واقع الحياة تتضمن عناوين تصفها؛ ممّا سيساعدهم هذا على تصوّر ما سيحدث وضمان دقة حلولهم.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 28–1 للتحقق من استيعاب الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع قد يخطئ بعض الطلاب في الأسئلة 12–8 فيما يتعلق بالاتجاه عند تمثيل القطع الزائد. فإذا كان الحد x في الصورة القياسية موجبًا، فإن المحور القاطع أفقي، ممّا يعني أن المنحنى مفتوح إلى اليسار وإلى اليمين. وإذا كان الحد y موجبًا، فإن المحور القاطع رأسي، ممّا يعني أنّ المنحنى مفتوح إلى أعلى وإلى أسفل.

إجابات:

(11 $\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$

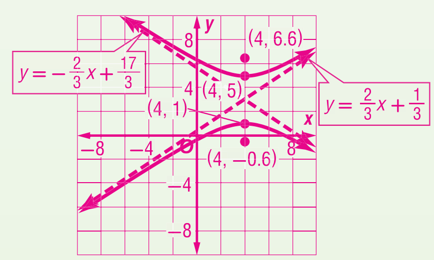
الاتجاه: رأسي

المركز: $(4, 3)$

الرأسان: $(4, 1)$, $(4, 5)$

البؤرتان: $(4, 3 \pm \sqrt{13})$

خطا التقارب $y - 3 = \pm \frac{2}{3}(x - 4)$



(12 $\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

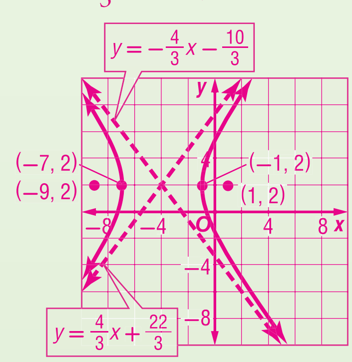
الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4, 2)$

الرأسان: $(-1, 2), (-7, 2)$

البؤرتان: $(-9, -2), (+1, 2)$

خطا التقارب $y-2 = \pm \frac{4}{3}(x+4)$



b) أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$ ، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A ، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y .

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1 \quad x = 2.5$$

$$y \approx \pm 0.99 \quad \text{حل بالنسبة لـ } y$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي 0.99– تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا.

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(-100, 0), (100, 0)$. $\frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{8400} = 1$

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$. $(40, 0)$

تدرب وحل المسائل

6-1) انظر ملحق الإجابات.

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$ **2)** $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$ **4)** $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$ **6)** $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1) انظر ملحق الإجابات.

اكتب معادلة كلِّ قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2) **8-10)** انظر ملحق الإجابات

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$ **11-12)** انظر الهامش.

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3) **13-19)** انظر ملحق الإجابات.

13) البؤرتان $(-7, -1)$, $(-1, 9)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5)$, $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$, $(11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3)$, $(-1, 9)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

16) البؤرتان $(-17, 7)$, $(9, 7)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$ ، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$ ، والمحور القاطع أفقيًا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(2, -2)$, $(2, 10)$ ، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

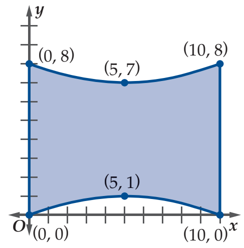
19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-2, 13)$, $(-2, -1)$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	28–1، 30 ، 36–34، 48–39
ضمن المتوسط	29–1 (فردي)، 32، 33 ، 36–34 ، 48–38
فوق المتوسط	48–29

(20a $\frac{(y-4)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{\frac{225}{7}} = 1$

20) **هندسة معمارية:** يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثّل فرعي المنحنى في الشكل. انظر الهامش.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثّل 15 ft، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3) **90 ft**

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\frac{(x-6)^2}{13} - \frac{(y-1)^2}{10} = 1$ **1.52**

22) $\frac{(y+1)^2}{15} - \frac{(x+4)^2}{24} = 1$ **1.27**

23) $\frac{(y-2)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{38} = 1$ **1.06**

24) $\frac{(x+5)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{32} = 1$ **1.33**

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$ **1.58**

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$ **2.83**

27) **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A. وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A. (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة. **انظر ملحق الإجابات.**

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة. **انظر ملحق الإجابات.**

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة. **(40, 13.7)**

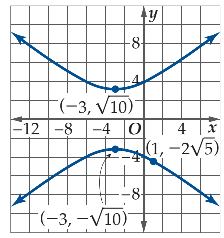
28) **هندسة معمارية:** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19. **انظر ملحق الإجابات**

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m، فما معادلة القطع الزائد؟

b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

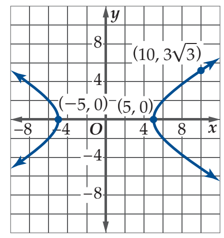
اكتب معادلة القطع الزائد الممثَّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)



$\frac{y^2}{10} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$

30)

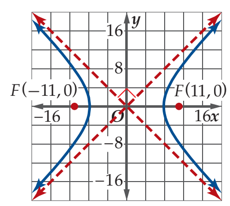


$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft. إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

$\frac{x^2}{2722500} - \frac{y^2}{1277500} = 1$

32) يتشكّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



$\frac{2x^2}{121} - \frac{2y^2}{121} = 1$

33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًّا:** مثّل منحنى القطع $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه. **انظر ملحق الإجابات.**

b) **تحليليًّا:** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب. **انظر ملحق الإجابات.**

c) **تحليليًّا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

d) **بيانيًّا:** مثل منحنيي القطعين في الفرع c. **انظر ملحق الإجابات.**

e) **لفظيًّا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين. **انظر الهامش.**

تمثيلات متعددة

يستعمل الطلاب في السؤال 33 التمثيل البياني والتحليل الجبري والتعبير اللفظي لاستكشاف نوع خاص من القطوع الزائدة يسمى القطع الزائد المرافق.

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى كل طالب أن يكتب كيف يساعده الدرس الحالي عن القطع الزائد على تعلم الدرس التالي عن تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 3-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 2، ص (68)

إجابات:

33e) إجابة ممكنة: القطعان الزائدان المترافقان لهما نفس خطوط التقارب، ولهما نفس البعد بين المركز والبؤرتين في كلٍّ منهما.

34) إجابة ممكنة: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{15} = 1$

تنويع التعليم فوق

توسّع: القطع الزائد المتطابق الساقين هو نوع خاص من القطوع الزائدة يرتبط بالمعادلة العامة $xy = c$، حيث c ثابت لا يساوي الصفر. اطلب إلى الطلاب أن يرسموا منحنيات عدّة قطوع زائدة متطابقة الساقين، وتسجيل مشاهداتهم حولها. كيف يظهر خطّا التقارب؟ وما الأنماط الأخرى التي يمكنهم تحديدها؟ **خطا التقارب هما المحوران x و y. وعندما تزداد $|c|$، فإن فرعي القطع الزائد يتحركان مبتعدين عن نقطة الأصل.**

مسائل مهارات التفكير العليا

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين. انظر الهامش.

35) **تبرير:** افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a-d) انظر ملحق الإجابات.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) **تبرير:** افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟ انظر ملحق الإجابات.

37) **تحدٍّ:** قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$، $F_2(0, -9)$، ويمر بالنقطة P. يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2. اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية. انظر ملحق الإجابات.

38) **برهان:** يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$. انظر ملحق الإجابات

39) **اكتب:** صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما يعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع. انظر ملحق الإجابات

مراجعة تراكمية

مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (الدرس 2-4) 40-42) انظر ملحق الإجابات

40) $(x-8)^2 + \frac{(y-2)^2}{81} = 1$

41) $\frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{49} = 1$

42) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+5)^2}{36} = 1$

43) **مقذوفات:** قُذفت كرة رأسيًا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، بحيث يكون ارتفاعها عن سطح الأرض بعد t ثانية هو $h = -16t^2 + 80t + 5$ قدم. (الدرس 1-4)

a) ما أقصى ارتفاع عن سطح الأرض تبلغه الكرة؟ 105 ft

b) كم تستغرق الكرة من الوقت؛ لتعود مرة أخرى إلى المستوى الذي انطلقت منه؟ 5 ثوانٍ

حلّ كل معادلة مما يأتي لجميع قيم θ. (الدرس 5-3)

44) $\tan\theta = \sec\theta - 1$ $\quad$ $2n\pi, n \in Z$

45) $\sin\theta + \cos\theta = 0$ $\quad$ $\frac{3\pi}{4} + n\pi, n \in Z$

46) $\csc\theta - \cot\theta = 0$ $\quad$ لا يوجد حل.

تدريب على اختبار

47) **مراجعة:** يمثّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟ B

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

48) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

$y-1 = \pm\frac{1}{2}(x+1)$

196 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (14) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-3 تدريبات إعادة التعليم
القطوع الزائدة

تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا القطع الزائد هو المحل الهندسي لجميع نقاط المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان **البؤرتين**، مقدارًا ثابتًا والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، والصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا

وفي كلتا الحالتين يكون: $a^2 + b^2 = c^2$.

مثال حدّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$، ثم مثّل منحناه بيانيًا.

المعادلة بالصورة القياسية. كلٌّ من h و k يساوي صفرًا، لذا فإن المركز عند نقطة الأصل، ولمّا كان الحد المطروح يحوي x، فإن المحور القاطع رأسي، أوجد قيم a, b, c، واستعملها لتحديد الرأسين والبؤرتين.

بما أن $a^2 = 16$ و $b^2 = 4$، فإنّ $a = 4$ و $b = 2$. استعمل قيمتَي a و b لإيجاد قيمة c.

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 4^2 + 2^2$	$a = 4 , b = 2$
$c = \sqrt{20}$ أو 4.47 تقريبًا	بالتبسيط.

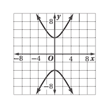
حدّد خصائص القطع الزائد.

المركز: $(0, 0)$ (h, k) البؤرتان: $(0, \sqrt{20}), (0, -\sqrt{20})$ $(h, k \pm c)$

الرأسان: $(0, 4), (0, -4)$ $(h, k \pm a)$ خطّا التقارب: $y = 2x, y = -2x$ $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

أنشئ جدول قيم لتمثيل منحنى القطع الزائد.

x	y
−2	−5.7, 5.7
−1	−4.5, 4.5
0	-4, 4
1	-4.5, 4.5
2	−5.7, 5.7

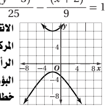


تمارين

حدّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثّله بيانيًا.

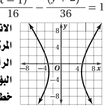
1) $\frac{(y-3)^2}{25} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$

الاتجاه: رأسي
المركز: $(-2, 3)$
الرأسان: $(-2, 8), (-2, -2)$
البؤرتان: $(-2, 3 \pm \sqrt{34})$
خطا التقارب $y - 3 = \pm\frac{5}{3}(x+2)$



2) $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{36} = 1$

الاتجاه: أفقي
المركز: $(1, -2)$
الرأسان: $(5, -2), (-3, -2)$
البؤرتان: $(1 \mp 2\sqrt{13}, -2)$
خطا التقارب $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x-1)$



الصف: الثالث الثانوي 14 الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات إعادة التعليم (15) دون

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-3 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)
القطوع الزائدة

كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع الزائد.

مثال اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص التالية: رأساه $(2, -2), (-4, -2)$، وبؤرتاه $(4, -2), (-6, -2)$.

بما أن احداثيَّي y متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع أفقي، أوجد المركز، وقيم a, b, c.

المركز $(-1, -2)$	نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين أو البؤرتين
$a = \sqrt{(-4+1)^2 + (-2+2)^2} = 3$	المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز.
$c = \sqrt{(4+1)^2 + (-2+2)^2} = 5$	المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز.
$b = \sqrt{25 - 9} = 4$	$c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع أفقي، فإن a^2 ترتبط بالحد x^2؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي: $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.

تمارين

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) البؤرتان هما $(0, 4), (0, -4)$، وطول المحور المرافق 6

$$\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{9} = 1$$

2) الرأسان هما $(3, -6), (3, 2)$، وخطّا التقارب هما $y = \frac{4}{5}x - \frac{22}{5}$، وَ $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$.

$$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

3) الرأسان هما $(10, 2), (6, 2)$، والبورتان هما $(12, 2), (4, 2)$

$$\frac{(x-8)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{12} = 1$$

الصف: الثالث الثانوي 15 الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

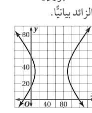
تدريبات حل المسألة (16) دون ضمن فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-3 تدريبات حل المسألة
القطوع الزائدة

1) **زلازل:** المركز السطحي لزلزال يقع على أحد فرعَي منحنى القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{(y-35)^2}{2500} - \frac{(x-50)^2}{1600} = 1$، حيث تقع راسمات الزلازل عند البؤرتين.

a) مثّل القطع الزائد بيانيًا.



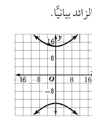
b) أوجد إحداثيات موقعَي راسمتَي الزلازل.

$(-14, 35), (114, 35)$

2) **ظلال:** يسقط ضوء مصباح على جدار، فيتكون ظلٌّ حدوده على شكل قطع زائد، معادلته:

3) $\frac{y^2}{196} - \frac{x^2}{121} = 1$

a) مثّل القطع الزائد بيانيًا.



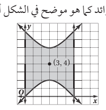
b) اكتب معادلتَي خطَّي التقارب .

$y = \pm\frac{14}{11}x$

c) أوجد الاختلاف المركزي.

$\frac{\sqrt{317}}{14}$

4) **منتزهات:** حدّان من حدود منطقة لعب عشبية على شكل قطع زائد كما هو موضح في الشكل أدناه:



a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي يمثل حدود منطقة اللعب.

$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{3} = 1$

b) إذا كانت كل وحدة على المستوى الإحداثي تمثل $3\,ft$، فما أضيق عرض لمنطقة اللعب؟

$12\,ft$

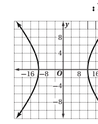
5) **ظلال:** يكون مسار ظل مؤشر الساعة الشمسية على شكل قطعٍ زائدٍ غالبًا.

a) اكتب معادلتَي القطع الزائد بالصورة القياسية، إذا كان المركز يقع في نقطة الأصل، والمسار المار بالمحور القاطع يبعد $2\,mm$ عن إحدى البؤرتين، و $12\,mm$ عن المركز.

$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{52} = 1; \frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{52} = 1$

b) مثّل أحد القطعين الزائدين بيانيًا.

إجابة ممكنة:

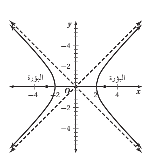


الصف: الثالث الثانوي 16 الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

التدريبات الإثرائية (17) فوق

الاسم: ______ التاريخ: ______

4-3 التدريبات الإثرائية
البؤرتان المتحركتان



تذكّر أن معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع أفقي هي: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. والبؤرتان هما: $(c, 0), (-c, 0)$، حيث $c^2 = a^2 + b^2$، والرأسان هما: $(a, 0), (-a, 0)$، ومعادلتا خطَّي التقارب هما: $y = \pm\frac{b}{a}x$، والشكل المجاور يمثل منحنى هذا القطع الزائد.

ماذا يحدث لهذا المنحنى عندما تزيد قيمة c بلا حدود أو تقل بلا حدود؟

استعمل القطع الزائد المشار إليه أعلاه للإجابة عن الأسئلة 4–1 .

1) اكتب دليلًا مقنعًا لتوضح أنه عندما تقترب c من 0، فإن البؤرتين والرأسين والمركز للقطع الزائد، تصبح جميعها نقطةً واحدةً.

لمّا كانت $0 < a < c$، وتقترب c من 0 ، فإنّ a تقترب من 0؛ لذا فإن الإحداثي x للبؤرتين والرأسين يقترب من 0، وهو الإحداثي x للمركز. ولمّا كانت الإحداثيات y متساوية، فإن النقاط جميعها تصبح نقطةً واحدة.

2) استعمل الحاسبة البيانية أو حاسوبًا لتمثّل القطوع: $x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 0.1, x^2 - y^2 = 0.01$ بيانيًا، حيث تتعلق هذه القطوع الزائدة بقيم متناقصة لـِ c، وصف التغيرات في المنحنيات، وما الشكل الذي تقترب إليه عندما تقترب c من 0؟

يبقى خطّا التقارب كما هما، ولكن فرعَي المنحنى يصبحان أكثر حدّة عند الرأسين، و يقتربان أكثر من المستقيمين: $y = x$ وَ $y = -x$

3) افترض أن a تبقى ثابتة، وأنّ c تقترب من الما لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

يبقى الرأسان عند $(\pm a, 0)$، و لكن الفرعين يصبحان أكثر قربًا إلى الخط الرأسي، ويقتربان من المستقيمين: $x = a$ و $x = -a$

4) افترض أن b تبقى ثابتةً، وأنّ c تقترب من الما لانهاية، فكيف يتغير شكل القطع الزائد؟

يرتدّ الرأسان إلى ما لا نهاية، ويصبح فرعا المنحنى منبسطين و بعيدين جدًا عن المركز، و عندما تقترب c من الما لا نهاية، فإن المنحنى ينزع إلى التلاشي .

الصف: الثالث الثانوي 17 الفصل 4: القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 3 - 4

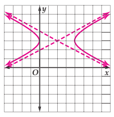
دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (24) دون ضمن فوق

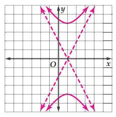
4-3 القطوع الزائدة

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$



2) $\frac{y^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

3) الرأسان $(4, 6)$, $(-10, 6)$ ، والبؤرتان $(6, 6)$, $(-12, 6)$

$\frac{(x+3)^2}{49} - \frac{(y-6)^2}{32} = 1$

4) البؤرتان $(0, -4)$, $(0, 6)$ ، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

5) حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-7)^2}{36} - \frac{(y+10)^2}{121} = 1$

$\frac{\sqrt{157}}{6}$

6) **صوت:** المسافة بين بيتي صديقين ميلٌ واحدٌ، وقد سمعا صوت طائرة في أثناء حديثهما معًا على الهاتف، وقد سمع أحدهما الصوت قبل الآخر بثانيتين. إذا كانت سرعة الصوت 1100 ft/s ، فاكتب معادلة القطع الزائد الذي يحدِّد موقع الطائرة. $\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$

الفصل الرابع — القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

24

ملحوظات المعلم

الفصل 4 اختبار منتصف الفصل

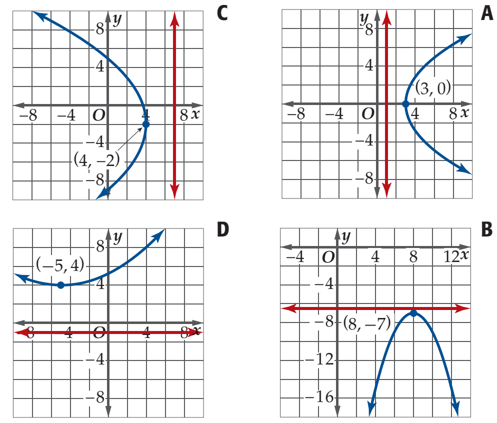
الدروس من 1-4 إلى 3-4

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 1-4) **1-2) انظر الهامش.**

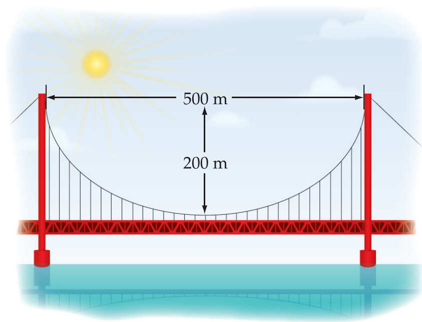
1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

2) البؤرة $(-7, 5)$، الرأس $(-7, 1)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثَّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 1-4) **D**



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 1-4) $y = \frac{2}{625}x^2$



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-4)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ **6-5) انظر ملحق الإجابات.**

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 2-4) **7-10) انظر الهامش**

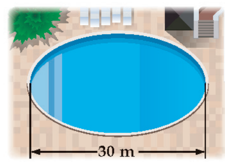
7) الرأسان $(-3, -3)$، $(9, -3)$، والبؤرتان $(-1, -3)$، $(7, -3)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$، $(3, 1)$، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$، $(1, -1)$، والرأسان المرافقان $(4, -7)$، $(-2, -7)$.

10) الرأسان $(8, -9)$، $(8, 5)$، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

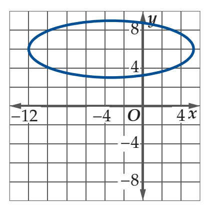
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68. (الدرس 2-4)



a) ما أكبر عرض للبركة؟ **22 ft تقريبًا**

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{121} = 1$

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور القاطع في القطع الناقص الممثّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 2-4) **A**



A 17 وحدة

B 9 وحدات

C 6 وحدات

D 3 وحدات

مثّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد في السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4) **13-14) انظر ملحق الإجابات.**

13) $\frac{(y+7)^2}{81} - \frac{x^2}{81} = 1$

14) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 3-4) **15-18) انظر ملحق الإجابات.**

15) الرأسان $(0, -5)$، $(0, 5)$ وطول المحور المرافق 6 وحدات.

16) البؤرتان $(-6, 0)$، $(10, 0)$ وطول المحور القاطع 4 وحدات.

17) الرأسان $(-11, 0)$، $(11, 0)$ والبؤرتان $(14, 0)$، $(-14, 0)$.

18) البؤرتان $(5, -9)$، $(5, 7)$ وطول المحور القاطع 10 وحدات.

الفصل 4 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-4 إلى 3-4

التقويم التكويني

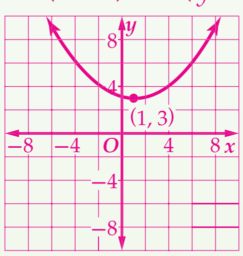
استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

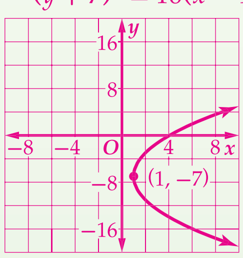
اختبار منتصف الفصل، ص (70).

إجابات:

1) $(x-1)^2 = 8(y-3)$



2) $(y+7)^2 = 16(x-1)$



7) $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$

8) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

9) $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+7)^2}{36} = 1$

10) $\frac{(x-8)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 3-4 , 2-4 , 1-4	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (170)		

4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها
Identifying Conic Sections and Rotations

فيما سبق:

درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

(الدروس من 1–4 إلى 3–4)

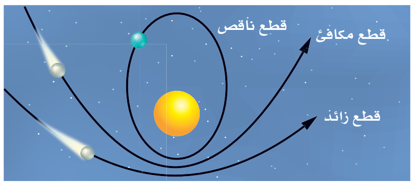
والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.
- أكتب معادلات قطوع مخروطية بعد دوران محاورها.

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثّل مركز الشمس بؤرة القطع.

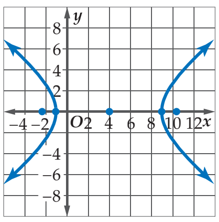


الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية: يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا:

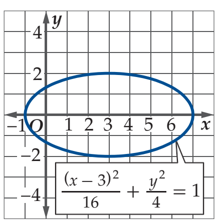
a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$



المعادلة الأصلية	$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$
جمِّع الحدود المتشابهة، وأخرج العامِّل المشترك	$16(x^2 - 8x + ■) - 25y^2 = 144 + 16(■)$
حلّل وبسِّط	$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$
مربع كامل	$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$
اقسم كل حدّ على 400	$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$



المعادلة الأصلية	$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$
جمِّع الحدود المتشابهة	$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$
أكمل المربع	$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$
حلّل وبسِّط	$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$
اقسم كلا الطرفين على 16	$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

تحقق من فهمك انظر ملحق الإجابات.

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-4

تحليل قطوع مخروطية متنوعة.

الدرس 4-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية من معادلاتها.

إيجاد دوران المحورين لكتابة معادلات قطوع مخروطية بعد دورانها.

ما بعد الدرس 4-4

حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية أو غير خطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- يحتاج مذنّب هالي إلى 76 سنة ليدور حول الشمس دورة واحدة، وقد ظهر في المرة الأخيرة عام 1986، ففي أي سنة تقريبًا سيظهر مرة أخرى؟ 2062
- بماذا يختلف القطع الزائد عن بقية القطوع المخروطية؟ للقطع الزائد جزآن.
- من بين القطوع المخروطية التي درستها أي منها يُعَدُّ دالة؟ القطع المكافئ الذي دالته الرئيسة (الأم) $y = x^2$، وله محور تماثل رأسي.
- هل يمكن لمنحنى القطع الزائد أن يُمثّل دالة؟ لا

مصادر الدرس 4-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (200)	• تنويع التعليم ص (200)	• تنويع التعليم ص (200)
كتاب التمارين	ص (25)	ص (25)	ص (25)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ على الصورة القياسية. فعندما يكون الحد الذي يتضمّن xy موجودًا، أي أن $(B \neq 0)$، يمكنك استعمال المميز B^2-4AC لتحديد نوع القطع وهو مميز للمعادلة $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

مراجعة المفردات

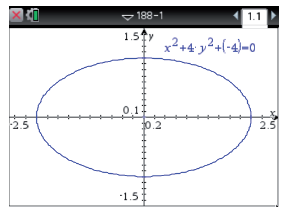
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ هو b^2-4ac.

مفهوم أساسي تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2-4AC=0$
قطع ناقص	$B^2-4AC<0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2-4AC<0, B=0, A=C$
قطع زائد	$B^2-4AC>0$

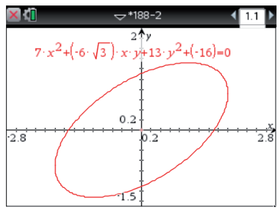
يكون القطع أفقيًّا أو رأسيًّا عندما $B=0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًّا ولا رأسيًّا.

قطع ناقص أفقي: $B=0$



$x^2+4y^2-4=0$

قطع ناقص ليس رأسيًّا ولا أفقيًّا : $B \neq 0$



$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-16=0$

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2+4x^2-3xy+4x-5y-8=0$

$A=4, B=-3, C=1$

المميز يساوي $(-3)^2-4(4)(1)=-7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2-6x+4y-5y^2+2xy-4=0$

$A=3, B=2, C=-5$

المميز يساوي $2^2-4(3)(-5)=64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2-8x+6y-14=0$

$A=0, B=0, C=4$

المميز يساوي $0^2-4(0)(4)=0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثّل قطع مكافئ.

الصورة القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

مثال 1 يبيِّن كيفية كتابة معادلة تربيعية من الصورة العامة إلى الصورة القياسية، ثم تحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، وتمثيل منحناه بيانيًّا.

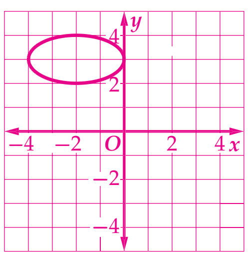
مثال إضافي

1 اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

a) $x^2+4y^2+4x-24y+36=0$

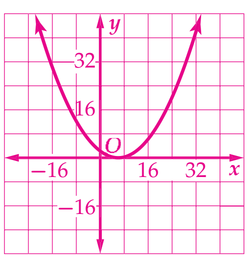
قطع ناقص

$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{1}=1$



b) $x^2-12x-16y+36=0$

قطع مكافئ، $(x-6)^2=16y$



التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$ قطع زائد

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$ قطع زائد

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$ قطع ناقص

دوران القطوع المخروطية: تعلم أنه عندما يكون القطع المخروطي رأسيًّا أو أفقيًّا، فإن محوريه يوازيان المحورين الإحداثيين، وذلك عندما لا تحتوي معادلات هذه القطوع على الحد xy .

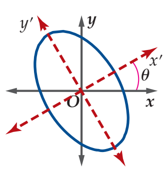
$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ محورا القطع المخروطي موازيان للمحورين الإحداثيين.

ستتعامل في هذا الدرس مع قطوع مخروطية دوِّرت محاورها بحيث لا تكون موازية للمحورين الإحداثيين، وتكون $B \neq 0$ في الصورة العامة لهذه القطوع الدورانية، لذا يظهر الحد xy في المعادلة.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$ دُوِّر محورا القطع المخروطي على المحورين الإحداثيين.

إذا حذف الحد xy ، فيمكن كتابة معادلة القطع المخروطي على الصورة القياسية بإكمال المربع. ولحذف هذا الحد نقوم بتدوير المحورين الإحداثيين حتى يصبحا موازيين لمحوري القطع المخروطي.

عندما يدوّر المحوران الإحداثيان بزاوية قياسها θ كما هو موضح تبقى نقطة الأصل ثابتة، ويتشكّل محوران جديدان هما x', y' ، و فيما يأتي الصورة العامة لمعادلة القطع المخروطي في المستوى الإحداثي الجديد $x'y'$.



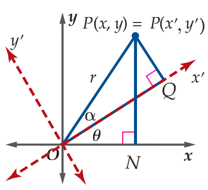
$$A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$$ معادلة القطع المخروطي في المستوى $x'y'$

يمكن استعمال حساب المثلثات لاشتقاق علاقات تربط بين النقطة $P(x, y)$ في مستوى xy والنقطة $P(x', y')$ في المستوى $x'y'$.

في المثلث PNO المجاور لاحظ أنّ:

$OP = r, ON = x, PN = y, m\angle NOP = \alpha + \theta$.

يمكنك باستعمال $\triangle PNO$ التوصل إلى العلاقات الآتية:



$x = r\cos(\alpha + \theta)$ نسبة جيب التمام

$= r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta$ متطابقة جيب التمام لمجموع زاويتين

$y = r\sin(\alpha + \theta)$ نسبة الجيب

$= r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta$ متطابقة الجيب لمجموع زاويتين

وباستعمال المثلث القائم الزاوية POQ ، حيث $OP = r, OQ = x', PQ = y', m\angle QOP = \alpha$ يمكنك التوصل إلى العلاقتين $x' = r\cos\alpha$, $y' = r\sin\alpha$. وبالتعويض في العلاقات السابقة ينتج أن

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ و $y = y'\cos\theta + x'\sin\theta$

تحديد أنواع القطوع المخروطية

مثال 2 يبيِّن كيفية استعمال المميِّز لتحديد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله معادلة معطاة بالصورة العامة.

مثال إضافي

2 حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $2x^2 + y^2 - 2x + 5xy + 12 = 0$ قطع زائد

b) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8 = 0$ دائرة

c) $2x^2 + 2y^2 - 6y + 4xy - 10 = 0$ قطع مكافئ

التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية اعرض عدة معادلات لقطوع مخروطية على السبورة التفاعلية، كل منها على الصورة العامة. اطلب إلى كل طالب التعرف إلى نوع القطع الذي تُمثّله المعادلة من خلال اختيار الرمز (A) للدلالة على القطع المكافئ، والرمز (B) للدلالة على الدائرة، والرمز (C) للدلالة على القطع الناقص، والرمز (D) للدلالة على القطع الزائد. ناقش الطلاب في نتيجة كل معادلة يكتبونها.

تنويع التعليم

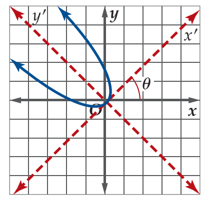
دون ضمن فوق

المتعلمون المتفاعلون: وزِّع الطلاب إلى مجموعات ثلاثية أو رباعية متفاوتة القدرات. وبعد مناقشة الطلاب في المثالين 3, 4 اطلب إلى المجموعات العمل معًا؛ لإكمال تمارين تحقق من فهمك لكل مثال. ثم مقارنة نتائج كل مجموعة بنتائج غيرها من المجموعات ومناقشة الاختلافات إن وجدت. اطلب إلى كل مجموعة مشاركة الصف في نتائجها لكل مسألة ، ثم ناقش طلاب الصف في الأسئلة والصعوبات والاختلافات التي يمكن أن تظهر.

مفهوم أساسي — تحويل محاور القطوع المخروطية من المستوى xy إلى المستوى $x'y'$ بالدوران

يمكن إعادة كتابة المعادلة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy على الصورة $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$، بزاوية دوران قياسها θ، وذلك باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \quad , \quad y = y'\cos\theta + x'\sin\theta$$



مثال 3 كتابة معادلة في المستوى $x'y'$

استعمل $\theta = \frac{\pi}{4}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $4x^2 + 6xy + 4y^2 - 35 = 0$ في المستوى $x'y'$، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

أوجد معادلتي x, y.

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ صيغتا دوران x, y $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

عوض في المعادلة الأصلية .

$$4x^2 \quad + \quad 6xy \quad + \quad 4y^2 \quad - 35 = 0$$

$$4\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) + 4\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 35 = 0$$

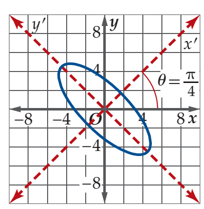
$$\frac{4[2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2]}{4} + \frac{6[2(x')^2 - 2(y')^2]}{4} + \frac{4[2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2]}{4} - 35 = 0$$

$$2(x')^2 - 4x'y' + 2(y')^2 + 3(x')^2 - 3(y')^2 + 2(x')^2 + 4x'y' + 2(y')^2 - 35 = 0$$

$$7(x')^2 + (y')^2 = 35$$

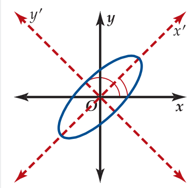
$$\frac{(x')^2}{5} + \frac{(y')^2}{35} = 1$$

فيكون القطع المخروطي قطعًا ناقصًا. والصورة القياسية له في مستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{5} + \frac{(y')^2}{35} = 1$ كما في الشكل المجاور.



إرشادات للدراسة

زاوية الدوران
زاوية الدوران θ هي زاوية حادة؛ وذلك عائد إلى حقيقة أن المحور x' أو المحور y' سيكون في الربع الأول. فمثلاً يمكن تدوير المستوى في الشكل أدناه $123°$ غير أن الدوران $33°$ هي الزاوية التي تحدد المحورين $x'y'$.



تحقق من فهمك

3) استعمل $\theta = \frac{\pi}{6}$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $7x^2 + 4\sqrt{3}xy + 3y^2 - 60 = 0$ في المستوى $x'y'$. ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله. $\frac{(x')^2}{\frac{60}{9}} + \frac{(y')^2}{60} = 1$ ؛ قطع ناقص

يمكن استعمال علاقتين أخريين تربطان x', y' بـ x, y ؛ لإيجاد معادلة في مستوى xy لقطع مخروطي بعد دورانه.

تحويل محاور القطوع المخروطية

مثال 3 يبيِّن كيفية كتابة معادلة في مستوى $x'y'$ إذا كانت معطاة في مستوى xy عندما يدور المحوران بزاوية قياسها θ.

مثال 4 يبيِّن طريقة كتابة معادلة في المستوى xy إذا كانت معطاة في المستوى $x'y'$ عندما يدور المحوران بزاوية قياسها θ.

مثال إضافي

3 استعمل $\theta = 90°$ لكتابة الصورة القياسية للمعادلة $x^2 + 3xy - y^2 = 3$ في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

$\frac{(y')^2}{3} + x'y' - \frac{(x')^2}{3} = 1;$ قطع زائد

المحتوى الرياضي

الحد xy : إنّ وجود حد غير صفري xy يشير إلى دوران منحنى القطع المخروطي في المستوى. فمثلاً في حالة القطع الناقص فإنّ المحور الأكبر لم يعد موازيًا لمحور x أو محور y . يدور المحور الأكبر بزاوية تعتمد على A, B و C، ويكون قياسها صفرًا عندما $B = 0$.

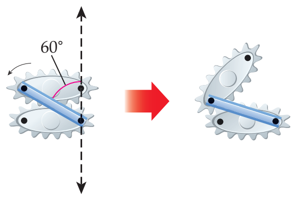
مفهوم أساسي — تحويل محاور القطوع المخروطية من المستوى $x'y'$ إلى المستوى xy بالدوران .

إذا عُلمت معادلة قطع مخروطي في المستوى $x'y'$ بزاوية دوران قياسها θ ، فإنه يمكن إيجاد المعادلة في المستوى xy باستعمال صيغتي الدوران الآتيتين:

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلة في المستوى xy

فيزياء: يمكن استعمال تُروس السرعة والتي تأخذ شكل قطع ناقص للحصول على سرعات متغيرة. فإذا كانت معادلة ترس بعد دورانه $60°$ في المستوى $x'y'$ هي $\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1$ ، فاكتب معادلة هذا القطع الناقص في المستوى xy .



استعمل صيغتي الدوران لـ x', y' لإيجاد معادلة دوران القطع المخروطي في مستوى xy .

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$	صيغتا الدوران لـ x', y'	$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$
$= x\cos 60° + y\sin 60°$	$\theta = 60°$	$= y\cos 60° - x\sin 60°$
$= \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x$

عوّض هذه القيم في المعادلة الأصلية.

$$\frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{18} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$(x')^2 + 2(y')^2 = 36 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في 36}$$

$$\left(\frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{y - \sqrt{3}x}{2}\right)^2 = 36 \quad \text{عوّض}$$

$$\frac{x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2}{4} + \frac{2y^2 - 4\sqrt{3}xy + 6x^2}{4} = 36 \quad \text{بسّط}$$

$$\frac{7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2}{4} = 36 \quad \text{جمّع الحدود المتشابهة}$$

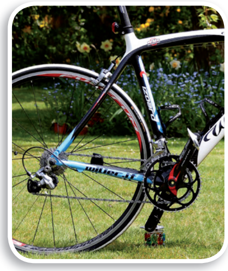
$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 144 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في 4}$$

$$7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0 \quad \text{اطرح 144 من كلا الطرفين}$$

معادلة القطع الناقص في المستوى xy هي: $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - 144 = 0$.

✓ تحقق من فهمك

4) إذا كانت معادلة الترس بعد دوران $30°$ في المستوى $x'y'$ هي $(x')^2 + 4(y')^2 - 40 = 0$ ، فاكتب معادلة الترس في المستوى xy . $\frac{7}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}xy + \frac{13}{4}y^2 - 40 = 0$



الربط مع الحياة

سرعة الدراجة الهوائية

تعتمد سرعة الدراجة الهوائية على قطر الترس؛ فكلما قلَّ قطر الترس، زادت السرعة.

مثال إضافي

4 **فيزياء:** إذا كانت معادلة الترس في المثال 4 بعد الدوران $45°$ في المستوى $x'y'$ هي: $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{8} = 1$ ، فاكتب معادلة هذا القطع الناقص في المستوى xy.
$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 32 = 0$

202 الفصل 4 القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 26–1 للتحقق من استيعاب الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع للتمارين 26–19: تأكّد أنّ الطلاب يستعملون المعادلتين المثلثيتين

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$

للحصول على قيم لتعويضها عن x' و y'.

إجابة:

12a) قطع مكافئ، $(x-660)^2 = -\frac{125}{3}(y-10500)$

تدرب وحل المسائل

1–4) انظر ملحق الإجابات.

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$ قطع مكافئ

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$ قطع زائد

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$ دائرة

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$ قطع مكافئ

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$ قطع زائد

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$ قطع زائد

11) $16xy + 8x^2 + -10y^2 - 18x + 8y = 13$ قطع ناقص

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام. (مثال 2)

a) حدِّد شكل منحنى القطع الذي يمثِّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية. انظر الهامش.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟ 1320 ft

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟ 10500 ft

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله: (مثال 3)

13) $x^2 - y^2 = 9;\ \theta = \frac{\pi}{3}$ **(13–18)** انظر ملحق الإجابات.

14) $xy = -8;\ \theta = 45°$

15) $x^2 - 8y = 0;\ \theta = \frac{\pi}{2}$

16) $2x^2 + 2y^2 = 8;\ \theta = \frac{\pi}{6}$

17) $y^2 + 8x = 0;\ \theta = 30°$

18) $4x^2 + 9y^2 = 36;\ \theta = 30°$

اكتب معادلة القطع المخروطي لكل مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ: (مثال 4)

19) $(x')^2 + 3(y')^2 = 8;\ \theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad x^2 - xy + y^2 - 4 = 0$

20) $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{225} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4}$ $\quad 4x^2 + 10xy + 4y^2 - 225 = 0$

21) $\frac{(x')^2}{9} - \frac{(y')^2}{36} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad x^2 + 10\sqrt{3}xy + 11y^2 - 144 = 0$

22) $(x')^2 = 8y';\ \theta = 45°$ $\quad x^2 + 2xy + y^2 + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0$

23) $\frac{(x')^2}{7} + \frac{(y')^2}{28} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{6}$ $\quad 13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 112 = 0$

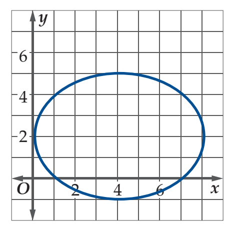
24) $4x' = (y')^2;\ \theta = 30°$ $\quad x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 8\sqrt{3}x - 8y = 0$

25) $\frac{(x')^2}{64} - \frac{(y')^2}{16} = 1;\ \theta = 45°$ $\quad 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 128 = 0$

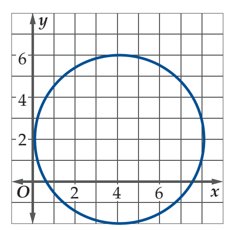
26) $(x')^2 = 5y';\ \theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{3}xy + 10\sqrt{3}x - 10y = 0$

قابل بين المنحنيات أدناه والمعادلة التي تمثِّل كلًّا منها:

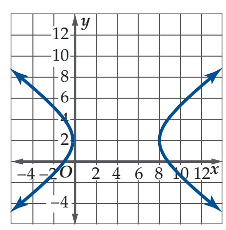
27) c



28) a



29) b



a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$

b) $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$

c) $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–26، 37–48
ضمن المتوسط	1–33 (فردي)، 35، 37–48
فوق المتوسط	27–48

4 التقويم

تعلّم لاحق كلّف الطلاب أن يكتبوا كيف يرتبط الدرس الحالي مع حل أنظمة المعادلات الخطية وغير الخطية.

التقويم التكويني

تحقّق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 4-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (69)

تمثيلات متعددة

في السؤال 35 يستعمل الطلاب التحليل والتمثيل البياني والجبر في رسم القطع الناقص بمعطيات محدّدة، ثم إعادة تمثيله بعد إجراء دورانه بزاوية محددة.

30) **ضوء:** ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكّلًا قطعًا مخروطيًّا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$. حدّد نوع القطع، ومثّل منحناه بيانيًّا. انظر الهامش.

قابل بين كل حالة في التمارين 31-34 مع المعادلة التي تمثّلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

31) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft. d

32) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين. b

33) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال. a

34) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها. c

35) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$. انظر الهامش.

a) **تحليليًّا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًّا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًّا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.

d) **جبريًّا:** استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص التي أوجدتها في **(b)** في المستوى $x'y'$.

e) **بيانيًّا:** مثّل معادلة القطع الناقص الدوراني بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

36) **تحدٍّ:** بيّن أن منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ لا يتغير تحت تأثير أي دوران. انظر ملحق الإجابات.

37) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. انظر ملحق الإجابات.
"عندما يكون القطع رأسيًّا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

38) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثّل المعادلة قطعًا مكافئًا. انظر الهامش.

39) **اكتب:** اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

40) **فلك:** افترض أنه يمكن تمثيل مسار مُذنّب بفرع من قطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{400} = 1$. أوجد كلًّا من الرأسين والبؤرتين ومعادلتي خطي التقارب للقطع الزائد، ثم مثّل المعادلة بيانيًّا. (الدرس 4-3) انظر ملحق الإجابات.

حدّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا: (الدرس 4-2) 41-43 انظر ملحق الإجابات.

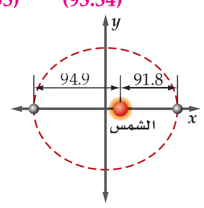
41) $\frac{y^2}{18} + \frac{x^2}{9} = 1$

42) $4x^2 + 8y^2 = 32$

43) $x^2 + 25y^2 - 8x + 100y + 91 = 0$

44) **فلك:** أقرب مسافة بين مركز الشمس والأرض في مسار دورانها 91.8 مليون ميل. أما أبعد مسافة فتساوي 94.9 مليون ميل. اكتب معادلة تمثّل مدار الأرض حول الشمس باعتبار أن مركز المدار هو نقطة الأصل، وأن الشمس تقع على المحور x. (الدرس 4-2)

$$\frac{x^2}{(93.35)^2} + \frac{y^2}{(93.34)^2} = 1$$



حُلَّ كلَّ معادلة من المعادلتين الآتيتين: (الدرس 2-4)

45) $\log_4 8n + \log_4 (n - 1) = 2$ 2

46) $\log_9 9p + \log_9 (p + 8) = 2$ 1

تدريب على اختبار

47) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** حدّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية. قطع مكافئ

48) **اختيار من متعدد:** ما المعادلة التي تمثّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟ A

A $y = x^2 - 4x + 6$

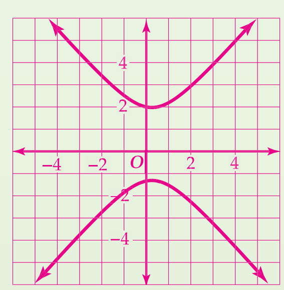
B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

إجابات:

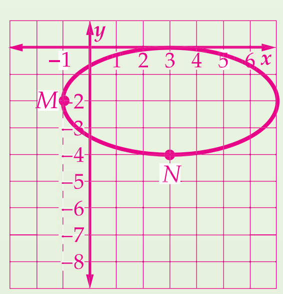
30) قطع زائد،



35a) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

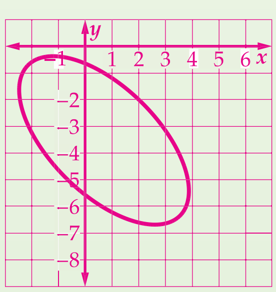
35b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$

35c)



35d) $5x'^2 + 6x'y' + 5y'^2 + 10\sqrt{2}\,x' + 22\sqrt{2}\,y' + 18 = 0$

35e)



38) إجابة ممكنة: $9x^2 + 6xy + y^2 + 2x + 2y + 8 = 0$

معمل الحاسبة البيانية:

أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

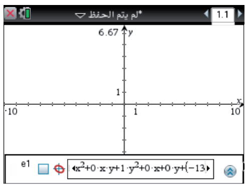
نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًّا

حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًّا:

$x^2 + y^2 = 13$

$xy + 6 = 0$

لحل المعادلتين بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:



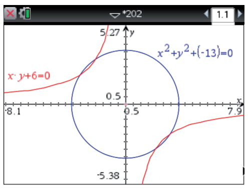
الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًّا.

- اضغط على المفاتيح:

menu esc on ثم اختيار 3: إدخال / تحرير الرسم البياني

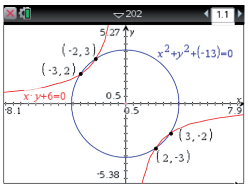
2: معادلة 6: القطوع المخروطة

1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$



- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.



- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-2, 3)$، $(3, -2)$، $(2, -3)$، $(-3, 2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$ ، $x^2 - y^2 = 3$ **$(2, 1), (-2, -1)$**

2) $49 = y^2 + x^2$ ، $x = 1$ **$(1, 6.9), (1, -6.9)$**

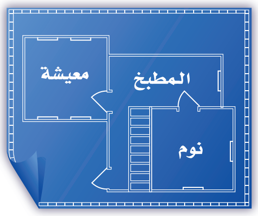
3) $x = 2 + y$ ، $x^2 + y^2 = 100$ **$(8, 6), (-6, -8)$**

4) $25 - 4x^2 = y^2$ ، $2x + y + 1 = 0$ **$(1.5, -4), (-2, 3)$**

5) $y^2 = 9 - 3x^2$ ، $x^2 = 10 - 2y^2$ **$(1.3, 2), (-1.3, 2), (1.3 -2), (-1.3, -2)$**

6) $y = -1 - x$ ، $4 + x = (y - 1)^2$ **$(0, -1), (-3, 2)$**

7) **تحدّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$ ، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.



a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

7a) $x^2 + y^2 = 468,$ $x^2 - y^2 = 180$

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًّا، وقدّر طول كل غرفة. **انظر الهامش**

توسّع 4-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الهدف استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتقريب حلول أنظمة من المعادلات والمتباينات غير الخطية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية TI–nspire .

إرشادات التدريس

ذكّر طلاب الصف بأنّ حلول أنظمة المعادلات هي نقطة أو نقاط تقاطع الدوال.

وذكّرهم أيضًا بأنه عند تمثيل معادلة على حاسبة بيانية فإنّ المعادلة يجب أن تحل أولاً بالنسبة لـِ y ، ثم يتم إدخال المعادلتين إلى الحاسبة.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

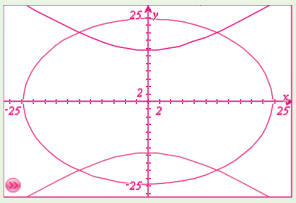
وزع الطلاب إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية قدراتهم متفاوتة ، واطلب إليهم إكمال النشاطين 1 و 2 والأسئلة 8 ,2 ,1. ثم مقارنة نتائجهم بنتائج المجموعات الأخرى ومناقشة اختلاف النتائج إن وجد.

- اسأل الطلاب أن يحددوا نوع القطع المخروطي الذي تمثّله كل معادلة قبل تمثيلها بيانياً. وناقش الإمكانات المختلفة لنقاط التقاطع بين القطوع المخروطة.
- إذا لم يستطع الطلاب مشاهدة المنحنيات التي رسموها كاملة فذكّرهم بأن يضبطوا شاشة العرض على القياس المناسب.
- يستطيع الطلاب عند حل أنظمة المتباينات أن يتحققوا من صحة منطقة الحل بتعويض نقطة من منطقة الحل في كلّ متباينة.

تدريب اطلب إلى الطلاب حل التمارين 10 ,9 ,7-3.

إجابة:

7b)



3 التقويم

التقويم التكويني

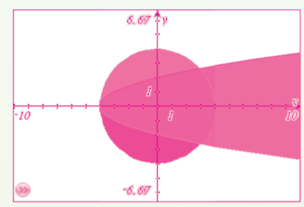
استعمل الأسئلة 1-7 لتقويم قدرات الطلاب على استعمال دالة التقاطع لتحديد نقاط التقاطع جميعها بين القطوع المخروطية. واستعمل الأسئلة 8-10 لتقويم قدرات الطلاب على استعمال دالة المنطقة المظلّلة بطريقة مناسبة لحل أنظمة متباينات .

من المحسوس إلى المجرد

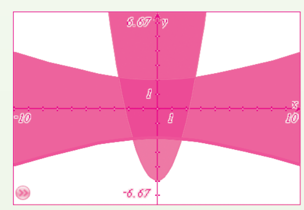
اسأل الطلاب أن يصفوا ما تمثّله المناطق المظلّلة في كل نظام رياضي للتمارين 8-10.

إجابات:

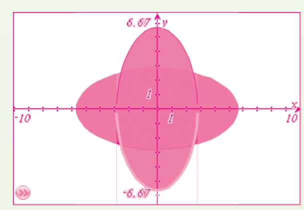
8)



9)



10)



كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابق أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

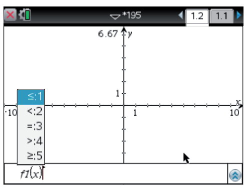
حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

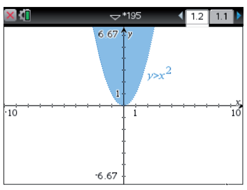
الخطوة 1 اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2, y \le \sqrt{36 - x^2}, y \ge -\sqrt{36 - x^2}$$

الخطوة 2 افتح الحاسبة بالضغط على on .
اختر من الشاشة الظاهرة 1 مستند جديد
ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية



الخطوة 3 اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$، وذلك بالضغط على مفتاح del ، ثم اختر رمز التباين > مستعملًا الأسهم، فتظهر $y >$، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط enter .

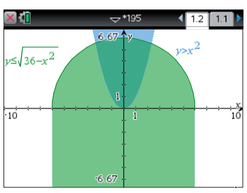


الخطوة 4 اكتب المتباينة الثانية $y \le \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del ، ثم اختر رمز التباين ≤ مستعملًا الأسهم، ستظهر $y \le$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ثم اضغط على المفتاح tab وتمثيل المتباينة $y \ge -\sqrt{36 - x^2}$، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:

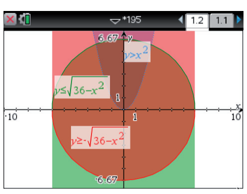
del > x^2 enter tab del ≤ ctrl x^2 $36 - x^2$ enter tab

del ≥ − ctrl x^2 $36 - x^2$ enter



لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.
إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$



تمارين:

حُلَّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا: 8-10) انظر الهامش .

8) $2y^2 \le 32 - 2x^2$
$x + 4 \ge y^2$

9) $y + 5 \ge x^2$
$9y^2 \le 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \le 32$
$4x^2 + y^2 \le 32$

إرشاد تقني

تدريج المحاور
يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة $f2(x) = 7$، قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختيار 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختيار 1: إعدادات النافذة
وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7، يمكن اختيار قيمة القيمة العظمى لـ Y: 10

إرشاد تقني

لون التظليل
يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على menu، ctrl ثم اختيار B: اللون ومنها 1: لون السطر أو 2: لون التعبئة أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (18) دون

الاسم: ______________ التاريخ: ________

4-4 تدريبات إعادة التعليم

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

تحديد أنواع القطوع المخروطية: بإمكانك أن تحدد نوع القطع المخروطي عندما تكون معادلته معطاة بالصورة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

مثال حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

a) $2x^2 + 6y^2 - 8x + 12y - 2 = 0$

بما أن: $A = 2$ و $B = 0$ و $C = 6$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 0^2 - 4(2)(6) = -48$

المميز أصغر من 0، لذا يجب أن يكون القطع المخروطي دائرةً أو قطعًا ناقصًا، ولمّا كانت $A \neq C$ فإنه قطع ناقص.

b) $5x^2 + 8xy - 2y^2 + 4x - 3y + 10 = 0$

بما أن: $A = 5$ و $B = 8$ و $C = -2$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 8^2 - 4(5)(-2) = 104$.

المميز أكبر من 0؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع زائد.

c) $12x^2 + 12xy + 3y^2 - 7x + 2y - 6 = 0$

بما أن: $A = 12$ و $B = 12$ و $C = 3$، فإن المميز يساوي:

$B^2 - 4AC = 12^2 - 4(12)(3) = 0$

المميز يساوي 0 ؛ لذا فإن القطع المخروطي قطع مكافئ.

تمارين

حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها في الصورة القياسية:

1) $4x^2 + 4y^2 - 2x - 9y + 1 = 0$ **دائرة**

2) $10x^2 + 6y^2 - x + 8y + 1 = 0$ **قطع ناقص**

3) $-2x^2 + 6xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0$ **قطع زائد**

4) $x^2 + 6xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ **قطع زائد**

5) $5x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 2y + 17 = 0$ **قطع ناقص**

6) $x^2 + 2xy + y^2 + x + 10 = 0$ **قطع مكافئ**

7) $25x^2 + 100x - 54y = -200$ **قطع مكافئ**

8) $16x^2 + 100x - 54y^2 = -100$ **قطع زائد**

الصف: الثالث الثانوي 18 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات إعادة التعليم (19) دون

الاسم: ______________ التاريخ: ________

4-4 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

دوران القطوع المخروطية يمكن كتابة المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ في المستوى xy في الصورة: $A(x')^2 + C(y')^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ في المستوى $x'y'$، وذلك بتدوير محورَي الإحداثيات بزاوية θ، ويمكن إيجاد المعادلة في المستوى $x'y'$ باستعمال الصيغتين:

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta , y = y' \cos\theta + x' \sin\theta$.

مثال استعمل $\theta = 45°$ لكتابة الصيغة القياسية للمعادلة: $x^2 - 2xy - 4y^2 + \frac{1}{2} = 0$ في المستوى $x'y'$، وحدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

القطع المخروطي هو قطع زائد؛ لأنّ $B^2 - 4AC > 0$، أوجد معادلتَي x , y.

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$	صيغتا الدوران x , y	$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} , \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'$

بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$x^2 \quad - 2xy \quad - 4y^2 \quad + \frac{1}{2} = 0$

$\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y'}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 0$ بالتعويض عن x , y.

$\frac{1}{2}(x')^2 - x'y' + \frac{1}{2}(y')^2 - (x')^2 + (y')^2 - 2(x')^2 - 4x'y' - 2(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$ بإيجاد مفكوك ذات الحدين.

$-\frac{5}{2}(x')^2 - 5x'y' - \frac{1}{2}(y')^2 + \frac{1}{2} = 0$ بالتبسيط.

فتكون معادلة القطع الزائد بدوران 45° هي: $5(x')^2 + 10x'y' + (y')^2 = 1$

تمارين

استعمل قيمة θ المعطاة؛ لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة من المعادلتين الآتيتين في المستوى $x'y'$، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

1) $x^2 - 4x + y^2 = 2, \theta = \frac{\pi}{4}$

$(x')^2 + (y')^2 - 2\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' - 2 = 0$

دائرة

2) $8x^2 - 5y^2 = 40, \theta = 30°$

$19(x')^2 - 26\sqrt{3}x'y' - 7(y')^2 = 160$

قطع زائد

الصف: الثالث الثانوي 19 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات حل المسألة (20) دون ضمن فوق

الاسم: ______________ التاريخ: ________

4-4 تدريبات حل المسألة

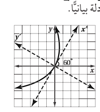
تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

1) **اتصالات:** إذا كانت معادلة مقطع عرضي لطبق قمر اصطناعي بعد دورانه بزاوية قياسها 60° هي $y' = \frac{1}{8}x'^2$

a) اكتب المعادلة في المستوى xy.

$\frac{x^2}{32} + \frac{\sqrt{3}}{16}xy + \frac{3}{32}y^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.

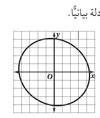


2) **ناقل الحركة:** افترض أن معادلة ناقل حركة السيارة على شكل قطع ناقص بعد دورانه بزاوية 60° في المستوى $x'y'$، هي: $\frac{(x')^2}{16} + \frac{(y')^2}{20} = 1$.

a) اكتب معادلة القطع الناقص في المستوى xy.

$17x^2 + 2\sqrt{3}xy + 19y^2 - 320 = 0$

b) مثّل المعادلة بيانيًّا.



3) **صور:** ترسم سعاد صورًا لقطوع مكافئة بعد دورانها، وتريد أن تمثل القطع $(x' - 3)^2 = 12(y' - 4)$ بيانيًّا، إذا دار بزاوية 45° في المستوى xy.

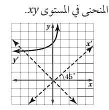
a) أوجد رأس القطع في المستوى xy.

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$

b) أوجد معادلة محور التماثل في المستوى xy.

$y = 3\sqrt{2} - x$

c) ارسم المنحنى في المستوى xy.



4) **منطق:** إذا دار قطع زائد 40° في اتجاه عقارب الساعة، فما قياس الزاوية اللازمة لدورانه حتى يعود إلى موقعه الأصلي؟

40° عكس اتجاه عقارب الساعة .

5) **أشكال:** يمكن تمثيل مقطع من مرآة عاكسة بالمعادلة: $25x^2 + 13xy + 2y^2 = 100$، حدّد نوع القطع الذي تمثله المرآة العاكسة.

قطع ناقص

الصف: الثالث الثانوي 20 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

التدريبات الإثرائية (21) فوق

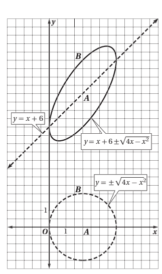
الاسم: ______________ التاريخ: ________

4-4 التدريبات الإثرائية

التمثيل البياني بإضافة الإحداثي y

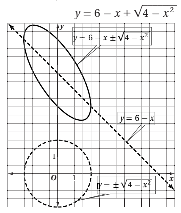
تمثيل منحنيات معادلات القطوع المكافئة والناقصة والزائدة المائلة بالنسبة للمحورين x , y، أكثر صعوبة مقارنة بمنحنيات المعادلات التي درستها.

وغالبًا ما تستعمل التمثيل البياني لمعادلتين بسيطتين؛ لإيجاد التمثيل البياني لمعادلات أكثر تعقيدًا. فمثلًا ، يمكن الحصول على منحنى القطع الناقص في الشكل المجاور بإضافة الإحداثي y لكل نقطة على الدائرة، إلى الإحداثي y لكل نقطة مناظرة من المستقيم.



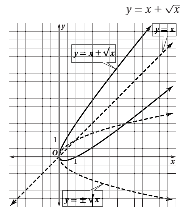
مثّل كلًّا من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

1) $y = 6 - x \pm \sqrt{4 - x^2}$



قطع ناقص

2) $y = x \pm \sqrt{x}$



قطع مكافئ

استعمل ورقةً بيانيةً منفصلةً؛ لتمثيل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين بيانيًّا، ثم حدّد نوع المنحنى لكل تمثيل:

3) $y = 2x \pm \sqrt{7 + 6x - x^2}$

قطع ناقص

انظر رسوم الطلاب.

4) $y = -2x \pm \sqrt{-2x}$

قطع مكافئ

انظر رسوم الطلاب.

الصف: الثالث الثانوي 21 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

مصادر المعلم للأنشطة الصفّية

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 4 - 4

دون دون المتوسط   ضمن ضمن المتوسط   فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (25)   دون ضمن فوق

4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

1) $5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0$
قطع ناقص

2) $16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$
قطع زائد

3) $4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0$
قطع مكافئ

4) $2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0$
قطع ناقص

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$ ، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله:

5) $xy = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4}$
$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - 1 = 0$
قطع زائد

6) $x^2 + 5xy - y^2 - 5 = 0;\ \theta = 90°$
$\frac{(y')^2}{5} - x'y' - \frac{(x')^2}{5} = 1$
قطع زائد

اكتب معادلة القطع المخروطي لكلٍّ مما يأتي في المستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ .

7) $(x')^2 = 16(y');\ \theta = 45°$
$x^2 + 16\sqrt{2}x + 2xy - 16\sqrt{2}y + y^2 = 0$

8) $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{4} = 1;\ \theta = \frac{\pi}{3}$
$-71y^2 + 58\sqrt{3}xy - 13x^2 = 400$

9) **اتصالات:** إذا كانت معادلة مقطع طبق قمر اصطناعي متحكّم في موجات مذياع بدوران °45 في المستوى $x'y'$ هي $5x'^2 + 3y'^2 - 2y' = 0$ ، فاكتب معادلة هذا القطع في المستوى xy .
$4x^2 + 2xy + 4y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$

الفصل الرابع   القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

25

ملحوظات المعلم

ملحوظات المعلم

4-5 المعادلات الوسيطية
Parametric Equations

فيما سبق:

درست تمثيل الحركة باستعمال دوال تربيعية.
(مهارة سابقة)

والآن:

- أمثل المعادلات الوسيطية بيانيًا.
- أكتب المعادلات الوسيطية في الصورة الديكارتية وبالعكس.
- أحلّ مسائل متعلقة بحركة المقذوفات.

المفردات:

المعادلة الوسيطية
parametric equation

المتغير الوسيط
parameter

اتجاه المنحنى
orientation

المنحنى الوسيطي
parametric curve

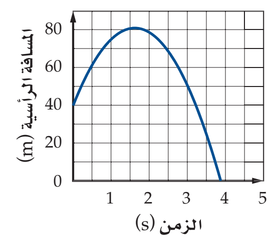
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

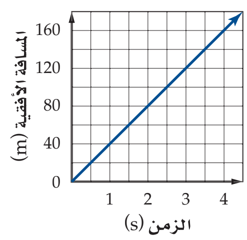
لقد استعملت الدوال التربيعية لتمثيل مسارات المقذوفات مثل كرة السلة. ويمكنك استعمال المعادلات الوسيطية أيضًا لتمثيل مسار المقذوفات وتحديد مداها وحساب قيمها.

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية: لقد مثلت في هذا الكتاب منحنيات في المستوى xy مستعملًا معادلة ذات متغيرين x, y. أما في هذا الدرس فإنك ستمثّل بعض هذه المنحنيات باستعمال معادلتين في متغير ثالث. لاحظ المنحنيات الثلاثة أدناه، يمثل كل منها ناحية مختلفة مما يحدث عندما يُقذف جسم في الهواء.

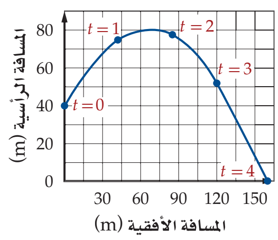
يظهر الشكل 4.5.1 المسافة الرأسية كدالة في الزمن. ويظهر الشكل 4.5.2 المسافة الأفقية على صورة دالة في الزمن، بينما يظهر الشكل 4.5.3 المسافة الرأسية على صورة دالة للمسافة الأفقية.



الشكل 4.5.1



الشكل 4.5.2



الشكل 4.5.3

تصف التمثيلات البيانية أعلاه ومعادلاتها جزءًا مما يحدث عند إطلاق قذيفة. ويمكننا استعمال **المعادلات الوسيطية** للتعبير عن موقع الجسم رأسيًا وأفقيًا. تمثّل المعادلات الآتية المنحنى المبين في الشكل 4.5.3 :

معادلة ديكارتية

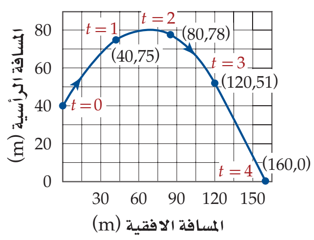
$$y = -\frac{2}{225}x^2 + x + 40$$

معادلات وسيطية

$x = 30\sqrt{2}t$ المركبة الأفقية

$y = -16t^2 + 30\sqrt{2}t + 40$ المركبة الرأسية

يمكن تحديد موقع الجسم عند زمن معين باستعمال المعادلات الوسيطية بحساب المركبتين الأفقية والرأسية للزمن t . ومثال ذلك عندما كان الزمن $t = 0$ فإن موقع الجسم يكون عند $(0, 40)$. يسمى t **المتغير الوسيط**.



يوضّح الشكل تمثيل المنحنى على الفترة الزمنية $0 \le t \le 4$.
يُسمّى تمثيل النقاط مع ترتيب زيادة قيم t ورسم مسار المنحنى في اتجاه معين **اتجاه المنحنى**، ويُشار إليه بأسهم على المنحنى.

مفهوم أساسي **المعادلات الوسيطية**

إذا كانت f و g دالتين متصلتين في المتغير t على الفترة I ، فإن مجموعة الأزواج المرتبة $(f(t), g(t))$ تمثل **منحنى وسيطيًا**. المعادلتان:

$$x = f(t), y = g(t)$$

هما معادلتان وسيطيتان لهذا المنحنى، حيث t المتغير الوسيط و I الفترة الوسيطية.

4-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 4-5

تمثيل الحركة باستعمال دوال تربيعية.

الدرس 4-5

تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا.

حل مسائل تتعلق بحركة المقذوفات.

ما بعد الدرس 4-5

تمثيل مواقف تتضمن معادلات وسيطية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الشكل الذي يمكن استعماله لنمذجة مسار كرة السلة عند رميها باتجاه السلة؟
قطع مكافئ
- ماذا يعني كل من المسار والمدى عند رمي كرة سلة؟
المسار هو المنحنى في الفضاء الذي تسلكه الكرة، والمدى هو المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة.

مصادر الدرس 4-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم		• تنويع التعليم ص (211 ,213)	• تنويع التعليم ص (213)
كتاب التمارين	ص (26)	ص (26)	ص (26)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

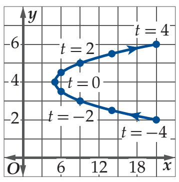
مثـال 1 تمثيل منحنيات بدلالة معادلات وسيطية

مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

a) $x = t^2 + 5;\ y = \frac{t}{2} + 4,\ -4 \le t \le 4$.

كوّن جدولًا من بعض قيم t في الفترة $-4 \le t \le 4$، ثم مثّل بيانيًّا إحداثيات (x, y) الناتجة عن تعويض قيم t في المعادلتين الوسيطيتين، ثم صل بين النقاط بمنحنى.

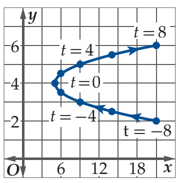
t	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
x	21	14	9	6	5	6	9	14	21
y	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6



تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من -4 إلى 4 .

b) $x = \frac{t^2}{4} + 5,\ y = \frac{t}{4} + 4;\ -8 \le t \le 8$.

t	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
x	21	14	9	6	5	6	9	14	21
y	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6



تشير الأسهم في الشكل إلى اتجاه المنحنى عندما يتغير t من -8 إلى 8 .

تحقق من فهمك (1A-B انظر الهامش.

1A) $x = 3t,\ y = \sqrt{t} + 6;\ 0 \le t \le 8$ 1B) $x = t^2,\ y = 2t + 3;\ -10 \le t \le 10$

إرشادات للدراسة

منحنيات لا تمثل دوال

يمكن استعمال المعادلات الوسيطية لتمثيل منحنيات صورتها الجبرية لا تمثل دوالّ كما في مثال 1.

يمكنك تمثيل المنحنى نفسه بمعادلتين وسيطيتين مختلفتين، كما في مثال 1، ويكون الاختلاف الوحيد بين المنحنيين في سرعتيهما، إذ يسير الجسم على المنحنى في الجزء a بشكل أسرع من الجسم في الجزء b . وعوضًا عن تعيين النقاط لتحديد المنحنى، يمكنك تحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية بحذف المتغير الوسيط بطريقة التعويض.

مثـال 2 كتابة معادلات وسيطية بالصورة الديكارتية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 3t - 1,\ y = t^2 + 2$ بالصورة الديكارتية.

$x = 3t - 1$ معادلة x الوسيطية

$\frac{x+1}{3} = t$ الحل بالنسبة لـ t

$y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2$ عوِّض $t = \frac{x+1}{3}$ في معادلة y الوسيطية

$= \frac{x^2 + 2x + 1}{9} + 2$ ربّع $\frac{x+1}{3}$

$= \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$ بسّط

فتكون المعادلة الديكارتية $y = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{19}{9}$.

تحقق من فهمك

2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = t^2 - 5,\ y = 4t$ بالصورة الديكارتية. $x = \frac{y^2}{16} - 5$

إرشادات للدراسة

حذف المتغير الوسيط

عند حذف المتغير الوسيط، وذلك بتحويل المعادلات الوسيطية إلى الصورة الديكارتية، يمكن أن تحل أيّ من المعادلتين الوسيطيتين، وتجد قيمة t، ثم يتم التعويض في المعادلة الأخرى.

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية

مثال 1 يبيِّن كيفية التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطية على فترة معطاة.

الأمثلة 4-2 تبيِّن كيفية كتابة المعادلات الوسيطية دون قيود وبقيود، ثم باستعمال θ متغيرًا وسيطيًّا بالصورة الديكارتية.

مثال 5 يبيِّن كيفية كتابة المعادلات الوسيطية إذا أُعطيت بالصورة الديكارتية وبمتغير وسيط واحد.

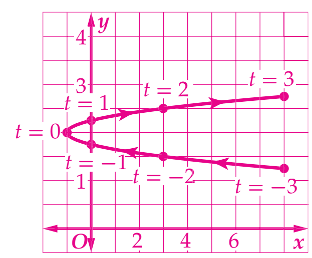
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم.

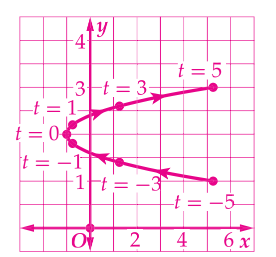
مثالان إضافيان

1 مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي:

a) $x = t^2 - 1$ و $y = \frac{t}{4} + 2$; $-3 \le t \le 3$



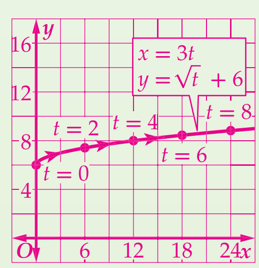
b) $x = \frac{t^2}{4} - 1$ و $y = \frac{t}{5} + 2$; $-5 \le t \le 5$



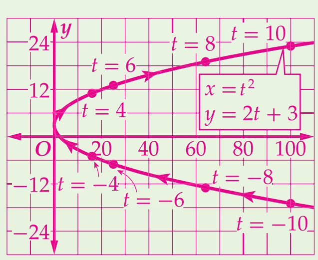
2 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $y = 2t$ و $x = t^2 + 2$ بالصورة الديكارتية. $x = \frac{y^2}{4} + 2$

إجابات (تحقق من فهمك):

1A)



1B)



يجب أحيانًا وضع قيود على المجال بعد التحويل من الصورة الوسيطية إلى الصورة الديكارتية.

مثال 3 مجال الصورة الديكارتية للمعادلة الوسيطية

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \frac{1}{\sqrt{t}}, y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدّد المجال.

$x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ المعادلة الأولى

$\sqrt{t} = \frac{1}{x}$ الحل بالنسبة لـ t

$t = \frac{1}{x^2}$ ربِّع الطرفين

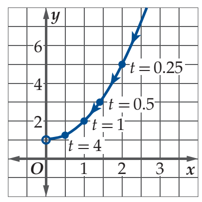
عوّض $\frac{1}{x^2}$ بدلًا من t في المعادلة الثانية.

$y = \frac{t+1}{t}$ المعادلة الثانية

$= \dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}}$ عوِّض $t = \frac{1}{x^2}$

$= \dfrac{\frac{x^2+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ بسِّط

$= x^2 + 1$ بسِّط



على الرغم من أنّ الصورة الديكارتية هي $y = x^2 + 1$، فإن المنحنى معرّف فقط عند $t > 0$، وذلك لأن $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ معرفة فقط عندما $t > 0$. وكما يظهر في الشكل فإن مجال المعادلة الديكارتية يكون هو $\{x \mid x \in R, x > 0\}$.

تحقق من فهمك

3) اكتب $x = \sqrt{t+4}, y = \frac{1}{t}$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال. انظر الهامش.

يمكن أن يكون المتغير الوسيط في المعادلة الوسيطية زاوية مثل θ.

مثال 4 الصورة الديكارتية عندما يكون المتغير الوسيط زاوية (θ)

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 2\cos\theta, y = 4\sin\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا.

حلّ المعادلتين بالنسبة لـ $\sin\theta, \cos\theta$ ثم استعمل متطابقة مثلثية.

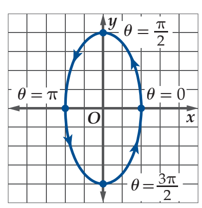
$y = 4\sin\theta$ المعادلتان الوسيطيتان $x = 2\cos\theta$

$\frac{y}{4} = \sin\theta$ الحل بالنسبة لـ $\sin\theta, \cos\theta$ $\frac{x}{2} = \cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$ $\sin\theta = \frac{y}{4}, \cos\theta = \frac{x}{2}$

$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$ بسِّط



تُمثِّل المعادلتان الوسيطيتان قطعًا ناقصًا تمثيله البياني في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك انظر الهامش.

4) اكتب $x = 3\sin\theta, y = 8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$

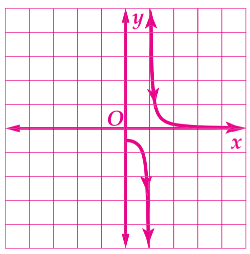
إرشاد تقني

المتغيرات الوسيطية عند تمثيل منحنيات معادلات وسيطية باستعمال الحاسبة البيانية، يستعمل المتغير t بدل θ

مثالان إضافيان

3 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = \sqrt{t+1}, y = \frac{1}{2t}$ بالصورة الديكارتية ، ثم مثل المعادلة بيانيًّا. وحدِّد المجال.

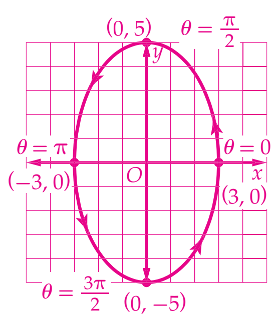
$y = \frac{1}{2x^2 - 2}, x \geq 0, x \neq 1$



$x \neq -1$ ، $x \neq 1$

4 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x = 3\cos\theta$ و $y = 5\sin\theta$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّلهما بيانيًّا.

$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

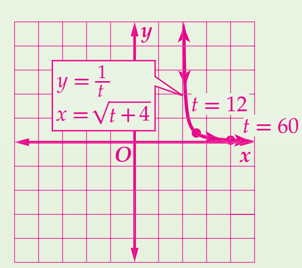


المحتوى الرياضي

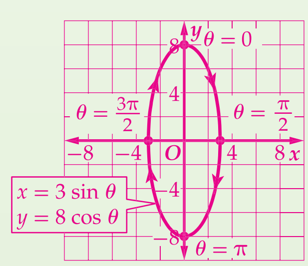
المعادلات الوسيطية هي مجموعة من المعادلات، يُعبَّر فيها عن كل من المتغيرين x, y بدلالة الزمن أو قياس زاوية. وعند كتابة المعادلات الوسيطية بالصورة الديكارتية دون المتغير الوسيط تحقق دائمًا من أنّ الأجزاء الدخيلة غير متضمّنة.

إجابات (تحقق من فهمك):

3) $y = \frac{1}{x^2 - 4}, x > 2, x \neq 2$



4)



يمكن وصف المنحنى نفسه باستعمال زوجين مختلفين أو أكثر من المعادلات الوسيطية. إذا كان الفرق فقط في السرعة أو الاتجاه أو كليهما. ويظهر الفرق في السرعة من خلال قيم المتغير الوسيط، ويُشار إلى الاتجاه بأسهم على المنحنى.

مثال 5 كتابة معادلة ديكارتية في الصورة الوسيطية

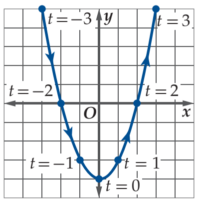
استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثّلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 - 4$. ثم مثّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه:

a) $t = x$

$y = x^2 - 4$ المعادلة الأصلية

$= t^2 - 4$ عوّض x في المعادلة الأصلية.

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = t,\ y = t^2 - 4$، وتبيّن قيم t على التمثيل البياني المجاور السرعة، كما تبين الأسهم اتجاهات المنحنى.



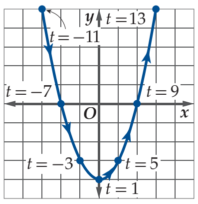
b) $t = 4x + 1$

$x = \frac{t-1}{4}$ الحل بالنسبة لـ x

$y = \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 - 4$ عوّض x في المعادلة الأصلية.

$= \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$ بسّط

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = \frac{t-1}{4},\ y = \frac{t^2}{16} - \frac{t}{8} - \frac{63}{16}$



c) $t = 1 - \frac{x}{4}$

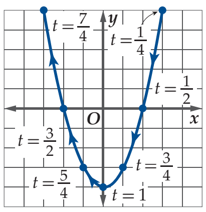
$x = 4 - 4t$ الحل بالنسبة لـ x

$y = (4 - 4t)^2 - 4$ عوّض x في المعادلة الأصلية.

$= 16t^2 - 32t + 12$ بسّط

فتكون المعادلتان الوسيطيتان $x = 4 - 4t,\ y = 16t^2 - 32t + 12$.

لاحظ أن السرعة هنا أكبر بكثير منها في a. أمّا الاتجاه، فكما هو مشار إليه بالأسهم.



تحقق من فهمك

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثّلان المعادلة الديكارتية $x = 6 - y^2$. ثم مثّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه: للتمثيل البياني انظر الهامش.

5A) $t = x + 1$ **5B)** $t = 3x$ **5C)** $t = 4 - 2x$

إرشادات للدراسة

اختيار المعادلة الوسيطية أسهل طريقة لتحويل معادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة الوسيطية هي استعمال $x = t$. وباستعمال هذه الطريقة تكون المعادلة الوسيطية الأولى هي $x = t$، والثانية هي المعادلة الأصلية مع استبدال المتغير x بـ t

5A) $x = t - 1$

$y = \sqrt{7 - t}$

5B) $x = \frac{t}{3}$

$y = \sqrt{6 - \frac{t}{3}}$

5C) $x = \frac{4 - t}{2}$

$y = \sqrt{4 + \frac{t}{2}}$

حركة المقذوفات: تستعمل المعادلات الوسيطية عادةً في محاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوف يصنع زاوية غير قائمة مع الأفق بالمعادلتين الوسيطيتين الآتيتين:

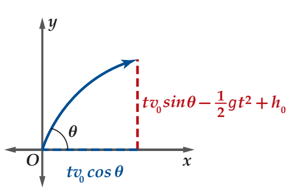
مفهوم أساسي حركة المقذوفات

إذا قُذف جسم بسرعة متجهة ابتدائية v_0 بحيث يصنع زاوية غير قائمة θ مع الأفق، فإن:

المسافة الأفقية: $x = tv_0 \cos \theta$

المسافة الرأسية: $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$

حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، h_0 الارتفاع الابتدائي.



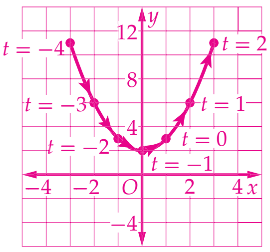
إرشادات للدراسة

ثابت الجاذبية الأرضية يكون التسارع عند سطح الأرض بسبب جاذبيتها مساويًا $9.8\ m/s^2$ أو $32\ ft/s^2$. عند حل المسائل، تأكد من أنك تستعمل القيمة الصحيحة للجاذبية؛ بناءً على وحدات السرعة والمسافة المعطاة.

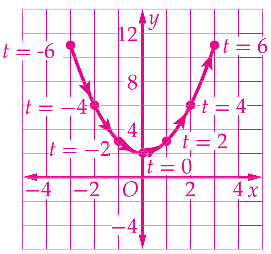
مثال إضافي

5 استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثّلان المعادلة الديكارتية $y = x^2 + 2$ ثم مثّل المعادلة بيانيًّا.

a) $t = x - 1$ $y = t^2 + 2t + 3$

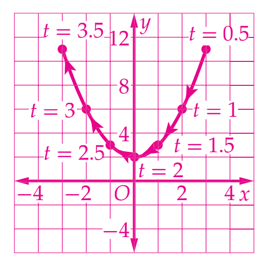


b) $t = 2x$ $y = \frac{t^2}{4} + 2$



c) $t = 2 - \frac{x}{2}$

$y = 4t^2 - 16t + 18$



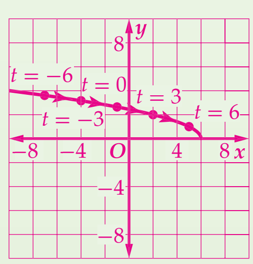
إرشادات للمعلم الجديد

تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًّا

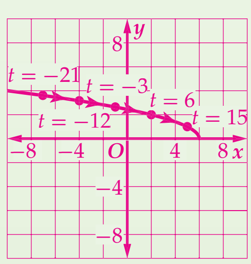
للمثال 5 أكّد على أن المنحنيات الثلاثة لها قيم x نفسها وقيم y نفسها التي تحدّد شكل المنحنى. وهو منحنى $y = x^2 - 4$. والتغير الوحيد يحدث للمتغير الوسيط t.

إجابات (تحقق من فهمك):

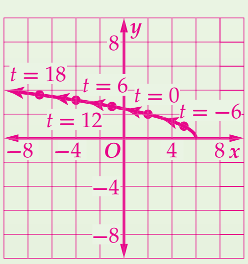
5A)



5B)



5C)



حركة المقذوفات

مثال 6 يبيِّن كيفية استعمال المعادلات الوسيطية لنمذجة حركة المقذوفات.

مثال إضافي

6 **كرة قدم:** ركل أحد اللاعبين كرة قدم بسرعة ابتدائية 26 yd/s. وتميل بزاوية قياسها °72 عن الأفق. أوجد المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا كان أقصى ارتفاع لها 46.47 yd .

24 yd تقريبًا

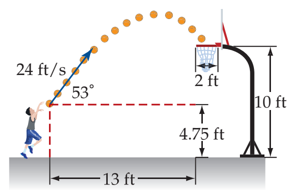
التعليم باستعمال التقنيات

مدوّنة يكتب الطلاب مدخلة حول المعادلات الوسيطية على مدوّنة الصف. وتأكّد من تضمنها معلومات تتعلق بالصورة الديكارتية والوسيطة.

مثال 6 حركة المقذوفات

كرة سلة: يتدرب نواف على الرميات الحرة في كرة السلة، فقذف الكرة بسرعةٍ ابتدائية مقدارها 24 ft/s ، وبزاوية تميل °53 على الأفق. وكانت المسافة الأفقية بين يده والحافة الأمامية لحلقة السلة هي 13 ft ، وارتفاع حلقة السلة عن الأرض 10 ft ، وقطر الحلقة 2 ft . إذا كان ارتفاع يده عن الأرض 4.75 ft، فهل سيحرز نواف نقاطًا من هذه الرمية؟

ارسم شكلًا يوضح الموقف.



لتحديد ما إذا كانت الرمية قد حقّقت نقاطًا أم لا، لا بد من حساب المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة عندما كان ارتفاعها 10 ft. اكتب أولًا معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

$y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$y = t(24)\sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$ $v_0 = 24, \theta = 53°, g = 32, h_0 = 4.75$

$10 = t(24)\sin 53 - \frac{1}{2}(32)t^2 + 4.75$ $y = 10$ (ارتفاع الكرة 10 ft)

وبحل هذه المعادلة التربيعية باستعمال القانون العام تجد أن $t = 0.42$ ، $t = 0.77$ ، حيث تمثل $t = 0.42$ قيمة t عندما تكون الكرة على ارتفاع 10 ft وهي صاعدة، وتمثل $t = 0.77$ قيمة t عندما تكون الكرة على ارتفاع 10 ft وهي ساقطة.

حدّد موقع الكرة الأفقي عند الزمن 0.77 ثانية

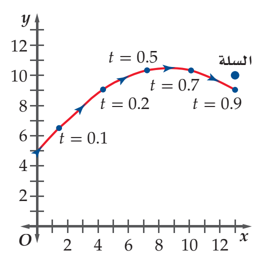
$x = tv_0 \cos\theta$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الأفقي

$= 0.77(24)\cos 53$ $v_0 = 24, \theta = 53°, t \approx 0.77$

≈ 11.1 باستعمال الآلة الحاسبة

بما أن الموقع الأفقي للكرة أقل من 13 ft، عندما تصل الكرة إلى ارتفاع 10 ft وهي ساقطة، فإن الكرة لن تصل إلى السلة؛ لذا فإن نوافًا لم يحرز نقاطًا من هذه الرمية.

التحقق: يمكنك تأكيد نتائج الحسابات بتمثيل منحنيَي المعادلتين الوسيطيتين، وتحديد مسار الكرة بالنسبة للسلة.

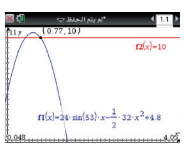


t	x	y	t	x	y
0	0	4.75	0.5	7.22	10.33
0.1	1.44	6.51	0.6	8.67	10.49
0.2	2.89	7.94	0.7	10.11	10.32
0.3	4.33	9.06	0.8	11.55	9.84
0.4	5.78	9.86	0.9	13.00	9.04

إرشادات للدراسة

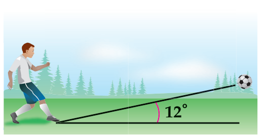
إيجاد قيمة t باستعمال الحاسبة البيانية

يمكن أن تمثّل منحنى معادلة موقع الكرة الرأسي والمستقيم $y = 10$ على الشاشة نفسها. سيقطع المستقيم المنحنى في نقطتين. تمثل نقطة التقاطع الثانية الكرة وهي ساقطة في اتجاه السلة. استعمل ميزة نقاط التقاطع من قائمة تحليل الرسم البياني في الحاسبة البيانية TI–nspire؛ لإيجاد نقطة التقاطع الثانية مع المستقيم $y = 10$ ، وهي القيمة 0.77 ثانية تقريبًا.



تحقق من فهمك

6) **كرة قدم:** ركل أحمد كرةً بسرعةٍ ابتدائية مقدارها 56 m/s وبزاوية مقدارها °12 مع الأفق. ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟ 130 m



تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثلاثية أو رباعية، على أن تسجل كل مجموعة رمي كرة باستعمال فيديو رقمي. واطلب إليهم رصد زمن حركة الكرة منذ انطلاقها ثم مشاهدة الفيديو بالحركة البطيئة وتتبع مسارها. وعلى الطلاب تحديد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة وسرعتها الابتدائية وزاوية انطلاقها. واطلب إلى مجموعات الطلاب استعمال هذه البيانات لكتابة مسائل لفظية وتبادلها مع المجموعات الأخرى، على أن تعرض كل مجموعة شريط الفيديو على الصف.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 27–1 لتتحقق من استيعاب الطلاب للمفاهيم. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

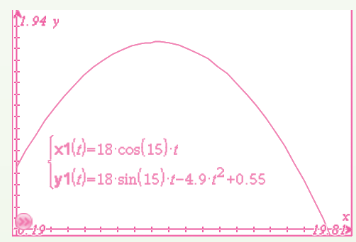
تنبيه !

خطأ شائع للأسئلة 5–1 تأكّد أنّ الطلاب يستعملون الإحداثيين x, y لتحديد شكل المنحنى. ثم كتابة مواقع المتغير الوسيط t عليه.

إجابات:

12) $y = 45 - 3x^2, x > 0$

26a)



26c) نعم: تصل الكرة إلى الشبكة بعد 0.575 ثانية. وعند هذا الزمن يكون ارتفاع الكرة 1.6 m ، وبذلك تكون قد اجتازت الشبكة.

تدرب وحل المسائل

مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 1) 5–1 انظر ملحق الإجابات.

1) $x = t^2 + 3, y = \frac{t}{4} - 5; -5 \le t \le 5$

2) $x = \frac{t^2}{2}, y = -4t; -4 \le t \le 4$

3) $x = -2t^2, y = \frac{t}{3} - 6; -5 \le t \le 5$

4) $x = \frac{t}{2}, y = -\sqrt{t} + 5; 0 \le t \le 8$

5) $x = t^2 - 4, y = 3t - 8; -5 \le t \le 5$

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال: (المثالان 2, 3) للتمثيلات البيانية انظر ملحق الإجابات.

6) $y = t^2 - 7, x = 3t + 9$ $\quad y = \frac{x^2}{9} - 2x + 2$

7) $y = 5t, x = t^2 - 2$ $\quad x = \frac{y^2}{25} - 2$

8) $y = -4t + 3, x = t^2 + 1$ $\quad x = \frac{(y-3)^2}{16} + 1$

9) $y = 2t^2 + 8, x = 5t - 1$ $\quad y = \frac{2x^2}{25} + \frac{4x}{25} + \frac{202}{25}$

10) $y = \frac{6t}{5} + 9, x = 4t^2$ $\quad x = \frac{25(y-9)^2}{9}$

11) $y = \frac{t^2}{6} - 7, x = \frac{t}{3} + 2$ $\quad y = \frac{3x^2}{2} - 6x - 1$

12) **ألعاب بهلوانية:** قفز مهرج من على برج ممسكًا بحبل، فكان ارتفاعه بعد t ثانية، ويُعطى بالمعادلة $y = \frac{45t - 1}{t}$، والمسافة الأفقية التي قطعها بعد t ثانية تُعطى بالمعادلة $x = \frac{1}{\sqrt{3t}}$، حيث x, y مقيسة بالأقدام. اكتب معادلة ديكارتية تمثِّل مسار قفز المهرج في الفترة الزمنية $0 \le t \le 5$. (مثال 3) انظر الهامش.

اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا: (مثال 4) (13-16) انظر ملحق الإجابات.

13) $y = 5 \sin \theta, x = 3 \cos \theta$

14) $y = 4 \sin \theta, x = 6 \cos \theta$

15) $y = \cos \theta, x = 8 \sin \theta$

16) $y = 6 \sin \theta, x = 5 \cos \theta$

استعمل المتغير الوسيط في كل مما يأتي لكتابة معادلتين وسيطيتين تمثِّلان المعادلة المعطاة، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه: (مثال 5) (17–20) انظر ملحق الإجابات.

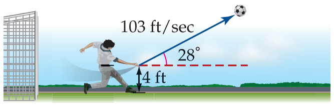
17) $t = 3x - 2, y = x^2 + 9$

18) $t = 2 - \frac{x}{3}, y = \frac{x^2}{12}$

19) $t = \frac{x}{5} + 4, y = 10 - x^2$

20) $t = \frac{1-x}{2}, y = \frac{3-x^2}{4}$

21) **كرة قدم:** رمى حارس مرمى كما في الشكل أدناه كرة بسرعة ابتدائية مقدارها 103 ft/s لتصنع زاوية مع الأفق مقدارها 28° . ما أقصى مسافة أفقية تقطعها الكرة؟ (مثال 6) 282 ft



اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا، وحدِّد المجال:

22) $x = \sqrt{t} + 4$
$y = 4t + 3$
$4x^2 - 32x + 67, x \ge 4$

23) $x = \log t$
$y = t + 3$
$y = 10^x + 3$

24) $x = \sqrt{t} - 7$
$y = -3t - 8$
$y = -3x^2 - 29, x \ge 0$

25) $x = \log (t - 4)$
$y = t$
$y = 10^x + 4$

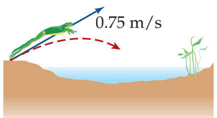
26) **كرة التنس:** ضرب جمال كرة تنس من على ارتفاع 55 cm عن الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 18 m/s ، وتصنع زاوية مع الأفق قياسها 15°.

a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل مسار الكرة باستعمال معادلات وسيطية. انظر الهامش.

b) ما الزمن الذي تستغرقه الكرة في الهواء قبل أن تصطدم بالأرض؟ 1.05 s تقريبًا

c) إذا كانت المسافة بين جمال والشبكة 10 أمتار، وارتفاع الشبكة 1.5 m عن سطح الأرض، فهل ستجتاز الكرة الشبكة؟ وإذا حدث ذلك، فكم سيكون ارتفاع الكرة عن الشبكة؟ وإذا لم يحدث، فكم تكون المسافة بين موقع سقوطها والشبكة؟ انظر الهامش.

27) **أحياء:** يقفز ضفدع من حافة جدول بسرعة ابتدائية 0.75 m/s ، ويصنع زاوية مع الأفق مقدارها 45° . وينخفض سطح الجدول 0.3 m عن الحافة التي قفز منها الضفدع. افترض أن g تساوي $9.8 m/s^2$.



a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع الضفدع عند الزمن t، مفترضًا أن سطح الماء يُمثَّل بالمستقيم $y = 0$ انظر الهامش.

b) إذا كان عرض الجدول 0.5 m ، فهل سيصل الضفدع إلى الضفة الأخرى؟ وإذا لم يصل إلى الضفة الأخرى، فكم يكون بعده عنها عندما يصطدم بالماء؟ لا؛ 0.34 m

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	33–40 ،29 ،28 ،1–27
ضمن المتوسط	1–25 (فردي)، 27-29، 31-40
فوق المتوسط	26–40

28) **سباق:** اشترك حسن وسعيد في سباق جري طوله 100 m، وعندما أطلقت صافرة البدء ركض حسن بسرعة 8.0 m/s من النقطة (0, 2) وبتأخير 0.1 s، بينما ركض سعيد بسرعة 8.1 m/s من النقطة (0, 5) وبتأخير 0.3 s. انظر الهامش.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين تصفان موقع كل منهما باستعمال محور y كخط بداية، ومفترضًا أنهما ركضا بموازاة محور x.

b) من منهما سيفوز بالسباق؟ وإذا كانت مسافة السباق 200 m بدلًا من 100 m، فمن سيفوز؟ فسّر إجابتك.

29) **تمثيلات متعددة:** ستستقصي في هذه المسألة شكل المنحنى الناتج عن مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على محور x. انظر ملحق الإجابات. a–c

a) **بيانيًا:** استعمل حاسبة بيانية لتمثيل منحنى المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$، حيث t مقيسة بالراديان.

b) **تحليليًا:** ما المسافة بين مقاطع x؟ صف ما تُمثّله هذه المقاطع x، وما تمثّله المسافة بين كل مقطعين.

c) **تحليليًا:** ما أكبر قيمة لـ y؟ صف ما تمثّله هذه القيمة، وكيفية تغيرها مع تغير نصف قطر الدائرة.

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **تحدٍّ:** المعادلتان الوسيطيتان للمستقيم ℓ هما $x = 2 + 3t$, $y = -t + 5$. اكتب مجموعة معادلات وسيطية للمستقيم m العمودي على ℓ والمار بالنقطة $(4, 10)$.

إجابة ممكنة: $x = 4 + t$, $y = 10 + 3t$

31) **اكتب:** اشرح لماذا يوجد عدد لا نهائي من المعادلات الوسيطية تصف المستقيم نفسه في المستوى xy. انظر ملحق الإجابات.

32) **تبرير:** حدّد ما إذا كان بالإمكان استعمال المعادلات الوسيطية لحركة المقذوفات لمحاكاة حركة الأجسام الساقطة بزاوية قياسها 90°. وضّح تبريرك. انظر ملحق الإجابات.

33) **اكتب:** بيّن ميّزات استعمال المعادلات الوسيطية على استعمال المعادلات الديكارتية عند تحليل المركبات الأفقية والرأسية للمنحنى. انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين: (الدرس 3-4)

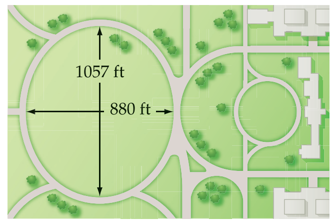
34–36) انظر الهامش.

34) الرأسان $(-8, 5)$, $(5, 4)$، وطول المحور المرافق 4 وحدات.

35) طول المحور القاطع 4 وحدات، والبؤرتان $(3, -1)$, $(3, 5)$

36) اكتب معادلة تمثّل القطع الناقص في الشكل أدناه مفترضًا أن نقطة الأصل عند مركز القطع. (الدرس 2-4)

$\frac{x^2}{193600} + \frac{y^2}{279312.25} = 1$



بسّط كل عبارة من العبارتين الآتيتين: (الدرس 1-3)

37) $\frac{\sin x}{\csc x + 1} + \frac{\sin x}{\csc x - 1}$ $\quad 2\tan^2 x$

38) $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}$ $\quad 2\csc^2 x$

تدريب على اختبار

39) يحتوي كل مربع غير مظلَّل في الشكل أدناه على مجموع العدد في المربع الذي فوقه مباشرة والعدد الذي إلى يساره. فمثلًا العدد 4 في المربع غير المظلَّل هو مجموع العدد 2 في المربع الذي فوقه والعدد 2 في المربع الذي إلى يساره. ما قيمة x؟ D

0	1	2	3	4	5
1	2	4			
2					
3			x		
4					
5					

A 8

B 15

C 23

D 30

40) الصورة الديكارتية للمنحنى المعرّف بالمعادلتين: $x = 3\cos\theta - 1$, $y = 3\sin\theta + 4$، هي: C

A $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$

B $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 3$

C $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$

D $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 3$

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى كل طالب أن يكتب خطوات إيجاد الصورة الديكارتية للمعادلة عندما تكون المعادلتان الوسيطيتان معلومتين. حل إحدى المعادلتين بالنسبة لـ t، ثم عوّض بتلك القيمة في المعادلة الثانية، وبسّط المعادلة الناتجة.

التقويم التكويني

تحقّق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 5-4 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (69)

تمثيلات متعددة

في السؤال 29 يستعمل الطلاب التمثيل البياني والتحليل لاستقصاء شكل المنحنى الناتج عن مسار نقطة على دائرة نصف قطرها وحدة واحدة تتدحرج على المحور x.

إجابات:

27a) $x = t \cdot 0.75 \cos 45°$, $y = t \cdot 0.75 \sin 45° - 4.9t^2 + 0.3$

28a) حسن: $x = 8(t - 0.1)$, $y = 2$؛ سعيد: $x = 8.1(t - 0.3)$, $y = 5$

28b) يفوز حسن بسباق 100 متر بزمن 12.6 ثانية، في حين يكون زمن سعيد 12.65 ثانية. أمّا في سباق 200 متر، فيفوز سعيد.

34) $\frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$

35) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتمثيل المعادلات الوسيطية بتغيير الوضع في Graph Type إلى Parametric. ويمكن تمثيل دالة الدويري باستعمال المعادلتين الوسيطيتين $x = t - \sin t$ و $y = 1 - \cos t$. ثم اطلب إلى الطلاب البحث باستعمال الإنترنت ليجدوا خصائص الشكل الدويري cycloid، ويمثّل كل منهم منحناه. ويمكنهم أيضًا استعمال حاسبة بيانية في وضعية Parametric لتمثيل منحنى هذا الشكل، ومقارنته بالمنحنى الذي رسموه سابقًا.

1 التركيز

الهدف استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire لتمثيل الدوال الوسيطية.

المواد اللازمة

- الآلة الحاسبة البيانية TI–nspire .

إرشادات للتدريس

يجب أن تأخذ مركبة المعادلة الرأسية نقصان الارتفاع بالحسبان بسبب الجاذبية، وذلك بطرح $4.9t^2$.

ولملاحظة التمثيل لمجالات مختلفة لـ t ، اختر المدى المناسب لـ t ، حيث سيعطيك هذا لقطات مختلفة للمنحنى.

2 التدريس

العمل في مجموعات متعاونة

اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات رباعية لتنفيذ النشاط.

اسأل:

- لماذا يكون من الضروري تمثيل هذا الموقف بأربع معادلات وسيطية؟ توجد معادلة وسيطية لكل من المركبة الرأسية والأفقية لكل من كرتي مشاري ونواف.

تدريب اطلب إلى الطلاب إكمال تمرين 1.

3 التقويم

التقويم التكويني

استعمل تمرين 2 لتقويم إمكانية استعمال الطلاب للحاسبة البيانية لتمثيل مواقف ممثَّلة بمعادلات وسيطة واختبارها.

من المحسوس إلى المجرد

اسأل:

- ما الأنماط التي تربط السرعة الابتدائية وزاوية الانطلاق عند رمي كرة بالمسافة الأفقية المقطوعة؟

إجابة ممكنة: تتناسب المسافة الأفقية المقطوعة طرديًّا مع السرعة الابتدائية.

معمل الحاسبة البيانية:

توسع 4-5

التمثيل بالمعادلات الوسيطية

Modeling with Parametric Equations

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI–nspire لتمثيل الدوال الوسيطية.

المتغير المستقل t في بعض المعادلات الوسيطية يمثِّل الزمن، ويبين هذا المتغير السرعة في التمثيل البياني للمنحنى. إذا أمكن تمثيل منحنى بشكل كامل في الفترة $0 \le t \le 5$ ، بينما أمكن تمثيل منحنى مطابق له وبشكل كامل في الفترة $0 \le t \le 10$، فإن المنحنى الأول أسرع.

نشاط تمثيل القطوع المخروطية بالمعادلات الوسيطيّة بيانيًّا

كرة قدم: وقف مشاري بجانب نواف، وركل كلٌّ منهما كرة في الوقت نفسه. فكانت السرعة الابتدائية المتجهة لكرة مشاري 35 m/s ، وصنعت زاوية قياسها °60 مع الأفق، بينما كانت السرعة الابتدائية المتجهة لكرة نواف 30 m/s ، وصنعت زاويةً قياسها °45 مع الأفق. مثِّل بيانيًّا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire، مفترضًا أن الكرتين تم ركلهما من سطح الأرض.

إرشادات للدراسة

تحديد المدى
استعمل معطيات المسألة لتحديد مدى قيم x, y, t .

الخطوة 1: المعادلتان الوسيطيتان لكل رمية هما:

مشاري: $x = 35t \cos 60$ $\quad y = 35t \sin 60 - 4.9t^2$

$= 17.5t$ $\quad = 17.5\sqrt{3}t - 4.9t^2$

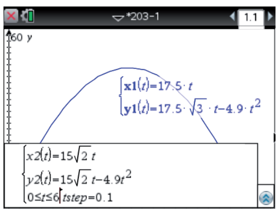
نواف: $x = 30t \cos 45$ $\quad y = 30t \sin 45 - 4.9t^2$

$= 15\sqrt{2}\,t$ $\quad = 15\sqrt{2}t - 4.9t^2$

الخطوة 2: رتِّب وضعية الحاسبة بالضغط على المفاتيح:

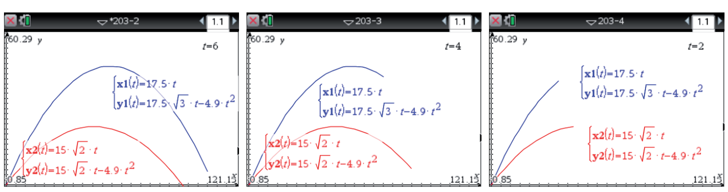
on ، ثم اختر 3:إدخال / تحرير الرسم البياني

ومنها 3:بارامتري ، مما يسمح لك بتمثيل المعادلات الوسيطيّة. أدخل المعادلات الوسيطية كما هو موضح.



الخطوة 3: حدِّد مدى قيم t من 0 إلى 0.1 في tstep ؛ لملاحظة مسارَي الكرتين.

الخطوة 4: مثّل المعادلات بيانيًّا.

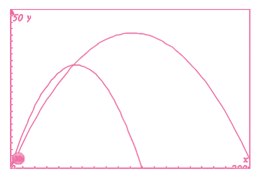


مسار كرة مشاري أعلى من مسار كرة نواف، بينما تسقط كرة نواف أولًا، وتقطع مسافة أفقية أقل.

تمارين:

1) **كرة قدم:** ركل نواف كرةً ثانيةً بسرعةٍ ابتدائية متجهة 33 m/s ، فصنعت زاويةً قياسها °50 مع الأفق، وبعد ذلك بنصف ثانية ركل مشاري كرةً أخرى بسرعة ابتدائية متجهة 45 m/s ، فصنعت زاوية قياسها °40 مع الأفق. مثِّل بيانيًّا منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية، وفسّر النتائج.

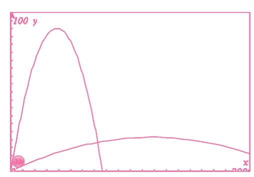
1)



إجابة ممكنة: تعلو رمية مشاري على رمية نواف عند أقصى ارتفاع تقريبًا. وتهبط رمية نواف قبل رمية مشاري بـ 1.5 ثانية.

2) **كرة سلة :** رمى أحمد كرةً نحو السلة بسرعة ابتدائية متجهة 43 m/s، فصنعت زاوية قياسها °87 مع الأفق. وبعد ثانية رمى فيصل كرة نحو السلة بسرعة ابتدائية متجهة 60 m/s، فصنعت مع الأفق زاوية قياسها °20 . مثِّل منحنى مسار كل كرة باستعمال الحاسبة البيانية بيانيًّا، وفسِّر النتائج مفترضًا أن أحمد وفيصل يقفان متجاورين، وأن الارتفاع الابتدائي للرميتين هو متر واحد.

2)



إجابة ممكنة: رمية أحمد أعلى كثيرًا من رمية فيصل. بينما تهبط رمية فيصل على الأرض عند الزمن نفسه الذي تصل فيه رمية فيصل إلى أقصى ارتفاع.

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

تدريبات إعادة التعليم (22) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

4-5 تدريبات إعادة التعليم

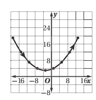
المعادلات الوسيطية

التمثيل البياني للمعادلات الوسيطية : تُستعمل **المعادلات الوسيطية** لوصف المركبتين (الأفقية والرأسية) لمعادلة، والمتغير **الوسيط** قيمة اختيارية تكون عادة إما الزمن وإمّا قياس الزاوية.

مثال 1 مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة:
$x=-3+4t\,,\, y=t^2+3\,,\, -4\le t\le 4$.

كوِّن جدولًا من بعض قيم t في الفترة $-4\le t\le 4$، ثم مثِّل بيانيًّا النقطة (x, y) لكل قيمة لـ t، ثم صل بين النقاط بمنحنى.

t	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-19	-15	-11	-7	-3	1	5	9	13
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19



مثال 2 اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x=4t-2\,,\, y=t^2+1$ بالصورة الديكارتية.

$x=4t-2$ المعادلة الأولى

$\frac{x+2}{4}=t$ الحل بالنسبة لـ t.

$y=\left(\frac{x+2}{4}\right)^2-2$ عوِّض $\frac{x+2}{4}$ بدلًا من t في المعادلة الثانية.

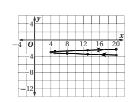
$=\frac{x^2+4x+4}{16}-2$ ربِّع $\frac{x+2}{4}$.

$=\frac{x^2}{16}+\frac{x}{4}-\frac{7}{4}$ بسِّط

المعادلة الديكارتية هي: $y=\frac{x^2}{16}+\frac{x}{4}-\frac{7}{4}$

تمارين

1) مثِّل بيانيًّا المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة: $x=t^2+4\,,\, y=\frac{t}{6}-3;\ -4\le t\le 4$
$y=\sqrt{3x}+2$



2) اكتب المعادلتين الوسيطيتين: $x=\frac{t}{3}\,,\, y=\sqrt{t}+2$ بالصورة الديكارتية . **$y=\sqrt{3x}+2$**

الصف: الثالث الثانوي 22 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات إعادة التعليم (23) دون

الاسم: ________ التاريخ: ________

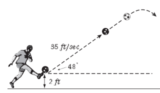
4-5 تدريبات إعادة التعليم (تتمة)

المعادلات الوسيطية

حركة المقذوفات تستعمل المعادلات الوسيطية غالبًا في معادلات حركة المقذوفات، فإذا قُذف جسم بزاوية غير قائمة، تميل θ على الأفق وبسرعة ابتدائية v_0 ، وبالتالي يمكن إيجاد المسافة الأفقية x بالمعادلة: $x=tv_0\cos\theta$، والمسافة الرأسية y بالمعادلة: $y=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+h_0$ ، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية ، و t الزمن، و h_0 الارتفاع الابتدائي.

مثال **ركل ماجد كرة قدم بسرعة ابتدائية مقدارها $35\,ft/s$، وبزاوية تميل $48°$ على الأفق، إذا كان ارتفاع الكرة قدمين عند ركلها، فما المسافة الأفقية التي تقطعها قبل ارتطامها بالأرض؟**

خطوة 1: ارسم شكلًا يوضح الموقف.



خطوة 2: اكتب معادلة وسيطية لموقع الكرة الرأسي.

$y=tv_0\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2+h_0$ المعادلة الوسيطية لموقع الكرة الرأسي

$=t(35)\sin(48)-\frac{1}{2}(32)t^2+2$ $\quad v_0=35,\ \theta=48°,\ g=32,\ h_0=2$

خطوة 3: مثِّل معادلة الموقع الرأسي بيانيًّا، وأوجد نقطة تقاطع المنحنى مع $y=0$ باستعمال الحاسبة البيانية. فتكون القيمة 1.7 ثانية تقريبًا.

خطوة 4: حدد موقع الكرة الأفقي عند 1.7 ثانية.

$x=tv_0\cos\theta$ المعادلة الوسيطية للموقع الأفقي

$=1.7(35)\cos 48$ $\quad v_0=35,\ \theta=48°,\ t=1.7$

≈ 39.8 باستعمال الآلة الحاسبة.

ستقطع الكرة مسافة أفقية مقدارها $39.8\,ft$ قبل ارتطامها بالأرض.

تمارين

1) ركل خالد كرة بسرعة ابتدائية مقدارها $28\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $56°$ من ارتفاع 4 أقدام، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟
$25\,ft$ تقريبًا

2) ضرب عمر كرة تنس أرضي بسرعة ابتدائية مقدارها $38\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $42°$ من ارتفاع 1.5 قدم، فما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة إذا لم يعترضها الخصم؟
$46.6\,ft$ تقريبًا

الصف: الثالث الثانوي 23 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

تدريبات حل المسألة (24) دون ضمن فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

4-5 تدريبات حل المسألة

المعادلات الوسيطية

1) **فيزياء:** أُطلق صاروخ بسرعة ابتدائية مقدارها $5\,m/s$، وبزاوية تميل على الأفق $8°$، فما المسافة الأفقية التي يقطعها الصاروخ بعد $0.4\,s$ ؟
$1.98\,m$

2) **القرص الطائر:** تلعب سميرة وسارة لعبة القرص الطائر، حيث ترمي سميرة القرص إلى سارة بسرعة ابتدائية مقدارها $38\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $28°$، ومن ارتفاع 4 أقدام، وقد كانت سارة تبعد عن سميرة مسافة 40 قدمًا.

a) ما ارتفاع القرص عن الأرض عندما يصل إلى سارة؟
$2.53\,ft$

b) ما أقصى ارتفاع للقرص الطائر؟
$8.97\,ft$

3) **كرة التنس:** يضرب وليد كرة تنس بسرعة ابتدائية مقدارها $42\,ft/s$ في الثانية، وبزاوية تميل على الأفق $16°$، ومن ارتفاع قدمين، إذا كانت المسافة بينه وبين الشبكة 20 قدمًا، وارتفاع الشبكة 3 أقدام، فهل تتخطَّى الكرة الشبكة؟
نعم: ارتفاع الكرة فوق الأرض يساوي $3.8\,ft$ عند المسافة $20\,ft$.

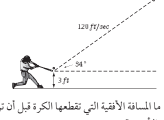
4) **كرة سلة :** يرمي محمد كرة سلة بسرعة ابتدائية مقدارها $28\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $60°$، إذا رمى محمد الكرة من ارتفاع 5 أقدام ، فاكتب معادلتين لتحدد المسافة الرأسية والمسافة الأفقية للكرة.
معادلة المسافة الرأسية:
$y=t(28)\sin(60)-16t^2+5;$
معادلة المسافة الأفقية: $x=t(28)\cos(60)$

5) **جولف:** يضرب بلال كرة جولف بسرعة ابتدائية مقدارها $100\,ft/s$، وبزاوية تميل على الأفق $39°$

a) اكتب معادلات وسيطية لمسار الكرة.
$x=100t\cos 39°,$
$y=100t\sin 39°-16t^2$

b) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.
$61.9\,ft$ تقريبًا

6) **كرة البيسبول:** يضرب سلمان كرة البيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها $120\,ft/s$ من ارتفاع 3 أقدام، وبزاوية تميل على الأفق $34°$.



a) ما المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟
$421.6\,ft$

b) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟
$73.36\,ft$

c) إذا كان ارتفاع السياج 8 أقدام، ويبعد 400 قدم عن موقع سلمان، فهل تجتاز الكرة السياج؟ وضّح ذلك.

إجابة ممكنة: نعم، عندما تكون المسافة الأفقية $400\,ft$، فإن ارتفاع الكرة يكون $15.4\,ft$ فوق الأرض؛ وعليه فإنها تجتاز السياج.

الصف: الثالث الثانوي 24 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

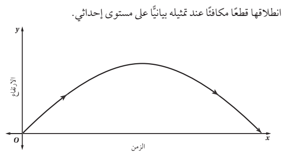
التدريبات الإثرائية (25) فوق

الاسم: ________ التاريخ: ________

4-5 التدريبات الإثرائية

المعادلات الديكارتية للمقذوفات

يمثل مسار قذيفة بعد انطلاقها قطعًا مكافئًا عند تمثيله بيانيًّا على مستوى إحداثي.



على افتراض أن الجاذبية الأرضية هي القوة الوحيدة المؤثرة في القذيفة، ومعادلة مسار قذيفة في المستوى الإحداثي هي:

$$y=-\left(\frac{g}{2v_0^{\,2}\cos^2\alpha}\right)x^2+(\tan\alpha)x\,,$$

حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\,m/s^2$ أو $32\,ft/s^2$، و v_0 السرعة الابتدائية، و α زاوية انطلاق القذيفة مع الأفق.

مثال **اكتب معادلة مسار قذيفة تنطلق بزاوية $10°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $120\,m/s$.**

$$y=-\left(\frac{9.8}{2(120)^2\cos^2 10°}\right)x^2+(\tan 10°)x$$

$$y=-0.00035x^2+0.18x$$

أوجد معادلة المسار لكلٍّ من القذيفتين الآتيتين:

1) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها $80°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $200\,ft/s$.
$y=-0.013x^2+5.67x$

2) أُطلقت قذيفة بزاوية مقدارها $40°$ مع الأفق، وبسرعة ابتدائية مقدارها $150\,m/s$.
$y=-0.00037x^2+0.84x$

الصف: الثالث الثانوي 25 **الفصل 4:** القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

مصادر المعلم للأنشطة الصفيّة

ملحوظات المعلم

مصادر المعلم للأنشطة الصفية

مصادر الدرس 5 - 4

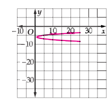
دون دون المتوسط | ضمن ضمن المتوسط | فوق فوق المتوسط

كتاب التمارين (26) دون ضمن فوق

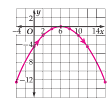
4-5 المعادلات الوسيطية

مثِّل بيانيًّا المنحنى المُعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

1) $x=t^2+1\ ,\ y=\frac{t}{2}-6;\ -5\le t\le 5$



2) $x=2t+6\ ,\ y=-\frac{t^2}{2};\ -5\le t\le 5$



اكتب كل معادلتين وسيطتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية:

3) $x=2t+3,\ y=t-4$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$

4) $x=t+5,\ y=-3t^2$

$y=-3(x-5)^2$

5) $x=3\sin\theta,\ y=2\cos\theta$

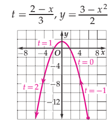
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

6) $y=4\sin\theta,\ x=5\cos\theta$

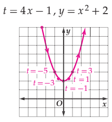
$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{25}=1$

استعمل المتغير الوسيط في كلٍّ مما يأتي لكتابة المعادلتين الوسيطيتين اللتين تمثلان المعادلة الديكارتية المعطاة، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه.

7) $t=\frac{2-x}{3},\ y=\frac{3-x^2}{2}$



8) $t=4x-1,\ y=x^2+2$



9) **مقذوفات:** يطلق محمود لعبةً صاروخيةً من مستوى الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، وبزاوية °80 مع الأفق.

a) اكتب معادلتين وسيطتين لتمثيل مسار الصاروخ.

$x=80t\cos 80°;\ y=80t\sin 80°-16t^2$

b) ما الزمن اللازم للصاروخ لقطع مسافة أفقية مقدارها 10 feet من نقطة البداية؟ وما المسافة الرأسية عند هذه النقطة؟

0.72 s; 48.43 ft

26

الفصل الرابع القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

ملحوظات المعلم

الفصل 4 دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 4-1)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+p, k)$
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+p)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة.

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 4-2)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 4-3)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها (الدرس 4-4)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.
- يمكن تحويل معادلة في مستوى xy إلى معادلة في مستوى $x'y'$ باستعمال
$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

المعادلات الوسيطية (الدرس 4-5)

- تستعمل المعادلات الوسيطية لوصف المركبتين الأفقية والرأسية لمعادلة بصورة منفصلة، وبدلالة المتغير الوسيط t.
- عند قذف جسم بزاوية قياسها θ مع الأفق وبسرعة ابتدائية متجهة v_0 فإنّ المسافة الأفقية التي يقطعها الجسم تُعطى بالصيغة $x = tv_0\cos\theta$، حيث g ثابت الجاذبية الأرضية، t الزمن، والارتفاع الرأسي الذي يكون عنده الجسم بعد t ثانية يُعطى بالصيغة $y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$، حيث h_0 الارتفاع الابتدائي.

المفردات

القطع المخروطي ص 172
المحل الهندسي ص 172
القطع المكافئ ص 172
البؤرة ص 172
الدليل ص 172
محور التماثل ص 172
الرأس ص 172
الوتر البؤري ص 172
القطع الناقص ص 180
البؤرتان ص 180
المحور الأكبر ص 180
المركز ص 180
المحور الأصغر ص 180
الرأسان ص 180
الرأسان المرافقان ص 180
الاختلاف المركزي ص 180
القطع الزائد ص 188
المحور القاطع ص 188
المحور المرافق ص 188
البؤرتان ص 188
المركز ص 188
الرأسان ص 188
المعادلة الوسيطية ص 207
المتغير الوسيط ص 207
اتجاه المنحنى ص 207
المنحنى الوسيطي ص 207

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ـــــــــــ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس. القطع المخروطي

2) الدائرة هي ـــــــــــ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة. المحل الهندسي

3) يكون ـــــــــــ القطع المكافئ عموديًّا على محور تماثله. دليل

4) يقع الرأسان المرافقان في ـــــــــــ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر. القطع الناقص

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ـــــــــــ يساوي مقدارًا ثابتًا. البؤرتين

6) ـــــــــــ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًّا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$. الاختلاف المركزي

7) ـــــــــــ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا. مركز

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لِـ ـــــــــــ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين. القطع الزائد

9) يمكن كتابة معادلة منحنى باستعمال المتغيرين x, y أو باستعمال معادلات ـــــــــــ تستعمل على وجه العموم المتغير الوسيط t أو الزاوية θ. وسيطية

10) منحنى $f(t) = (\sin t, \cos t)$ هو ـــــــــــ على شكل دائرة مرسومة باتجاه عقارب الساعة. منحنى وسيطي

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1-10، فنبِّههم إلى أنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات لتذكّر هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (71).

الفصل 4 دليل الدراسة و المراجعة

مراجعة الدروس

4-1 القطوع المكافئة (الصفحات 172 - 179)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **11-13)** انظر الهامش.

11) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

12) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

13) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **14-17)** انظر الهامش.

14) $F(1, 1), V(1, 5)$

15) $F(-3, 6), V(7, 6)$

16) $F(-2, -3), V(-2, 1)$

17) $F(3, -4), V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **18-20)** انظر ملحق الإجابات.

18) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

19) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

20) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي.
البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي $4 = 1 - (-3)$.
وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

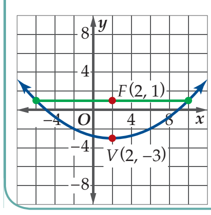
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k.

$4p(y-k) = (x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3) = (x-2)^2$ $p = 4, k = 3, h = 2$

$16(y+3) = (x-2)^2$ بسِّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $16(y+3) = (x-2)^2$. مثِّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



4-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 180 - 187)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **21-25)** انظر الهامش.

21) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

22) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍ مما يأتي:

23) الرأسان $(3, -3)$, $(7, -3)$، والبؤرتان $(4, -3)$, $(6, -3)$

24) البؤرتان $(9, 2)$, $(1, 2)$، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6, 4)$, $(-4, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7)$, $(1, 1)$

26) $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 9$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

26) المركز $(6, -1)$، وطول نصف القطر 3 وحدات. انظر الهامش.

27) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0)$, $(2, 5)$.

28) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-2, -6)$, $(4, -2)$ انظر الهامش.

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4)$, $(-9, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4)$, $(1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a, b .

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{11-(-9)}{2} = 10$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{12-(-4)}{2} = 8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بسِّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

مراجعة الدروس

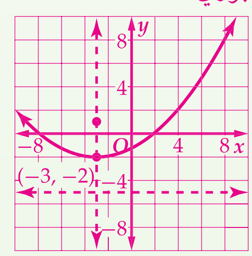
مراجعة إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة المواضيع التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك المواضيع في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

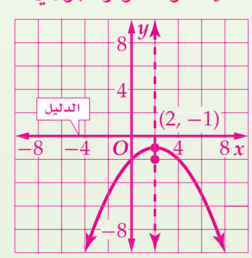
اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 4 ص (65)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

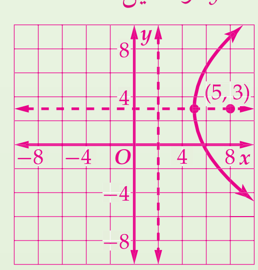
11) منحنى القطع مفتوح إلى أعلى
الرأس: $(-3, -2)$؛
والبؤرة: $(-3, 1)$؛ ومحور التماثل: $x=-3$؛ والدليل: $y=-5$، طول الوتر البؤري 12



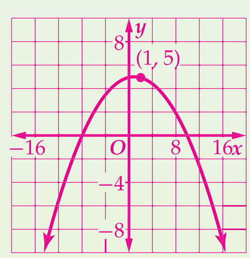
12) منحنى القطع مفتوح إلى أسفل
الرأس: $(2, -1)$؛ والبؤرة: $(2, -2)$؛
ومحور التماثل: $x = 2$؛ والدليل: $y=0$، طول الوتر البؤري 4



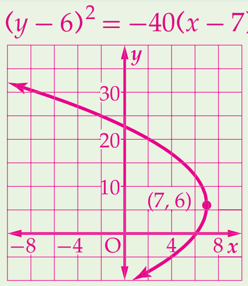
13) الرأس: $(5, 3)$؛ والبؤرة: $(8, 3)$ ؛ ومحور التماثل: $y = 3$؛ والدليل: $x = 2$



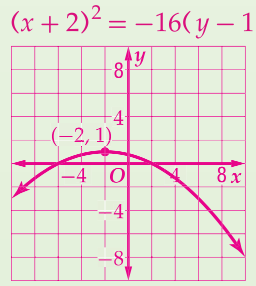
14) $(x-1)^2 = -16(y-5)$



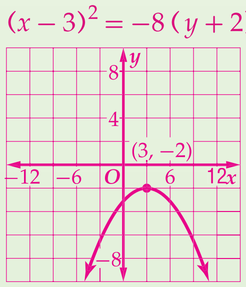
15) $(y-6)^2 = -40(x-7)$



16) $(x+2)^2 = -16(y-1)$



17) $(x-3)^2 = -8(y+2)$



3-4 القطوع الزائدة (الصفحات 188 - 196)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. **(29-32) انظر ملحق الإجابات.**

29) $\frac{(y+3)^2}{30}-\frac{(x-6)^2}{8}=1$

30) $\frac{(x+7)^2}{18}-\frac{(y-6)^2}{36}=1$

31) $\frac{(y-1)^2}{4}-(x+1)^2=1$

32) $x^2-y^2-2x+4y-7=0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: **(46-49) انظر ملحق الإجابات.**

33) الرأسان $(-7,0)$، $(7,0)$، طول المحور المرافق 8.

34) البؤرتان $(0,-5)$، $(0,5)$، والرأسان $(0,-3)$، $(0,3)$.

35) البؤرتان $(1,-5)$، $(1,15)$، وطول المحور القاطع 16.

36) الرأسان $(-2,0)$، $(2,0)$، وخطا التقارب $y=\pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثِّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16}-\frac{(x+1)^2}{4}=1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h=-1, k=-3, a=\sqrt{16}=4,$
$b=\sqrt{4}=2, c=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$

حدِّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: راسي

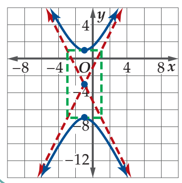
المركز: $(-1,-3)$ (h, k)

الرأسان: $(-1,1), (-1,-7)$ $(h, k\pm a)$

البؤرتان: $(-1,-3+2\sqrt{5})$ $(h, k\pm c)$
$(-1,-3-2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y+3=2(x+1)$ $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
وَ $y+3=-2(x+1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها (الصفحات 198 - 204)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّل كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

37) $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$ **قطع زائد**

38) $4y^2-x-40y+107=0$ **قطع مكافئ**

39) $9x^2+4y^2+162x+8y+732=0$ **قطع ناقص**

استعمل قيمة θ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.

40) $x^2+y^2=4;\ \theta=\frac{\pi}{4}$ **(40-43) انظر ملحق الإجابات.**

41) $x^2-2x+y=5;\ \theta=\frac{\pi}{3}$

42) $x^2-4y^2=4;\ \theta=\frac{\pi}{2}$

43) $9x^2+4y^2=36;\ \theta=90°$

مثال 4

اكتب المعادلة $3x^2+3y^2-12x+30y+39=0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$$3x^2+3y^2-12x+30y+39=0$$

$$3(x^2-4x+\blacksquare)+3(y^2+10y+\blacksquare)=-39+3(\blacksquare)+3(\blacksquare)$$

$$3(x^2-4x+4)+3(y^2+10y+25)=-39+3(4)+3(25)$$

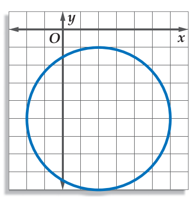
$$3(x-2)^2+3(y+5)^2=48$$

$$(x-2)^2+(y+5)^2=16$$

في هذه المعادلة $A=3, C=3$.
وحيث إن كلًّا من A, C كمية موجبة، $A=C$، فإن المنحنى يمثِّل دائرة

المركز = $(2,-5)$

وطول نصف القطر = 4.

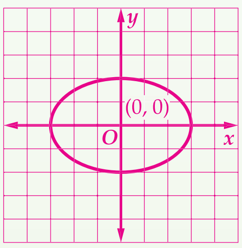


مراجعة حل المسائل

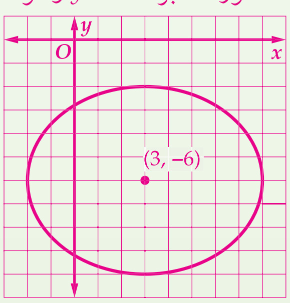
إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة، فذكِّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدِّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

إجابات:

21) الاتجاه: أفقي
المركز $(0,0)$، البؤرتان $(\pm\sqrt{5}, 0)$
الرأسان $(\pm3, 0)$
الرأسان المرافقان $(0, \pm2)$
المحور الأكبر $y=0$ وطوله 6
المحور الأكبر $x=0$ وطوله 4



22) الاتجاه: رأسي
المركز $(3,-6)$، البؤرتان $(3,-3)$، $(3,-9)$
الرأسان $(3,-1)$، $(3,-11)$
الرأسان المرافقان $(-6,7)$، $(-1,-6)$
المحور الأكبر $x=3$ وطوله 10
المحور الأكبر $y=-6$ وطوله 8



23) $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{3}=1$

24) $\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$

25) $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1$

27) $(x-1)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{29}{4}$

28) $(x-1)^2+(y+4)^2=13$

4-5 المعادلات الوسيطية (الصفحات 207 - 213)

مثّل المنحنى المعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كل مما يأتي بيانيًّا. **44-45** انظر الهامش.

44) $x=\sqrt{t},\ y=1-t;\ 0\le t\le 9$

45) $x=t+2,\ y=t^2-4;\ -4\le t\le 4$

اكتب كل معادلتين وسيطين فيما يأتي بالصورة الديكارتية ثم مثّل المنحنى بيانيًّا. **46-49** انظر الهامش.

46) $x=t+5,\ y=2t-6$

47) $x=2t,\ y=t^2-2$

48) $x=t^2+3,\ y=t^2-4$

49) $x=t^2-1,\ y=2t+1$

مثال 5

اكتب المعادلتين الوسيطيتين $x=5\cos t,\ y=9\sin t$ بالصورة الديكارتية، ثم مثّل المنحنى بيانيًّا.

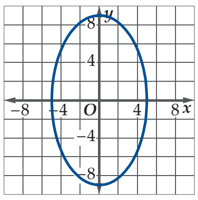
$x=5\cos t \qquad y=9\sin t$

$\cos t=\frac{x}{5} \qquad \sin t=\frac{y}{9}$ الحل بالنسبة لـ $\sin t$ و $\cos t$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{9}\right)^2=1$

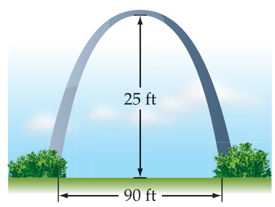
$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{81}=1$



تمثّل المعادلتان الوسيطيتان منحنى قطع ناقص.

تطبيقات ومسائل

50) **أقواس:** يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافئ مقامًا عند بوابة متنزّه. (الدرس 4-1)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

a) إجابة ممكنة: $x^2=-81y+2025$

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ. **4.75 ft أقدام فوق سطح الأرض**

51) **حركة الماء:** أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 4-2)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضاً أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل. $x^2+y^2=900$

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2+y^2=225$. بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكون هذه الدائرة؟ **5 ثوانٍ**

52) **طاقة:** تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 4-3) **a-b انظر ملحق الإجابات**

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

53) **مجمّع شمسي:** صمّم مجموعة من الطلاب مجمعاً شمسيًّا على شكل قطع مكافئ يعمل على تركيز الطاقة الشمسية عند بؤرته، ويمكن تدوير المجمع الشمسي بسهولة بحيث يتم الحصول على أكبر كمية من الطاقة الشمسية، وذلك عند توجيهه نحو أشعة الشمس مباشرة. بعد دوران القطع المكافئ $30°$ باتجاه أشعة الشمس، فإن معادلة القطع المكافئ الذي يمثّل المجمع الشمسي في المستوى $x'y'$ هي $y'=0.25(x')^2$. أوجد معادلة القطع المكافئ في المستوى xy. (الدرس 4-4) **انظر ملحق الإجابات.**

54) **هندسة:** افترض أن: $x_1(t)=4\cos t,\ y_1(t)=4\sin t$ و $x_2(t)=4\cos 2t,\ y_2(t)=4\sin 2t$. (الدرس 4-5) **a-b انظر ملحق الإجابات.**

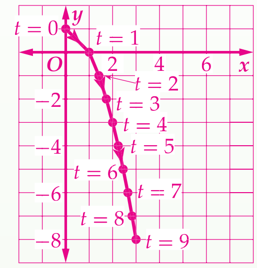
a) قارن بين منحنيي مجموعتي المعادلات x_1, y_1 و x_2, y_2.

b) اكتب معادلتين وسيطيتين للدائرة التي نصف قطرها 6 وحدات، وتحتاج إلى نصف زمن $x_1(t), y_1(t)$ لاكتمال منحناها.

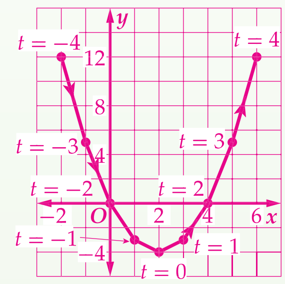
c) اكتب المعادلتين في الفرع b بالصورة الديكارتية. $x^2+y^2=36$

إجابات:

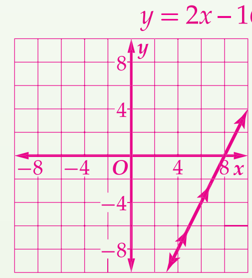
44)



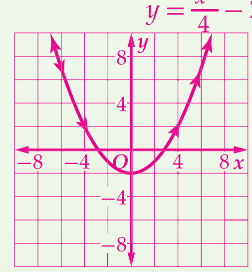
45)



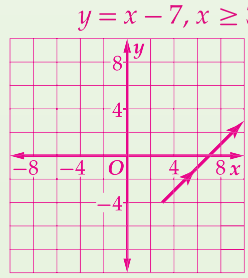
46) $y=2x-16$



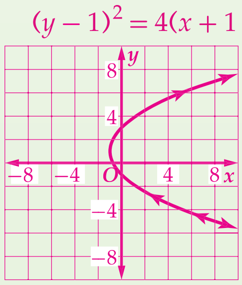
47) $y=\frac{x^2}{4}-2$



48) $y=x-7,\ x\ge 3$



49) $(y-1)^2=4(x+1)$



الفصل 4 اختبار الفصل

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين: **2–1) انظر الهامش**

1) الرأسان $(7, -4)$، $(-3, -4)$، والبؤرتان $(-2, -4)$، $(6, -4)$.

2) البؤرتان $(-2, -9)$، $(-2, 1)$، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرة؟ **C**

A -8 **C** 4

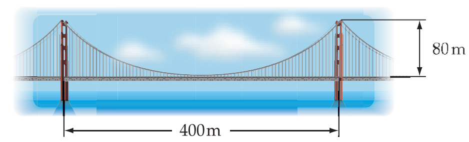
B -4 **D** 8

اكتب كل معادلتين وسيطيتين في السؤالين 4, 5 بالصورة الديكارتية، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا. **5–4) انظر الهامش**

4) $x = t - 5,\ y = 3t - 4$

5) $x = t^2 - 1,\ y = 2t + 1$

6) **جسور:** يمثِّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة.



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5 m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373 m تقريبًا. اكتب معادلة القطع المكافئ. $x^2 = 1492\,(y-5)$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

7) الرأسان $(-3, 0)$، $(3, 0)$، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

8) البؤرتان $(8, 8)$، $(8, 0)$، والرأسان $(8, 6)$، $(8, 2)$. **انظر الهامش.**

اكتب معادلة كل قطع مخروطي في مستوى xy بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية θ:

9) $7(x' - 3) = (y')^2,\ \theta = 60°$ **10–9) انظر الهامش.**

10) $\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{10} = 1,\ \theta = \frac{\pi}{6}$

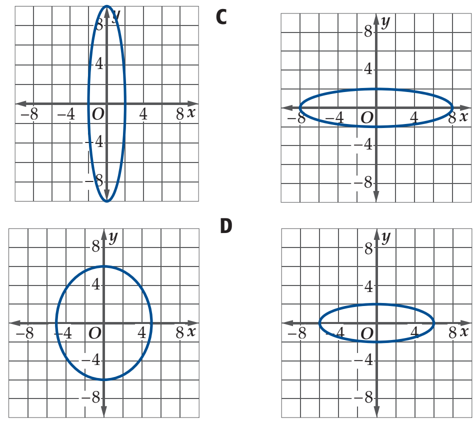
12–11) انظر ملحق الإجابات.

مثِّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 11 و 12:

11) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

12) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

13) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟ **C**



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثِّل منحنييهما بيانيًّا. **17–14) انظر ملحق الإجابات.**

14) $F(2, 8),\ V(2, 10)$

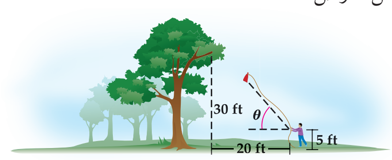
15) $F(2, 5),\ V(-1, 5)$

مثِّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

16) $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

17) $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

18) **تخييم:** يقوم المشاركون في المخيمات الكشفية أحيانًا بإجراءات لحماية الطعام والمؤن من الحيوانات الضالة. وإحدى طرق الحماية هي ربط حقيبة الطعام والمؤن بحبل ثم رميها فوق غصن شجرة عالية وربط الحبل بالشجرة. افترض أن ارتفاع غصن شجرة 30 ft عن الأرض، وأن شخصًا يبعد عن الشجرة 20 ft قد رمى حقيبة من ارتفاع 5 ft عن الأرض.



a) إذا رُميت الحقيبة بسرعة ابتدائية مقدارها 40 ft في الثانية، فصنعت زاوية قياسها 60° مع الأفق، فهل ستستقر فوق الغصن؟ **لا**

b) إذا رُميت الحقيبة بسرعة ابتدائية مقدارها 45 ft في الثانية، وصنعت مع الأفق زاوية قياسها 75°، فهل ستستقر فوق الغصن؟ **نعم**

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل، استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًا للطلاب.

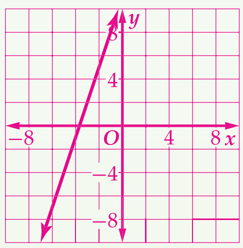
اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (80–72).

إجابات:

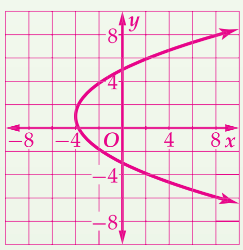
1) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$

2) $\frac{(x+2)^2}{11} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

4) $y = 3x + 11$



5) $(y-1)^2 = 4(x+1)$



8) $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-8)^2}{12} = 1$

9) $3x^2 - 14x - 2\sqrt{3}xy + y^2 - 14\sqrt{3}y + 84 = 0$

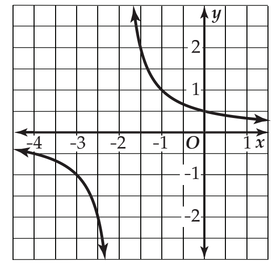
10) $4x^2 + 2\sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

مخطط المعالجة

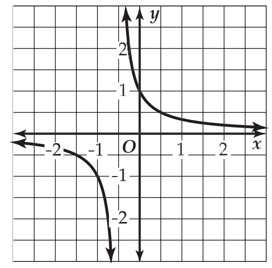
المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 5-4، 4-4، 3-4، 2-4، 1-4		
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (170)	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

التهيئة ، ص (171) :

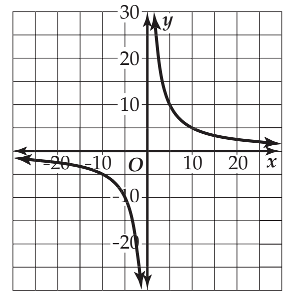
16)



17)



18) $f(x)=\frac{50}{x}$؛



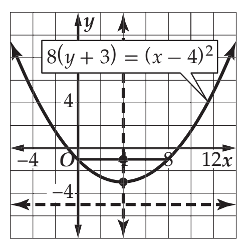
الدرس 4-1 ، ص (174-179) :

1A)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(4, -3)$ ؛ البؤرة: $(4, -1)$ ؛

الدليل: $y = -5$

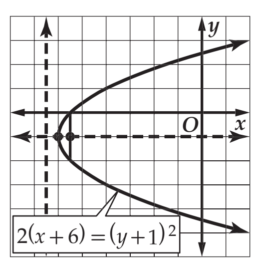


1B)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

الرأس: $(-6, -1)$؛ البؤرة: $(-5.5,$

$-1)$ ؛ الدليل: $x = -6.5$



1)

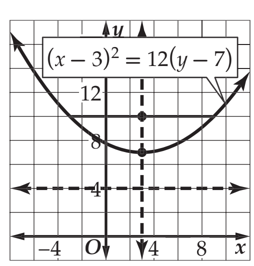
المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(3, 7)$، البؤرة: $(3, 10)$،

الدليل: $y = 4$

ومحور التماثل: $x = 3$

طول الوتر البؤري 12



2)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

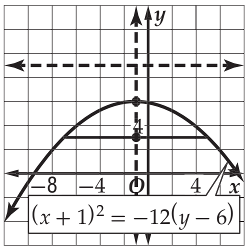
الرأس: $(-1, 6)$، البؤرة:

$(-1, 3)$،

الدليل: $y = 9$،

ومحور التماثل: $x = -1$

طول الوتر البؤري 12



3)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى

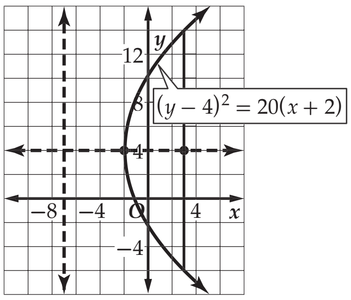
اليمين

الرأس: $(-2, 4)$، البؤرة:

$(3, 4)$، الدليل: $x = -7$

ومحور التماثل: $y = 4$

طول الوتر البؤري 20



4)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى

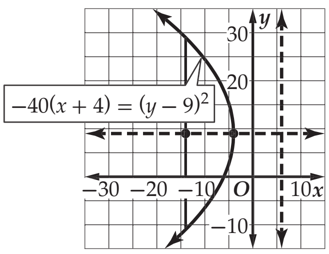
اليسار

الرأس: $(-4, 9)$، البؤرة:

$(-14, 9)$، الدليل: $x = 6$

ومحور التماثل: $y = 9$

طول الوتر البؤري 40



5)

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى

اليمين

الرأس: $(1, -5)$

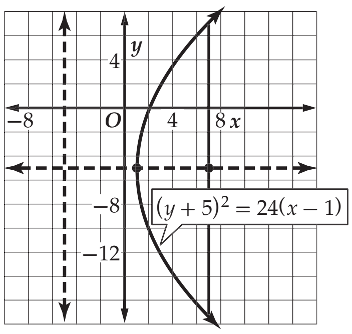
البؤرة: $(7, -5)$

الدليل: $x = -5$

ومحور التماثل:

$y = -5$

طول الوتر البؤري 24



6)

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

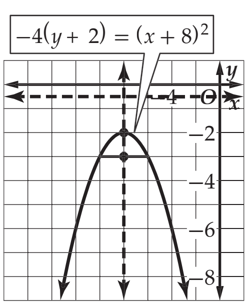
الرأس: $(-8, -2)$

البؤرة: $(-8, -3)$

الدليل: $y = -1$

ومحور التماثل: $x = -8$

طول الوتر البؤري 4



9)

$x^2 = 8(y+7)$ ؛

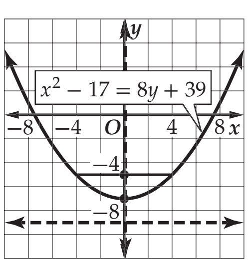
المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

الرأس: $(0, -7)$، البؤرة: $(0, -5)$؛

الدليل: $y = -9$

ومحور التماثل: $x = 0$

طول الوتر البؤري 8



(10

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليسار

$y^2 = -8(x + 7)$

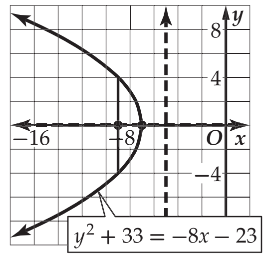
الرأس: $(-7, 0)$

البؤرة: $(-9, 0)$

الدليل: $x = -5$

ومحور التماثل: $y = 0$

طول الوتر البؤري 8



(11

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أسفل

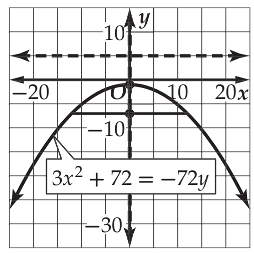
$x^2 = -24(y + 1)$

الرأس: $(0, -1)$ البؤرة: $(0, -7)$؛

الدليل: $y = 5$

ومحور التماثل: $x = 0$

طول الوتر البؤري 24



(12

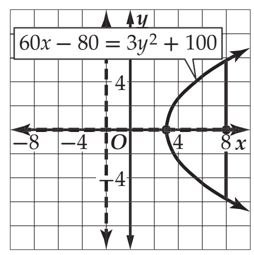
المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

$y^2 = 20(x - 3)$ ، الرأس: $(3, 0)$

البؤرة: $(8, 0)$، الدليل: $x = -2$؛

ومحور التماثل: $y = 0$

طول الوتر البؤري 20



(13

المنحنى مفتوح رأسيًّا إلى أعلى

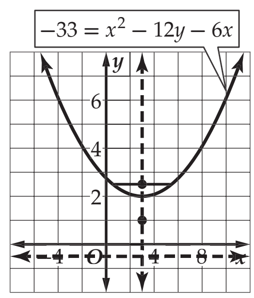
$(x - 3)^2 = 12(y - 2)$

الرأس: $(3, 2)$، البؤرة: $(3, 5)$

الدليل: $y = -1$

ومحور التماثل: $x = 3$

طول الوتر البؤري 12



(14

المنحنى مفتوح أفقيًّا إلى اليمين

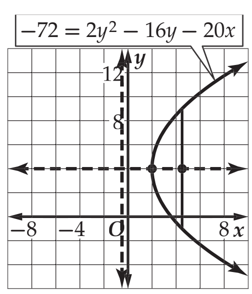
$(y - 4)^2 = 10(x - 2)$

الرأس: $(2, 4)$، البؤرة: $(4.5, 4)$

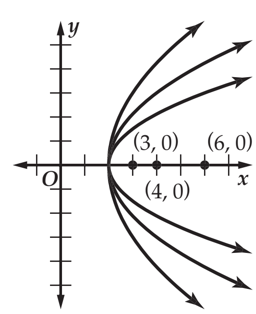
الدليل: $x = -0.5$

ومحور التماثل: $y = 4$

طول الوتر البؤري 10



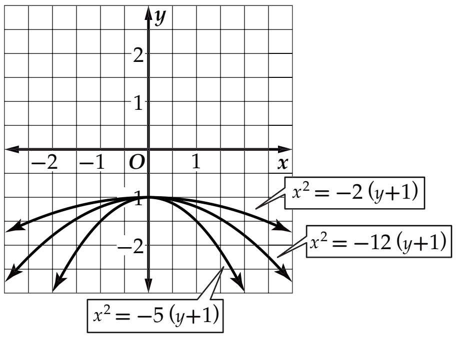
(35b



(35c

عندما تتحرك البؤرة بعيدًا عن الرأس، يزداد توسع منحنى القطع المكافئ رأسيًّا.

35e) إجابة ممكنة: جميع القطوع المكافئة لها الرأس $(0, -1)$، ومنحنياتها مفتوحة إلى الأسفل. منحنى المعادلة $x^2 = -2(y+1)$ هو الأضيق، في حين أن منحنى المعادلة $x^2 = -12\ (y+1)$ هو الأوسع.



36) ميمونة، بما أنّ $p = 1$، فإن منحنى القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.

37) إجابة ممكنة: كل نقطة على منحنى القطع المكافئ بُعدها عن البؤرة يساوي بُعدها عن الدليل. وبما أنّ الرأس يقع مباشرة بين البؤرة والدليل على محور التماثل، فإنها الأقرب إلى البؤرة.

38) الربعان الأول والرابع؛ الرأس $(-2, 5)$ و، $p = -2$ ، وبما أنّ الرأس على يسار محور y ، والمنحنى مفتوح إلى اليسار، فإنه لا توجد نقاط للمنحنى على يمين محور y ، أيْ في الربعين الأول والرابع.

40) إذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي x نفسه، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى أعلى أو إلى أسفل. وإذا كان الإحداثي y للرأس أصغر من الإحداثي y للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى أعلى. أمّا إذا كان أكبر من الإحداثي y للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى أسفل.

وإذا كان للبؤرة والرأس الإحداثي y نفسه، فإنّ اتجاه فتحة القطع تكون إلى اليمين أو إلى اليسار. وإذا كان الإحداثي x للرأس أصغر من الإحداثي x للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى اليمين. أمّا إذا كان الإحداثي x للرأس أكبر من الإحداثي x للبؤرة، فإن اتجاه فتحة القطع تكون إلى اليسار .

الدرس 2-4 ، ص (186, 187) :

(1

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2, 0)$

البؤرتان: $(-2, \mp 2\sqrt{10})$

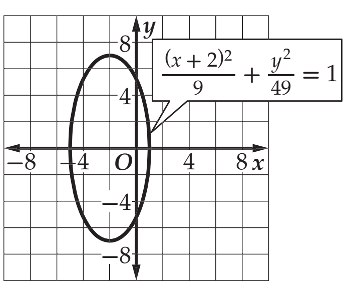
الرأسان: $(-2, \mp 7)$

الرأسان المرافقان:

$(1, 0)$ ،$(-5, 0)$

المحور الأكبر: $x = -2$

المحور الأصغر: $y = 0$



(2

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-4, -3)$

البؤرتان: $(-4 \mp \sqrt{5}, -3)$

الرأسان:

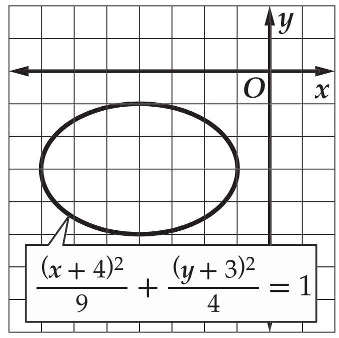
$(-1, -3)$ $(-7, -3)$

الرأسان المرافقان:

$(-4, -5)$ ،$(-4, -1)$

المحور الأكبر: $y = -3$

المحور الأصغر: $x = -4$



(3

الاتجاه: أفقي

المركز: $(7, -2)$

البؤرتان: $(7 \mp 4\sqrt{2}, -2)$

الرأسان:

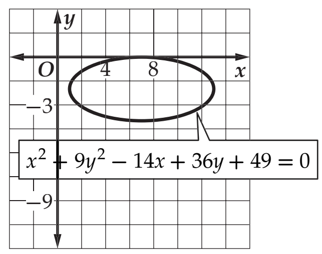
$(13, -2)$ ،$(1, -2)$

الرأسان المرافقان:

$(7, -4)$ ،$(7, 0)$

المحور الأكبر: $y = -2$

المحور الأصغر: $x = 7$



(4

الاتجاه: رأسي

المركز: $(8, 6)$

البؤرتان: $(8, 6 \mp 2\sqrt{3})$

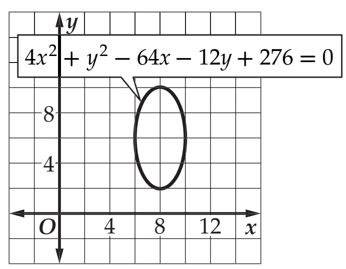
الرأسان: $(8, 10)$ ،$(8, 2)$

الرأسان المرافقان:

$(6, 6)$ ،$(10, 6)$

المحور الأكبر: $x = 8$

المحور الأصغر: $y = 6$



(5 $\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

(6 $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$

(7 $\frac{(x+6)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

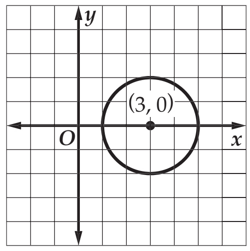
(8 $\frac{(x+6)^2}{64} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$

(9 $\frac{(x+8)^2}{25} + \frac{(y-7)^2}{64} = 1$

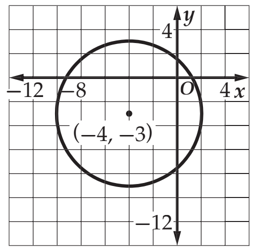
(14a العرض $= 661.44$ ft

(14b $\frac{x^2}{250000} + \frac{y^2}{109375} = 1$

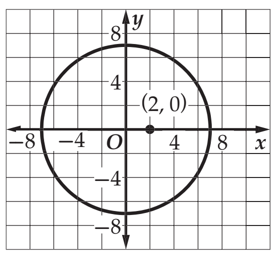
(15 $(x-3)^2 + y^2 = 4$



(16 $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 36$



(17 $x^2 + y^2 = 49$



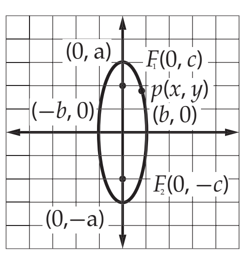
(18 $(x-2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$

(19 $x^2 + (y+10)^2 = 16$

(20 $(x-\frac{3}{2})^2 + (y+8)^2 = \frac{53}{4}$

(21 $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 29$

(22 افترض أن $p(x,y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $c(0, 0)$ ، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضحة في الشكل المجاور باستعمال تعريف القطع الناقص فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن:



$pF_1 + pF_2 = 2a$ تعريف القطع

$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$ صيغة المسافة

$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$ بالطرح

$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 + (y+c)^2} + x^2 + y^2 +$
$2cy + c^2$ بتربيع الطرفين

$4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=4a^2+4cy$ بالقسمة على 4

$a\sqrt{x^2+(y+c)^2}=a^2+cy$ بتربيع الطرفين

$a^2(x^2+y^2+2cy+c^2)=a^4+2a^2cy+c^2y^2$ بالتبسيط

$a^2x^2+a^2y^2+2a^2cy+a^2c^2=a^4+2a^2cy+c^2y^2$
خاصية التوزيع

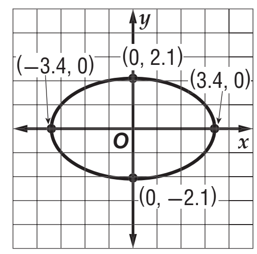
$a^2x^2+a^2y^2+a^2c^2=a^4+c^2y^2$ بالتبسيط

$a^2x^2+a^2y^2-c^2y^2=a^4-a^2c^2$ بطرح $c^2y^2+a^2c^2$
من الطرفين

$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$ $\qquad$ $a^2-c^2=b^2$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ بقسمة الطرفين على a^2b^2

27a) إجابة ممكنة:



27b) $\frac{x^2}{11.56}+\frac{y^2}{4.41}=1$

33) $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

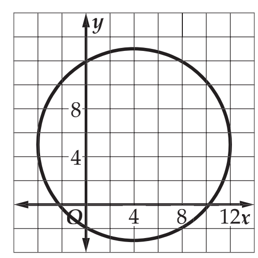
34) $(x-1)^2+(y+7)^2=16$

35) $x^2+(y-6)^2=9$

36) $(x+1)^2+(y-4)^2=64$

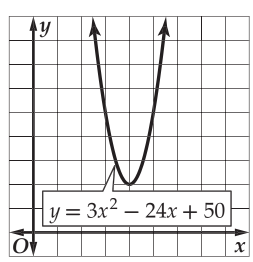
41) المجال $[h-r, h+r]$

إجابة ممكنة: مجال الدائرة $(x-4)^2+(y-5)^2=8^2$ هو
$[4-8, 4+8]$ أو $[-4, 12]$



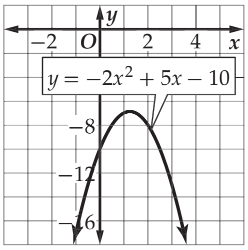
43)

القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى
الرأس: $(4, 2)$
البؤرة: $(4, 2\frac{1}{12})$
الدليل: $y=\frac{23}{12}$
محور التناظر: $x=4$



44)

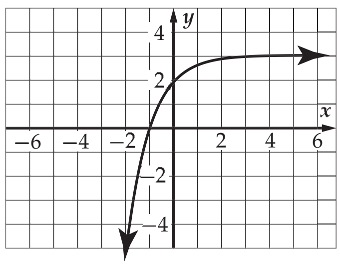
القطع مفتوح إلى أسفل
الرأس: $(\frac{5}{4}, \frac{-55}{8})$
البؤرة: $(\frac{5}{4}, \frac{-56}{8})$
الدليل: $y=\frac{-27}{4}$
محور التناظر: $x=\frac{5}{4}$



45)

القطع مفتوح إلى اليمين
الرأس: $(4, 1)$
البؤرة: $(4.05, 1)$
الدليل: $x=3.95$
محور التناظر: $y=1$

52)

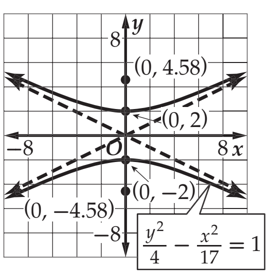


المدى: $(-\infty, 3)$

الدرس 3-4 ، ص (194-198) :

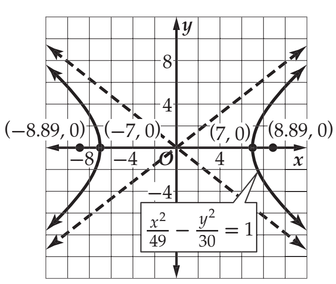
1)

الاتجاه: رأسي
المركز: $(0,0)$
الرأسان: $(0, \mp 2)$
البؤرتان: $(0, \mp\sqrt{21})$
خطا التقارب: $y=\mp 2\frac{\sqrt{17}}{17}x$



2)

الاتجاه: أفقي
المركز: $(0,0)$؛
الرأسان: $(\mp 7, 0)$
البؤرتان: $(\mp\sqrt{79}, 0)$
خطا التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{30}}{7}x$



(3

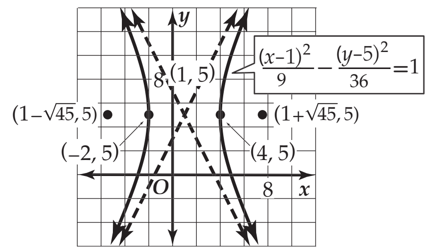
الاتجاه: أفقي

المركز: (1,5)

الرأسان: $(4, 5), (-2, 5)$

البؤرتان: $(1+\sqrt{45}, 5), (1-\sqrt{45}, 5)$

خطا التقارب: $y-5=\mp 2\,(x-1)$



(4

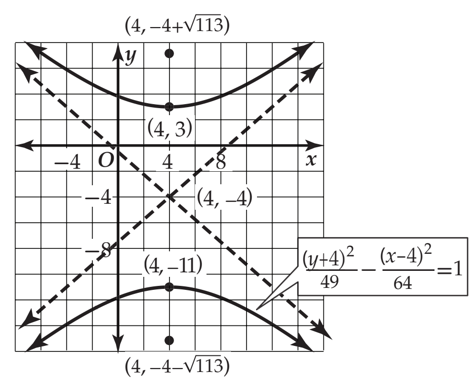
الاتجاه: رأسي

المركز: $(4,-4)$

الرأسان: $(4, 3), (4, -11)$

البؤرتان: $(4, -4+\sqrt{113}), (4, -4-\sqrt{113})$

خطا التقارب: $y+4=\mp\frac{8}{7}(x-4)$



(5

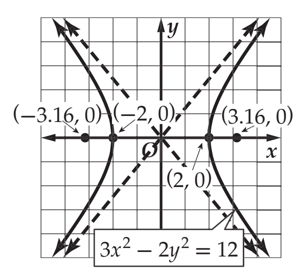
الاتجاه: أفقي

المركز: (0,0)

الرأسان: $(\mp 2, 0)$

البؤرتان: $(\mp\sqrt{10}, 0)$

خطا التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{6}}{2}x$



(6

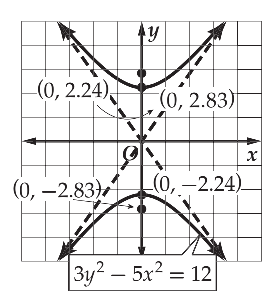
الاتجاه: رأسي

المركز: (0,0)

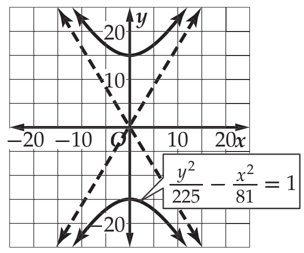
الرأسان: $(0, \mp\sqrt{5})$

البؤرتان: $(0, \mp 2\sqrt{2})$

خطا التقارب: $y=\mp\frac{\sqrt{15}}{3}$



(7



(8 $\frac{(x-3)^2}{32}-\frac{(y+1)^2}{8}=1$

الاتجاه: أفقي

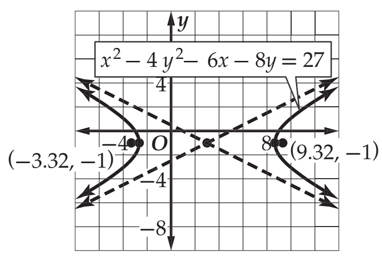
المركز: $(3,-1)$

الرأسان: $(3\mp 4\sqrt{2}, -1)$

البؤرتان: $(3, \mp 2\sqrt{10}, -1)$

خطا التقارب:

$y+1=\mp\frac{1}{2}(x-3)$



(9 $\frac{(y+1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{27}=1$

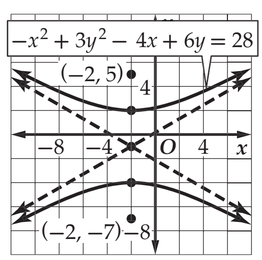
الاتجاه: رأسي

المركز: $(-2,-1)$

الرأسان: $(-2, 2)$, $(-2, -4)$

البؤرتان: $(-2, 5)$, $(-2, -7)$

خطا التقارب: $y+1=\mp\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$



(10 $\frac{(y-2)^2}{25}-\frac{(x+7)^2}{10}=1$

الاتجاه: رأسي

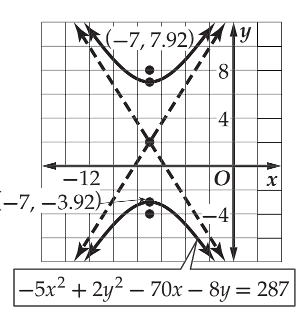
المركز: $(-7, 2)$

الرأسان: $(-7, -3)$, $(-7, 7)$

البؤرتان: $(-7, 2\mp\sqrt{35})$

خطا التقارب:

$y-2=\mp\frac{\sqrt{10}}{2}(x+7)$



13) $\frac{(y-1)^2}{15} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

14) $\frac{(x-1)^2}{36} - \frac{(y-5)^2}{64} = 1$

15) $\frac{(y-6)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{49} = 1$

16) $\frac{(x+4)^2}{144} - \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

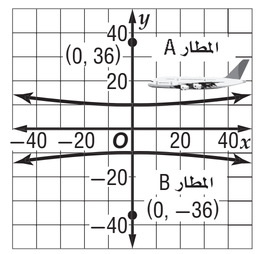
17) $\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{49} = 1$

18) $\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{(x-2)^2}{64} = 1$

19) $\frac{(x-6)^2}{36} - \frac{(y+2)^2}{13} = 1$

27a) $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{1215} = 1$

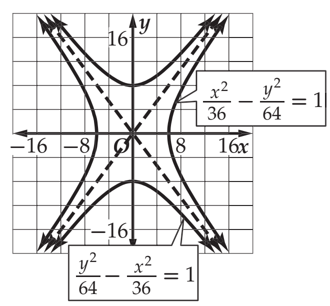
27b)



28a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5760} = 1$

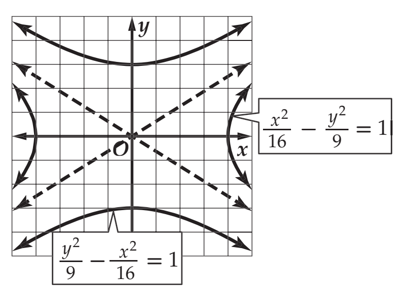
28b) نصف قطر القمة 4.3 م تقريبًا
نصف قطر القاعدة 5.7 م تقريبًا

33a)



33b) البؤرتان للمنحنى الأول هما:
$(-10, 0)$ و $(10, 0)$. والبؤرتان للمنحنى الثاني هما $(0, -10)$ و $(0, 10)$. والرأسان للمنحنى الأول هما: $(-6, 0)$ و $(6, 0)$. والرأسان للمنحنى الثاني هما: $(0, -8)$ و $(0, 8)$. والمنحنيان لهما نفس خطي التقارب.

33d)



35a) قطع مكافئ؛ إذا كان $r\,s = 0$ ، فإنّ $r = 0$ أو $s = 0$. لذا فإمّا أن الحد x^2 يساوي صفرًا ، أو أن الحد y^2 يساوي صفرًا. وبما أنّ المعادلة لها فقط حد مربع وحيد، فإنها ستكون معادلة قطع مكافئ.

35b) قطع ناقص؛ إذا كان $r\,s > 0$ ، فإنّ r و s كلاهما أكبر من صفر أو كلاهما أقل من صفر. وفي كلتا الحالتين فإنّ الحدين المربعين لهما الإشارة نفسها. لذا فستكون معادلة قطع ناقص.

35c) دائرة؛ إذا كان $r = s$ ، فإن معاملي الحدين التربيعيين المضافين متساويان، ويمكن إعادة كتابة المعادلة بحيث يصبح معامل كل منهما هو 1 ، لذا فالمعادلة تمثل دائرة.

35d) قطع زائد؛ إذا كان $r\,s < 0$ ، فإن r و s مختلفان في الإشارة. أي أن الحدين التربيعيين مختلفان في الإشارة، لذا فالمعادلة تمثّل قطعًا زائدًا.

36) أحيانًا، ومثال ذلك عندما تكون إحداثيات الرأسين والبؤرتين معلومة فإنه يمكن كتابة معادلة القطع الزائد. وعندما يكون كل من الرأسين والمحور القاطع معلومًا فقط، فإنه من غير الممكن كتابة معادلة القطع الزائد.

37) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{72} = 1$

38) بما أن القطع الزائد متساوي الساقين فإن $a = b$
وَبما أن $c^2 = a^2 + b^2$.

$$c^2 = a^2 + a^2 \qquad a = b$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$c = a\sqrt{2}$$

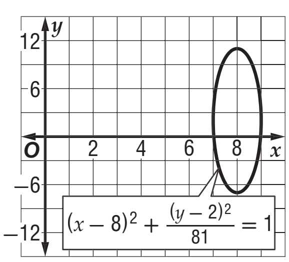
وبما أنّ $e = \frac{c}{a}$، فإنّ

$$e = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

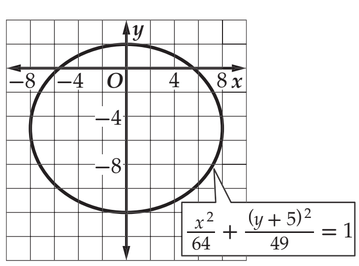
لذا فإن الاختلاف المركزي للقطع الزائد المتساوي الساقين هو $\sqrt{2}$.

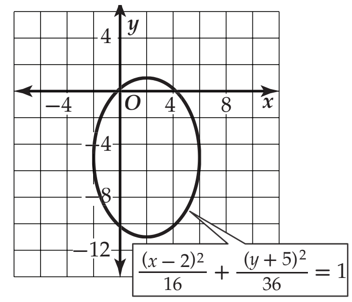
39) إجابة ممكنة: أولًا حدِّد إن كان اتجاه القطع الزائد، رأسيًّا أو أفقيًّا. ثم استعمل البؤرتين لتعيين مركز القطع الزائد وتحديد قيم h ، k. واستعمل طول المحور القاطع لإيجاد a^2 ، ثم أوجد c المسافة بين المركز وإحدى البؤرتين، ثم استعمل المعادلة $b^2 = c^2 - a^2$ لتجد b^2. وأخيرًا استعمل الصيغة القياسية لكتابة المعادلة بالاعتماد على المحور القاطع إن كان موازيًا للمحور x أو للمحور y .

40)

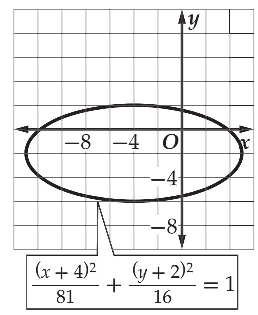


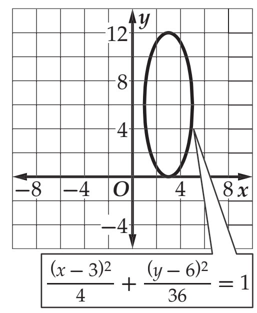
41)

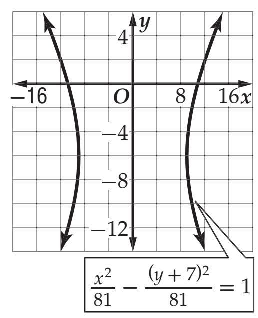


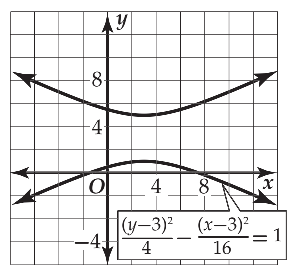
42) 

اختبار منتصف الفصل، ص (197) :

5) 

6) 

13) 

14) 

15) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

16) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{60} = 1$

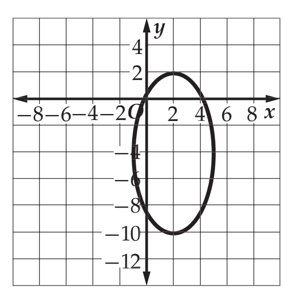
17) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{75} = 1$

18) $\frac{(y+1)^2}{25} - \frac{(x-5)^2}{39} = 1$

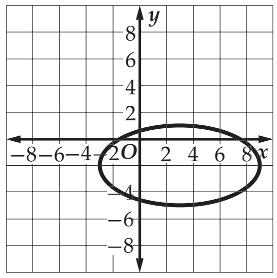
الدرس 4-4، ص (198-204) :

1) تحقق من فهمك

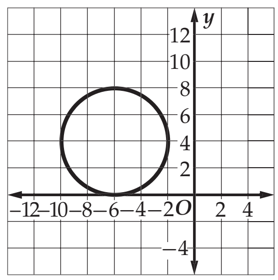
$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$ قطع ناقص



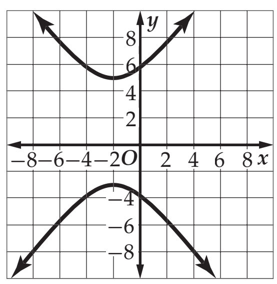
1) $\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ قطع ناقص



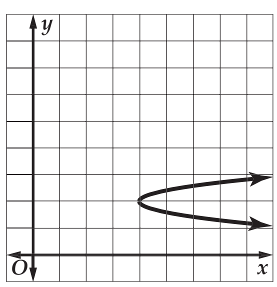
2) $(x+6)^2 + (y-4)^2 = 16$ دائرة



3) $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{9} = 1$ قطع زائد



4) $x = 6(y-2)^2 + 4$ ، قطع مكافئ



13) $-(x')^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + (y')^2 - 18 = 0$ ، قطع زائد

14) $(x')^2 - (y')^2 + 16 = 0$ ، قطع زائد

15) $(y')^2 - 8x' = 0$ ، قطع مكافئ

16) $(x')^2 + (y')^2 - 4 = 0$ ، دائرة

17) $(x')^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3(y')^2 + 16\sqrt{3}x' - 16y' = 0$ ، قطع مكافئ

18) $21(x')^2 + 10\sqrt{3}x'y' + 31(y')^2 - 144 = 0$ ، قطع ناقص

36) افترض أن ، $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$
، $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$
فإن $r^2 = x^2 + y^2$

$$= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$$
$$= (x')^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + (y')^2\sin^2\theta + (x')^2\sin^2\theta + 2x'y'\cos\theta\sin\theta + (y')^2\cos^2\theta$$
$$= [(x')^2 + (y')^2]\cos^2\theta + [(x')^2 + (y')^2]\sin^2\theta$$
$$= [(x')^2 + (y')^2](\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= [(x')^2 + (y')^2](1)$$
$$= (x')^2 + (y')^2$$

37) صحيحة دائمًا؛ إجابة ممكنة: إذا كان القطع رأسيًا، فإن $B = 0$، وبذلك تصبح المعادلة معادلة دائرة؛ لأن $A = C$.

39) هندسيًا: القطع الناقص عبارة عن دائرة مضغوطة طوليًا أو عرضيًا، وكلاهما منحنيان مغلقان بعكس القطعين المكافئ والزائد، فهما منحنيان مفتوحان وممتدان، لكن الفرق بينهما أن القطع المكافئ يتكون من فرع واحد، بينما القطع الزائد يتكون من فرعين كل منهما تماثل للآخر.

أما جبريًا:

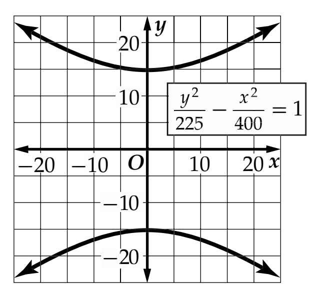
فإذا كتبت المعادلة في الصورة القياسية بشرط $B = 0$ ،
فمعادلة القطع المكافئ تحوي حدًّا تربيعيًا واحدًا (إما Ax^2 أو Cy^2)،
أما معادلة الدائرة فتتصف بأن $A = C$
أما بالنسبة للقطع الناقص، فإن لكلٍّ من C و A الإشارة نفسها

$(A \neq 0, C \neq 0)$

أما في حالة القطع الزائد، فإن إشارتي C و A متعاكستان

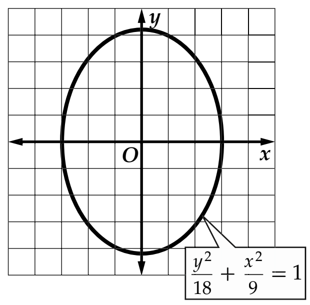
و $(A \neq 0, C \neq 0)$.

40) $(0, \pm 15); (0, \pm 25); y = \pm\frac{3}{4}x$



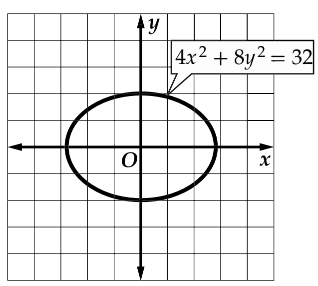
41)

الاتجاه: رأسي
المركز: $(0, 0)$
الرأسان: $(0, \mp 3\sqrt{2})$
البؤرتان: $(0, \mp 3)$
الرأسان المرافقان: $(\mp 3, 0)$
طول المحور الأكبر $6\sqrt{2}$
طول المحور الأصغر 6



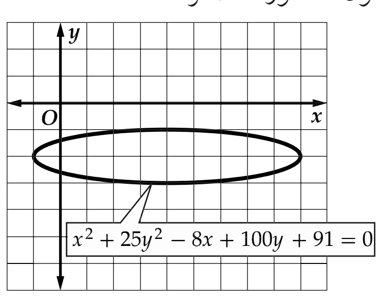
42)

الاتجاه: أفقي
المركز: $(0, 0)$
الرأسان: $(\mp 2\sqrt{2}, 0)$
البؤرتان: $(\mp 2, 0)$
الرأسان المرافقان: $(0 , \mp 2)$
طول المحور الأكبر $4\sqrt{2}$
طول المحور الأصغر 4



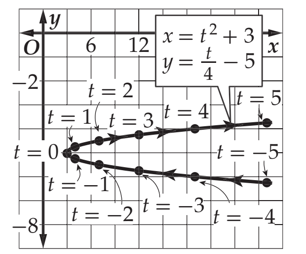
43)

الاتجاه: أفقي
المركز: $(4, -2)$
الرأسان: $(-1, -2)$، $(9, -2)$
البؤرتان: $(4 \mp 2\sqrt{6}, -2)$
الرأسان المرافقان: $(4, -1)$،$(4, -3)$
طول المحور الأكبر 10
طول المحور الأصغر 2

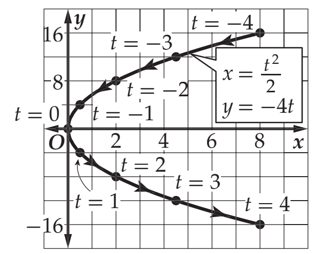


الدرس 5-4، ص (212, 213) :

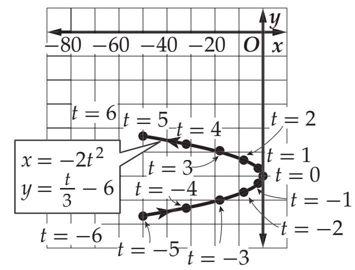
1)



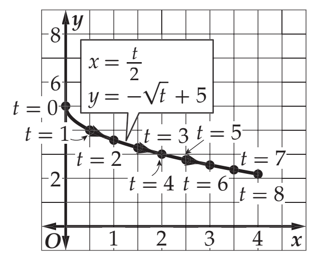
2)



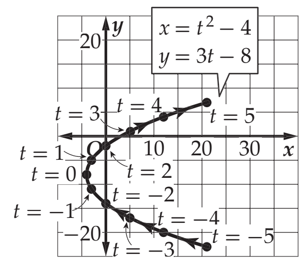
3)



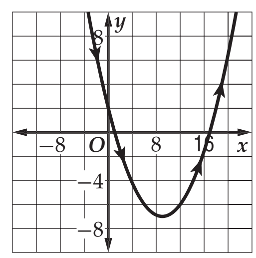
4)



5)

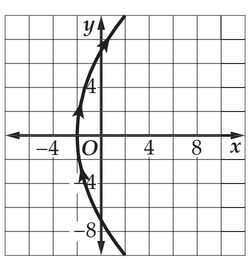


6)



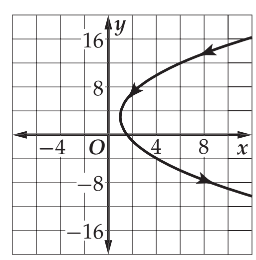
$D = \{x \mid x \in R\}$

7)



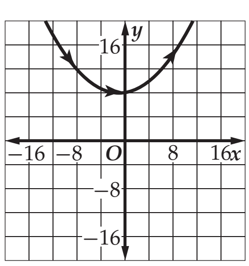
$D = \{x \mid x \geq -2, x \in R\}$

8)



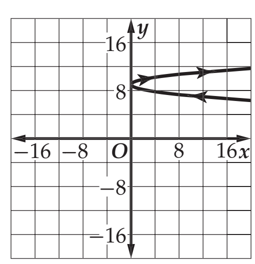
$D = \{x \mid x \geq 1, x \in R\}$

9)



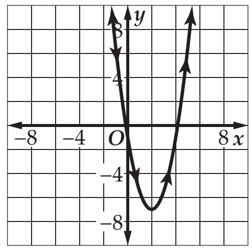
$D = \{x \mid x \in R\}$

10)



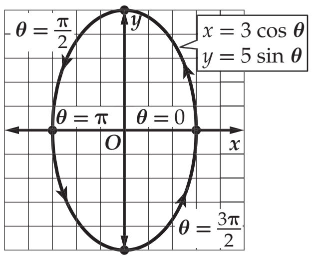
$D = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$

11)

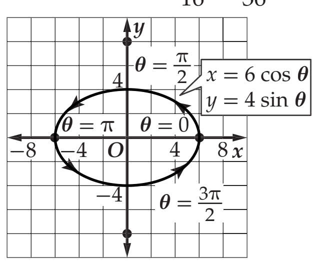


$D = \{x \mid x \in R\}$

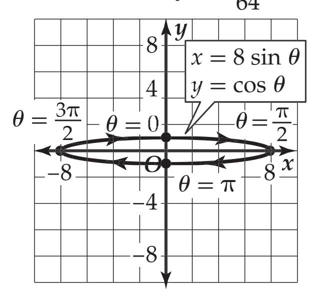
13) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$



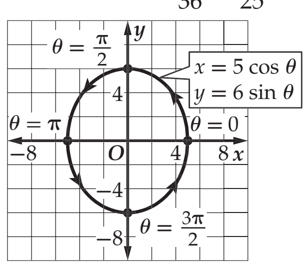
14) $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{36} = 1$



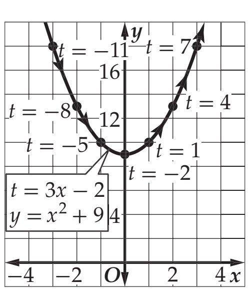
15) $y^2 + \frac{x^2}{64} = 1$



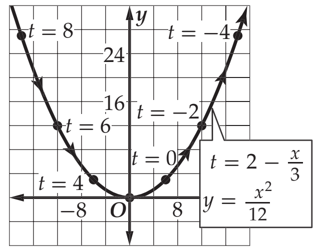
16) $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{25} = 1$



17) $x = \frac{t+2}{3}$, $y = \frac{t^2}{9} + \frac{4t}{9} + \frac{85}{9}$

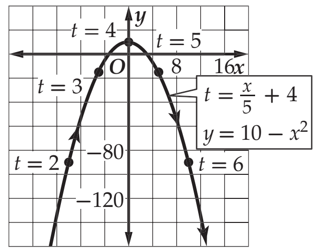


(18



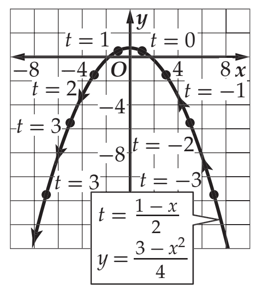
$x = 6 - 3t\,,$
$y = \frac{3}{4}t^2 - 3t + 3$

(19



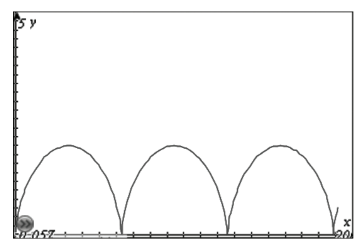
$x = 5t - 20\,,$
$y = -25t^2 + 200t - 390$

(20



$x = 1 - 2t\,,$
$y = -t^2 + t + \frac{1}{2}$

(29a



(29b 2π; إجابة ممكنة: تمثّل مقاطع x الحالات التي تمس فيها نقطة على الدائرة المحور x عند تدحرجها. وبما أنّ جميع نقاط محيط الدائرة تمسّ المحور x عند تدحرجها، فإن المسافات بين مقاطع x تساوي محيط الدائرة 2π.

(29c إجابة ممكنة: تمثّل هذه القيمة أعلى ارتفاع تصله النقطة عند تدحرج الدائرة على المحور x، والذي يساوي قطر الدائرة. أكبر قيمة لِـ y تساوي $2r$ لدائرة نصف قطرها r.

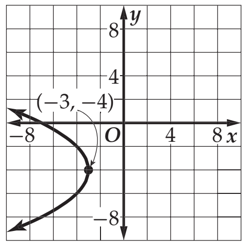
(31 إجابة ممكنة: تكتب المعادلات الوسيطية باستعمال نقطة على المستقيم ومتجه موازٍ له. ويمكن كتابة عدد لا نهائي من المعادلات باستعمال عدد لا نهائي من النقاط على المستقيم.

(32 إجابة ممكنة: يكون التعبير عن المسافة الأفقية بدالة جيب التمام cosine، وقيمتها صفر عند $90°$. وهذا يعني أن المقذوفات ليس لها حركة أفقية. وتكون المعادلة الوسيطية المناظرة $x = 0$.

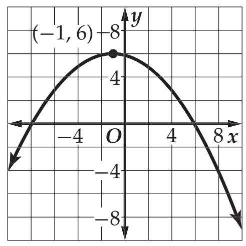
(33 إجابة ممكنة: توضح المعادلات الوسيطية موقع الجسم الرأسي والأفقي بالنسبة إلى الزمن، في حين توضح المعادلات بالصيغة الديكارتية أحد الموقعين الرأسي أو الأفقي فقط للجسم.

دليل الدراسة والمراجعة، ص (218 ,217):

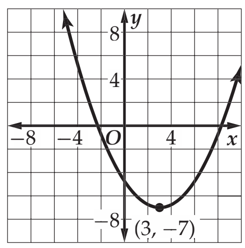
(18 $(y+4)^2 = -4(x+3)$



(19 $(x+1)^2 = -8(y-6)$



(20 $(x-3)^2 = 4(y+7)$



(29

الاتجاه: رأسي

المركز: $(6,-3)$

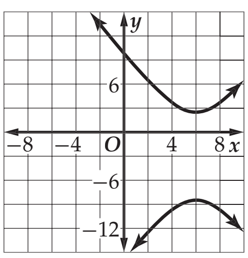
الرأس: $(6, -3 \mp \sqrt{30})$

البؤرتان: $(6, -3 \mp \sqrt{38})$

محور التماثل: $x = 6$

خطا التقارب:

$y + 3 = \mp \frac{2\sqrt{15}}{15}(x - 6)$



(30

الاتجاه: أفقي

المركز: $(-7,6)$

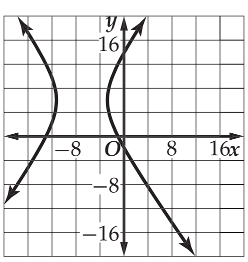
الرأس: $(-7 \mp 3\sqrt{2}, 6)$

البؤرتان: $(-7 \mp 3\sqrt{6}, 6)$

محور التماثل: $y = 6$

خطا التقارب:

$y - 6 = \mp\sqrt{2}\,(x + 7)$



(31

الاتجاه: رأسي

المركز: $(-1,1)$

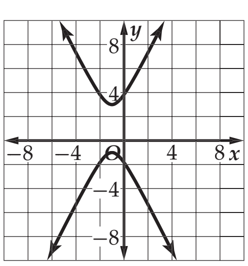
الرأسان: $(-1,3)$، $(-1,-1)$

البؤرتان: $(-1, 1 \mp \sqrt{5})$

محور التماثل: $x = -1$

خطا التقارب:

$(y-1) = \mp 2(x+1)$



32) $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

الاتجاه: أفقي

المركز: $(1, 2)$

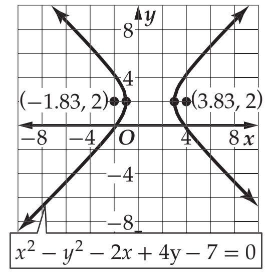
الرأسان: $(3, 2)$، $(-1, 2)$

البؤرتان: $(1 \mp 2\sqrt{2}, 2)$

محور التماثل: $y = 2$

خطا التقارب:

$(y-2) = \mp(x-1)$



33) $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

34) $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

35) $\dfrac{(y-5)^2}{64} - \dfrac{(x-1)^2}{36} = 1$

36) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

40) $(x')^2 + (y')^2 = 4$؛ دائرة

41) $(x')^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + (3y')^2 + (2\sqrt{3} - 4)x' + (4\sqrt{3} + 2)y' = 20$

42) $(y')^2 - 4(x')^2 = 4$ ؛ قطع زائد

43) $9(y')^2 + 4(x')^2 = 36$ ؛ قطع ناقص

52a) $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{625} = 1$

52b) إجابة ممكنة: ستزداد نسبة المقام المرتبط بِـ y إلى المقام المرتبط بِـ x.

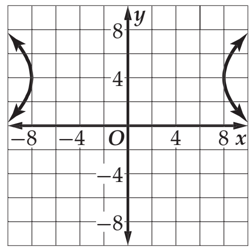
53) $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y = 0$

54a) إجابة ممكنة: كلاهما منحنى دائرة نصف قطرها 4 وحدات، وسرعة الجسم على المعادلة $x_2(t)$ و $y_2(t)$ مِثْلا سرعته على المعادلة $x_1(t)$ ، $y_1(t)$.

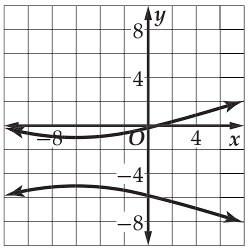
54b) $x(t) = 6\cos\left(\frac{1}{2}t\right), y(t) = 6\sin\left(\frac{1}{2}t\right)$

اختبار الفصل، ص (219) :

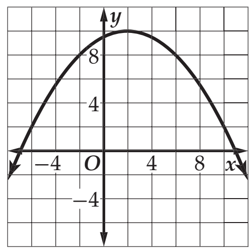
11)



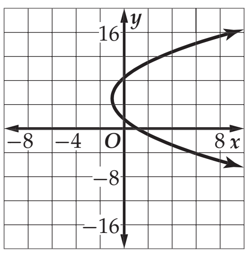
12)



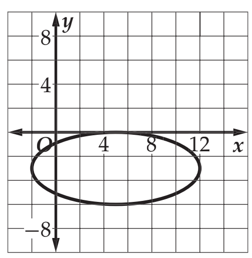
14) $(x-2)^2 = -8(y-10)$



15) $(y-5)^2 = 12(x+1)$



16)



17)