2\4- التوزيع المنتظم The Uniform Distribution

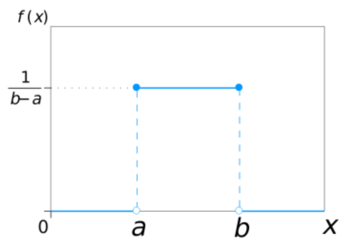
في نظرية الاحتمالات والإحصاء، يعرّف التوزيع المنتظم المستمر على أنّه توزيع احتمالي بحيث أن كل متغير عشوائي تابع له يستطيع الحصول على قيم محصورة في فترة مستمرّة واحدة ووحيدة على محور الأعداد الصحيحة، كما يتضح ذلك من خلال التعريف التالي.

تعريف (4-1): يسمى المتغير العشوائي X متغيراً عشوائياً منتظماً علي الفترة (a,b) إذا كانت دالة كثافة الاحتمال له تأخذ الصورة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

حيث a,b تسمى معالم التوزيع وتحقق $-\infty<a<b<\infty$.

سمي هذا التوزيع بالمنتظم وذلك لأن دالة كثافة الاحتمال له تكون منتظمة أو ثابتة على الفترة $[a,b]$ ويسمى أيضاً بالتوزيع المستطيل(Rectangular Distribution) كما في شكل $(4-1)$. ويصف هذا التوزيع بعض الظواهر العشوائية التي تحدث خلال فترات معينة محددة و يرمز لهذا التوزيع عادة بالرمز $X\sim U(a,b)$. ويتحدد شكل دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتظم من خلال قيم المعالم a,b كالتالي



شكل (4-1): منحنى دالة الكثافة للتوزيع المنتظم

حالة خاصة : إذا كان $X\sim U(-a,a)$ فإن

$$f(x)=\frac{1}{2a},\quad -a\le x\le +a$$

دالة التوزيع التراكمية

يمكن حساب دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المنتظم المتصل كالتالي

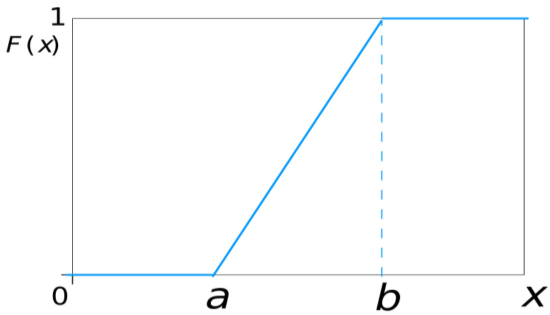
$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$=\frac{1}{\text{b-a}}\int_{a}^{x} dt=\frac{x-a}{b-a}$$

أي أن

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x\end{cases}$$

ويظهر الشكل التالي منحنى دالة التوزيع التراكمية



شكل (4-2):: منحنى دالة التوزيع التراكمية

التوقع والتباين والانحراف المعياري للتوزيع المنتظم بالمعالم a, b هي على الترتيب

$$E(X)=\tfrac{1}{2}(a+b),\qquad Var(X)=\tfrac{1}{12}(b-a)^2,\qquad \sigma_X=\tfrac{1}{2\sqrt{3}}(b-a)$$

وعلى ذلك يمكن كتابه دالة كثافة الإحتمال بدلالة الوسط μ والتباين σ^2 على النحو التالي

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sigma\sqrt{3}} & -\sigma\sqrt{3}\le x-\mu\le\sigma\sqrt{3}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

وتكون دالة التوزيع التراكمية على الصورة

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{3}}+1\right) & a\le x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

مثال(4-1): إذا كان $X\sim U(-3,5)$ أوجد الاحتمالات التالية

$$(a)\ P(X\ge 3),\qquad (b)\ P(X<3),\qquad (c)\ P(-5\le X\le 5)$$

الحل: بما أن $X\sim U(-3,5)$ ، إذا دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X تأخذ الشكل التالي

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & -3<x<5\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

$$(a)\quad P(X\ge 3)=\int_3^5 \tfrac{1}{8}\,dx=\tfrac{1}{4}$$

$$(b)\quad P(X<3)=1-P(X\ge 3)=1-\tfrac{1}{4}=\tfrac{3}{4}$$

$$(c)\quad P(-5\le X\le 5)=\int_{-5}^{-3} 0\,dx+\int_{-3}^{5}\tfrac{1}{8}\,dx=1$$

مثال(4-2): يصل شخص ما لموقف الحافلات, لكن لا يعرف جدول مواعيد وسيلة النقل. تصل حافلة لذلك الموقف كل 20 دقيقة, نعرف المتغير العشوائي" X : زمن الانتظار لوسيلة النقل بالدقائق". يأخذ هذا المتغير العشوائي أي قيمة في المجال [0,20]. أوجد دالة الكثافة، دالة التوزيع التراكمية، وأحسب متوسط الوقت الذى سوف ينتظره الشخص حتى وصول الحافلة، وكذلك احسب الانحراف المعياري.

الحل

a=0, b=20

المتغير العشوائي X :{ زمن الانتظار } له توزيع منتظم.

وتكون دالة الكثافة له على النحو التالي

$$f(x)=\begin{cases}1/20 & 0\le x\le b\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

وتكون دالة التوزيع التراكمية هى :

$$F(x)=\begin{cases}0 & for\ \ x<0\\ \dfrac{1}{20}x & for\ 0\le x\le 20\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

القيمة المتوقعة:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)=\int_0^{20} x\left(\frac{1}{20}\right)dx=10$$

ويمكن حسابه بالقاعدة السابقة وذلك على النحو التالي

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(0+20)=10$$

سينتظر الشخص بالمتوسط 10 دقائق لقدوم الحافلة.

التباين:

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx=\int_0^{20}(x-10)^2\left(\frac{1}{20}\right)dx=33.33$$

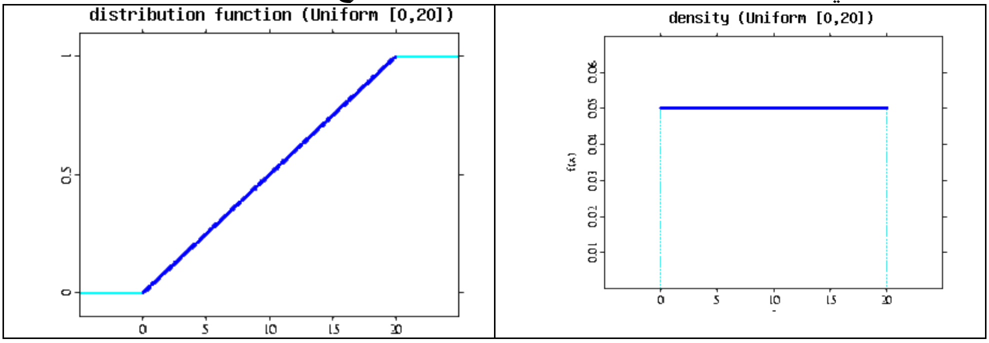
ويمكن حسابه بالقاعدة السابقة وذلك على النحو التالي

$$Var(X)=\frac{1}{12}(a+b)^2=\frac{1}{12}(0+20)^2=33.33$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = 5.77$$

والشكل التالي يظهر دالة كثافة الاحتمال وكذلك دالة التوزيع :



شكل (3-4)

مثال(3-4): استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن من المواد الغذائية، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيعاً منتظماً، فأوجد الآتي:

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحــل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير X يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < x < 12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \ , \ 0 < x < 12$$

- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

بفرض أن Q هي كمية المواد الغذائية المستوردة، تكون الكمية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$\mathrm{Q} \times \mathrm{P}(\mathrm{X} > \mathbf{7}) = \mathrm{Q} \times (\mathbf{1} - \mathrm{F}(\mathbf{7})) = \mathbf{1500}(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{7-0}}{\mathbf{12-0}}) = \mathbf{625} \ \ \mathrm{Ton}$$

4/3- التوزيع الثنائي (ذي الحدين السالب) Negative binomial

هذا التوزيع له أهمية كبيرة في كثير من المجالات العلمية كعلم الزراعة وعلم البكتريا. يسمى بتوزيع ذي الحدين السالب لأن دالة كتلته الاحتمالية تمثل الحد العام لمفكوك ذي الحدين السالب ويطلق علية أحيانا "توزيع باسكال" نسبة للعالم الفرنسي باسكال. يعتبر التوزيع الثنائي (ذي الحدين السالب) هو الحالة العامة للتوزيع الثنائي Binomial حيث يمثل المتغير العشوائي عدد المحاولات (محاولات مستقلة عن بعضها باحتمال نجاح p، ويكون ثابت في كل المحاولات) اللازمة للحصول على r من النجاحات.

تعريف(3-2): إذا أجريت تجربة برنولي عدداً من المرات المستقلة حتى نحصل على r نجاح "وهو عادة هدفنا من إجراء التجربة " وباعتبار أن X يمثل عدد المرات اللازمة للحصول على r ، فإنه يقال أن X متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين السالب وتأخذ دالة كتلته الاحتمالية الشكل

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1}(1-p)^{x-r}\, p^{r}, \qquad x = r, r+1, r+2, \ldots\ldots$$

حيث:

r يمثل عدد مرات النجاح

x يمثل عدد المرات اللازمة للحصول على r

$x-r$ يمثل عدد مرات الفشل

p تمثل احتمال النجاح، بينما $q = 1-p$ فتمثل احتمال الفشل.

ويرمز عادة لهذا التوزيع بالرمز $X \sim NB(r, p)$ حيث r, p هما معالم التوزيع وبهما يتحدد شكل التوزيع.

التوقع والتباين لتوزيع ذي الحدين السالب:

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين السالب فإن التوقع للمتغير العشوائي X ويرمز له بالرمز μ_X أو الرمز $E(X)$ والتباين ويرمز له بالرمز $Var(X)$ تعطى بالعلاقتين الآتيتين :

التوقع

$$\mu_x = E(X) = \frac{r}{p}$$

التباين

$$\sigma^2 = Var(X) = r(1-p)/p^2$$

مثال 8/3: موقع على شبكة الانترنت يعمل باستخدام ثلاثة حواسب servers. الموقع يعمل باستخدام جهاز واحد فقط، والجهازان الآخران يكونان في وضع الاحتياطي، بحيث تعمل عند عطل الجهاز الأساسي. احتمالية عطل الجهاز الأساسي عن تقديم الخدمة هو 0.005، بفرض أن كل طلب للخدمة يعتبر محاولة مستقلة عن الأخرى، ما هو متوسط عدد طلبات الخدمة التي يمكن تقديمها قبل عطل الثلاثة أجهزة. وأوجد احتمال عطل الثلاثة أجهزة في خمس محاولات على الأكثر.

الحل

عطل الثلاثة أجهزة تعني أن $r=3$ و $p=0.005$ وعلى ذلك فإن

$$\mu = E(x) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.005} = 6000$$

أي أنها سوف تؤدي 6000 طلب قبل عطل الثلاثة أجهزة

احتمال عطل الثلاثة أجهزة في خمس محاولات على الأكثر هو $P(x \le 5)$

$$P(X \le 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= 0.005^3 + \binom{4-1}{3-1}(0.005)^3(0.9995) + \binom{5-1}{3-1}(0.005)^3(0.9995)^2$$

$$= 1.249 \times 10^{-9}$$

مثال 9/3: إذا كان احتمال الإجابة الصحيحة على سؤال ما هو 0.60 واختير عدد من الطلاب الواحد تلو الآخر للإجابة علي هذا السؤال، أحسب الاحتمالات التالية:

أ) أن يكون عدد الطلاب المختارين 8 طلاب للحصول على أربع إجابات صحيحة.

ب) أن يكون عدد الطلاب المختارين 8 طلاب على الأقل للحصول على أربع إجابات صحيحة.

الحل:

من المعطيات نجد أن

$$r = 4, \quad p = 0.60, \quad q = 0.40$$

$$\text{(a)}\quad P(X=8)=\binom{7}{3}(0.60)^4\,(0.40)^4=0.116$$

$$\text{(b)}\quad P(X\geq 8)=1-P(X\leq 7)=1-\sum_{r=4}^{7}P(X=r)=0.28979$$

مثال 10/3: إذا كان احتمال تصديق شائعة من الشائعات هو 0.70، ما هو احتمال أن عاشر شخص يسمعها، سيكون سادس من يصدقها؟

الحل:

$$x=10,\quad r=6,\quad p=0.70,\quad q=0.30$$

$$P(X=10)=\binom{9}{5}(0.70)^6\,(0.30)^4\ \approx\ 0.116$$

4/3- التوزيع الهندسي Geometric distribution

المتغير العشوائي في التوزيع الهندسي هو عدد المحاولات التي نحتاجها للحصول على النتيجة المطلوبة. وذلك بخلاف توزيع ذي الحدين، حيث أنه في توزيع ذي الحدين كان المتغير العشوائي يمثل عدد المحاولات التي تنتج نجاحا. أما هنا في التوزيع الهندسي فإن المتغير العشوائي يمثل عدد المحاولات اللازمة حتى ظهور أول نجاح ويسمى بالتوزيع العشوائي الهندسي. ويمكن فهمه من خلال تجربة برنولى بحيث إذا كررنا تجربة برنولي عدداً من المرات المستقلة حتى نحصل على أول نجاح، ثم تنتهي التجربة، وكان عدد المرات اللازمة لذلك هو x ، وباعتبار أن X يمثل عدد المحاولات (عدد مرات إجراء التجربة) حتى الحصول على أول نجاح فإن X يمثل متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسي. ويمكن تخيل ذلك من خلال المثال التالي: يتم نقل البيانات الرقمية عبر قناة لنقل المعلومات وكان احتمال الخطأ لنقل وحدة بيانات هو 0.1 وبفرض أن عملية نقل وحدات البيانات هي أحداث مستقلة وعلى اعتبار أن المتغير العشوائي X يمثل عدد وحدات البيانات المنقولة حتى حدوث أول خطأ.

وعلى ذلك فإن $P(X=5)$ هو احتمال أن الأربع وحدات المنقولة أولا سليمة وتم نقل وحدة البيانات الخامسة بخطأ وعلى ذلك يكون الحدث هو $\{OOOOE\}$ حيث أن O ترمز لنقل وحدة البيانات سليمة و E ترمز لنقل البيانات خطأ، وحيث أن عملية نقل وحدات البيانات تمثل أحداث مستقلة واحتمال الخطأ هو 0.1 فإن احتمال النقل السليم هو 0.9 وعلى ذلك فإن

$$P(X=5)=(0.9)\times(0.9)\times(0.9)\times(0.9)\times(0.1)=(0.9)^4(0.1)$$

يمكن استخدام هذا التوزيع لوصف بعض التجارب، فمثلا في تجربة إلقاء قطعة نقود فإن المتغير العشوائي X يمكن أن يمثل عدد مرات إلقاء العملة حتى الحصول على الكتابة لأول مره، وكذلك في تجربة فحص إنتاج مصنع ما ، في هذه الحالة فإن المتغير العشوائي X يمثل عدد القطع التي يتم فحصها حتى الحصول على أول قطعة تالفة، وعلى ذلك يمكن تعريف التوزيع الهندسي على النحو التالي:

إذا كررنا تجربة برنولي عدداً من المرات المستقلة حتى نحصل على أول نجاح "وهو عادة ما نريده من إجراء التجربة" ثم تنتهي التجربة، وكان عدد المرات اللازمة لذلك هو X ، وبالتالي فإن المحاولة الأخيرة هي الناجحة. وباعتبار أن X يمثل عدد المحاولات (عدد مرات إجراء التجربة) حتى الحصول على أول نجاح فإن X يمثل متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسي وتأخذ دالة كتلته الاحتمالية الشكل التالي:

$$f(x)=(1-p)^{x-1}p, \quad x=1,2,3,...$$

ويرمز عادة لهذا التوزيع بالرمز $X \sim G(p)$ حيث p هو معلمة التوزيع ويمثل احتمال النجاح في أي محاولة. وعلى ذلك يعتبر التوزيع الهندسي حالة خاصة من توزيع ذي الحدين السالب لأنه يمكن استنتاج دالة كتلة الاحتمال للتوزيع الهندسي بوضع $r=1$ في دالة كتلة الاحتمال لتوزيع ذي الحدين السالب.

التوقع والتباين للتوزيع الهندسي:

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الهندسي فإن التوقع للمتغير العشوائي X ويرمز له بالرمز μ_X أو الرمز E(X) والتباين ويرمز له بالرمز Var(X) تعطى بالعلاقتين الآتيتين:

$$\mu_X=E(X)=\frac{1}{p}$$

أي أن التوقع أو متوسط التوزيع الهندسي يساوي مقلوب قيمة احتمال النجاح p

تباين التوزيع الهندسي:

تباين التوزيع الهندسي يكون كالتالي :

$$\sigma^2{}_X=Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

مثال 11/3: بفرض أن احتمالية لاعب ما لإصابة الهدف هي $\frac{1}{3}$ ما هي احتمال أن يخطيء الهدف أقل من ثلاث مرات.

الحل

$$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=0.7037$$

مثال 12/3: يحتوى صندوق على 15 كرة سوداء و 10 كرات بيضاء إذا تم سحب

الكرات بطريقة عشوائية الواحدة تلو الأخرى مع الإرجاع حتى الحصول على كرة سوداء. ما هو احتمال أننا سنحصل عليها في المحاولة السابعة ؟

الحل

$$p = \frac{15}{25}$$

$$p(X = 7) = \left(\frac{15}{25}\right)\left(1 - \frac{15}{25}\right)^6 = 0.00245$$

6/3- توزيع بواسون : Poisson Distribution

يعتبر توزيع بواسون من التوزيعات المتقطعة الهامة التي تعبر عن الكثير من الظواهر في الحياة العملية، حيث يستخدم للتعبير عن عدد مرات حدوث ظاهرة معينة في فترة زمنية محددة أو مساحة محددة أو طول محدد وبشرط أن تتصف هذه الأحداث بالندرة والاستقلال ومن بين تلك الظواهر على سبيل المثال ما يلي:

- عدد الأخطاء المطبعية في كتاب معين، حيث تعتبر هذه الأخطاء نادرة إذا ما قورنت بعدد الكلمات التي يحتويها هذا الكتاب.
- عدد الحوادث التي تقع على إحدى الطرق السريعة في يوم ما حيث تعتبر هذه الحوادث نادرة الوقوع إذا ما قورنت بعدد السيارات التي تسلك هذه الطريق في ذلك اليوم.
- عدد مرات تصدي حارس مرمى لضربات الجزاء تعتبر من الحوادث النادرة الوقوع إذا ما قورنت بعدد الأهداف التي دخلت مرمى هذا الحارس من جراء ضربات الجزاء.
- عدد السيارات التي تصل إلى إحدى محطات خدمة السيارات في الساعة .
- عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة قطار في الدقيقة.
- عدد المكالمات التي ترد إلى سنترال إحدى الهيئات الحكومية في الساعة.
- عدد العيوب الموجودة في كيلومتر طولي من قضبان مترو الأنفاق.

وعلى ذلك تكون شروط توزيع بواسون كما يلي

- أن يكون احتمال النجاح P ثابت وكذلك احتمال الفشل في كل محاولة.
- إن يكون احتمال النجاح صغيرا ويقترب من الصفر واحتمال الفشل يقترب من الواحد.
- أن يكون عدد المحاولات كبيراً جداً .

دالة توزيع بواسون :

إذا كان X متغيراً عشوائياً يعبر عن عدد حالات النجاح لحدث نادر الوقوع باحتمال p حيث p صغيرة جدا $(p \to 0)$ وفي عدد كبير جدا من المحاولات المستقلة يساوي n حيث $(n \to \infty)$فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X تعطي بالعلاقة الآتية:

$$P(X=k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

وهذه الدالة الاحتمالية تحقق الشرطين الخاصين بدالة الكتلة الاحتمالية:

- $f(x_i) \ge 0 \quad \forall x_i$
- $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = e^{-\lambda}\sum_{k!}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$

توقع توزيع بواسون :

$$\mu_X = E(X) = \lambda$$

أي أن التوقع أو متوسط توزيع بواسون يساوي المعلمة λ

تباين توزيع بواسون :

تباين توزيع بواسون يكون كالتالي :

$$\sigma^2{}_X = Var(X) = \lambda$$

أي أن تباين توزيع بواسون يساوي المتوسط أي نفس المعلمة للتوزيع .

مثال 17/3: إذا كان متوسط عدد الحوادث التي تقع على إحدى الطرق السريعة هو 4 حوادث كل أسبوع فأوجد :

أ. احتمال وقوع حادثة واحدة خلال أسبوع.

ب. عدم وقوع أية حوادث خلال أسبوع .

ج. احتمال وقوع حادثين على الأكثر خلال أسبوع .

د. احتمال وقوع حادثين على الأقل خلال أسبوع .

الحل

حيث أن عدد الحوادث التي تقع على إحدى الطرق السريعة من الأحداث النادرة الوقوع إذا ما قورنت بعدد السيارات التي تعبر هذا الطريق. وبالتالي فإذا فرضنا أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الحوادث ، فإنه يتبع توزيع بواسون .

متوسط عدد الحوادث في أسبوع هو 4 حوادث $\lambda = 4$

أ- احتمال وقوع حادثة في خلال أسبوع

$$P(X=1) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 4e^{-4}$$

ب- احتمال عدم وقوع أية حوادث خلال أسبوع .

$$P(X=0) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} = e^{-4}$$

ج- احتمال وقوع حادثين على الأكثر خلال أسبوع .

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} = 13e^{-4}$$

د- احتمال وقوع حادثين على الأقل خلال أسبوع .

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \frac{4^0 e^{-4}}{0!} - \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 1 - 5e^{-4}$$

مثال 18/3: يأتي المرضى إلى عيادة أحد الأطباء بمعدل 12 مريضا في اليوم الواحد أوجد :

أ-احتمال أن يأتي 3 مرضى إلى هذه العيادة في الساعة.

ب- احتمال أن يأتي 5 مرضى إلى هذه العيادة في 3 ساعات .

ج- احتمال أن يأتي 4 مرضى إلى هذه العيادة في نصف اليوم.

الحل

إذا فرضنا أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد المرضى ، فإنه يتبع توزيع بواسون.

متوسط عدد المرضى في اليوم الواحد هو 12 مريضاً

أ- متوسط عدد المرضى في الساعة هو $\frac{1}{2}$

$$P(X=3) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}}}{3!} = 0.0126$$

ب- متوسط عدد المرضى في 3 ساعات هو $\frac{3}{2}$

$$P(X=5)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 e^{-\frac{3}{2}}}{5!}=0.03838$$

ج- متوسط عدد المرضى في نصف يوم هو 6

$$P(X=4)=\frac{(6)^4 e^{-6}}{4!}=0.1338$$

مثال 19/3: إذا كان متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون أحد مطاعم الوجبات الجاهزة في وقت الظهيرة هو 3 زبائن في الدقيقة. فأوجد

أ-احتمال وجود 4 زبائن في الدقيقة .

ب- احتمال وجود 5 زبائن في 30 ثانية .

الحل

إذا فرضنا أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الزبائن، فإنه يتبع توزيع بواسون.

متوسط عدد الزبائن في الدقيقة هو 3 زبائن، $\lambda=3$

أ- احتمال وجود 4 زبائن في الدقيقة .

$$P(X=4)=\frac{3^4 e^{-3}}{4!}=3.375e^{-3}$$

ب-احتمال وجود 5 زبائن في 30 ثانية .

في هذه الحالة نحن نتحدث عن 30 ثانية وليس دقيقة وبالتالي فإن متوسط عدد الزبائن في 30 ثانية هو $\lambda=\frac{3}{2}$

$$P(X=5)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 e^{-\frac{3}{2}}}{5!}=0.0632e^{-\frac{3}{2}}$$

مثال 20/3: إذا كانت المكالمات التليفونية التى تصل إلى سنترال إحدى الهيئات تتبع توزيع بواسون بمتوسط 120 مكالمة كل ساعة ، فأوجد :

أ-احتمال أن يصل إلى السنترال 5 مكالمات في الدقيقة .

ب- احتمال أن يصل إلى السنترال مكالمتان في دقيقة ونصف.

ج- احتمال أن يصل إلى السنترال 3 مكالمات في دقيقتين.

د- عدم وصول أي مكالمة في نصف دقيقة .

هـ- احتمال وصول مكالمة واحدة على الأقل في ربع دقيقة .

الحل

نفرض أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد المكالمات التي ترد إلى هذا السنترال:

أ- احتمال أن يصل إلى السنترال 5 مكالمات في الدقيقة

متوسط عدد المكالمات في الدقيقة $\lambda = 2$

$$P(X=5)=\frac{(2)^5\, e^{-2}}{5!}=0.266e^{-2}$$

ب-احتمال أن يصل إلى السنترال مكالمتان في دقيقة ونصف

متوسط عدد المكالمات في دقيقة ونصف $\lambda = 3$

$$P(X=2)=\frac{(3)^2\, e^{-3}}{2!}=4.5e^{-3}$$

ج- احتمال أن يصل إلى السنترال 3 مكالمات في دقيقتين

متوسط عدد المكالمات في دقيقتين $\lambda = 4$

$$P(X=3)=\frac{(4)^3\, e^{-4}}{3!}=10.66e^{-4}$$

د- احتمال عدم وصول أي مكالمة في نصف دقيقة

متوسط عدد المكالمات في نصف دقيقة $\lambda = 1$

$$p(X=0)=\frac{(1)^0\, e^{-1}}{0!}=e^{-1}$$

هـ- احتمال وصول مكالمة واحدة على الأقل في ربع دقيقة

متوسط عدد المكالمات في ربع دقيقة $\lambda = \frac{1}{2}$

$$1-P(X=0)=1-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0 e^{-\frac{1}{2}}}{0!}=1-e^{\frac{-1}{2}}$$

مثال 21/3:إذا كان X متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بواسون فاثبت أن

$$P(x+1)=\frac{\lambda}{x+1}P(x)$$

الحل

$$\frac{P(x+1)}{P(x)}=\frac{\frac{\lambda^{x+1}e^{-\lambda}}{(x+1)!}}{\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{(x)!}}\Rightarrow\frac{P(x+1)}{P(x)}=\frac{\lambda}{x+1}$$

ومنها فإن $P(x+1)=\frac{\lambda}{x+1}P(x)$

وعن طريق هذه الصيغة يمكن تحديد الاحتمالات الخاصة بفضاء العينة دون اللجوء للتعويض وإنما يتطلب ذلك حساب $p(0)$ وذلك كما يلي

$$P(1)=\frac{\lambda}{0+1}P(0),$$

$$P(2)=\frac{\lambda}{1+1}P(1),$$

$$P(3)=\frac{\lambda}{2+1}P(2),$$

وهكذا بشكل عام $P(j)=\frac{\lambda}{j}P(j-1),\ \ j=1,2,3,...$

٤. مقاييس التشتت (الاختلاف)
Measures of Dispersion (Variation)

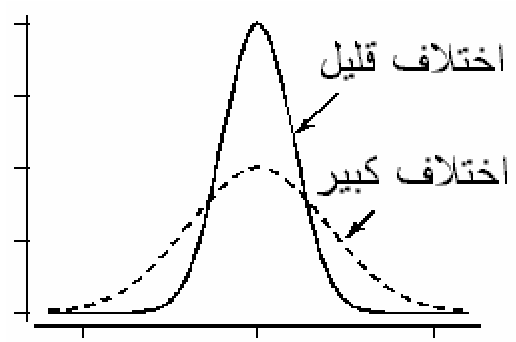
(٤-١) مقدمة:

لقد ذكرنا في الفصل السابق بعض مقاييس النزعة المركزية والتي تمثل مقاييس عددية لموضع أو مكان تركز البيانات لظاهرة ما. وقد ذكرنا بأن هذه المقاييس تستخدم لمقارنة مجموعات البيانات المختلفة. وفي الحقيقة فإن مقاييس النزعة المركزية غير كافية لإيجاد مقارنة شاملة بين مجموعات البيانات المختلفة. فقد تكون هناك مجموعات من البيانات لها نفس مقاييس النزعة المركزية (لها نفس الموضع) ولكنها تختلف في بعض الصفات الأخرى. فمثلاً المثال التالي يبين لنا مجموعتين من البيانات لهما نفس المتوسط ولكنهما مختلفتان في طبيعة تشتتهما.

مثال:

المجموعة	البيانات	المتوسط	
الأولى	59, 61, 62, 58, 60	60	-----------------●--●--●--●--●-----------
الثانية	50, 60, 66, 54, 70	60	-----------●-----●-----●-----●------●--- 60

بالرغم من أن المتوسط يساوي 60 للمجموعتين إلا أن التشتت (أو الاختلاف) بين القيم في كل مجموعة غير متساو. فمن الواضح أن بيانات المجموعة الأولى أكثر تقاربًا فيما بينها (أقل تشتتًا وتباعدًا فيما بينها) من بيانات المجموعة الثانية. لذلك دعت الحاجة لإيجاد مقاييس تقيس طبيعة تشتت (أو تفرق أو اختلاف أو تباعد) البيانات فيما بينها. هذه المقاييس تسمى مقاييس التشتت أو الاختلاف.



المضلعان التكراريان لتوزيعين لهما نفس مقاييس
النزعة المركزية ولكنهما مختلفين في التشتت

مقاييس التشتت هي مقاييس عددية تستخدم لقياس اختلاف أو تشتت البيانات. والاختلاف أو التشتت لمجموعة من البيانات هو مقدار تفرق أو تباعد أو انتشار البيانات فيما بينها. فتشتت البيانات يكون صغيرًا إذا كانت البيانات متقاربة فيما بينها والعكس بالعكس. وأما البيانات المتساوية فلا اختلاف ولا تشتت فيها. ومقاييس التشتت تستخدم لوصف مجموعة البيانات وكذلك لمقارنة مجموعات البيانات المختلفة إذ أن مقاييس النزعة المركزية لا تكفي وحدها لوصف مجموعة البيانات أو مقارنة مجموعات البيانات المختلفة. ومن أشهر مقاييس التشتت نذكر:

١. المدى: Range
٢. نصف المدى الربيعي Semi-Inter-quartile Range
٣. التباين: Variance
٤. الانحراف المعياري: Standard Deviation
٥. معامل الاختلاف (أو التغير): Coefficient of Variation

(٤-٢) المدى: Range

يعتبر المدى من أسهل مقاييس التشتت تعريفًا وحسابًا ويعطينا فكرة سريعة عن مدى تفرق البيانات. ويعرف المدى لمجموعة من البيانات بالصيغة التالية:

$$\boxed{\text{Range} = X_{max} - X_{min}}$$

حيث أن:

X_{max} = أكبر قيمة (للبيانات المفردة) = مركز الفترة العليا (للبيانات المبوبة)

X_{min} = أصغر قيمة (للبيانات المفردة) = مركز الفترة الدنيا (للبيانات المبوبة)

مثال (٤-١):

أوجد المدى للمشاهدات التالية والتي هي عبارة عن أوزان (بالكيلوجرام) مجموعة مكونة من سبعة أشخاص: 25, 30, 40, 45, 35, 55, 50

الحل:

$X_{max} = 55$
$X_{min} = 25$
$\text{Range} = X_{max} - X_{min} = 55 - 25 = 30$ (كيلوجرامًا)

مثال (٤-٢):

أوجد المدى لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

الحل:

مستوى الهيموجلوبين	مركز الفترة x	التكرار f
12.95 – 13.95	**13.45**	3
13.9 5– 14.95	14.45	5
14. 95– 15.95	15.45	15
15. 95– 16.95	16.45	16
16. 95– 17.95	17.45	10
17. 95– 18.95	**18.45**	1

X_{max} = مركز الفترة العليا = 18.45

X_{min} = مركز الفترة الدنيا = 13.45

$$\text{Range} = X_{max} - X_{min}$$
$$= 18.45 - 13.45$$
$$= 5.00$$

بعض مميزات وعيوب المدى:

- **مميزات المدى:** سهل التعريف والحساب
- **عيوب المدى:**

١. يتأثر المدى بالقيم الشاذة أو المتطرفة.

٢. لا يأخذ المدى في الاعتبار جميع البيانات.

ملاحظات:

١. وحدة المدى هي نفس وحدة البيانات الأصلية.

٢. نظرًا لأن المدى يعتمد فقط على أكبر وأصغر قيمة ولا يأخذ في الاعتبار القيم الأخرى فهو مقياس غير جيد لقياس التشتت.

(٤-٣) نصف المدى الربيعي Semi-Inter-quartile Range:

رأينا أن المدى يتأثر كثيرًا بالقيم الشاذة أو المتطرفة. ولذلك دعت الحاجة لإيجاد مقاييس أخرى للتشتت لا تتأثر بالقيم المتطرفة. وأحد هذه المقاييس هو نصف المدى الربيعي. وحيث أن القيم المتطرفة هي تلك القيم الصغيرة جدًا أو الكبيرة جدًا فإنه عند حساب نصف المدى الربيعي لا يؤخذ في الاعتبار ربع البيانات الصغيرة (25%) ولا ربع البيانات الكبيرة (25%).

```
    ¼ n =25%                                    ¼ n= 25%
-/-/-/-/-/-/-/-/-/-|----------------|----------------|-/-/-/-/-/-/-/-/-/-
ربع البيانات الصغيرة  Q1                Q2                Q3  ربع البيانات الكبيرة
```

يرمز لنصف المدى الربيعي بالرمز Q ويعرف بالصيغة التالية:

$$\boxed{Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}}$$

حيث أن Q_1 هو الربيع الأول و Q_3 هو الربيع الثالث وقد مر معنا كيفية إيجادهما للبيانات المبوبة بالطريقة الحسابية والبيانية.

<u>مثال (٤-٣):</u>

أوجد نصف المدى الربيعي لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخـــصا تــم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢) باستخدام:

(أ) الطريقة الحسابية

(ب) الطريقة البيانية

<u>الحل:</u>

(أ) الطريقة الحسابية:

التكرار المتجمع الصاعد	مستوى الهيموجلوبين	
0	أقل من	12.95
3	أقل من	13.9 5
$8 = F_1$	أقل من	14. 95= A
$23 = F_2 = F^*_1$	أقل من	15. 95= A*
$39 = F^*_2$	أقل من	16. 95
49	أقل من	17. 95
50	أقل من	18.95

$Q_1 \Rightarrow$ $\leftarrow R = \frac{n}{4} = 12.5$

$Q_3 \Rightarrow$ $\leftarrow R^* = \frac{3n}{4} = 37.5$

حساب الربيع الأول Q_1:

$$R = \frac{n}{4} = \frac{50}{4} = 12.5 \;\; , \;\; A = 14.95, \;\; L = 1.00, \;\; F_1 = 8 \;\; , \;\; F_2 = 23$$

$$Q_1 = A + \left(\frac{R - F_1}{F_2 - F_1}\right) \times L = 14.95 + \left(\frac{12.5 - 8}{23 - 8}\right) \times 1.00 = 15.25$$

حساب الربيع الثالث Q_3:

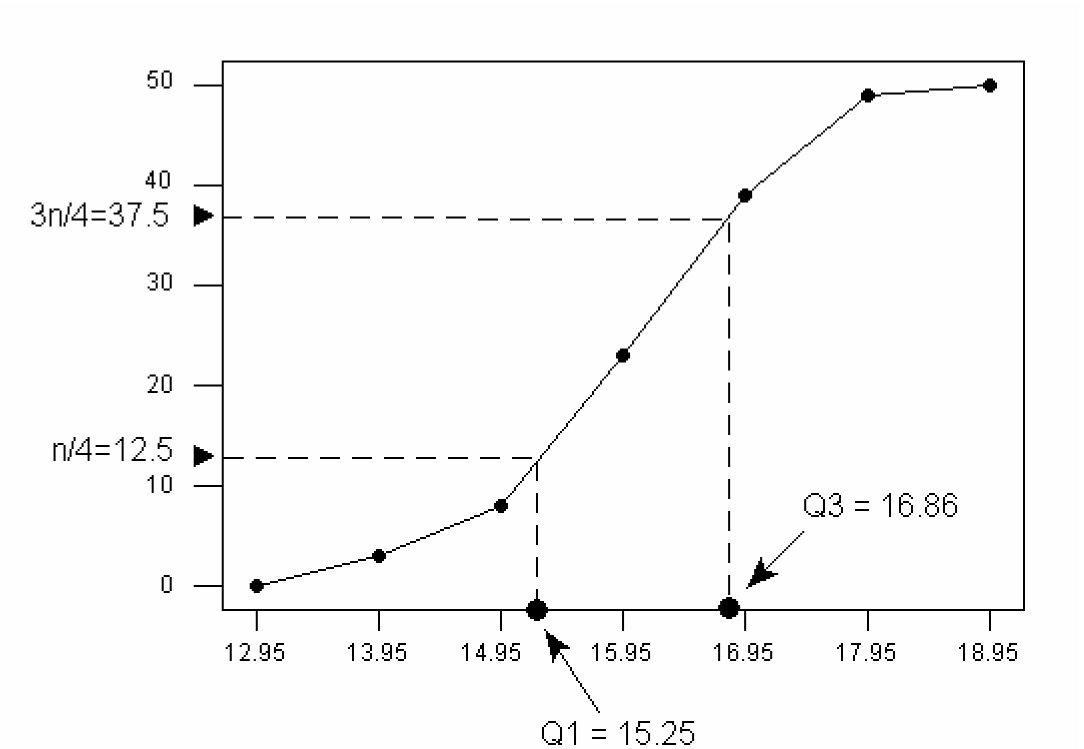
$$R^* = \frac{3n}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5 \;\; , \;\; A^* = 15.95, \;\; L^* = 1.00, \;\; F^*_1 = 23 \;\; , \;\; F^*_2 = 39$$

$$Q_3 = A^* + \left(\frac{R^* - F_1^*}{F_2^* - F_1^*}\right) \times L^* = 15.95 + \left(\frac{37.5 - 23}{39 - 23}\right) \times 1.00 = 16.86$$

وباستخدام الصيغة فإن نصف المدى الربيعي هو:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{16.86 - 15.25}{2} = 1.61$$

(ب) الطريقة البيانية:



وباستخدام الصيغة فإن نصف المدى الربيعي هو:

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{16.86 - 15.25}{2} = 1.61$$

<u>بعض مميزات وعيوب نصف المدى الربيعي:</u>

- **من المميزات:** لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة.
- **من العيوب :** لا يأخذ في الاعتبار جميع البيانات.

<u>ملاحظة:</u>

وحدة نصف المدى الربيعي هي نفس وحدة البيانات الأصلية.

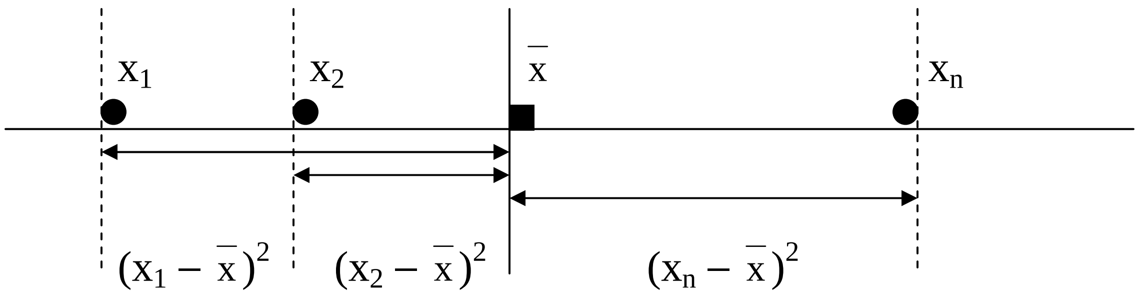
(٤-٤) التباين (Variance) والانحراف المعياري (Standard Deviation):

يعتبر التباين والانحراف المعياري من أهم وأفضل مقاييس التشتت ومن أكثرها شيوعًا واستخدامًا في التحليل الإحصائي وذلك لما يتمتعان به من خصائص وصفات إحصائية جيدة.

التباين: Variance

فكرة التباين تعتمد على تشتت أو تباعد البيانات عن متوسطها. فالتباين يكون كبيرًا إذا كانت البيانات متباعدة عن متوسطها والعكس بالعكس.

ويعرف التباين بأنه متوسط مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي ويرمز له بالرمز S^2.



القيم (البيانات)	x_n	$\cdots$	x_2	x_1
انحرافات القيم عن المتوسط	$x_n - \bar{x}$	$\cdots$	$x_2 - \bar{x}$	$x_1 - \bar{x}$
مربع انحرافات القيم عن المتوسط	$(x_n - \bar{x})^2$	$\cdots$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$(x_1 - \bar{x})^2$

الانحراف المعياري:

إن التباين من أهم وأفضل مقاييس التشتت ولكنه يقاس بوحدة البيانات الأصلية المربعة. وفي كثير من الأحيان نرغب في استخدام مقياس للتشتت يقاس بوحدة البيانات الأصلية ويتمتع بخصائص إحصائية جيدة مثل التباين. وأحد هذه المقاييس هو الانحراف المعياري. ويعرف الانحراف المعياري على أنه الجذر التربيعي للتباين ويرمز له بالرمز S.

حساب التباين والانحراف المعياري:

أولاً: التباين والانحراف المعياري للبيانات المفردة (غير المبوبة):

إذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينه حجمها n وكان متوسطها هو $\bar{x}$ فإن تباين العينة يعرف كما يلي:

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$$

وأما الانحراف المعياري فإنه يعرف بالصيغة:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

ملاحظات:

١. $S^2 \geq 0$ (دائمًا) وكذلك $S \geq 0$ (دائمًا).
٢. $S^2 = 0 \Leftrightarrow S = 0 \Leftrightarrow$ جميع قيم العينة متساوية (لا يوجد اختلاف بين القيم).
٣. وحدة S^2 هي وحدة البيانات الأصلية المربعة.
٤. وحدة S هي نفس وحدة البيانات الأصلية.
٥. يمكن حساب التباين بالصيغة الحسابية التالية:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\,\bar{x}^2}{n-1}$$

ولحساب تباين العينة باستخدام الصيغة الحسابية السابقة فإننا نحتاج إلى معرفة الكميات التالية فقط دون الحاجة لمعرفة البيانات الأصلية:

- حجم العينة = n .
- مجموع البيانات = $\sum_{i=1}^{n}x_i$.
- مجموع مربعات البيانات = $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$.

والصيغة الحسابية السابقة تستخدم لحساب تباين العينة وذلك لسببين هما:

١. لأنها أكثر سهولة.

٢. لأنها أكثر دقة في الحساب عندما يكون هناك تقريب في حساب متوسط العينة.

مثال (٤-٤):

أوجد تباين العينة والانحراف المعياري لمجموعة الأوزان (بالكيلوجرام) التالية:

7.1, 2.5, 2.5, 5.4, 8.3

الحل:

نلخص الحل في الجدول التالي:

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	x^2
7.1	1.94	3.7636	50.41
2.5	–2.66	7.0756	6.25
2.5	–2.66	7.0756	6.25
5.4	0.24	0.0576	29.16
8.3	3.14	9.8596	68.89
$\sum_{i=1}^{n} x_i = 25.8$	0.00	$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 27.832$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 160.96$

$n = 5$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 25.8$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = 27.832$

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 160.96$

متوسط العينة هو:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{25.8}{5} = 5.16 \text{ (كيلوجرامًا)}$$

حساب تباين العينة:

(أ) باستخدام التعريف:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{27.832}{5-1} = 6.958 \text{ (كيلوجرامًا مربعًا)}$$

(ب) باستخدام الصيغة الحسابية:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1} = \frac{160.96 - \frac{(25.8)^2}{5}}{5-1} = \frac{160.96 - 133.128}{4} = 6.958$$

الانحراف المعياري هو:

$$S=\sqrt{S^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=S=\sqrt{6.958}=2.6378$$ (كيلوجرامًا)

<u>بعض خصائص التباين والانحراف المعياري:</u>

١. يخضع التباين والانحراف المعياري لبعض العمليات الجبرية كما يلي:

المشاهدات	الانحراف المعياري	التباين
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	S	S^2
$x_1\pm b$, $x_2\pm b$, …, $x_n\pm b$	S	S^2
ax_1 , ax_2 , …, ax_n	$\lvert a\rvert\ S$	$a^2\ S^2$
$ax_1\pm b$, $ax_2\pm b$, …, $ax_n\pm b$	$\lvert a\rvert\ S$	$a^2\ S^2$

- <u>مثال:</u>

	المشاهدات	الانحراف المعياري	التباين
$: x$	2, 6, 4, 3, 5	$S = 1.581$	$S^2= 2.5$
$: x+5$	7, 11, 9, 8, 10	1.581	2.5
$: 3x$	6, 18, 12, 9, 15	$\lvert 3\rvert\times1.581=4.743$	$9\times2.5=22.5$
$: 3x +5$	11, 23, 17, 14, 20	$\lvert 3\rvert\times1.581=4.743$	$9\times2.5=22.5$

- <u>مثال:</u>

إذا كان التباين للمشاهدات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هو 36 فإن التباين للمشاهدات $\frac{x_1-10}{2},\frac{x_2-10}{2},\ldots,\frac{x_n-10}{2}$ هو $\left(\frac{1}{2}\right)^2 36=\frac{36}{4}=9$ وأما الانحراف المعياري فهو $\sqrt{9}=3$.

٢. إذا كان لدينا مجموعتان من البيانات بحيث أن عدد بيانات المجموعة الأولى n_1 ومتوسطها $\bar{x}_1$ وتباينها S_1^2 وكان عدد بيانات المجموعة الثانية n_2 ومتوسطها $\bar{x}_2$ وتباينها S_2^2 وإذا كان $\bar{x}_1=\bar{x}_2$ (أي أن متوسطي المجموعتين متساويان) فإن تباين المجموعة الكلية المكونة من دمج هاتين المجموعتين يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$\boxed{S^2=\frac{(n_1-1)\,S_1^2+(n_2-1)\,S_2^2}{n_1+n_2-1}}$$

- <u>مثال:</u>

أوجد تباين المجموعة الكلية المكونة من دمج المجموعتين التاليتين:

	المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
حجم العينة	$n_1 = 4$	$n_2 = 6$
المتوسط	$\bar{x}_1 = 5$	$\bar{x}_2 = 5$
التباين	$S_1^2 = 3$	$S_2^2 = 3.5$

الحل:

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)\, S_1^2 + (n_2 - 1)\, S_2^2}{n_1 + n_2 - 1}$$

$$= \frac{(4-1)(3) + (6-1)(3.5)}{4+6-1} = 2.944$$

ثانياً: التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة:

إذا كان لدينا بيانات عددها n وكانت هذه البيانات ملخصة في جدول تكراري بحيث أن:

- عدد الفترات هو k
- مراكز الفترات هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$
- تكرارات الفترات هي $f_1, f_2, \ldots, f_k$

بطريقة مشابهة لحسب المتوسط للتوزيع التكراري فإن التباين للتوزيع التكراري المبوب يمكن حسابه بشكل تقريبي بالصيغة التالية:

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

حيث أن:

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i\,, \quad \bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{\sum xf}{n}\,,$$

كما يمكن استخدام الصيغة الحسابية التالية:

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2}{n}\right) = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2}{n}}{n-1}}$$

ويكمن تلخيص عمليتي إيجاد المتوسط والتباين باستخدام الجدول التالي:

الفترة	مركز الفترة x	التكرار f	$x\,f$	$x^2\,f$	$f\,(x-\overline{x})^2$
الفترة رقم 1 الفترة رقم 2 : : الفترة رقم k	x_1 x_2 : : x_k	f_1 f_2 : : f_k	$x_1\,f_1$ $x_2\,f_2$: : $x_k\,f_k$	$x_1^2\,f_1$ $x_2^2\,f_2$: : $x_k^2\,f_k$	$f_1\,(x_1-\overline{x})^2$ $f_2\,(x_2-\overline{x})^2$: : $f_k\,(x_k-\overline{x})^2$
المجموع		$\sum f = n$	$\sum x\,f$	$\sum x^2 f$	$\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i-\overline{x})^2$

مثال (٤-٥):

أوجد التباين والانحراف المعياري لمستوى الهيموجلوبين في الدم لعينة مكونة من خمسين شخصا تم تلخيص مستوى الهيموجلوبين لهم كما في مثال (٢-٢).

الحل:

مستوى الهيموجلوبين	مركز الفترة x	التكرار f	$x\,f$	$x^2\,f$	$f\,(x-\overline{x})^2$ $f\,(x-16.01)^2$
12.95 – 13.95	13.45	3	40.35	542.708	19.6608
13.9 5– 14.95	14.45	5	72.25	1044.013	12.1680
14. 95– 15.95	15.45	15	231.75	3580.538	4.7040
15. 95– 16.95	16.45	16	263.20	4329.640	3.0976
16. 95– 17.95	17.45	10	174.50	3045.025	20.7360
17. 95– 18.95	18.45	1	18.45	340.403	5.9536
المجموع		$\sum f = 50$	$\sum x\,f = 800.5$	$\sum x^2 f = 12882.33$	$\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i-\overline{x})^2 = 66.320$

$$\overline{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{\sum xf}{n} = \frac{800.5}{50} = 16.01$$

حساب التباين باستخدام صيغة التعريف:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i\,(x_i-\overline{x})^2}{n-1} = \frac{66.320}{50-1} = 1.3535$$

حساب التباين باستخدام الصيغة الحسابية:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\right)^2}{n}\right) = \frac{1}{50-1}\left(12882.33 - \frac{(800.5)^2}{50}\right)$$

$$= \frac{1}{49}(12882.33 - 12816.005) = \frac{66.325}{49} = 1.3536$$

حساب الانحراف المعياري:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1.3536} = 1.163$$

(٤-٥) معامل الاختلاف (التغير): **Coefficient of Variation**:

ذكرنا سابقًا أن التباين والانحراف المعياري من المقاييس المفيدة لقياس التشتت لتوزيع متغير ما. ولكن في كثير من الأحيان نكون مهتمين بمقارنة التشتت والاختلاف لتوزيعي متغيرين مختلفين. وبما أن التباين والانحراف المعياري مقياسان يعتمدان على وحدة البيانات فإنه يصعب استخدامهما لمقارنة تجانس المجموعات المختلفة من البيانات وذلك لاختلاف الوحدة المستخدمة. وبشكل عام فإن مقاييس التشتت التي ذكرناها آنفًا تكون غير مناسبة لمقارنة تجانس مجموعات البيانات المختلفة في الحالتين التاليتين:

١. إذا كانت وحدتا المتغيرين مختلفتين حيث لا نستطيع مقارنة الوحدات المختلفة.

٢. إذا كان متوسطا المتغيرين مختلفين وذلك لأن تباين توزيع المتغير ذي المتوسط الصغير ينزع لأن يكون صغيرًا والعكس بالعكس.

لذلك دعت الحاجة إلى مقياس لا يعتمد على وحدة المتغير ويقيس ما يسمى بالتشتت النسبي. وأحد هذه المقاييس هو ما يسمى بمعامل الاختلاف أو معامل التغير. فمعامل الاختلاف هو أحد مقاييس التشتت النسبي وهو مقياس عديم الوحدة ويستخدم لمقارنة التشتت النسبي أو التجانس لمجموعات البيانات المختلفة. فمجموعة البيانات ذات معامل الاختلاف الأكبر يكون تشتتها النسبي أكبر أي أنها تكون أقل تجانسًا والعكس بالعكس. ويعرف معامل الاختلاف للعينة التي متوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعياري S بالصيغة التالية:

$$\boxed{C.V. = \frac{S}{\bar{x}}}$$

<u>مثال (٤–٦):</u>

الجدول أدناه يتضمن بيانات إحدى الدراسات التي طبقت على خمسة أشخاص لقياس الوزن (بالكيلوجرام) والطول (بالسنتيمتر). أي البيانات أكثر تشتتًا نسبًا (أقل تجانسًا) بيانات الأوزان أم بيانات الأطوال؟

رقم الشخص	1	2	3	4	5
الوزن	69	59	65	67	65
الطول	164	162	155	165	158

الحل:

أولاً نوجد المتوسط $\overline{x}$ والانحراف المعياري S لكل من بيانات الأوزان ولبيانات الأطوال كما مر معنا سابقاً. نلخص الحسابات في الجدول التالي:

البيانات	المتوسط $\overline{x}$	الانحراف المعياري S	معامل الاختلاف $C.V. = \frac{S}{\overline{x}}$
الأوزان	65.0 kg	3.7417 kg	0.0576
الأطوال	160.8 cm	4.2071 cm	0.026

بما أن معامل الاختلاف لبيانات الأوزان أكبر من معامل الاختلاف لبيانات الأطوال فإن التشتت النسبي لبيانات الأوزان أكبر من التشتت النسبي لبيانات الأطوال. أي أن بيانات الأوزان أقل تجانسًا من بيانات الأطوال.

<u>(٤–٦) نظرية (متراجحة) تشيبيشيف **Chebychev Inequality**:</u>

إن نظرية تشيبيشيف من النظريات المفيدة إذا أنها تعطينا حدًا أدنى لنسبة البيانات الواقعة في فترة معينة عند معرفة متوسط البيانات وانحرافها المعياري دون الحاجة لمعرفة البيانات الأصلية أو التوزيع الذي أخذت منه العينة. ونص النظرية هو:

> إذا كان لدينا عينة من البيانات متوسطها $\overline{x}$ وانحرافها المعياري S فإن نسبة البيانات الواقعة في الفترة $(\overline{x} - kS , \overline{x} + kS)$ لايقل عن $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ حيث أن $k>1$.

$$\underbrace{\bar{x} - kS \qquad\qquad \bar{x} \qquad\qquad \bar{x} + kS}$$

نسبة البيانات الواقعة في هذه الفترة لا يقل عن $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

ملاحظات:

١. تطبق نظرية تشيبيشيف للفترات التي منتصفها (مركزها) هو المتوسط.

٢. تستخدم نظرية تشيبيشيف بطريقتين(في كلا الحالتين لابد من معرفة قيمة k):

أ- تحديد النسبة (التقريبية) لعدد البيانات الواقعة في فترة معينة.

ب- تحديد الفترة التي يقع فيها ما لا يقل عن نسبة معينة.

مثال (٤-٧):

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها $\bar{x} = 7$ وانحرافها المعياري $S=5$ فما هي نسبة البيانات الواقعة في الفترة $(-4 , 18)$؟

الحل:

أولاً نلاحظ أن منتصف الفترة المعطاة $(-4 \,,\, 18)$ هو المتوسط $\bar{x} = 7$ لذلك نستطيع تطبيق نظرية تشيبيشيف. والآن:

$$(\bar{x} - kS \,, \bar{x} + kS) = (-4 \,, 18) \quad \Rightarrow \quad \bar{x} + kS = 18$$
$$\Leftrightarrow \quad 7 + k(5) = 18$$
$$\Leftrightarrow \quad 5k = 11$$
$$\Leftrightarrow \quad k = 11/5$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{(11/5)^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 0.7934$$

لذلك فإن نسبة البيانات الواقعة في الفترة $(-4 , 18)$ لا تقل عن 79.34%.

مثال (٤-٨):

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها $\bar{x} = 7$ وانحرافها المعياري $S=5$ فأوجد فترة يقع فيها ما لا يقل عن 75% من البيانات.

الحل:

$$\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=0.75 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2}=1-0.75$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{k^2}=0.25$$
$$\Leftrightarrow k=\sqrt{\frac{1}{0.25}}$$
$$\Leftrightarrow k=2$$

وبالتالي فإن الفترة التي يقع فيها ما لا يقل عن 75% من البيانات هي:

$$(\bar{x}-kS\ ,\ \bar{x}+kS) = (7-2\times5\ ,\ 7+2\times5) = (7-10\ ,\ 7+10) = (-3\ ,\ 17)$$

(٤-٧) الدرجات (القيم) المعيارية:

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عينه من البيانات حجمها n ومتوسطها $\bar{x}$ وانحرافها المعيـــاري S.
نعرف الدرجة (القيمة) المعيارية للمشاهدة x_i بالصيغة التالية:

$$\boxed{z_i=\frac{x_i-\bar{x}}{S} \quad i=1, 2, \ldots, n}$$

أي أن الدرجات المعيارية للبيانات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ هي:

$$z_1=\frac{x_1-\bar{x}}{S},\ z_2=\frac{x_2-\bar{x}}{S},\ \ldots,\ z_n=\frac{x_n-\bar{x}}{S}$$

ملاحظات:

١. $z_i=\frac{x_i-\bar{x}}{S}$ هي الدرجة المعيارية للمشاهدة الأصلية x_i.
٢. المشاهدة الأصلية للدرجة المعيارية z_i هي $x_i=\bar{x}+S\,z_i$.
٣. الدرجات المعيارية هي قيم عديمة الوحدة ولذلك فإنها تستخدم للمقارنة بـــين المـــشاهدات المختلفة في المجموعات المختلفة للبيانات.
٤. متوسط الدرجات المعيارية =0.
٥. الانحراف المعياري للدرجات المعيارية يساوي =1.

مثال (٤-٩):

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات متوسطها $\bar{x}=7$ وانحرافها المعياري $S=5$ فأوجد:

١. الدرجة المعيارية للقيمة $x=9$.

٢. القيمة الأصلية للدرجة المعيارية $z = 0.1$.

الحل:

١. الدرجة المعيارية للقيمة $x = 9$ هي:

$$z=\frac{x-\overline{x}}{S}=\frac{9-7}{5}=\frac{2}{5}=0.4$$

٢. القيمة الأصلية للدرجة المعيارية $z = 0.1$ هي:

$$x=\overline{x}+S\,z=7+5\times 0.1=7+0.5=7.5$$

مثال (٤–١٠):

إذا كانت درجة أحد الطلاب في مقرر الإحصاء تساوي 82 ودرجته في مقرر الرياضيات تساوي 89، وإذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر الإحصاء يساوي 75 بانحراف معياري يساوي 10 ومتوسط درجات الطلاب في مقرر الرياضيات يساوي 81 بانحراف معياري يساوي 16، ففي أي المقررين كان أداء الطالب أفضل؟

الحل:

المقرر	المتوسط $\overline{x}$	الانحراف المعياري S	الدرجة x	الدرجة المعيارية $z=\frac{x-\overline{x}}{S}$
الإحصاء	75	10	82	$z=\frac{82-75}{10}=0.7$
الرياضيات	81	16	89	$z=\frac{89-81}{16}=0.5$

بما أن الدرجة المعيارية لمقرر الإحصاء 0.7 أكبر من الدرجة المعيارية لمقرر الرياضيات 0.5 فإن أداء الطالب في مقرر الإحصاء أفضل من أدائه في مقرر الرياضيات بالرغم من أن درجته في مقرر الإحصاء أقل من درجته في مقرر الرياضيات.

٦. مبادئ الاحتمالات
Principles of Probability

(٦-١) مقدمة:

إن كلمة الاحتمال تستخدم كثيرا في حياتنا اليومية. فمثلا يقال أن من المحتمل نزول المطر اليوم. ويقال أن احتمال نجاح أحمد في الاختبار أكبر من احتمال نجاح خالد. ويقال من المستحيل نجاح من لم يحضر الاختبار. ويقال أن من المؤكد موت كل إنسان. ويقال أن من الممكن انتقال المرض من المريض إلى الطبيب المعالج ...وهكذا. إن كلمة الاحتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة حدوث حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث. ولذلك نشأت الحاجة إلى وضع مقاييس كمية تقيس فرصة حدوث هذه الحوادث. إن المقياس الكمي الذي يقيس فرصة حدوث حادثة معينة يسمى بمقياس الاحتمال وقيمة هذا المقياس تتراوح بين الصفر والواحد. فكلما زادت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الواحد. وكلما قلت فرصة وقوع الحادثة كلما اقتربت قيمة هذا المقياس من الصفر. ولتعريف الاحتمال فإننا لابد أن نتطرق لكثير من المفاهيم مثل مفهوم التجربة العشوائية والحوادث.

(٦-٢) التجربة العشوائية: **Random Experiment**:

التجربة العشوائية هي تجربة أو عملية تحقق الشروط التالية:

١. جميع النتائج الممكنة للتجربة تكون معلومة مسبقا قبل إجرائها.
٢. لا يمكن التنبؤ بنتيجة التجربة بشكل قطعي ومؤكد قبل إجرائها.
٣. يمكن معرفة أو قياس فرصة ظهور كل نتيجة من نتائج التجربة قبل إجراء التجربة.

(٦-٣) فضاء (فراغ) العينة: **Sample Space**:

- فضاء العينة للتجربة العشوائية هي المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة. ونرمز لفضاء العينة بالرمز S ويرمز لعدد عناصر فضاء العينة بالرمز $n(S)$.
- نقطة العينة هي أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية أي أنها أي عنصر من عناصر فضاء العينة S.

مثال (٦-١):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

١. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.
٢. تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

الحل:

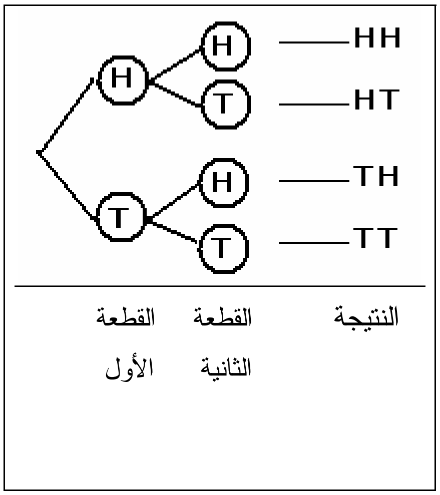
١. تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:

إن النتائج الممكنة هي H أو T ولذلك فإن فضاء العينة هو: $S = \{H , T\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 2$.

٢. تجربة قذف قطعتي النقود معا:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:



إن النتائج الممكنة هي:

$(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)$

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 4$

ملاحظة:

$S = \{H,T\} \times \{H,T\}$
$= \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

$n(S) = 2 \times 2 = 4$ (باستخدام قاعدة الضرب)

مثال (٦-٢):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

١. تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

٢. تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

الحل:

١. تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة:

إن النتائج الممكنة هي: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(S) = 6$.

٢. تجربة رمي حجر النرد مرتين:

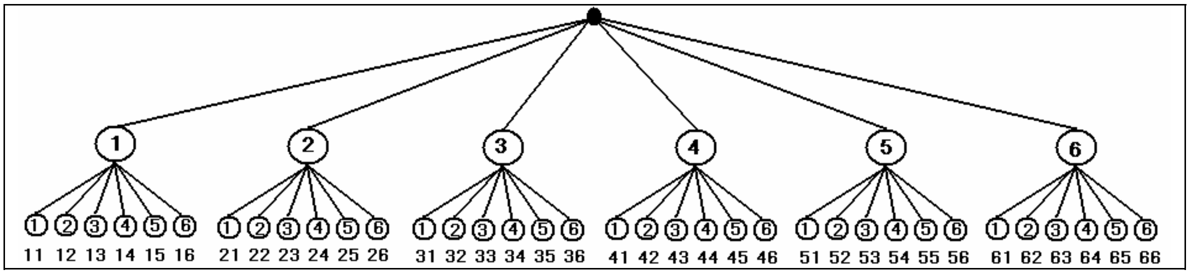
يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق. نذكر من هذه الطرق: (١) طريقة حاصل الضرب الديكارتي و (٢) طريقة الشجرة وطريقة الشبكة (أو الجدول):

أولا: إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:

$$S=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$$
$$=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي: $n(S)=6\times6=36$

ثانيا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:



ثالثا: إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):

نتيجة الرمية الثانية						
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

ملاحظة:

إن (4,3) عنصر من عناصر فضاء العينة وبالتالي فإن (4,3) هي نقطة عينة وذلك لأن $(4,3)\in S$. كما أن النتيجة (4,3) تعني ظهور الرقم 4 في الرمية الأولى وظهور الرقم 3 في الرمية الثانية وهذه النتيجة تختلف عن النتيجة (3,4) والتي تعني ظهور الرقم 3 في الرمية الأولى وظهور الرقم 4 في الرمية الثانية.

<u>(٦-٤) الحادثة أو الحدث: **Event**:</u>

تعرف الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة S.

- A حادثة إذا وإذا فقط كانت $A\subseteq S$.
- يقال بأن الحادثة A وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

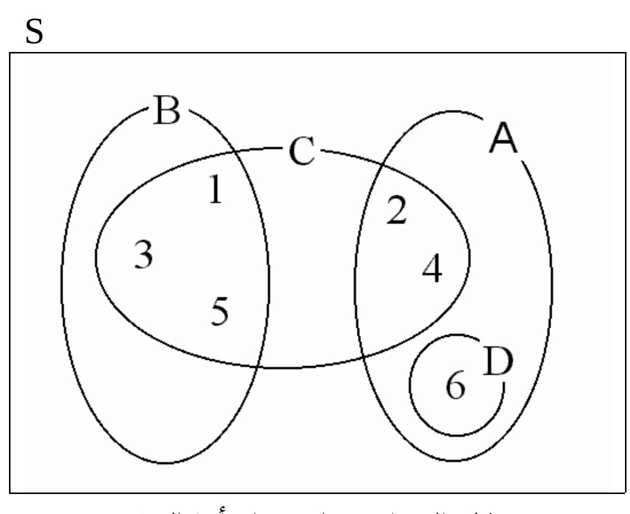
- الحادثة المستحيلة $\phi \subseteq S$. (Impossible Event) حيث أن ϕ هـــي المجموعـــة الخالية.
- الحادثة المؤكدة $S \subseteq S$. (Sure Event)
- يرمز لعدد عناصر الحادثة A بالرمز n(A). ونقول بأن الحادثة A وقعت إذا كانـــت نتيجة التجربة هي أحد عناصر الحادثة A.

مثال (٦-٣):

في مثال تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجـــه العلـــوي فـــإن المجموعات التالية تشكل حوادث لأنها مجموعات جزئية من فضاء العينة S.

الحادثة		عدد العناصر
A = { ظهور عدد زوجي } = {2, 4, 6};	$A \subseteq S$	$n(A) = 3$
B = { ظهور عدد فردي } = {1, 3, 5};	$B \subseteq S$	$n(B) = 3$
C = { ظهور عدد أقل من ستة } = {1, 2, 3, 4, 5};	$C \subseteq S$	$n(C) = 5$
D = { ظهور العدد ستة } = {6};	$D \subseteq S$	$n(D) = 1$
ϕ = { ظهور عدد سالب } = { };	$\phi \subseteq S$	$n(\phi) = 0$
S = { ظهور عدد موجب } = {1, 2, 3, 4, 5, 6};	$S \subseteq S$	$n(S) = 6$

في هذا المثال يمكن أم نمثل الحوادث بأشكال فن. فالشكل التالي يمثل الحـــوادث A و B و C و D:



تمثيل الحوادث باستخدام أشكال فن

في هذا المثال:

نقول بأن الحادثة $A=\{2,4,6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي أحد الأعداد الزوجية 2 أو 4 أو 6.

نقول بأن الحادثة $D=\{6\}$ وقعت إذا كانت نتيجة التجربة هي العدد 6.

وهكذا...

<u>مثال (٦-٤):</u>

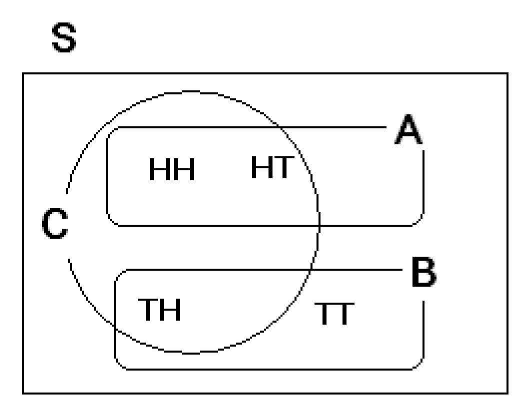
احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها ثم مثلها باستخدام أشكال فن وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

<u>الحل:</u>



$S =\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\};\ n(S)=4$

$A = \{(H,H),(H,T)\};\ n(A) = 2$

$B = \{(T,H),(T,T)\};\ n(B) = 2$

$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\};\ n(C) = 3$

<u>مثال (٦-٥):</u>

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و(y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

$A = \{ (x,y):\ x + y < 4 \}$

$B = \{ (x,y):\ x = y \}$

$C = \{ (x,y):\ x =5 \}$

$D = \{ (x,y):\ x+y =1 \}$

الحل:

(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	**(5,6)**	(6,6)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	**(5,5)**	(6,5)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	**(5,4)**	(6,4)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	**(5,3)**	(6,3)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	**(5,2)**	(6,2)
(1,1)	**(2,1)**	(3,1)	(4,1)	**(5,1)**	(6,1)
$\Uparrow$				$\Uparrow$	
A				C	

$A = \{ (x,y):\ x + y < 4 \} = \{(1,1), (1,2), (2,1)\};$ $n(A)=3$

$B = \{ (x,y):\ x = y \} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$; $n(B)=6$

$C = \{ (x,y):\ x =5 \} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$; $n(C)=6$

$D = \{ (x,y):\ x+y =1 \} = \{ \} = \phi;$ $n(D)=0$

(٦-٥) العمليات على الحوادث (جبر الحوادث): Algebra of Events:

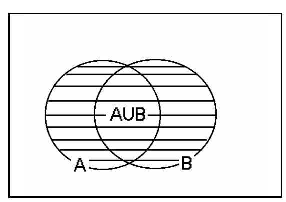
بما أن فضاء العينة ما هو إلا مجموعة والحوادث عبارة عن مجموعات جزئية منها فإن جميع العمليات على المجموعات تنطبق على الحوادث. وفي دراسة احتمالات الحوادث فإننا نحتاج إلى تعريف بعض الحوادث والتي يمكن تكوينها من حوادث أخرى.

(أ) اتحاد حادثتين: Union

اتحاد حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cup B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B أو تنتمي لهما معًا. وتقع الحادثة $A\cup B$ إذا وقعت إحدى الحادثتين على الأقل أي إذا وقعت A أو إذا وقعت B أو إذا وقعت A و B معًا.

شكل فن لتمثيل الاتحاد

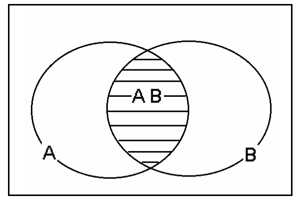
$A\cup B = \{x \in S: x\in A$ **أو** $x\in B \}$



(ب) تقاطع حادثتين: Intersection

تقاطع حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A\cap B$ أو بالرمز AB وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر المشتركة في A و في B معًا. وتقع الحادثة $A\cap B$ إذا وقعت الحادثتان A و B معًا في نفس الوقت.

شكل فن لتمثيل التقاطع

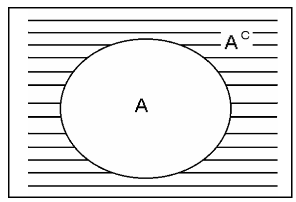


$A \cap B = \{x \in S: x \in A$ و $x \in B\}$

(ج) متممة أو مكملة حادثة: Complement

متممة أو مكملة الحادثة A هي حادثة يرمز لها بالرمز A^C أو $\overline{A}$ وهي الحادثة المكونة من جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى A. وتقع متممة الحادثة $\overline{A}$ إذا لم تقع الحادثة A نفسها.

شكل فن لتمثيل المتممة



$\overline{A} = A^C = \{x \in S: x \notin A\}$

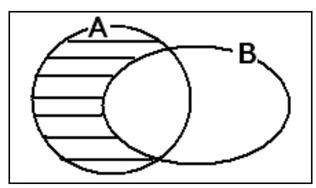
لاحظ أن:

$n(A^C) = n(S) - n(A)$

(د) الفرق بين حادثتين: Difference between Two Events:

الفرق بين حادثتين A و B هو حادثة يرمز لها بالرمز $A-B$ وهي الحادثة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى الحادثة A ولا تنتمي إلى الحادثة B. وتقع الحادثة $A-B$ إذا وقعت الحادثة A ولم تقع الحادثة B.

شكل فن لتمثيل الفرق



$A-B = \{x \in S: x \in A$ و $x \notin B\}$

نتائج:

- $(A^C)^C = A$
- $S^C = \phi$
- $\phi^C = S$
- $A^C = S-A$
- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cap S = A$
- $A \cup S = S$
- $A \cap \phi = \phi$

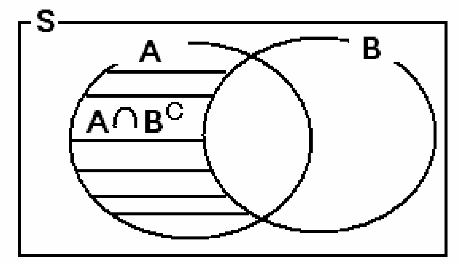
- $A \cup \phi = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

نتيجة:

- $A - B = A \cap B^C$

نتيجة: قانونا دي مورجان:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$



$A - B = A \cap B^C$

مثال (٦-٦):

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

١. أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

٢. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة.

٣. أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$$A \cap B,\ A \cup C,\ A^C \cup B^C,\ (A \cap B)^C,\ A \cap B^C$$

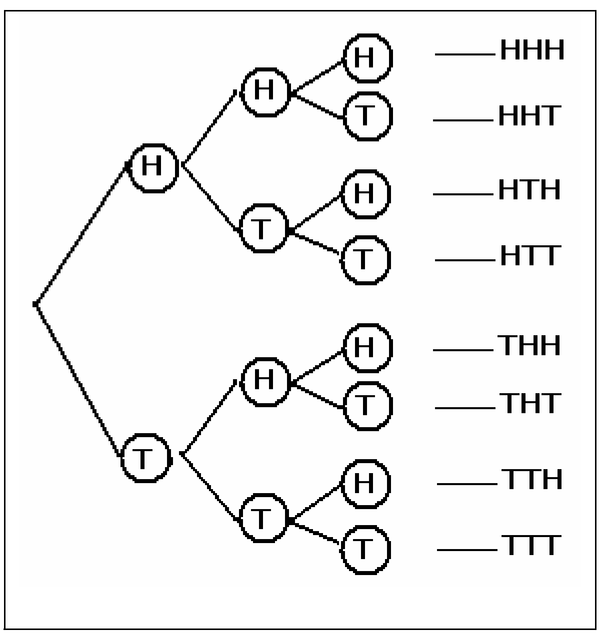
الحل:

١. فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$



٢.

$A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$

$n(A) = 4$

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$n(B) = 7$

$C = \{(T,H,H),(T,T,H)\}$

$n(C) = 2$

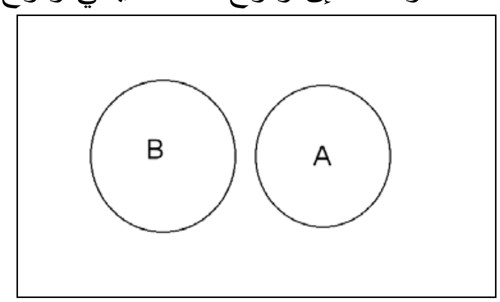
.٣

$A=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$
$B=\{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,H,T), (T,T,H)\}$
$C=\{(T,H,H), (T,T,H)\}$
$A^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$
$B^C = \{(T,T,T)\}$

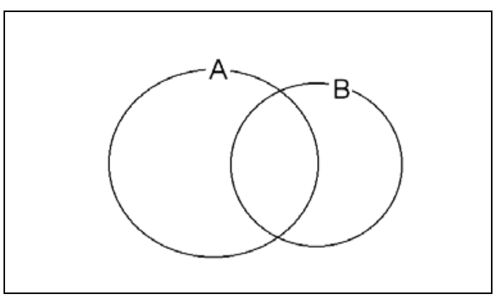
- $A\cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}$;
  $n(A\cap B) = 4$
- $A\cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\}$;
  $n(A\cup C)=6$
- $A^C \cup B^C = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$
  $= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n(A^C \cup B^C) = 4$
- $(A \cap B)^C= \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$;
  $n((A \cap B)^C) = 4$
- $A\cap B^C = A - B = \phi$;
  $n(A\cap B^C) = 0$

الحوادث المتنافية (المنفصلة): Disjoint (Mutually Exclusive) Events

يقال بأن الحادثتين A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين، أي أن $A\cap B=\phi$. وهذا يعني عدم وجود عناصر مشتركة بينهما وبالتالي لا يمكن وقوعهما معًا أي يستحيل وقوعهما معًا. ولذلك فإن وقوع أحدهما ينفي وقوع الأخرى.



حادثتان متنافيتان $A\cap B = \phi$



حادثتان غير متنافيتين $A\cap B \neq \phi$

الحوادث الشاملة: Exhaustive Events

يقال بأن الحوادث $A_1,A_2,\dots,A_n$ حوادث شاملة إذا كان لابد من وقوع إحداها (واحده منها) على الأقل عند إجراء التجربة. أي إذا كان:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$$

مثال:

في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة فإن:

١. الحادثتان $A = \{2, 4, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$ حادثتان:

- متنافيتان لأن: $A \cap B \neq \phi$.
- شاملتان لأن: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$.

٢. الحوادث $A_1=\{1,2,3\}$ و $A_2=\{2,3,4\}$ و $A_3=\{3,4,5,6\}$ حوادث شاملة ولكنها غير متنافية. لماذا؟

الحالات متساوية (أو متكافئة) الفرص: Equally Likely Outcomes:

إذا كانت فرصة ظهور أي نتيجة من نتائج التجربة العشوائية مساوية لفرصة ظهور أي نتيجة أخرى فإننا نقول بأن نتائج هذه التجربة متساوية (أو متكافئة) الفرصة. فمثلاً عند قذف قطعة عملة متزنة مرة واحدة فإن فرصة ظهور الصورة (H) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (T). وكذلك في تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة فإن فرصة ظهور الرقم 1 مساوية لفرصة ظهور الرقم 2 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 3 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 4 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 5 وهذه مساوية لفرصة ظهور الرقم 6. وعليه فإن كلا التجربتين المذكرتين متساوية الفرص.

الحالات المواتية للحادثة:

الحالات المواتية لحادثة معينة هي الحالات التي تؤدي إلى تحقق (أو وقوع) هذه الحادثة وبالتالي فإن الحالات المواتية لحادثة معينة هي نتائج التجربة الممكنة التي تؤدي إلى وقوع هذه الحادثة.

(٦-٦) الاحتمال: Probability:

نقرن كل حادثة (أو حدث) معرفة على فضاء العينة للتجربة العشوائية بقيمة حقيقية تقيس فرصة وقوع هذه الحادثة عند إجراء التجربة. تسمى هذه القيمة باحتمال الحادثة.

احتمال الحادثة: Probability of An Event

احتمال الحادثة A هو مقياس عددي يرمز له بالرمز $P(A)$ ويقيس فرصة وقوع الحادثة A عند إجراء التجربة. وتتراوح قيمة هذا المقياس بين الواحد الصحيح والصفر.

<u>التعريف التقليدي للاحتمال: Classical Definition of Probability</u>

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة لها محدود ويساوي $n(S)$ فإن احتمال الحادثة A يعرف بالصيغة التالية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادثة } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة } S}$$

<u>مثال (٦-٧):</u>

أوجد احتمال الحوادث في مثال تجربة رمي حجر النرد المتزن مرة واحدة المعطى في مثال (٦-٣).

<u>الحل:</u>

بما أن نتائج تجربة رمي حجر النرد المتزن متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)=6$ محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A = \{2, 4, 6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$B = \{1, 3, 5\}$	$n(B) = 3$	$P(B) = n(B)/n(S) = 3/6 = 0.5$
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$n(C) = 5$	$P(C) = n(C)/n(S) = 5/6 = 0.8333$
$D = \{6\}$	$n(D) = 1$	$P(D) = n(D)/n(S) = 1/6 = 0.1667$
$\phi = \{\ \}$	$n(\phi) = 0$	$P(\phi) = n(\phi)/n(S) = 0/6 = 0.0$
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$	$P(S) = n(S)/n(S) = 6/6 = 1.0$

<u>مثال (٦-٨):</u>

احسب احتمالات الحوادث في مثال (٦-٤) لتجربة قذف قطعة النقود المتزنة مرتين متتاليتين:

<u>الحل:</u>

بما أن نتائج تجربة قذف قطعة النقود المتزنة متساوية الفرصة وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)=4$ محدود فإن احتمالات الحوادث هي:

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A = \{(H,H),(H,T)\}$	$n(A) = 2$	$P(A) = n(A)/n(S) = 2/4 = 0.5$
$B = \{(T,H),(T,T)\}$	$n(B) = 2$	$P(B) = n(B)/n(S) = 2/4 = 0.5$
$C = \{(H,H),(H,T),(T,H)\}$	$n(C) = 3$	$P(C) = n(C)/n(S) = 3/4 = 0.75$

ملاحظة:

إن من عيوب التعريف التقليدي للاحتمال أنه لا ينطبق على جميع أنواع التجارب العشوائية. إذ أنه مبني على تساوي الفرص لنتائج التجربة وعلى محدودية عدد عناصر فضاء العينة وهذا لا ينطبق على جميع التجارب العشوائية. لذلك فإننا فيما يلي نعطي تعريفاً آخر للاحتمال وهو ما يسمى بالتعريف التكراري النسبي للاحتمال.

التعريف التكراري النسبي للاحتمال Relative Frequency Probability:

إذا كررنا إجراء تجربة عشوائية n مرة تحت نفس الظروف وكان عدد مرات وقوع الحادثة A في هذه التكرارات يساوي $r_n(A)$ فإن احتمال الحادثة A بناءً على التعريف التكراري النسبي يعطى بالصيغة التالية:

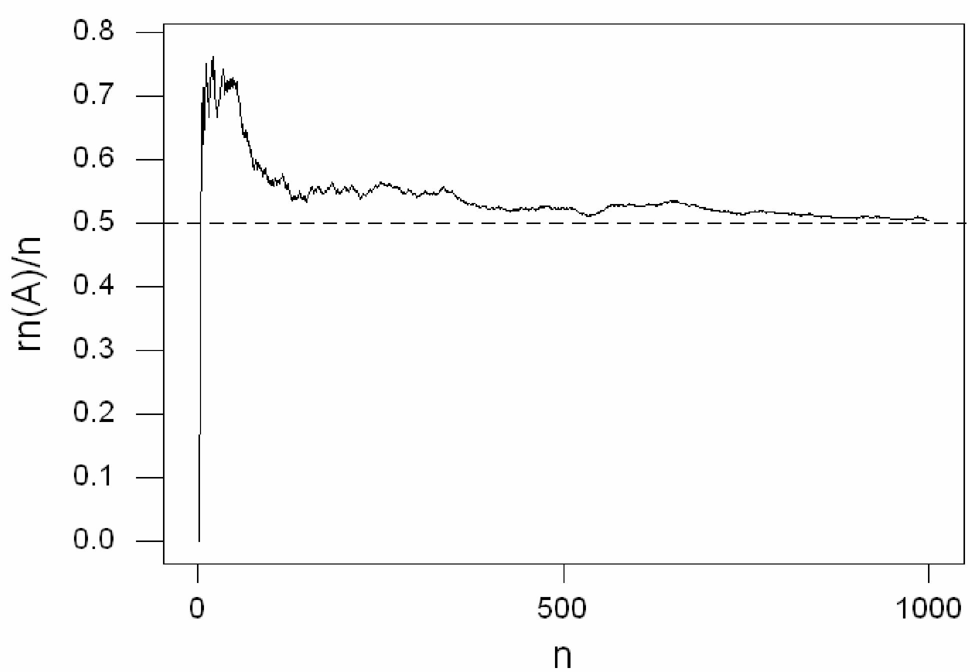
$$\boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n}}$$

لاحظ أن $\frac{r_n(A)}{n}$ هو التكرار النسبي لعدد مرات وقوع الحادثة A عن تكرار إجراء التجربة n مرة وبالتالي فإن احتمال الحادثة A هو هذا التكرار النسبي عندما نكرر إجراء التجربة ما لا نهاية من المرات.

مثال:

لنعرف الحادثة A على أنها الحادثة الدالة على ظهور الصورة في تجربة قذف العملة المتزنة. ولنفرض أننا كررنا هذه التجربة 1000 مرة وليكن $r_n(A)$ هو عدد مرات ظهور الصورة عند المحاولة رقم n. قمنا بمحاكاة هذه العملية باستخدام الحاسب الآلي فحصلنا على الشكل أدناه. وهذا الشكل يبين لنا بوضوح حقيقة أنه للعملة المتزنة فإن:

$$P(A) = P(H) = \lim_{n \to \infty} \frac{r_n(A)}{n} = 0.5$$



ملاحظة:

بالرغم من أن التعريف التكراري النسبي للاحتمال مفيد وعام لأي نوع من أنواع التجارب العشوائية إلا أننا لا نستطيع التأكد من أننا سوف نحصل على النسبة نفسها لو كررنا إجراء التجربة n مرة في وقت آخر. كذلك فإنه من الصعب جدًا تطبيق هذا التعريف لأنه يعتمد على تكرار إجراء التجربة عدد كبير من المرات. كما أن هذا التعريف له بعض الصعوبات من الجهة الرياضية إذ قد لا توجد النهاية. ولهذه الأسباب فقد ظهر التعريف الرياضي للاحتمال والذي يعتمد على بعض المسلمات الأساسية.

(٦-٧) مسلمات (بديهيات) الاحتمال: Axioms of Probability:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء عينتها هو S فإن الدالة الحقيقية $P(.)$ والمعرفة لجميع الحوادث المعرفة على فضاء العينة S تكون دالة احتمال ويسمى العدد $P(A)$ باحتمال الحادثة A لكل $A \subseteq S$ إذا تحققت المسلمات التالية:

١. لكل حادثة A يكون: $P(A) \geq 0$

٢. $P(S) = 1$

٣. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \ldots$ حوادث متنافية (منفصلة) مثنى مثنى (أو تبادليًا) أي إذا كان $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$ فإن:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ ) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

ملاحظة:

المسلمة رقم (٣) تعني أن احتمال إتحاد متتالية غير منتهية من الحوادث المتنافية تبادليًا يساوي مجموع احتمالاتها.

النتائج التالية هي بعض نتائج مسلمات الاحتمال الثلاث السابقة.

بعض نتائج مسلمات الاحتمال:

١. احتمال الحادثة المستحيلة يساوي الصفر، أي أن:

$$\boxed{P(\phi) = 0}$$

٢. إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث متنافية (منفصلة) تبادليًا فإن:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

٣. لأي حادثة A يكون:

$$\boxed{P(A^C) = 1 - P(A)}$$

٤. لأي حادثتين A و B يكون:

$$\boxed{P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)}$$

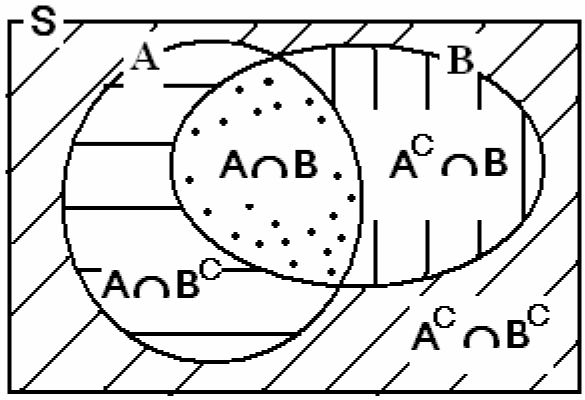
٥. لأي حادثتين A و B يكون:

$$\boxed{\begin{gathered} P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) \\ \Leftrightarrow \\ P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C) \end{gathered}}$$

٦. إذا كان $A\subseteq B$ فإن $P(A) \le P(B)$

ملاحظة حول الاحتمالات المتعلقة بحادثتين:

يمكن تمثيل احتمالات الحوادث بالمساحات في شكل فن. فمساحة المستطيل الذي يمثل الحادثة المؤكدة أو فضاء العينة S تساوي الواحد الصحيح. ونمثل احتمال أي حادثة أخرى بمساحة المنطقة التي تمثلها هذه الحادثة في شكل فن منسوبًا إلى المساحة الكلية للمنطقة التي تمثلها الحادثة المؤكد. والشكل التالي يبين بعض الحالات المهمة:



لاستنباط القوانين المتعلقة باحتمالات حادثتين فإننا نحاول تمثيل الحادثة المطلوب إيجاد الاحتمـــال لها كإتحاد حوادث متنافية لكي نستطيع تطبيق النتيجة الثانية لمسلمات الاحتمال المذكورة أعـــلاه. فعلى سبيل المثال، القوانين التالية يمكن بسهوله استنباطها من شكل فن:

- $P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^C)$
- $P(B) = P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$
- $P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B)$
- $P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B)$
- $P(A\cup B) = P(A) + P(A^C\cap B)$
  $= P(B) + P(A\cap B^C)$
  $= P(A\cap B^C) + P(A\cap B) + P(A^C\cap B)$
- $P(A^C\cap B^C) = 1 - P(A\cup B)$

أمثلة متنوعة

مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الإحصاء يساوي 0.6 فأوجد احتمال رسوبه.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

A^C = {نجاح محمد في مقرر الإحصاء}^{C} = {عدم نجاح محمد في مقرر الإحصاء}

= {رسوب محمد في مقرر الإحصاء}

المعطيات: $P(A) = 0.6$

المطلوب:

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$$

مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.6 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في الاختبار}

$B =$ { نجاح أحمد في الاختبار }

$A\cap B =$ { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار }

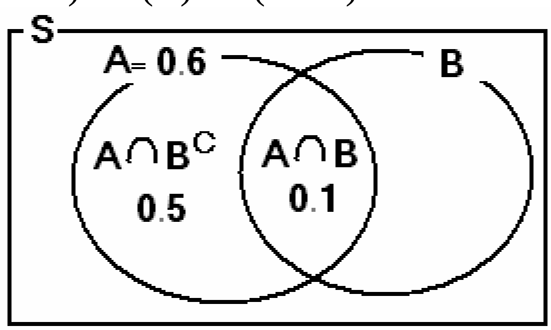
$B^C =$ { رسوب أحمد في الاختبار }

$A\cap B^C =$ { نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار }

المعطيات: $P(A) = 0.6$ و $P(A\cap B) = 0.1$

المطلوب:

$$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$$



مثال:

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.25 واحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$A=$ {نجاح محمد في الاختبار}

$B =$ { نجاح أحمد في الاختبار }

$A\cap B =$ { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار }

B^C = { رسوب أحمد في الاختبار }

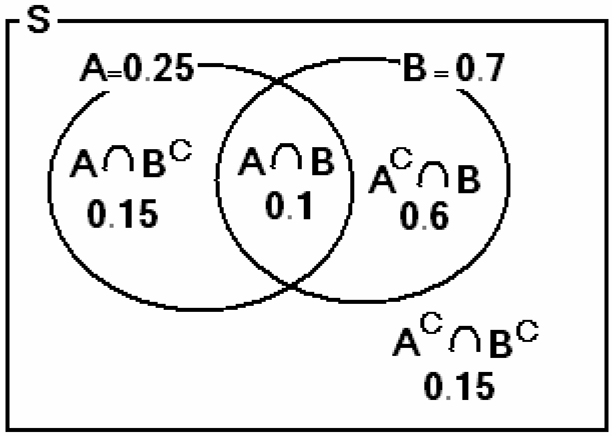
$A \cup B$ = { نجاح محمد أو نجاح أحمد في الاختبار } = { نجاح أحدهما على الأقل }

المعطيات: $P(A) = 0.25$ و $P(B^C) = 0.3$ و $P(A \cap B) = 0.1$

$$P(B) = 1 - P(B^C) = 1 - 0.3 = 0.7$$

المطلوب:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25 + 0.7 - 0.1 = 0.85$$



<u>مثال:</u>

إذا كان احتمال أن فصيلة دم أحد المتبرعين بالدم تكون من النوع A هو 0.35 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم هو 0.15 واحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم أو أن فصيلة دمه من النوع A هو 0.40. أوجد احتمال أن هذا المتبرع:

١. مصاب بضغط الدم وفصيلة دمه من النوع A.

٢. غير مصاب بضغط الدم.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحادثتين: A: فصيلة دم المتبرع من النوع A.

B: المتبرع مصاب بضغط الدم.

المعطيات: $P(A \cup B) = 0.40, \quad P(B) = 0.15, \quad P(A) = 0.35$

المطلوب:

١. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.35 + 0.15 - 0.40 = 0.10$

٢. $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0.15 = 0.85$

مثال:

في تجربة رمي حجر نرد متزن مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلــوي لنعــرف الحوادث التالية:

A: الحادثة الدالة على ظهور عدد زوجي

B: الحادثة الدالة على ظهور عدد أقل من أو يساوي 2

عرف الحوادث التالية واحسب احتمالها:

$$A, B, A\cap B, A\cup B, A\cap B^C, A^C\cap B, (A\cup B)^C, A^C\cap B^C$$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وهي تجربة متساوية الفــرص وعــدد عناصر فضاء العينة محدود ويساوي $n(S) = 6$.

الحادثة	عدد العناصر	الاحتمال
$A=\{2,4,6\}$	$n(A) = 3$	$P(A) = n(A)/n(S) = 3/6$
$B= \{1, 2\}$	$n(B) = 2$	$P(B) = n(B)/n(S) = 2/6$
$A\cap B=\{2\}$	$n(A\cap B) = 1$	$P(A\cap B) = n(A\cap B)/n(S) = 1/6$
$A\cup B=\{1,2,4,6\}$	$n(A\cup B) = 4$	$P(A\cup B) = n(A\cup B)/n(S) = 4/6$
$A\cap B^C=\{4,6\}$	$n(A\cap B^C) =2$	$P(A\cap B^C) = n(A\cap B^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B=\{1\}$	$n(A^C\cap B)=1$	$P(A^C\cap B) = n(A^C\cap B)/n(S) = 1/6$
$(A\cup B)^C=\{3,5\}$	$n((A\cup B)^C) =2$	$P((A\cup B)^C) = n((A\cup B)^C)/n(S) = 2/6$
$A^C\cap B^C=\{3,5\}$	$n(A^C\cap B^C) =2$	$P(A^C\cap B^C) = n(A^C\cap B^C)/n(S) = 2/6$

كما نلاحظ أنه بالإمكان إيجاد احتمالات بعض الحوادث أعلاه باستخدام القواعد التي ذكرناها آنفاً:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) – P(A\cap B) = 3/6 + 2/6 – 1/6 = 4/6$$
$$P(A\cap B^C) = P(A) – P(A\cap B) = 3/6 – 1/6 = 2/6$$
$$P(A^C\cap B) = P(B) – P(A\cap B) = 2/6 – 1/6 = 1/6$$
$$P((A\cup B)^C) = 1 – P(A\cup B) = 1 – 4/6 = 2/6$$
$$P(A^C\cap B^C) = P((A\cup B)^C) = 1 – P(A\cup B) = 1 – 4/6 = 2/6$$

مثال:

إذا كانت A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة بحيث:

$$P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4, P(A\cup B) = 0.5$$

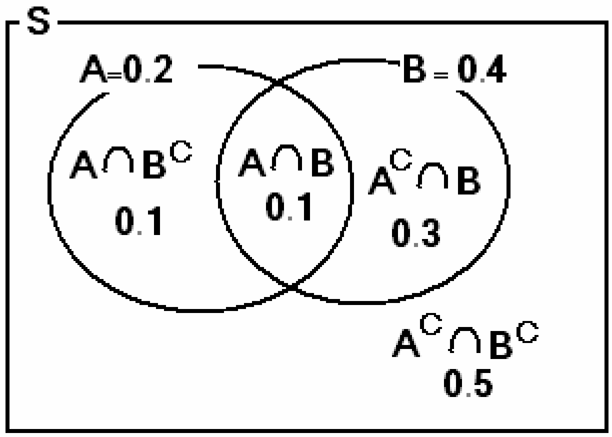
أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(A\cap B),\quad P(A\cap B^C),\quad P(A^C\cap B),\quad P(A^C\cap B^C)$$

الحل:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) – P(A\cup B) = 0.2 + 0.4 – 0.5 = 0.1$$

$P(A\cap B^C) = P(A) - P(A\cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$
$P(A^C\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$
$P(A^C\cap B^C) = P(\ (A\cup B)^C\ ) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$



<u>**مثال:**</u>

إذ اخترنا ورقتين من أوراق اللعب بشكل عشوائي وبدون مراعاة الترتيب فما هو احتمال أن يكون لوناهما أسود؟

<u>**الحل:**</u>

عدد الأوراق الكلية = 52 ورقة

عدد الأوراق التي لونها أسود = 26 ورقة

التجربة هي اختيار ورقتين من 52 ورقة

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(S)$ = عدد عناصر فضاء العينة = عدد طرق اختيار ورقتين من 52 ورقة

$$= \binom{52}{2}$$

لتكن الحادثة A هي الحادثة الدالة على الحصول على ورقتين لونهما أسود

باستخدام قانون التوافيق فإن:

$n(A)$ = عدد عناصر الحادثة A = عدد طرق اختيار ورقتين من 26 ورقة سوداء

$$= \binom{26}{2}$$

ولأن التجربة متساوية الفرص فإن:

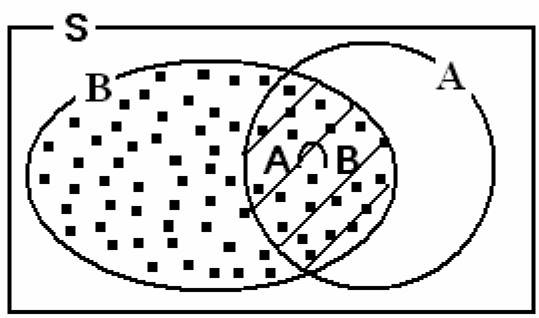
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{26}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{\left(\frac{26!}{2!\times 24!}\right)}{\left(\frac{52!}{2!\times 50!}\right)}=\frac{\left(\frac{26\times 25\times 24!}{2\times 24!}\right)}{\left(\frac{52\times 51\times 50!}{2\times 50!}\right)}=\frac{26\times 25}{52\times 51}=0.245$$

(٦-٨) الاحتمال الشرطي: Conditional Probability:

نواجه في كثير من التطبيقات العملية بعض الحالات التي نرغب فيها بإيجاد احتمال حادثة معينة A بعد معرفتنا بوقوع حادثة معينة أخرى B. أي أننا نكون مهتمين بإيجاد الاحتمال الشرطي للحادثة A مشروطًا بوقوع الحادثة B. فمثلاً قد نكون مهتمين بعرفة ما يلي:

١. احتمال وقوع حادث مروري لأحد السائقين إذا علمنا بأنه قد قام بالتأمين على السيارة.
٢. احتمال أن يستمر أحد الأجهزة الكهربائية في العمل لمدة 100 يومًا قادمة علمًا بأن هذا الجهاز ظل عاملاً لمدة 30 يومًا الماضية.
٣. احتمال أن يصاب الشخص بالمرض علمًا بأن هذا الشخص قد تم تلقيحه ضد هذا المرض.

يفهم مما سبق أننا نريد إيجاد احتمال الحادثة A منسوبًا إلى فضاء عينة جديد هو فضاء العينة المكون من عناصر الحادثة المشروطة B.



تعريف: (الاحتمال الشرطي):

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S بحيث $P(B)\neq 0$. إن الاحتمال الشرطي للحادثة A علمًا (أو مشروطًا) بوقوع الحادثة B (أو معطى حدوث الحادثة B) يرمز له بالرمز $P(A|B)$ ويعرف كما يلي:

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

ملاحظات:

١. مقياس الاحتمال الشرطي $P(\bullet|B)$ يحقق مسلمات الاحتمال ونتائجها.

٢. الاحتمال الشرطي للحادثة B معطى A هو:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

٣. بشكل عام فإن: $P(A|B) \neq P(B|A)$

نتائج:

١. إذا كانت عناصر فضاء العينة S متساوية الفرص فإن:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

٢. الاحتمال الشرطي للحادثة A^C (متممة A) معطى B يمكن حسابه بالقانون التالي:

$$\boxed{P(A^C|\, B) = 1 - P(A|\, B)}$$

٣. قاعدة الضرب في الاحتمال:

$$\boxed{\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)\, P(B \mid A) \\ &= P(B)\, P(A \mid B) \end{aligned}}$$

مثال (٦-٩):

الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصًا حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم على النحو التالي:

عادة التدخين

			يدخن D	لا يدخن D^C	المجموع
مستوى	مرتفع	A	40	10	50
ضغط	متوسط	B	70	130	200
الدم	منخفض	C	55	95	150
		المجموع	165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

D : حادثة اختيار شخص مدخن

المطلوب هو إيجاد احتمال أن الشخص المختار:

١. ضغط دمه مرتفع.

٢. مدخن.

٣. ضغط دمه مرتفع و يدخن.

٤. ضغط دمه مرتفع علمًا بأنه مدخن.

الحل:

عدد نتائج التجربة $n(S) = 400$ وهي متساوية الفرص.

١. $P(A) = n(A)/n(S) = 50/400 = 0.125$

٢. $P(D) = n(D)/n(S) = 165/400 = 0.4125$

٣. $P(A \cap D) = n(A \cap D)/n(S) = 40/400 = 0.1$

٤. $P(A \mid D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

أو

$$P(A \mid D) = n(A \cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$$

(٦-٩) الحوادث المستقلة: Independent Events:

في بعض الحالات يكون احتمال حدوث حادثة معينة A لا يتأثر مطلقًا بحدوث أو عدم حدوث حادثة أخرى B. أي لا فرق بين احتمال الحادثة A والاحتمال الشرطي للحادثة A معطى B. أي أن $P(A|B)=P(A)$. وفي هذه الحالة نقول بأن الحادثتين A و B مستقلتان.

تعريف:

لتكن A و B حادثتين معرفتين على نفس فضاء العينة S. يقال بأن الحادثتين A و B مستقلتان إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية:

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

مثال (٦-١٠):

هل الحادثتان A و D في مثال (٦-٩) مستقلتان؟ ولماذا؟

الحل:

إن الحادثتين A و D في مثال (٦-٩) غير مستقلتين وذلك لأن:

- $P(A) = 0.125 \neq P(A|D) = 0.2424$

- $P(A \cap D) = 0.1 \neq P(A)\,P(D) = 0.125 \times 0.4125 = 0.0516$
- $P(D) = 0.4125 \neq P(D|A) = 0.8$

نتيجة:

العبارات التالية متكافئة:

١. الحادثتان A و B مستقلتان.

٢. الحادثتان A و B^C مستقلتان.

٣. الحادثتان A^C و B مستقلتان.

٤. الحادثتان A^C و B^C مستقلتان.

مثال (٦-١١):

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. سحبت عينة مكونة من كرتين من هذا الصندوق واحدة بعد الأخرى عشوائيًا. أوجد احتمال أن تكون الكرتان لونهما أبيض في كلا الحالتين التاليتين:

١. إذا كان السحب بدون إرجاع

٢. إذا كان السحب بإرجاع

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A = { الكرة الأولى لونها أبيض }

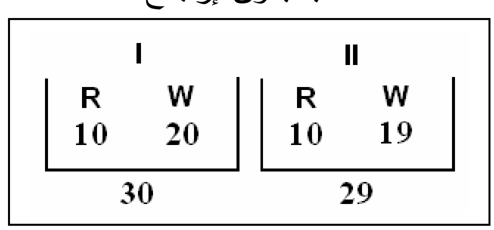
B = { الكرة الثانية لونها أبيض }

$A \cap B$ = { الكرتان لونهما أبيض }

إن المطلوب هو إيجاد $P(A \cap B)$. وسوف نوجد هذا الاحتمال لكلا الحالتين بطريقتين مختلفتين هما: (١) قاعدة الضرب للاحتمال و(٢) قاعدة التباديل.

أولاً: باستخدام قاعدة الضرب للاحتمال $P(A \cap B) = P(A)\,P(B \mid A)$:

١. حالة السحب بدون إرجاع:



$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B \mid A) = \frac{19}{29}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \frac{20}{30} \times \frac{19}{29} = 0.4368$$

I		II	
R	W	R	W
10	20	10	20
30		30	

$$P(A) = \frac{20}{30}$$

$$P(B \mid A) = \frac{20}{30}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A) = \frac{20}{30} \times \frac{20}{30} = 0.4444$$

ثانياً: باستخدام قاعدة التباديل:

- عدد طرق سحب كرتين من ثلاثين كرة = $n(S)$
- عدد طرق سحب كرتين من عشرين كرة بيضاء = $n(A \cap B)$
- ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A \cap B) = n(A \cap B)/n(S)$

١. حالة السحب بدون إرجاع:

$$n(S) = {}_{30}P_2 = 30 \times 29$$

$$n(A \cap B) = {}_{20}P_2 = 20 \times 19$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 19}{30 \times 29} = 0.4368$$

٢. حالة السحب بإرجاع:

$$n(S) = 30^2 = 30 \times 30$$

$$n(A \cap B) = 20^2 = 20 \times 20$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{20 \times 20}{30 \times 30} = 0.4444$$

مثال (٦-١٢):

يحتوي صندوق على عشر كرات حمراء وعشرين كرة بيضاء. اخترنا عينة مكونة من 4 كرات من هذا الصندوق عشوائيًا دون مراعاة الترتيب. أوجد احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء.

الحل:

لنعرف الحادثة A على أنها حادثة الحصول على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء

- عدد طرق اختيار 4 كرات من ثلاثين كرة = $n(S)$
- عدد طرق اختيار على ثلاث كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء = $n(A)$
- ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(A) = n(A)/n(S)$

$$n(S) = \binom{30}{4}$$

$$n(A) = \binom{10}{3} \times \binom{20}{1}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{10}{3} \times \binom{20}{1}}{\binom{30}{4}} = 0.088$$

(٦-١٠) نظرية بايز : Bayes' Theorem:

لنفرض أن هناك عدد من الأسباب المعينة التي يؤدي وقوع أحدها إلى حدوث حادثة ما. وهذه الحادثة تقع إذا وقع أحد أسبابها. ولنفرض أننا نعلم مسبقًا احتمال تحقق كل سبب من هذه الأسباب وكذلك نعلم الاحتمال الشرطي لهذه الحادثة عند تحقق كل سبب من أسبابها. إن نظرية بايز تعنى بحساب احتمال أن يكون سببًا محددًا من الأسباب هو مصدر حدوث هذه الحاثة والتي نعلم مسبقًا بحدوثها. وقبل استعراض نظرية بايز فإنه لابد من التطرق لما يسمى بقانون الاحتمال الكلي الذي يعنى بحساب وقوع هذه الحادثة بغض النظر عن السبب.

قانون الاحتمال الكلي Total Probability Law:

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

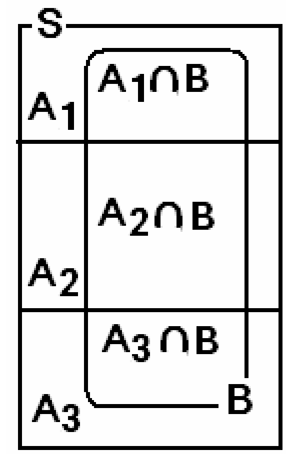
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\ i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$\boxed{\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + \ \ldots + P(A_n)\,P(B|A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\,P(B\,|\,A_k) \end{aligned}}$$

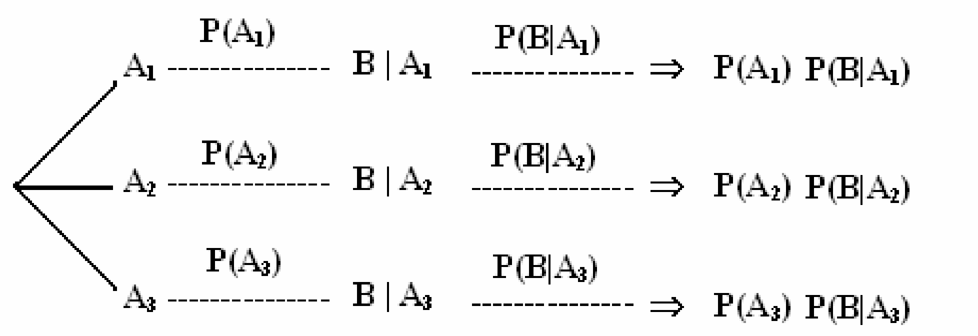
ملاحظة:

١. يمكن استنباط هذا القانون بشكل فن التالي (للحالة n=3):



- $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$
  $= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$
- $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \phi, \quad \forall\, i \neq j$
- $P(B) = P\{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)\}$
  $= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$
  $= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B)$
  $= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B \mid A_k)$

٢. يمكن تلخيص قانون الاحتمال الكلي بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):



$$\text{المجموع} = P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)\, P(B \mid A_k)$$

مثال (٦-١٣):

يتم إنتاج المصباح الكهربائي في أحد المصانع بواسطة إحدى ثلاث آلات. تنتج الآلة الأولى 20% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثانية 30% من الإنتاج الكلي للمصنع وتنتج الآلة الثالثة 50% من الإنتاج الكلي للمصنع. ومعلوم من الخبرة السابقة أن نسبة الإنتاج التالف للآلة الأولى هي 1% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثانية هي 4% و نسبة الإنتاج التالف للآلة الثالثة هي 7%. إذا كانت التجربة هي اختيار مصباح واحد من إنتاج هذا المصنع بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح تالف؟

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

$B = \{$ المصباح تالف $\};$

$A_1 = \{$ المصباح من إنتاج الآلة الأولى $\};$

$A_2 = \{$ المصباح من إنتاج الآلة الثانية $\};$

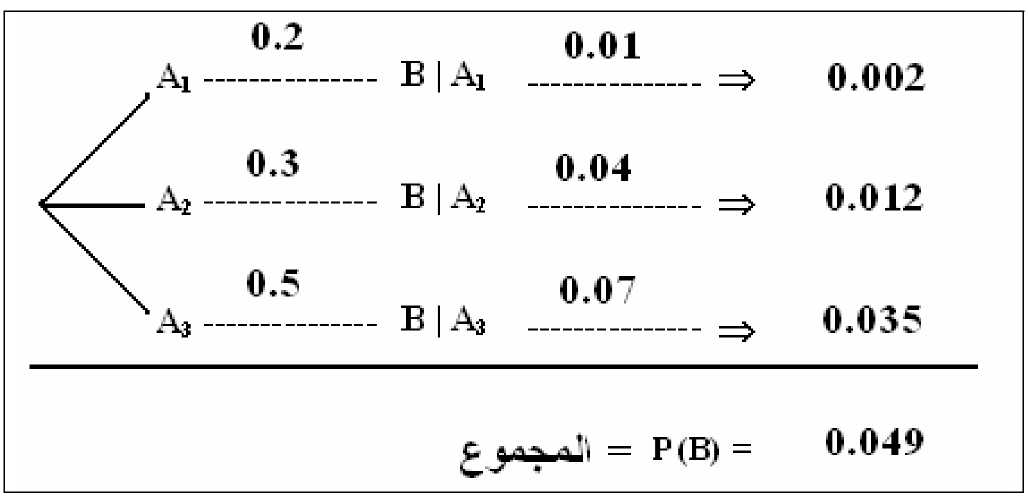
$A_3 = \{$ المصباح من إنتاج الآلة الثالثة $\};$

المعطيات:

$$P(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2; \quad P(B|A_1) = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$P(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3; \quad P(B|A_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$
$$P(A_3) = \frac{50}{100} = 0.5; \quad P(B|A_3) = \frac{7}{100} = 0.07$$

المطلوب:

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=1}^{3} P(A_k)P(B|A_k) \\ &= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2) + P(A_3)\,P(B|A_3) \\ &= 0.2\times0.01 + 0.3\times0.04 + 0.5\times0.07 \\ &= 0.002 + 0.012 + 0.035 \\ &= 0.049 \end{aligned}$$



<u>مثال (٦-١٤):</u>

باعتبار المثال السابق، مثال (٦-١٣)، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفاً، فما هــو احتمال أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟

الحل:

إن المطلوب هو إيجاد $P(A_1|B)$ وباستخدام التعريف الشرطي وقانون الضرب للاحتمال فإن:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)} = \frac{0.2 \times 0.01}{0.049} = \frac{0.002}{0.049} = 0.0408$$

إن القانون المستخدم لحل هذا المثال ما هو إلا قانون بايز الذي سنستعرضه فيما يلي.

قانون بايز : Bayes' Theorem:

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ حوادث شاملة ومتنافية مثنى مثنى (متنافية تبادليًا) ومعرفة على فضاء العينة S، أي أن:

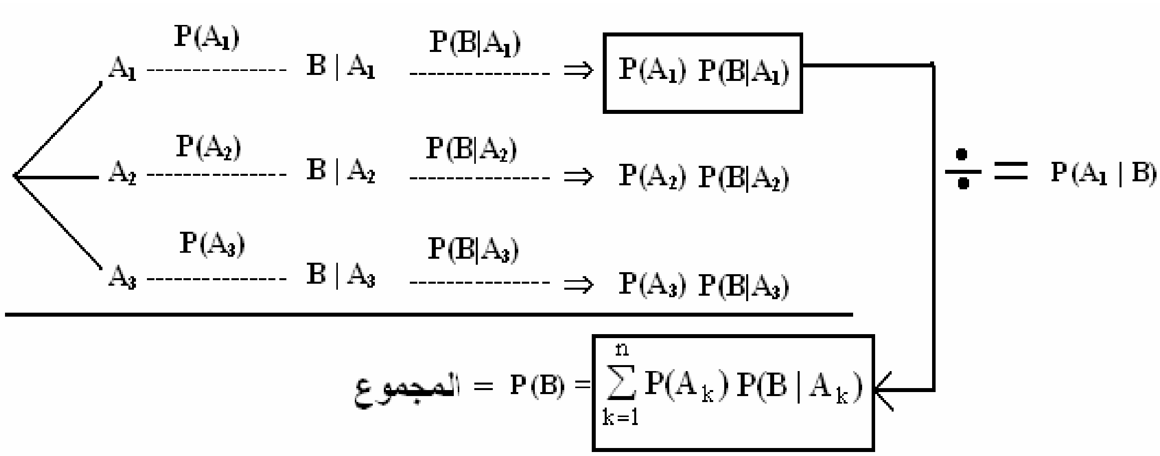
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup A_n = S$
- $A_i \cap A_j = \phi, \quad \forall\ i \neq j$

إذا كانت الحادثة B هي أي حادثة معرفة على نفس فضاء العينة S، فإن:

$$\boxed{P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)} = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} \ ; \ i = 1, 2, \ldots, n}$$

ملاحظة:

يمكن تلخيص قانون بايز بواسطة شكل الشجرة التالية (للحالة n=3):



مثال (٦-١٥):

باعتبار مثال (٦-١٣)، لنفرض أننا علمنا أن المصباح المختار كان تالفًا، فما هو احتمال:

١. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الأولى؟
٢. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثانية؟
٣. أن يكون قد أنتج بواسطة الآلة الثالثة؟

الحل:

1.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.01}{0.049}=\frac{0.002}{0.049}=0.0408$$

2.

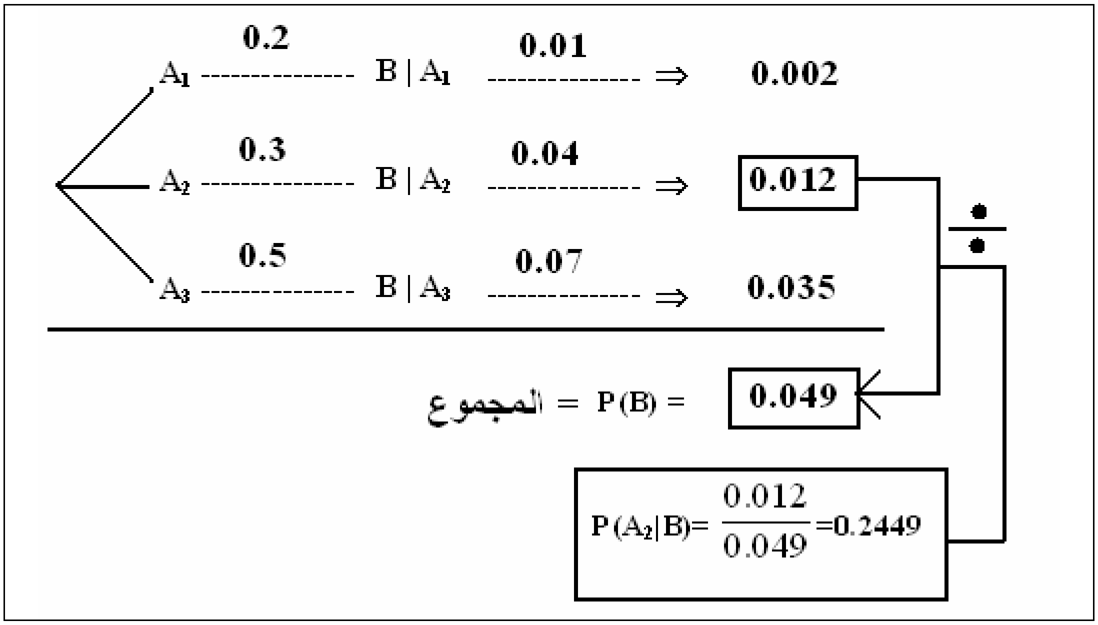
$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.04}{0.049}=\frac{0.012}{0.049}=0.2449$$

3.

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.07}{0.049}=\frac{0.035}{0.049}=0.7142$$

في هذا المثال، نلاحظ أنه لو كان المصباح المختار تالفاً فإن الاحتمال الأكبر أن يكون من إنتاج الآلة الثالثة.

ويمكن تلخيص استخدام قانون بايز لحل فقرة (٢) مثلاً في هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالية:



<u>مثال (٦-١٦):</u>

لنفرض أن لدينا صندوقين. يحتوي الصندوق الأول على 4 كرات بيضاء و 6 كرات سوداء، بينما يحتوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و 8 كرات سوداء. اخترنا صندوق من هاذين الصندوقين بشكل عشوائي ثم سحبنا منه كرة واحدة بشكل عشوائي.

١. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء.

٢. إذا علمنا أن الكرة المسحوبة سوداء، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق الثاني؟

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

B = { الكرة المسحوبة سوداء };

A_1 ={ الصندوق المختار هو الصندوق الأول };

A_2 ={ الصندوق المختار هو الصندوق الثاني };

المعطيات:

$$P(A_1) = 0.5; \quad P(B|A_1)= \frac{6}{10} = 0.6$$

$$P(A_2) = 0.5; \quad P(B|A_2)= \frac{8}{16} = 0.5$$

المطلوب:

$$1.\ P(B) = \sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)$$
$$= P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)$$
$$= 0.5\times0.6 + 0.5\times0.5 = 0.3 + 0.25$$
$$= 0.55$$

$$2.\ P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{k=1}^{2} P(A_k)P(B|A_k)} = \frac{0.5\times0.5}{0.55} = \frac{0.25}{0.55} = 0.4545$$

يمكن تلخيص حل هذا المثال بواسطة شكل الشجرة التالية: