رياضيات ١-٣

الفصل الأول

التشابه

الفصل الثاني

التحويلات الهندسية و التماثل

الفصل الثالث

الدائرة

الفصل الأول

التشابه

المضلعات المتشابهة

هي المضلعات التي لها الشكل نفسه ولكن ليس بالضرورة أن يكون لها نفس القياس ..

متى تتشابه المضلعات؟

1. إذا كانت الزوايا المتناظرة في المضلعات متطابقة
2. إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة في المضلعات متناسبة

في الشكل أدناه $ABCD$ يشابه $WXYZ$

الزوايا المتطابقة

$\angle A \cong \angle W$

$\angle B \cong \angle X$

$\angle C \cong \angle Y$

$\angle D \cong \angle Z$

عبارة التشابه

$ABCD \sim WXYZ$

رمز التشابه

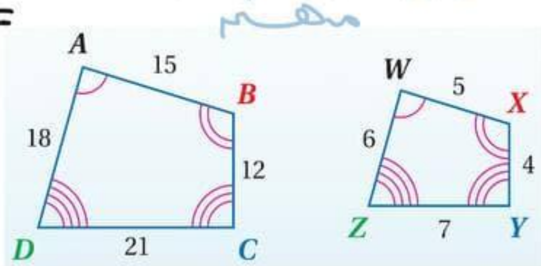
ترتيب الرؤوس بالمطابقة مهم

التناسب

$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW}$$

معامل التشابه = طول الضلع من الشكل الأول / طول الضلع المناظر له من الشكل الثاني

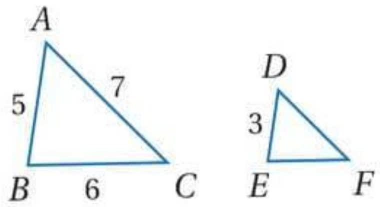
$$= \frac{AB}{WX} = \frac{3}{1}$$



* علاقة المحيط ومعامل التشابه :

$$\frac{\text{محيط المضلع الأول}}{\text{محيط المضلع الثاني}} = \text{معامل التشابه}$$

*مثال :



محيط $\Delta ABC = 5 + 6 + 7 = 18$

$$\frac{18}{\text{محيط } \Delta DEF} = \frac{5}{3}$$

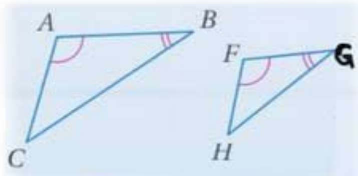
محيط $\Delta DEF = 10{,}8$

المثلثات المتشابهة

حالات تشابه المثلثات

مسلمة التشابه AA

إذا تطابقت زاويتان من مثلث مع زاويتان في مثلث آخر فالمثلثان متشابهان

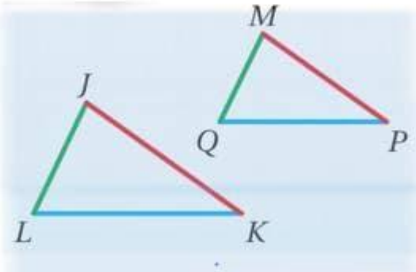


$\angle A \cong \angle F$

$\angle B \cong \angle G$

نظرية التشابه SSS

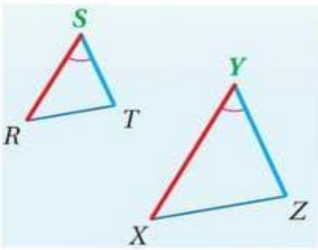
إذا تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين فإن المثلثان متشابهان



$$\frac{MQ}{JL} = \frac{MP}{JK} = \frac{QP}{LK}$$

نظرية التشابه SAS

إذا تناسب طولا ضلعين في مثلث مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر وتطابقت الزوايا المحصوره بينهما فإن المثلثان متشابهان



$\angle S \cong \angle Y$

$$\frac{SR}{YX} = \frac{ST}{YZ}$$

خصائص المثلثات المتشابهة:

1. خاصية الانعكاس للتشابه.. $\triangle ABC \sim \triangle ABC$
2. خاصية التماثل للتشابه.. اذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ فإن $\triangle DEF \sim \triangle ABC$
3. خاصية التعدي للتشابه..

إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $\triangle DEF \sim \triangle XYZ$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$

القياس الغير مباشر

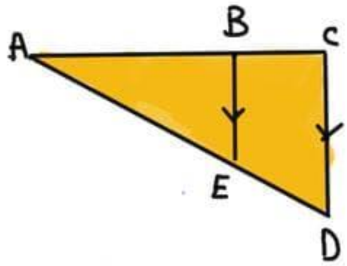
$$\frac{\text{طول ظل الشكل الاول}}{\text{طول ظل الشكل الثاني}} = \frac{\text{طول الشكل الأول}}{\text{طول الشكل الثاني}}$$

المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة

نظرية التناسب

إذا وازى مستقيم ضلعاً من أضلاع المثلث وقطع ضلعيه الآخرين فإنه يقسمهما إلى أجزاء متناسبة أي أن:

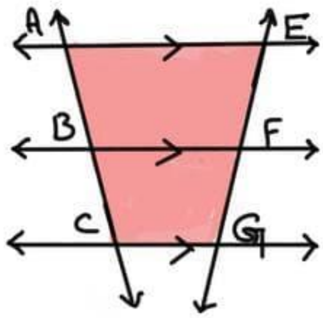
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED}$$ أو $$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED}$$



إذا قطع قاطعان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال أجزاء القاطعين تكون متناسبة أي أن:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG}$$ او $$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$

(لابد أن تكون المستقيمات متوازية)

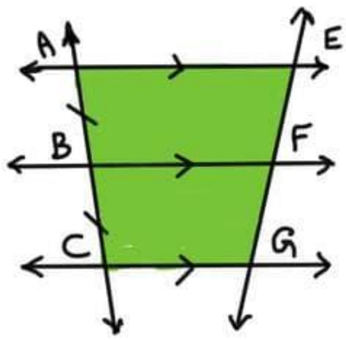


إذا قطع قاطع ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر وكانت أجزاؤه متطابقة فإن أجزاء أي قاطع آخر لها تكون متطابقة =

$AB = BC$

وبالتالي $EF = FG$

لابد أن تكون المستقيمات متوازية



* عكس نظرية التناسب :

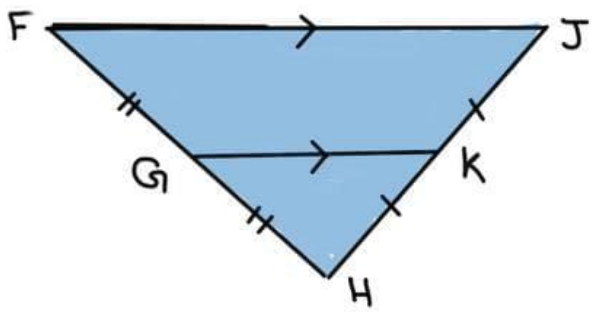
إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث وقسمهما إلى قطع مستقيمة متناظرة أطوالها متناسبة فإن المستقيم يوازي الضلع الثالث من المثلث.

القطعة المنصفة في المثلث

قطعة مستقيمة تصل بين منتصفي ضلعين في مثلث

$FG = GH$

$JK = KH$

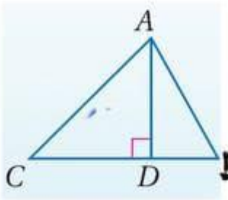


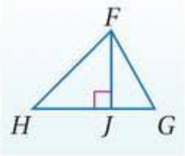
توازي أحد أضلاع المثلث وطولها يساوي نصف ذلك الضلع

$|GK| = \frac{1}{2} FJ$

عناصر المثلثات المتشابهة

قطع مستقيمة خاصة في المثلثين المتشابهين ..

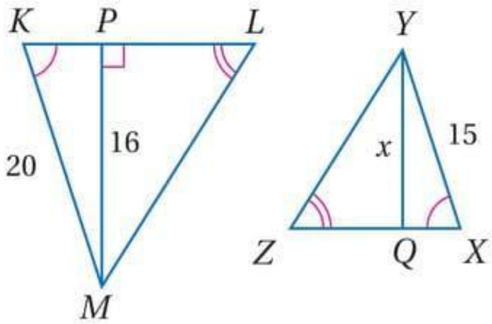




إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي كل ارتفاعين متناظرين تساوي النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين ..

إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle FGH$ فإن $\frac{AD}{FJ} = \frac{AB}{FG}$

مثال: أوجد قيمة x ؟!



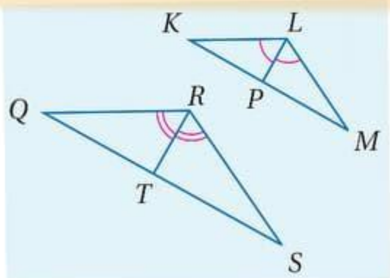
$\triangle KLM \sim \triangle ZYX$

$$\frac{YQ}{PM} = \frac{YX}{KM}$$

$$\frac{x}{16} = \frac{15}{20}$$

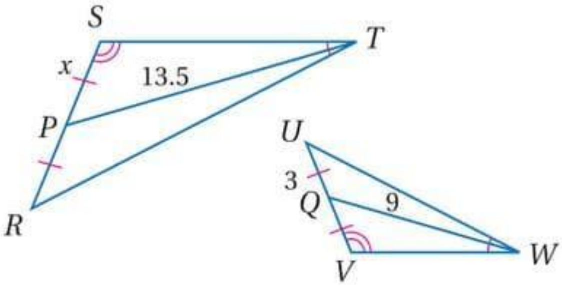
$$20x = 15 \times 16 \longrightarrow x = 12$$

إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي القطعتين المنصفتين لكل زاويتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين



إذا كان $\triangle KLM \sim \triangle QRS$ فإن $\frac{LP}{RT} = \frac{LM}{RS}$

مثال: أوجد قيمة x ؟!



$\triangle WVU \sim \triangle TSR$

$$\frac{WQ}{TP} = \frac{VU}{SR}$$

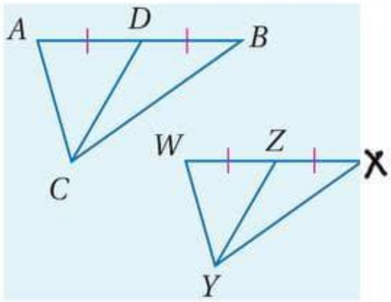
$$\frac{9}{13,5} = \frac{6}{2x}$$

$$x = \frac{3 \times 13,5}{9}$$

$$x = 4.5$$

عناصر المثلثات المتشابهة

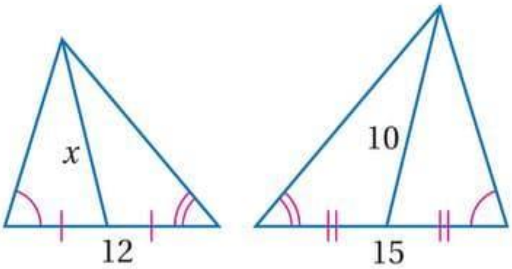
إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين طولي كل قطعتين متوسطتين متناظرتين تساوي النسبة بين طولي كل ضلعين متناظرين.



إذا كان $\Delta ABC \sim \Delta WXY$

فإن $\frac{CD}{YZ} = \frac{AB}{WX}$

مثال: أوجد قيمة X ؟!



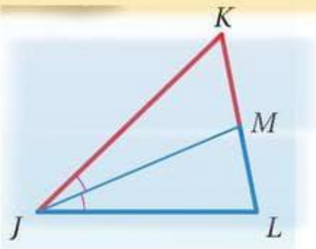
المثلثان متشابهان من مسلمة ززً

$$\frac{10}{x} = \frac{15}{12}$$

$$x = \frac{10 \times 12}{15} = 8$$

$$x = 8$$

منصف زاوية في مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين مستقيمتين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين.



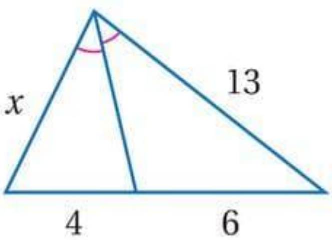
اذا كانت $\overline{JM}$ منصف زاوية في المثلث ΔJKL

فإن $\frac{KM}{LM} = \frac{KJ}{LJ}$

القطعتان المشتركتان بالرأس K ←

القطعتان المشتركتان بالرأس L ←

مثال: أوجد قيمة X ؟!



$\frac{6}{4} = \frac{13}{x}$ ضرب تبادلي

$x = \frac{13 \times 4}{6}$

$x = 8.7$

الفصل الثاني

التحويلات الهندسية والتماثل

٢-١ الانعكاس	الدرس
٢-٢ الإزاحة (الانسحاب)	الدرس
٢-٣ الدوران	الدرس
٢-٤ تركيب التحويلات الهندسية	الدرس
٢-٥ التماثل	الدرس
٢-٦ التمدد	الدرس

الانعكاس

تعريفه: تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيم ..

خصائصه: يحافظ على قياسات الأطوال والزوايا وأماكن النقاط والاستقامة .. لكنه لا يحافظ على الاتجاه ..

عناصره: محور الانعكاس ..

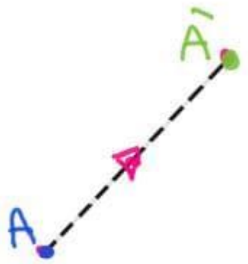
تصنيفه: يصنف من تحويلات التطابق ..

أنواعه

حول محور x	حول محور y	حول المستقيم $x = y$
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$
نثبت x ونغير اشارة y	نثبت y ونغير اشارة x	نبدل الاحداثيات فقط بدون الاشارات

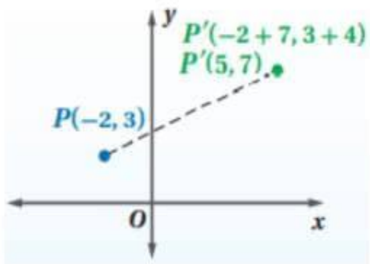
الإزاحة

هو تحويل هندسي ينقل الشكل من مكان إلى آخر بدون دوران أو تغير في قياساته .. حيث ينقل جميع نقاط الشكل المسافة نفسها والاتجاه نفسه وهو أيضاً من تحويلات التطابق ..



صورة النقطة A الناتجة عن ازاحة يرمزلها بـ À

الإزاحة في المستوى الاحداثي



a الإزاحة الافقية مع محور x

- إذا كانت اشارة a ⊕ فإن الإزاحة تكون إلى اليمين
- إذا كانت الاشاره a ⊖ فإن الإزاحة تكون يسار

b الإزاحة الرأسية مع محور y

- إذا كانت اشارة b ⊕ فإن الإزاحة تكون أعلى
- إذا كانت اشارة b ⊖ فإن الازاحة تكون أسفل

الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية

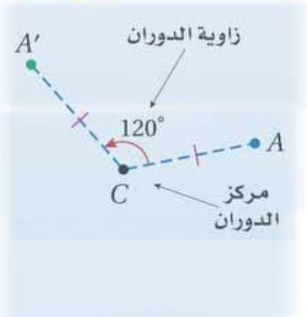
- عندما تكون $b=0$ تكون الإزاحة افقية فقط .
- عندما تكون $a=0$ تكون الإزاحة رأسية فقط .

الدوران

هو دوران نقاط الشكل الأصلي حول نقطة ثابتة (مركز الدوران) بزاوية معينة قياسها X وباتجاه معين

وهو تحويل تطابق لا تتغير فيه قياسات الشكل الأصلي ..

صورة النقطة A الناتجة عن دوران بزاوية معينة يرمز له بالرمز À



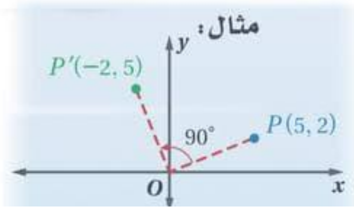
ملحوظات

- اتجاه الدوران المعتاد يكون عكس عقارب الساعة إلا إذا ذكر عكس ذلك ..
  - مع عقارب الساعة
  - عكس عقارب الساعة
- إذا كانت النقطة هي مركز الدوران فإن صورتها نفسها
- إذا كانت النقطة غير مركز الدوران فإن النقطة والصورة تبعدان البعد نفسه عن مركز الدوران
- القياس السالب لزاوية الدوران يشير إلى أن الدوران باتجاه حركة عقارب الساعة
- الدوران بقياس 360° يعيد الشكل إلى نفس موقعه الأصلي

الدوران في المستوى الإحداثي

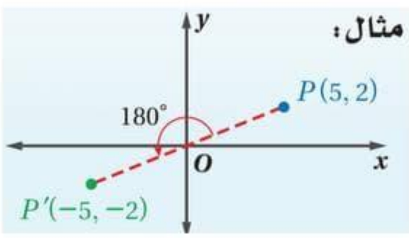
دوران بزاوية 90°

نبدل بين موقعي y ، X
تغير إشارة y



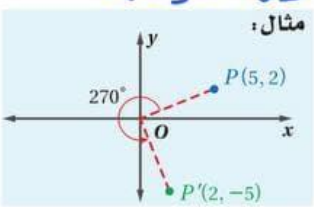
دوران بزاوية 180°

نغير إشارتي y ، X فقط



دوران بزاوية 270°

نبدل بين موقعي y ، X
تغير إشارة X



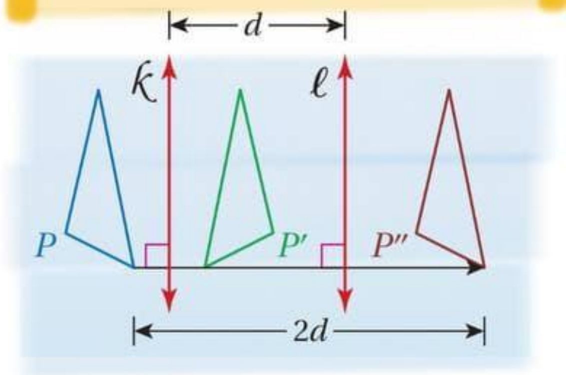
تركيب التحويلات الهندسية

تعريفه: اجراء تحويلين او أكثر على الشكل.

خصائصه: تركيب تحويلين تطابق أو أكثر هو تحويل تطابق أيضًا

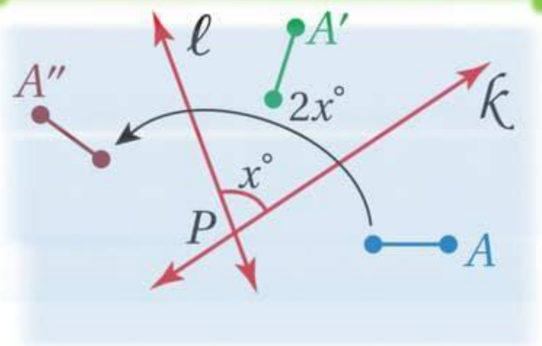
تركيب انعكاسين حول مستقيمين

إذا كان المستقيمين متوازيين



ينتج عنه إزاحة مقدارها ضعف المسافة بين المستقيمين اتجاهها عامودي على اتجاه المستقيمين ..

إذا كان المستقيمين متقاطعين



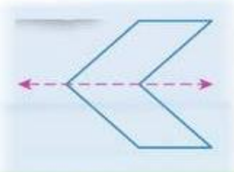
ينتج عنه دوران مركزه نقطة تقاطع المستقيمين قياس زاويته ضعف قياس الزاوية بين المستقيمين

التماثل

التماثل في الأشكال الثنائية الأبعاد : يكون الشكل متماثلاً إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه . أحد أنواع التماثل هو التماثل حول محور ..

التماثل حول محور

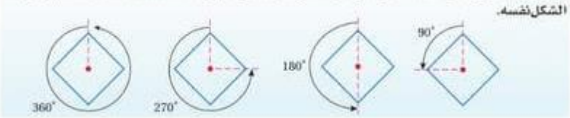
يكون الشكل الثنائي الأبعاد متماثلاً حول محور إذا كانت صورته الناتجة عن انعكاس حول مستقيم ما هي الشكل نفسه ويسمى المستقيم هذا محور التماثل



التماثل الدوراني

يكون الشكل الثنائي الأبعاد تماثل دوراني (أو تماثل قطري) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران بين $0°$ و $360°$ حول مركزه هي الشكل نفسه ويسمى مركزه مركز التماثل

أمثلة : المربع الآتي له تماثل دوراني؛ لأن الدوران بكلٍ من الزوايا $0°$، $90°$، $180°$، $270°$، $360°$ ينتج عنه الشكل نفسه.



رتبة التماثل ومقدار التماثل :

يطلق على عدد المرات التي تنطبق فيها صورة الشكل نفسه في أثناء دورانه من 0 إلى $360°$ اسم رتبة التماثل ..

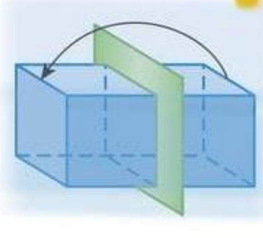
مقدار التماثل : (أو زاوية الدوران) فهو قياس أصغر زاوية يدورها الشكل حتى ينطبق على نفسه ويرتبط مقدار التماثل ورتبته بالعلاقة ..

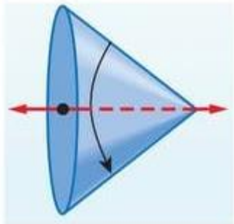
مقدار التماثل يساوي ناتج قسمة $360°$ على رتبة التماثل

التماثل في الأشكال ثلاثية الأبعاد

التماثل حول مستوى

يكون الشكل متماثلاً حول مستوى إذا أمكن تقسيم بهذا المستوى الى شكلين متطابقين





التماثل حول محور

يكون الشكل متماثل حول محور إذا أمكن تدويره حول هذا المحور بزاوية بين $0°$ و $360°$ ليصبح كما كان وضعه الأصلي

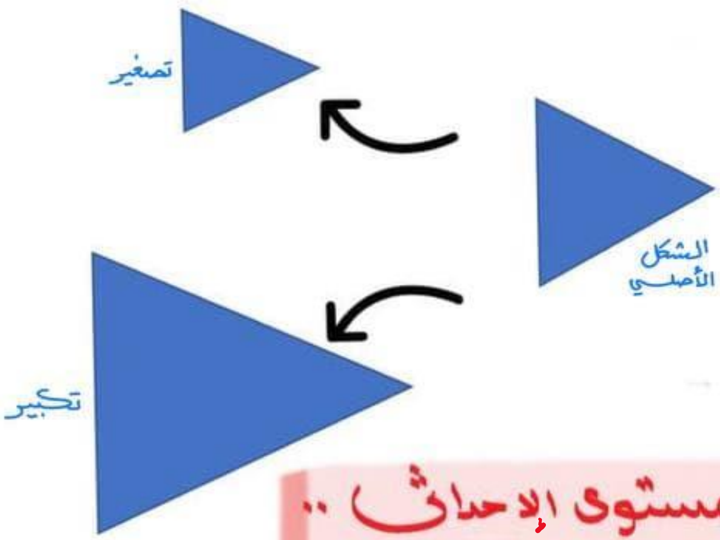
التمدد

هو تحويل هندسي يكبر الشكل أو يصغره بنسبة محددة

هي نسبة أحد أطوال الصورة إلى الطول المناظر لها في الشكل الأصلي .. **تسمى هذه النسبة معامل مقياس التمدد**

مركزه : مركزه C ومعامل تمدد عدد موجب K

$\lvert k \rvert > 1$	$\lvert k \rvert = 1$	$\lvert k \rvert < 1$
في هذه الحالة يسمى التمدد تكبيراً	في هذه الحالة يسمى تمدد تحويل تطابق	في هذه الحالة يسمى التمدد تصغيراً



التمدد في المستوى الاحداثي ..

نضرب معامل التمدد في الإحداثي x ، y

$$(x , y) \longrightarrow (kx , ky)$$

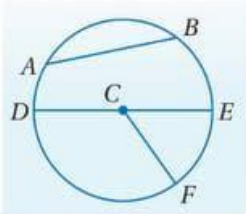
الفصل الثالث

الدائرة

الدائرة ومحيطها

الدائرة: هي المحل الهندسي لمجموعة نقاط تبعد بعد ثابت عن نقطة معلومة تسمى المركز (و تسمى الدائرة بمركزها)

مثال: تسمى الدائرة $\odot C$



قطع خاصة في الدائرة

الوتر

قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة

مثل: $\overline{AB}$, $\overline{DE}$

نصف القطر

قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها على المركز والطرف الآخر على الدائرة

مثل: $\overline{CD}$ ، $\overline{CE}$, $\overline{CF}$

القطر

هو وتر يمر بمركز الدائرة ويتكون من نصفي قطرين يقعان على استقامة واحدة

مثل: $\overline{DE}$

العلاقة بينهما

يرمز لنصف القطر r

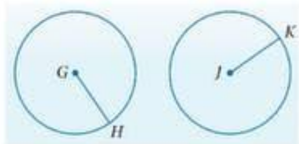
$r = \frac{d}{2}$

يرمز للقطر d

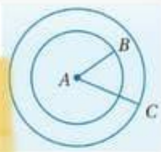
$d = 2r$

الدوائر قد تكون

دائرتان متطابقتان



دائرتان متحدتان في المركز



دوائر متقاطعة

- تقاطع في نقطتين
- تقاطع في نقطة
- لا يوجد تقاطع

تماس من الداخل

تماس من الخارج

متداخلتان

متباعدتان

الدائرة ومحيطها

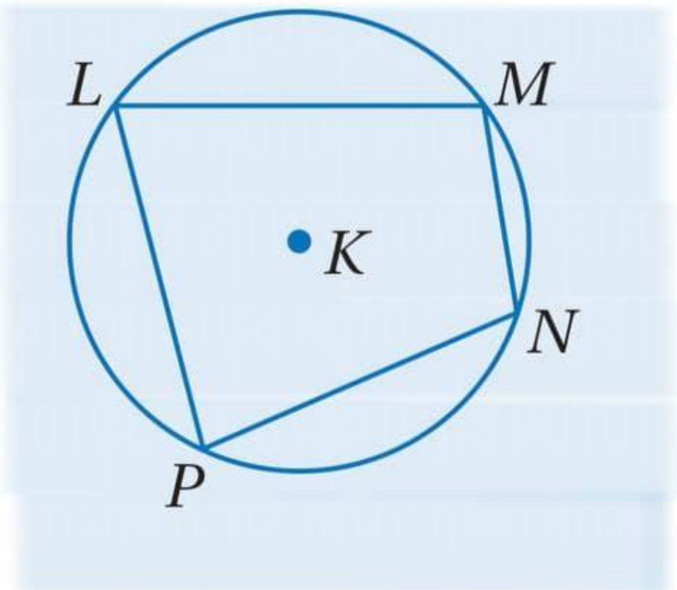
محيط الدائرة :

يعطى بالقانون $C = \pi d$ أو $C = 2\pi r$

حيث r نصف القطر و d القطر و $\pi = 3.14$

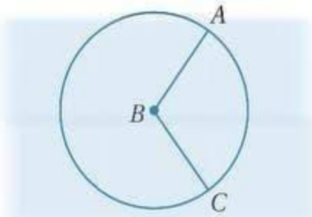
* متى يكون المضلع محاط بالدائرة ؟!

اذا كانت رؤوسه جميعها على الدائرة ..



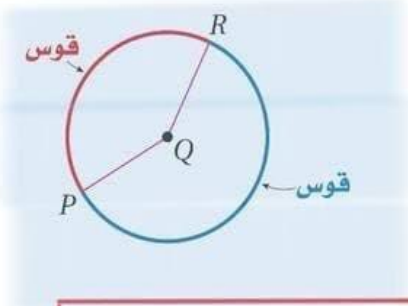
قياس الزوايا و الأقواس

الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة و ضلعاها نصفاقطرين في الدائرة



مثل : $\angle ABC$

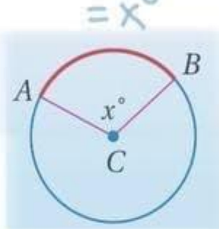
القوس :
جزء من الدائرة يحدد بنقطتي طرفيه



أنواع الأقواس

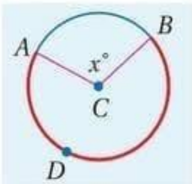
قوس صغير
قياسه أقل من 180° ويساوي قياس الزاوية المركزية المقابلة له

$m\widehat{AB} = m\angle ACB$
$= x^\circ$



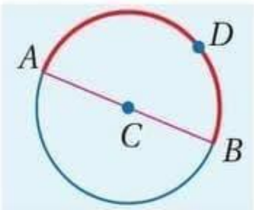
قوس أكبر
قياسه أكبر من 180°
قياسه يساوي
360 – قياس القوس الأصغر

$m\widehat{ADB} = 360^\circ - m\widehat{AB}$
$= 360^\circ - x^\circ$



نصف دائرة
قياسه يساوي 180°

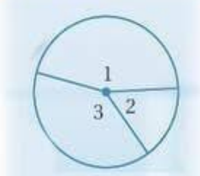
$m\widehat{ADB} = 180^\circ$



قياسات الزوايا والأقواس

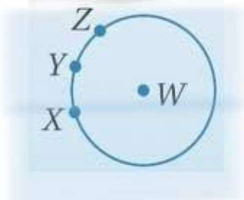
مجموع قياسات الزوايا المركزية $= 360^\circ$

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$



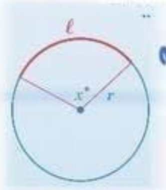
مسلمة جمع الأقواس المتجاورة

$m\widehat{XZ} = m\widehat{XY} + m\widehat{YZ}$



طول القوس

$l = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$ أو $l = \frac{x^\circ}{180^\circ} \pi r$



x° قياس الزاوية

r نصف القطر

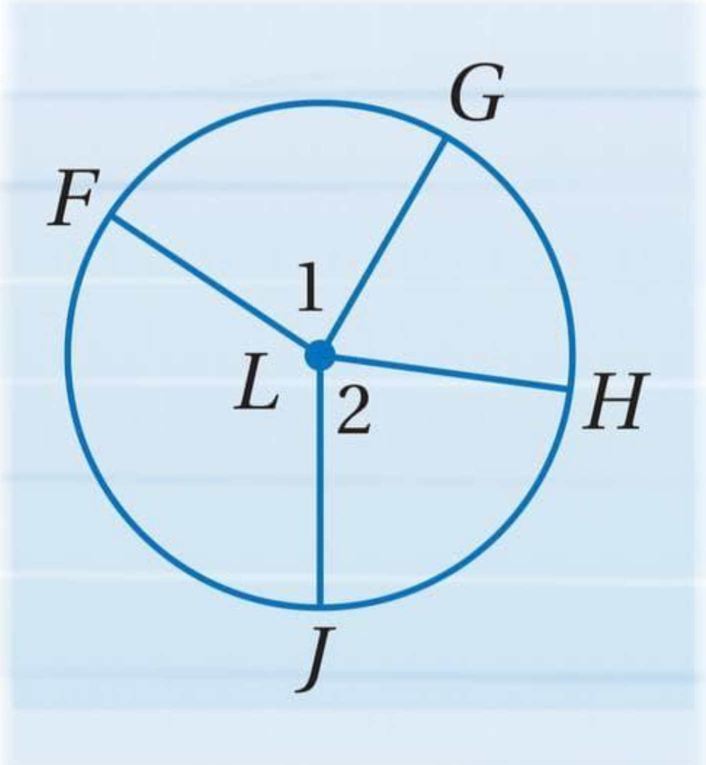
قياس الزوايا والأقواس

الأقواس المتطابقة : الأقواس التي لها نفس المقياس

* متى تكون الأقواس متطابقة ؟!

إذا كانت الزاويتان المركزيتان المقابلتان لها متطابقتان

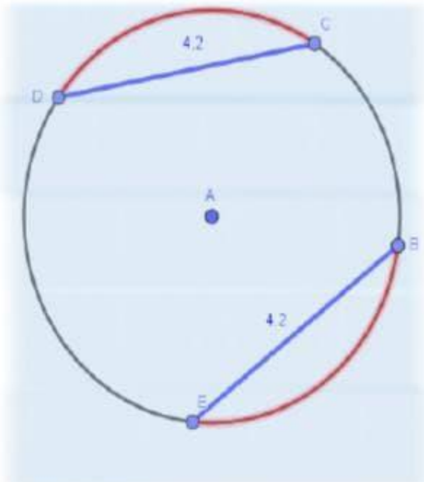
إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\overset{\frown}{HJ} \cong \overset{\frown}{FG}$



الأقواس والأوتار

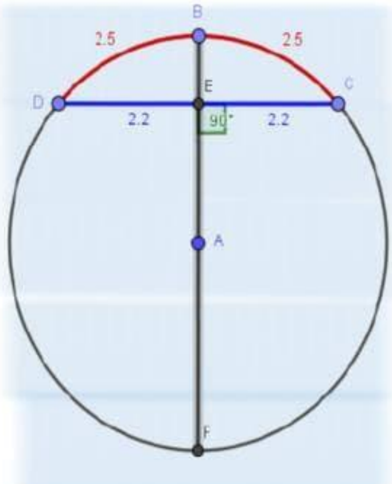
يكون القوسان

الأصغران متطابقان إذا وفقط إذا كان الوتران المقابلان لهما متطابقان



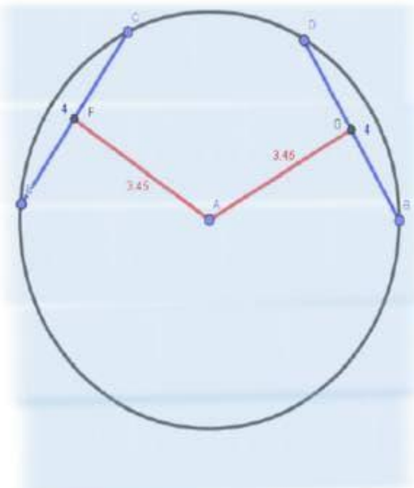
يكون العمود المنصف

لوتر في دائرة قطراً أو نصف قطر إذا وفقط إذا نصف ذلك الوتر ونصف قوسه



في الدائرة نفسها

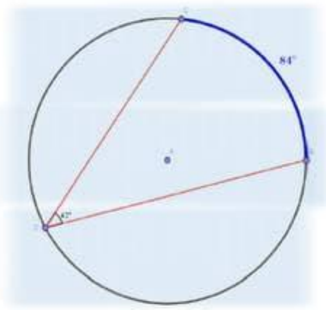
أو في دائرتين متطابقتين يكون الوترات متطابقين إذا وفقط إذا كان بعداهما عن مركز الدائرة متساويين



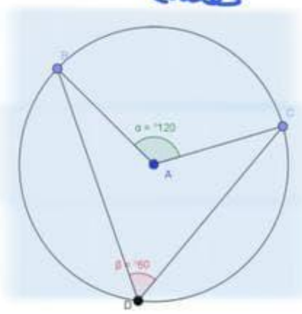
الزوايا المحيطية

الزوايا المحيطية: رأسها على محيط الدائرة وضلعيها وتران في الدائرة.

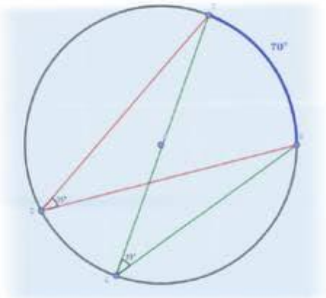
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها



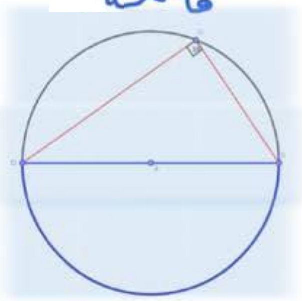
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه



اذا قابلت زاويتان محيطيتان القوس نفسه أو قوسين متطابقين فإنهما متطابقتان



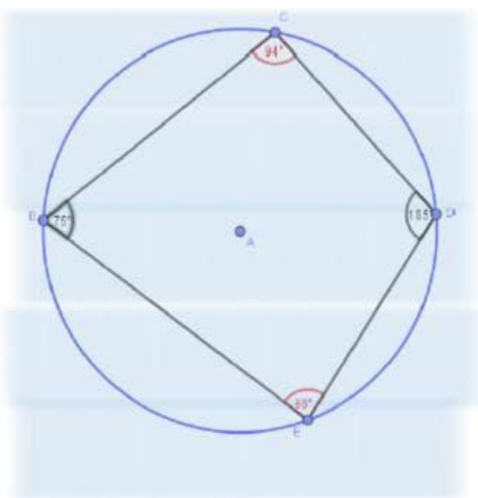
تقابل الزاوية المحيطية قطراً أو نصف دائرة إذا و فقط اذا كانت الزاوية قائمة



الرباعي الدائري :

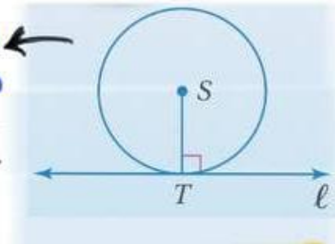
شكل رباعي تقع رؤوسه على محيط الدائره

إذا كان الشكل الرباعي محاطاً بدائره فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتين.

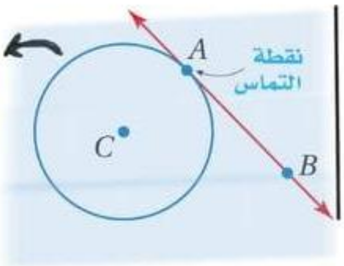


المماسات

المماس هو مستقيم يقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه الدائرة ويقطعها في نقطة واحدة فقط تسمى نقطة التماس..



المماس ونصف القطر متعامدان عند نقطة التماس

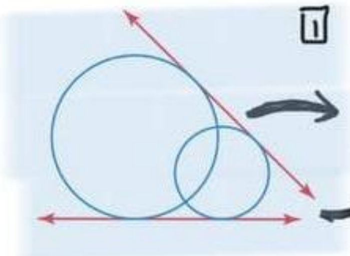


مماس الدائرة له طريقتين بالكتابة بالرموز

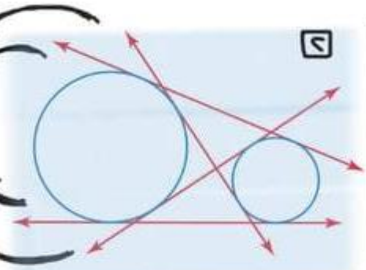
$\overline{AB}$, $\overrightarrow{AB}$

المماس المشترك..

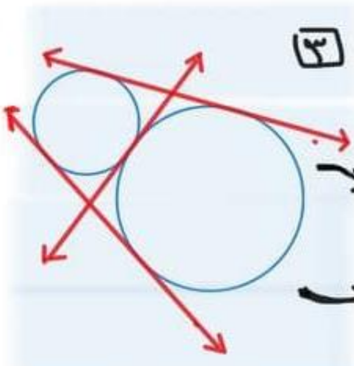
هو مستقيم أو نصف مستقيم أو قطعة مستقيمة تمس الدائرة في المستوى نفسه



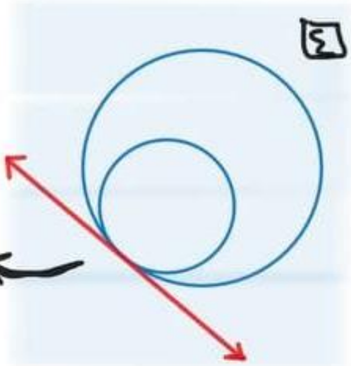
مماسان مشتركان



مماسات مشتركة



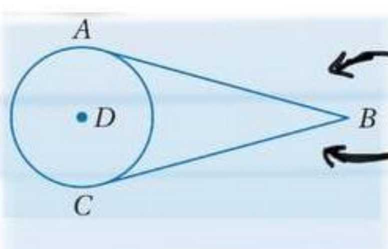
متماستان من الخارج



مماس واحد
متماستان من الداخل

إذا رسمت قطعتان مستقيمتان

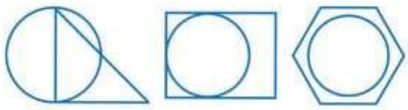
مماستان لدائرة من نقطة خارجها فإنهما متطابقتان



قطعتان مستقيمتان لهما بداية ونهاية وأيضاً يمسان الدائرة في نقطة واحدة

المضلعات المحيطة بدائرة :

يحيط المضلع بالدائرة إذا كان كل ضلع من أضلاعه مماساً لدائرة ..

مضلعات ليست محيطة بدائرة	مضلعات محيطة بدائرة
	

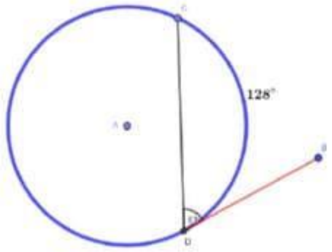
مرسومة داخله الدائرة

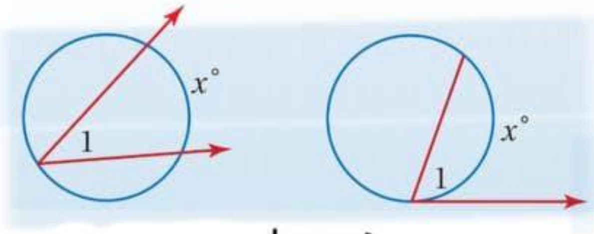
ليست مرسومة داخله دائرة

اما خارجها او جزء داخل الدائرة وجزء خارجه

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

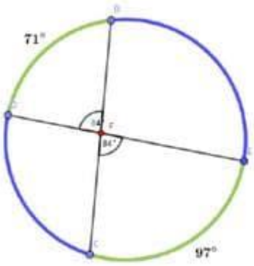
الرأس على الدائرة : قياس الزاوية = نصف القوس المقابل لها



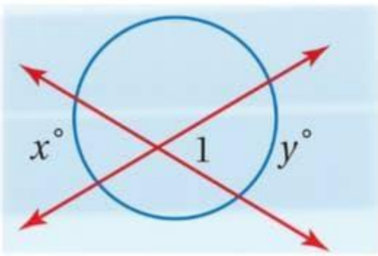


$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(x)$$

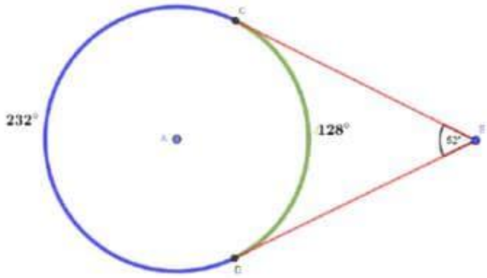
الرأس داخل الدائرة : قياس الزاوية = نصف مجموع قياسي القوس المقابل للزاوية والقوس المقابل للزاوية المقابلة لها بالرأس ..

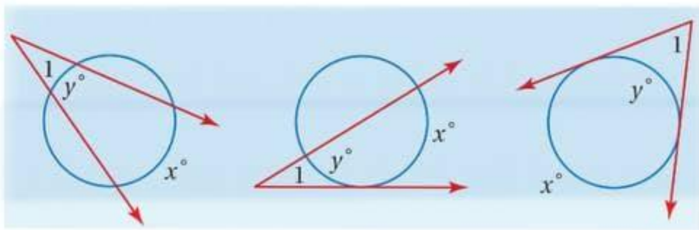


$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(x+y)$$



الرأس خارج الدائرة : قياس الزاوية = نصف الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها ..





$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(x-y)$$

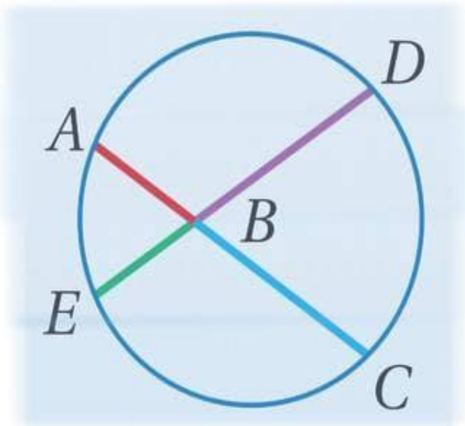
قطع مستقيمة خاصة في الدائرة

قطع مستقيمة تتقاطع داخل الدائرة

وترات

إذا تقاطع الوتران ED ، AC داخل الدائرة فإن :

$AB \cdot BC = DB \cdot BE$

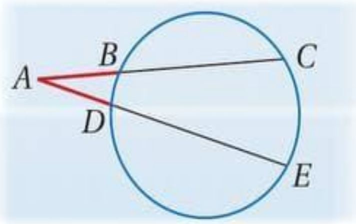


قطع مستقيمة تتقاطع خارج الدائرة

قاطعان

إذا تقاطع القاطعان AC , AE خارج الدائرة فإن

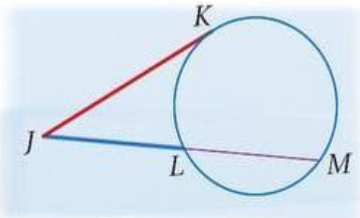
$AC \cdot AB = AE \cdot AD$



مماس وقاطع

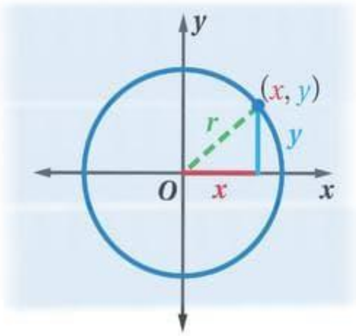
إذا تقاطع المماس JK والقاطع JM خارج الدائرة فإن:

$JK^2 = JL \cdot JM$



معادلة الدائرة

معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل.



مركزها (٠،٠) ونصف قطرها r

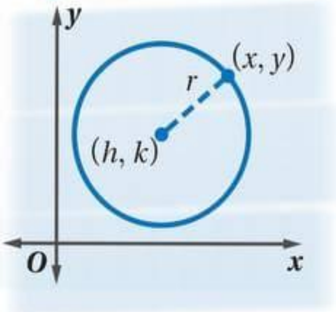
$$x^2+y^2=r^2$$

*** مثال :**

مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{10}$ ؟!

$$x^2+y^2=(\sqrt{\cancel{10}})^{\cancel{2}} \longrightarrow x^2+y^2=10$$

معادلة الدائرة في الصورة القياسية مركزها (h ، k)



مركزها (h،k) ونصف قطرها r ..

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

*** مثال :**

مركزها عند (1،-8) وطول نصف قطرها 7 ؟!

معادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(h,k)=(1,-8)$ ، $r=7$ $(x-1)^2-(y-(-8))^2=7^2$

بالتبسيط $(x-1)^2+(y+8)^2=49$

الفهرس

الفصل الأول / التشابه :

الفصل الثاني / التحويلات الهندسية و التماثل :

الفصل الثالث / الدائرة :

العودة إلى الفصول