مقدمة في الرياضيات
الجزء الاول

المعادلات الخطية والتربيعية والمتباينات الخطية
نظرية ذات الحدين

المدة الزمنية : الأسبوع الثاني والأسبوع الثالث

الفصل الاول

- معادلات الدرجة الاولى
- معادلات الدرجة الثانية
- المتباينات الخطية في متغير واحد

1\1- معادلات الدرجة الاولى

نتعرض كثيراً في حياتنا اليومية لبعض المشاكل الحسابية التي يتطلب حلها صياغتها أولاً في صورة معادلة رياضية ثم العمل على حل هذه المعادلة وهذا الحل ما هو إلا حل المشكلة التي تواجهنا، فمثلاً إذا طلب من احدنا رسم قطعة أرض مستطيلة الشكل بحيث يزيد طول قطعة الأرض عن عرضها بمقدار 2 سم ويكون محيطها مساوياً 60 سم فإننا سنجد أن الطول المطلوب يساوي 16 سم بينما العرض المطلوب سيكون 14 سم. السؤال الآن كيف أمكننا الوصول لهذه الإجابة؟ تكمن الإجابة عن هذا السؤال في مفهوم المعادلة الرياضية، وتحديداً في مثالنا هذا معادلات الدرجة الأولى في مجهول واحد، حيث أننا رمزنا لعرض قطعة الأرض بالرمز x وبالتالي سيكون الطول مساوياً $x+2$ ومن قانون محيط المستطيل نحصل على معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد التالية

$$2\times(x+x+2)=60$$

وبتطبيق بعض العمليات الجبرية عليها نحصل على قيمة المجهول x الذي يمثل عرض قطعة الأرض، مما سبق يمكننا أن نعرف المعادلة الرياضية كالتالي:

تعريف (1\3): المعادلة الرياضية: المعادلة الرياضية هي عبارة مؤلفة من تعبيرين رياضيين تفصل بينهما علامة التساوي $(=)$، ويسميان بطرفي المعادلة، ويحتويان على عدد من الرموز تسمى بالمتغيرات أو المجاهيل، وحل المعادلة يعني إيجاد قيم تلك المجاهيل التي تحقق المعادلة أي تحقق التساوي للطرفين، بمعنى أن يتساوى طرفي المعادلة عند التعويض بهذه القيم بدلاً من المجاهيل.

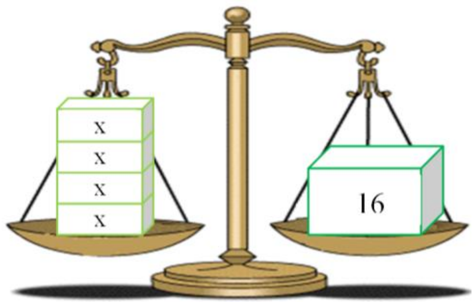
معادلة الدرجة الاولى في مجهول واحد

هي معادله شكلها العام على الصورة $ax+b=0$ بحيث أن a,b أعداد حقيقية و $a\neq 0$. ويكون حل هذه المعادلة على الصورة

$$x=\frac{-b}{a}$$

مثال (1\1): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $4x-16=0$

الحل: ننقل -16 من الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على



شكل (1\1)

بقسمة طرفي المعادلة على 4 نحصل على :

$$x = \frac{16}{4} = 4$$

مثال (1\2): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $3x + 27 = 0$

الحل: نقوم بنقل $+27$ من الطرف الأيسر الى الطرف الأيمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$3x = -27$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 نحصل على :

$$x = \frac{-27}{+3} = -9$$

مثال (1\3): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $-3x + 21 = 0$

الحل: ننقل $+21$ من الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$-3x = -21$$

بقسمة طرفي المعادلة على -3 نحصل على :

$$x = \frac{-21}{-3} = 7$$

مثال (1\4): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $2x + 5 = 15$

الحل: ننقل $+5$ من الطرف الأيسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

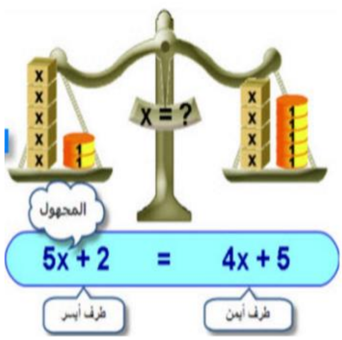
$$2x = 15 - 5 \Rightarrow 2x = 10$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 نحصل على :

$$x = \frac{10}{2} = 5$$

مثال (1\5): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $5x + 2 = 4x + 5$

الحل:



شكل (1\2)

ننقل $4x$ من الطرف الايمن الى الطرف الايسر مع تغيير إشارته وننقل $+2$ من الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$5x - 4x = 5 - 2 \quad \Rightarrow x = 3$$

مثال (1\6): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $-4(x+5)=40$

الحل: اولاً نقوم بفك الاقواس فنحصل على :

$$-4x-20=40$$

ننقل -20 من الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$-4x=40+20 \Rightarrow -4x=60$$

بقسمة طرفي المعادلة على -4 نحصل على :

$$x=\frac{60}{-4}=-15$$

مثال (1\7): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\frac{x}{2}=\frac{6}{3}$

الحل: نلاحظ أن المثال المقدم يحتوي على كسور ولذا لابد من التخلص منها كما يلي:

حاصل ضرب الوسطين يساوي حاصل ضرب الطرفيين، وعليه نحصل على :

$$(x)(3)=(2)(6)\Rightarrow 3x=12$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 نحصل على $x=\frac{12}{3}=4$

مثال (1\8): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\frac{x+1}{2}=\frac{1}{3}$

الحل: نلاحظ أن المثال في صورة كسرية، ولذا يجب التخلص منها وذلك بتطبيق قاعدة تساوي نسبتين وهي حاصل ضرب الوسطين يساوي حاصل ضرب الطرفيين، وعليه نحصل على :

$$(x+1)(3)=(1)(2)\Rightarrow 3x+3=2$$

ننقل $+3$ من الطرف الأيسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$3x=-1$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3 نحصل على :

$$x=\frac{-1}{3}$$

مثال (1\9): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\sqrt{x}=9$

الحل: نلاحظ أن المثال المقدم يحتوي على جذر ولذا لابد من التخلص منها كما يلي:

بتربيع طرفي المعادلة نحصل على $x=(9)^2=81$

مثال (1\10): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\sqrt{x+1}=3$

الحل: نلاحظ أن المثال المقدم يحتوي على جذر تربيعي ولذا لابد من التخلص منها كما
يلي:
بتربيع طرفي المعادلة نحصل على

$$x+1=(3)^2=9 \Rightarrow x+1=9$$

ننقل $+1$ من الطرف الأيسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$x=9-1 \;\Rightarrow x=8$$

مثال (11\1): أوجد قيمة x التي تحقق المعادلة $\sqrt[3]{x-1}=2$
الحل: نلاحظ أن المثال المقدم يحتوي على جذر تكعيبي ولذا لابد من التخلص منه كما
يلي: بتكعيب الطرفين نحصل على

$$x-1=(2)^3=8$$

ننقل -1 من الطرف الأيسر الى الطرف الايمن مع تغيير إشارته لنحصل على

$$x=8+1 \;\Rightarrow x=9$$

تمارين(1\1):

أوجد حل المعادلات التالية :

1- $2x-9=1$

2- $4x+2=0$

3- $3x-1=0$

4- $3x+1=2x-5$

5- $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1}{3}$

6- $\sqrt{x-1}=3$

7- $\sqrt[3]{x+2}=2$

8- $\sqrt[4]{x}=2$

9- $\sqrt{3x-1}-3=-1$

10- $\sqrt{x+3}=2$

2/1: معادلات الدرجة الثانية

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد هي المعادلة على الصورة $ax^2+bx+c=0$ حيث a,b,c ثوابت حقيقية ، $a\neq 0$.
وحل هذه المعادلة يعطى على وجه العموم من القانون العام وهو:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

وهذان الحلان $x_{1,2}$ يعتمدان على المقدار تحت الجذر التربيعي $\Delta=b^2-4ac$
والذي يسمى مميز المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ وهذا المقدار يحدد نوع جذري المعادلة حيث يمكن أن يكون الجذران متساويان أو حقيقيان مختلفان أو مركبان مترافقان وذلك عندما يكون المميز صفراً أو عدداً حقيقياً موجباً أو عدداً حقيقياً سالباً، على الترتيب.

1) إذا كان $\Delta=b^2-4ac>0$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.
2) إذا كان $\Delta=b^2-4ac=0$ فإن للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر.
3) إذا كان $\Delta=b^2-4ac<0$ فليس للمعادلة جذور حقيقية، وعندها نقول ان للمعادلة جذرين مركبين مختلفين مترافقين.

ملاحظة
معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد تحل بأكثر من طريقة إلا أن أشملها هو أن تحل بطريقة القانون العام

مثال (1\12): حل المعادلة التالية $x^2+4x-5=0$
الحل: نستخدم القانون العام

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1,b=4,c=-5$

$$\therefore x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}$$

$$\therefore x_1=\frac{-4+6}{2}=\frac{2}{2}=1$$

أو

$$x_2=\frac{-4-6}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{1,-5\}$.

مثال (13\1): حل المعادلة التالية $x^2 - x - 12 = 0$

الحل: نستخدم القانون العام

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a = 1, b = -1, c = -12$

$$\therefore x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

أو

$$x_2 = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

أذاً مجموعة الحل هي $\{4, -3\}$

مثال (14\1): حل المعادلة التالية $3x^2 + 4x = 4$

الحل: نضع المعادلة في الصورة القياسية وهي $3x^2 + 4x - 4 = 0$

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a = 3, b = 4, c = -4$

$$\therefore x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-4+8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

أو

$$x_2 = \frac{-4-8}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

إذاً مجموعة الحل هي $\left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$.

مثال (15\1): حل المعادلة التالية $x^2 = -25 - 10x$

الحل: نضع المعادلة في الصورة القياسية وهي $x^2 + 10x + 25 = 0$

نستخدم القانون العام

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1,b=10,c=25$

$$\therefore x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{100-100}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{-10\pm 0}{2}$$

إذاً المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان حيث أن المميز يساوي صفراً

$$\therefore x_1=\frac{-10}{2}=-5$$

جذر حقيقي مكرر

$$\therefore x_2=\frac{-10}{2}=-5$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-5\}$.

مثال (16\1): حل المعادلة التالية $x^2+2x+3=0$

الحل: نستخدم القانون العام

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1,b=2,c=3$

$$\therefore x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

وحيث أن المميز $\Delta=b^2-4ac=-8<0$ إذاً المعادلة ليس لها جذور حقيقية.

هناك بعض الحالات الخاصة لمعادلة الدرجة الثانية $ax^2+bx+c=0$

1) إذا كانت $c=0$ تصبح معادلة الدرجة الثانية على الصورة:

$$ax^2+bx=0$$

ولحلها نأخذ عامل مشترك:

$$x(ax+b)=0$$

إذاً هناك احتمالان و هما

إما

$$x_1=0$$

أو

$$(ax_2+b)=0 \Rightarrow x_2=-\frac{b}{a}$$

إذاً مجموعة الحل هي $\left\{0,-\frac{b}{a}\right\}$.

2) إذا كانت $b=0, c=0$ تصبح معادلة الدرجة الثانية على الصورة:

$$ax^2=0$$

وحيث أن $a\neq 0$ إذاً يكون الحل هو

$$x_1=x_2=0$$

مجموعة الحل هي $\{0\}$.

3) إذا كانت $b=0$ تصبح معادلة الدرجة الثانية على الصورة:

$$ax^2+c=0$$

ويكون الحل هو

$$ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

بشرط أن يكون ما تحت الجذر عدد موجب أي أن $\frac{c}{a}<0$ حتى يكون للمعادلة جذران حقيقيان.

مثال (17\1): حل المعادلة الآتية: $9x^2-49=0$

الحل: نكتب المعادلة على الصورة $9x^2=49$

$$x^2=\frac{49}{9}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{49}{9}}=\pm\frac{7}{3}$$

$$\therefore x_1=\frac{7}{3} \quad , \quad x_2=-\frac{7}{3}.$$

مثال (18\1): حل المعادلة الآتية: $x^2+5x=0$

الحل: نأخذ عامل مشترك $x(x+5)=0$

إذاً هناك احتمالان وهما

إما $x_1=0$

أو $(x+5)=0 \Rightarrow x_2=-5$

إذاً مجموعة الحل هي $\{0,-5\}$.

مثال (19\1): حل المعادلة الآتية: $x^2-5x+6=0$

الحل: يمكن حل هذه المعادلة بطريقتين

الطريقة الأولى باستخدام التحليل:

$$(x-2)(x-3)=0$$

إذاً هناك احتمالان و هما

إما

$$x-2=0 \Rightarrow x_1=2$$

أو

$$x-3=0 \Rightarrow x_2=3$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{2,3\}$،

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1, b=-5, c=6$

$$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$$\therefore x_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

أو

$$x_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{2,3\}$.

مثال (20\1): حل المعادلة الآتية: $x^2+2x-3=0$.

الحل: يمكن حل هذه المعادلة بطريقتين

الطريقة الاولى باستخدام التحليل:

$$(x+3)(x-1)=0$$

إذاً هناك احتمالان و هما

إما

$$x+3=0 \Rightarrow x_1=-3$$

أو

$$x-1=0 \Rightarrow x_2=1$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-3,1\}$،

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a = 1, b = 2, c = -3$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

أو

$$x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-3,1\}$.

مثال (21\1): حل المعادلة الآتية: $3x^2 + 4x - 4 = 0$

الحل: يمكن حل هذه المعادلة بطريقتين

الطريقة الأولى باستخدام التحليل:

$$(3x - 2)(x + 2) = 0$$

إذاً هناك احتمالان وهما

إما

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$$

أو

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

إذاً مجموعة الحل هي $\left\{-2, \frac{2}{3}\right\}$،

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a = 3, b = 4, c = -4$

$$\therefore x=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{6}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{6}=\frac{-4\pm 8}{6}$$

$$\therefore x_1=\frac{-4+8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

أو

$$x_2=\frac{-4-8}{6}=\frac{-12}{6}=-2$$

إذاً مجموعة الحل هي $\left\{-2,\frac{2}{3}\right\}$.

مثال (22\1): حل المعادلة الآتية: $\frac{x}{3}=\frac{5}{x+2}$.

الحل: باستخدام الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين= حاصل ضرب الوسطين)

$$x(x+2)=15$$

$$x^2+2x-15=0$$

ويمكن حل المعادلة الاخيرة بطريقتين

الطريقة الأولى باستخدام التحليل:

$$(x-3)(x+5)=0$$

إذاً هناك احتمالان و هما

إما

$$x-3=0 \Rightarrow x_1=3$$

أو

$$x+5=0 \Rightarrow x_2=-5$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-5,3\}$ ،

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1, b=2, c=-15$

$$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

أو

$$x_2 = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-5, 3\}$.

مثال (23\1): حل المعادلة الآتية: $\frac{x^2+x}{3} = \frac{1-x}{2}$

الحل: باستخدام الضرب التبادلي (حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين)

$$2(x^2+x) = 3(1-x)$$

$$2x^2+2x = 3-3x$$

$$2x^2+5x-3 = 0$$

ويمكن حل المعادلة الاخيرة بطريقتين

الطريقة الأولى باستخدام التحليل:

$$(2x-1)(x+3) = 0$$

إذاً هناك احتمالان وهما

إما $2x-1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

أو

$$x+3 = 0 \Rightarrow x_2 = -3$$

إذاً مجموعة الحل هي $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$،

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a = 2, b = 5, c = -3$

$$\therefore x = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$\therefore x_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

أو

$$x_2=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

إذاً مجموعة الحل هي $\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$.

مثال (24\1): حل المعادلة الآتية: $\sqrt{x+5}=x+3$

الحل: للتخلص من الجذر التربيعي نقوم بتربيع الطرفين ومنها نجد أن

$$\left[\sqrt{x+5}\right]^2=[x+3]^2$$

$$x+5=\left[x^2+6x+9\right]$$

$$x^2+5x+4=0$$

ويمكن حل المعادلة الاخيرة بطريقتين

الطريقة الأولى باستخدام التحليل:

$$(x+1)(x+4)=0$$

إذاً هناك احتمالان وهما

إما

$$x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$$

أو

$$x+4=0 \Rightarrow x_2=-4$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-1,-4\}$،

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a=1,b=5,c=4$

$$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}$$

$$\therefore x_1=\frac{-5+3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

أو

$$x_2 = \frac{-5-3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

إذاً مجموعة الحل هي $\{-1,-4\}$.

مثال (25\1): حل المعادلة الآتية: $\sqrt{8x-x^2} = 4$

الحل: للتخلص من الجذر التربيعي نقوم بتربيع الطرفين ومنها نجد أن

$$\left[\sqrt{8x-x^2}\right]^2 = [4]^2$$

$$8x - x^2 = 16$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

ويمكن حل المعادلة الاخيرة بطريقتين

الطريقة الأولى باستخدام التحليل:

$$(x-4)(x-4) = 0$$

إذاً يوجد جذر مكرر وهو

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 4$$

الطريقة الثانية باستخدام القانون العام:

نستخدم القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث $a = 1, b = -8, c = 16$

$$\therefore x = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2}$$

إذاً يوجد جذر مكرر وهو

$$\therefore x_1 = x_2 = \frac{8}{2} = 4$$

تمارين (2\1)

أوجد حل المعادلات الاتية:

1) $x^2+2x-3=0$

2) $x^2+3x-4=0$

3) $x^2+10x-20=0$

4) $3x^2+5x-2=0$

5) $x^2-2x-1=0$

6) $5x^2+6x=4$

7) $3x^2+6x=0$

8) $2x^2+11x-3=0$

9) $x^2+3=28$

10) $x^2=4-x$

11) $6x=x^2-12$

12) $x^2=7x$

13) $x(2x+3)=1$

14) $x(x-4)+4=7$

15) $\frac{1}{x}-\frac{(x+3)}{2}=0$

16) $\frac{x^2}{2}=\frac{(3x-1)}{3}$

3\1- المتباينات الخطية في متغير واحد

بفرض أن لدينا عددين حقيقيين $a,b\in\mathbb{R}$ وكانت $a\neq b$ فأما أن تكون a أصغر من b وتكتب $a<b$ وأما أن تكون a أكبر من b وتكتب $a>b$، وعندئذ نقول أن العددين a,b متباينان أي غير متساويين.

تعريف: المتباينة: المتباينة هي عبارة رياضية مؤلفة من تعبيرين رياضيين أو أكثر، تفصل بينهم أحدى العلامات التالية $(>,\geq,<,\leq)$، وتسمى علامات التباين، وتحتوي أطراف المتباينة على عدد من الرموز تسمى بالمتغيرات أو المجاهيل،

وحل المتباينة يعني إيجاد الفترة التي تنتمي إليها تلك المجاهيل التي تحقق المتباينة.
والآن لنتعرف سويا على خواص المتباينات.

خاصية الإضافة:

أ- أذا كانت $a,b,c\in\mathbb{R}$ وكانت $a<b$ فإن:

$$a\pm c<b\pm c$$

خاصية الضرب:

أ- أذا كانت $a,b,c\in\mathbb{R}$ وكانت $a<b$ و $c>0$ فإن:

$$\text{(i)}\quad a\times c<b\times c$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$$

ب- أذا كانت $a,b,c\in\mathbb{R}$ وكانت $a<b$ و $c<0$ فإن :

$$\text{(i)}\quad a\times c>b\times c$$

$$\text{(iii)}\quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

المتباينة الخطية (من الدرجة الاولى) في متغير واحد هي تعبير جبري يأخذ إحدى الصور الاتية:

$ax+b>0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b<0$ أو $ax+b\leq 0$

حيث $a\neq 0$, $a,b\in\mathbb{R}$

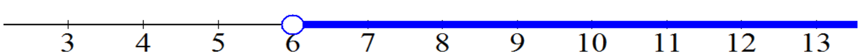
ولحل المتباينة الخطية نضع x في طرف وباقي الحدود التي لا تشمل x في الطرف الآخر ثم نستخدم خواص المتباينات.

مثال (26\1): أوجد حل المتباينة $x-2>4$.

الحل

$$x-2>4$$
$$x>4+2$$
$$x>6$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة المفتوحة $(6,\infty)$



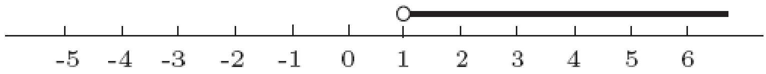
شكل (3\1)

مثال (27\13): حل المتباينة $5x-5>0$.

الحل:

$$5x-5>0$$
$$5x>5$$
$$x>1$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة $(1,\infty)$



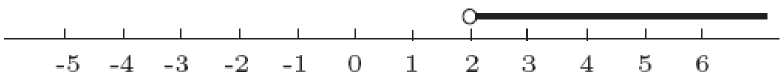
شكل (4\1)

مثال (28\1): حل المتباينة $6x+1<9x-5$.

الحل:

$$
\begin{aligned}
6x+1&<9x-5\\
1+5&<9x-6x\\
6&<3x\\
\frac{6}{3}&<x\\
2&<x
\end{aligned}
$$

أى أن $x>2$ ، إذاً حل المتباينة هو الفترة $(2,\infty)$



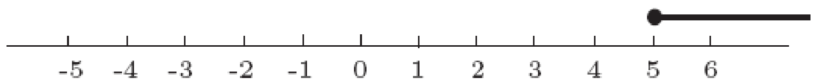
شكل (5\1)

مثال (29\1): حل المتباينة $5x+1\geq 2x+16$.

الحل:

$$
\begin{aligned}
5x+1&\geq 2x+16\\
5x-2x&\geq 16-1\\
3x&\geq 9\\
x&\geq \frac{15}{3}\\
x&\geq 5
\end{aligned}
$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة $[5,\infty)$



شكل (6\1)

حل المتباينة من الدرجة الاولى والتي تحتوي على قيمة مطلقة

لحل هذا النوع من المتباينات نستخدم أحدى القاعدتين الآتيتين:

$$(1)\ |E|\le k \Leftrightarrow -k\le E\le k \quad ; \quad |E|<k \Leftrightarrow -k<E<k$$

$$(2)\ |E|\ge k \Leftrightarrow E\ge k \ \text{أو}\ E\le -k \quad ; \quad |E|>k \Leftrightarrow E>k \ \text{أو}\ E<-k$$

مثال (30\1): حل المتباينة الآتية:

$$|2x-5|\ge 7$$

الحل: نستخدم الخاصية

$$|E|\ge k \Leftrightarrow E\ge k \ \text{أو}\ E\le -k$$

$$2x-5\ge 7 \quad \text{أو} \quad 2x-5\le -7$$

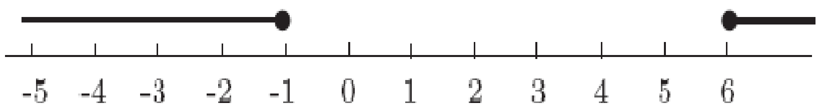
$$2x\ge 7+5 \quad \text{أو} \quad 2x\le -7+5$$

$$2x\ge 12 \quad \text{أو} \quad 2x\le -2$$

$$x\ge \frac{12}{2} \quad \text{أو} \quad x\le \frac{-2}{2}$$

$$x\ge 6 \quad \text{أو} \quad x\le -1$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة $(-\infty,-1]\cup[6,\infty)$



شكل (7\1)

مثال (31\1): حل المتباينة الآتية:

$$|5x-8|\le 12$$

الحل: نستخدم الخاصية $|E|\le k \Leftrightarrow -k\le E\le k$

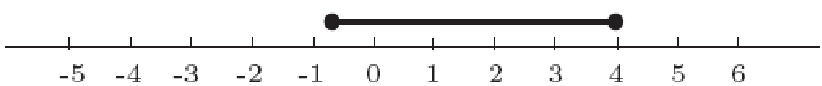
$$-12\le 5x-8\le 12$$

$$-12+8\le 5x\le 12+8$$

$$-4\le 5x\le 20$$

$$-\frac{4}{5}\le x\le 4$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة المغلقة $\left[\frac{-4}{5},4\right]$



شكل (8\1)

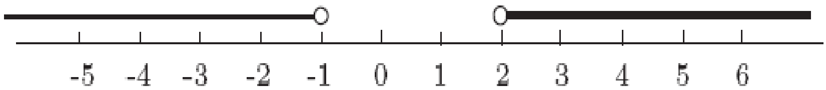
مثال (32\1): حل المتباينة الآتية:

$$|2-4x|>6$$

الحل: نستخدم الخاصية $|E|>k \Leftrightarrow E>k \quad or \quad E<-k$

$$2-4x>6 \quad \text{أو} \quad 2-4x<-6$$
$$2-6>4x \quad \text{أو} \quad 2+6<4x$$
$$-4>4x \quad \text{أو} \quad 8<4x$$
$$-\frac{4}{4}>x \quad \text{أو} \quad \frac{8}{4}<x$$
$$-1>x \quad \text{أو} \quad 2<x$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$



شكل (9\1)

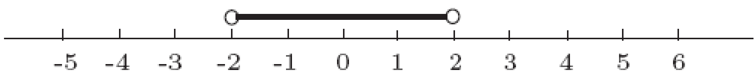
مثال (33\1): حل المتباينة الآتية:

$$|x|<2$$

الحل:

$$-2<x<2$$

إذاً حل المتباينة هو الفترة $(-2,2)$



شكل (10\1)

تمارين(3\1)

حل المتباينات الاتية:

1) $2x+5\le 7$

2) $5x+2<12$

3) $3x+4\le 6x-7$

4) $x-8\ge 4-3x$

5) $10x-1>7x-3$

6) $4\le 3x-5<7$

7) $9\ge 2+5x>4$

8) $|2x-6|\le 1$

9) $|4x+5|>3$

10) $|x-3|\ge 8$

الفصل الثاني

نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نظرية ذات الحدين لأي أس سالب أو غير صحيح

أولاً : نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نعلم من دراستنا السابقة طريقة إيجاد قوى مقدار جبري مكون من حدين وذلك كالآتي :

$$(x+y)^1=(x+y),(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

فإذا تأملنا المقادير السابقة يمكننا استنتاج الآتي :

- عدد الحدود في مفكوك المقدار يزيد عن الأس بمقدار 1.
- قوى x تبدأ بالأس ثم تتناقص إلى أن تصل إلى أس صفر والعكس قوى y تبدأ من الصفر إلي أس المقدار.
- معامل الحد الثاني في المفكوك هو الأس ثم معامل أي حد نحصل عليه بضرب معامل الحد السابق له مباشرة في أس x مقسوماً على رتبته.

ومن هذه النتائج الثلاث التي توصلنا إليها يمكننا وضع المقدار في الصورة الآتية :

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^{n-3}y^3+\cdots+y^n$$

أو على الصورة:

$$(x+y)^n=x^n+C_1^n x^{n-1}y+C_2^n x^{n-2}y^2+\cdots+C_n^n\,y^n=\sum_{r=1}^{n}C_r^n x^{n-r}y^r$$

حيث يسمى $U_{r+1}=C_r^n x^{n-r}y^r$ بالحد العام في المفكوك

ملاحظات:

(1) $$C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

حيث $$n!=n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

(2) $$(1+x)^n=1+C_1^n x+C_2^n\,x^2+\cdots+x^n$$

مثال (1)

أثبت أن :

$$\text{(i)}\quad C_0^n=C_n^n=1$$
$$\text{(ii)}\quad C_1^n=C_{n-1}^n=n$$
$$\text{(iii)}\quad C_r^n=0!\quad,\quad r>n+1$$
$$\text{(iv)}\quad C_r^n+C_{r-1}^n=C_r^{n+1}$$

الحل:

بالتعويض المباشر في الملاحظة (1) ينتج :

$$\text{(i)}\quad C_0^n=\frac{n\,!}{0\,!\,(n-0)\,!}=1$$

$$C_n^n=\frac{n\,!}{n\,!\,(n-n)!}=\frac{n\,!}{n\,!\,0\,!}=1$$

$$\text{(ii)}\quad C_1^n=\frac{n\,!}{1\,!\,(n-1)!}=n\qquad,\qquad C_{n-1}^n=\frac{n\,!}{(n-1)\,!\,1\,!}=n$$

(iii) عندما $r > n+1$ يتضح من الطرف الأيمن في الملاحظة (1) أن البسط يشمل العامل (n-n) وبالتالي فإن $C_r^n = 0$ لجميع قيم n عندما $r > n+1$.

(iv)الطرف الأيسر ل

$$\mathrm{C_r^n + C_{r-1}^n = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} + \frac{n\,!}{(r-1)\,!\,(n-r+1)}}$$
$$\mathrm{= \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,(r-1)\,!}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)}$$
$$\mathrm{= \frac{n\,!\,(n+1)}{r\,!\,(n-r+1)\,!} = \frac{(n+1)\,!}{r\,!\,(n-r+1)\,!} = C_r^{n+1}}$$

وهذا يساوي الطرف الأيمن .

مثال (2)

أثبت أن :

$$C_r^{m+n} = C_r^m + C_{r-1}^m \times C_1^n + C_{r-2}^m \times C_2^n + \cdots + C_1^m \times C_{r-1}^n + C_r^n$$

الحل:

نلاحظ أن الطرف الأيسر هو معامل x^r في مفكوك $(1+x)^{m+n}$ ومن المتطابقة :

$$(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n \qquad (1)$$

نستنتج أن معامل x^r في الطرفين يتساوى وبفك الطرف الأيمن في (1) ينتج :

$$(1+x)^{m+n} = (1 + C_1^m\,x + C_2^m\,x^2 + \cdots\; C_{r-1}^m\,x^{r-1} + C_n^n\,x^n + \ldots + x^m)(1 + C_1^n\,x + \cdots + x^n) \qquad (2)$$

والحد المشتمل على x^r في الطرف الأيمن من (2) هو :

$$(1\,.C_r^m + C_{r-1}^m . C_1^n + \cdots + C_1^m\,.C_{r-1}^n + C_r^n)\,x^r$$

وبمساواة معاملي x^r في طرفي المتطابقة (2) نحصل على المطلوب .

مثال (3)

جد مفكوك $(1-x)^6$

الحل:

$$(1-x)^6 = 1 + 6\,(-x) + \frac{(6)(5)}{2\,!}(-x)^2 + \frac{(6)(5)(4)}{3\,!}(-x)^3 + \frac{(6)(5)(4)(3)}{4\,!}(-x)^4 + \frac{(6)(5)(4)(3)(2)}{5\,!}(-x)^5 + (-x)^6$$
$$= 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$$

مثال (4)

جد مفكوك $(2+3x)^5$

الحل:

$$(2+3x)^5 = 2^5\left(1 + \frac{3}{2}x\right)^5$$

$$= 2^5\left(1 + 5\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{(5)(4)}{2\,!}\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \frac{(5)(4)(3)}{3\,!}\left(\frac{3}{2}x\right)^3 + \frac{(5)(4)(3)(2)}{4\,!}\left(\frac{3}{2}x\right)^4 + \left(\frac{3}{2}x\right)^5\right)$$

$$= 32\left(1 + \frac{15}{2}x + \frac{45}{2}x^2 + \frac{135}{4}x^3 + \frac{405}{16}x^4 + \frac{243}{32}x^5\right)$$

$$= 32 + 240x + 720x^2 + 1080x^3 + 810x^4 + 243x^5$$

ايجاد أى حد معين في مفكوك ذات الحدين

الحد رقم r+1 للمفكوك $(a+b)^n$ هو

$$\binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r$$

مثال (5)

أوجد الحد الخامس في مفكوك $(x+y)^5$

الحل:

اذا r=4 و عليه فإن الحد الخامس هو

$$\binom{10}{4} x^{10-4}\, y^4 = 210x^6y^4$$

ثانياً: نظرية ذات الحدين لأي أس سالب أو غير صحيح

في هذه الحالة يعبر عن المفكوك من الصورة * ولكن عدد الحدود في هذه الحالة تكون غير منته وذلك كالآتي :

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}y^r + \cdots$$

وعند تطبيق هذه القاعدة نجعل المقدار على الصورة $(1+x)^n$ وذلك بعد استخراج عامل مشترك وذلك للسهولة في التطبيق, وبذلك يكون المفكوك كالآتي :

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

ولكي يتقارب هذا المفكوك لا بد أن يتحقق الشرط $|x| < 1$ أما إذا كان $|x| > 1$ فإن المقدار يكون غير موجود أي متباعداً.

مثال (6)

أكتب الحدود الأربعة الأولى في مفكوك كل من :

$$(i)(1+3x)^{-5} \qquad (ii)\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (iii)(2x+5)^{\frac{-3}{2}}$$

ثم اذكر شرط وجود المفكوك في كل حالة :

الحل:

$$(i)(1+3x)^{-5} = 1+(-5)(3x)+\frac{(-5)(-5-1)}{2!}(3x)^2 + \frac{(-5)(-5-1)(-5-2)}{3!}(3x)^3$$

$$= 1-15x+135x^2-945x^3$$

شرط وجود المفكوك هو $|3x|<1$ أي $x \in \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$(ii)\left(x+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{1}{2}(3x)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(3x)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(3x)^3\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2+\frac{81}{16}x^3\right)$$

شرط وجود المفكوك هو $|3x|<1$ أي $x \in \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$(iii)\ (2x+5)^{\frac{-3}{2}} = (5)^{\frac{-3}{2}}\left(1+\frac{2}{5}x\right)^{\frac{-3}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}x\right)+\frac{\frac{-3}{2}\left(\frac{-3}{2}-1\right)}{2}\left(\frac{2}{5}x\right)^2 + \frac{\frac{-3}{2}\left(\frac{-3}{2}-1\right)\left(\frac{-3}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{2}{5}x\right)^3\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3\left(1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}x^2-\frac{7}{50}x^3\right)$$

شرط وجود المفكوك $\left|\frac{2}{5}x\right|<1$ أي $x \in \left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

مثال (6)

مستخدماً نظرية ذات الحدين جد المفكوكات الآتية :

$$(i)\ \frac{1}{1+x} \qquad (ii)\ \frac{1}{1-x} \qquad (iii)\ \frac{1}{(1+x)^2} \qquad (iv)\ \frac{1}{(1-x)^2}$$

سنقوم بحل الحالة (iv) والباقي يترك تمريناً للقارئ.

الحل:

$$\text{(iv)}\ \frac{1}{(1-\mathrm{x})^2} = (1-\mathrm{x})^{-2}$$

$$= 1 - 2(-x) + \frac{-2(-2-1)}{2!}(-\mathrm{x})^2 + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!}(-\mathrm{x})^3 + \cdots$$

$$= 1 + 2\mathrm{x} + 3\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x}^3 + \cdots$$

تمارين

1- أوجد مفكوكات المقادير الآتية محدداً فترة تقارب كل مفكوك:

$(i)\quad (1-2x)^6 \qquad (ii)\quad (7+3x)^5 \qquad (iii)\quad \left(3+2x^{\frac{1}{4}}\right)^4$

$(iv)\quad (11+x)^7 \qquad (v)\quad \dfrac{1}{1-x} \qquad (vi)\quad \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$(vii)\quad (2-x)^{-3} \qquad (viii)\quad (2x+3)^{5/2} \qquad (ix)\quad \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$