مدونة المناهج السعودية

https://eduschool40.blog

الموقع التعليمي لجميع المراحل الدراسية

في المملكة العربية السعودية

Indeterminate Forms

صيغ عدم التعيين

Math 111

Lecture 21

Dr. Nasser Bin Turki

King Saud University
Department of Mathematics

2016

صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات عدم التعيين على الصورة

صيغ عدم التعيين

Indeterminate Forms:

في هذا القسم سوف نقوم بدراسة حالات عدم التعيين على الصورة

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0},$$

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0. \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}.$$

هذا حالات عدم التعيين والتي نحصل عليها من حساب النهاية والتي سوف نحسبها بالطرق التالية

الحالة الاولي:

صيغ عدم التعيين من التوع $\frac{0}{0}$:

اذا كان ناتج النهاية

$$\lim_{x \mapsto c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

حصلنا على حالة عدم تعيين وذلك من حساب نهاية البسط على نهاية المقام وهنا نحتاج إلى اتباع طريقة اخرى لإيجاد النهاية.

قاعدة لوبيتال:

قبل الشروع في قاعدة لوبيتال نقدم لكم مبرهنة القيمة المتوسطة لكوشي.

مبرهنة القيمة المتوسطة لكوشي:

لتكن كل من الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ متصلة على الفترة $[a,b]$ و قابلة للاشتقاق على (a,b). إذا كانت $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in (a,b)$، فإن هنـاك نقطة $c \in (a,b)$ تحقق

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

قاعدة لوبيتال:

افرض أن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ قابلتان للاشتقاق على فترة I تحوي c (باســتثناء ربما عند c) و أن $g'(x) \neq 0$ لكل $x \in I \setminus \{c\}$. إذا كان للكسر $f(x)/g(x)$ الصيغة غير المعينة $0/0$ و كانت $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$، فإن

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قاعدة لوبيتال تساعدنا في التعامل مع مثل هذا النهايات.

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

$$(2) \lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

$$(2) \lim_{x \mapsto 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$(3) \lim_{x \mapsto 0} x \cot x.$$

الحالة الثانية :

صيغ عدم التعيين من التوع $\frac{\infty}{\infty}$:

اذا كان ناتج النهاية

$$\lim_{x \mapsto c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

فاننا نستخدم المبرهنة التالية:

إذا كانت للنهاية $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ الصيغة ∞/∞ و استوفت f و g باقي شروط قاعـــدة لوبيتال، فإن: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}.$$

مثال : أوجد النهايات التالية باستخدام قاعدة لوبيتال :

$$(1) \lim_{x \mapsto \infty} \frac{e^{3x}}{x^2}.$$

$$(2) \lim_{x \mapsto \infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}.$$

الحالة الثالثة:

صيغ عدم التعيين من التوع $0 \cdot \infty$:

نحصل على هذا الحالة من خلال حساب النهاية من الصورة التالية

$$\lim_{x \mapsto c} f(x)g(x) = 0 \cdot \infty \Leftrightarrow \lim f(x) = 0 \quad \text{and} \quad \lim g(x) = \infty.$$

و العكس صحيح.

وهنا نقوم بتحويل النهاية إلى إحدى الصيغتين $\frac{\infty}{\infty}$ OR $\frac{0}{0}$ وذلك لتطبيق قاعدة لوبيتال بالطرق التالية

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad OR \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1) \lim_{x \mapsto 0^+} x^2 \ln(x).$$

الحالة الرابعة:

صيغ عدم التعيين من التوع $\infty - \infty$:

/ @\ / @\ @\ @\ وهنا نقوم بتحويل النهاية إلى إحدى الصيغتين

$\frac{\infty}{\infty}$ OR $\frac{0}{0}$ وذلك لتطبيق قاعدة لوبيتال.

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1)\ \lim_{x \mapsto 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right).$$

الحالة الخامسة:

صيغ عدم التعيين من التوع

$$1^{\infty}, \quad 0^0 \quad \infty^0.$$

Exercises

مثال : أوجد النهاية التالية :

$$(1)\ \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{\sin 5x}{2x}\right).$$

$$(2)\ \lim_{x\mapsto 0}\frac{\ln(e^x-1)}{\ln(x)}.$$

$$(3)\ \lim_{x\mapsto \infty}\left(\frac{\sqrt{9x-1}}{\sqrt{x+1}}\right).$$

$$(4)\ \lim_{x\mapsto 0^+}(\sin(x)/lin(x)).$$

Thanks for listening.