الدرس

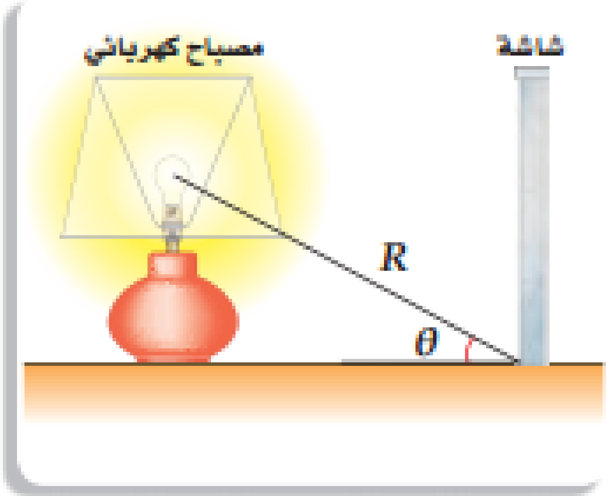
1

المتطابقات المعادلات المثلثية

TRIGONOMETRIC IDENTITIES


Welcome

لماذا ؟



تُسمى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{1}{ER^2}$

حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.

المتطابقات المثلثية الأساسية : تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها.

فمثلاً : $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، **والمتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية.

وإذا وجدت مثالاً مضادًّا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم اساسي

المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب :

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$$

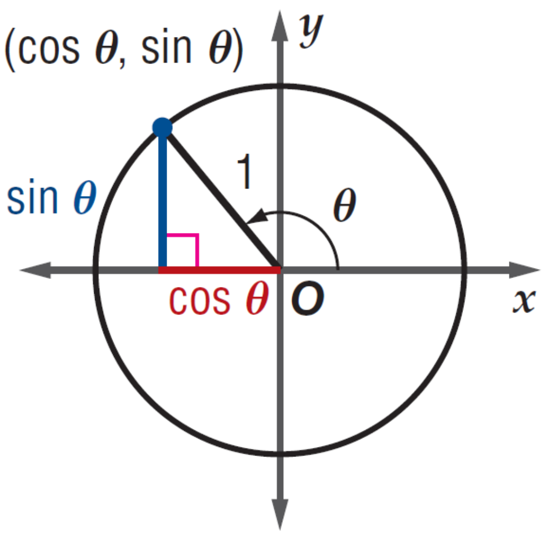
$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$$



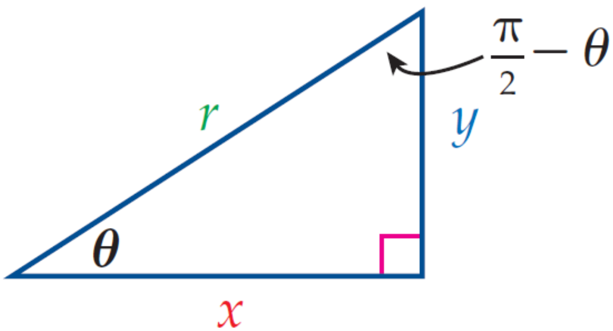
متطابقات فيثاغورس :

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\tan^2\theta+1=\sin^2\theta$$

$$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$$

حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$



$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين :

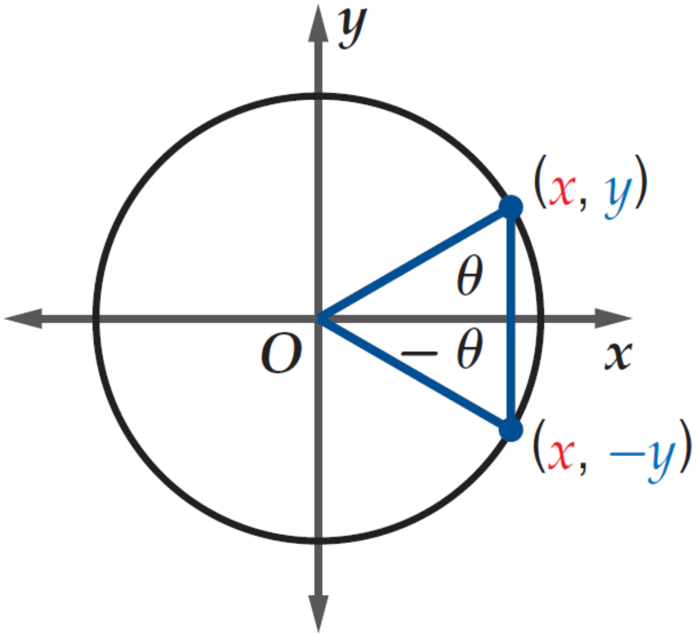
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

متطابقات الدوال الزوجية و الدوال الفردية :

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



$$\sin\theta = y \qquad \sin(-\theta) = -y$$
$$\cos\theta = x \qquad \cos(-\theta) = x$$

إن المتطابقة $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ صحيحة فيما عدا عند الزوايا ذات القياسات: $90°, 270°, .., 90° + k\,180°$

حيث k أي عدد صحيح ؛ و ذلك لأن جيب تمام أي زاوية من هذه الزوايا يساوي 0 ، بالتالي تكون $\tan\theta$ غير معرفة ، و تسمي هذه المتطابقات في بعض الأحيان متطابقات نسبية ، وتوجد متطابق أخري من هذا النوع هي : $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية ، لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية الراسمة .

مثال 1

استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد قيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$ إذا كان $90° < \theta < 180°, \sin\theta = \frac{1}{4}$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ متطابقات فيثاغورس

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$ بطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$ بطرح $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin\theta$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$$ بإيجاد مربع العدد $\frac{1}{4}$

$$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$$ بالطرح

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{16}$$ بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

و بما إن θ في الربع الثاني ، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، و لذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{16}$

التحقق : استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية .

الخطوة 1 : اوجد $Arc\sin\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ باستعمال الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ فإن $\theta \approx 180° - 14.48 = 165.52°$

الخطوة 2 : اوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 2 : قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة .

$4\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد قيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $270° < \theta < 360°$ ؛ $\cot\theta = -\frac{3}{5}$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

متطابقات فيثاغورس

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$$

بتعويض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot\theta$

$$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$$

بإيجاد مربع العدد $-\frac{3}{5}$

$$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$$

$$\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$$

$$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$$

بأخذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

و بما إن θ في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ تكون سالبة ، و لذلك فإن $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$

تحقق من فهمك

1A) أوجد قيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

1B) أوجد قيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{3}$ ، $180° < \theta < 270°$

$$-\frac{7\sqrt{5}}{15}$$

تبسيط العبارات : تبسيط العبارات التي تحتوي علي الدوال المثلثات ، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط ، إن أمكن .

مثال 2

تبسيط العبارة المثلثية

بسط العبارة : $\dfrac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}$

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\cancel{\sin\theta}\,\dfrac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\dfrac{1}{\tan\theta}}$$

$$\csc=\frac{1}{\sin\theta},\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1}{\tan\theta}}$$

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta}=1$$

$$= \frac{1}{1} \bullet \frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d}$$

تحقق من نفسك

(2A

$$\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$$

$$\sin^2\theta$$

(2B

$$\frac{\sec\theta}{\sin\theta}\left(1 - \cos^2\theta\right)$$

$$\tan\theta$$

مثال 3 من واقع الحياة

أعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة : ارجع إلي فقرة " لماذا " في بداية الدرس .

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{1}{ER^2}$ بالنسبة لـ E

$\sec\theta = \frac{1}{ER^2}$ المعادلة الأصلية

$E\sec\theta = \frac{1}{R^2}$ بضرب الطرفين في E

$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{R^2}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$E = \frac{\cos\theta}{R^2}$ بضرب كلا الطرفين في $\cos\theta$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I \tan\theta \cos\theta}{E}$ ؟ فسر إجابتك ؟

$$R^2 = \frac{I \tan\theta \cos\theta}{E}$$ المعادلة الأصلية

$$ER^2 = I \tan\theta \cos\theta$$ بضرب الطرفين في E

$$E = \frac{I \tan\theta \cos\theta}{R^2}$$ بقسمة كلا الطرفين في R^2

$$E = \frac{I \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta}{R^2}$$ $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I \sin\theta}{R^2}$$ بالتبسيط

المعادلتان غير متكافئتين فالمعادلة $R^2 = \frac{I \tan\theta \cos\theta}{E}$ تبسط إلي ؛ $E = \frac{I \sin\theta}{R^2}$

بينما المعادلة في الفرع (a) هي : $\mathrm{E} = \frac{\cos\theta}{R^2}$

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = F r \sin\theta$.
أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

$$F = \frac{\tau}{r \sin\theta}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$\frac{1}{2}$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0^\circ < \theta < 90^\circ$

$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

$-\frac{12}{13}$

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270^\circ < \theta < 360^\circ$

$\sqrt{2}$

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

$2\sqrt{2}$

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180^\circ < \theta < 270^\circ$

$\frac{-\sqrt{17}}{4}$

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90^\circ < \theta < 180^\circ$

$\frac{-3}{5}$

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

$\frac{-2\sqrt{77}}{77}$

بسِّط كل عبارة مما يأتي:

(9 $\tan\theta\cos^2\theta$ $\qquad \sin\theta\cos\theta$

(10 $\csc^2\theta - \cot^2\theta$ $\qquad 1$

(11 $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ $\qquad \cot^2\theta$

(12 $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$ $\qquad \sec^3\theta$

(13 $\sin\theta\,(1 + \cot^2\theta)$ $\qquad \csc\theta$

(14 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta$ $\qquad 1$

(15 $\dfrac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$ $\qquad -\cot\theta$

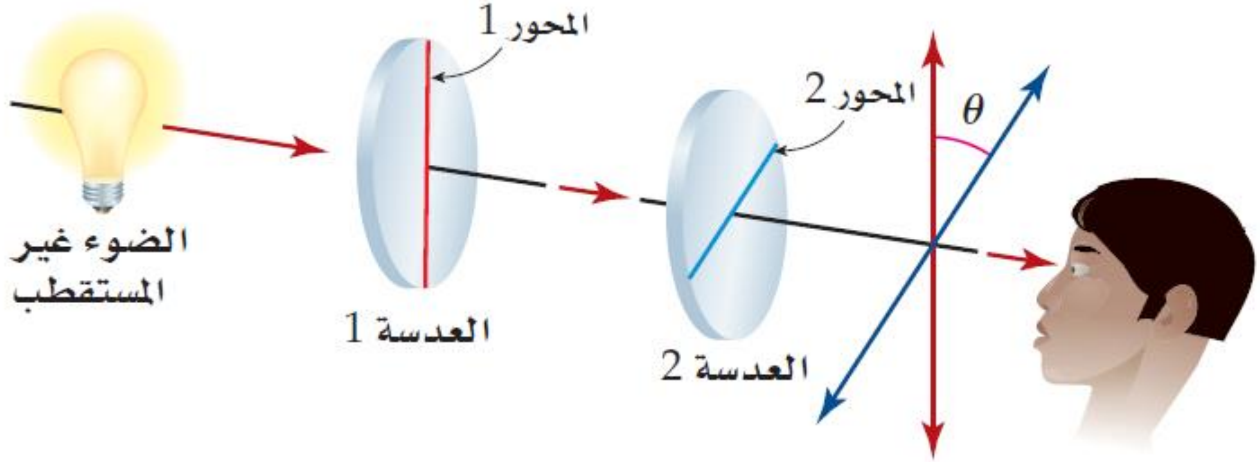
(16 $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$ $\qquad \cos^2\theta$

(17 $2 - 2\sin^2\theta$ $\qquad 2\cos^2\theta$

(18 $\csc\theta - \cos\theta\cot\theta$ $\qquad \sin\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى.

يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \dfrac{I_0}{\csc^2 \theta}$، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$ $\quad I = I_0 \cos^2 \theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

$I = \dfrac{3}{4} I_0$ شدة الضوء تساوي ثلاثة أرباع شدة الضوء قبل المرور بالعدسة الثانية .

20) **الشمس :** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم e . ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W \sec \theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W، واكتب إجابتك بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\sin \theta$ أو $\cos \theta$.

$W = eAS \cos \theta$

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80 , \theta = 40° , A = 0.75$. $S = 1000 \ W/m^2$ (قرِّب إلى أقرب جزء من مئة).

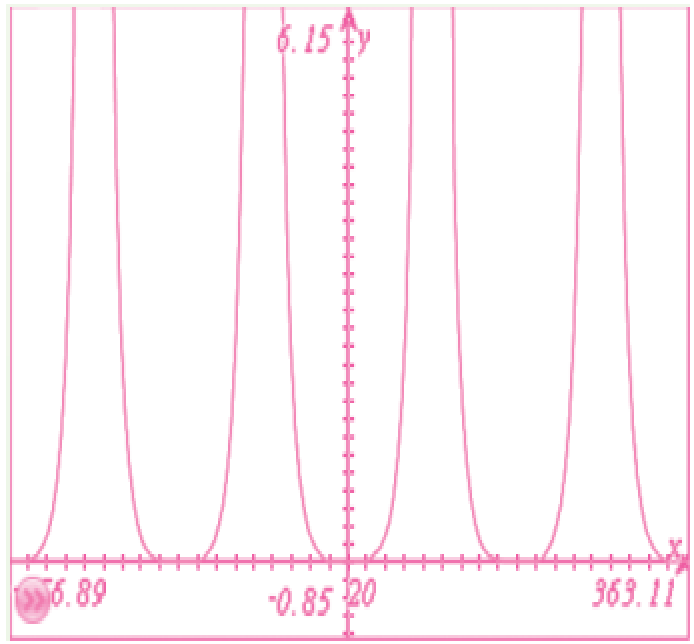
459.63W

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد إذا كانت معادلة ما تمثل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
$\tan^2\theta \sin^2\theta$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$

b) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة، بيانيًّا.



c) **تحليليًا:** إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين غير متطابقين؛ فإن المعادلة ليست متطابقة. هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

نعم

d) **تحليليًا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x \sec^2 x$ تمثل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

نعم

22) التزلّج على الجليد: يتزلّج شخص كتلته m باتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة يتم استعمال نظام المعادلات الآتي:

$mg \sin \theta - \mu_k F_n = 0 ,\ mg \cos \theta = 0 ,\ F_n -$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

$\mu_k = \tan \theta$

بسّط كل مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

-1

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

$\sin\theta$