مثال $ص = \frac{٥}{س^٢ + ١}$

$ص' = \frac{-٥ \times ١ \times ٢س}{(س^٢+١)^٢} = \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٢}$

مثال $ص = س + \frac{٤}{س}$

$ص' = ١ + \frac{-٤}{س^٢}$

$د(س) = س^٢ + \frac{٥}{س^٢}$

$د'(س) = $ ـــــ

تمرين $د(س) = \frac{٦}{س - ٢}$

$د'(س) = $ ـــــ

مثال اذا كانت

$د(س) = ٢ - \frac{س}{س - ١}$

أوجد $د'(س)$

الحل

$د'(س) = صفر - \frac{١ \times (س-١) - س \times ١}{(س-١)^٢}$

$د'(س) = - \frac{س - ١ - س}{(س-١)^٢}$

$د'(س) = \frac{١}{(س-١)^٢}$

تمرين $ص = \frac{٢س - ١}{س^٢ + ١}$

أوجد $ص'$

مشتقة الدوال المثلثية

[١] اذا كانت

$ص = جاس$ فإن $ص' = جتاس$

[٢] $ص = جتاس$

$ص' = -جاس$

[٣] اذا كانت

$د(س) = ظاس$

فإن $د'(س) = \begin{cases} \frac{١}{جتا^٢س} = قا^٢س \\ ١ + ظا^٢س \end{cases}$

[٤] $ص = ظتاس$

$ص' = \frac{-١}{جا^٢س} = -قتا^٢س = -(١ + ظتا^٢س)$

[٥] $ص = قاس$

$ص' = قاس ظاس$

[٦] $ص = قتاس$

$ص' = -قتاس ظتاس$

ملاحظة نشتق النسب المثلثية

كقوة × كنسبة × كزاوية

مثال اذا كانت $ص = جا^٥س^٢$

أوجد $ص'$

القوة ← ٥

النسبة ← جا

الزاوية ← $س^٢$

Scanned by CamScanner

∴ ص = ٥ جا^{٤}س × جتا٢س × ٢س

مثال إذا كان
د(س) = ظا^{٢}س
فأوجد د'($\frac{\pi}{٤}$) = ؟
الحل
نشتق ثم نعوض
د'(س) = ٢ظاس × $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ × ١
د'($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ظا$\frac{\pi}{٤}$ × $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\frac{\pi}{٤}}$
= ٢ × ١ × $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٤

مثال د(س) = ظتا٢س
أوجد د'($\frac{\pi}{٤}$)
الحل
د'(س) = $-\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{٢س}}$ × ٢
د'($\frac{\pi}{٤}$) = $\frac{-٢}{\text{جا}^{٢}\frac{\pi}{٢}}$ = -٢

مثال
د(س) = س ظاس
أوجد د'(س)
الحل
∴ د(س) = س ظاس
د = ا ح
د'(س) = س × قا^{٢}س + ظاس × ١ س

مثال لتكن د(س) = ٢س + جاس
د'(π) = ؟

مثال د(س) = جا$\frac{\pi}{٢}$ = ثابت
د'(س) = ؟
الحل
د'(س) = صفر

مثال د(س) = ظتا^{٥}٤س
أوجد د'(س)
الحل
د'(س) = ٥ ظتا^{٤}٤س × -قتا^{٢}٤س × ٤
= -٢٠ ظتا^{٤}٤س قتا^{٢}٤س

مثال إذا كان
د(س) = قاس
أوجد د'($\frac{\pi}{٤}$)

تمرين د(س) = س جاس
د'($\frac{\pi}{٢}$) = ؟

مثال ضع كلا من أ، ب
إذا كانت د(س) = جتا٤س
فإن د'($\frac{\pi}{٤}$) = -١٦ ( )
الحل
د'(س) = -جا٤س × ٤
د''(س) = -جتا٤س × ٤ × ٤
د''($\frac{\pi}{٤}$) = -جتاπ × ١٦
= -(-١) × ١٦ = ١٦ (أ)

مثال د(س) = ٥ جا$\frac{\pi}{٢}$ + لـ١١
د'(س) = ؟

مثال ① $د(س) = جتا(جاس)$

$د(س) = -$

② $ص = \sqrt{1 + جتا^2 س}$ ، $صتا =$ ـــــ

مثال $ص = لا$ بـ $س$ ، $أ$ ر x

① إذا كانت $ص = جتا^2 س$

فإن $صتا = -جاس$ ( )

② إذا كانت

$ص = \frac{جاس}{جتاس}$ فإن

$صتا =$ ( )

$صتا = قا^2 س$

③ إذا كانت $د = ظاس$ ، $ج = ظتاس$

فإن $\frac{د}{ج} = ظا^2 س$ ( )

مثال إذا كانت $د(س) = ب ظتاس$

، $د(\frac{\pi}{2}) = -2$ فإن $ب =$ ـــ

الحل

$د(س) = ب \times \frac{-1}{جا^2 س}$

$د(\frac{\pi}{2}) = \frac{-ب}{جا^2 \frac{\pi}{2}}$

$-2 = \frac{-ب}{(1)^2}$ $\therefore$ $-2 = -ب$ $\therefore$ $ب = 2$

تدريب إذا كانت $د(س) = ص ظاس$

، $د(\frac{\pi}{4}) = 6$ أوجد $ص$

③ لتكن $د(س) = \frac{1}{2} ظاس جاس$

فإن $د(\frac{\pi}{4}) =$ ـــ

ملاحظة قبل أن نشتق البسط المثلثية وبذات إذا كانت

① الدالة كسرية

$صتا = \frac{-جاس}{جتا^2 س}$ ، $ص = \frac{1-جتا^2 س}{جتا^2 س}$

② جمع أو طرح نسبتية

$ص = جا^2 س + جتا^2 س$

③ حاصل ضرب نسبتية

$ص = ظاس ظتاس$

$ص = قاس جتاس$

علينا أولاً تذكر أو البحث عن قوانين تجعل الحل أسهل قبل الاشتقاق.

مثال لتكن $صتا = \frac{-جاس}{جتاس}$ أوجد $صتا$

الحل

$\therefore ص = \frac{جاس}{جتاس}$ $\therefore صتا = \frac{-جاس}{جتاس} \times \frac{1}{جتاس}$

$\therefore ص = ظاس$

$\therefore صتا = قا^2 س$

Scanned by CamScanner

مثال: ضع علاقة ص أو x

1) الدالة د(س) = ظا س ظتا س
دالة ثابتة ( )

2) إذا كانت د(س) = ٢ / جا س
فإن: د(π/٤) = ٧٢ ( )

3) إذا كان ص = (١ − جا٢س) / جا٢س
فإن: صتـ = جتا٢س ( )

الحل

1) ص = ظا س × ١ / ظا س
ص = ١
صتـ = صفر (ك)
لأن الصد الثابت مشتقته صفر

2) د(س) = ٢ قتا س
د(س) = −٢ قتا س ظتا س
د(π/٤) = −٢ قتا π/٤ × ظتا π/٤
= −٢ × ٧٢ × ١ = −٧٢ (×)

3) ص = جا٢س / جا٢س = ١
∴ صتـ = ١ (ك)

تمرين: أكمل الفراغات

1) ص = ٦ / ظا س
صتـ = ـــ

2) ص = ٢ / (١ + جتا٢س)

تمرين: ضع علاقة ص أو x

1) إذا كانت د(س) = جا س جتا س
فإن: د(π/٤) = −١ ( )

2) إذا كانت د(س) = جا س − جتا س
فإن: د(π/٤) = صفر ( )

تمرين: لتكن
ص = √(١ + جا٢س)
أثبت أن صتـ = √(١ − جا٢س)

3) ص = (ظتا٢س + قتا٢س) جا٢س
صتـ = ـــ

4) ص = جتا(١/س)
صتـ = ـــ

5) ص = ٢ س جا س جتا س
صتـ = ـــ

Scanned by CamScanner

مشتقة الدالة اللوغاريتمية

قبل أن نشتق الدالة اللوغاريتمية علينا تذكر خواص "لو" لسهولة الحل.

1. لو $س^{ن}$ = ن لو س
2. لو $س^{٧}$ = ٧ لو س
3. لو $\sqrt{س}$ = لو $س^{\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ لو س

4. لو (س × ص) = لو س + لو ص

لو (س جا س) = لو س + لو جا س
لو $\frac{س}{٢}$ = لو س + لو ٢

مثال: عبر كلا مما يأتي بصورة أبسط
لو (س − ٢) + لو (س + ٢) = لو $(س^{٢} - ٤)$

5. لو $\frac{س}{ص}$ = لو س − لو ص

مثال: لو ٣٢ − لو ٢ = ؟
(لو ٢٤ ، لو ٣ ، ٣ لو ٢)

6. لو ١ = صفر
7. لو هـ = ١

مثال: حل المعادلة
لو س − ١ = صفر

ملاحظة إذا كانت ص = لو د(س)
فإن: صـ = $\frac{د'(س)}{د(س)}$

أي أن: صـ = $\frac{\text{مشتقة ما داخل "لو"}}{\text{ما داخل "لو"}}$

ملاحظة ص = لو س
1. م.ت =]٠ ، ∞[
2. المدى = ح
3. منحنى الدالة اللوغاريتمية يمس النقطة (١ ، ٠)

مثال: ص = لو $\frac{1}{س}$
صـ = ؟

مثال: بين كلا مما يأتي ص أو x
1. إذا كانت ص = ٢ لو جا س
فإن: صـ = $\frac{٢}{ظا س}$ ( )
2. د(س) = جتا (لو س)
د'(س) = − جا (لو س) ( )
3. إذا كانت د(س) = $٣س^{٢}$ + ٢ لو س
فإن: د'(س) = ٦ ( )
4. إذا كان ص = ٢ لو ظا س
فإن: صـ = $\frac{٢}{ظتا س}$ ( )

الحل
1. صـ = $\frac{جتا س}{جا س}$ × ٢ = ٢ ظتا س
صـ = $\frac{٢}{ظا س}$ (س)
2. د'(س) = − جا (لو س) × $\frac{1}{س}$ (X)

Scanned by CamScanner

① (X) لأ ~ د(س) = ٣س + ٢س

∴ د(س) = ٢ + ٢ = ٥

② ص = ٤ لو قاس

صـ = ٤ × قاس ظاس / قاس = ٤ ظاس

= ٤ / ظتاس

∴ العبارة (X)

مثال لتكن ص = لو(٥س + ٤)

أوجد صـ

الحل

ص = لو(٥س + ٤)^(١/٢) = ١/٢ لو(٥س + ٤)

∴ صـ = ١/٢ × ٥ / (٥س + ٤) = ٥ / ٢(٥س + ٤)

مثال إذا كانت

ص = ٧ − لو(٧ / (س٢ − ١))

أوجد صـ

الحل

ص = ٧ − (لو ٧ − لو(س٢ − ١))

صـ = ٧ − (صفر − ١/٢ لو(س٢ − ١))

∴ صـ = صفر + ١/٢ × ٢س / (س٢ − ١)

صـ = س / (س٢ − ١)

مثال لتكن د(س) = س لو س

أوجد د(هـ) ② د(١) ③ د(ط)

الحل

∵ د(س) = س لو س (حاصل ضرب دالتين)

د(س) = س × ١/س + لو س × ١

∴ د(س) = ١ + لو س

① د(هـ) = ١ + لو هـ = ١ + ١ = ٢

② د(١) = ١ + لو ١ = ١ + صفر = ١

③ د(ط) = ١ + لو ط = ١ + ١ = ٢

مثال د(س) = هـ^(جاس) + لو(١ − جتاس)

علماً بأن د(π/٤) = ـــ

د(س) = لو جاس

د(س) = ـــ

مثال إذا كانت د(س) = لو جتاس

علماً بأن ① د(π/٤) = ـــ

② د(٣π/٤) = ـــ

الحل

د(س) = ٢ لو جتاس

د(س) = ٢ × −جاس / جتاس = −٢ ظاس

د(π/٤) = −٢ × ظا(π/٤) = −٢ × ١ = −٢

تمرين د(س) = لو س قاس + قاس

أوجد د(س)

① صـ = لو فا(هـ^س) ; أوجد صـ

مركز العزمي للتعليم واللوازم والمستندات

Scanned by CamScanner

٢٠١٤م

مثال إذا كان $د(س) = لو_{س^2 + ب}$

و $د(٤) = ١$ فأوجد $ب$ ـــــ

الحل

$$د(س) = \frac{س^2}{س^2 + ب}$$

$$\therefore د(٤) = \frac{٤ \times ٤}{٤^2 + ب} = ١$$

$$\frac{١٦}{١٦ + ب} = ١ \quad \therefore ١٦ + ب = ١٦$$

$$\therefore ب = ٨٠$$

٢٠١٥م

مثال أكمل الفراغات

① إذا كان $ب$ نسبة $صـ = لو_{س^2}$ فإن $صـ$ =

---

② $د(س) = ه^{س^2} + لو جاس$

فإن $د(\frac{\pi}{٤}) =$ ـــــ

---

③ $د(س) = لو_{٧} \sqrt{س^2 + ٥}$

$د'(س) =$ ـــــ

---

④ إذا كان $د(س) = لو_{س + ل}$

و $د(١) = ١$ فإن $ل =$ ـــــ

Scanned by CamScanner