سلسلة
التجمع التعليمي

التجمع التعليمي

القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: @BAK1117_bot

KHATIB Institute
الخطيب للغات والتعليم

الدورة المكثفة

الثالث الثانوي العلمي

الأشعة + الجبر

2023

الأستاذ : وائل بدر

011 638 5555
095 666 2022
0932 465 404
khatibinstitute.com
دمشق / تضامن
شارع نسرين / مكتبة الخطيب

KHATIB Institute
الخطيب للغات والتعليم

الدورة المكثفة

الأشعة

1] مركبات شعاع

$\vec{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A)$

2] المسافة بين نقطتين (طويلة شعاع):

$\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

3] إيجاد طويلة شعاع علمت مركباته

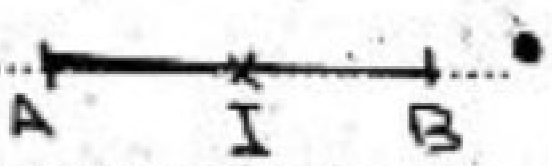
$\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ أو $\vec{u} = x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

4] إيجاد منتصف قطعة مستقيمة:

$I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

A نظيرة B بالنسبة إلى I



$\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

5] مركز ثقل المثلث (ABC)

$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

أي $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

6] الارتباط الخطي لشعاعين:

نقول عن الشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد ثابت $k \neq 0$

$\vec{u} = k\vec{v}$

أو نقول عن الشعاعين $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$ أنهما مرتبطين خطياً إذا كانت المركبات متناسبة

$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$

الفائدة من الارتباط الخطي لشعاعين:

1) إثبات توازي مستقيمين

2) إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.

3) إذا كان $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستوي

7] الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

نقول إن الأشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ مرتبطة خطياً إذا تحقق:

1) الشعاعان $\vec{u}$, $\vec{v}$ ليسا مرتبطان خطياً

2) تحققت العلاقة:

$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

الفائدة من الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

1) إثبات أن أربع نقاط D, C, B, A تقع في مستوٍ واحد

نثبت أن الأشعة $\vec{AD}$, $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ في مستوٍ واحد

$\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ حيث $\vec{AB}, \vec{AC}$ ليست مرتبطة خطياً (تشكل مستوي)

(2) إثبات أن مستقيم يوازي مستوي

$\vec{FQ} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

حيث $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ليست مرتبطة خطياً

(تشكل مستوي)

نقول إن المستقيم (FQ) يوازي المستوي (ABC)

(3) إثبات ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً (تذكرة)

$\vec{FQ} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{CD}$

حيث $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ ليست مرتبطة خطياً

$\Leftarrow$ الأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{CD}$ ، $\vec{FQ}$ مرتبطة خطياً.

ملاحظة (1) أي شعاعين مرتبطين خطياً هي مرتبطة خطياً مع أي شعاع ثالث مضروب بالشعاع الصفري

(2) كيف نبرهن أن النقاط A, B, C, D تشكل رؤوس رباعي وجوه:

• نبرهن أن الأشعة $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ ، $\vec{AD}$ ليست مرتبطة خطياً

$\vec{AD} \neq \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

• نوجد معادلة المستوي (ABC)

ونبرهن أن D لا تنتمي المستوي

[8] إثبات متوازي أضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} = \vec{DC}$

مسألة 1: مكعب فيه $ABCDEFGH$

$A(3,0,0)$ $B(3,2,0)$ $C(0,2,0)$

$D(1,0,0)$ $E(3,0,2)$ $F(3,2,2)$

(1) أوجد إحداثيات باقي رؤوسه

(2) هل الأشعة $\vec{AE}$ ، $\vec{AG}$ ، $\vec{AB}$ مرتبطة خطياً

(3) هل النقاط A, B, K على استقامة واحدة؟

حيث $K(4,5,6)$

(4) عين إحداثيات L ليكون

$\vec{AL} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$

(5) لتكن M نقطة تحقق $\vec{EM} = \frac{1}{3}\vec{EH}$

و N نقطة تحقق $\vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ أثبت أن

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$ واستنتج أن

$\vec{EA}$ ، $\vec{MN}$ ، $\vec{HB}$ مرتبطة خطياً

(6) أوجد إحداثيات R نظيرة A بالنسبة إلى B

(7) عين a, b ليكون $\vec{TF}$ ، $\vec{AB}$ مرتبطان خطياً

حيث $T(a,b,2)$

(8) عين نقطة من محور التراتيب بحيث تنتمي إلى المستوي المحوري لـ $[AB]$.

علاقات شعاعية

مسألة: $ABCDEFGH$ مكعب فيه

I منتصف $[EF]$ ، J منتصف $[FG]$

N منتصف EG

(1) بيّن إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية تنطبق أولا تنطبق على أحد رؤوس المكعب

(1) $\vec{AM} = \vec{DC} + \vec{BF} + \vec{EH}$

(2) $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}\vec{DA} + \vec{AE}$

(3) $\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{BF}$

(4) $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$

(2) حدد موقع النقطة Q المحققة للمساواة الشعاعية المعروضة

$\vec{AQ} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} + \vec{GH} + \vec{EI}$

(3) عبّر عن المجموع الشعاعي التالي بشعاع واحد

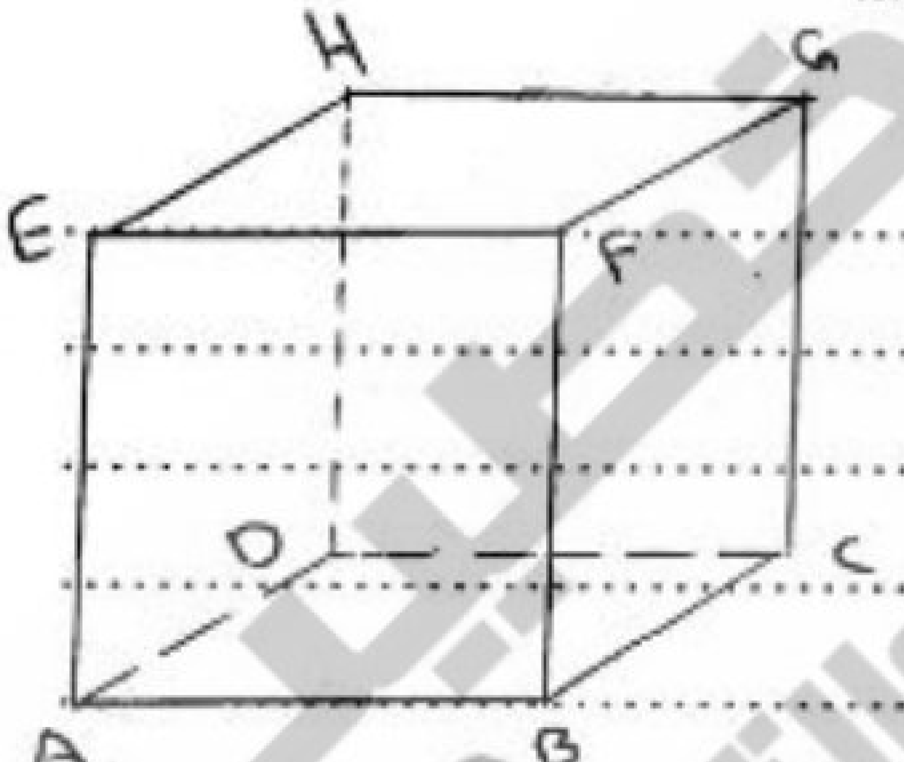
$\vec{AJ} + \vec{BA}$

(4) أثبت صحة المساواة الشعاعية

$\vec{ED} + \vec{CF} = \vec{0}$

المادة.........

حل المسألة 1:



لنوجد إحداثيات $G(x,y,z)$

$\vec{BF} = \vec{CG} \Rightarrow (0,0,2) = (x, y-2, z)$

$\Rightarrow x=0 , y-2=0 \Rightarrow y=2 , z=2$

$\Rightarrow G(0,0,2)$

لنوجد $H(x,y,z)$

$\vec{AE} = \vec{DH} \Rightarrow (0,0,2) = (x-1, y, z)$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 , y=0 , z=2$

$H(1,0,2)$

② غير مرتبطين خطياً ؟

$\vec{AB}(0,2,0)$

$\vec{AG}(-3,0,2)$

$\vec{AE}(0,0,2)$

يكفي إيجاد α , β بحيث

$\vec{AE} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AG}$

$(0,0,2) = (\alpha, 2\alpha, 0) + (-3\beta, 0, 2\beta)$

$\Rightarrow \alpha - 3\beta = 0$ ①

$2\alpha = 0$ ②

$2\beta = 2$ ③

من ③ $\boxed{\beta=1}$ ، من ② $\boxed{\alpha=0}$

نتحقق في ① : $0-3(1) \neq 0$ غير محققة

⇐ الأشعة غير مرتبطة خطياً

③ المركبات غير $\vec{AB}(0,2,0)$ $\vec{AK}(1,5,6)$ متناسبة والأشعة غير مرتبطة خطياً والقاطع ليست على استقامة واحدة

④ لنفرض $L(x,y,z)$

$\vec{AL} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC}$

$(x-3, y, z) = 2(0,2,0) + 3(-3,2,0)$

$(x-3, y, z) = (0,4,0) + (-9,6,0)$

$x-3=-9 \Rightarrow x=-6$

$y = 4+6 = 10$

$z = 0$

$\Rightarrow L(-6,10,0)$

⑤

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$

$L_1 : \vec{ME} + \vec{EA} + \vec{AN} =$ من الفرض

$= \frac{1}{3}\vec{HE} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

$= \frac{1}{3}\vec{DA} + \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{EA} + \frac{1}{3}(\vec{DA} + \vec{AB})$

$= \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB} = L_2$

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DB}$ صحة العلاقة

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{DH} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$\vec{MN} = \vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{EA} + \frac{1}{3}\vec{HB}$

ولدينا $\vec{HB} , \vec{EA}$ غير مرتبطين خطياً

⇐ $\vec{HB} , \vec{MN} , \vec{EA}$ مرتبطة خطياً

⑥

$\vec{AB} = \vec{BR}$ A — B — R

$(0,2,0) = (x-3, y-2, z)$ $R(x,y,z)$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

$y-2=2 \Rightarrow y=4$

$z=0$

$\Rightarrow R(3,4,0)$

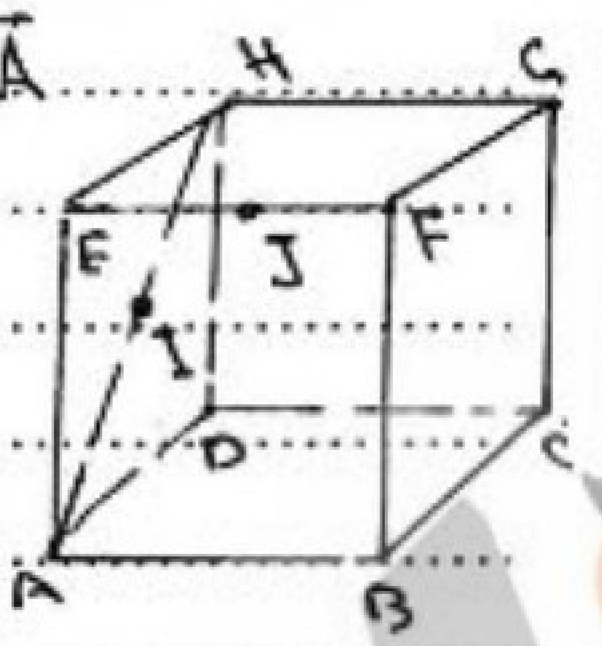
⑦ $\vec{AB}(0,2,0)$ $\vec{TF}(3-a, 2-b, 0)$

$\vec{TF} = k\vec{AB} \Rightarrow (3-a, 2-b, 0) = (0, 2k, 0)$

$3-a=0 \Rightarrow a=3 , 2-b=2k \Rightarrow b=2-2k$

مسألة 3: ABCDEFGH مكعب
علماً I منتصف [AH]، J منتصف [EF]
① عيّن P التي تحقق:
$2\vec{PA} = \vec{HA} + \vec{BC} - \vec{AC}$
② عبّر عن الشعاع $\vec{IJ}$ بطريقتين
ⓐ الأولى بدلالة الأشعة $\vec{IA}, \vec{AF}, \vec{FJ}$
ⓑ الثانية بدلالة الأشعة $\vec{IH}, \vec{EJ}, \vec{HE}$
③ استنتج أن الأشعة تقع في مستوٍ واحد

الحل:
① $2\vec{PA} = \vec{HA} + \vec{BC} - \vec{AC}$
$= \vec{HA} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{HA} + \vec{BA}$
$= \vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$
$\Rightarrow \vec{PA} = \frac{1}{2}\vec{CA}$



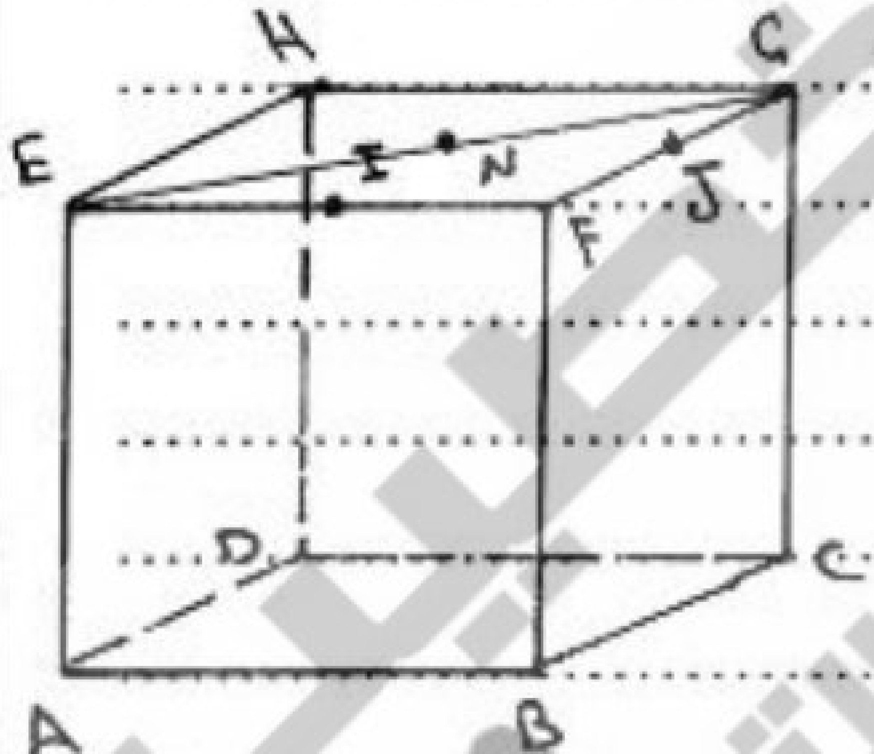
② $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AF} + \vec{FJ}$
$\vec{IJ} = \vec{IH} + \vec{HE} + \vec{EJ}$
بالجمع
$2\vec{IJ} = \vec{AF} + \vec{HE}$
$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{HE} \Rightarrow$ الأشعة مرتبطة خطياً

مسألة 4: ABCDEFGH مكعب
I, J منتصفا [EF] [BC]
① اثبت أن $2(\vec{CJ} + \vec{IE}) = \vec{CE} - \vec{CG}$
② أثبت أن الأشعة $\vec{IJ}, \vec{CG}, \vec{CE}$ مرتبطة خطياً

الحل:
$l_1: 2\vec{CJ} + 2\vec{IE} = \vec{CB} + \vec{FE}$
$= \vec{GF} + \vec{FE} = \vec{GE}$
$l_2: \vec{CE} + \vec{GC} = \vec{GE} \Rightarrow l_1 = l_2$
②
$\vec{IJ} = \vec{IE} + \vec{EC} + \vec{CJ} = (\vec{CJ} + \vec{IE}) - \vec{CE}$
من الفرض
$= \frac{1}{2}(\vec{CE} - \vec{CG}) - \vec{CE}$
$= \frac{1}{2}\vec{CE} - \frac{1}{2}\vec{CG} - \vec{CE} = -\frac{1}{2}\vec{CE} - \frac{1}{2}\vec{CG}$
$\Rightarrow \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{CE} - \frac{1}{2}\vec{CG}$ والأشعة مرتبطة خطياً

P(0, y, 0) ⑧
$PA = PB$
$\sqrt{9+y^2+0} = \sqrt{9+(y-2)^2+0}$
نربع: $9+y^2 = 9+y^2-4y+4$
$-4y+4 = 0 \Rightarrow y = 1$
$\Rightarrow P(0,1,0)$

حل مسألة 2:



① ① $\vec{AM} = \vec{DC} + \vec{BF} + \vec{EH}$
$= \vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FG} = \vec{AG} \Rightarrow$ M تنطبق على G
② $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{2}\vec{DA} + \vec{AE}$
$= \frac{1}{2}\vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AE}$
$= \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AN} \Rightarrow N = M$
③ $\vec{AM} = \vec{AG} + \vec{BF}$
$= \vec{AG} + \vec{CG} = \vec{AG} + \vec{GG'}$
$= \vec{AG'}$ G' خارج المكعب
④ $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$
$= \vec{AF} + \vec{AD} = \vec{AG} \Rightarrow G = M$

② $\vec{AQ} = \vec{AF} + \vec{GH} + \vec{EI}$
$= \vec{AF} + \vec{FE} + \vec{EI} = \vec{AI} \Rightarrow I = Q$

③ $\vec{AJ} + \vec{BA} = \vec{BJ}$

④ $\vec{ED} + \vec{CF} = \vec{ED} + \vec{DE} = \vec{0}$

المادة.........

المعلم في الفراغ

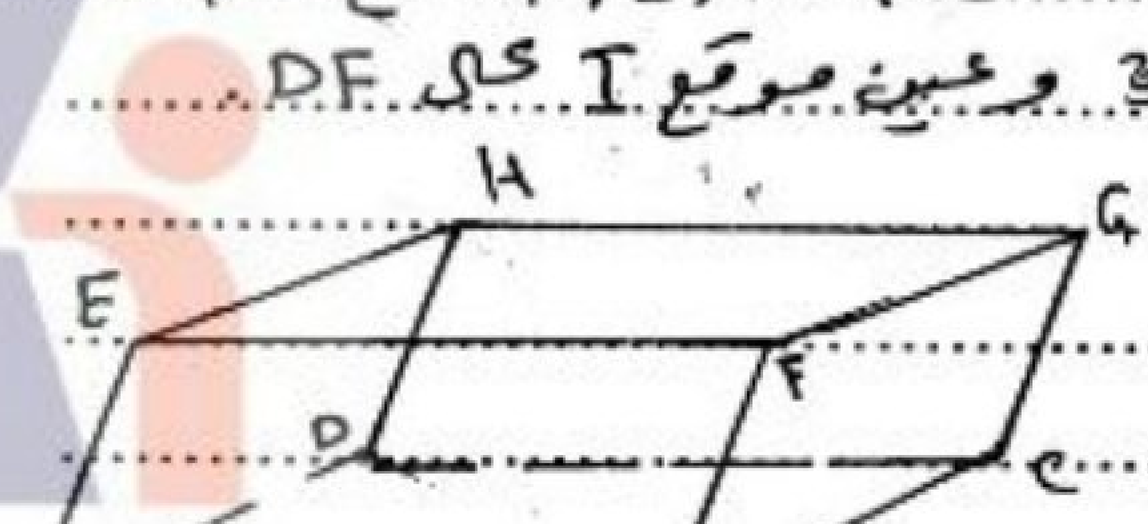
يوجد ثلاثة أنواع للمعلم

[1] معلم كيفي: لا يشترط فيه التعامد بين المحاور أو تساوي الأطوال ويفيد في دراسة العلاقة أو الارتباط الخطي وفي كل الحالات عدا الحالات التي لها علاقة بالطول أو المساحة أو المحيط أو الجداء السلمي.

[2] معلم متعامد: يمكن تحويله إلى متجانس

[3] معلم متجانس: تكون فيه الأشعة متعامدة وأطوالها متساوية وهو المعتمد في حساب المساحات والمحيطات والجداء السلمي وعند التعامل مع معلم يجب الحل تحليلياً.

مسألة 5: ABCDEFGH متوازي سطوح، I مركز ثقل المثلث AHC. أثبت أن النقاط D, I, F تقع على استقامة واحدة وعيّن موقع I على DF.



نأخذ معلم

$(A;\ \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0)$, $H(0,1,1)$, $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $F(1,0,1)$ $I(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

$\vec{FI}(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ والمركبات متناسبة

$\vec{DI}(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ والأشعة مرتبطة خطياً

والنقاط على استقامة واحدة.

مسألة 6: ABCDEFGH مكعب، K من CD حيث تحقق $\vec{DK}=\frac{1}{4}\vec{DC}$ والنقطة J تحقق $\vec{BJ}=\frac{3}{4}\vec{BC}$

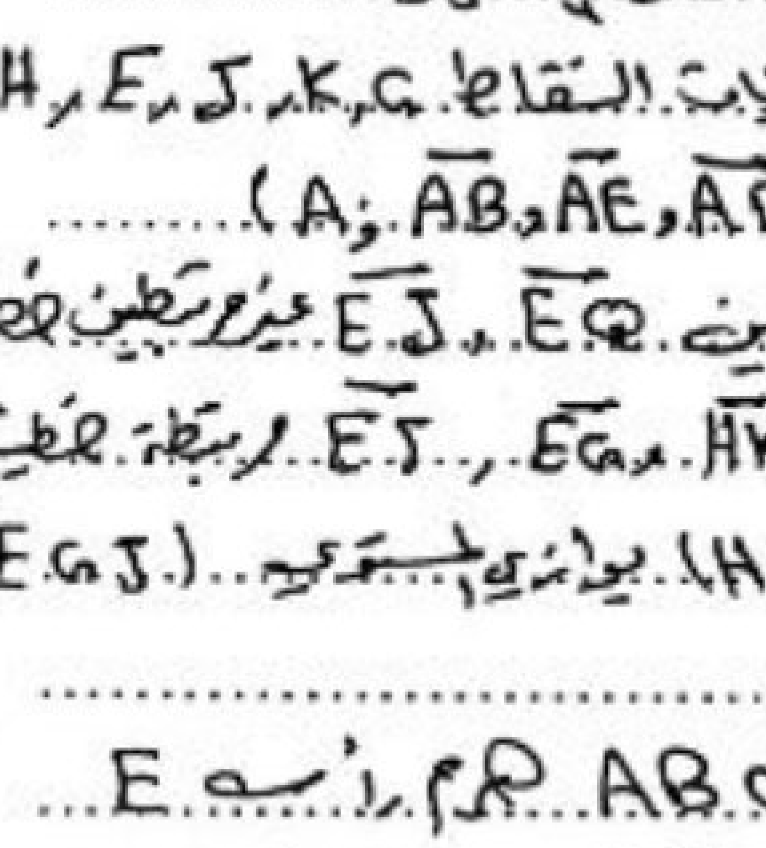
والمطلوب: ① جد إحداثيات النقاط H, E, J, K, G في المعلم $(A;\ \vec{AB}, \vec{AE}, \vec{AD})$

② أثبت أن الشعاعين $\vec{EJ}$, $\vec{EG}$ غير مرتبطين خطياً

③ أثبت أن الأشعة $\vec{EJ}$, $\vec{EG}$, $\vec{HK}$ مرتبطة خطياً

④ أثبت أن المستقيم (HK) يوازي المستوي (EGJ)

مسألة 7: ABCDE هرم رأسه E وقاعدته مربع [BE] عمودي على المستوي (ABCD)، AB=4، EB=$4\sqrt{2}$، M نقطة تحقق $3\vec{DM}=\vec{DE}$، P المسقط القائم للنقطة M على المستوي (ABCD)، H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB). احسب طول القطعة المستقيمة [MH]



الحل:

$(B, \frac{1}{4}\vec{BA}, \frac{1}{4}\vec{BC}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\vec{BE})$

$B(0,0,0)$ $A(4,0,0)$

$C(0,4,0)$ $D(4,4,0)$

$E(0,0,4\sqrt{2})$

$M(x,y,z)$

$\vec{DM}=\frac{1}{3}\vec{DE} \Rightarrow (x-4, y-4, z)=\frac{1}{3}(-4,-4,4\sqrt{2})$

$x-4=-\frac{4}{3} \Rightarrow x=\frac{8}{3}$

$y-4=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=\frac{8}{3}$

$z=\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow z=4\sqrt{2}$

$M(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$

$\downarrow$

$P(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0)$

$\downarrow$

$H(\frac{8}{3}, 0, 0)$

$MH=\sqrt{0+\frac{64}{9}+\frac{32}{9}}=\sqrt{\frac{96}{9}}$

مسألة 8: ABCDEFGH مكعب

I, J, K, L هي بالترتيب منتصفات

[AE], [CG], [BC], [AB]

ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة

$3\vec{EM} = 2\vec{EI}$

① أثبت أن M هي مركز ثقل المثلث AEB ؟

② أثبت أن الأشعة $\vec{HK}$, $\vec{CJ}$, $\vec{LM}$ مرتبطة خطياً

الجداء السلمي (الناتج عدد)

عبارات الجداء السلمي

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

2) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

$\vec{u}(x,y,z)$ $\vec{v}(x',y',z')$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

ملاحظات ونتائج

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ الأشعة متعامدة

2) $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

3) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

4) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

5) $(a\vec{u})\cdot(b\vec{v}) = (ab)(\vec{u}\cdot\vec{v})$ $a,b\in\mathbb{R}$

6) $\theta = 0 \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

الأشعة مرتبطة خطياً وبجهة واحدة ولكل حامل واحد أو حاملين مختلفين

$\vec{u}$ $\vec{v}$

$\vec{v}$ $\vec{u}$

7) $\theta = \pi \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

الأشعة مرتبطة خطياً وبجهتين متعاكستين ولكل حامل واحد أو حاملين مختلفين

$\vec{u}$ $\vec{v}$

$\vec{v}$ π $\vec{u}$

8) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|\cos\theta$

لها المبدأ ذاته

9) $\vec{AB}\cdot\vec{CB} = \|\vec{AB}\|\,\|\vec{CB}\|\cos\theta$

متلاقية

10) $\vec{AB}\cdot\vec{BC} = -\|\vec{AB}\|\,\|\vec{BC}\|\cos\theta$

متلاحقة

11)

$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}\cdot\vec{C'D'}$ حيث $\vec{C'D'}$ مسقط $\vec{CD}$ على حامل $\vec{AB}$

12) في الفراغ نسقط أحد الأشعة على مستوي يحوي الآخر

13) في حال صعوبة إيجاد الجداء السلمي نقوم باستخدام علاقة شال في كتابة الأشعة بدلالة مجموع شعاعين أو أكثر

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ في كل من الحالات:

① $\vec{u}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$ $\vec{v}\left(\frac{1}{2}, -2, \frac{2}{3}\right)$

② $\vec{u}(1+\sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ $\vec{v}(1-\sqrt{2}, 0, -1)$

[2] إذا علمت أن $\|\vec{u}\| = 5$ ، $\|\vec{v}\| = 3$ وأن $\vec{u}\cdot\vec{v} = -6$

احسب الجداء:

① $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{u})$

2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$

3) $(2\vec{u})\cdot(\vec{v}-3\vec{u})$

[3] S.ABCD هرم قاعدته مربع ورأسه S

وطول كل حرف من حروفه وأضلاعه يساوي a

احسب $\vec{SA}\cdot\vec{AB}$, $\vec{SA}\cdot\vec{SC}$, $\vec{SA}\cdot\vec{AC}$

[4] ABCDEFGH مكعب طول ضلعه a

I منتصف [EF] ، J منتصف [CG]

احسب $\vec{EI}\cdot\vec{EA}$, $\vec{EI}\cdot\vec{FC}$, $\vec{EI}\cdot\vec{GJ}$

$\vec{EI}\cdot\vec{IA}$, $\vec{JH}\cdot\vec{JD}$

[5] أثبت أن:

$2\vec{AC}\cdot\vec{DB} = AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$

المادة........

معادلة الاسطوانة

محورها $\vec{oi}$ ومركزي قاعدتيها $(a,0,0)$ $(b,0,0)$ $y^2+z^2=R^2 ;\ a\le x\le b$	محورها $\vec{oj}$ ومركزي قاعدتيها $(0,a,0)$ $(0,b,0)$ $x^2+z^2=R^2 ;\ a\le y\le b$	محورها $\vec{ok}$ ومركزي قاعدتيها $(0,0,a)$ $(0,0,b)$ $x^2+y^2=R^2 ;\ a\le z\le b$

$V=\pi R^2 h$

الارتفاع $h=|b-a|$

[1] اكتب معادلة اسطوانة محورها $\vec{oz}$ ومركزي قاعدتيها $O(0,0,0)$ $A(0,0,7)$ ونصف قطرها $R=3$ وبين أي النقاط تنتمي إلى الاسطوانة $D(3,0,3)$ $F(1,3,1)$

الحل: $x^2+y^2=R^2 \Rightarrow x^2+y^2=9$

$0\le z\le 7$

$D(3,0,3)$

$x^2-y^2=9$ ، $0\le z\le 7$

$9-0=9$ ، $0\le 3\le 7$

$9=9$ محققة $D\in$ الاسطوانة

$F(1,3,1)$

$x^2-y^2=9$ ، $0\le z\le 7$

$1-9=9$ ، $0\le 1\le 7$

$-8=9$ غير محققة

$F\notin$ الاسطوانة

[2] صف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق المتباينتين $x^2+z^2=25$ ، $2\le y\le 4$

الحل: معادلة اسطوانة محورها $\vec{oj}$ ، $R=5$ ومركزي قاعدتيها $(0,2,0)$ $(0,4,0)$

$h=|b-a|=|4-2|=2$

$V=\pi R^2 h=\pi(25)(2)=50\pi$

[3] اكتب معادلة اسطوانة مركزي قاعدتيها $(2,0,0)$ $(4,0,0)$ ، $R=3$

الحل: $y^2+z^2=9$ ، $2\le x\le 4$

[4] اكتب معادلة اسطوانة محورها $\vec{oj}$ ومركز قاعدتها $(0,3,0)$ و $R=4$

الحل: $x^2+z^2=16$ ، $3\le y\le 3+h$

معادلة المخروط رأسه (o)

محوره $\overrightarrow{oi}$	محوره $\overrightarrow{oj}$	محوره $\overrightarrow{ok}$
$y^2+z^2-\frac{R^2}{h^2}x^2=0$	$x^2+z^2-\frac{R^2}{h^2}x^2=0$	$x^2+y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0$
$0\le x\le a$	$0\le y\le b$	$0\le z\le c$
مركز قاعدته $(a,0,0)$	مركز قاعدته $(0,b,0)$	مركز قاعدته $(0,0,c)$

$h=|a|=|b|=|c|$

$V=\frac{1}{3}\pi R^2 . h$

$\boxed{1}$ اكتب معادلة المخروط الذي رأسه o
ومحوره oz ومركز قاعدته $A(0,0,5)$
ونصف قطرها (2)
وبين أي من النقاط الآتية تنتمي إلى المخروط
$T(2,2\sqrt{3},0)$ $\quad Q(2,0,5)$

الحل:
$x^2+y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0$
$0\le z\le c$
$x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0 \qquad 0\le z\le 5$

$Q(2,0,5)$

$x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0 \qquad 0\le z\le 5$
$4+0-\frac{4}{25}(25)=0 \qquad 0\le 5\le 5$
$0=0$ محققة $\qquad$ محققة

$Q\in$ المخروط

$T(2,2\sqrt{3},10)$

$0\le z\le 5$

$0\le 10\le 5$ غير محققة $T\notin$ المخروط

$\boxed{2}$ صف مجموعة النقاط
$x^2+z^2-\frac{16}{36}y^2=0 \quad , 0\le y\le 6$
الحل: معادلة مخروط رأسه (o)
ومحوره $\overrightarrow{oi}$ $\quad h=36 \quad , R=4$

ملاحظة: إذا لم يكن المرسوم o نستنتج
$x\in\mathbb{R}$ أو $y\in\mathbb{R}$ أو $z\in\mathbb{R}$

معادلة الكرة:

معادلة الكرة مركزها (x_0,y_0,z_0) ونصف قطرها R
هي: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

تعيين مجموعة النقاط $M(x,y,z)$
لتكن المعادلة $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz=0$
بعد الإعداد إلى مربع كامل نحصل على
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$
ونميز الحالات:

$\boxed{1}$ $k>0$: تمثل كرة
$\boxed{2}$ $k<0$: تمثل مجموعة خالية
$\boxed{3}$ $k=0$: تمثل النقطة وحيدة (x_0,y_0,z_0)

عين مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:
① $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$
② $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$
③ $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$
④ $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

المعادلة الديكارتية لمستوي في الفراغ

① يعطى النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ والناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

② يعطى ثلاث نقاط A , B , C ليست على استقامة واحدة بحيث تشكل أشعة $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ غير مرتبطة خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}.\vec{AB}=0$

$\vec{n}.\vec{AC}=0$

نقوم بحل المعادلات فنحصل على $\vec{n}$

نختار نقطة ونعود للحالة ①

③ أوضاع مستويين في الفراغ

متوازيان: $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ مرتبطين خطياً

متقاطعان: $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ غير مرتبطين خطياً

متعامدان: $\vec{n_1}.\vec{n_2}=0$

④ معادلة مستوي يمر بنقطة ويوازي مستوي: (لهما الناظم ذاته)

⑤ معادلة مستوي يمر بنقطتين ويعامد مستوي

① نوجد $\vec{AB}$ و $\vec{n_P}$

② نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

③ $\vec{n}.\vec{AB}=0$, $\vec{n}.\vec{n_P}=0$

④ نختار نقطة ونعود للحالة ①.

5 معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

① نوجد $\vec{n}=\vec{AB}$

② نوجد I منتصف $[AB]$

ونكتب معادلة المستوي المار من I حسب ①

6 معادلة مستوي يمر بنقطة ويعامد مستويين P و Q

① نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

② $\vec{n}.\vec{n_P}=0$, $\vec{n}.\vec{n_Q}=0$

نوجد $\vec{n}$ ثم نعود للحالة ①.

المعادلات الوسيطية لمستقيم في الفراغ

1 يمر بنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ويقبل $\vec{u}$ شعاع توجيه

$\vec{AM}=t\vec{u}$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

ملاحظة: $t\in[0,1]$ ← قطعة مستقيمة

$t\in[0,+\infty[$ ← نصف مستقيم

2 يمر بنقطتين A , B

① $\vec{u}=\vec{AB}$

② نختار نقطة ونكتب المعادلات حسب ①

3 المعادلات الوسيطية لفصل مشترك لمستويين P و Q

① نقوم بحل جملة المعادلتين ونكتب x و y و z بدلالة أحدها ثم نفرضها t ونكتب المعادلات الوسيطية

[4] أوضاع مستقيمين في الفراغ:

ليكن L يقبل شعاع توجيه $\vec{u}$

L' = = = عندئذ $\vec{u'}$

① مستقيمين متوازيين: إذا كان $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ مرتبطين خطياً والمستقيمين يحتويهما مستوٍ واحد.

② المستقيمين متقاطعين: $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطياً والمستقيمين يشتركان بنقطة واحدة عندئذ المستقيمين يحتويهما مستوٍ واحد.

③ المستقيمين متخالفين: $\vec{u}$ ، $\vec{u'}$ غير مرتبطين خطياً والمستقيمين لا يشتركان بأية نقطة أي المستقيمين لا يحتويهما مستوٍ واحد.

أسئلة الأشعة:

1. أوجد مركبات شعاع.
2. أوجد طويلة شعاع.
3. أثبت الارتباط الخطي لشعاعين.
4. أثبت الارتباط الخطي لثلاثة أشعة.
5. أثبت أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة.
6. أثبت أن ثلاث نقاط تعين مستوي.
7. أوجد الجداء السلمي لشعاعين.
8. أثبت تعامد شعاعين.
9. أوجد إحداثيات نقطة بمعلم.
10. أوجد معادلة مستوي.
11. أوجد معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط.
12. أوجد معادلة مستوي يمر من نقطة ويعلم شعاع ناظم له.
13. أوجد معادلة مستوي يحوي مستقيمين متقاطعين.
14. أثبت أن أربع نقاط تقع في مستوٍ واحد.
15. أوجد التمثيل الوسيطي لمستقيم.
16. أوجد التمثيل الوسيطي لمستقيم مار من نقطتين.
17. أوجد معادلة مستقيم ناتج عن تقاطع مستويين.
18. أوجد إحداثيات نقطة تقاطع مستوٍ أو مستقيم.
19. أوجد مسقط نقطة على مستوٍ أو مستقيم.
20. أثبت توازي مستقيمين
21. = = مستويين
22. أثبت تعامد مستويين
23. أوضاع مستقيم ومستوي:

P: ناظمه $\vec{n}$ ، L: شعاع توجيهه $\vec{u}$

- $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$: L يوازي P
- $\vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$: L قاطع لـ P
- $\vec{u}$ ، $\vec{n}$ مرتبطان خطياً : L يعامد P

24. دراسة الوضع النسبي لمستويين أو مستقيمين
25. معادلة كرة بأشكالها
26. أثبت أنه مستوي مماس لكرة
27. قواعد إيجاد مجموعة النقاط
28. أوجد إحداثيات مركز ثقل مثلث
29. إثبات ثلاث نقاط على استقامة واحدة بمعلومية مركز الأبعاد
30. أوجد إحداثيات مركز أبعاد متناسبة
31. إيجاد α و β لتكون M مركز أبعاد
32. إثبات نقطة G هي مركز أبعاد متناسبة
33. إيجاد معادلة مستوي عمودي على مستوي ويمر بنقطتين
34. أوجد معادلة أسطوانة + مخروط
35. احسب حجم هرم، مكعب، متوازي مستطيلات

$V_{هرم} = \frac{1}{3} \times S_{قاعدة} \times h$

$V_{مكعب} = a^3$ ، a: طول ضلعه

$V_{متوازي\ مستطيلات} = a.b.c$ ، a,b,c أبعاده

36. مستويات خاصة:

① مستوي مار من المبدأ: $ax+by+cz=0$

② مستوي موازي للمحور oz: $ax+by+d=0$

③ مستوي = = ox: $by+cz+d=0$

④ = = = oy: $ax+cz+d=0$

⑤ = = المستوي yoz: $x=x_0$

⑥ = = = xoz: $y=y_0$

⑦ = = = xoy: $z=z_0$

37. أوضاع ثلاثة مستويات (طريقة غاوس)

أ. وائل بدر

KHATIB Institute

الخطيب للغات والتعليم

المادة..........

تمرين [1] : أوجد معادلة المستوي المار من $A(1,2,3)$ ويقبل $\vec{n}(-1,2,-3)$ ناظماً له

الحل: $a(x-x_A)+b(y-y_B)+c(z-z_A)=0$

$-1(x-1)+2(y-2)-3(z-3)=0$

$-x+2y-3z+6=0$

تمرين [2] : أوجد معادلة المستوي المار بـ $A(1,2,0)$ ويقبل شعاعي $\vec{u}(3,0,1)$ ، $\vec{v}(2,1,0)$ شعاعي توجيه له

الحل: $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow 3a+c=0$

$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow 2a+b=0$

نفرض $\boxed{a=1} \Leftarrow \boxed{c=-3}$ $\boxed{b=-2}$

$\vec{n}(1,-2,-3)$

$1(x-1)-2(y-2)-3(z-0)=0$

$P: x-2y-3z+3=0$

تمرين [3] : أوجد معادلة المستوي P المار بالنقاط $A(1,2,1)$ $B(2,1,0)$ $C(0,0,2)$

الحل: $\overrightarrow{AB}(1,-1,-1)$ ، $\overrightarrow{AC}(-1,-2,1)$ غير مرتبطين خطياً

فهما شعاعي توجيه المستوي

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow a-b-c=0$ ①

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow -a-2b+c=0$ ②

نجمع ① و ② $\Leftarrow -3b=0 \Leftarrow \boxed{b=0}$

نفرض $\boxed{c=1} \Leftarrow \boxed{a=1}$

$\Leftarrow \vec{n}(1,0,1)$

نختار نقطة $C(0,0,2)$

$1(x-0)+0+1(z-2)=0 \Rightarrow x+z-2=0$

تمرين [4] : أوجد معادلة المستوي Q المار من $A(1,1,2)$ ويوازي المستوي

$P: 2x+y+z+5=0$

الحل: $Q \parallel P \Leftarrow \vec{n}_Q=\vec{n}_P(2,1,1)$

$\Rightarrow 2(x-1)+1(y-1)+2(z-1)=0$

$Q: 2x+y+2z-5=0$

تمرين [5] : أوجد معادلة المستوي Q المار من $A(1,1,2)$ ويعامد المستويين

$P_1: 2x+y-z+3=0$

$P_2: -x+y+2z+5=0$

الحل: $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ، $\vec{n}_1(2,1,-1)$ ، $\vec{n}_2(-1,1,2)$

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_1 \Rightarrow 2a+b-c=0$ ①

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_2 \Rightarrow -a+b+2c=0$ ②

بالطرح: $3a-3c=0$

نفرض $\boxed{c=1} \Leftarrow \boxed{a=1} \overset{①}{\Leftarrow} \boxed{a=0}$

$\vec{n}(1,0,1)$

$\Rightarrow 1(x-1)+0+1(y-2)=0$

$Q: x+y-3=0$

تمرين [6] : أوجد معادلة المستوي Q المار من $A(1,1,3)$ ، $B(3,2,1)$ ويعامد المستوي $P: 2x-y+z+1=0$

الحل: $\vec{n}_Q(a,b,c)$ ، $\vec{n}_P(2,-1,1)$ ، $\overrightarrow{AB}(2,1,-2)$

$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow 2a-b+c=0$ ①

$\vec{n}_Q \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow 2a+b-2c=0$ ②

نجمع ① و ② $4a-c=0$

نفرض $\boxed{a=1} \Leftarrow \boxed{c=4} \overset{(2)}{\Leftarrow} \boxed{b=6}$

نختار A ، $\vec{n}(1,6,4)$

$1(x-1)+6(y-1)+4(z-3)=0 \Rightarrow x+6y+4z-19=0$

تمرين [7] : أوجد معادلة المستوي المماس للكرة $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$ في النقطة $B(3,4,-2)$

الحل: مركز الكرة $I(2,-2,2)$

$\vec{n}=\vec{IB}(1,6,-4)$

$1(x-3)+6(y-4)-4(z+2)=0$

$x+6y-4z-35=0$

ملاحظة: لإثبات أن مستوي يمس كرة نحسب بعد المركز عن المستوي ونثبت أنه يساوي نصف قطر الكرة.

تمرين [8] لتكن النقطتان $A(1,0,1)$ $B(0,1,1)$

① اكتب تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$

② أثبت أن المستقيمين d و (AB) متعامدان

الحل:

$d: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

$\vec{AB}(-1,1,0)$

$(AB) \begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \\ z=1 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

$\vec{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً

⇐ d و (AB) غير متوازيين

$\vec{u}\cdot\vec{AB}=-2+2+0=0$

⇐ متعامدين.

تمرين [9] : لتكن النقطة $A(2,1,3)$ والمستوي $P: x+y+z+1=0$

① أوجد معادلة المستقيم d المار من A والعمودي على P

② أوجد معادلة المستقيم d' المار من A والموازي للمستوي P

الحل: ① d يعامد P ⇐ ناظم P هو شعاع توجيه له أي $\vec{u}(1,1,1)$

$d: \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=t+3 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

② نوجد نقطتين من المستوي

$x=0, y=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow C(0,0,-1)$

$x=1, y=1 \Rightarrow z=-3 \Rightarrow D(1,1,-3)$

$\Rightarrow \vec{u}=\vec{CD}=(1,1,-2)$

$d': \begin{cases} x=t+2 \\ y=t+1 \\ z=-2t+3 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

تمرين [10] : ليكن المستقيمان

$L: \begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$ $L': \begin{cases} x=4-5s \\ y=3-2s \\ z=-1+3s \end{cases} ; s\in\mathbb{R}$

① أثبت أن L و L' متقاطعان في نقطة

② أوجد معادلة للمستوي المحدد بالمستقيمين

تمرين [11] : في معلم متجانس ليكن المستويين

$P: x-2y+3z-5=0$

$Q: x+y+z+1=0$

① أثبت أن P, Q متقاطعين بفصل مشترك

② اكتب معادلة المستوي R العمودي على كل من P, Q ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

الحل: $\vec{n}_P(1,-2,3)$ غير مرتبطين خطياً

$\vec{n}_Q(1,1,1)$ فالمستويين متقاطعين

نطرح المعادلتين: $-3y+2z-6=0$

$\Rightarrow z=3+\frac{3}{2}y \xRightarrow{\text{في } Q} x=-\frac{5}{2}y-4$

نضع $y=t$ ⇐ التمثيل الوسيطي للفصل المشترك

$d: \begin{cases} x=-\frac{5}{2}t-4 \\ y=t \\ z=\frac{3}{2}t+3 \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$

② نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ⇐ $\vec{n}\cdot\vec{n}_P=0$

$\vec{n}\cdot\vec{n}_Q=0$

نوجد $\vec{n}$ ونتابع كما في الأمثلة السابقة.

[12] أوجد معادلة المستوي المحوري للقطعة [AB] حيث $A(1,1,2)$ $B(3,-1,4)$

الحل:

$\vec n = \overrightarrow{AB}(2,-2,2)$

والمستوي يمر بمنتصف [AB] وهي $I(2,0,3)$

$\Rightarrow 2(x-2)-2(y-0)+2(z-3)=0$

$2x-2y+2z-10=0$

طريقة 2: المستوي المحوري هو مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$

[13] في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس $(O,\vec i,\vec j,\vec k)$ رباعي وجوه OABC حيث $A(0,0,3)$ $B(3,0,0)$ $C(0,3,0)$ والمطلوب:

① عين إحداثيات D مركز ثقل المثلث ABC

② أثبت أن $\overrightarrow{OD}$ يعامد الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

③ اكتب معادلة المستوي ABC

④ أثبت أن D مسقط O على المستوي ABC

⑤ احسب حجم رباعي الوجوه OABC

الحل ①: $D\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

$D(1,1,1)$

② $\overrightarrow{OD}(1,1,1)$ $\overrightarrow{AB}(3,0,-3)$, $\overrightarrow{AC}(0,3,-3)$

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AB} = 3+0-3=0$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OD}$ يعامد $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{AC} = 0+3-3=0$

③ من الطلب السابق ناظم المستوي هو $\overrightarrow{OD}$

$\vec n(1,1,1)$

نكتب معادلة المستوي المار من $A(0,0,3)$

$1(x-0)+1(y-0)+1(z-3)=0$

$x+y+z-3=0$

④ نعوض $D(1,1,1)$ في معادلة المستوي

$\Leftarrow$ محققة $1+1+1-3=0$

$0=0$

(OD) يعامد (ABC) و D تنتمي للمستوي

$\Leftarrow$ D مسقط O على المستوي ABC

⑤

$V = \frac{1}{3} \times S_{قاعدة} \times h$

$V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times OD$

مثلث متساوي الأضلاع

$OD=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \times \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times OD$

طول ضلع المثلث ABC المتساوي الأضلاع

$AC = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$V = \frac{1}{3} \times (3\sqrt{2})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3}$

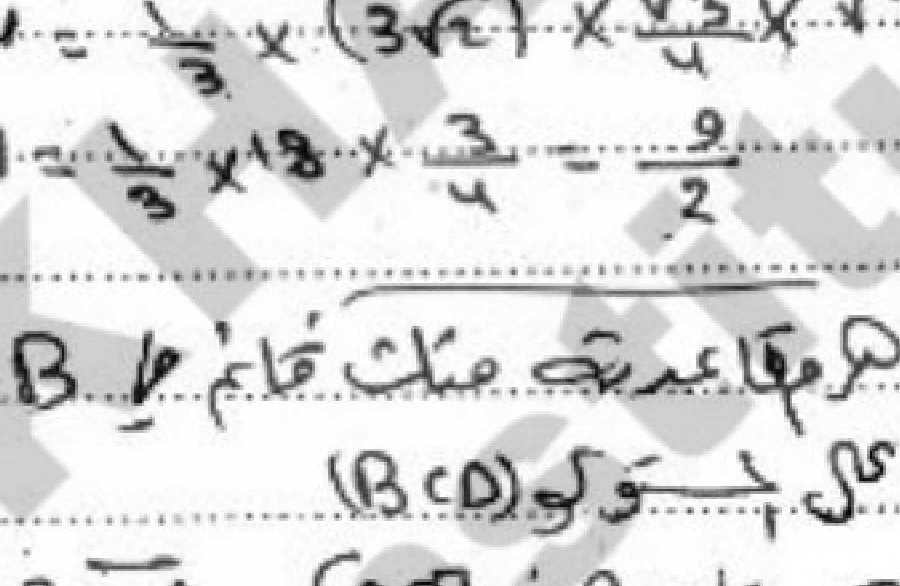
$V = \frac{1}{3} \times 18 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$

[14] ABCD هرم قاعدته مثلث قائم في B ، [AB] عمودي على المستوي (BCD)

I منتصف CD ، K منتصف [AB] ، $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ونختار معلم $(B, \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{6}\overrightarrow{BD}, \frac{1}{6}\overrightarrow{BA})$

G منتصف EF



① جد إحداثيات رؤوس رباعي الوجوه والنقاط G, F, E, K, I

② أثبت أن I, K, G على استقامة واحدة

③ جد مساحة المثلث BCD واستنتج حجم رباعي الوجوه $A-BCD$

④ جد معادلة المستوي (ACD)

⑤ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BG) وادرس تقاطعه مع المستوي (ACD)

⑥ احسب بعد النقطة I عن المستقيم (BG)

⑦ اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمر بالنقاط A, C, D

⑧ بفرض $H(2,2,2)$ احسب $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AD}$ ، $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}$ وماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث CDA

⑨ جد $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FI}$ واستنتج $\cos(BFI)$

الحل

① $B(0,0,0)\ C(6,0,0)\ D(0,6,0)\ A(0,0,6)$

$I(3,3,0)\ E(2,0,0)\ K(0,0,3)\ F(0,2,4)$

$G(1,1,2)$

حساب F: $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

$(x-0, y-6, z) = \frac{2}{3}(0,-6,6)$

$(x, y-6, z) = (0,-4,4)$

$F(0,2,4)$

② $\overrightarrow{GK}(-1,-1,1)$

$\overrightarrow{GI}(2,2,-2)$

$\frac{2}{-1} = \frac{2}{-1} = \frac{-2}{1}$

المركبات متناسبة والأشعة مرتبطة خطياً والنقاط G, I, K على استقامة واحدة

③ $S_{BCD} = \frac{BC \times BD}{2}$ مساحة المثلث القائم = القاعدة × الارتفاع / 2

$= \frac{6\times 6}{2} = 18$

$V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \times h = \frac{1}{3} \times 18 \times 6 = 36$

④ $\overrightarrow{AC}(6,0,-6)$ $\overrightarrow{AD}(0,6,-6)$ غير مرتبطين خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow 6a - 6c = 0$ ①

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 0 \quad 6b - 6c = 0$ ②

بفرض $c=1 \Leftarrow a=1,\ b=1$

$\vec{n}(1,1,1)$

نكتب معادلة المستوي المار من A

$x + y + z - 6 = 0$

⑤ نوجد شعاع التوجيه $\overrightarrow{BG}(1,1,2)$

نكتب المعادلة الوسيطية للمستقيم المار من B

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BG} = 1+1+2 = 4 \neq 0$

⇐ المستقيم قاطع للمستوي

ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي

$\Rightarrow t + t + 2t - 6 = 0$

$4t = 6 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow$ نقطة التقاطع $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

⑥ لتكن I' نقطة من BG ولتكن $I'(t,t,2t)$

I' مسقط إذا تحقق $\overrightarrow{II'}\cdot\vec{u} = 0$

$(t-3, t-3, 2t)(1,1,2) = 0$

$t - 3 + t - 3 + 4t = 0$

$6t = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{II'}(-2,-2,2)$

$\|\overrightarrow{II'}\| = \sqrt{4+4+4+4} = \sqrt{16} = 4$

وهو البعد المطلوب

$I'(1,1,2)$ هو مسقط I على المستقيم (BG)

⑦ $R = BA = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 36$

⑧ $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AD} = (-4,2,2)(0,6,-6) = 0$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD} = (2,2,-4)(-6,6,0) = 0$

⑨ $\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FI} = (0,-2,-4)(3,1,-4) = 0 - 2 + 16 = 14$

$\cos(BFI) = \frac{\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FI}}{\|\overrightarrow{FB}\|\,\|\overrightarrow{FI}\|} = \frac{14}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{26}} = \ldots$

طلب إضافي: جد معادلة مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0$ وما طبيعتها

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MA} = 0 \Rightarrow (-x, 6-y, -z)(-x, -y, 6-z) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6y + y^2 - 6z + z^2 = 0$ بالإتمام إلى مربع كامل

$x^2 + y^2 - 6y + 9 - 9 + z^2 - 6z + 9 - 9 = 0$

$x^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 = 18$ كرة مركزها $(0,3,3)$ و $R = \sqrt{18}$

المادة..........

مسقط نقطة على المستوي:

لإيجاد مسقط النقطة D على مستوي P:

① نوجد التمثيل الوسيطي لمستقيم يمر من D ويعامد P

② نوجد نقطة تقاطع المستقيم والمستوي فتكون هي مسقط D على المستوي

أوضاع ثلاث مستويات:

[1] المستويات تتقاطع بنقطة واحدة $\Leftrightarrow$ الجملة 3 معادلات لها حل وحيد

[2] المستويات متوازية $\Leftrightarrow$ جملة 3 معادلات مستحيلة الحل

[3] المستويات تتقاطع بفصل مشترك $\Leftrightarrow$ الجملة 3 معادلات عدد غير منتهٍ من الحلول

مسألة [15]: في معلم متجانس لتكن النقاط

$A(2,4,3)$ $B(4,-2,3)$ $C(1,-1,1)$

$D(3,3,-3)$ $E(0,2,1)$ $N(2,2,-2)$

$F(1,2,3)$ $H(-2,-2,2)$

والمستوي $Q: 3x-3y+2z+4=0$

① أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة، ثم اكتب معادلة المستوي (ABC)

② اكتب معادلة P المار من D, N والعمودي على المستوي (ABC)

③ احسب بعد F عن Δ الفصل المشترك للمستويين P و (ABC)

④ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من D والعمودي على (ABC)

⑤ جد مسقط D على المستوي (ABC)

⑥ أثبت أن المستويات (ABC)، P، Q تتقاطع في نقطة واحدة جدها E

⑦ أثبت أن المستوي (ABC) يقطع الكرة التي مركزها D وتمر من H ثم جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن التقاطع

⑧ أعط معادلة المجموعة E المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\vec{AM}\cdot\vec{BM}=3$ وما طبيعة E

مسألة [16]: $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $GC=3, AB=AD=2$

I, J, P هي منتصفات $[AD]$ $[AB]$ $[BC]$ على الترتيب، نتأمل معلم متجانس $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

① أثبت أن المستقيم (GP) يوازي $(HFJI)$

② جد معادلة الكرة التي قطرها $[EC]$

③ جد معادلة المخروط الناتج عن دوران الضلع $[AH]$ من المثلث (AEH) حول (AE)

④ احسب بعد E عن المستقيم (JF)

⑤ احسب بعد E عن المستوي $(HFJI)$

⑥ هل ينتمي المسقط القائم للنقطة E على المستوي $(HFJI)$ إلى المستقيم (JF)

⑦ احسب حجم الهرم $E\text{-}HFJI$

⑧ أوجد معادلة الاسطوانة الناتجة عن دوران $[EF]$ حول $[AB]$

17\] لدينا النقطة $A(1,1,0)$ والمستويين P, Q:

$P: x+2y-3z-1=0 \quad , \quad Q: 3x-3y-z+1=0$

(a) أثبت أن P و Q متعامدين

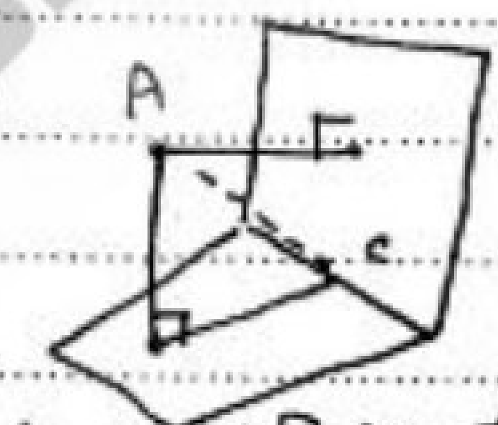
(b) احسب بعد A عن P و Q ثم استنتج بعد A عن الفصل المشترك

الحل: $\vec{n}_P(1,2,-3) \; , \; \vec{n}_Q(3,-3,-1) \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 3-6+3=0$

$\Leftarrow P \perp Q$

$dist(A,P) = \frac{|2|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

$dist(A,Q) = \frac{|1|}{\sqrt{9+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{19}}$



نستخدم فيثاغورث

نحسب بعد A عن الفصل المشترك

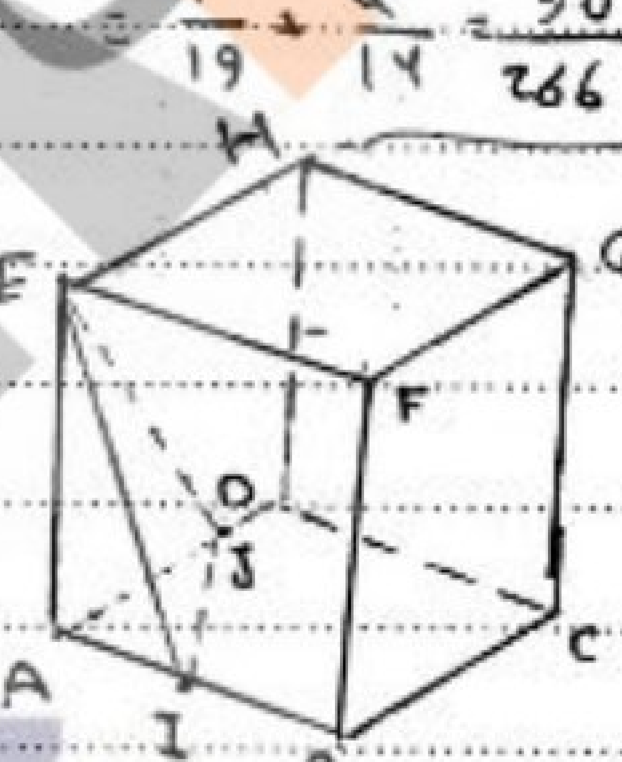
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= \frac{1}{19} + \frac{4}{14} = \frac{90}{266} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{90}{266}}$

18\] $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 4

I منتصف $[AB]$ و J يحقق $4\vec{AJ} = 3\vec{AD}$ في المعلم

$(A, \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \frac{1}{4}\vec{AE})$



(1) عين إحداثيات رؤوس المكعب و I و J

(2) أثبت أن معادلة المستوي (EIJ) هي $6x+4y+3z-12=0$

(3) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A وعمودياً على المستوي (EIJ)

(4) أوجد إحداثيات K نقطة تقاطع d مع (EIJ)

(5) احسب مساحة المثلث (AEI) ثم احسب حجم رباعي الوجوه $J\text{-}AEI$

(6) احسب بعد A عن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة EIJ

(7) اكتب معادلة الأسطوانة الناتجة عن دوران $[EF]$ حول محور الفواصل

الحل: (1) $A(0,0,0)\; B(4,0,0)\; D(0,4,0)\; C(4,4,0)$

$E(0,0,4)\; F(4,0,4)\; H(0,4,4)\; G(4,4,4)$

$I(2,0,0)\quad J(0,3,0)$ من العلاقة

$(x,y,z) = \frac{3}{4}(0,4,0) \leftarrow \vec{AJ} = \frac{3}{4}\vec{AD}$

(2) محلول سابقاً: $6x+4y+3z-12=0$

(3) d يمر من A وعمودي على المستوي أي ناظم المستوي شعاع توجيه d

$\vec{u}(6,4,3) \Rightarrow \begin{cases} x=6t \\ y=4t \\ z=3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

(4) نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي ونعوض t

(5) $S_{AEI} = \frac{AE \times AI}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$

$V_{J\text{-}AEI} = \frac{1}{3} \times S_{AEI} \times AJ = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 4$

(6) $dist(A, EIJ) = \frac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$

نستفيد من (5)

$V_{J\text{-}AEI} = V_{A\text{-}EIJ}$

$4 = \frac{1}{3} \times S_{EIJ} \times \frac{12}{\sqrt{61}} \Rightarrow 4 = \frac{4 S_{EIJ}}{\sqrt{61}}$

$S_{EIJ} = \sqrt{61}$

(7) الأسطوانة محورها $(O, \vec{i})$ ونصف قطرها يساوي $R=4$

$y^2+z^2=R^2 \Rightarrow y^2+z^2=16 \quad , \quad 0 \le x \le 4$

19\] $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات

$AE=1 \; , \; AD=4 \; , \; AB=2$

I منتصف $[AD]$

J يحقق $\vec{FJ} = \frac{1}{4}\vec{FG}$

نتأمل معلم متجانس $(A, \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AD}, \vec{AE})$

(1) عين إحداثيات رؤوس المكعب و I و J

(2) جد معادلة كرة قطرها (EC)

(3) أوجد معادلة المستوي (EIB) واحسب بعد G عن المستوي

(4) هل المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

(5) جد معادلة المخروط الناتج عن دوران $[AH]$ حول $[AE]$

(6) هل المستقيم (IJ) يوازي المستوي (AEF)

الحل: ① $A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,4,0)$ $D(0,4,0)$
$E(0,0,1)$ $F(2,0,1)$ $H(0,4,1)$ $G(2,4,1)$
$I(0,2,0)$ $J(2,\frac{1}{4},0)$

② مركز الكرة منتصف $[EC]$ ⇐ $(1,2,\frac{1}{2})$
$R=\frac{EC}{2}=\frac{\sqrt{21}}{4} \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{21}{16}$

③ معادلة المستوي (EIB): $x+y+2z-2=0$
$dist(G,EIB)=\frac{|2+4+2-2|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

④ نثبت بعد J عن المستقيم وإذا تساوى بعده عن المستوي فإنه مسقطه على المستقيم يقع على المستوي

⑤ المخروط محوره (o,z) ورأسه A
ونصف قطر قاعدته $R=4$ $h=1$
$x^2+y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0$
$x^2+y^2-\frac{16}{1}z^2=0$; $0\le z\le 1$

⑥ كيف أنه يتحقق جداء شعاع التوجيه بالناظم = 0
المستقيم يوازي المستوي ⇐ $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$
(يتحقق من ذلك).

مركز الأبعاد المتناسبة

[1] ABCD رباعي وجوه مركز ثقله G
بفرض I منتصف $[AD]$، J منتصف $[BC]$
أثبت أن النقاط J، G، I تقع على استقامة واحدة.

الحل: G م.أ.م لـ $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$
I منتصف $[AD]$ ⇐ I م.أ.م لـ $(D,1)$ $(A,1)$
J منتصف $[BC]$ ⇐ J م.أ.م لـ $(C,1)$ $(B,1)$
وحسب الخاصة التجميعية G م.أ.م لـ $(I,2)$ $(J,2)$
⇐ G، I، J على استقامة واحدة.
G منتصف $[IJ]$

[2] لتكن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة ومن الفراغ والنقطتين D، E تحققان
$\vec{AE}=3\vec{CE}$ ، $3\vec{AD}=2\vec{AB}$
I منتصف $[CD]$، J منتصف $[EB]$
① أثبت أن A، B، C، D، E تقع في مستوٍ واحد

② أثبت أن A، J، I تقع على استقامة واحدة
الحل: من العلاقة $\vec{AE}=3\vec{CE}$
نجزئ $\vec{AD}+\vec{DE}=3\vec{CE}$
$\frac{2}{3}\vec{AB}+\vec{DE}=3\vec{CE}$
$\Rightarrow \frac{2}{9}\vec{AB}+\frac{1}{3}\vec{DE}=\vec{CE}$ { $\vec{DE}$، $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً }
⇐ الأشعة مرتبطة خطياً والنقاط في مستوٍ واحد

② يجب أن نثبت أن A م.أ.م لـ J، I
من العلاقة $\vec{AE}=3\vec{CE}$ ⇐ $\vec{EA}=3\vec{EC}$
⇐ A م.أ.م لـ $(C,3)$ $(E,-2)$
ومن العلاقة: $3\vec{AD}=2\vec{AB}$ ⇐ $3\vec{AD}-2\vec{AB}=\vec{0}$
⇐ A م.أ.م لـ $(B,-2)$ $(D,3)$
وحسب الخاصة التجميعية
نجد A م.أ.م لـ $(C,3)$ $(E,-2)$ $(B,-2)$ $(D,3)$

I منتصف $[CD]$ ⇐ I م.أ.م لـ $(C,3)$ $(D,3)$
J منتصف $[EB]$ ⇐ J م.أ.م لـ $(B,-2)$ $(E,-2)$
وحسب الخاصة التجميعية نجد أن
A م.أ.م لـ $(I,6)$ $(J,-4)$
إنشاء A: $\vec{AI}=\frac{-4}{6}\vec{AJ}$
$\vec{AI}=-2\vec{AJ}$

ملاحظة: لتحديد مركز الأبعاد المتناسبة:
① إثبات وقوع نقاط على استقامة واحدة.
② إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد.
③ إثبات تقاطع مستقيمات في نقطة واحدة.

[3] ABCD رباعي وجوه مركز ثقله G
وليكن K مركز ثقل المثلث BCD
أثبت أن G، A، K تقع على استقامة واحدة.
وعين موضع G على $[AK]$
الحل: G م.أ.م لـ $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$
K م.أ.م لـ $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$
وحسب الخاصة التجميعية G م.أ.م لـ $(k,3)$ $(A,1)$
⇐ G، A، K على استقامة واحدة.
$\vec{AG}=\frac{3}{4}\vec{AK}$

المادة..........

2

ABCD رباعي وجوه و α عدد حقيقي

I , J منتصفا $[AB]$, $[CD]$

E , F تحققان $\vec{AE}=\alpha\vec{AD}$, $\vec{BF}=\alpha\vec{BC}$

H منتصف $[EF]$

① أثبت أن H , I , J على استقامة واحدة.

② M تحقق العلاقة $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{DA}$

أثبت أن النقاط M , B , C , D تقع في مستوٍ واحد. ثم عين موضع النقطة M.

الحل ①: $\vec{AE}=\alpha\vec{AD} \Leftarrow$ E م.م.م لـ (D,α) $(A,1-\alpha)$

$\vec{BF}=\alpha\vec{BC} \Leftarrow$ F م.م.م لـ (C,α) $(B,1-\alpha)$

H منتصف $[EF] \Leftarrow$ H م.م.م لـ $(E,1)$ $(F,1)$

وحسب الخاصة التجميعية H م.م.م للنقاط (D,α) $(A,1-\alpha)$ (C,α) $(B,1-\alpha)$

I منتصف $[AB] \Leftarrow$ I م.م.م لـ $(A,1-\alpha)$ $(B,1-\alpha)$

J منتصف $[CD] \Leftarrow$ J م.م.م لـ (C,α) (D,α)

$\Leftarrow$ حسب الخاصة التجميعية H م.م.م لـ

$\Leftarrow$ H , I , J على استقامة واحدة.

② من العلاقة: $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{DA}$

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{DM}+\vec{MA}$

$\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}=\vec{0}$

$\Leftarrow$ M م.م.م لـ $(D,1)$ $(C,1)$ $(B,1)$

$\Leftarrow$ النقاط M , B , C , D في مستوٍ واحد.

إنشاء M: نفرض I م.م.م لـ $(D,1)$ $(C,1)$

$\Leftarrow (I,2)$

حسب الخاصة التجميعية M م.م.م لـ $(I,2)$ $(B,1)$

$\vec{IM}=\frac{1}{3}\vec{IB}$

3

ABCD رباعي وجوه , $x\in]0,1[$

P , Q , R , S نقاط تحقق

$\vec{AP}=x\vec{AB}$, $\vec{AQ}=x\vec{AD}$

$\vec{CS}=x\vec{CB}$, $\vec{CR}=x\vec{CD}$

I , J منتصفا القطرين $[AC]$, $[BD]$

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) (PR) (QS) في نقطة واحدة.

الحل: من العلاقات نجد:

P م.م.م لـ (B,x) $(A,1-x)$

Q م.م.م لـ (D,x) $(A,1-x)$

S م.م.م لـ (B,x) $(C,1-x)$

R م.م.م لـ (D,x) $(C,1-x)$

G م.م.م للنقاط (B,x) $(A,1-x)$ (D,x) $(C,1-x)$

وحسب الخاصة التجميعية

G م.م.م لـ $(P,1)$ $(R,1)$ $\Leftarrow$ G تنتمي لـ $[RP]$

G م.م.م لـ $(Q,1)$ $(S,1)$ $\Leftarrow$ G تنتمي لـ $[QS]$

وللمرين I منتصف $[AC] \Leftarrow$ I م.م.م لـ $(A,1-x)$ $(C,1-x)$

J منتصف $[BD] \Leftarrow$ J م.م.م لـ (B,x) (D,x)

$\Leftarrow$ G م.م.م لـ $(I,2-2x)$ $(J,2x)$

$\Leftarrow G\in[IJ]$

مما سبق نجد أن G نقطة تلاقي المستقيمات (QS) (PR) (IJ)

KHATIB Institute

الخطيب للغات والتعليم

المادة..........

مسائل مجموعة النقاط:

$\boxed{1}$ لتكن النقاط $A(1,-1,2)$, $B(2,1,0)$, $C(2,3,-1)$, $D(0,0,2)$ والمطلوب:

① عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,2)$, $(D,1)$

② حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$

③ جد معادلة المجموعة S.

الحل: ① $x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}$

$x_G=\dfrac{(1)(1)+(2)(2)+(2)(2)+(1)(0)}{1+2+2+1}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

$y_G=\dfrac{-1+2+6+0}{6}=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$

$z_G=\dfrac{2+0-2+2}{6}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow G\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{3}\right)$

② $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MG}$

حسب خاصة الاختزال

$\Rightarrow \|6\overrightarrow{MG}\|=6\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=1$

مجموعة النقاط M كرة مركزها G ونصف قطرها 1

③ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=1$

$\boxed{2}$ $ABCD$ رباعي وجوه مركز ثقل المثلث BCD هو G ، جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق

$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$

الحل: G مركز ثقل المثلث $(BCD)\Leftarrow G$ م.م.ل للنقاط $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$

$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$

$=3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{GM}=3\overrightarrow{GA}$

$\Rightarrow\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{GA}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA

$\boxed{3}$ في الفراغ المنسوب لمعلم متجانس النقاط A , B , C , D ، J منتصف $[BD]$

I تحقق $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

H م.م.ل للنقاط $(A,2)$ $(B,3)$ $(C,1)$ $(D,2)$

① أثبت أن H , J , I على استقامة واحدة.

② أوجد مجموعة النقاط M التي تحقق:

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\|$

الحل: من العلاقة: $4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$4\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}$

$2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\Rightarrow\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=0$

$\Leftarrow I$ م.م.ل لـ $(B,1)$ $(C,1)$ $(A,2)$

J منتصف $[BD]\Leftarrow J$ م.م.ل لـ $(B,1)$ $(D,1)$

وحسب الخاصة التجميعية H م.م.ل لـ $(I,4)$ $(J,2)$

$\Leftarrow H$, I , J على استقامة واحدة.

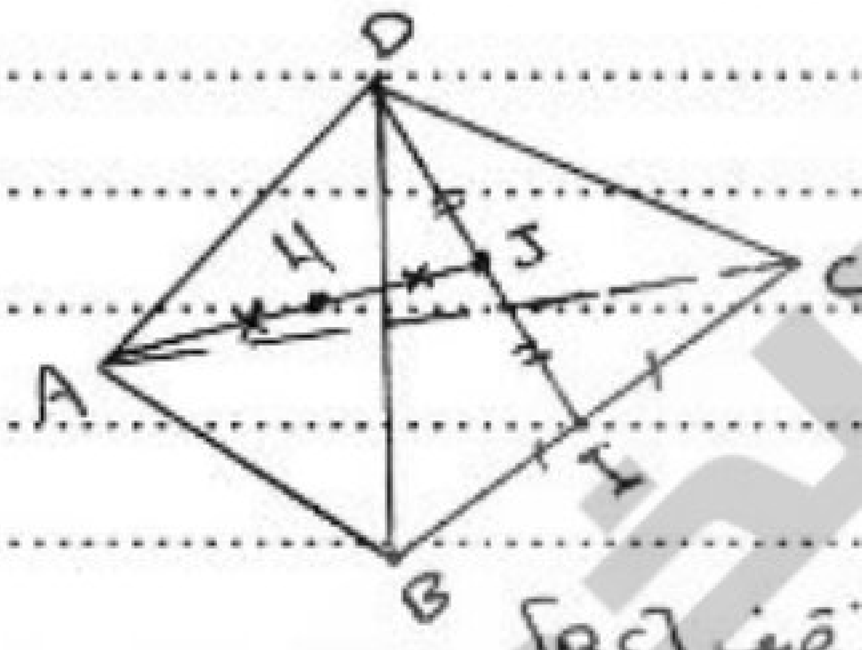
② $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MI}$

$2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MJ}$

$\Rightarrow\|4\overrightarrow{MI}\|=\|4\overrightarrow{MJ}\|$

$\Rightarrow\|\overrightarrow{MI}\|=\|\overrightarrow{MJ}\|$

1 انطلاقاً من الشكل المجاور جد الأمثال α , β , γ , δ لتكون K م.م.م للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ)



من الشكل I منتصف $[BC]$

$\Leftarrow$ I م.م.م لـ (B,β) (C,γ)

$\boxed{\beta=\gamma} \Rightarrow (I, 2\beta)$

J منتصف $[ID] \Leftarrow$ J م.م.م لـ $(I,2\beta)$ (D,δ)

$\Rightarrow \boxed{\delta = 2\beta} \Rightarrow (J, 4\beta)$

H منتصف $[AJ] \Leftarrow$ H م.م.م لـ (A,α) $(J,4\beta)$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 4\beta}$

K م.م.م لـ (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ)

$\Rightarrow \alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} + \gamma\overrightarrow{KC} + \delta\overrightarrow{KD} = \vec{0}$

$4\beta\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} + \beta\overrightarrow{KC} + 2\beta\overrightarrow{KD} = \vec{0}$

$\boxed{\div \beta \neq 0} \Rightarrow 4\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} = \vec{0}$

$\Leftarrow (A,4)$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,2)$

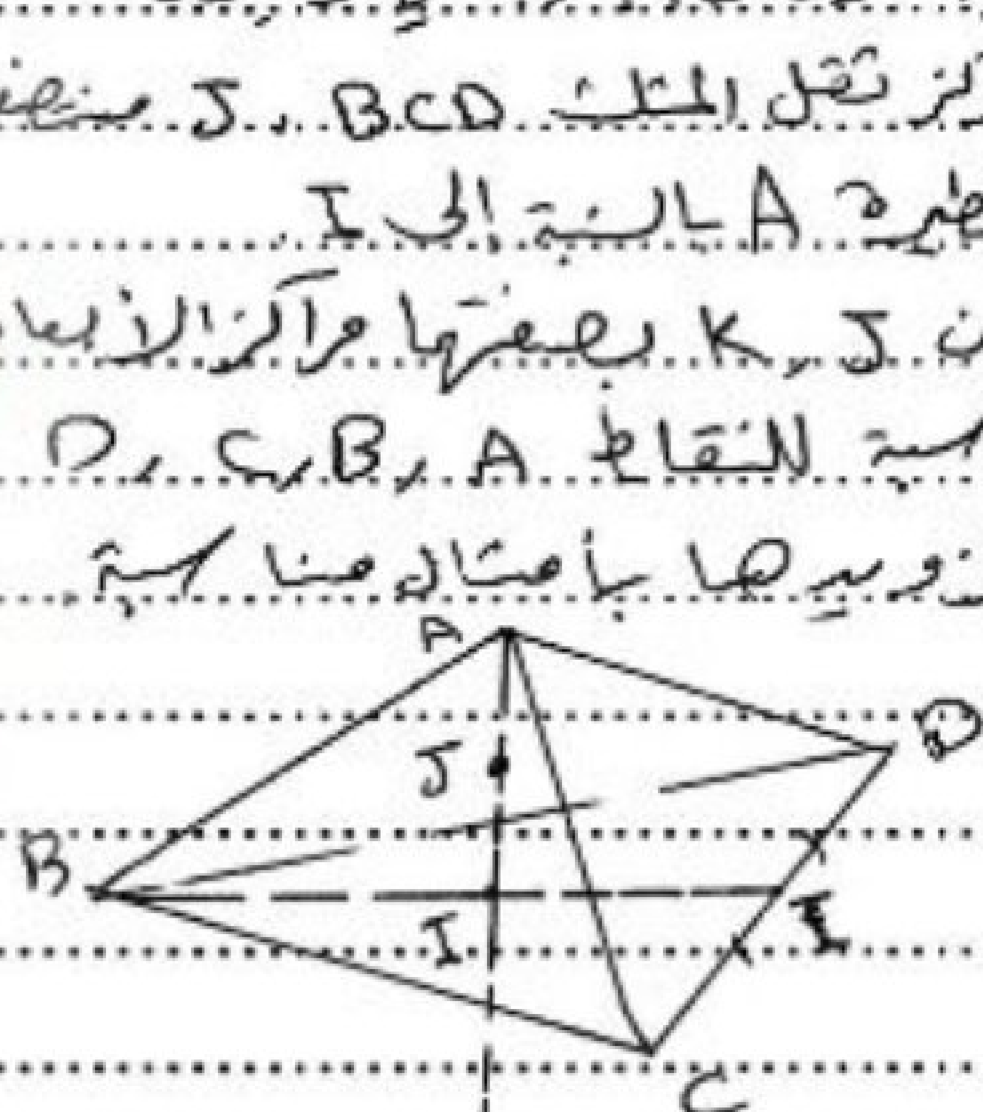
---

2 ABCD رباعي وجوه

I مركز ثقل المثلث BCD , J منتصف $[AI]$

K نظيرة A بالنسبة إلى I.

عبّر عن J , K بصفتها مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A , B , C , D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.



I مركز ثقل المثلث BCD $\Leftarrow$ I م.م.م للنقاط $(B,\beta)(C,\gamma)(D,\delta)$

$\beta=\gamma=\delta \Rightarrow (I, 3\gamma)$

وإذا كانت J م.م.م للنقاط الأربع فهي م.م.م للنقطتين $(I,3\gamma)$ (A,α)

J منتصف $[IA] \Leftarrow \alpha = 3\gamma$

$\Leftarrow \alpha\overrightarrow{JA} + \beta\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} + \delta\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

$3\gamma\overrightarrow{JA} + \gamma\overrightarrow{JB} + \gamma\overrightarrow{JC} + \gamma\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$

② K م.م.م للنقاط $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$ (A,α)

$\Leftarrow$ K م.م.م لـ $(I,3)$ (A,α)

$\alpha\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

لكن $\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{KI}$ حسب الفرض

$\Rightarrow \overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KI} = \vec{0}$

$(A,1)$ $(I,-2)$

$\Leftarrow$ ثقل I = ثقل A $\times -2$

$\Rightarrow 3 = -2\alpha$

$\alpha = -\frac{3}{2}$

ومنه K م.م.م لـ $(A,-\frac{3}{2})$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$

[15]

تأمل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(0,0,0)$ و $B(1,0,0)$ و $C(0,1,0)$ و $D(2,1,1)$ و $E(2,0,0)$

① جد إحداثيات F

② جد مركبات الأشعة $\vec{BE}, \vec{EF}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{AB}$

③ علل الارتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$

④ أثبت أن المثلث ABE قائم

⑤ ~~[illegible]~~

⑥ هل النقاط A, B, E, F تقع في مستوٍ واحد

[16] عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$

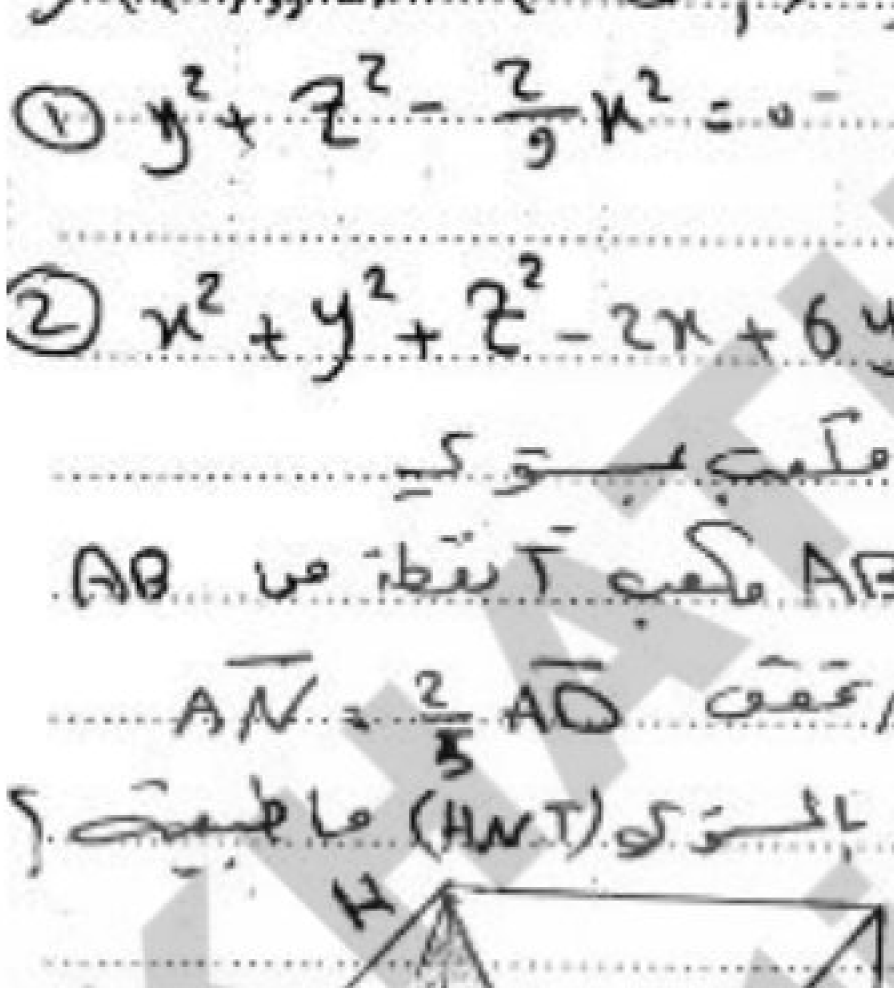
① $y^2+z^2-\frac{2}{9}x^2=0 \quad : 0\le x\le 3$

② $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

مسألة 2: مقطع مكعب بمستوٍ

[17] ABCDEFGH مكعب T نقطة من AB تحقق $\vec{AT}=\frac{2}{3}\vec{AB}$ و N تحقق $\vec{AN}=\frac{2}{3}\vec{AD}$

اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT) ما طبيعته؟



الحل: نمدد (NT) ونمدد (CB) يتقاطعان في S ثم نرسم من S موازياً لـ (NT) هو (SF)

⇐ F نقطة من المقطع

الحرف (NT) محتوى في المستوي (HNT) ⇐ (ABCD)

مستوٍ يقطع الوجه EFGH بفاصل مشترك يوازي الحرف NT وهو (HF)

[17] بالاستفادة من المعلومات المبينة بالشكل عيّنة الأعداد a, b, c, d ليتحقق ما يلي

① K مركز أبعاد (A,a) (D,d)

② I مركز أبعاد (B,b) (C,c)

③ G مركز أبعاد (A,a) (B,b) (C,c) (D,d)

الحل: من الشكل

I منتصف [BC]

⇐ I مركز أبعاد (B,b) (C,c)

$\Rightarrow \boxed{b=c} \Rightarrow (I,2b)$

ومن الشكل: $\vec{AK}=\frac{1}{3}\vec{AD} \Rightarrow (D,1)\ (A,2)$

ثقل A ضعفي ثقل D : $a=2d \Leftarrow (K,3d)$

$\vec{KG}=\frac{3}{5}\vec{KI} \Rightarrow$ G مركز أبعاد $(K,2)\ (I,3)$

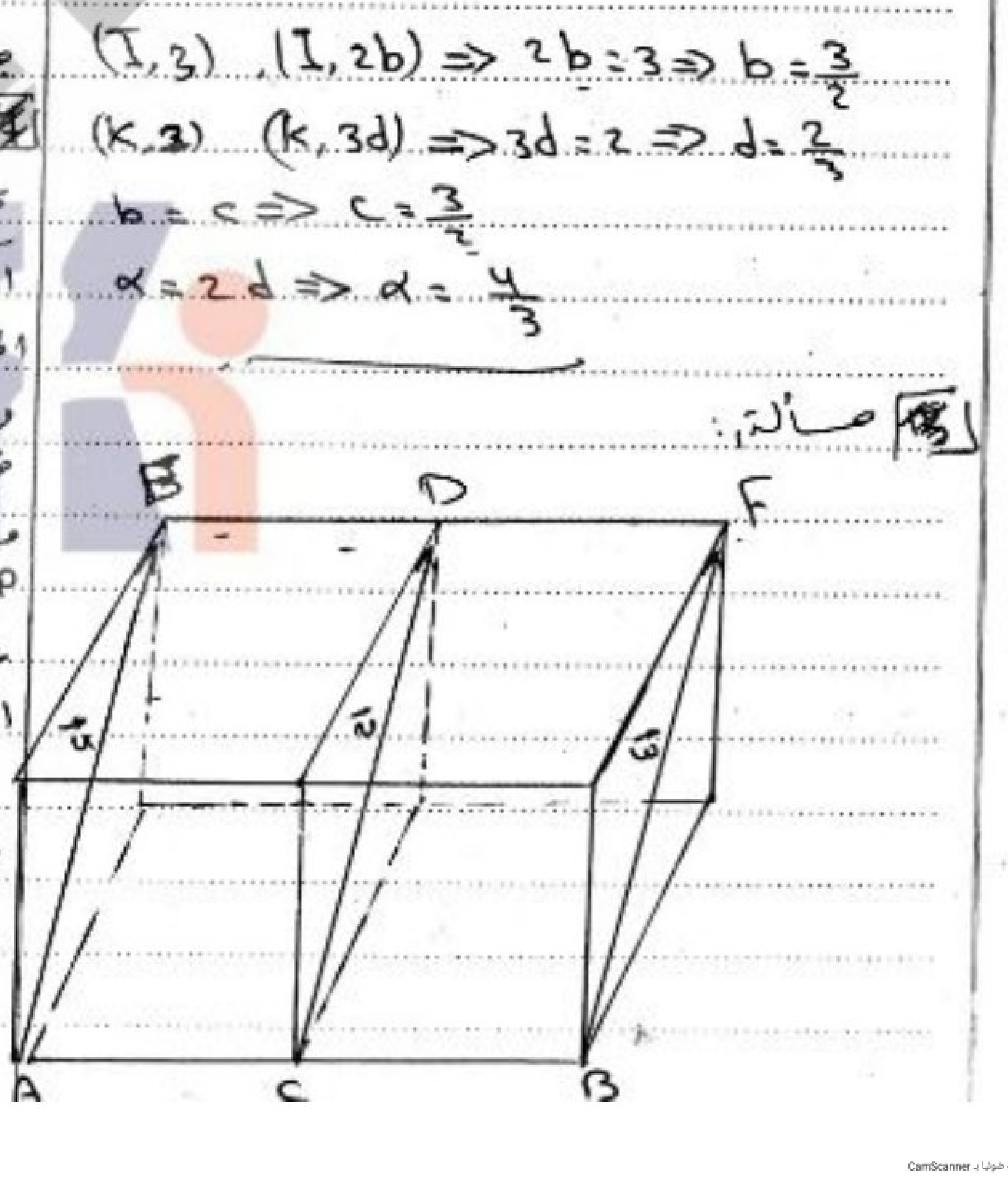
$(I,3) \quad (I,2b) \Rightarrow 2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$

$(K,2) \quad (K,3d) \Rightarrow 3d=2 \Rightarrow d=\frac{2}{3}$

$b=c \Rightarrow c=\frac{3}{2}$

$a=2d \Rightarrow a=\frac{4}{3}$

[18] مسألة:



F نقطة تنتمي إلى المستويين (HNT) (ABEF)

T نقطة تنتمي إلى المستويين (HNT) (ABEF)

⇐ (FT) هو فصل مشترك للمستويين

⇐ المقطع هو NTFH

وهو شبه منحرف متساوي الساقين

لأن $NT \parallel HF$

ملاحظة: أوضاع ثلاث مستويات في الفراغ:

بالاستعانة بطريقة [illegible] حل جملة 3 معادلات

تمرين:

[1] عيّن أوضاع المستويات

$P_1: 2x - y + 3z = 0$

$P_2: x + 2y + z = 0$

$P_3: 3x - 4y + 5z = 0$

[2] $P_1: 2x - y + 3z = 2$

$P_2: x + 2y + z = 1$

$P_3: 3x - 4y + 5z = 4$

[3] $P_1: 2x - y + 3z = 0$

$P_2: x + 2y + z = 0$

$P_3: 3x - 4y + 5z = 0$

الأعداد العقدية

الشكل الجبري: $Z = a + ib$

يمثل هندسياً بالنقطة $M(x,y)$

أو بالشعاع $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$

حيث $(O, \vec{u}, \vec{v})$ مستوي عقدي

* مرافق العدد العقدي:

نعاكس القسم التخيلي فقط $\bar{Z} = a - ib$

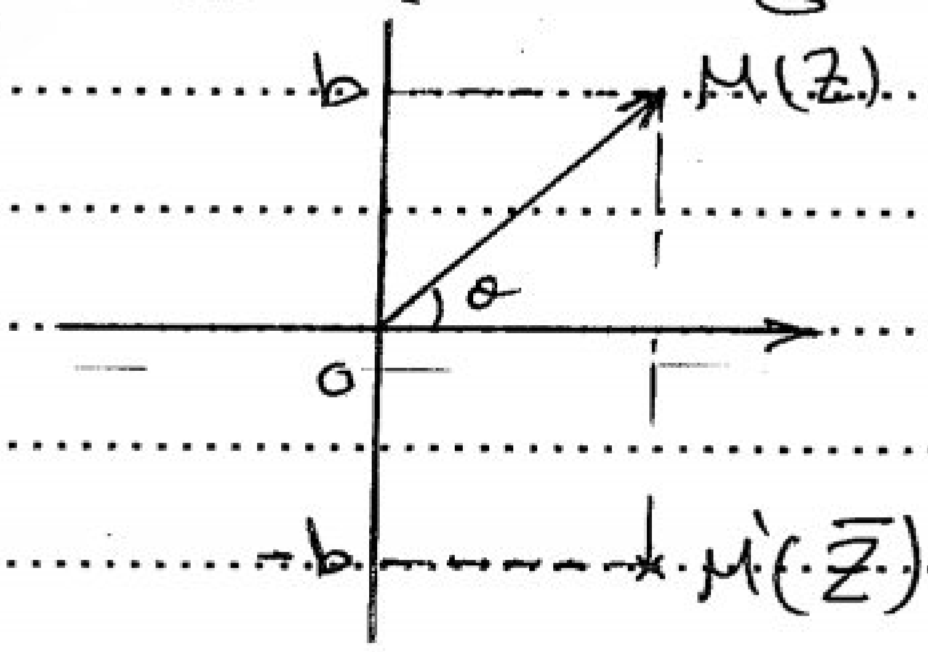
يمثل هندسياً بالنقطة $M'(a,-b)$

حيث M, M' متناظرتين بالنسبة للمحور $x'x$

* طويلة العدد العقدي

يمثل طويلة الشعاع $\vec{OM}$: $r = \sqrt{a^2+b^2}$

ويصنع الشعاع $\vec{OM}$ زاوية θ مع محور الفواصل



العمليات على الأعداد العقدية بالشكل الجبري:

[1] الجمع والطرح: نجمع ونطرح القسم الحقيقي مع القسم الحقيقي والتخيلي مع التخيلي

[2] الضرب: هو عملية نشر حيث $i^2=-1$

[3] القسمة: هي عملية إزالة i من المقام أي نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

تمرين [1]: ليكن لدينا
$Z_1 = -3+2i$
$Z_2 = 2+i$

أوجد كلاً مما يلي: $-Z_1, \; |Z_2|, \; \bar{Z}_1, \; Z_1+Z_2$

$Z_1 - Z_2, \; Z_1 \times Z_2, \; \frac{Z_1}{Z_2}, \; \frac{1}{Z_2}$

تمرين [2]: اكتب بالشكل الجبري كلاً من الأعداد

① $Z_1 = (1+i)^6$

② $Z_2 = \left(\frac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\frac{1+3i}{3+2i}\right)$

③ $Z_3 = \frac{\cos x + i\sin x}{\cos x - i\sin x}$

* خواص مرافق عدد عقدي:

ليكن Z, Z' عددان عقديان عندئذٍ:

① $\overline{(Z+Z')} = \bar{Z} + \bar{Z'}$

② $\overline{(Z \cdot Z')} = \bar{Z} \cdot \bar{Z'}$

③ $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z'}}$

④ $\overline{(Z^n)} = (\bar{Z})^n$

⑤ $\overline{(\bar{Z})} = Z$

⑥ $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$

⑦ $\bar{Z} = Z \Leftrightarrow$ Z حقيقي

⑧ $\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow$ Z تخيلي بحت

تمرين [3]: اكتب بدلالة $\bar{Z}$ مرافق كلاً من الأعداد

① $W = \frac{3Z^2 - 2iZ + 4}{2Z - 3i}$

تمرين [4]: ليكن Z, Z' عددين عقديين أثبت أن:

$|Z+Z'|^2 + |Z-Z'|^2 = 2|Z|^2 + 2|Z'|^2$

الشكل المثلثي لعدد عقدي:

$$Z = a + ib$$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{a}{r}\\ \sin\theta = \frac{b}{r}\end{array}\right\} \Rightarrow \arg(Z) = \theta \ (2\pi)$$

$$\Rightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

العمليات على الشكل المثلثي:

ليكن Z طويلته r وزاويته θ

Z' طويلته r' وزاويته θ'

$\boxed{1}$ $Z Z' = r r'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$

$\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')$

$\boxed{2}$ $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}\left(\cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta')\right)$

$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')$

$\boxed{3}$ $Z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

$\boxed{4}$ حالة خاصة $r = 1$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

دستور دوموافر.

تمرين $\boxed{5}$ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد:

1) $Z_1 = (1 - i\sqrt{3})^6$

2) $Z_2 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}\right)^8$

3) $Z_3 = (1+i)^{2016}$

4) $Z_4 = -2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

5) $Z_5 = 2\left(-\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

6) $Z_6 = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$

تمرين $\boxed{6}$: ليكن $Z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $Z_2 = 1 - i$

1) اكتب Z_1 , Z_2 , $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل المثلثي

2) اكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ بالشكل الجبري

3) استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$

الحل:

$Z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$r_1 = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta_1 = \frac{a}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\end{array}\right| \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

في الربع الرابع

$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$Z_2 = 1 - i \Rightarrow Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

الشكل المثلثي: $\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}}$

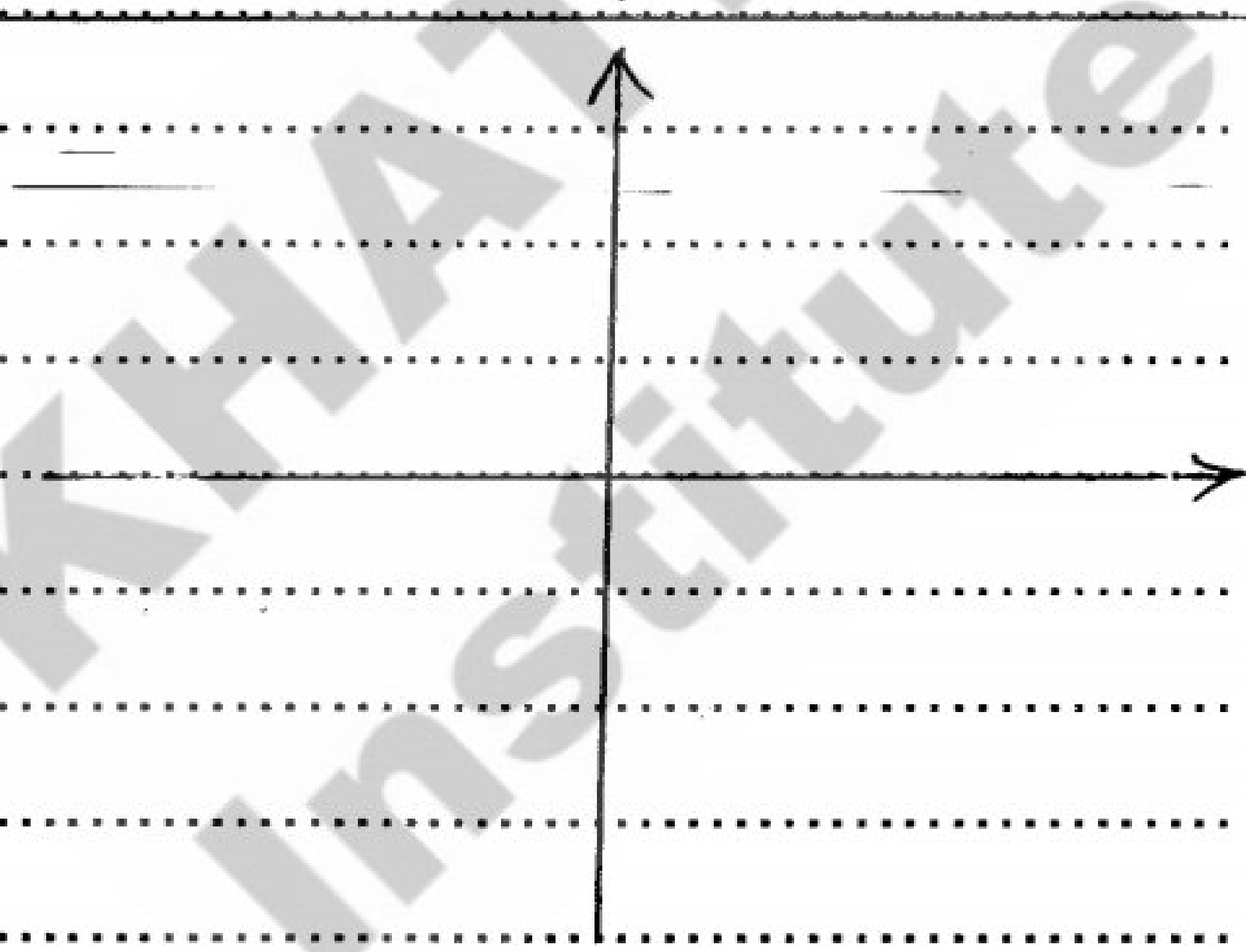
2) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i}$

الشكل الجبري: $\boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \underbrace{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}_{a} + \underbrace{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}_{b}i}$

3) من الشكلين الجبري والمثلثي نجد:

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{a}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{b}{r} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{1} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



الشكل الأسي لعدد عقدي:

$Z = a+ib \Rightarrow Z = re^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (1)

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ (2)

ليكن $Z = re^{i\theta}$ ، $Z' = r'e^{i\theta'}$

(1) $ZZ' = r r' e^{i(\theta+\theta')}$

(2) $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$

(3) $Z^n = r^n (e^{in\theta})$

(4) $Z = Z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2\pi K \end{cases}$

تمرين $\boxed{7}$: اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد

(1) $Z_1 = (1+i\sqrt{3})^4 e^{\frac{4\pi}{3}i}$

(2) $Z_2 = (1-\sqrt{2})(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

(3) $Z_3 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{i}\right)^5$

دستورا أويلر:

نجمع (1) و (2) $\Leftarrow$ $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

نطرح (1) و (2) $\Leftarrow$ $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

تمرين $\boxed{8}$: اكتب $Z = e^{\frac{\pi}{3}i} + 1$ بالشكل الأسي

الحل: نخرج $e^{(\text{نصف الزاوية})}$ عامل مشترك

$Z = e^{\frac{\pi}{6}i}(e^{\frac{\pi}{6}i} + e^{-\frac{\pi}{6}i})$

↓ أويلر

$Z = e^{\frac{\pi}{6}i}(2\cos\frac{\pi}{6}) = \underbrace{2\cos\frac{\pi}{6}}_{\text{موجب}} e^{\frac{i\pi}{6}}$

تمرين $\boxed{9}$ ليكن $Z = i(e^{i2\theta} - 1)$

$\theta \in]-\pi, 0[$ اكتب Z بالشكل الأسي

الحل:

$Z = ie^{i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = ie^{i\theta}(2i\sin\theta)$

$= 2i^2 \sin\theta . e^{i\theta} = \underbrace{-2\sin\theta}_{} . e^{i\theta}$

موجب على $]-\pi,0[$

حل معادلات في $\mathbb{C}$:

$\boxed{1}$ معادلة من الشكل: $aZ^2+bZ+c=0$

أمثال حقيقية $a,b,c \in \mathbb{R}$

نستخدم $\Delta = b^2-4ac$ لتمييز الحالات

$\boxed{A}$ $\Delta>0 \Rightarrow Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\boxed{B}$ $\Delta<0 \Rightarrow Z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad Z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

جذران مترافقان $Z_2 = \overline{Z_1}$

$\boxed{C}$ $\Delta=0 \Rightarrow Z_1=Z_2 = \frac{-b}{2a}$

تمرين $\boxed{10}$ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

$Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$\Delta = 16 - 4(1)(5) = -4 < 0$

للمعادلة جذران عقديان مترافقان.

$Z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4+i\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2i}{2}$

$= 2+i$

$\Rightarrow Z_2 = \overline{Z_1} = 2-i$

[2] حل معادلة من الشكل $w^2 = Z$

أو: الجذر التربيعي لـ Z

الحل: نقوم بحل المعادلات:

$a^2 - b^2 =$ الحقيقي (1)

$a^2 + b^2 =$ الطويلة (2)

$2ab =$ التخيلي (3)

نوجد a, b من (1) و (2)

ومن (3) نجد: $a.b > 0 \Rightarrow$ a, b من نفس الإشارة

$a.b < 0 \Rightarrow$ a, b من إشارتين مختلفتين

$w_1 = a_1 + ib_1$, $w_2 = a_2 + ib_2$

تمرين [11]: لتكن $Z = 3 + 4i$

أوجد الجذر التربيعي لـ Z أو حل المعادلة $w^2 = Z$

$a^2 - b^2 = 3$ (1)

$a^2 + b^2 = 5$ (2)

$2ab = 4$ (3)

نجمع (1) و (2): $2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4$ ، $a_1 = 2$ ، $a_2 = -2$

نطرح (1) و (2): $2b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 1$ ، $b = 1$ ، $b = -1$

من (3) نجد: $a.b > 0 \Leftarrow$ a, b لهما نفس الإشارة

$\Rightarrow w_1 = 2 + i$, $w_2 = -2 - i$

[3] المعادلة من الشكل:

$aZ^2 + bZ + C = 0$

a, b, c غير حقيقية

تمرين [12]: حل المعادلة

$2iZ^2 + (3+7i)Z + 4 + 2i = 0$

$\Delta = (3+7i)^2 - 4(2i)(4+2i)$

$= 9 + 42i - 49 - 32i + 16$

$\Delta = -24 + 10i$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-24 + 10i}$

$a^2 - b^2 = -24$ (1)

$a^2 + b^2 = \sqrt{676} = 26$ (2)

$2ab = 10$ (3)

نجمع (1) و (2) $\Leftarrow$ $2a^2 = 2 \Rightarrow a^2 = 1$ ، $a = 1$ ، $a = -1$

نطرح (1) و (2) $\Leftarrow$ $2b^2 = 50 \Rightarrow b^2 = 25$ ، $b = 5$ ، $b = -5$

من (3) نجد: $a.b > 0 \Leftarrow$ a, b لهما نفس الإشارة

$w_1 = 1 + 5i$

$w_2 = -1 - 5i$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} , \quad Z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

تمرين هام [13]: لتكن العدد العقدي $Z = 1 + i$ والمطلوب:

(a) اكتب Z بالشكل الأسي

(b) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد Z بالطريقة الجبرية

(c) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد Z بالطريقة الأسية

(d) استنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{9\pi}{8}$

الحل:

(a) $Z = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4} i}$

(b) $w^2 = Z$ الجذر التربيعي لـ Z حيث $w = a + ib$

نحل المعادلات

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$w_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$w_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

(c) نفرض $w = r e^{i\theta}$

$(r e^{i\theta})^2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow r^2 e^{2\theta i} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow r^2 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{\sqrt{2}}$

$2\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + \pi k$

$k = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \Rightarrow w_1 = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{\frac{\pi}{8} i}$

$k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{9\pi}{8} \Rightarrow w_2 = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{\frac{9\pi}{8} i}$

$$\Rightarrow \cos\frac{9\pi}{8} = \frac{a}{r} = \frac{-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

تمرين [14]: ليكن العددين Z , u يحققان
$|Z|=1$, $|u|=1$, $Z.u \neq -1$

أثبت أنه $A=\frac{iu+iZ}{1+Zu}$ تخيلي بحت

الحل: $|Z|=1 \Rightarrow Z.\bar{Z}=|Z|^2=1$

$\Rightarrow \bar{Z}=\frac{1}{Z}$

$|u|=1 \Rightarrow \bar{u}=\frac{1}{u}$

لنثبت أنه $\bar{A}=-A$

$\bar{A}=\frac{-i\bar{u}-i\bar{Z}}{1+\bar{Z}\bar{u}}=\frac{-\frac{i}{u}-\frac{i}{Z}}{1+\frac{1}{Z}\frac{1}{u}}$

$=\frac{\frac{-iZ-iu}{uZ}}{\frac{Zu+1}{Zu}}=\frac{-iZ-iu}{uZ+1}=-A$

$\Leftarrow A$ تخيلي بحت

تمرين [15]: ليكن لدينا: $\alpha=e^{\frac{2\pi}{7}i}$

ولدينا $A=\alpha+\alpha^6$

a) أثبت أنه: $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=0$

b) عبّر عن A بدلالة $\cos\frac{2\pi}{7}$

الحل: a) مجموع الحدود متتالية هندسية $a=1$

$q=\alpha$ وعدد الحدود $n=7$

$S=1\left[\frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}\right]=\frac{1-e^{2\pi i}}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}=\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi}{7}i}}=0$

b) $A=\alpha+\alpha^6=e^{\frac{2\pi}{7}i}+e^{\frac{12\pi}{7}i}$

$=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+i\sin\frac{12\pi}{7}$

$\frac{12\pi}{7}=\frac{14\pi-2\pi}{7}=2\pi-\frac{2\pi}{7}$

$A=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos(2\pi-\frac{2\pi}{7})+i\sin(2\pi-\frac{2\pi}{7})$

$A=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}-i\sin\frac{2\pi}{7}$

$A=2\cos\frac{2\pi}{7}$

تمرين [16]: هام!

جد عددين عقديين b , c التي تقبل المعادلة

$Z^2+bZ+c=0$

العددين $1+2i$ و $3-5i$ حلين لها

الحل: نعلم أنه إذا كانت المعادلة

$aZ^2+bZ+c=0$

جذريها Z_1 , Z_2 ⇐

$Z_1+Z_2=\frac{-b}{a}$ (1)

$Z_1.Z_2=\frac{c}{a}$ (2)

من (1) نجد $4-3i=\frac{-b}{1}\Rightarrow \boxed{b=-4+3i}$

من (2) نجد: $13+i=\frac{c}{1}\Rightarrow \boxed{c=13+i}$

لتعيين مجموعة النقاط والأعداد.

① في كل من الحالات الآتية عين مجموعة النقاط M التي تحققه:

① $\arg Z = \frac{\pi}{3}$ نصف مستقيم يصنع مع ox زاوية $\theta = \frac{\pi}{3}$

② $Im(Z) = 1$ مستقيم $y = 1$ يوازي xx'

③ $Re(Z) = -2$ مستقيم $x = -2$ يوازي yy'

② عين مجموعة الأعداد العقدية Z التي تحقق الشرط: $w = (Z+1)(\bar{Z}-2)$ حقيقي

الحل: بما w حقيقي $\Longleftrightarrow \bar{w} = w$

$\bar{w} = (\bar{Z}+1)(Z-2)$

$\Rightarrow (\bar{Z}+1)(Z-2) = (Z+1)(\bar{Z}-2)$

$Z\bar{Z} - 2\bar{Z} + Z - 2 = Z\bar{Z} - 2Z + \bar{Z} - 2$

$-3\bar{Z} + 3Z = 0 \Rightarrow Z = \bar{Z}$

وتمثل مجموعة الأعداد الحقيقية أي المحور xx' ومعادلة $y = 0$

③ لتكن النقطتان A, B تمثلها الأعداد $a = 1$ ، $b = 3+2i$

عين مجموعة النقاط $M(Z)$ في كل من الحالات:

① $|Z| = 3$

نفرض $Z = x+iy$

$|x+iy| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 9$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 9$ تمثل دائرة مركزها $(0,0)$ ، $R = 3$

② $|Z-3-2i| = 1$

$MA = 1$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $R = 1$

③ $|Z-1| = |Z-3-2i|$

$MA = MB$ تمثل المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

أو نقوم بتعويض $Z = x+iy$ واستنتاج المعادلة

④ $|Z-1|^2 = 2|Z|^2$

$Z = x+iy \Longleftarrow |x+iy-1|^2 = 2|x+iy|^2$

$|x-1+iy|^2 = 2|x+iy|^2$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$

$(x-1)^2+y^2 = 4x^2+4y^2$

$x^2-2x+1+y^2 = 4x^2+4y^2$

$3x^2+3y^2+2x-1 = 0$

بعد الاتمام لمربع: $(x+\frac{2}{3})^2+y^2 = \frac{5}{9}$

تمثل دائرة

4 ليكن $Z = x^2+y^2-9+i(x-y)$

① عين مجموعة النقاط $M(Z)$ كي يكون Z حقيقي

② = = = = = Z تخيلي بحت

الحل:

Z حقيقي $\Longleftarrow Im(Z) = 0 \Longleftarrow x-y = 0$

$\Longleftarrow y = x$ يمثل منصف الربع الأول والثالث

Z تخيلي $\Longleftarrow Re(Z) = 0 \Longleftarrow x^2+y^2-9 = 0$

$\Longleftarrow x^2+y^2 = 9$ تمثل دائرة

5 نقرن $M(Z)$ بالنقطة $M'(Z')$ حيث

$Z' = \frac{Z+2}{Z-i}$

① عين Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها Z' حقيقي

② عين D = = = = Z' تخيلي بحت

الحل: نكتب Z' بالشكل الجبري بعد تعويض $Z = x+iy$

$Z' = \frac{x^2+y^2+2x-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{(x-2y-2)}{x^2+(y-1)^2}$

① Z' حقيقي $\Longleftarrow x-2y-2 = 0$

② Z' تخيلي $\Longleftarrow x^2+y^2+2x-y = 0$

نتمم لمعرفة مجموعة النقاط

المادة.........

مسائل كثيرات الحدود.

1. لتكن $P(Z) = Z^3 - 5Z^2 + 9Z - 5$

① تحقق أن $P(1) = 0$

② استنتج أن $P(Z) = (Z-1)\,Q(Z)$

③ حل المعادلة $P(Z) = 0$

④ مثل جذور المعادلة واثبت أنها تشكل رؤوس مثلث قائم ومتساوي الساقين

الحل: ① $P(1) = 1 - 5 + 9 - 5 = 0$

② باستخدام القسمة الإقليدية على $Z-1$

$P(Z) = (Z-1)(Z^2 - 4Z + 5)$

③

$P(Z) = 0 \Longrightarrow$ إما: $Z = 1$

أو: $Z^2 - 4Z + 5 = 0$

$Z_1 = 2 + i \ , \ Z_2 = 2 - i$

④ $A(1,0) \quad B(2,1) \quad C(2,-1)$

$AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$BC = \sqrt{0+4} = 2$

$\Leftarrow AB = AC$ مثلث متساوي الساقين

وحسب عكس فيثاغورث $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$4 = 2 + 2$

$\Leftarrow$ قائم ومتساوي الساقين

1. لتكن $Z^4 - 6Z^3 + 24Z^2 - 18Z + 63 = 0$

① اثبت إذا كان Z_0 جذر للمعادلة فإن $\bar{Z}_0$ جذر أيضاً

② تحقق أن $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة وماذا تستنتج

③ حل المعادلة ولتكن A , B , C , D تمثل حلول المعادلة أثبت أن هذه النقاط تقع على دائرة واحدة عين مركزها ونصف قطرها

الحل: ① نعوض Z_0 في المعادلة:

$Z_0^4 - 6Z_0^3 + 24Z_0^2 - 18Z_0 + 63 = 0$

نأخذ المرافق:

$\bar{Z}_0^4 - 6\bar{Z}_0^3 + 24\bar{Z}_0^2 - 18\bar{Z}_0 + 63 = 0$

$\Leftarrow \bar{Z}_0$ جذر للمعادلة

② نعوض $Z = i\sqrt{3}$ نجد أنها تحقق المعادلة

ومنه $\bar{Z} = -i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة

③ $Z = i\sqrt{3}$ حل $\Leftarrow Z^2 = -3$ حل للمعادلة

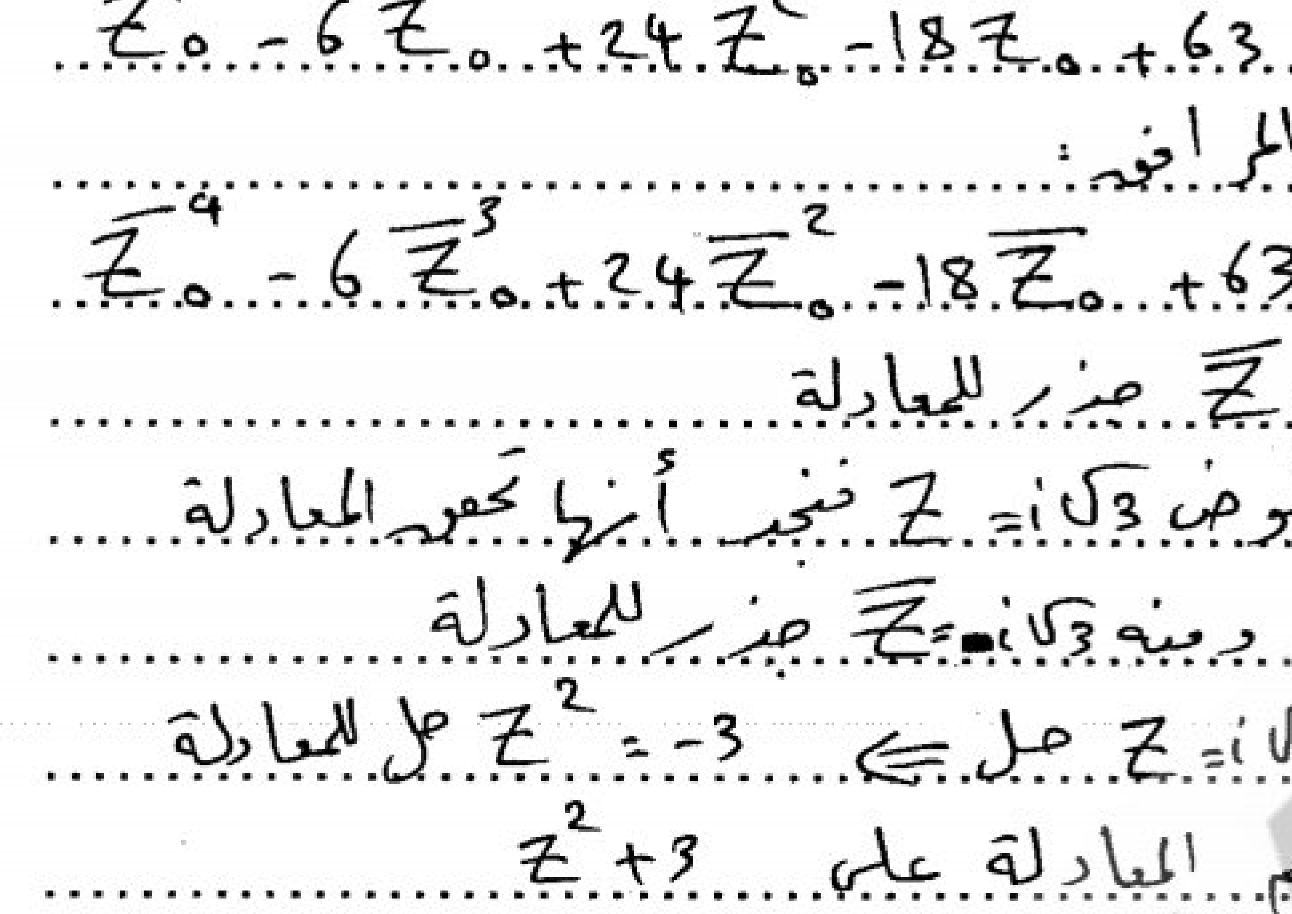
نقسم المعادلة على $Z^2 + 3$

$\Rightarrow (Z^2+3)(Z^2 - 6Z + 21) = 0$

$\Rightarrow Z^2 - 6Z + 21 = 0$

باستخدام Δ: $Z_1 = 3 + 2\sqrt{3}\,i \ , \ Z_2 = 3 - 2\sqrt{3}\,i$

ومنه $A(0,\sqrt{3}) \quad B(0,-\sqrt{3}) \quad C(3,2\sqrt{3}) \quad D(3,-2\sqrt{3})$



$ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين

مركز الدائرة المارة برؤوسه I هو منتصف القاعدة الكبرى

$I(3,0)$

$R = IC = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

2. لتكن كثير الحدود $P(Z) = Z^4 + 5Z^3 + 10Z^2 + 10Z + 4$

① عين a , b حقيقيان بحيث $P(Z) = (Z^2 + aZ + a)(Z^2 + bZ + a)$

② حل المعادلة $P(Z) = 0$ في $\mathbb{C}$

الحل: $P(Z) = Z^4 + bZ^3 + aZ^2 + aZ^3 + abZ^2 + a^2Z + aZ^2 + abZ + a^2$

بالمطابقة:

$a + b = 5$ ① $\quad 2a + ab = 10$ ②

$a^2 = 4$ ③ $\Rightarrow a = 2 \xRightarrow{①} b = 3$

$\Rightarrow a = -2$

نتحقق في ② $\Leftarrow 4 + 6 = 10$ محققة

$a = -2 \Rightarrow b = 7$ ② غير محققة

$\Leftarrow (Z^2 + 2Z + 2)(Z^2 + 3Z + 2) = 0$

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

في المستوي العقدي $(o,\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقاط A ، B ، C ، D ......

تمثل الأعداد العقدية a ، b ، c ، d

أو Z_A ، Z_B ، Z_C ، Z_D ....

① الصيغة العقدية للشعاع $\vec{AB}$

$$Z_{\vec{AB}} = b - a$$

② طويلة الشعاع $\vec{AB}$:

$$|Z_{\vec{AB}}| = |b-a|$$

③ الصيغة العقدية لمنتصف $[AB]$

$$Z_I = \frac{a+b}{2}$$

③ الصيغة العقدية لمركز ثقل المثلث ABC

$$Z_G = \frac{a+b+c}{3}$$

④ G م.م.م للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) ⇐

$$Z_G = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma}$$

تمرين $\boxed{}$: في المستوي العقدي $(o,\vec{u},\vec{v})$

النقاط A ، B ، C ممثلة بالأعداد العقدية

$a = \sqrt{3}+i$, $b = \sqrt{3}-i$, $c = -2\sqrt{3}-2i$

والمطلوب :

① أثبت أنه $a = e^{\frac{\pi}{6}i}$ واستنتج طبيعة المثلث oAB

② أثبت أنه o ، A ، C على استقامة واحدة.

③ أوجد G مركز ثقل المثلث oAB

④ عين العدد العقدي d الممثل للنقطة D

التي تجعل $oBCD$ متوازي أضلاع.

الحل :

① $a = \sqrt{3}+i$

$r = \sqrt{3+1} = 2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow Z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$|Z_{\vec{oA}}| = |a-o| = |\sqrt{3}+i| = 2$

$|Z_{\vec{oB}}| = |b-o| = |\sqrt{3}-i| = 2$

$|Z_{\vec{AB}}| = |a-b| = |\quad -2i| = 2$

المثلث oAC متساوي الساقين

② $Z_{\vec{oA}} = \sqrt{3}+i$, $Z_{\vec{oC}} = -2\sqrt{3}-2i$ $\Rightarrow Z_{\vec{oC}} = -2Z_{\vec{oA}}$

⇐ $\vec{oC}$ ، $\vec{oA}$ مرتبطين خطياً

⇐ o ، A ، C على استقامة واحدة.

③ $g = \frac{o+a+b}{3} = \frac{\sqrt{3}+i+\sqrt{3}-i}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

④ $Z_{\vec{oB}} = Z_{\vec{DC}} \Leftrightarrow$ متوازي أضلاع $oBCD$

$b - a = c - d$

$\sqrt{3}-i = -2\sqrt{3}-2i-d$

$\Rightarrow d = -3\sqrt{3}-i$

الزاوية الموجهة :

$$(\vec{AB},\vec{CD}) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \theta$$

$$\frac{d-c}{b-a}$$

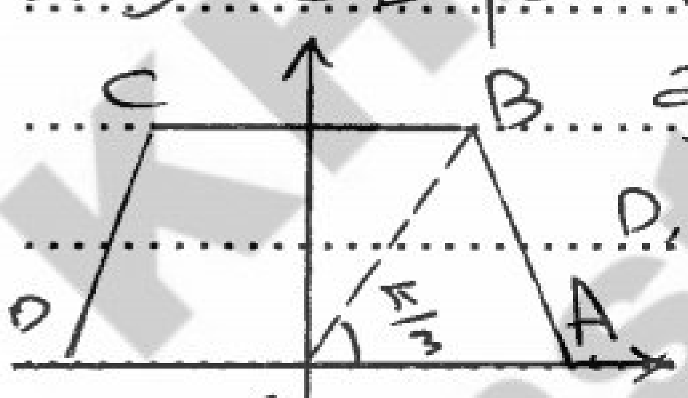
الناتج تخيلي ← موجب ⇓ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، سالب ⇓ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ⇓ يوجد تعامد

الناتج حقيقي ← موجب ⇓ $\theta = 0$ ، سالب ⇓ $\theta = \pi$ ⇓ يوجد ارتباط خطي

$$\frac{|Z_{\vec{CD}}|}{|Z_{\vec{AB}}|} = \left|\frac{d-c}{b-a}\right|$$

تمرين $\boxed{}$: نصف مسدس منتظم نصف قطره 2

ⓐ اكتب الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A,B,C,D



ⓑ احسب $\frac{a-c}{d-c}$

ثم استنتج قياس $(\vec{CD},\vec{CA})$ واحسب $\frac{AC}{CD}$

الحل :

ⓐ $Z_A = 2$

$Z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i$

$Z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1+\sqrt{3}i$

$Z_D = 2e^{i\pi} = -2$

ⓑ $\frac{a-c}{d-c} = \frac{3-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(3-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{1+3}$

$= \frac{4\sqrt{3}\,i}{4} = \sqrt{3}\,i$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{a-c}{d-c}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ACD قائم في C

$\frac{AC}{CD} = |\sqrt{3}\,i| = \sqrt{3}$

تمرين $\boxed{17}$: في المستوي العقدي $(O,\vec{u},\vec{v})$ النقاط A, B, C, D تمثل الأعداد العقدية

$a=-1+i$, $b=3+i$, $c=3+3i$

$d=-1+3i$

① تحقق أن $a+c=b+d$

② أثبت أن $b-a=-2i(d-a)$

③ استنتج أن $ABCD$ مستطيل

الحل: ① $l_1 : a+c = 2+4i$
$l_2 : b+d = 2+4i \Rightarrow l_1 = l_2$ محققة

② $l_1 = b-a = 4$
$l_2 : -2i(d-a) = -2i(2i) = 4$

③ من الطلب الأول : $a+c=b+d$
$\Rightarrow b-a = c-d \Rightarrow Z_{\vec{AB}} = Z_{\vec{DC}}$

⇐ $ABCD$ متوازي أضلاع

ومن الطلب الثاني $\frac{b-a}{d-a} = -2i$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (\vec{AD}, \vec{AB}) = -\frac{\pi}{2}$

أي الشكل متوازي أضلاع وفيه زاوية قائمة فهو مستطيل

تمرين $\boxed{18}$: لتكن $Z_A=\sqrt{3}+i$, $Z_B=\sqrt{3}-i$

$Z_C = 3\sqrt{3}+i$

ⓐ اكتب العدد العقدي $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسي

ⓑ استنتج طبيعة المثلث ABC

ⓒ عين مجموعة النقاط التي تجعل $\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}$ تخيلي بحت

الحل: ⓐ $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A} = \sqrt{3}\,i$

ⓑ $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg\left(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right)$

$= \arg(\sqrt{3}\,i) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ ABC قائم في A

ⓒ تخيلي بحت إذا كان $\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}$

$\arg\left(\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}\right) = \mp\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (\vec{BM}, \vec{CM}) = \mp\frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{BM}\cdot\vec{CM} = 0$

M تمثل دائرة قطرها $[BC]$ ماعدا النقطة $B(\sqrt{3},1)$

ⓓ حقيقي إذا كان $\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}$

$\arg\left(\frac{Z-Z_C}{Z-Z_B}\right) = 0$ أو π

$\Rightarrow (\vec{BM}, \vec{CM}) = 0$ أو π

⇐ $\vec{CM}$, $\vec{BM}$ مرتبطان خطيا

مجموعة النقاط تمثل مستقيم ماعدا النقطة $B(\sqrt{3},1)$

(مع شرط $Z \neq Z_B$)

التحويلات الهندسية :

[1] الصيغة العقدية للانسحاب

$Z' = Z +$

Z' صورة Z وفق انسحاب بشعاعه $\vec{w}$

[2] الصيغة العقدية للتحاكي

$Z' - Z_\Omega = k(Z - Z_\Omega)$

Z' صورة Z وفق تحاكٍ مركزه Ω ونسبته k

حيث k عدد حقيقي غير معدوم

[3] الصيغة العقدية للدوران:

$Z' - Z_\Omega = e^{i\theta}(Z - Z_\Omega)$

Z' صورة Z وفق دوران مركزه Ω وزاويته θ

ملاحظة: $Z' = iZ$ (دوران مركزه o وزاويته $\frac{\pi}{2}$)

$Z' = -iZ$ (دوران مركزه o وزاويته $-\frac{\pi}{2}$)

⇐ مثلث قائم ومتساوي الساقين.

تمرين: ليكن $Z = 1+i$ الممثل للنقطة M

أوجد Z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل

① T: انسحاب بشعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$

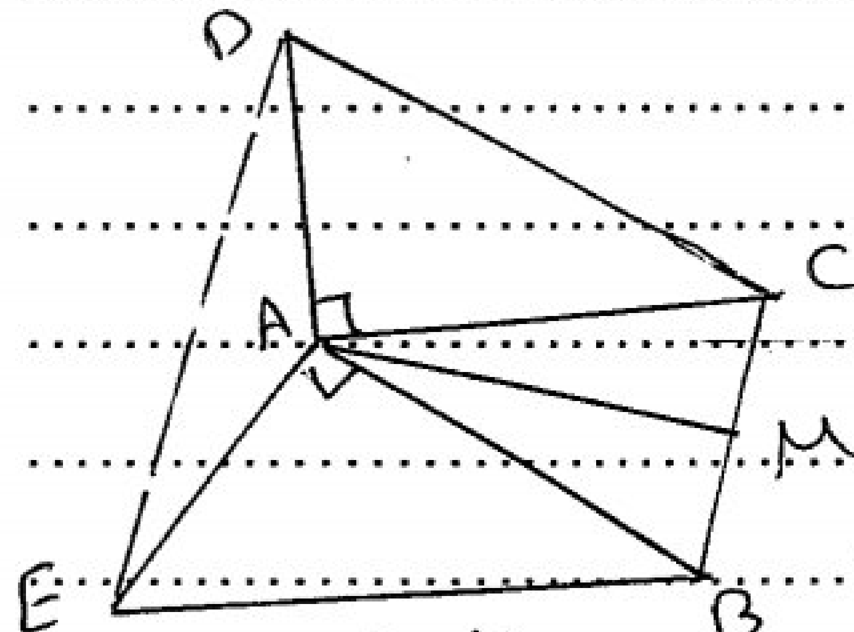
② H تحاكٍ مركزه o ونسبته 3

③ S تناظر مركزه $A(1-3i)$

④ R دوران مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

⑤ التناظر المحوري الذي محوره ox

تمرين [1]: في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفي، لتكن M منتصف $[BC]$ ولتكن ACD، AEB مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين نختار معلماً مباشراً مبدأه النقطة A ونرمز بالرمزين b، c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B، C



① احسب بدلالة b، c الأعداد العقدية m، d، e الممثلة للنقاط M، D، E بالترتيب

② احسب $\frac{d-e}{m-e}$ ثم استنتج أن (AM) حامل ارتفاع في المثلث AED أي $\vec{AM} \perp \vec{ED}$ وأن $ED = 2AM$

③ لنفترض أن A هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ $(C,1)$ $(E,3)$ $(D,2)$

احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس الزاوية BAC

الحل: M منتصف BC ⇐ $m = \frac{b+c}{2}$

ACD مثلث قائم ومتساوي الساقين مباشر:

D صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$d - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(c-a) \Rightarrow \boxed{d = ic}$

لأن A مبدأ المعلم $a=0$

AED مثلث قائم ومتساوي الساقين مباشر:

E صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{e = -ib}$

② $\frac{d-e}{m-a} = \frac{ic-(-ib)}{\frac{b+c}{2}-0} = \frac{i(c+b)}{\frac{b+c}{2}} = 2i$

$\Rightarrow (\vec{AM}, \vec{ED}) = \arg\left(\frac{d-e}{m-a}\right)$

$= \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$

⇐ $\vec{AM} \perp \vec{ED}$

$\left|\frac{d-e}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \frac{ED}{AM} = 2 \Rightarrow ED = 2AM$

③ $a = \frac{(1)(b)+(1)(c)+(2)(d)+(3)(e)}{7}$

عندئذٍ: $e=-ib$, $d=ic$, $a=0$

$0 = \frac{b+c+2ic-3ib}{7}$

$\Rightarrow b+c+2ic-3ib=0$

$b(1-3i)+c(1+2i)=0$

$\Rightarrow c(1+2i)=b(3i-1)$

$\Rightarrow \frac{c}{b}=\frac{3i-1}{1+2i}=\frac{(3i-1)(1-2i)}{1+4}$

$\frac{c}{b}=\frac{5+5i}{5}$

$\Rightarrow \frac{c}{b}=1+i$

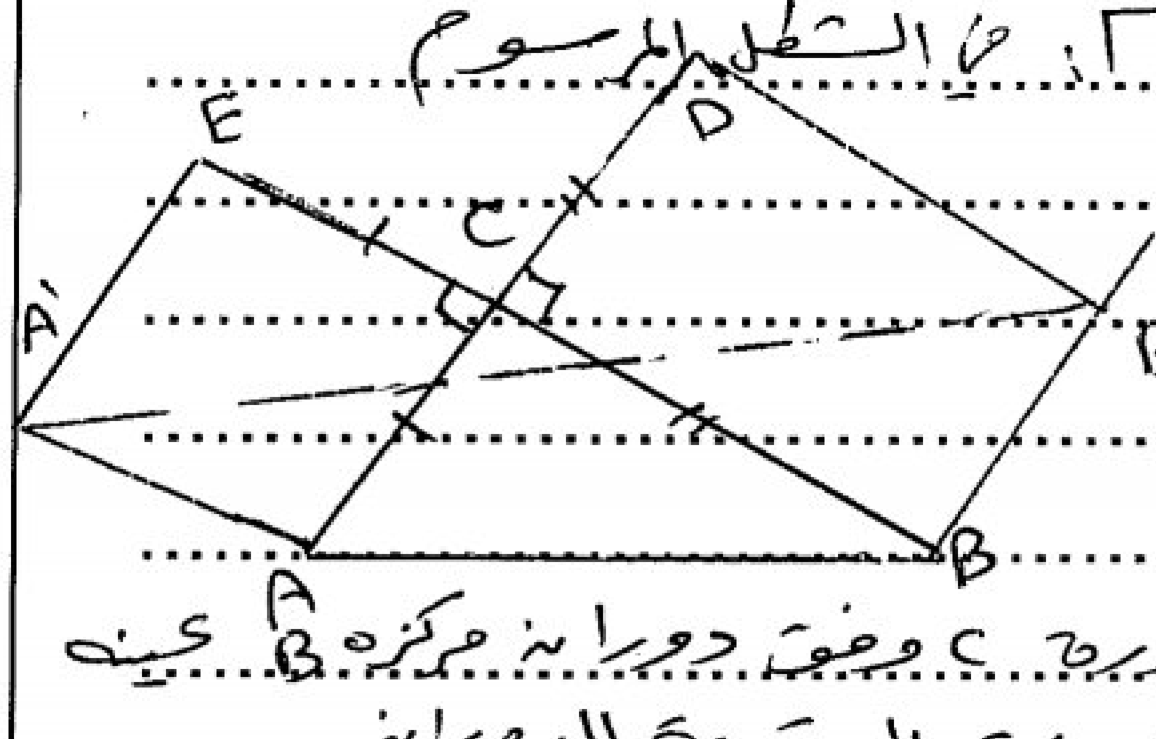
حساب قياس الزاوية BAC

$\frac{c}{b}=\frac{c-a}{b-a}=1+i$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg(1+i)$

$\Rightarrow (\vec{AB},\vec{AC})=\frac{\pi}{4}$

تمرين 2 : في الشكل المرسوم



① B' صورة C وفق دوران مركزه B عيّنه واكتب الصيغة العقدية للدوران

② أثبت أن $a' = i(c-a)+a$

③ عيّن m العدد العقدي منتصف [A'B']

④ كيف تتغير M عندما تتحول c في المستوي

الحل: ① $b'-b = e^{-i\frac{\pi}{2}}(c-b)$

$b'-b=-i(c-b) \Rightarrow b'=b-i(c-a)$

② A' صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$a'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)\Rightarrow a'=a+i(c-a)$

③ $m=\frac{a'+b'}{2}=\frac{a+b+i(b-a)}{2}$

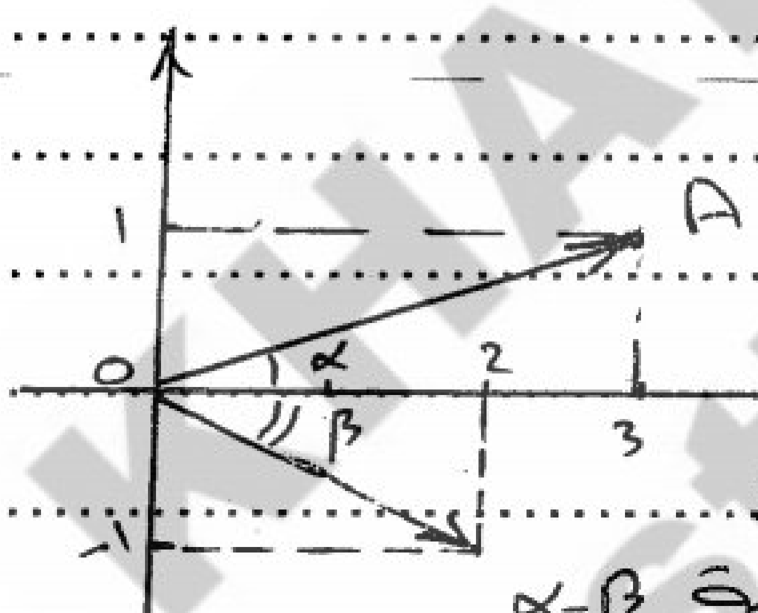
④ $|m-a| = \left|\frac{a+b+i(b-a)}{2}-\frac{2a}{2}\right|$

$=\left|\left(\frac{b-a}{2}\right)(1+i)\right| = \frac{|b-a|}{\sqrt{2}}$

M تبقى ثابتة في منتصف [AB] (لا تتعلق بـ c)

تمرين 3 :

① اكتب Z_B و Z_A بالشكل الجبري والأسي



② احسب $\frac{Z_A}{Z_B}$ بالشكل الجبري والأسي واستنتج قياس الزاوية $\alpha-\beta$

الحل: ① $Z_A = 3+i=\sqrt{10}\,e^{\alpha i}$

$Z_B=2-i=\sqrt{5}\,e^{\beta i}$

② $\frac{Z_A}{Z_B}=\frac{3+i}{2-i}=1+i$

$\frac{Z_A}{Z_B}=\sqrt{2}\,e^{(\alpha-\beta)i}$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$

تمرين [4]: نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة $M'(z')$ حيث

$$z' = \frac{z+2i}{1-2iz}$$

لتكن Γ دائرة مركزها O ونصف قطرها 1

أثبت أنه إذا انتمت M إلى Γ انتمت M' إلى Γ

وهل العكس صحيح؟

الحل: المطلوب:

إذا كان $|z|=1$ فإن $|z'|=1$ والعكس صحيح

أي $|z|=1 \Leftrightarrow |z'|=1$

نفرض $z = x+iy$

$$z' = \frac{x+iy+2i}{1-2i(x+iy)} = \frac{x+i(y+2)}{1+2y-2ix}$$

الفرض: $M \in \Gamma \Rightarrow M' \in \Gamma'$

أي $|z|=1$ ولنثبت $|z'|=1$

$$|z'| = \frac{\sqrt{x^2+(y+2)^2}}{\sqrt{(1+2y)^2+(-2x)^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4y+4}}{\sqrt{1+4y+4y^2+4x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+4y+4}}{\sqrt{1+4y+4(x^2+y^2)}} \qquad \boxed{x^2+y^2=1}$$

$$|z'| = \frac{\sqrt{1+4y+4}}{\sqrt{1+4y+4}} = \frac{\sqrt{5+4y}}{\sqrt{5+4y}} = 1$$

$$\Rightarrow |z'|=1 \Rightarrow M' \in \Gamma$$

العكس: $M' \in \Gamma \Rightarrow M \in \Gamma$

أي $|z'|=1$ ولنثبت $|z|=1$

$$|z'| = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4y+4}}{\sqrt{1+4y+4y^2+4x^2}} = 1$$

$$\sqrt{x^2+y^2+4y+4} = \sqrt{1+4y+4y^2+4x^2}$$

$$x^2+y^2+4y+4 = 1+4y+4y^2+4x^2$$

$$3x^2+3y^2=3$$

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow |z|^2=1$$

$$\Rightarrow |z|=1 \Rightarrow M \in \Gamma$$

مما سبق نجد أنه

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow M' \in \Gamma$$

الدورة المكثفة -١- التحليل التوافقي

المبدأ الأساسي في العد: نريد إيجاد مهمة مكونة من p مرحلة: بفرض أن المرحلة الأولى تتم بـ n_1 طريقة والمرحلة الثانية بـ n_2 طريقة ... والمرحلة الأخيرة بـ n_p طريقة عندئذٍ: عدد الطرق المختلفة التي يمكننا أن نتم هذه المهمة هو: $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_p$

① لتكن المجموعة E وهي مجموعة الأعداد من 1 إلى 9 ما عدد طرق تشكيل رقم مؤلف من أربعة منازل ومختلفة مثنى مثنى من المجموعة E

الحل: عدد طرق تشكيل الألوف هو 9 طرق

〃 〃 〃 المئات هو 8 طرق

〃 〃 〃 العشرات هو 7 〃

〃 〃 〃 الآحاد هو 6 طرق

وحسب المبدأ الأساسي في العد

عدد الطرق = $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$

② في أحد مراكز الهاتف مهندسان وأربعة عمال كم لجنة مختلفة مؤلفة من مهندس واحد وعامل واحد يمكن تشكيل؟

الحل: عدد طرق اختيار مهندس هو 2

〃 〃 〃 عامل هو 4

عدد طرق اختيار اللجنة حسب المبدأ الأساسي في العد $4 \times 2 = 8$ طرق

ملاحظة: اختيار شخص معين بـ طريقة

اختيار أحد الأشخاص من n بـ n طريقة

(*) التباديل: نسمي تبديلاً في المجموعة E المؤلفة من n عنصر هو كل قائمة مرتبة مؤلفة من n بند تضم جميع عناصر E

نستخدم التباديل لترتيب كل عناصر المجموعة دون تكرار

(ترتيب كل شيء من كل شيء دون تكرار)

التباديل: $n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1$

$0! = 1$, $1! = 1$

① ما هو عدد طرق جلوس 5 أشخاص على 5 كراسي؟

$P_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ طريقة

② ما هو عدد طرق ترتيب 7 كتب على رف في الحالات:

① ترتيب 7 كتب $P_7^7 = 7!$

② إذا كان هنالك ثلاثة كتب للمؤلف A و 4 كتب للمؤلف B ونريد كتب المؤلف A في بداية الرف

$P_3^3 \times P_4^4 = 3! \times 4!$

③ نريد كتاباً معيناً للمؤلف A بأول الرف

$1 \times 6!$

④ أحد كتب المؤلف A في بداية الرف

$3 \times 6!$

⑤ كتاب للمؤلف A بأول الرف وكتاب لـ B بآخر الرف

$3 \times 5! \times 4 =$

⑥ كتاب لـ A بأول الرف وكتاب لـ A بآخر الرف

$3 \times 5! \times 2$

الترتيب: القوائم دون تكرار

يعطى عدد الترتيب التي طول كل منها r من مجموعة E مكونة من n عنصر مختلفة مثنى مثنى $n \ge r \ge 1$

بالصيغة: $P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

$P_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \to$ 5 حدود

أو بالصيغة: $P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

نصطلح: $P_n^n = n!$, $P_n^1 = n$

نستخدم التراتيب لترتيب جزء من عناصر المجموعة دون تكرار

(الترتيب شرط من كل شيء دون تكرار)

مراكز - مناصب - ترتيب الأماكن - السحب على التتالي دون إعادة.

① كم طريقة يمكن تكوين عدد أرقامه مختلفة مؤلف من ثلاثة منازل من الأعداد $\{1,2,3,4,5\}$
الترتيب مهم $P_5^3 = 5\times4\times3 = 60$ طريقة

② كم طريقة يمكن ترتيب كتابين من 10 كتب مختلف
$P_{10}^2 = 10\times9 = 90$ طريقة

③ مجلس إدارة نادي سبعة أعضاء كم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب وأمين سر للنادي؟
$P_7^3 = 7\times6\times5 = 210$ طريقة

④ اشترك مئة متسابق في سباق جري وقد تم توزيع ميداليات (ذهبية - فضية - برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟
$P_{100}^3 = 100\times99\times98 = 970200$ طريقة
(مع العلم أنه لا توجد حالات تساوي).

القوائم مع تكرار: هو عدد القوائم مع تكرار التي طولها r يمكن انشاؤها من مجموعة عدد عناصرها n وتحسب بالصيغة n^r

① كم كلمة مؤلفة من ثلاثة حروف يمكن تشكيلها انطلاقاً من كلمة SYRIA
الحل: (سمح التكرار) $5^3 = 5\times5\times5 = 125$

تدريبات الاختزال

② ① $\frac{21!}{20!} = \frac{21\times20!}{20!} = 21$

② $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$, $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$

③ $\frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n!) - (n-1)!}$

④ $\frac{(2n)!}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)} =$

أعداد زوجية وفردية

$= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots\times3\times2\times1}{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}$

أعداد فردية

$= (2n)(2n-2)\times\cdots\times4\times2$

كل عدد زوجي = 2 × (عدد فردي أو زوجي)

$= 2\times n\times2(n-1)\times2(n-2)\times\cdots\times2\times2\times2\times1$

$= n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1\times2^n = n!\cdot2^n$

[2] عين قيمة n في كل من الحالات:

① $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$

شرط الحل: $n\geq3$ و $n\geq2 \Leftarrow n+2\geq4$

لتقاطع الشرطين $n\geq3$ (شرط الحل)

$(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n(n-1)(n-2)$

$(n+2)(n+1) = 14(n-2)$

$n^2 - 11n + 30 = 0 \Rightarrow (n-6)(n-5) = 0$

$\Rightarrow n = 6$ مقبول ، $n = 5$ مقبول

② $P_n^5 = 18P_{n-2}^4$

شرط الحل: $n\geq6 \Leftarrow n-2\geq4$ ، $n\geq5$ ⟸ شرط الحل $n\geq6$

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

$n(n-1) = 18(n-5)$

$n^2 - 19n + 90 = 0$ ⟸ $n = 10$ مقبول ، $n = 9$ مقبول

التوافيق: لدينا E مؤلفة من n عنصر ونريد اختيار r عنصر من E حيث ترتيب r عنصر غير مهم وحيث $n\geq r\geq0$

$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

اصطلاح: $\binom{n}{n} = 1$ ، $\binom{n}{0} = 1$ ، $\binom{n}{1} = n$

نستخدم التوافيق لاختيار مجموعة جزئية من عناصر المجموعة دفعة واحدة والترتيب غير مهم.

KHATIB Institute
الخطيب للغات والتعليم

خواص التوافيق:

① $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$; $n \ge r \ge 0$

② $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$; $n \ge r \ge 1$

③ $\binom{n}{r_1}=\binom{n}{r_2}$ يكون:
عندما: $r_1=r_2$ أو $r_1+r_2=n$
ولا ننسى شرط كل $n \ge r_1$ ، $n \ge r_2$

[1] نريد تشكيل لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحتوي على خمسة عشر رجلاً وأربعة عشر امرأة والمطلوب:

① كم لجنة يمكن تأليفها: $\binom{29}{4}$

② كم لجنة مكونة من رجلين وامرأتين
$\binom{15}{2}\times\binom{14}{2}=$

[2] لدينا مجموعة من الأزهار 8 بيضاء و 4 حمراء و 3 صفراء.

① بكم طريقة يمكن اختيار زهرة بيضاء: $\binom{8}{1}$

② بكم طريقة يمكن اختيار باقة من ست زهرات بيضاء وثلاثة حمراء.
$\binom{8}{3}\times\binom{4}{3}$

③ بكم طريقة يمكن اختيار باقة تحتوي على 8 زهرات فيها زهرة حمراء واحدة على الأقل.
مفهوم على الأقل: أي من الحد الأدنى المعطى إلى الحد الأقصى الممكن.

الحل: واحدة حمراء والباقي غير لونه
اثنتان حمراء والباقي - -
ثلاثة حمراء - -
أربعة حمراء - -

أو بطريقة المتمم: لتكن المجموعة Ω والمجموعة A جزئية منها ويكون متمم A هو المجموعة B والتي تضم عناصر Ω وغير موجودة في A أي عناصر A + عناصر B = عدد عناصر Ω
ولتكن A ظهور زهرة حمراء واحدة على الأقل B متمم A أي عدم ظهور زهرة حمراء.

عدد عناصر Ω = $\binom{15}{8}$

عدد عناصر B : $\binom{11}{8}$

عدد عناصر A : $\binom{15}{8}-\binom{11}{8}$

[3] صف فيه 12 طالب و 8 طالبات. بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 5 أشخاص في الحالات:

① مؤلفة من ثلاث طلاب وطالبتين؟ الترتيب غير مهم. $\binom{12}{3}\binom{8}{2}$

② في اللجنة طالبتين على الأكثر
أي نبدأ بالحد الأقصى إلى عدم الوجود أبداً
$\binom{8}{2}\binom{12}{3}+\binom{8}{1}\binom{12}{4}+\binom{8}{0}\binom{12}{5}=$

③ في اللجنة طالبتين على الأقل:
$\binom{8}{2}\binom{12}{3}+\binom{8}{3}\binom{12}{2}+\binom{8}{4}\binom{12}{1}+\binom{8}{5}\binom{12}{0}=$

[4] برهن صحة العلاقة:
$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}$$

[5] حل جملة المعادلتين:
$$\begin{cases} 3\binom{n}{r}=8\binom{n}{r-1} & ① \\ 2\binom{n+1}{r+1}=5\binom{n+1}{r} & ② \end{cases}$$

6] لتكن المجموعة $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

① كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من 3 عناصر من E؟

$=\binom{7}{3}$

② كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من E ومجموعها من مضاعفات العدد 2؟

الحل: فردي + فردي = زوجي

زوجي + زوجي = زوجي

فردي + زوجي = فردي

مجموعة $Z=\{2,4,6\}$, $F=\{1,3,5,7\}$

عدد المجموعات هو $=\binom{4}{2}+\binom{3}{2}$

7] لتكن $E=\{1,2,3,\dots,10\}$

ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من 3 عناصر من E ومجموعها فردي؟

الحل: للحصول على مجموع فردي يجب أن تكون المجموعات: (فردي، زوجي، زوجي)

أو (فردي، فردي، فردي)

$Z=\{2,4,6,8,10\}$ $F=\{1,3,5,7,9\}$

$\binom{5}{2}\binom{5}{1}+\binom{5}{3}=$

8] لتكن $E=\{1,2,3,\dots,10\}$

ما هو عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من E ومجموعها من مضاعفات العدد 5؟

الحل: إن باقي قسمة أي عدد طبيعي على 5 هو

إما 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4

باقي القسمة 0 $A=\{5,10\}$

" " 1 $B=\{1,6\}$

" " 2 $C=\{2,7\}$

" " 3 $D=\{3,8\}$

" " 4 $F=\{4,9\}$

ولكي يكون مجموع العددين من مضاعفات 5 يجب أن يكونا:

عددين من A أو عدد من B وعدد من F

أو عدد من C وعدد من D

$\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\binom{2}{1}+\binom{2}{1}\binom{2}{1}=$

9] لتكن $E=\{1,2,3,\dots,30\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث عناصر من E ومجموع أرقامها من مضاعفات العدد 3؟

إن باقي قسمة أي عدد طبيعي على 3 هو 0 أو 1 أو 2

لنقسم إلى مجموعات

الأولى: تقبل القسمة على 3 أي الباقي 0

$S_1=\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

نختار 3 عناصر $\binom{10}{3}=120$

الثانية: باقي القسمة على 3 هو 1

$S_2=\{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$

مجموع 3 عناصر يقبل القسمة على 3: $\binom{10}{3}=120$

الثالثة: باقي القسمة على 3 هو 2

$S_3=\{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$

$\binom{10}{3}=120$

والرابعة: نختار عنصراً من S_1 و S_2 و S_3

$\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}=1000$

⇐ عدد المجموعات الجزئية

$1000+120+120+120=1360$

10] عين قيمة n:

$\binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2}$

الشرط: $10\geq n+2$, $8\geq n$

$10\geq 3n$, $\frac{10}{3}\geq n$

إما: $3n=n+2$

$2n=2\Rightarrow n=1$

أو $3n+n+2=10$

$4n=8\Rightarrow n=2$

KHATIB Institute الخطيب للغات والتعليم

مسائل الأشكال الهندسية :

[1] A, B, C, D, E, F رؤوس سداسي منتظم

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها :

مثلثاً $20 = \binom{6}{3}$

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها :

تكون الزاوية قائمة إذا كانت تقابل قطراً للسداسي

وعلى جانبي كل قطر يوجد ٤ مثلثات قائمة

وبما أن للسداسي ثلاثة أقطار مارة من مركزه

فعدد المثلثات القائمة هو $4 \times 3 = 12$

③ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية ؟

كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسي ضلعين

متجاورين من السداسي تشكل مع هذين الضلعين

مثلثاً منفرجاً وبما أن لدينا ست حالات

فيكون عدد المثلثات المنفرجة $\boxed{6 \text{ مثلثات}}$

④ ما هو عدد المثلثات المتساوية الأضلاع

مثلث $20 - (6+12) = 2$

[2] عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n

حيث $n \geq 4$

الحل : القطر هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير

متجاورين

عدد القطع المستقيمة الواصلة بين كل نقطتين هو $\binom{n}{2}$

(وهي عدد الأقطار والأضلاع)

$\Leftarrow$ عدد الأقطار = $\binom{n}{2}$ − عدد الأضلاع

$= \binom{n}{2} - n$

$= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2}$

$= \frac{n(n-3)}{2}$

[3] ما عدد أضلاع مضلع عدد أقطاره 5

من المثال السابق : $\binom{n}{2} - n = 5$

$\frac{n^2 - 3n}{2} = 5$

$n^2 - 3n - 10 = 0$

$(n-5)(n+2) = 0$ ، $n = 5$ ، $n = -2$ مرفوض

[4] عدد نقاط تقاطع أقطار مضلع

ذي n ضلع $(n \geq 4)$

الحل : كل رباعي من المضلع يعطينا نقطة

تقاطع واحدة ويكون عدد الرباعيات

$\binom{n}{4}$ } من الشكل الخماسي عدد نقاط تقاطع الأقطار مع بعضها $(5) + 5$ تقاطع أقطار ورؤوس

$\Leftarrow$ عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع

الواقعة داخل المضلع هو عدد الرباعيات

يضاف إليه عدد الرؤوس (نرسم مخطط للتوضيح)

$\Leftarrow$ عدد نقاط تقاطع الأقطار

$n \geq 4 : \binom{n}{4} + n =$ (نقاط تقاطع الرؤوس ونقاط تقاطع الأقطار مع بعضها)

[5] لدينا مستقيمان متوازيان نحدد على أحدهما

6 نقاط مختلفة وعلى المستقيم الآخر

4 نقاط مختلفة

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن تشكل

من هذه النقاط

الحل : إما نختار نقطتين من الأول ونقطة

من الآخر

أو نقطة من الأول ونقطتين من الآخر

$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{6}{1}\binom{4}{2} =$

أو مثال عدد

(2) ما عدد الرباعيات التي يمكن رسمها من هذه النقاط؟

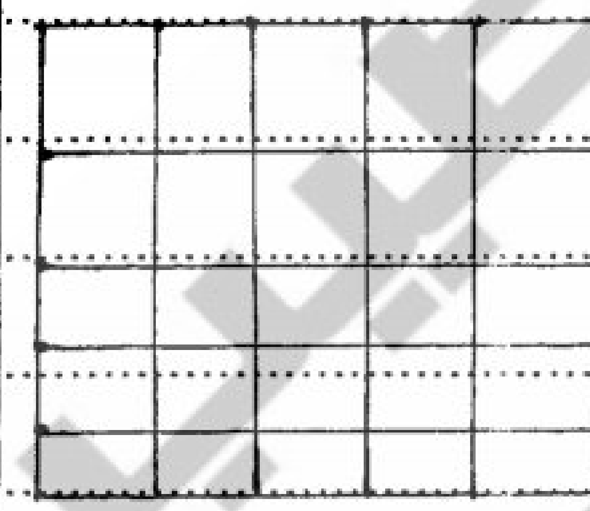
الحل: نختار نقطتين من الأول ونقطتين من الآخر $= \binom{6}{2}\binom{4}{2}$

[6] لدينا شبكة مرسومة بأربع ABCD

احسب عدد المستطيلات في الشبكة؟

(علمًا أن المربع هو مستطيل خاص)

الحل:



لرسم مستطيل يلزمنا تقاطع مستقيمين أفقيين مع مستقيمين شاقوليين

عدد المستقيمات الشاقولية 6 نختار منها 2 بـ $\binom{6}{2}$

" " الأفقية 6 " " 2 بـ $\binom{6}{2}$

عدد المستطيلات $= \binom{6}{2} \times \binom{6}{2} = 15 \times 15$

$= 225$ مستطيل

تمرينات:

[1] في أحد الامتحانات على طالب أن يختار سبعة أسئلة من أصل 10

(1) بكم طريقة يمكن أن يختار الأسئلة؟

$= \binom{10}{7}$

(2) بكم طريقة يمكن أن يختار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية

الحل: $= \binom{4}{4} \times \binom{6}{3}$

---

[2] يلتقي 10 أشخاص في حفل ويصافح كل منهم الآخرين مرة واحدة فقط، ما عدد المصافحات؟

الحل: يلزم لكل مصافحة اختيار شخصين من بين عشرة $\Leftarrow$ عدد المصافحات $45 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = \binom{10}{2}$

من أجل n شخص:

مصافحة $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

[3] يريد معلم توزيع n+1 جائزة على n تلميذ بحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل ما عدد النتائج الممكنة

الحل: ← مرحلة أولى: نعتبر جائزتين جائزة واحدة حيث نختار من n+1 جائزتين $\binom{n+1}{2}$

مرحلة ثانية: نوزع n هدية على n طالب بـ $n!$

$\Leftarrow$ عدد النتائج $\binom{n+1}{2} \times n!$

مسائل الأعداد

نفهم في هذه المسائل على مبدأ الخانات حيث نضع في الخانات منازل العدد الخيارات الممكنة ثم نقوم بالضرب مع بعضها

[1] $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(1) كم عددًا مكونًا من ثلاث منازل يمكن تكوينه؟

$6 \times 6 \times 6 = 216$

(2) كم عددًا مختلف الأرقام ومؤلف من ثلاث منازل يمكن تكوينه

$6 \times 5 \times 4 = 120$

(3) كم عددًا زوجيًا من ثلاث منازل مختلفة

آحاد عشرات مئات

$60 = 4 \times 5 \times 3$

(4) كم عددًا من مضاعفات الـ 5 ومنازله مختلفة؟

آحاد عشرات مئات

$20 = 4 \times 5 \times 1$

(5) كم عددًا من مضاعفات الـ 5 ومنازله مختلفة وأصغر من 500

آحاد عشرات مئات

$12 = 3 \times 4 \times 1$

$\{2,3,4\}$ $\{5\}$

---

[2] $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

(1) كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام

آحاد عشرات مئات

$= 5 \times 6 \times 6$

(2) كم عددًا مختلف من ثلاث منازل يمكن تكوينه

آحاد عشرات مئات

$= 5 \times 5 \times 4$

③ كم عدد زوجي من ثلاثة منازل مختلفة؟

آحاد عشرات مئات

الصفر في الآحاد → 5 × 4 × 1

أو +

الصفر ليس موجود في الآحاد → 4 × 4 × 2

④ كم عدد من مضاعفات الـ 5 ومنازله مختلفة؟

آحاد عشرات مئات

0 في الآحاد → 5 × 4 × 1

5 في الآحاد → 4 × 4 × 1 +

[5] كم عدد من مضاعفات 5 ومن ثلاث منازل مختلفة وأصغر من 500

آحاد عشرات مئات

4 × 4 × 2

{1,2,3,4} {0,5}

[3.] $H=\{1,2,3,4,5\}$

ما عدد الأعداد المكونة من عناصر H والتي تحقق: أرقامها مختلفة ومنها موجودة في H وليس منها مضاعف للعدد 5 وكل منها أكبر من 20000؟

الحل:

آحاد عشرات مئات ألوف عشرات الألوف

{5} → 1 × 4 × 3 × 2 × 1

{2,3,4} → 3 × 3 × 2 × 1 × 3

لا يوجد 5

24 + 54 = 78 عدد طرق

المسائل السحب:

على التتالي دون إعادة → P_n^r

على التتالي مع إعادة → n^r

السحب معاً → $\binom{n}{r}$

ملاحظة: في السحب على التتالي مع أو بدون إعادة يجب الانتباه:

① الترتيب مهم أي نضرب بالتباديل

(a,b,c) → 3! تباديل

(a,a,b) → 3

إذا اشتركت العينة بنفس الصفة لا نضرب بشيء؟

إذا كانت المطلوب مرتب لا نضرب بالتباديل

② في حالة السحب معاً:

① الترتيب غير مهم لا نضرب بالتباديل

ملاحظة:

إذا كانت عملية السحب تتضمن اجتماع عدة حالات نفصل بين كل حالة بعملية الجمع

[1] صندوق يحوي 10 كرات منها 6 حمراء و3 بيضاء وواحدة سوداء. سحب 3 كرات على التتالي دون إعادة:

① ما عدد النواتج المختلفة لهذا السحب

$P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8$

② ما عدد النواتج المختلفة لسحب 3 كرات مختلفة اللون

6 × 3 × 1 × 3! =

③ 3 كرات اشتركت من نفس اللون

(R,R,R) أو (W,W,W)

6 × 5 × 4 × 3 + 3 × 2 × 7 × 3

④ الكرات ليست جميعها من لون واحد

ليس من لون واحد = الحالات الكلية − من لون واحد

$= 720 - (6 \times 5 \times 5 + 4 \times 3 \times 2)$

(5) السحب يشمل كرة حمراء واحدة على الأقل

(R, R', R') أو (R, R, R') أو (R, R, R)

$6 \times 4 \times 3 \times 3 + 6 \times 5 \times 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 4$

(6) الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة سوداء

الطلب مرتب $= 4 \times 6 \times 1$

أعد المسألة لكن مع السحب دفعة.

$\boxed{2}$ صندوق يحوي ٦ كرات تحمل الأرقام $\{6, 7, 8, 9\}$ نسحب 3 كرات معاً:

(1) ما عدد النتائج المختلفة لهذا السحب $= \binom{4}{3}$

(2) ما عدد النتائج والتي يظهر فيها العدد 7

$\binom{1}{1} \times \binom{3}{2} =$

(3) ما عدد النتائج المختلفة والتي يظهر فيها 8 و 9

$\binom{1}{1} \times \binom{1}{1} \times \binom{2}{1} =$

مسألة: نريد تشكيل لجنة من مدير ونائب وأمين من مجموعة تضم خمسة أشخاص بكم طريقة يمكن ذلك إذا كان في اللجنة شخصان متخاصمان لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

الحل:

نختار اللجنة دون الشخصين المتخاصمين $P_3^3 = 6$

ثم نختار شخص واحد من المتخاصمين

$P_3^2 \cdot P_2^1 \times 3 = 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 36$

عدد الطرق $= 36 + 6 = 42$

حل المعادلة:

(1) $\binom{n}{2} = 36$

(2) $\frac{1}{6} P_{n+1}^{2} = \binom{n+2}{4}$

منشور ذي الحدين:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a^{n-r} \cdot b^r$$

عدد الحدود $n+1$ حد

الحد العام الذي يعطى بالعلاقة

$$T_r = \binom{n}{r} (a^{n-r})(b^r)$$

(1) انشر:

$(2x+1)^6 =$

$(1+2i)^3 =$

(2) في منشور $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$

(1) أوجد الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x

$$T_r = \binom{10}{r} (x)^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{10}{r} (x)^{10-r} (x)^{-r} = \binom{10}{r} (x)^{10-2r}$$

الحد الذي يحوي $x^2 \Leftarrow x^2 = x^{10-2r}$

$10 - 2r = 2 \Rightarrow r = 4$

$T_4 = \binom{10}{4} x^2 = 210 x^2$ وهو الحد الخامس

الحد الثابت المستقل عن x: $x^0 = x^{10-2r}$

$10 - 2r = 0 \Rightarrow r = 5$

$T_5 = \binom{10}{5} x^0 = 252$ وهو الحد السادس

(2) أوجد الحد الثامن: $T_7 = \binom{10}{7} (x)^{10-7} \left(\frac{1}{x}\right)^7$

$= \binom{10}{7} (x)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^7$

$\boxed{3}$ ما الشرط على n كي يحوي $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ حداً ثابتاً

الحل:

$$T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= \binom{n}{r} (x)^{2n-2r} (x)^{-r} = \binom{n}{r} (x)^{2n-3r}$$

$x^0 = x^{2n-3r} \Rightarrow 2n - 3r = 0$

$r = \frac{2n}{3}$

n طبيعي ومن مضاعفات العدد 3

[4] جد معامل $\left(x^2y+\frac{1}{xy}\right)^8$

1) الحد الذي يحتوي xy^2

2) الحد الذي يحتوي $x^{10}y^4$

الحل:

1) $T_r=\binom{8}{r}(x^2y)^{8-r}\left(\frac{1}{xy}\right)^r$

$=\binom{8}{r}(x^2)^{8-r}(y)^{8-r}(x^{-r})(y^{-r})$

$=\binom{8}{r}(x)^{16-2r}(x^{-r})(y^{8-2r})$

$=\binom{8}{r}(x)^{16-3r}(y^{8-2r})$

الحد المطلوب يوافق: $16-3r=1 \Rightarrow r=5$

$8-2r=2 \Rightarrow r=3$

وبالتالي غير موجود لأن قيمة r اختلفت

2) الحد المطلوب يوافق:

$16-3r=10 \Rightarrow r=2$

$8-2r=4 \Rightarrow r=2$

وهو الحد الثالث

$T_2=\binom{8}{2}(x^{10})(y^4)=28x^{10}y^4$

[5] $(1+2i)^{10}$ احسب الحد السابع
حقيقي بحت

الحل: $r=6 \Leftarrow$

$T_6=\binom{10}{6}(1)^4(2i)^6$

تحويل الصيغ المثلثية إلى عبارة خطية

[1] اكتب $\cos^3x$ بصيغة عبارة خطية بمضاعفات الزاوية x ثم احسب

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\,dx$

$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3$

نشر

$=\frac{1}{8}\left[e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right]$

$=\frac{1}{8}\left[2\cos3\theta+6\cos\theta\right]$

$\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos3x\,dx+\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

ونكامل

[2] اكتب $\sin^3x$ بصيغة عبارة خطية بمضاعفات الزاوية ثم استنتج

$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x-3\sin x}{\tan^3x}$

الحل:

$\sin^3x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$

$=-\frac{1}{8i}\left[e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right]$

$$= \frac{1}{8i}\left[e^{3ix} - e^{-i3x} - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[2i\sin 3x - 3(2i\sin x)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x} \quad (*)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$$

من (*) نضرب بـ 4

$$-4\sin^3 x = \sin 3x - 3\sin x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4\sin^3 x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[-4\cos^3 x\right] = -4$$

$$\int_0^{x} \cos t \cdot \sin^4 t \, dt = \left[\frac{1}{5}\sin^5 x\right]_0^{x} \quad \boxed{3}$$

أو نستخدم أويلر

صياغة $\cos t \cdot \sin^4 t$

ثم نكامل

تمرين: ما عدد تباديل العدد "(11)"؟

تمرين: يوجد لبعض أنواع السيارات مفتاح ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من الأرقام 0,1,2,3,4,5

1) ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل؟

2) ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل مكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى؟

التوفيق للجميع

wael.bader

KHATIB Institute الخطيب للغات والتعليم

الدورة المكثفة:

الاحتمالات:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ = عدد الحالات الموافقة / عدد الحالات الكلية

$0 \leq P(A) \leq 1$

A, B حدثان في فضاء احتمالي

① $P(\phi)=0$, $P(\Omega)=1$

② $P(A)+P(A')=1$ حيث A' الحدث المعاكس للحدث A

③ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

④ $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

⑤ $P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

⑥ $P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

⑦ $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'$

⑧ $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'$

مسألة: في تجربة رمي حجري نرد مرة واحدة

الحدث A: ظهور ثلاثة نقاط على وجه واحد فقط من الوجهين الظاهرين

الحدث B: ظهور وجهين مجموع نقاطهما أصغر تماماً من 7.

والمطلوب: احسب احتمال كل من الأحداث

A , B , $A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap B'$, $A'\cap B'$, $A'\cup B'$

الحل: في تجربة رمي حجر نرد: عدد عناصر $\Omega = n^r$

n: عدد الأوجه ، r: عدد مرات الرمي.

في حالة رمي حجري نرد نفضل رسم جدول $n(\Omega)=(6)^2=36$

نرمز بـ X: على وقوع الحدث A ، O: على وقوع الحدث B

	1	2	3	4	5	6
1	O	O	X	O	O	
2	O	O	⊗	O		
3	X	X	O	X	X	X
4	O	O	X			
5	O		X			
6			X			

$n(A)=10$, $n(B)=15$

$n(A\cap B)=4$, $n(A\cup B)=21$

وجمعنا بحساب عدد X وعدد O

$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{10}{36}$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{15}{36}$

$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}=\frac{4}{36}$

$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{21}{36}$

$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{10}{36}-\frac{4}{36}=\frac{6}{36}$

$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\frac{21}{36}=\frac{15}{36}$

ملاحظة: رمي حجر نرد مرتين أو أكثر يكافئ رمي حجري نرد أو أكثر.

مسائل السحب

[1] السحب معاً: سحب مجموعة من مجموعة $r \leq n$

← ليس هناك أهمية للترتيب

← للحل نستخدم التوافيق.

[2] السحب على التتالي دون إعادة: $r \leq n$

سحب واحد تلو الآخر من مجموعة.

← إذا كان المطلوب مرتب نتبع الترتيب

← إذا كان الطلب غير مرتب عندئذٍ إما نرتب الطلب أي نضرب بالتبادل أو نلجأ إلى التوافيق.

تبادل: $\frac{r}{n} \times \frac{r-1}{n-1} \times \frac{r-2}{n-2}$

[3] السحب على التتالي مع الإعادة: $r \leq n$ أو $r > n$

① ترتيب الطلب إجباري وهام أي يجب الضرب بالتبادل

② إذا كان هناك a واحد فإن (a,a) , (a,a,a) -- يمكن أن تظهر

③ لحل المسائل نستخدم $\frac{r}{n} \cdot \frac{r}{n} \cdot \frac{r}{n} \cdots$

مسألة: صندوق يحوي 4 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء و 6 كرات حمراء نسحب عشوائياً ثلاث كرات معاً.

والمطلوب حساب احتمال:

① الحصول على 3 كرات حمراء.

② الحصول على 3 كرات من نفس اللون.

③ الحصول على 3 كرات مختلفة اللون.

④ الحصول على 3 كرات اثنان منها من نفس اللون

⑤ الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل

⑥ الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأكثر.

مسألة ٣: يحتوي الصندوق 5 كرات بيضاء و4 كرات سوداء وكرة واحدة زرقاء، نسحب عشوائياً 3 كرات على التتالي بدون إعادة والمطلوب حساب احتمال.

① الحصول على 3 كرات سوداء.

② الحصول على 3 كرات مختلفة اللون.

③ الحصول على كرتين من نفس اللون.

④ الحصول على 3 كرات ليست جميعها من لون واحد.

⑤ أن تكون الأولى سوداء والثانية زرقاء والثالثة بيضاء.

⑥ أن تكون الأولى والثانية سوداوين والثالثة بيضاء.

⑦ الحصول على كرتين سوداوين وكرة بيضاء.

مسألة ٤: يحوي مغلف (9) بطاقات مرقمة بالأرقام

$\{1,1,1,2,2,3,3,3,3\}$

نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي مع إعادة

والمطلوب: ① احسب احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين زوجي

② احسب احتمال أن يكون مجموع رقمي البطاقتين فردي.

الحل: $F=\{1,1,1,3,3,3,3\}$, $Z=\{2,2\}$

① المجموع زوجي: زوجي + زوجي أو فردي + فردي

نرمز للحدث بـ A: $P(A) = \frac{2}{9}\times\frac{2}{9} + \frac{7}{9}\times\frac{7}{9}$

② المجموع فردي: زوجي + فردي

نرمز للحدث بـ B: $P(B) = \frac{2}{9}\times\frac{7}{9}\times 2$

الاحتمال الشرطي: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A'|B) = 1 - P(A|B)$, $P(A|B') \neq 1 - P(A|B)$

مسألة ٥: ① إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

احسب $P(B|A)$, $P(A|B)$

الحل: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10}$

② إذا كانت $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$

احسب $P(B|A)$ $P(A|B)$

الحل: من الفرض: $P(A\cup B) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{6}$

③ إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{3}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$

احسب $P(B|A)$ $P(A|B)$

واحسب $P(A'\cap B')$ واستنتج $P(B'|A')$

الحل:

④ إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B|A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A')=\frac{4}{5}$

فاحسب $P(B)$

الحل: من الفرض: $P(A)=\frac{1}{3} \Rightarrow P(A')=\frac{2}{3}$

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}$$

$$P(B|A') = \frac{P(B\cap A')}{P(A')} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{P(B)-P(A\cap B)}{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{P(B)-\frac{1}{12}}{\left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow P(B) = \frac{37}{60}$$

مسألة ٦: يحوي الصندوق 6 كرات بيضاء و7 كرات سوداء وكرتين حمراوين نسحب من الصندوق 3 كرات معاً والمطلوب:

① إذا علمت أن الكرات الثلاث من لون واحد فما احتمال أن تكون ...

② إذا علمت أنه تم سحب كرة حمراء واحدة على الأقل فما احتمال سحب بيضاء واحدة فقط

الحل: A (مجهول): الكرات بيضاء (W,W,W)

B (معلوم): الكرات من نفس اللون (W,W,W) (B,B,B)

$A\cap B$: (W,W,W)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}}}{\frac{\binom{6}{3}+\binom{7}{3}}{\binom{15}{3}}} = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{6}{3}+\binom{7}{3}}$$

② C: كرة بيضاء واحدة فقط (W,W',W')

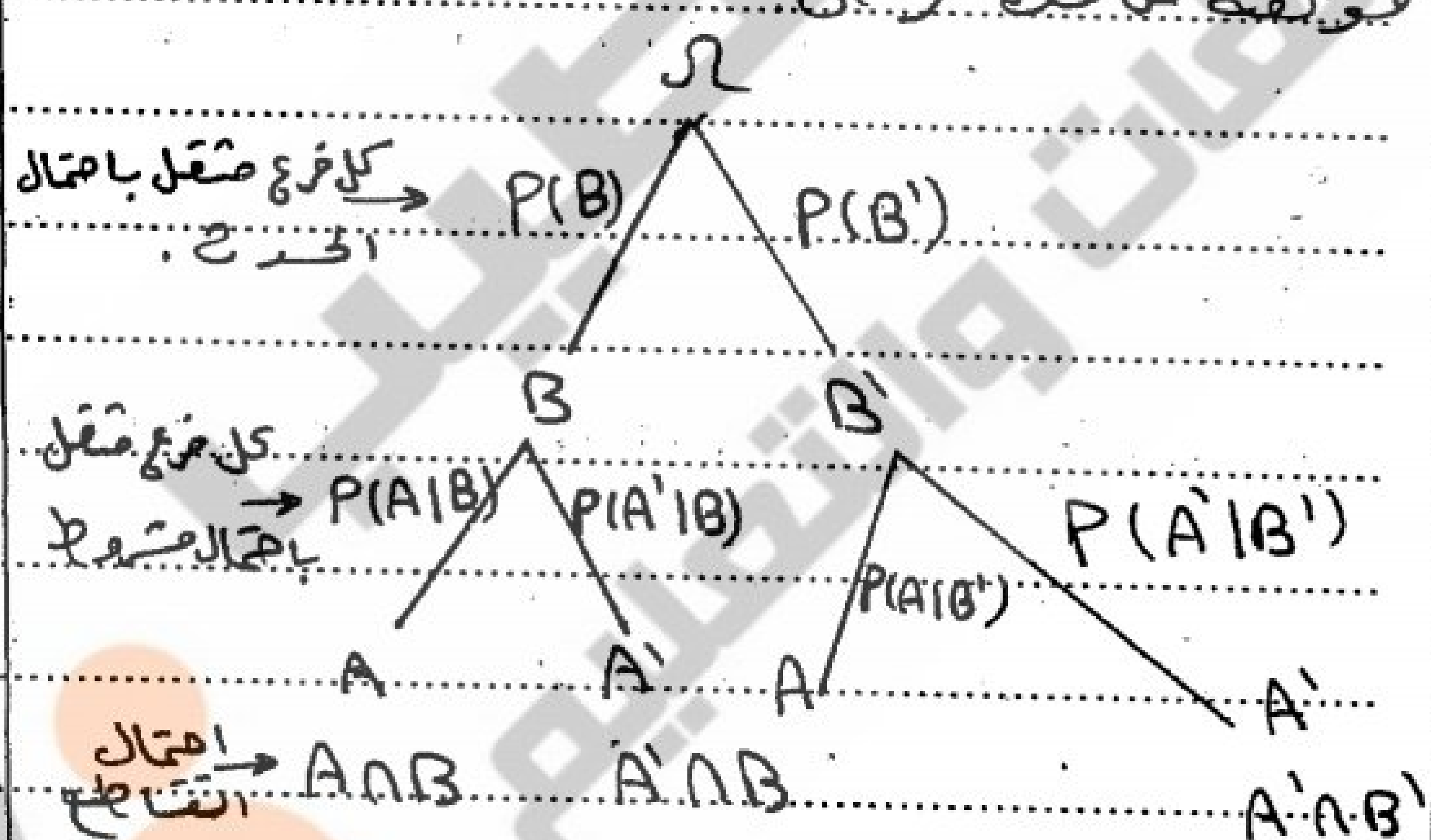
D: حمراء واحدة على الأقل (R,R,R') أو (R,W',W')

$C\cap D$: (R,W,B) (R,R,W)

$$P(C|D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{\binom{2}{2}\binom{6}{1} + \binom{2}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{1}}{\binom{2}{1}\binom{13}{2} + \binom{2}{2}\binom{13}{1}}$$

المخطط الشجري

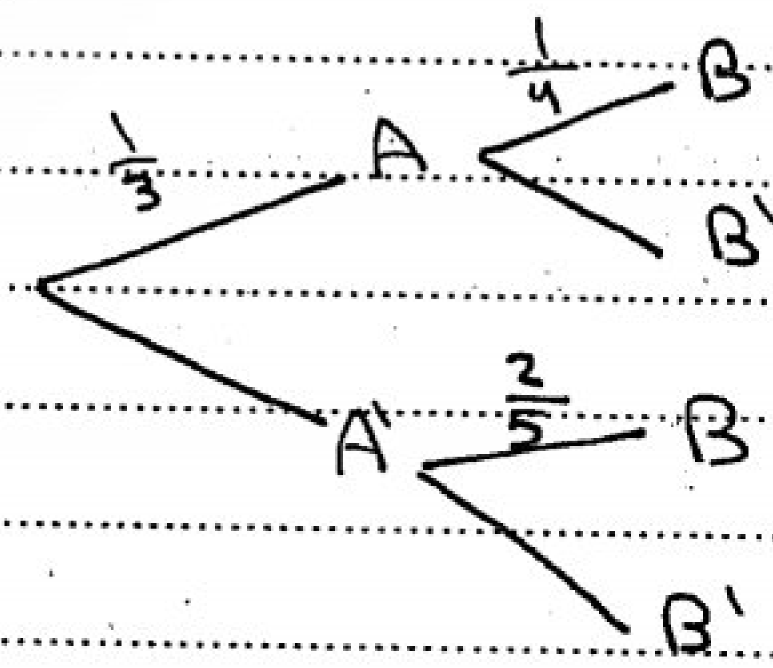
يستخدم المخطط الشجري في حالة تجربة احتمالية مؤلفة من عدة مراحل.



احتمال التقاطع: يساوي جداء الأثقال على الفرع الذي يصل إليه

$$\boxed{P(A) = P(B).P(A|B) + P(B').P(A|B')}$$

مسألة: أتمم المخطط واحسب $P(A')$ ، $P(B'|A)$ ، $P(B'|A')$



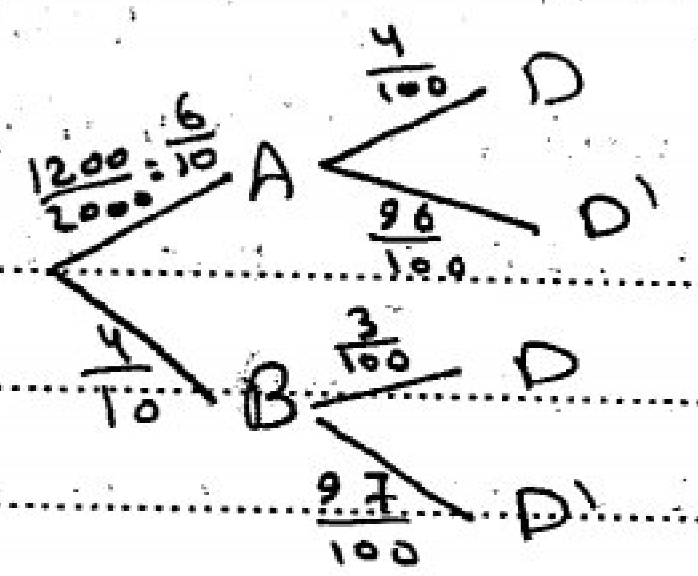
مسألة: يضم مصنع ورشتين A ، B يقوم بتأمين 2000 مصباح، المنتجة في الورشة A منها 1200 مصباح والبقية في الورشة B ونجد 6% من مصابيح A معطوبة و 3% من مصابيح B معطوبة. نسحب عشوائياً مصباحاً

① أنشئ تمثيلاً شجرياً

② احسب احتمال أن يكون المصباح معطوب

③ إذا كان المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من A

①



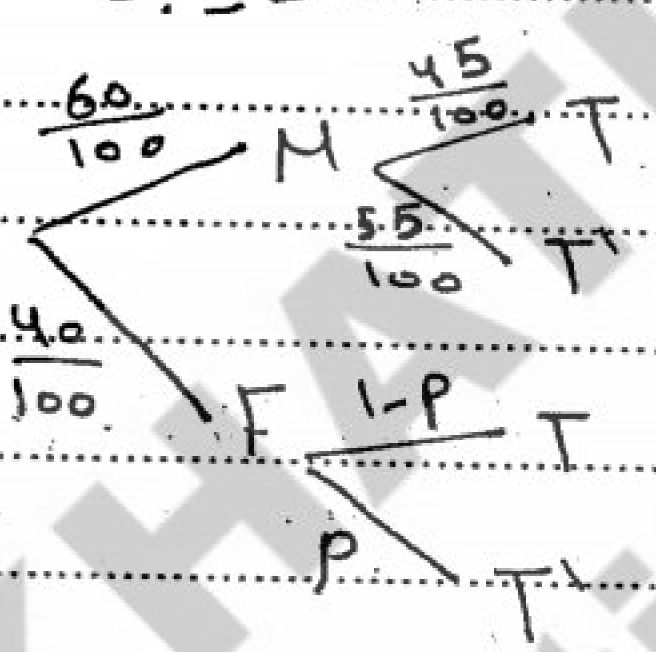
② $P(D) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{100} + \frac{4}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{36}{1000}$

③ $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{6}{10} \times \frac{4}{100}}{\frac{36}{1000}} = \frac{24}{36}$

مسألة: في مدرسة 30% من الطلاب يلعبون كرة المضرب، في المدرسة 60% ذكور، و 55% منهم لا يلعبون. ما احتمال أن تكون طالبة مختارة ولا تلعب كرة المضرب

الحل: M: ذكور ، F: اناث

T: يلعبون ، T': لا يلعبون



المطلوب: $P(T'|F) = ?$

من الفرض: $\frac{30}{100} = P(T|M)\,P(M) + P(T|F).P(F)$

$$\frac{30}{100} = \frac{45}{100} \times \frac{60}{100} + (1-P)\left(\frac{40}{100}\right)$$

ومنه: $P = \frac{925}{1000}$

الاستقلال الاحتمالي:

نقول عن حدثين A, B أنهما مستقلان احتمالياً إذا تحقق $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

أي وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر

مثال: في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة لدينا الأحداث:

$A=\{2,4,6\}$, $B=\{3,6\}$, $C=\{1,2,4\}$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow P(A).P(B)=\frac{1}{6}=P(A$

إذن A, B مستقلان احتمالياً

مسألة: نملأ الخانات الأربع عشوائياً بأحد العددين 1 أو -1

① احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً للصفر.

② احسب احتمال ألا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين

الحل: عدد الخانات 4 بعددين فيكون عدد عناصر فضاء العينة

$n(\Omega)=2^4=16$

A الحدث المطلوب: والناتج عبارة تحتوي إشارتين موجبتين وإشارتين سالبتين

$n(A)=\binom{4}{2}\times \underbrace{1}_{\text{السالبة لطريقة واحدة}}=6$

الإشارتين موجبتين

$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

② B الحدث الدال على ألا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين عندئذ تكون النتائج

$\{(+,-,+,-)$ أو $(-,+,-,+)\}$

وعددها 2

$\Rightarrow P(B)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

المتحولات العشوائية

مسألة: في لعبة إلقاء حجر نرد مثالي: يربح ليرتين إذا ظهر الرقم 1 ويربح ليرة إذا ظهر الرقم 2 ويخسر ليرة في الحالات الأخرى

عين قيم X (المتحول العشوائي) الموافق لهذه اللعبة واكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه

الحل: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega \quad X$

$1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 1$

$\left.\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix}\right\} \longrightarrow -1$

$\Rightarrow X=\{-1,1,2\}$

$P(X=2)=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=-1)=\frac{4}{6}$

x	-1	1	2
$P(X=x)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(x)=\sum x_i p_i=(-1)(\frac{4}{6})+(1)(\frac{1}{6})+2(\frac{1}{6})=\frac{-1}{6}$

التوقع سالب لذلك نخمن إذا لعب اللاعب عدداً كبيراً من المرات فهو سيخسر.

$E(x^2)=(-1)^2(\frac{4}{6})+(1)^2(\frac{1}{6})+(2)^2(\frac{1}{6})=\frac{9}{6}$

$V(X)=E(x^2)-(E(x))^2=\frac{9}{6}-\frac{1}{36}=\frac{53}{36}$

$\sigma_x=\sqrt{V(x)}=\frac{\sqrt{53}}{6}$

مسألة 2: يحتوي صندوق 5 كرات سوداء و 2 بيضاء نسحب عشوائياً كرتين معاً وليكن X متحول عشوائي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة

عين X واكتب قانونه الاحتمالي وتوقعه وتباينه

الحل: $X=\{0,1,2\}$

$0 \longrightarrow (B,B)$

$1 \longrightarrow (w,B)$

$2 \longrightarrow (w,w)$

$P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$, $P(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$

$P(X=0)=\frac{3}{10}$

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$E(x)=\frac{8}{10}$

$V(x)=E(x^2)-(E(x))^2$

$=$

$\sigma_x=\sqrt{V(x)}$

مسألة: يحوي الصندوق على 5 كرات اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3 نسحب عشوائياً وآنياً معاً كرتين من الصندوق ونسمي X متحول عشوائي يقرن بكل نتيجة مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين، عيّن X واكتب قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه.

الحل: لحل مسائل مجموع أو مقارنة بين الأعداد من الأفضل تنظيم الجدول وتمييز الحالات

(a) السحب معاً: نحذف القطر الرئيسي وما تحته

(b) السحب على التتالي دون إعادة: نحذف القطر الرئيسي فقط

(c) السحب على التتالي مع إعادة: نأخذ الجدول كاملاً

الحل:

+	1	1	2	2	3
1	$\boxed{2}$	2	3	3	4
1	2	$\boxed{2}$	3	3	4
2	3	3	$\boxed{4}$	4	5
2	3	3	4	$\boxed{4}$	5
3	4	4	5	5	$\boxed{6}$

x	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$E(x) = \frac{2}{10} + \frac{12}{10} + \frac{12}{10} + \frac{10}{10} = \frac{18}{10}$$

$$V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{4}{10} + \frac{36}{10} + \frac{36}{10} + \frac{50}{10} - \left(\frac{18}{10}\right)^2$$

مسألة:

x	α	2	3
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	λ

(1) احسب λ

(2) إذا علمت أن $E(x)=0$ احسب α

الحل: نعلم أن $P_1' + P_2' + P_3' = 1 \Rightarrow \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \lambda = 1$

$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{7}$

$E(X) = \alpha\left(\frac{2}{7}\right) + 2\left(\frac{1}{7}\right) + 3\left(\frac{4}{7}\right)$

$E(X) = 0 \Rightarrow \frac{2\alpha}{7} + \frac{2}{7} + \frac{12}{7} = 0 \Rightarrow \alpha = -7$

مسألة 5: الصندوق فيه ست بطاقات مرقمة كما يلي:

1, 2, 3, 4, 5, 6

نسحب من الصندوق بطاقتين على التتالي دون إعادة.

(1) إذا كانت البطاقة الثانية فردية ما احتمال الأولى فردية

(2) الحدث D يقع إذا كانت إحدى البطاقتين المسحوبتين تحمل الرقم 4 والحدث E يقع إذا كان مجموع رقمي البطاقتين عدد زوجي هل الحدثان D, E مستقلان احتمالياً؟

(3) ليكن X متحول عشوائي يدل على أكبر الوجهين الظاهرين احسب التوقع الرياضي والتباين لهذا المتحول.

الحل: (1) $F=\{1,3,5\}$, $Z=\{2,4,6\}$

A: الأولى فردية: $(F,Z)\ (F,F)$

B: الثانية فردية: $(Z,F)\ (F,F)$

$A\cap B$: (F,F)

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}}{\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times 2 + \frac{3}{6}\times\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

(2) $n(\Omega) = 6\times 5 = 30$

$D = \{(4,1)(4,2)(4,3)(4,5)(4,6)\}$

$P(D) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

$E: (Z,Z)\ (F,F) \Rightarrow P(E) = \frac{3}{6}\times\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\times\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

$E\cap D = \{(4,2),(4,6)\}$

$P(E\cap D) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P(E).P(D) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

أكبرها	1	2	3	4	5	6
1		2	3	4	5	6
2	2		3	4	5	6
3	3	3		4	5	6
4	4	4	4		5	6
5	5	5	5	5		6
6	6	6	6	6	6	

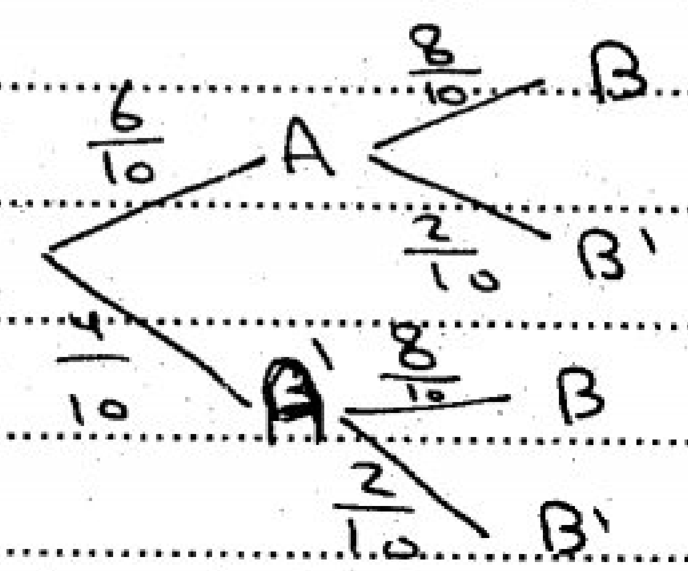
③

x	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$

$E(X) = ---$, $V(X)$

مسألة 6: يطلق رام طلقتين على هدف
احتمال إصابة الهدف بالطلقة الأولى $\frac{6}{10}$
واحتمال " " " " الثانية $\frac{8}{10}$
يربح 5 نقاط إذا أصاب بالطلقة الأولى
" 3 " " " " الثانية
يخسر 4 " " لم يصب الهدف بالطلقة الأولى
يخسر 5 " " " " " الثانية
X متحول عشوائي يدل على عدد النقاط التي ينالها الرامي في نهاية المباراة. اكتب قانونه X واحسب توقعه الرياضي

أحداث مستقلة



أصاب المرتين $A \cap B \longrightarrow$ يربح $5+3=8$
لم يصب في الأولى وأصاب في الثانية $A' \cap B \longleftarrow$ $-4+3=-1$
أصاب في الأولى ولم يصب في الثانية $A \cap B' \longleftarrow 5-5=0$
لم يصب في الأولى ولم يصب في الثانية $A' \cap B' \longleftarrow -5-4=-9$

$\Rightarrow X = \{-9, -1, 0, 8)$

$P(X=-9) = P(A' \cap B') =$
$P(X=-1) = \frac{4}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{32}{100}$
$P(X=0) = \frac{6}{6} \times (\frac{2}{10}) = \frac{12}{100}$

$P(X=8) = \frac{6}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{48}{100}$

x	-9	-1	0	8
$P(X=x)$	$\frac{8}{100}$	$\frac{32}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{48}{100}$

مسألة 7: صندوق يحوي 4 كرات: 3 حمراء، 1 سوداء
نسحب كرتين بالتتالي مع الإعادة.
① لتكن X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات السوداء المسحوبة
عيّن قيم X واحسب التوقع الرياضي
② نسحب كرة ولا نعيدها حتى لا يبقى في الصندوق سوى كرات من اللون ذاته ولتكن Y متغير يدل على عدد مرات السحب
③ نسحب كرة ونعيدها ثم نضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب كرة. B_1 الكرة المسحوبة أولاً سوداء
B_2 الكرة المسحوبة ثانياً سوداء
أنشئ مخطط شجري ثم احسب B_1, B_2

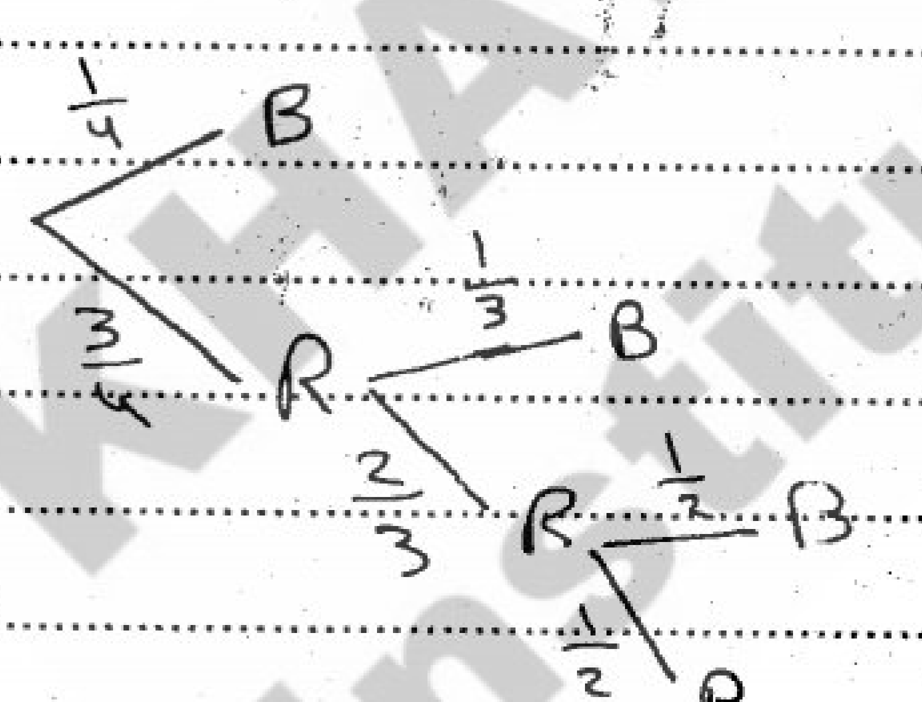
الحل: ①

$X = \{0, 1, 2\}$
$\downarrow$ (R,R) , (R,B) , (B,B)

$P(X=0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$
$P(X=1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \times 2 = \frac{6}{16}$
$P(X=2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

②

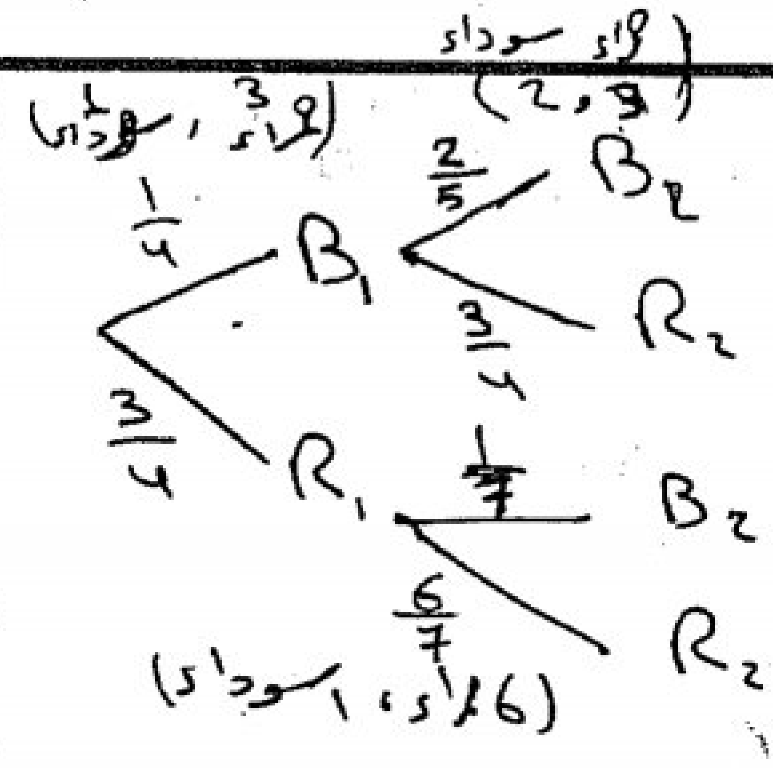


$Y = \{1, 2, 3\}$

$P(Y=1) = \frac{1}{4}$, $P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$
$P(Y=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Y	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

③



$P(B_1) = \frac{1}{4}$

$P(B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}$

القانون الاحتمالي لمتحولين عشوائيين.

مسألة: صندوق يحوي 3 كرات واحدة تحمل الرقم 1 وحمراء اللون والثانية زرقاوان تحملان الرقم 2 و 3 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي مع إعادة

① نعرف متحول عشوائي X يدل على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة.

② ~ ~ ~ Y ~ ~ مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

① اكتب القانون الاحتمالي لكل من X، Y

② اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج X, Y

③ هل X و Y مستقلان احتمالياً.

$X = \{0, 1, 2\}$

$0 \to (R, R) \quad 1 \to (R, b) \quad 2 \to (b, b)$

$P(X=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \qquad P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{9}$

$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

X	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

$Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$(1,1) \to 2 \qquad (1,2) \to 3 \qquad (1,3)(2,2) \to 4$

$(2,3) \to 5 \qquad (3,3) \to 6$

Y	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

③ لنوجد جدول (X, Y)

توضيح

$X \backslash Y$	0	1	قانون X
0	$P_0 \cap P_0'$	$P_0 \cap P_1'$	P_0
1	$P_1 \cap P_0'$	$P_1 \cap P_1'$	P_1
قانون Y	P_0'	P_1'	$\leftarrow 1$

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6	قانون X	
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$	P_0
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$		0	$\frac{4}{9}$	P_1
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	P_2
قانون Y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1	
	P_2'	P_3'	P_4'	P_5'	P_6'		

$X = 0 \cap Y = 2 \Rightarrow P_{0,2} = \frac{1}{9}$

الأولى حمراء والثانية حمراء والمجموع يساوي 2

$\{(R_1, R_1) \cap (R_1, R_1)\} = (R_1, R_1)$

$X = 0 \cap Y = 3 = \Phi$

$X = 1 \cap Y = 3 \Rightarrow (R_1, b_1)(R_1, b_2) \cap (R_1, b_2)$

$P_{1,3} = \frac{2}{9}$

وهكذا.....

$P_0 \times P_2' \neq P_{0,2} \Rightarrow$ X, Y ليسا مستقلان

مسألة 2: أكمل الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية X و Y علماً أنهما مستقلان احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

مسألة 3: تجربة رمي حجري نرد . نرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط

X متحول عشوائي يمثل باقي قسمة S على 2

Y ~ ~ ~ ~ ~ S على 4

① عين القانونين الاحتماليين لـ X ، Y

② عين القانون الاحتمالي للمزدوج (X,Y)

③ هل (X,Y) مستقلان احتمالياً ؟

التجارب البرنولية :

عندما نهتم في تجربة عشوائية ما فقط بوقوع حدث محدد عدد من المرات قدرها K عند تكرار هذه التجربة n مرة عندها نستخدم اختبار برنولي.

إذا كان احتمال وقوع هذا الحدث هو P فيكون عدم وقوعه $q=1-p$ ويكون احتمال وقوع هذا الحدث K مرة عند تكرار هذه التجربة n مرة بطرق متماثلة ومستقلة احتمالياً يعطى بالقانون:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k} \quad : 0\le k\le n$$

طبيعي

ويرمز للقانون الحداني بـ $B(n,p)$

ويحسب التوقع الرياضي والتباين:

$$E(x)=np \quad , \quad V(x)=np.q$$

مسألة: نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آن معاً ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط؟

الحل: احتمال الحصول على الوجه $H = p=\frac{1}{2}$

$p=\frac{1}{2} \Rightarrow q=1-p=\frac{1}{2}$ $\quad n=5, k=3$

$$P(x=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}=\dots$$

مسألة: نلقي ست مرات حجر نرد متوازن وليكن A الحدث الحصول مرتين على الأقل على 5 أو 6 فما احتمال وقوع الحدث A ؟

الحل: احتمال وقوع 5 أو 6 هو $P=\frac{2}{6} \Leftarrow q=\frac{4}{6}$

وعدد التكرارات $K=2,3,4,5,6$

لذلك نقوم بحساب الحدث المضاد أي ظهور مرة أو ولا مرة $K=0,1$

$$P(A')=P(X=0)+P(X=1)$$

$$=\binom{6}{0}\left(\frac{2}{6}\right)^{0}\left(\frac{4}{6}\right)^{6}+\binom{6}{1}\left(\frac{2}{6}\right)^{1}\left(\frac{4}{6}\right)^{5}$$

$$=\frac{256}{729}$$

$$\Rightarrow P(A)=1-P(A')=\frac{473}{729}$$

مسألة 3: يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

① نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

② نسحب من الصندوق 3 كرات مع إعادة.

نعرف X متغير عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات سحب الثلاث.

ما القانون الاحتمالي للمتحول X ؟

الحل: ① نفرض n عدد الكرات البيضاء ⇐ عدد الحمراء 3n

⇐ عدد الكرات في الصندوق 4n

R: حدث سحب كرة حمراء اللون

$$P(R)=\frac{3n}{4n}=\frac{3}{4}$$

② X: عدد مرات الحصول على كرة حمراء.

واحتمال الحصول على كرة حمراء هو $\frac{3}{4}$ ويمكن اعتبار هذه تجربة برنولية حيث $n=3$ ، $P=\frac{3}{4} \Leftarrow q=\frac{1}{4}$

أي تتبع قانون حداني $B(3,\frac{3}{4})$

$$K=\{0,1,2,3\}$$

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=\frac{1}{64}$$

$$P(X=1)=\frac{9}{64} \ , P(X=2)=\frac{27}{64} \ , P(X=3)=\frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
P(X=x)	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

مسألة 4: نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات فقط؟

الحل: $K=3$, $n=6$, $q=\frac{1}{2}$ ، $P=\frac{1}{2}$

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{625}{11664}$$

مسألة 5: نلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية ليكن الحدث A: الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل. ما احتمال A ؟

الحل: هذه تجربة برنولية. $A=\{2,4,6\}$

$p=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $n=8$, $K=3,4,5,6,7,8$

لذلك نحسب الحدث المضاد $K=0,1,2$

$P(A)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]=\dots$

مسألة 6: يتواجه اللاعبان A, B في لعبة في مباراة مكونة من تسعة أدوار. يكسب A الدور الواحد باحتمال 0.6 ويربح اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار ما احتمال أن يربح B المباراة؟

الحل: ربح B هو خسارة A وليربح B يجب أنه يكسب 5 أدوار أو أكثر أو أنه يربح A أربع أدوار أو أقل ولذلك نحسب ربح A.

ونعتبر تجربة برنولية حيث:

$n=9$, $p=0.6$, $q=0.4$, $K=0,1,2,3,4$

ولنضع M هو احتمال ربح B

$P(M)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$
$+P(X=4)=$

مسألة 7: عائلة من أربعة أطفال. نقبل أنه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفل أنثى. ونفترض أن الولادات مستقلة احتمالياً. والمطلوب احسب احتمال.

1) A: لأن أطفال الأربعة الجنس نفسه

$P(A)=(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{8}$

2) B طفلان ذكران وطفلتان

$P(B)=(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2\times 6=\frac{6}{16}$

3) C: الطفل الثالث أنثى

$P(C)=\frac{1}{2}$ لأن الأحداث مستقلة

4) $A\cap C$: يقع عندما الأطفال كلهم إناث

$P(A\cap C)=(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

$P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\dots$

هل A و C مستقلان احتمالياً

$P(A).P(C)=\frac{1}{16}=P(A\cap C)\Rightarrow$ مستقلان احتمالياً

5) $B\cap C$: $\{(b,b,g,g)(g,b,g,b)(b,g,g,b)\}$

$P(B\cap C)=\frac{3}{16}$

$P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{2}$

$P(B\cap C)=P(B).P(C)$

مسألة 8: صندوقان يحتوي الأول 3 كرات بيضاء وواحدة زرقاء ويحتوي الثاني 2 بيضاء وواحدة زرقاء.

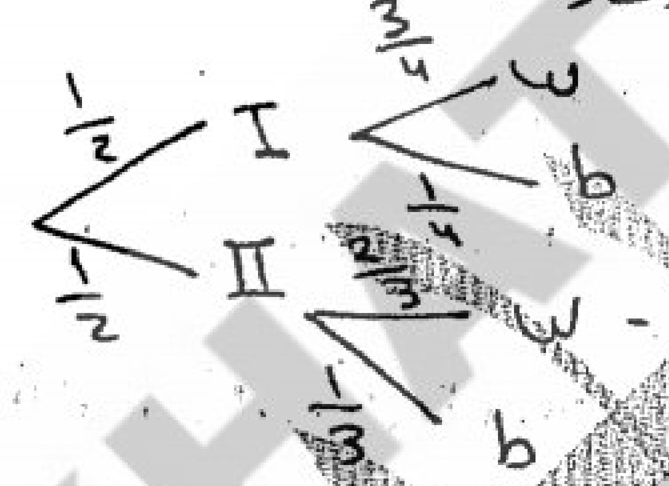
[1] نختار أحد الصندوقين ونسحب منه كرة:

A) ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء

B) إذا علمت أن الكرة المسحوبة زرقاء ما احتمال أنها سحبت من الصندوق I.

[2] نسحب كرة من الصندوق الأول ونضعها في الثاني ثم نسحب كرة من الثاني. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ثانياً زرقاء علماً أن الكرة الأولى زرقاء

الحل: [1]

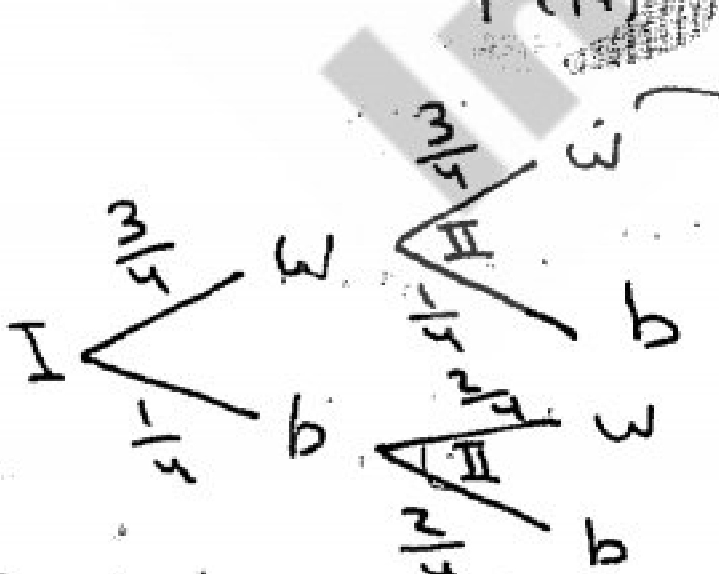


1) A: الكرة المسحوبة زرقاء

$P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$

2) $P(I|A)=\frac{P(I\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{7}{24}}=\frac{3}{7}$

[2]



$P(b_2|b_1)=\frac{P(b_2\cap b_1)}{P(b_1)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

مسألة 10 يواجه فارس حصان عدداً من ضربات الجواد إذا صد ضربة الجواد n فإن احتمال أنه يصد ضربة الجواد $n+1$ يساوي 0.8.
وإذا لم يصد ضربة الجواد n فإن احتمال أنه يصد ضربة الجواد $n+1$ يساوي 0.6
نفترض أن احتمال أنه يصد أول ضربة جواد 0.7
ليكن A_n الحدث "يصد الفارس ضربة الجواد n"

① احسب $P(A_2|A_1)$ و $P(A_2|A_1')$

② استنتج $P(A_2)$

③ نعرف $P_n = P(A_n)$

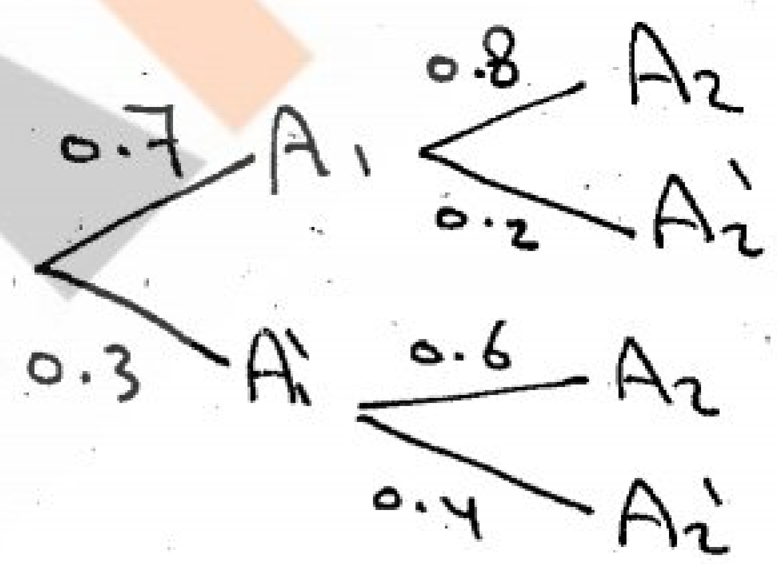
ⓐ برهن أن $P_{n+1} = (0.2)P_n + 0.6$

ⓑ لنعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ بالصيغة

$$U_n = P_n - 0.75$$

بين أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها 0.2 واستنتج عبارة P_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n =$

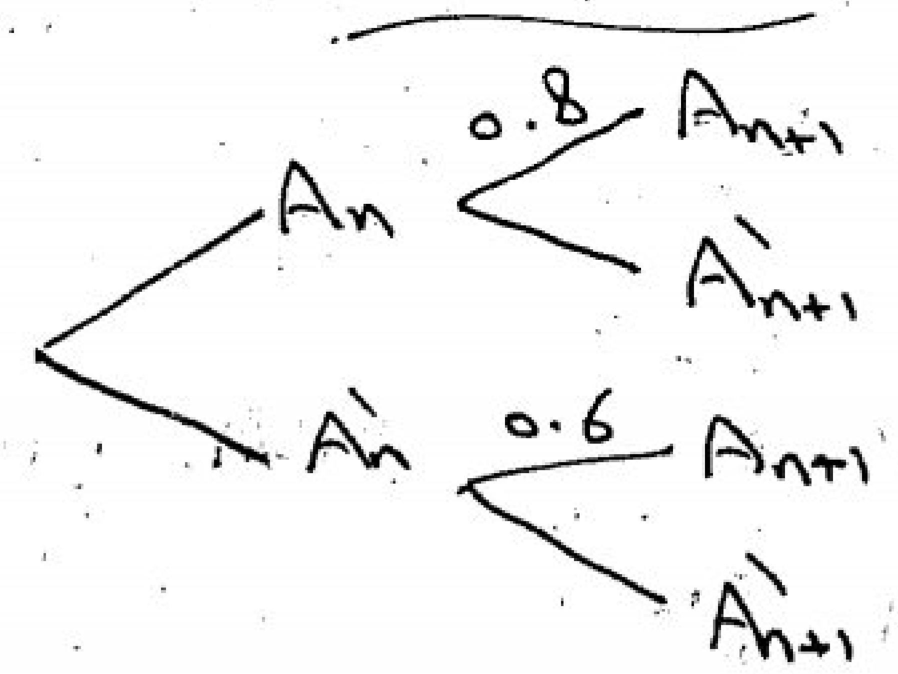
الحل



① $P(A_2|A_1) = 0.8 \quad , \quad P(A_2|A_1') = 0.6$

② $P(A_2) = P(A_1).P(A_2|A_1) + P(A_1').P(A_2|A_1')$

$= (0.7)(0.8) + (0.3)(0.6) = 0.74$



$P_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n).P(A_{n+1}|A_n) + P(A_n').P(A_{n+1}|A_n')$

$= P(A_n).P(A_{n+1}|A_n) + (1-P(A_n)).P(A_{n+1}|A_n')$

$P_{n+1} = P_n.(0.8) + (1-P_n).(0.6)$

$= 0.8P_n + 0.6 - 0.6P_n$

$\boxed{P_{n+1} = 0.2P_n + 0.6}$

ⓑ إثبات أن U_n متتالية هندسية

$U_n = P_n - 0.75$

$U_{n+1} = P_{n+1} - 0.75$

$= 0.2P_n + 0.6 - 0.75$

$= 0.2P_n - 0.15$

$= 0.2(P_n - 0.75) = 0.2U_n$

$\Leftarrow U_n$ هندسية وأساسها 0.2

والحد الأول $U_1 = P_1 - 0.75 = 0.7 - 0.75$

$= -0.05 = -\frac{5}{100} = -\frac{1}{20}$

$\Rightarrow U_n = U_1 q^{n-1} = \left(-\frac{1}{20}\right)(0.2)^{n-1}$

$= \left(-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{2}{10}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$\boxed{U_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

$U_n = P_n - 0.75$

$\Rightarrow P_n = U_n + 0.75$

$P_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n + 0.75$

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0.75$

waeh.bader

سلسلة

التجمع التعليمي

التجمع التعليمي