أولاً:

السؤال الأول:

$A(1,1,2)$ و $B(3,1,-4)$ و $C(2,0,-1)$ و $H(2,-9,-1)$

1) ناظم المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو $\vec{n} = \overrightarrow{AB}(2,0,-6)$

المعادلة من الشكل $2x-6z+d=0$

المستوي يمر بالنقطة $I(2,1,-1)$ منتصف $[AB]$

$4+6+d=0$ أي $d=-10$

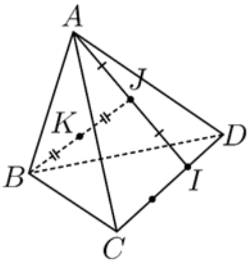
$2x-6z-10=0$ وتكافئ $x-3z-5=0$

2) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (1,-10,-3).(-1,-1,3) = -1+10-9=0$ أي $AH \perp BC$

$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = (0,-9,0).(2,0,-6) = 0+0+0=0$ أي $CH \perp AB$

وبالتالي H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

السؤال الثاني:



1) I تحقق العلاقة $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

أي $3\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{ID}$ وتكافئ $\overrightarrow{CI} + 2\overrightarrow{DI} = \vec{0}$

وبالتالي $(I,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(D,2)$

J منتصف $[AI]$ أي أن $(J,6)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $(A,3)$

K منتصف $[BJ]$ أي أن $(K,12)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(J,6)$ و $(B,6)$

حسب الخاصة التجميعية:

تكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,3)$ و $(B,6)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$.

2) بما أن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,3)$ و $(B,6)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ فإن:

$$3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 12\overrightarrow{MK}$$

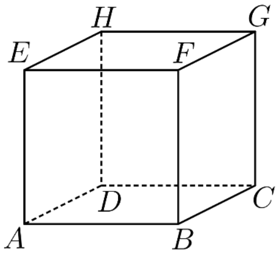
وبالتالي العلاقة $\left\|3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\right\| = 12$ تكافئ

$$\left\|12\overrightarrow{MK}\right\| = 12$$

$$\left\|\overrightarrow{MK}\right\| = 1$$

وبالتالي مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها K ونصف قطرها 1

السؤال الثالث:



1) $$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}\overset{?}{=}2\overrightarrow{DF}$$

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=2(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DH})$$

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DH})$$

$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DF}$$

2) $$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DG}-\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DG}\right)-\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DF}\right)-\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DH}$$

$$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DB}$$

وبالتالي M تنطبق على B

السؤال الرابع:

1) نفرض $M'(x,y,z)$ فهي تحقق العلاقة $\overrightarrow{MM'}=k\overrightarrow{n_P}$

$$(x-2,y,z-4)=k(1,-2,1)=(k,-2k,k)$$

ومنه $\begin{cases} x=k+2 \\ y=-2k \\ z=k+4 \end{cases}$ وبما أن M' نقطة من P فهي تحقق معادلته: $P:x-2y+z=0$

$k+2+4k+k+4=0$ أي $k=-1$ وبالتالي $\begin{pmatrix} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{pmatrix}$ أي $M'(1,2,3)$.

2) $$R=dist(M,P)=\frac{|2-0+4|}{\sqrt{1+4+1}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

معادلة الكرة $(x-2)^2+y^2+(z-4)^2=6$

السؤال الخامس:

1) $$\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}=(2,-2,-1).(3,4,-2)=6-8+2=0$$

وبالتالي المستويين P و Q متعامدين.

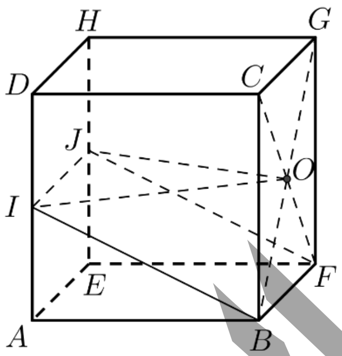
2) $$dist(A,P)=\frac{|8-6+2-1|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{3}{3}=1$$

$$dist(A,Q)=\frac{|12+12+4+1|}{\sqrt{9+16+4}}=\frac{29}{\sqrt{29}}=\sqrt{29}$$

$$\left(dist(A,d)\right)^2=\left(dist(A,P)\right)^2+\left(dist(A,Q)\right)^2=1+29=30$$

وبالتالي $dist(A,d)=\sqrt{30}$

ثانياً:



1) $B(1,0,0)$ و $F(1,1,0)$ و $I\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$.

2) $\vec{n}.\overrightarrow{BF}=(1,0,2).(0,1,0)=0+0+0=0$ وبالتالي $\vec{n}\perp\overrightarrow{BF}$

$\vec{n}.\overrightarrow{BI}=(1,0,2).\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)=-1+0+1=0$ وبالتالي $\vec{n}\perp\overrightarrow{BI}$

وبالتالي ناظم المستوي $(BFJI)$ هو $\vec{n}(1,0,2)$

معادلة المستوي من الشكل $x+2z+d=0$

B نقطة من المستوي $(BFJI)$ فهي تحقق معادلته $1+d=0$ أي $d=-1$

$$(BFJI): x+2z-1=0$$

3) لدينا $O\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ وبالتالي $dist(O,BFJI)=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

لدينا $\overrightarrow{BF}(0,1,0)$ و $\overrightarrow{BI}\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$ أي $BF=1$ و $BI=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

ومنه مساحة المربع $(BFJI)$ تساوي $S=BF\times BI=1\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

وبالتالي حجم الهرم $(OBFJI)$ يساوي $V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{6}$

4) لدينا $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_P}(1,0,2)$ وبالتالي:

$$d:\begin{cases} x=t+1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=2t+\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad : t\in\mathbb{R}$$

5) نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي $(BFJI): x+2z-1=0$

$$t+1+2\left(2t+\frac{1}{2}\right)-1=0$$

$t+1+4t+1-1=0$ أي أن $t=-\dfrac{1}{5}$

نعوض قيمة t في المعادلات الوسيطية فنجد $\begin{pmatrix} x=-\dfrac{1}{5}+1=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10} \end{pmatrix}$ أي $N\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{10}\right)$

6) النقاط B و F و I و N تقع في مستوٍ واحد وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BN}$ مرتبطة خطياً

وبالتالي يوجد عددين حقيقيين a و b بحيث $\overrightarrow{BN}=a\overrightarrow{BF}+b\overrightarrow{BI}$

$$\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{2},\frac{1}{10}\right)=a(0,1,0)+b\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)=\left(-b,a,\frac{1}{2}b\right)$$

ومنه نجد $a=\dfrac{1}{2}$ و $b=\dfrac{1}{5}$ وبالتالي $\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BF}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BI}$

$$10\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{BF}+2\overrightarrow{BI}$$

$$10\overrightarrow{BN}=5\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{NF}+2\overrightarrow{BN}+2\overrightarrow{NI}$$

$$3\overrightarrow{BN}+5\overrightarrow{FN}+2\overrightarrow{IN}=\vec{0}$$

وبالتالي N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2)$ و $(B,3)$ و $(F,5)$

انتهى حل النموذج الأول

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:

$A(0,1,0)$ و $B(0,7,0)$ و $C(-2,1,5)$ و $D(2,3,-5)$

1) الشعاعين $\overrightarrow{AB}(0,6,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,0,5)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

2) نبحث عن عددين a و b بحيث تتحقق العلاقة $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$

$$(2,2,-5)=a(0,6,0)+b(-2,0,5)=(-2b,6a,5b)$$

بالمطابقة نجد $-2b=2$ ، $6a=2$ ، $5b=-5$ وبالتالي $a=\frac{1}{3}$ و $b=-1$ أي $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

ومنه الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً وبالتالي النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

3) معادلة الأسطوانة $x^2+z^2=36$ و $1\le y\le 7$

السؤال الثاني:

$A(2,1,1)$ و $B(-1,-1,0)$ و $P: x-3z=1$

1) نفرض $\overrightarrow{n_Q}(a,b,c)$ ناظم المستوي Q فهو يحقق:

$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_P}=0$ أي $(a,b,c).(1,0,-3)=0$ أي $a-3c=0\ ...(1)$

$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB}=0$ أي $(a,b,c).(-3,-2,-1)=0$ أي $-3a-2b-c=0\ ...(2)$

نفرض $c=1$ ، نعوض في (1) فنجد $a=3$ ، نعوض في (2) فنجد $-9-2b-1=0$ أي $b=-5$

ومنه $\overrightarrow{n_Q}(3,-5,1)$ وبالتالي معادلة المستوي Q من الشكل $3x-5y+z+d=0$

$A\in Q$ أي $6-5+1+d=0$ أي $d=-2$

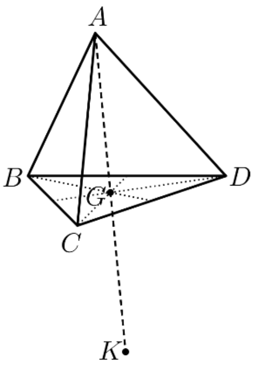
$$Q: 3x-5y+z-2=0$$

2) مركز الكرة التي قطرها $[AB]$ هو $I\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ منتصف $[AB]$

ونصف قطرها AI أو BI أو $\frac{1}{2}AB$

$\overrightarrow{AI}\left(-\frac{3}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$ أي $R=AI=\sqrt{\frac{9}{4}+1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{14}{4}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$

وبالتالي معادلة الكرة $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$



السؤال الثالث:

1) بما أن G مركز ثقل المثلث BCD فإن

$(G,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

بما أن K نظيرة A بالنسبة G فإن G منتصف $[AK]$ أي:

$\overrightarrow{KG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}$ أي $\overrightarrow{KG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{KG}-\frac{3}{2}\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ وبالتالي

$\left(K,\frac{3}{2}\right)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(G,3)$ و $\left(A,-\frac{3}{2}\right)$

وحسب الخاصة التجميعية $\left(K,\frac{3}{2}\right)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $\left(A,-\frac{3}{2}\right)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ وتكافئ

$(K,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$

2) بما أن $(G,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فإن $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$

وبما أن $(K,3)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$ فإن

$$-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MK}$$
$$3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-3\overrightarrow{MK}$$
$$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{MD}=-3\overrightarrow{MK}$$

وبالتالي العلاقة $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{MD}\right\|$ تكافئ $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-3\overrightarrow{MK}\right\|$ أي

$$\left\|\overrightarrow{MK}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$$

وبالتالي مجموعة النقاط M تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GK]$

السؤال الرابع:

$$P:2x+3y-z=1 \text{ و } Q:x-2y+2=0$$

1) الشعاعين $\overrightarrow{n_P}(2,3,-1)$ و $\overrightarrow{n_Q}(1,-2,0)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي المستويين P و Q متقاطعين

نفرض $y=t$ نعوض في معادلة Q فنجد $x=2t-2$

نعوض في معادلة P فنجد $z=2x+3y-1=4t-4+3t-1=7t-5$ وبالتالي

$$d:\begin{cases}x=2t-2\\ y=t \qquad :t\in\mathbb{R}\\ z=7t-5\end{cases}$$

1) نفرض $\overrightarrow{n_R}(a,b,c)$ ناظم المستوي Q فهو يحقق:

$\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_P}=0$ أي $(a,b,c).(2,3,-1)=0$ أي $2a+3b-c=0 \quad ...(1)$

$\overrightarrow{n_R}.\overrightarrow{n_Q}=0$ أي $(a,b,c).(1,-2,0)=0$ أي $a-2b=0 \quad ...(2)$

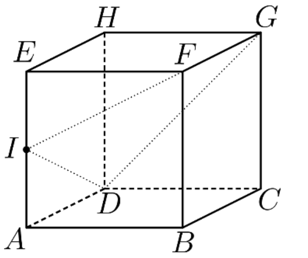
نفرض $b=1$ ، نعوض في (2) فنجد $a=2$ ، نعوض في (1) فنجد $4+3-c=0$ أي $c=7$

ومنه $\overrightarrow{n_R}(2,1,7)$ وبالتالي معادلة المستوي R من الشكل $2x+y+7z+d=0$

$A\in Q$ أي $4+0-7+d=0$ أي $d=3$

$$R:2x+y+7z+3=0$$

السؤال الخامس:



1) K نقطة تحقق العلاقة $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{AI}$

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{AI}$$

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{AK}+2\overrightarrow{KI}$$

$$-\overrightarrow{KG}+\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KI}=\vec{0}$$

وبالتالي $(K,2)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(G,-1)$ و $(D,1)$ و $(I,2)$

أي أن K تنتمي إلى المستوي (IDG)

2) $$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IF}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EF})$$

$$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IF}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})(-\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{IA})=AB^2-IA^2$$

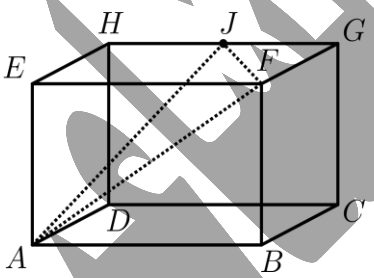
وبالتالي $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IF}=AB^2-AI^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}$

من جهة أخرى لدينا $IF=IB=\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

وبالتالي $\cos B\hat{I}F=\frac{\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IF}}{\|\overrightarrow{IB}\|.\|\overrightarrow{IF}\|}=\frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\frac{\frac{3a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}}=\frac{3}{5}$

ثانياً:

المعلم المتجانس $\left(A,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$



1) $A(0,0,0)$ و $F(4,0,2)$ و $C(4,2,0)$ و $J(2,2,2)$

2) a) $\overrightarrow{AJ}(2,2,2)$ و $\overrightarrow{JF}(2,-2,0)$

وبالتالي $[AJ]=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

و $[JF]=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

b) لدينا $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JF}=(2,2,2).(2,-2,0)=4-4+0=0$ وبالتالي $AJ\perp JF$

وبالتالي المثلث AFJ قائم في J ، ومساحته $S(AFJ)=\frac{AJ\times JF}{2}=\frac{2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{6}$

3) a) لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{AJ}=(1,1,-2).(2,2,2)=2+2-4=0$ أي $\vec{n}\perp\overrightarrow{AJ}$

لدينا $\vec{n}.\overrightarrow{JF}=(1,1,-2).(2,-2,0)=2-2+0=0$ أي $\vec{n}\perp\overrightarrow{AJ}$

وبالتالي $\vec{n}(1,1,-2)$ ناظم المستوي AFJ ومعادلته من الشكل $x+y-2z+d=0$

$A\in Q$ أي $d=0$

$$AFJ: x+y-2z=0$$

b) $$dist(C,AFJ)=\frac{|4+2-0|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

$$V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6}=4$$

4) نفرض $N(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة E على المستقيم (AF) فهي تحقق

$$\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AF}$$

$$(x,y,z)=k(4,0,2)=(4k,0,2k)$$

$$x=4k$$

بالمطابقة نجد $y=0$ وهي إحداثيات N بدلالة k

$$z=2k$$

من جهة أخرى لدينا $EN\perp AF$ أي $\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{AF}=0$

$$(x,y,z-2).(4,0,2)=0$$

$$(4k,0,2k-2).(4,0,2)=0$$

$16k+4k-4=0$ أي أن $k=\frac{1}{5}$ وبالتالي $\begin{cases} x=4k=4\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5} \\ y=0 \\ z=2k=2\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}\end{cases}$ ومنه $N\left(\frac{4}{5},0,\frac{2}{5}\right)$

انتهى حل النموذج الثاني

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:

$$A(1,1,1) \text{ و } B(1,3,5)$$

1)
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$$
$$(1-x,1-y,1-z).(1-x,3-y,5-z)=0$$
$$(1-x)(1-x)+(1-y)(3-y)+(1-z)(5-z)=0$$
$$x^2-2x+1+y^2-4y+3+z^2-6z+5=0$$
$$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-4+3+(z^2-6z+9)-9+5=0$$
$$\varepsilon:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$$

المجموعة ε تمثل كرة مركزها $(1,2,3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{5}$ أو ε تمثل كرة قطرها $[AB]$

2)
$$MA=MB$$
$$MA^2=MB^2$$
$$(1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2=(1-x)^2+(3-y)^2+(5-z)^2$$
$$y^2-2y+1+z^2-2z+1=y^2-6y+9+z^2-10z+25$$
$$-2y+1-2z+1=-6y+9-10z+25$$
$$4y+8z-32=0 \text{ وتكافئ } P:y+2z-8=0$$

المجموعة P تمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

السؤال الثاني:

$$d:\begin{cases}2x-y-z=2\\ x-3y+2z=1\end{cases} \text{ و } P:2x+3z=2$$

1) نفرض $x=t$ ومنه تصبح المعادلتين $\begin{pmatrix}-y-z=-2t+2\\ -3y+2z=-t+1\end{pmatrix}$ وتكافئ $\begin{pmatrix}-2y-2z=-4t+4\\ -3y+2z=-t+1\end{pmatrix}$ بالجمع نجد:

$$-5y=-5t+5 \text{ أي } y=t-1$$

نعوض فنجد $2t-t+1-z=2$ ومنه $z=t-1$ أي:

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=t-1:t\in\mathbb{R}\\ z=t-1\end{cases}$$

2) بما أن $\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_d}=(2,0,3).(1,1,1)=2+3=5\neq 0$ فإن المستقيم d يقطع المستوي P

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d في معادلة المستوي P فنجد:

$$2t+3(t-1)=2 \text{ وتكافئ } 2t+3t-3=2 \text{ ومنه } t=1$$

وبالتالي نقطة التقاطع $(1,0,0)$

السؤال الثالث:

1) بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فإن

$(G,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

وبما أن I منتصف $[AB]$ فإن $(I,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,1)$

وبما أن J منتصف $[CD]$ فإن $(J,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(D,1)$

وحسب الخاصة التجميعية نجد:

$(G,4)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,2)$ و $(J,2)$

أي أن النقاط I و J و G على استقامة واحدة.

2)
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos B\hat{A}C=a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AD}\right\|.\cos B\hat{A}D=a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$$

أي أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين.

السؤال الرابع:

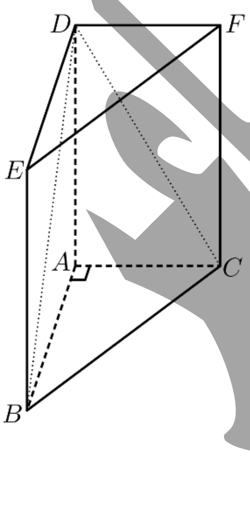
1) $A(0,0,0)$ و $B(3,0,0)$ و $C(0,4,0)$ و $D(0,0,6)$ و $E(3,0,6)$ و $F(0,4,6)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي BCD فهو يحقق

$\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0$ أي $(a,b,c).(-3,4,0)=0$ أي $-3a+4b=0 \quad ...(1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{BD}=0$ أي $(a,b,c).(-3,0,6)=0$ أي $-3a+6c=0 \quad ...(2)$

نفرض $a=1$ نعوض في (1) فنجد $b=\frac{3}{4}$ ونعوض في (2) فنجد $c=\frac{1}{2}$



وبالتالي $\vec{n}\left(1,\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$ ويكافئ $\vec{n}(4,3,2)$

معادلة المستوي $4x+3y+2z+d=0$

$B\in BCD$ ومنه $12+d=0$ أي $d=-12$

وبالتالي $BCD: 4x+3y+2z-12=0$

2) معادلة المخروط $x^2+y^2-\frac{16}{36}z^2=0$ و $0\le z\le 6$

السؤال الخامس:

$A(2,1,-1)$ و $B(0,-1,3)$ و $M(-1,-4,4)$

1) نفرض $M'(x,y,z)$ المسقط القائم للنقطة M على المستقيم (AB) فهي تحقق

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AB}$$

$$(x-2,y-1,z+1)=k(-2,-2,4)=(-2k,-2k,4k)$$

بالمطابقة نجد $\begin{pmatrix} x=-2k+2 \\ y=-2k+1 \\ z=4t-1 \end{pmatrix}$

من جهة أخرى لدينا $\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{AB}=0$ أي $(x+1,y+4,z-4).(-2,-2,4)=0$

$$-2x-2-2y-8+4z-16=0$$

$-2x-2y+4z-26=0$ أي $x+y-2z+13=0$

$-2k+2-2k+1-8t+2+13=0$ ومنه $-12k+18=0$ أي $k=\frac{3}{2}$ ومنه

$x=-2\left(\frac{3}{2}\right)+2=-3+2=-1$ و $y=-2\left(\frac{3}{2}\right)+1=-3+1=-2$ و $z=4\left(\frac{3}{2}\right)-1=6-1=5$

أي أن $M'(-1,-2,5)$

2) $ABMN$ متوازي أضلاع أي أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM}$

$$(-2,-2,4)=(-1-x,-4-y,4-z)$$

بالمطابقة نجد $\begin{pmatrix} -1-x=-2 \\ -4-y=-2 \\ 4-z=4 \end{pmatrix}$ أي أن $\begin{pmatrix} x=1 \\ y=-2 \\ z=0 \end{pmatrix}$ أي $N(1,-2,0)$

ثانياً:

$A(3,2,6)$ و $B(1,2,4)$ و $C(4,-2,5)$ و $D(1,1,-1)$ و $P:2x+y-2z=-4$

1) الشعاعين $\overrightarrow{AB}(-2,0,-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1,-4,-1)$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A و B و C تعيّن مستوياً

نعوض A في معادلة P: $6+2-12=-4$ محققة أي $A\in P$

نعوض B في معادلة P: $2+2-8=-4$ محققة أي $B\in P$

نعوض C في معادلة P: $8-2-10=-4$ محققة أي $C\in P$

أي أن المستوي المار بالنقاط A و B و C هو المستوي P

ملاحظة: يمكن إيجاد معادلة المستوي بالطريقة المعروفة والتأكد أنها P

2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-2,0,-2).(1,-4,-1)=-2+0+2=0$ أي $AB\perp AC$

وبالتالي المثلث ABC قائم في A ومساحته

$$S(ABC)=\frac{AB\times AC}{2}=\frac{\sqrt{4+4}\times\sqrt{1+16+1}}{2}=\frac{\sqrt{8}\times\sqrt{18}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\times3\sqrt{2}}{2}=6$$

3) بما أن المستقيم d عمودي على المستوي P فإن $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_P}(2,1,-2)$ وبالتالي:

$$d:\begin{cases}x=2t+1\\ y=t+1 & :t\in\mathbb{R}\\ z=-2t-1\end{cases}$$

لإيجاد إحداثيات K المسقط القائم لـD على P ، نعوض المعادلات الوسيطية لـ d في معادلة المستوي P

$4t+2+t+1+4t+2=-4$ وبالتالي $t=-1$

ومنه $K(-1,0,1)$

4)
$$dist(D,P)=\frac{|2+1+2+4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$$

$$V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\times6\times3=6$$

5) لإثبات أن النقطة K مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة $(A,7)$ و $(B,-9)$ و $(C,-2)$ يكفي إثبات أن:

$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}\overset{?}{=}\vec{0}$$

$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=7(4,2,5)-9(2,2,3)-2(5,-2,4)$$

$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=(28,14,35)-(18,18,27)-(10,-4,8)$$

$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=(28-18-10,14-18+4,35-27-8)$$

$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=(0,0,0)$$

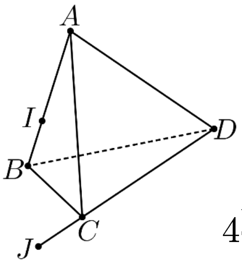
$$7\overrightarrow{KA}-9\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$$

انتهى حل النموذج الثالث

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ

أولاً:

السؤال الأول:



1) I تحقق العلاقة $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ أي $3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$ وتكافئ $\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{BI}=\vec{0}$

وبالتالي $(I,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,2)$

J تحقق العلاقة $\overrightarrow{DJ}=\frac{4}{3}\overrightarrow{DC}$ أي $3\overrightarrow{DJ}=4\overrightarrow{DJ}+4\overrightarrow{JC}$ وتكافئ $4\overrightarrow{CJ}-\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$

وبالتالي $(J,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,4)$ و $(D,-1)$

وبما أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,4)$ و $(D,-1)$ وحسب الخاصة التجميعية:

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,3)$ و $(J,3)$ أي أن النقطة G منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

2) في المعلم $(B,\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ نجد $B(0,0,0)$ و $C(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $A(0,0,1)$ وبالتالي:

$$\left.\begin{aligned}x_G&=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{0+0+4+0}{1+2+4-1}=\frac{4}{6}\\ y_G&=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{0+0+0-1}{1+2+4-1}=-\frac{1}{6}\\ z_G&=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1+0+0+0}{1+2+4-1}=\frac{1}{6}\end{aligned}\right\}\quad G\left(\frac{4}{6},-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$$

السؤال الثاني:

$A(2,1,1)$ و $B(-1,-2,4)$ و $C(-3,2,0)$

1) لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,-3,3)$ و $\overrightarrow{AC}(-5,1,-1)$ و $\overrightarrow{BC}(-2,4,-4)$ وبالتالي:

$AB=\sqrt{9+9+9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ و $AC=\sqrt{25+1+1}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ و $BC=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$

بما أن $AB=AC$ فإن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

نفرض $I(-2,0,2)$ منتصف $[BC]$ فيكون $[AI]$ متوسط في مثلث متساوي الساقين فهو ارتفاع

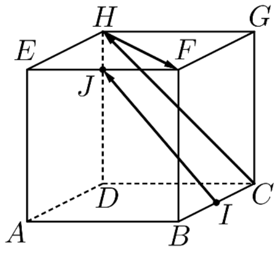
$\overrightarrow{AI}(-4,-1,1)$ أي $AI=\sqrt{16+1+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

مساحة المثلث $S(ABC)=\frac{AI\times BC}{2}=\frac{3\sqrt{2}\times 6}{2}=9\sqrt{2}$

2) $$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}$$

$$(x-2,y-1,z-1)=\frac{1}{2}(-2,4,-4)-2(-5,1,-1)=(-1,2,-2)+(10,-2,2)=(9,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned}x-2&=9\\ y-1&=0\\ z-1&=0\end{aligned}\right\}\ N(11,1,1)$$



السؤال الثالث:

1) نفرض $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ معلم كيفي

$C(1,1,0)$ و $H(0,1,1)$ و $F(1,0,1)$ و $I\left(1,\frac{1}{2},0\right)$ و $J\left(\frac{1}{2},0,1\right)$

لدينا $\overrightarrow{HF}(1,-1,0)$ و $\overrightarrow{CH}(-1,0,1)$ و $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$

$$\overrightarrow{CH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}=(-1,0,1)+\frac{1}{2}(1,-1,0)=\left(-1+\frac{1}{2},0-\frac{1}{2},1-0\right)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)=\overrightarrow{IJ}$$

ومنه $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{CH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}$

2) وبالتالي الأشعة $\overrightarrow{HF}$ و $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطياً

ومنه المستقيم (IJ) يوازي المستوي (CHF).

السؤال الرابع:

$P:3x-4z=1$ و $S:x^2+y^2+z^2+6y-2z+9=0$

1) $S:x^2+y^2+z^2+6y-2z+9=0$

$$x^2+y^2+6y+9-9+z^2-2z+1-1+9=0$$

$$x^2+(y+3)^2+(z-1)^2=1$$

وبالتالي مركز الكرة $I(0,-3,1)$ ونصف قطرها $R=1$

بما أن $dist(I,P)=\frac{|0-4-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{5}{\sqrt{25}}=1=R$

وبالتالي المستوي P يمس الكرة S.

2) بما أن المستوي Q يوازي المستوي P فإن $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_p}(3,0,-4)$

معادلة Q من الشكل $3x-4z+d=0$

$I\in Q$ أي $0-4+d=0$ أي $d=4$

$$Q:3x-4z+4=0$$

السؤال الخامس:

$$d':\begin{cases}x=3s+2\\ y=-s-1:s\in\mathbb{R}\\ z=s+1\end{cases} \quad \text{و} \quad d:\begin{cases}x=t+1\\ y=2t-3:t\in\mathbb{R}\\ z=-t+2\end{cases}$$

1) الشعاعين $\overrightarrow{u_d}(1,2,-1)$ و $\overrightarrow{u_{d'}}(3,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي المستقيمين d و d' متقاطعين أو متخالفين

$$t+1=3s+2 \quad (1)$$
$$2t-3=-s-1 \quad (2)$$
$$-t+2=s+1 \quad (3)$$

بجمع (2) و (3) نجد $t-1=0$ أي $t=1$

نعوض في (3) فنجد $-1+2=s+1$ أي $s=0$

للتأكد نعوض في (1) فنجد $1+1=0+2$ محققة

وبالتالي المستقيمين d و d' متقاطعين في النقطة $I(2,1,1)$

2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي فهو يحقق

$$\vec{n}.\overrightarrow{u_d}=0 \text{ أي } (a,b,c).(1,2,-1)=0 \text{ أي } a+2b-c=0 \quad ...(1)$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{u_{d'}}=0 \text{ أي } (a,b,c).(3,-1,1)=0 \text{ أي } 3a-b+c=0 \quad ...(2)$$

نفرض $a=1$ وبالتالي $\begin{pmatrix}2b-c=-1\\ -b+c=-3\end{pmatrix}$ بالجمع نجد $b=-4$ وبالتالي $c=-7$ أي $\vec{n}(1,-4,-7)$

معادلة المستوي من الشكل $x-4y-7z+d=0$

I نقطة من المستوي فهي تحقق معادلته $2-4-7+d=0$ أي $d=9$

وبالتالي معادلة المستوي $x-4y-7z+9=0$

ثانياً:

$A(0,1,2)$ و $B(2,1,1)$ و $C(1,0,0)$ و $D(1,-2,\lambda)$ و $P:2x-y+3z=9$ و $Q:3x-2y+4z=11$

1) يكون المثلث ABD قائم في A إذا كان $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$ أي

$(1,-3,\lambda-2).(2,0,-1)=0$ أي $2-\lambda+2=0$ أي $\lambda=4$ ومنه $D(1,-2,4)$

2) وجدنا أن $AD\perp AB$

من جهة أخرى $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=(1,-3,2).(1,-1,-2)=1+3-4=0$ أي أن $AD\perp AC$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي ABC

لدينا $\overrightarrow{n_{ABC}}=\overrightarrow{AD}(1,-3,2)$ وبالتالي معادلة المستوي ABC من الشكل $x-3y+2z+d=0$

$A\in ABC$ وبالتالي $-3+4+d=0$ أي $d=-1$

وبالتالي معادلة المستوي $x-3y+2z-1=0$

3) لدينا الشعاعين $\overrightarrow{n_P}(2,-1,3)$ و $\overrightarrow{n_Q}(3,-2,4)$ غير مرتبطين خطياً

وبالتالي المستويين P و Q متقاطعين

$$P: 2x-y+3z=9 \text{ و } Q: 3x-2y+4z=11$$

نفرض $x=t$ وبالتالي $\begin{pmatrix} -y+3z=-2t+9 \\ -2y+4z=-3t+11 \end{pmatrix}$ أي $\begin{pmatrix} 2y-6z=4t-18 \\ -2y+4z=-3t+11 \end{pmatrix}$ بالجمع نجد

$$-2z=t-7 \text{ أي } z=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{2}$$

وبالتالي $y=2x+3z-9=2t+3\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{2}\right)-9=2t-\frac{3}{2}t+\frac{21}{2}-9=\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}$ أي:

$$d:\begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{2}t+\frac{3}{2} & : t\in\mathbb{R} \\ z=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{2} \end{cases}$$

4) نعوض المعادلات الوسيطية للفصل المشترك d في معادلة المستوي ABC فنجد:

$$x-3y+2z-1=0$$

$$t-3\left(\frac{1}{2}t+\frac{3}{2}\right)+2\left(-\frac{1}{2}t+\frac{7}{2}\right)-1=0$$

$$t-\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}-t+7-1=0 \text{ أي } t=1$$

وبالتالي نقطة تقاطع المستويات P و Q و ABC هي $I(1,2,3)$

5) لدينا $A'\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{10}{3}\right)$ فيكون $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{u_d}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right).\left(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=0$$

أي أن النقطة A' هي المسقط القائم للنقطة A على المستقيم d

و بعد النقطة A عن المستقيم d هو $AA'=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{21}{9}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$

انتهى حل النموذج الرابع

الأشعة والجداء السلمي والمستقيمات والمستويات في الفراغ