## Pixel Team Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الفريق.

## Saade files Channel

انقر / امسح الرمز للانتقال
الى قناة الملفات.

Pixel_Team_SAB

Pixel - بِكسل

PIXEL

# القائمة

## اضغط على الأزرار للانتقال إلى المطلوب

جبر وأشعة

سلم وحل

تحليل

سلم وحل

**ورقة العمل الأولى في مادة الجبر والأشعة**
**للصف الثالث الثانوي العلمي الفصل الثاني(شتاء 2025)**

الاسم :..........
الدرجة: 600

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة وأحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

## الجبر:

1) حتى عام 2000 كان الرقم الخليوي في سوريا مؤلفاً من 9 خانات كل رقم بدايته 09. ولكن شعرت الشركة بأنّ الخطوط سوف تنفد. فاقترح أحد المهندسين بإضافة خانة على الرقم الخليوي ليصبح مؤلفاً من 10 خانات مع إبقاء كل رقم بدايته 09.

فزادت عدد الأرقام الخليوية بمقدار:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 مليون خط | B | 20 مليون خط | C | 90 مليون خط | D | 100 مليون خط |

2) بعد سقوط النظام البائد في سوريا. لاحظ أحد المهندسين أنّ السيارات أصبحت رخيصة وعددها أصبح يزداد تدريجياً فاقترح أنْ يدخل نظام جديد لتسجيل السيارات وفق النسق : $AA-123-AA$ أي يتكوّن من حرفين متبوعاً بحرفين ويتم الفصل بينهما بثلاثة أرقام وفق الشروط الآتية :

- يُستثنى من ذلك الرقم 000 .
- يتم استبعاد الحروف $O$ و $I$ و $U$ لتشابهها مع 0 و 1 و $V$ .
- يتم استبعاد المجموعتين $SS$ و $WW$ من الكتلة اليسرى .
- يتم استبعاد المجموعة $SS$ من الكتلة اليمنى .

فيكون عدد التسجيلات المتاحة يساوي : (ملاحظة :عدد الأحرف في اللغة الانكليزية 26 حرفاً )

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(23^2-2)(10\times10\times9\times3)(23^2-1)$ | B | $(23^2-2)(999)(23^2-1)$ |
| C | $(21^2)(10\times10\times9\times3)(22^2)$ | D | $(26^2)\times(1000)\times(26^2)-(2\times1\times1)$ |

3) رمّاز مكوّن من 5 خانات نملؤه بأحد الأرقام من 0 إلى 9
عدد الرمّازات التي يظهر فيها ثلاث خانات متجاورة لها الرقم ذاته وألّا يتكرر هذا الرقم في أي خانة أخرى

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 2430 | B | 2160 | C | 810 | D | 720 |

4) يتكوّن رمز باب بناء من أربعة أرقام (قد تكون متطابقة) متبوعة بحرفين مختلفين من الأحرف $A$ أو $B$ أو $C$
مثال : $(1232BA)$ . عندئذٍ عدد الرمازات الممكنة التي تحتوي على الرقم 0 مرة على الأقل يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 20634 | B | 17496 | C | 2916 | D | 216 |

5) يقدّم تجمّع لأساتذة الرياضيات 12 لغزاً مرقّمة من 1 إلى 12 يجب على الطالب اختيار 7 ألغاز والإجابة عليها بالضبط . كان الطلاب متأكدين من عدم حل اللغزين 5 و 8 و متأكدين من حل اللغز رقم 2 .
فيكون عدد الخيارات المتاحة تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\binom{12}{7}$ | B | $\binom{10}{7}$ | C | $\binom{9}{3}$ | D | $\binom{9}{5}$ |

6) إنّ أكبر عدد ممكن من نقط تقاطع 5 دوائر يساوي . ملاحظة: ( الدوائر بأنصاف أقطار مختلفة )

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 40 | B | 35 | C | 20 | D | 10 |

**ورقة العمل الأولى في مادة الجبر والأشعة** — الاسم :.........

**للصف الثالث الثانوي العلمي الفصل الثاني(شتاء2025)** — الدرجة: 600

7) يريد أحمد وتسعة من أصدقائه الذهاب إلى الجبال فيقدّم أحمد أربعة مقاعد في سيارته للذهاب معه فيكون عدد الخيارات لديه حيث هناك ثلاثة أشخاص لا بدّ أن يكونوا مع بعض يساوي:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 126 | B | 21 | C | 15 | D | 6 |

8) يتسابق أحمد وعشرة طلاب في سباق للجري .

يتم توزيع الميداليات (الذهبية، الفضية ، البرونزية ) للمراكز الثلاثة الأولى. فيكون عدد طرق توزيعهم علماً أنّ أحمد لا بدّ أن يكون بين المراكز الثلاثة الأولى ولا يوجد حالات تساوٍ أو انسحاب .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 990 | B | 270 | C | 135 | D | 90 |

9) يجلس 10 طلاب على مقعد أفقي 5 منهم يقدّمون امتحان رياضيات و 5 منهم يقدّمون امتحان لموادٍ أخرى . عدد طرق جلوسهم بحيث لا يجلس أي طالبين يقدّما مادة الرياضيات بجانب بعضهما يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $10!$ | B | $5!\times6!$ | C | $5!\times5!$ | D | $5!\times5!\times2!$ |

10) المقدار $n!(n+2)!-(n+1)!(n+1)!$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $(n+1)!\cdot n!$ | B | $(n+3)!$ | C | $(n+2)!\cdot n!$ | D | $2n\cdot(n+1)!$ |

11) المقدار : $3\times6\times9\times12\times\cdots\times42\times45$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $3^{12}\times5!$ | B | $3^{15}\times5!$ | C | $3^{15}\times15!$ | D | $3^{16}\times15!$ |

12) عدد الطرق المختلفة لتوزيع قطعتي شوكولا على $n$ طفلاً حيث كل طفل يأخذ قطعة واحدة على الأكثر يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $n$ | B | $n!$ | C | $n^2+n$ | D | $n^2-n$ |

13) واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ | B | $n!=P_n^{n-1}$ | C | $P_n^n=n!$ | D | $P_n^r=\dfrac{n!}{(r-n)!}$ |

14) المقدار $\dfrac{(2n)!-(2n-1)!}{2\cdot n!-(n-1)!}$ لا يساوي واحدٌ من الخيارات الآتية هو

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}$ | B | $(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times n$ | C | $P_{2n-1}^{n-1}$ | D | $P_{2n-1}^{n}$ |

15) يجتمع في شركة 10 رجال و 10 نساء . إذا علمت أنّ 5 رجال منهم لا يصافحون النساء و 4 نساء منهم لا يصافحون الرجال . وكل شخص فيهم يصافح الأشخاص الآخرين مرة واحدة فقط . عندئذٍ عدد المصافحات التي جرت بينهم تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 160 | B | 154 | C | 145 | D | 120 |

16) إنّ مجموع حلول المعادلة : $\binom{15}{3n-1}=\binom{15}{2n+1}$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 7 | B | 6 | C | 5 | D | 4 |

مدارس الأوائل النموذجية الخاصة

| | |
|---|---|
| ورقة العمل الأولى في مادة الجبر والأشعة | الاسم :......... |
| للصف الثالث الثانوي العلمي الفصل الثاني(شتاء 2025) | الدرجة: 600 |

17) العدد الطبيعي $n$ الذي يحقق المساواة الآتية : $\binom{n}{3} = \binom{n-1}{n-3} + \binom{n-1}{n-2}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | B | 1 | C | 4 | D | 5 |

18) المقدار $n \cdot \binom{n-1}{p-1}$ حيث $1 \le p \le n$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $p \cdot \binom{n}{p}$ | B | $n \cdot \binom{n}{p}$ | C | $n \cdot \binom{n-1}{p}$ | D | $p \cdot \binom{n-1}{p}$ |

19) مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ التي تحقق المساواة : $5P_{4}^{n} = 6P_{3}^{n-1}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\{3,8\}$ | B | $\{3\}$ | C | $\{8\}$ | D | $\varnothing$ |

20) المقدار $P_{n-1}^{r} + rP_{n-1}^{r-1}$ حيث $2 \le r \le n$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $P_{n}^{r}$ | B | $P_{n-1}^{r}$ | C | $P_{n-2}^{r}$ | D | $P_{n}^{r-1}$ |

## الأشعة :

21) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$: $A$ و $B$ و $C$ و $D$ أربع نقاط متمايزة في الفراغ :

تحقق : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ . المساواة السابقة تكافئ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ | B | المستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ متعامدان | C | النقطة $D$ هي المسقط القائم للنقطة $B$ على $(AC)$ . | D | النقطة $C$ هي المسقط القائم للنقطة $B$ على $(AD)$ . |

22) $ABC$ مثلث فيه $AB = 3$ و $AC = 5$ و $BC = 7$ فيكون $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $-\frac{15}{2}$ | B | $\frac{15}{2}$ | C | 15 | D | $\frac{-15}{4}$ |

23) أياً كانت النقاط : $A$ و $B$ و $C$ و $D$ في الفراغ : فإنّ المقدار : $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ يساوي

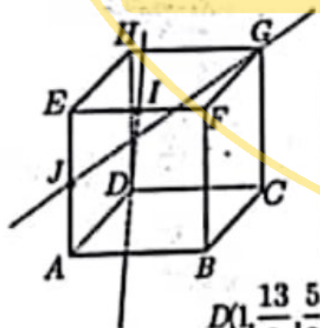
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC}$ | B | $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DB}$ | C | $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ | D | 0 |

24) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $E(6,-2,2)$ و $F(-2,-4,-2)$ و $G(2,-2,0)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $FE = \sqrt{72}$ | B | $EG = 20$ | C | $\cos(\widehat{EFG}) = \frac{10}{\sqrt{105}}$ | D | $\cos(\widehat{FEG}) = \frac{10}{\sqrt{105}}$ |

25) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1 .

$I$ منتصف $[EF]$ و $J$ منتصف $[AE]$ ولنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$




| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\overrightarrow{JG}(1,-1,\frac{1}{2})$ | B | $\overrightarrow{DI}(\frac{1}{2},1,1)$ |
| C | المستقيمان $(DI)$ و $(JG)$ متخالفان. | D | المستقيمان $(DI)$ و $(JG)$ متعامدان . |

26) في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,-2)$ و $B(3,3,1)$ و $C(7,\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ و $D(1,\frac{13}{2},\frac{5}{2})$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطياً | B | $ABCD$ متوازي أضلاع | C | المستقيمان $(AB)$ و $(DC)$ متعامدان | D | $C$ المسقط القائم للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$ |

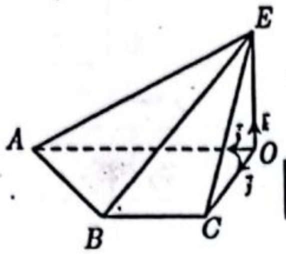
ورقة العمل الأولى في مادة الجبر والأشعة — الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي الفصل الثاني(شتاء 2025) — الدرجة: 600

27) $a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان يحققان $a > b > 0$

نتأمل النقاط: $A(a,0,0)$ و $C(0,4,0)$ و $B(b,4,0)$ و $E(0,0,3)$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .

إذا علمت أنّ حجم المجسم $E-OABC$ يساوي 18 فيكون $a+b$



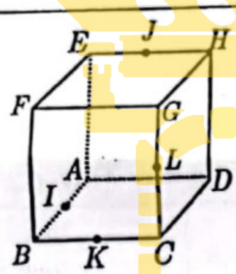

| A | 10 | B | 9 | C | 8 | D | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

28) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

| | |
|---|---|
| A | معادلة الكرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها يساوي 5 هي $x^2+y^2+z^2=5$ . |
| B | معادلة الكرة التي مركزها $A(1,0,-3)$ وطول نصف قطرها يساوي 2 هي $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4$ . |
| C | الكرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها يساوي 1 تمس المستوي $x+y+z-1=0$ . |
| D | مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق المساواة : $(x-3)^2+(z-1)^2=9$ تمثّل دائرة مركزها $\Omega(3,0,1)$ ونصف قطرها يساوي 3 . |

29) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 1 . $I$ و $J$ و $K$ و $L$ هي منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[EH]$ و $[BC]$ و $[CG]$ بالترتيب .

واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :




| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ | B | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$ |
| C | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}$ | D | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ |

30) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا ثلاث نقاط متمايزة $A$ و $B$ و $C$

عندئذٍ مجموعة النقاط $M$ التي تحقق المساواة : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ تمثّل

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | الارتفاع المرسوم من $A$ في $ABC$ . | B | المستوي المار من النقطة $A$ والعمودي على المستقيم $(BC)$. | C | المستقيم المار من النقطة $A$ و العمودي على المستوي $(ABC)$. | D | الكرة التي قطرها $[BC]$ |

31) مجموعة نقط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقق : $y=x$ تمثّل

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | مستقيم يمر بالمبدأ | B | مستوٍ يحوي المحور $Oz$ | C | مستوٍ يعامد المحور $Oz$ | D | المستوي $(Oxy)$ |

32) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ . لدينا نقطتان متمايزتان $A$ و $B$ .

إنّ مجموعة نقط الفراغ $M$ التي تحقق المساواة: واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :

| | |
|---|---|
| A | $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ : تمثّل كرة قطرها $[AB]$ . |
| B | $MA=kMB$ حيث $k>0$ و $k\neq 1$ : تمثّل كرة . |
| C | $MA=MB$ : تمثّل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ . |
| D | $MA=k$ حيث $k>0$ : تمثّل دائرة مركزها $A$ ونصف قطرها يساوي $k$ . |

ورقة العمل الأولى في مادة الجبر والأشعة — الاسم :.........

للصف الثالث الثانوي العلمي الفصل الثاني(شتاء 2025) — الدرجة: 600

33) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ : لدينا النقاط $A(1,-1,1)$ و $B(2,-2,2)$ و $C(0,7,-1)$ .

المستوي $(ABC)$ يقبل شعاعاً ناظماً هو

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\vec{n}(1,-2,-3)$ | B | $\vec{n}(18,-3,-21)$ | C | $\vec{n}(2,-2,2)$ | D | $\vec{n}(-6,1,-7)$ |

34) في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ :

لدينا النقاط $A(2,0,0)$ و $B(0,4,3)$ و $C(4,4,1)$ و $D(0,0,4)$ و $H(-1,1,2)$ . **واحد من الخيارات الآتية خاطئة :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | النقاط $A$ و $C$ و $D$ تعرّف مستوٍ $\mathcal{P}$ معادلته : $8x-5y+4z-16=0$ . | B | النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ لا تقع في مستوٍ واحد . |
| C | بافتراض أنّ معادلة المستوي $(ABC)$ هي: $x-y+2z-2=0$ فتكون النقطة $H$ هي المسقط القائم للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ . | D | المستقيمان $(AC)$ و $(BH)$ متخالفان . |

35) لدينا كرة $S$ مركزها النقطة $A(2,-1,-2)$ وتمر بالنقطة $B(-1,2,1)$ .

معادلة المستوي المماس للكرة $S$ في $B$ هي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $-x+y+z-4=0$ | B | $-x+y+z+5=0$ | C | $-3x+3y+3z-6=0$ | D | $3x-3y+3z+12=0$ |

36) لتكن الكرة التي مركزها $A(2,-2,-3)$ ونصف قطرها يساوي 3 . والمستوي $Q$ الذي معادلته : $2x-y+2z=3$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | المستوي $Q$ مماس للكرة $S$ | B | المستوي $Q$ لا يشترك مع الكرة $S$. | C | المستوي $Q$ يقطع الكرة $S$ ويكون نصف قطر الدائرة المقطع يساوي $2\sqrt{2}$ | D | المستوي $Q$ يقطع الكرة $S$ ويكون نصف قطر الدائرة المقطع يساوي 3 . |

37) المستويان $\mathcal{P}$ و $Q$ اللذان معادلتاهما: $\mathcal{P}:2x-y+z-3=0$ و $Q:2x+4y+5=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | متوازيان وغير منطبقين | B | متقاطعان وغير متعامدين | C | متعامدان | D | منطبقان |

38) ليكن المستوي $Q$ الذي معادلته : $Q:2x-y+z-3=0$ . والنقطتان $A(3,-1,2)$ و $B(5,-2,3)$

معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الوحيد المار بالنقطتين $A$ و $B$ ويعامد المستوي $Q$ .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $x+y-z=0$ | B | $2x-y-5z+3=0$ | C | $-x+3y+5z-4=0$ | D | لا يوجد مستوٍ وحيد بل يوجد عدد غير منتهٍ من المستويات. |

39) ليكن المستقيم $d$ المار بالنقطة $A(-2,1,1)$ و الموجّه بالشعاع $\vec{u}(3,-1,2)$ .

ولتكن النقطة $B \notin d$ إحداثياتها $B(1,0,-3)$ . عندئذ معادلة المستوي $\mathcal{P}$ المحدّد بالمستقيم $d$ و النقطة $B$ هي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $x+3y-1=0$ | B | $3x-y+2z+3=0$ | C | $x-5y+2z+5=0$ | D | $-4y+z+3=0$ |

40) ليكن المستويان $\mathcal{P}$ و $Q$ اللذان معادلتاهما : $\mathcal{P}:2x-y+z-3=0$ و $Q:2x-y+z-9=0$

إذا علمت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $Q$ متوازيان . كان البعد بينهما يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | B | 3 | C | $\sqrt{6}$ | D | $\sqrt{3}$ |

..............................انتهت الأسئلة..............................

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

## الجبر:

1) حتى عام 2000 كان الرقم الخليوي في سوريا مؤلفاً من 9 خانات كل رقم بدايته 09. ولكن شعرت الشركة بأنّ الخطوط سوف تنفد. فاقترح أحد المهندسين بإضافة خانة على الرقم الخليوي ليصبح مؤلفاً من 10 خانات مع إبقاء كل رقم بدايته 09.

فزادت عدد الأرقام الخليوية بمقدار:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 مليون خط | B | 20 مليون خط | C | 90 مليون خط | D | 100 مليون خط |

**التبرير** حتى عام 2000 كان عدد الأرقام الخليوية : $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times1\times1$

حيث العدد 1 هو عدد طرق وضع أقصى خانة على اليسار وهي طريقة وحيدة لأنّه يتم وفق إمكانية واحدة وهو الرقم الصفر والعدد 1 الذي يليه هو عدد طرق وضع الخانة التي تليه وهي طريقة وحيدة لأنّه يتم وفق إمكانية واحدة وهو الرقم 9 .

أمّا باقي الخانات السبعة كل منها يتم وفق 10 إمكانيات وهي أي رقم من $0 \to 9$ .

ووضعت إشارة الضرب بين هذه الأعداد حسب المبدأ الأساسي للعد الذي ينصُّ: لتشكيل قائمة مكوّنة من $r$ بنداً وبافتراض أنّ البند $i$ يتم وفق $n_i$ إمكانية فيكون عدد القوائم يساوي $n_1\times n_2\times\cdots\times n_r$ .

وبالتالي عدد الأرقام الخليوية حتى عام 2000 تساوي 10 مليون خط .

أمّا بعد زيادة خانة يصبح عدد الأرقام الخليوية : $10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times1\times1$ أي 100 مليون خط .

فتكون مقدار الزيادة هو 90 مليون خط . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

2) بعد سقوط النظام البائد في سوريا. لاحظ أحد المهندسين أنّ السيارات أصبحت رخيصة وعددها أصبح يزداد تدريجياً فاقترح أنْ يدخل نظام جديد لتسجيل السيارات وفق النسق : $AA-123-AA$ أي يتكوّن من حرفين متبوعاً بحرفين ويتم الفصل بينهما بثلاثة أرقام وفق الشروط الآتية :

- ❐ يُستثنى من ذلك الرقم 000 .
- ❐ يتم استبعاد الحروف $O$ و $I$ و $U$ لتشابهها مع 0 و 1 و $V$ .
- ❐ يتم استبعاد المجموعتين $SS$ و $WW$ من الكتلة اليسرى .
- ❐ يتم استبعاد المجموعة $SS$ من الكتلة اليمنى .

فيكون عدد التسجيلات المتاحة يساوي : **(ملاحظة :عدد الأحرف في اللغة الانكليزية 26 حرفاً )**

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | $(23^2-2)(10\times10\times9\times3)(23^2-1)$ | B | $(23^2-2)(999)(23^2-1)$ |
| C | $(21^2)(10\times10\times9\times3)(22^2)$ | D | $(26^2)\times(1000)\times(26^2)-(2\times1\times1)$ |

**التبرير** $AA-123-AA$

نلاحظ أنّ الكتلة اليسرى عبارة عن خانتين تحتويان حرفين باللغة الإنكليزية التي عددها 26 حرفاً ولكن استبعد منها 3 أحرف وهي الحروف $O$ و $I$ و $U$ ومنه عدد إمكانيات تشكيل الكتلة اليسري $23^2 = 23\times23$ ولكن تم استبعاد مجموعتين

هما $SS$ و $WW$ اللتين عدد طرق تشكيلهما هو 2 طريقة .

فيكون عدد طرق تشكيل الكتلة اليسرى يساوي $(23^2-2)$ ........ $(I)$

نلاحظ أنّ الكتلة اليمنى عبارة عن خانتين تحتويان حرفين باللغة الإنكليزية التي عددها 26 حرفاً ولكن استبعد منها 3 أحرف وهي الحروف $O$ و $I$ و $U$ ومنه عدد إمكانيات تشكيل الكتلة اليمنى $23^2 = 23\times 23$ ولكن تم استبعاد مجموعة واحدة وهي $SS$ التي عدد طرق تشكيلها طريقة واحدة .

فيكون عدد طرق تشكيل الكتلة اليمنى يساوي $(23^2-1)$ ........ $(II)$

أمّا الكتلة الوسطى : عبارة عن رمّاز مكوّن من ثلاثة أرقام كل رقم يمكن تشكيله وفق 10 إمكانيات $(0 \to 9)$

فيكون عدد طرق تشكيله يساوي $1000 = 10\times 10\times 10$ ولكن استُثني منه الرمّاز 000 الذي يمكن تشكيله بطريقةٍ واحدة

فيكون عدد طرق تشكيل الكتلة الوسطى : $999 = 1000-1$ ....... $(III)$

من $(I)$ و $(II)$ و $(III)$ وحسب المبدأ الأساسي في العد يكون عدد التسجيلات المتاحة يساوي $(23^2-1)(999)(23^2-2)$ .

فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

3) رمّاز مكوّن من 5 خانات نملؤه بأحد الأرقام من 0 إلى 9

عدد الرمّازات التي يظهر فيها ثلاث خانات متجاورة لها الرقم ذاته وألّا يتكرر هذا الرقم في أي خانة أخرى

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 2430 | $B$ | 2160 | $C$ | 810 | $D$ | 720 |

التبرير مثلاً :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 5 | 7 |

الخانة 1: تتم وفق 10 طرق .

الخانة 2: تتم وفق 1 طريقة ( لأنّه يجب أنْ يكون نفس الرقم الذي وُضِع في الخانة الأولى ) .

الخانة 3: تتم وفق 1 طريقة ( لأنّه يجب أنْ يكون نفس الرقم الذي وُضِع في الخانة الأولى ) .

الخانة 4: تتم وفق 9 طرق .( لأنّه يجب أنْ يكون أي رقم من الأرقام $(0 \to 9)$ باستثناء الرقم المكرّر في الخانات الثلاث المتجاورة) .

الخانة 5: تتم وفق 9 طرق .( لأنّه يجب أنْ يكون أي رقم من الأرقام $(0 \to 9)$ باستثناء الرقم المكرّر في الخانات الثلاث المتجاورة ولا مانع أنْ يأخذ الرقم الموجود في الخانة 4 ) .

ولكنّ هذه الخانات الثلاث المتجاورة ليس بالضرورة أنْ تكون في الطرف الأيسر فيمكن أيضاً أنْ تكون في المنتصف أو أن تكون في الطرف الأيمن فيكون تبديلها وفق 3 ثلاث طرق .

ومنه حسب المبدأ الأساسي في العد يكون عدد الرمازات المطلوبة يساوي : $10\times 1\times 1\times 9\times 9\times 3 = 2430$ .

فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

4) يتكوّن رمز باب بناء من أربعة أرقام (قد تكون متطابقة) متبوعة بحرفين مختلفين من الأحرف $A$ أو $B$ أو $C$

مثال : $(1232BA)$ . عندئذٍ عدد الرمازات الممكنة التي تحتوي على الرقم $0$ مرة على الأقل يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 20634 | $B$ | 17496 | $C$ | 2916 | $D$ | 216 |

**التبرير**

**الطريقة الأولى :** نأخذ عدد الرمازات الممكنة دون الشرط المذكور وهو : $10\times10\times10\times10\times3\times2=60000$

ثمّ نوجد عدد الرمازات التي لا تحتوي في أي خانة من خاناتها على العدد $0$ وهو: $9\times9\times9\times9\times3\times2=39366$

فيكون عدد الرمّازات الممكنة التي تحتوي على الرقم $0$ مرة على الأقل يساوي : $60000-39366=20634$ .

فالخيار الصحيح هو $A$ .

**الطريقة الثانية :**

- نضع الرقم الصفر في خانة واحدة فقط ويتم ذلك وفق: $(1\times9\times9\times9\times3\times2)\times4=17496$

( حيث ضربنا بالعدد $4$ عدد طرق تبديل موقع الرقم $0$ بين الخانات الأربع )

- نضع الرقم الصفر في خانتين فقط ويتم ذلك وفق: $(1\times1\times9\times9\times3\times2)\times6=2916$

( حيث ضربنا بالعدد $6$ عدد طرق تبديل موقع الرقمين $0$ و $0$ بين الخانات الأربع )

- نضع الرقم الصفر في ثلاث خانات فقط ويتم ذلك وفق: $(1\times1\times1\times9\times3\times2)\times4=216$

( حيث ضربنا بالعدد $4$ عدد طرق تبديل موقع الأرقام $0$ و $0$ و $0$ بين الخانات الأربع )

- نضع الرقم الصفر في الخانات الأربع ويتم ذلك وفق: $(1\times1\times1\times1\times3\times2)=6$

فيكون عدد الرمّازات الممكنة التي تحتوي على الرقم $0$ مرة على الأقل يساوي : $17496+2916+216+6=20634$ .

---

5) يقدّم تجمّع لأساتذة الرياضيات $12$ لغزاً مرقّمة من $1$ إلى $12$ يجب على الطالب اختيار $7$ ألغاز والإجابة عليها بالضبط . كان الطلاب متأكدين من عدم حل اللغزين $5$ و $8$ و متأكدين من حل اللغز رقم $2$ .

فيكون عدد الخيارات المتاحة تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\binom{12}{7}$ | $B$ | $\binom{10}{7}$ | $C$ | $\binom{9}{3}$ | $D$ | $\binom{9}{5}$ |

**التبرير** لدينا $12$ لغزاً والطلاب متأكدين من عدم حل اللغزين $5$ و $8$ فحتماً لن يختاروا هذين اللغزين

وكونهم متأكدين من حل اللغز رقم $2$ فحتماً سوف يختاروه . فيبقى المطلوب اختيار $6$ ألغاز من أصل $9$

وواضحٌ أنّه لا يهمنا الترتيب فمثلاً إذا اخترنا $(1,3,4,6,9,8)$ هو نفس الاختيار $(3,1,4,6,9,8)$

فنحن أمام اختيار مجموعة جزئية مثلاً $\{1,3,4,6,9,8\}$ مكوّنة من $6$ عناصر من أصل $9$ .

فيكون عدد طرق الاختيار : $\binom{9}{3}=\binom{9}{6}$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

6) إنّ أكبر عدد ممكن من نقط تقاطع 5 دوائر يساوي .  **ملاحظة: ( الدوائر بأنصاف أقطار مختلفة )**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 40 | $B$ | 35 | $C$ | 20 | $D$ | 10 |

**التبرير** نلاحظ أنّ كل اختيار لدائرتين بأنصاف أقطار مختلفة يكون أكبر عدد نقط تقاطع بينهما هو 2 .

ومنه عدد طرق اختيار دائرتين من أصل 5 دوائر هو $\binom{5}{2} = \frac{P_5^2}{2!} = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 5\times 2 = 10$

وكل دائرتين تعطي نقطتي تقاطع .

ومنه أكبر عدد ممكن من نقط تقاطع 5 دوائر يساوي $2\times 10 = 20$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

7) يريد أحمد وتسعة من أصدقائه الذهاب إلى الجبال فيقدّم أحمد أربعة مقاعد في سيارته للذهاب معه

فيكون عدد الخيارات لديه حيث هناك ثلاثة أشخاص لا بدّ أن يكونوا مع بعض يساوي:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 126 | $B$ | 21 | $C$ | 15 | $D$ | 6 |

**التبرير**

لنرمز للأشخاص الذين لا بدّ أنْ يكونوا مع بعض كل منهم بالرمز: $S$

وللأشخاص البقية كل منهم بالرمز $N$ .

فيكون لدينا مجموعتين : $3S$ و $6N$

فتكون الإمكانيات الممكنة : $\{S,S,S,N\}$ أو $\{N,N,N,N\}$ .

ومنه عدد الخيارات لدى أحمد يساوي: $\binom{6}{2}+\binom{3}{3}\cdot\binom{6}{1} = 15+1\times 6 = 21$ . فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

8) يتسابق أحمد وعشرة طلاب في سباق للجري .

يتم توزيع الميداليات (الذهبية, الفضية , البرونزية ) للمراكز الثلاثة الأولى. فيكون عدد طرق توزيعهم علماً أنّ أحمد لا بدّ أن يكون بين المراكز الثلاثة الأولى ولا يوجد حالات تساوٍ أو انسحاب .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 990 | $B$ | 270 | $C$ | 135 | $D$ | 90 |

**التبرير** (الذهبية, الفضية , البرونزية )

كون أحمد لا بدّ أنْ يكون بين المراكز الثلاثة الأولى فيتم ذلك وفق : 3 طرق ( أحمد إمّا أنْ ينال الذهبية أو الفضية أو البرونزية ) .

فيبقى المركزين الآخرين : يتم ذلك وفق $P_{10}^2 = 10\times 9$ طريقة .

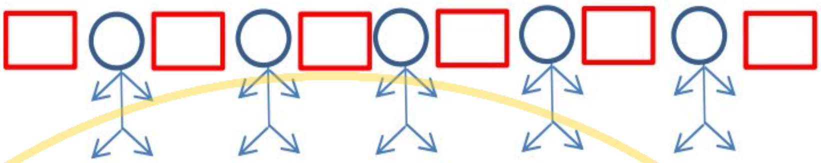
فيكون عدد طرق توزيع الميداليات يساوي $3\times 10\times 9 = 270$ طريقة . فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

9) يجلس 10 طلاب على مقعد أفقي 5 منهم يقدّمون امتحان رياضيات و 5 منهم يقدّمون امتحان لموادٍ أخرى .
عدد طرق جلوسهم بحيث لا يجلس أي طالبين يقدّما مادة الرياضيات بجانب بعضهما يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $10!$ | B | $5!\times 6!$ | C | $5!\times 5!$ | D | $5!\times 5!\times 2!$ |

التبرير أولاً: نقوم بترتيب الطلاب الذين يقدّمون مواد أخرى غير الرياضيات وفق $5!$ طريقة .
ثانياً:



فيصبح لدينا 6 فراغات لنضع الطلاب الخمسة الذين يقدمون امتحان الرياضيات لكي لا يجلس أي اثنين منهم بجانب بعضهما البعض ويتم ذلك وفق : $P_6^5 = \dfrac{6!}{(6-5)!} = 6!$

$5!\times 6! =$ عدد الطرق المطلوبة . فالخيار الصحيح هو $B$

---

10) المقدار $n!(n+2)!-(n+1)!(n+1)!$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $(n+1)!\cdot n!$ | B | $(n+3)!$ | C | $(n+2)!\cdot n!$ | D | $2n\cdot(n+1)!$ |

التبرير

$$\begin{aligned} n!(n+2)!-(n+1)!(n+1)! &= n!\cdot(n+2)\cdot(n+1)!-(n+1)!(n+1)! \\ &= (n+1)!(n!\cdot(n+2)-(n+1)!) \\ &= (n+1)!(n!\cdot(n+2)-(n+1)\cdot n!) \\ &= (n+1)!\cdot n!((n+2)-(n+1)) \\ &= (n+1)!\cdot n!\cdot(1) = (n+1)!\cdot n! \end{aligned}$$

فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

11) المقدار : $3\times 6\times 9\times 12\times\cdots\times 42\times 45$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $3^{12}\times 5!$ | B | $3^{15}\times 5!$ | C | $3^{15}\times 15!$ | D | $3^{16}\times 15!$ |

التبرير

المقدار : $3\times 6\times 9\times 12\times\cdots\times 42\times 45$

$$3(1)\times 3(2)\times 3(3)\times 3(4)\times\cdots\times 3(14)\times 3(15) = (\underbrace{3\times 3\times 3\times\cdots\times 3}_{15\,time})\times(1\times 2\times 3\times\cdots\times 14\times 15) = 3^{15}\times 15!$$

فالخيار الصحيح هو $C$ .

12) عدد الطرق المختلفة لتوزيع قطعتي شوكولا على $n$ طفلاً حيث كل طفل يأخذ قطعة واحدة على الأكثر يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $n$ | $B$ | $n!$ | $C$ | $n^2+n$ | $D$ | $n^2-n$ |

**التبرير** أول قطعة شوكولا توزّع وفق $n$ طريقة

الشخص الذي أخذ قطعة شوكولا لا نستطيع أن نعطيه قطعة ثانية لأنّ شروط المسألة كل طفل يأخذ قطعة واحدة على الأكثر. فالقطعة الثانية الشوكولا توزّع وفق $(n-1)$ .

ومنه عدد طرق التوزيع : $n\times(n-1)=n^2-n$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

13) **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئ هو**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ | $B$ | $n!=P_n^{n-1}$ | $C$ | $P_n^n=n!$ | $D$ | $P_n^r=\dfrac{n!}{(r-n)!}$ |

**التبرير** من الواضح أنّ الخيارين $A$ و $C$ صحيحان

لندقّق في الخيار $B$ : $P_n^{n-1}=\dfrac{n!}{(n-n+1)!}=n!$ . فالخيار $B$ صحيح .

فالخيار الخاطئ هو $D$: والصواب $P_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ .

---

14) المقدار $\dfrac{(2n)!-(2n-1)!}{2\cdot n!-(n-1)!}$ **لا يساوي واحدٌ من الخيارات الآتية هو**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!}$ | $B$ | $(2n-1)\times(2n-2)\times\cdots\times n$ | $C$ | $P_{2n-1}^{n-1}$ | $D$ | $P_{2n-1}^{n}$ |

**التبرير**

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2\cdot n!-(n-1)!}&=\frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2\cdot n\cdot(n-1)!-(n-1)!}\\&=\frac{(2n-1)!\cdot(2n-1)}{(n-1)!\cdot(2n-1)}\\&=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}\end{aligned}$$

فالخيار $A$ صحيح . وإذا تابعنا في الحل .

$$\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2\cdot n!-(n-1)!}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}=\frac{(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times\overbrace{(2n-n)}^{=n}\times(n-1)!}{(n-1)!}$$

ومنه $\dfrac{(2n)!-(2n-1)!}{2\cdot n!-(n-1)!}=(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times(n)$

فالخيار $B$ صحيح أيضاً .

جداء ضرب الأعداد : $(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\cdots\times(n)$ يساوي

$P_{2n-1}^{(2n-1)-n+1}=P_{2n-1}^{n}$ .

فالخيار $D$ صحيح أيضاً . فالخيار الوحيد الخاطئ هو $C$ .

---

15) يجتمع في شركة 10 رجال و 10 نساء . إذا علمتَ أنّ 5 رجال منهم لا يصافحون النساء و 4 نساء منهم لا يصافحون الرجال . وكل شخص فيهم يصافح الأشخاص الآخرين مرة واحدة فقط .
عندئذٍ عدد المصافحات التي جرت بينهم تساوي

| A | 160 | B | 154 | C | 145 | D | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

التبرير

لنرمز للرجال $M$ الذين لا يصافحون النساء بالرمز $M'_{sh}$ وللباقي بالرمز $M_{sh}$ فيقسم الرجال إلى مجموعتين $5M_{sh}$ و $5M'_{sh}$

ولنرمز للنساء $F$ اللواتي لا يصافحن الرجال بالرمز $F'_{sh}$ وللباقي بالرمز $F_{sh}$ فيقسم الرجال إلى مجموعتين $4F'_{sh}$ و $6F_{sh}$

المصافحة تحتاج إلى اختيار شخصين : $\{M,M\},\{F,F\},\{M_{sh},F_{sh}\}$

ويتمّ ذلك وفق : $\binom{10}{2}+\binom{10}{2}+\binom{5}{1}\times\binom{6}{1}=45+45+30=120$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

**طريقة ثانية :** عدد المصافحات الكلية تساوي $190=\dfrac{20\times 19}{2}=\binom{20}{2}$

نوجد عدد المصافحات بين $M'_{sh}$ و $F$ وعددها $50=\binom{10}{1}\times\binom{5}{1}$

نوجد عدد المصافحات بين $M_{sh}$ و $F'_{sh}$ وعددها $20=\binom{4}{1}\times\binom{5}{1}$

فيكون عدد المصافحات المطلوبة تساوي $190-50-20=120$ .

---

16) إنّ مجموع حلول المعادلة : $\binom{15}{2n+1}=\binom{15}{3n-1}$ يساوي

| A | 7 | B | 6 | C | 5 | D | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

التبرير

$$\binom{15}{2n+1}=\binom{15}{3n-1}$$

المعادلة معرّفة عندما $15\ge 2n+1\ge 0$ و $15\ge 3n-1\ge 0$

أي $14\ge 2n\ge -1$ و $16\ge 3n\ge 1$

أي $7\ge n\ge \dfrac{-1}{2}$ و $\dfrac{16}{3}\ge n\ge \dfrac{1}{3}$

ومنه شرط الحل : $n\in\{1,2,3,4,5\}$

❐ إمّا $3n-1=2n+1$

ومنه $\boxed{n=2}$ مقبول .

❐ أو $3n-1+2n+1=15$

وبالتالي $5n=15$ ومنه $\boxed{n=3}$ مقبول .

ومنه مجموع حلول المعادلة السابقة يساوي $2+3=5$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

17) العدد الطبيعي $n$ الذي يحقّق المساواة الآتية : $\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-3}=\binom{n}{3}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | $B$ | 1 | $C$ | 4 | $D$ | 5 |

**التبرير** $\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-3}=\binom{n}{3}$

$$\binom{n-1}{(n-1)-(n-2)}+\binom{n-1}{(n-1)-(n-3)}=\binom{n}{3}$$

$$\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{3}$$

شرط الحل : $n\geq 3$ و $n-1\geq 2$ و $n-1\geq 1$ ومنه

$n\geq 3$ و $n\geq 3$ و $n\geq 2$

وبالتالي $n\in\{3,4,5,6,.........\}$ .

$$(n-1)+\frac{(n-1)\times(n-2)}{2}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6}$$

لنقسم طرفي المساواة على $(n-1)\neq 0$ ضمن شرط الحل

$$1+\frac{(n-2)}{2}=\frac{n\times(n-2)}{6}$$

ولنضرب طرفي المساواة بالعدد 6

$$6+3(n-2)=n\times(n-2)$$

$$6+3n-6=n^2-2n$$

ومنه $n^2-5n=0$

وبالتالي : $n(n-5)=0$

إمّا $n=0$ مرفوض

أو $n=5$ مقبول . فالخيار الصحيح هو $D$ .

**<u>طريقة ثانية :</u>** إذا حفظ الطالب متطابقة باسكال : $\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$

$\binom{n}{n-2}=\binom{n}{3}$ ومنه $\binom{n}{2}=\binom{n}{3}$

ومنه $2+3=n$ وبالتالي $n=5$ .

---

18) المقدار $n\cdot\binom{n-1}{p-1}$ حيث $1\leq p\leq n$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $p\cdot\binom{n}{p}$ | $B$ | $n\cdot\binom{n}{p}$ | $C$ | $n\cdot\binom{n-1}{p}$ | $D$ | $p\cdot\binom{n-1}{p}$ |

**التبرير** $n\cdot\binom{n-1}{p-1}$

$$n\cdot\binom{n-1}{p-1}=n\cdot\frac{(n-1)!}{(p-1)!\cdot(n-p)!}$$

ومنه $$n\cdot\binom{n-1}{p-1}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(p-1)!\cdot(n-p)!}=\frac{n!}{(p-1)!\cdot(n-p)!}$$

$$n\cdot\binom{n-1}{p-1}=p\frac{n!}{p\cdot(p-1)!\cdot(n-p)!}=p\frac{n!}{p!\cdot(n-p)!}=p\cdot\binom{n}{p}\ .$$

فالخيار الصحيح هو $A$ .

19) مجموعة الأعداد الطبيعية $n$ التي تحقّق المساواة : $5P_4^n = 6P_5^{n-1}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\{3,8\}$ | $B$ | $\{3\}$ | $C$ | $\{8\}$ | $D$ | $\varnothing$ |

**التبرير** $5P_4^n = 6P_5^{n-1}$

شرط الحل : $5 \geq n-1 \geq 1$ و $4 \geq n \geq 1$

ومنه $6 \geq n \geq 2$ و $4 \geq n \geq 1$

وبالتالي شرط الحل : $n \in \{2,3,4\}$ .

$$5 \times \frac{4!}{(4-n)!} = 6\frac{5!}{(5-n+1)!}$$

$$\frac{\cancel{5}!}{(4-n)!} = 6\frac{\cancel{5}!}{(5-n+1)!}$$

$$\frac{1}{(4-n)!} = \frac{6}{(6-n)!}$$

وبالتالي $\frac{1}{(4-n)!} = \frac{6}{(6-n)!}$

ومنه $\frac{1}{(4-n)!} = \frac{6}{(6-n)\times(5-n)\times(4-n)!}$

$$1 = \frac{6}{(6-n)\times(5-n)}$$

وبالتالي : $(6-n)\times(5-n) = 6$

$$n^2 - 11n + 30 = 6$$

$$n^2 - 11n + 24 = 0$$

$$(n-8)(n-3) = 0$$

إمّا $n = 3$ مقبول

أو $n = 8$ مرفوض . فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

20) المقدار $P_{n-1}^r + rP_{n-1}^{r-1}$ حيث $2 \leq r \leq n$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $P_n^r$ | $B$ | $P_{n-1}^r$ | $C$ | $P_{n-2}^r$ | $D$ | $P_n^{r-2}$ |

**التبرير**

$$P_{n-1}^r + rP_{n-1}^{r-1} = \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)\times(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-r)\times(n-1)! + r\times(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!\times n}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} = P_n^r$$

فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

## الأشعة :

21) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ : $A$ و $B$ و $C$ و $D$ أربع نقاط متمايزة في الفراغ :

تحقّق : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ . المساواة السابقة تكافئ

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ | B | المستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ متعامدان | C | النقطة $D$ هي المسقط القائم للنقطة $B$ على $(AC)$ . | D | النقطة $C$ هي المسقط القائم للنقطة $B$ على $(AD)$ . |

**التبرير**

المساواة $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ تكافئ

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$$

ومنه $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=0$

وبالتالي $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})=0$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$$

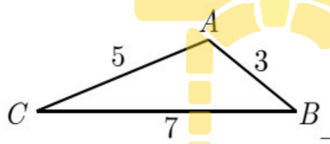
ومنه فالمستقيمان $(AB)$ و $(CD)$ متعامدان . فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

22) $ABC$ مثلث فيه $AB=3$ و $AC=5$ و $BC=7$ فيكون $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $-\frac{15}{2}$ | B | $\frac{15}{2}$ | C | $15$ | D | $\frac{-15}{4}$ |

**التبرير**




$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2\right)=-\frac{1}{2}(7^2-3^2-5^2)=-\frac{1}{2}(15)=\frac{-15}{2}$$

فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

23) أياً كانت النقاط : $A$ و $B$ و $C$ و $D$ في الفراغ : فإنّ المقدار : $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}$ | B | $2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}$ | C | $2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ | D | $0$ |

**التبرير**

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

ومنه $=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

وبالتالي $=\overrightarrow{DB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه $=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

وبالتالي $=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

ومنه $=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$

وأخيراً : $=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

فالخيار الصحيح هو $D$ .

24) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $E(6,-2,2)$ و $F(-2,-4,-2)$ و $G(2,-2,0)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $FE=\sqrt{72}$ | $B$ | $EG=20$ | $C$ | $\cos(\widehat{EFG})=\dfrac{10}{\sqrt{105}}$ | $D$ | $\cos(\widehat{FEG})=\dfrac{10}{\sqrt{105}}$ |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : $\overrightarrow{EF}(-8,-2,-4)$

ومنه $FE=\sqrt{64+4+16}=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$ . فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : $\overrightarrow{EG}(-4,0,-2)$

ومنه $EG=\sqrt{16+0+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $D$ : $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}=(-8)(-4)+(-2)(0)+(-4)(-2)=32+0+8=40$

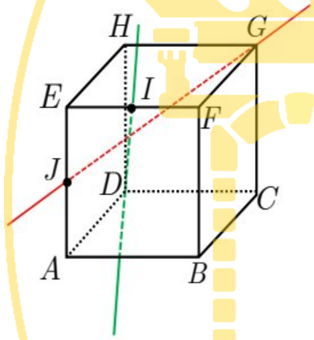
$$\cos(\widehat{FEG})=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG}}{\left\|\overrightarrow{EF}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{EG}\right\|}=\frac{40}{2\sqrt{21}\times2\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{105}}$$

فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

25) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي $1$ .

$I$ منتصف $[EF]$ و $J$ منتصف $[AE]$ ولنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$




| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $\overrightarrow{JG}(1,-1,\frac{1}{2})$ | $B$ | $\overrightarrow{DI}(\frac{1}{2},1,1)$ |
| $C$ | المستقيمان $(DI)$ و $(JG)$ متخالفان. | $D$ | المستقيمان $(DI)$ و $(JG)$ متعامدان . |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : من الواضح أنّ $\overrightarrow{JG}(1,1,\frac{1}{2})$ . فالخيار $A$ خاطئ.

لندقّق في الخيار $B$ : من الواضح أنّ $\overrightarrow{DI}(\frac{1}{2},-1,1)$ . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $C$ : من الواضح أنّ المستقيم $(JI)$ يوازي $(AF)$ ......(1)

( لأنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الثالثة وتساوي نصفها ).

والمستقيم $(AF)$ يوازي $(DG)$ ....... (2) (لأنّ $ADGF$ متوازي أضلاع )

من (1) و (2) نستنتج أنّ النقاط : $I$ و $J$ و $D$ و $F$ تقع في مستوٍ واحد .

والمستقيمان $(DI)$ و $(JG)$ غير متوازيين ويقعان في مستوٍ واحد فهما متقاطعان . فالخيار $C$ خاطئ .

أمّا الخيار $D$ : $\overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{DI}=(1)(\frac{1}{2})+(1)(-1)+(\frac{1}{2})(1)=0$

فالمستقيمان $(DI)$ و $(JG)$ متعامدان . فالخيار الصحيح هو $D$ .

26) في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط $A(1,0,-2)$ و $B(3,3,1)$ و $C(7,\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ و $D(1,\frac{13}{2},\frac{5}{2})$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطياً | $B$ | $ABCD$ متوازي أضلاع | $C$ | المستقيمان $(AB)$ و $(DC)$ متعامدان | $D$ | $C$ المسقط القائم للنقطة $D$ على المستقيم $(AB)$ |

التبرير

$\overrightarrow{AB}(2,3,3)$ و $\overrightarrow{DC}(6,-4,0)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة ( $\frac{6}{2} \neq \frac{0}{3}$ )

فالخياران $A$ و $B$ خاطئان .

أمّا الخيار $C$ : نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = (2)(6)+(3)(-4)+(3)(0) = 12-12 = 0$

فالمستقيمان $(AB)$ و $(DC)$ متعامدان . فالخيار $C$ صحيح .

حتى يكون الخيار $D$ صحيحاً يجب أنْ يتحقّق شرطين :

الشرط الأول : فالمستقيمان $(AB)$ و $(DC)$ متعامدان وهذا محقّق في الخيار $C$

الشرط الثاني : أنْ تكون النقاط $A$ و $B$ و $C$ على استقامةٍ واحدة

حيث نلاحظ أنّ الشعاعين : $\overrightarrow{AB}(2,3,3)$ و $\overrightarrow{AC}(6,\frac{5}{2},\frac{9}{2})$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة

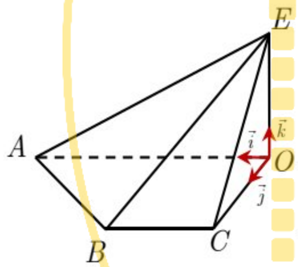
$\frac{\frac{5}{2}}{3} \neq \frac{6}{2}$ فالنقاط $A$ و $B$ و $C$ لا تقع على استقامةٍ واحدة . فالخيار $D$ خاطئ .

---

27) $a$ و $b$ عددان حقيقيان موجبان يحقّقان $a > b > 0$

نتأمّل النقاط : $A(a,0,0)$ و $C(0,4,0)$ و $B(b,4,0)$ و $E(0,0,3)$ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ .

إذا علمتَ أنّ حجم المجسم $E-OABC$ يساوي 18 فيكون $a+b$ .




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 10 | $B$ | 9 | $C$ | 8 | $D$ | 6 |

التبرير

$$\mathcal{V}(E-OABC) = \frac{1}{3}S(OABC) \times h$$

$\overrightarrow{OA}(a,0,0)$ و $\overrightarrow{CB}(b,0,0)$ نلاحظ أنّ الشعاعين: $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{CB}$ مرتبطين خطياً لأنّ

$\overrightarrow{OA} = \frac{a}{b}\overrightarrow{CB}$ . فالشكل $OACB$ شبه منحرف وهو قائم في $O$ كون المعلم متجانس .

$$S(OABC) = \frac{OA+CB}{2} \times OC = \frac{a+b}{2} \times 4 = 2(a+b)$$

و ارتفاع الهرم $h = OE = 3$ .

$$18 = \frac{1}{3}2(a+b) \times 3$$

وبالتالي $a+b=9$ . فالخيار الصحيح هو $B$ .

28) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

| | |
|---|---|
| $A$ | معادلة الكرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها يساوي $5$ هي $x^2+y^2+z^2=5$ . |
| $B$ | معادلة الكرة التي مركزها $A(1,0,-3)$ وطول نصف قطرها يساوي $2$ هي $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4$ . |
| $C$ | الكرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها يساوي $1$ تمس المستوي $x+y+z-1=0$ . |
| $D$ | مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $(x-3)^2+(z-1)^2=9$ تمثّل دائرة مركزها $\Omega(3,0,1)$ ونصف قطرها يساوي $3$ . |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : معادلة الكرة التي مركزها $O$ وطول نصف قطرها يساوي $5$ هي $x^2+y^2+z^2=25$ .

فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : معادلة الكرة التي مركزها $A(1,0,-3)$ وطول نصف قطرها يساوي $2$ هي $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=4$ . فالخيار $B$ صحيح .

أمّا الخيار $C$ : $dist(O,\mathcal{P})=\dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<R=1$

فالمستوي $\mathcal{P}:x+y+z-1=0$ يقطع الكرة التي مركزها $O$ ونصف قطرها يساوي $1$ . فالخيار $C$ خاطئ .

أمّا الخيار $D$ : مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقّق المساواة : $(x-3)^2+(z-1)^2=9$

تمثّل أسطوانة محورها يوازي $Oy$ ويمر بالنقطة $(3,0,1)$ ونصف قطرها يساوي $3$ حيث $y\in\mathbb{R}$ .

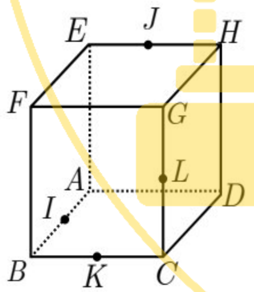
ملاحظة : المعادلة السابقة لا يمكن أنْ تمثّل دائرة إلّا بشرط إضافي إذا ثبّتنا قيمة لِ $y$:

مثلاً : $(x-3)^2+(z-1)^2=9$ و $y=5$ المعادلتان السابقتان تمثّل دائرة في الفراغ .

وبشكل عام تتمثّل الدائرة في الفراغ بمعادلتين أحدهما كرة والأخرى مستوٍ يقطع هذه الكرة .

---

29) $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي $1$ . $I$ و $J$ و $K$ و $L$ هي منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[EH]$ و $[BC]$ و $[CG]$ بالترتيب .




**<u>واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :</u>**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ | $B$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$ |
| $C$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}$ | $D$ | $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ لأنّ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{AL}$ على المستوي $(ABCD)$ الحاوي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$ . فالخيار $A$ صحيح .

لندقّق في الخيار $B$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$ لأنّ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{IL}$ على المستوي $(ABCD)$ الحاوي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{IC}$ . فالخيار $B$ صحيح .

لندقّق في الخيار $C$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}$ لأنّ المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{JK}$ على المستوي $(ABFE)$ الحاوي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو الشعاع $\overrightarrow{EB}$ . فالخيار $C$ صحيح .

أمّا الخيار $D$ : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=1$

حيث المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{EB}$ على حامل المستقيم $(AB)$ هو الشعاع $\overrightarrow{AB}$ .

فالخيار $D$ هو الخيار الوحيد الخاطئ . وهو الذي يجب أنْ نختاره .

---

30) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا ثلاث نقاط متمايزة $A$ و $B$ و $C$

عندئذٍ مجموعة النقاط $M$ التي تحقّق المساواة : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ تمثّل

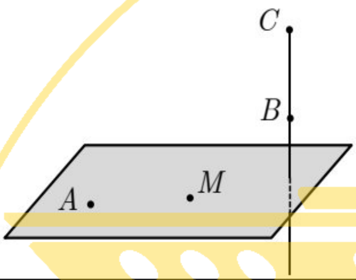
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | الارتفاع المرسوم من $A$ في $ABC$ . | $B$ | المستوي المار من النقطة $A$ والعمودي على المستقيم $(BC)$. | $C$ | المستقيم المار من النقطة $A$ و العمودي على المستوي $(ABC)$. | $D$ | الكرة التي قطرها $[BC]$ |

**التبرير** مجموعة النقاط $M$ التي تحقّق المساواة : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

تمثّل المستوي المار من النقطة $A$ وتقبل الشعاع $\overrightarrow{BC}$ ناظماً عليه

أي تمثّل المستوي المار من النقطة $A$ والعمودي على المستقيم $(BC)$.

فالخيار الصحيح هو $B$ .




---

31) مجموعة نقط الفراغ $M(x,y,z)$ التي تحقّق : $y=x$ تمثّل

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | مستقيم يمر بالمبدأ | $B$ | مستوٍ يحوي المحور $Oz$ | $C$ | مستوٍ يعامد المحور $Oz$ | $D$ | المستوي $(Oxy)$ |

**التبرير** $y=x$ أي $x-y=0$ هي معادلة مستوٍ شعاع ناظمه $\vec{n}(1,-1,0)$

يعامد الشعاع $\vec{k}(0,0,1)$ فالمستقيم $(Oz)$ يوازي المستوي المفروض ولمّا كانت النقطة $O(0,0,0)$

تحقّق معادلة هذا المستوي فالمستقيم $(Oz)$ محتوى في هذا المستوي .

فالخيار الصحيح هو $B$ .

ملاحظات مفيدة : في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

- ❒ كل معادلة من الشكل : $ax+by+d=0$ تمثّل معادلة مستوي يوازي المحور $(Oz)$ .
- ❒ كل معادلة من الشكل : $ax+cz+d=0$ تمثّل معادلة مستوي يوازي المحور $(Oy)$ .
- ❒ كل معادلة من الشكل : $by+cz+d=0$ تمثّل معادلة مستوي يوازي المحور $(Ox)$ .
- ❒ كل معادلة من الشكل : $ax+d=0$ تمثّل معادلة مستوي يوازي المستوي $(Oyz)$ .
- ❒ كل معادلة من الشكل : $by+d=0$ تمثّل معادلة مستوي يوازي المستوي $(Oxz)$ .
- ❒ كل معادلة من الشكل : $cz+d=0$ تمثّل معادلة مستوي يوازي المستوي $(Oxy)$ .

---

32) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ . لدينا نقطتان متمايزتان $A$ و $B$ .

إنّ مجموعة نقط الفراغ $M$ التي تحقّق المساواة: **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :**

| | |
|---|---|
| A | $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ : تمثّل كرة قطرها $[AB]$ . |
| B | $MA=kMB$ حيث $k>0$ و $k\neq 1$ : تمثّل كرة . |
| C | $MA=MB$ : تمثّل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ . |
| D | $MA=k$ حيث $k>0$ : تمثّل دائرة مركزها $A$ ونصف قطرها يساوي $k$ . |

**التبرير**

نلاحظ أن الخيار الوحيد الخاطئ هو $D$ لأنّ $MA=k$ حيث $k>0$ : تمثّل في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ كرة مركزها $A$ ونصف قطرها يساوي $k$ .

---

33) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ : لدينا النقاط $A(1,-1,1)$ و $B(2,-2,2)$ و $C(0,7,-1)$ .

المستوي $(ABC)$ يقبل شعاعاً ناظماً هو

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\vec{n}(1,-2,-3)$ | B | $\vec{n}(18,-3,-21)$ | C | $\vec{n}(2,-2,2)$ | D | $\vec{n}(-6,1,-7)$ |

**التبرير**

$\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,8,-2)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{1}{-1}\neq\frac{-1}{8})$

فالنقاط $A$ و $B$ و $C$ لا تقع على استقامةٍ واحدة . فهي تعيّن مستوٍ وحيد $(ABC)$ .

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي $(ABC)$ .

فيكون $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ومنه $a-b+c=0$ و $-a+8b-2c=0$

بفرض $c=1$ نجد $\begin{cases} a-b=-1 & (1) \\ -a+8b=2 & (2) \end{cases}$

بجمع $(1)$ و $(2)$ نجد $7b=1$ ومنه $b=\frac{1}{7}$ نعوّض في $(1)$ فنجد : $a-\frac{1}{7}=-1$ وبالتالي $a=-1+\frac{1}{7}=\frac{-6}{7}$

ومنه $\vec{n}(\frac{-6}{7},\frac{1}{7},1)$ ناظم على المستوي $(ABC)$ وبالتالي $\vec{n}'=7\vec{n}=(-6,1,7)$. فالخيار $D$ خاطئ .

وكذلك $\vec{n}_1=-3\vec{n}'=(18,-3,-21)$ . فالخيار الصحيح هو $B$ .

**طريقة ثانية :** $\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,8,-2)$

نأخذ الخيار $B$ : $\vec{n}(18,-3,-21)$

نلاحظ أنّ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(1)(18)+(-1)(-3)+(1)(-21)=18+3-21=0$ ومنه $\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AB}$ ....... $(I)$

نلاحظ أنّ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1)(18)+(8)(-3)+(-2)(-21)=-18-24+42=0$ ومنه $\vec{n}$ يعامد $\overrightarrow{AC}$ ....... $(II)$

من $(I)$ و $(II)$ نجد أنّ $\vec{n}(18,-3,-21)$ ناظم على المستوي $(ABC)$ .

**طريقة ثالثة :** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix} : \vec{n}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}\right)=(-6,1,7)$

ومنه $\vec{n}'=-3\vec{n}=(18,-3,-21)$

34) في الفراغ المنسوب إلى معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ :

لدينا النقاط $A(2,0,0)$ و $B(0,4,3)$ و $C(4,4,1)$ و $D(0,0,4)$ و $H(-1,1,2)$ . **<u>واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :</u>**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | النقاط $A$ و $C$ و $D$ تعرّف مستوٍ $\mathcal{P}$ معادلته : $8x-5y+4z-16=0$ . | $B$ | النقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ لا تقع في مستوٍ واحد . |
| $C$ | بافتراض أنّ معادلة المستوي $(ABC)$ هي: $x-y+2z-2=0$ فتكون النقطة $H$ هي المسقط القائم للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ . | $D$ | المستقيمان $(AC)$ و $(BH)$ متخالفان . |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : $\overrightarrow{AC}(2,4,1)$ و $\overrightarrow{AD}(-2,0,4)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{-2}{2}\neq\frac{0}{4})$

فالنقاط $A$ و $C$ و $D$ لا تقع على استقامةٍ واحدة فهي تعيّن مستوٍ وحيد $\mathcal{P}$ .

نلاحظ أنّ النقطة $A(2,0,0)$ تحقق معادلة المستوي $\mathcal{P}$ لأنّ : $(8)(2)-0+0-16=0$ ومنه $A\in\mathcal{P}$ .

نلاحظ أنّ النقطة $C(4,4,1)$ تحقق معادلة المستوي $\mathcal{P}$ لأنّ : $(8)(4)-5(4)+4(1)-16=0$ ومنه $C\in\mathcal{P}$ .

نلاحظ أنّ النقطة $D(0,0,4)$ تحقق معادلة المستوي $\mathcal{P}$ لأنّ : $(8)(0)-5(0)+4(4)-16=0$ ومنه $D\in\mathcal{P}$ .

فالخيار $A$ صحيح .

لندقّق في الخيار $B$ : نلاحظ أنّ النقطة $B(0,4,3)$ لا تحقق معادلة المستوي $\mathcal{P}$ لأنّ : $(8)(0)-5(4)+4(3)-16\neq 0$

ومنه $B\notin\mathcal{P}$ . فالنقاط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ لا تقع في مستوٍ واحد . فالخيار $B$ صحيح .

لندقّق في الخيار $C$ :

❐ نلاحظ أنّ النقطة $H(-1,1,2)$ تحقق معادلة المستوي $(ABC)$ لأنّ $(-1)-(1)+2(2)-2=0$

ومنه $H\in(ABC)$ ...... $(I)$

❐ $\vec{n}(1,-1,2)$ و $\overrightarrow{DH}(-1,1,-2)$ نلاحظ أنّ $\overrightarrow{DH}=-\vec{n}$ . فالشعاعان $\overrightarrow{DH}$ و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً ...... $(II)$

من $(I)$ و $(II)$ نجد أنّ النقطة $H$ هي المسقط القائم للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ . فالخيار $C$ صحيح .

**<u>طريقة ثانية :</u>**

❐ نلاحظ أنّ النقطة $H(-1,1,2)$ تحقق معادلة المستوي $(ABC)$ لأنّ $(-1)-(1)+2(2)-2=0$

ومنه $H\in(ABC)$ ...... $(I)$

❐ $DH=\sqrt{(-1-0)^2+(1-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

$$dist(D,(ABC))=\frac{|0-0+2(4)-2|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

ومنه $dist(D,(ABC))=DH$ ....... $(II)$

من $(I)$ و $(II)$ نجد أنّ النقطة $H$ هي المسقط القائم للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ .

فالخيار $C$ صحيح .

**طريقة ثالثة :**

❒ نوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم $d$ المار بالنقطة $D$ والعمودي على المستوي $(ABC)$

فيكون $\vec{u}_d = \vec{n} = (1,-1,2)$

ومنه $d:\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t+4 \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$

❒ بالحل المشترك للمستقيم $d$ مع المستوي $(ABC)$ نجد

$$t-(-t)+2(2t+4)-2=0$$

ومنه $6t+6=0$ وبالتالي $t=-1$

نعوّض : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2(-1)+4 = 2 \end{cases}$

فالنقطة $H=(-1,1,2)$ هي المسقط القائم للنقطة $D$ على المستوي $(ABC)$ . فالخيار $C$ صحيح .

أمّا الخيار $D$ : $\overrightarrow{AC}(2,4,1)$ و $\overrightarrow{BH}(-1,-3,-1)$ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BH}$

غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{2}{-1} \neq \frac{4}{-3})$ فالمستقيمان $(AC)$ و $(BH)$ غير متوازيين

ولكنهما يقعان في مستوٍ واحد لأنّ $H \in (ABC)$ من الخيار السابق فهما متقاطعان .

فالخيار $D$ خاطئ . وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

---

35) لدينا كرة $S$ مركزها النقطة $A(2,-1,-2)$ وتمر بالنقطة $B(-1,2,1)$ .

معادلة المستوي المماس للكرة $S$ في $B$ هي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-x+y+z-4=0$ | $B$ | $-x+y+z+5=0$ | $C$ | $-3x+3y+3z-6=0$ | $D$ | $3x-3y+3z+12=0$ |

**التبرير** $\vec{n} = \overrightarrow{BA}(3,-3,-3)$

ومنه $\vec{n}' = -\frac{1}{3}\vec{n} = (-1,1,1)$ شعاع ناظم على المستوي المطلوب .

فمعادلة المستوي المطلوب هي : $-1(x+1)+1(y-2)+1(z-1)=0$

$-x+y+z-4=0$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

36) لتكن الكرة التي مركزها $A(2,-2,-3)$ ونصف قطرها يساوي 3 . والمستوي $Q$ الذي معادلته : $2x-y+2z=3$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | المستوي $Q$ مماس للكرة $S$ | $B$ | المستوي $Q$ لا يشترك مع الكرة $S$ . | $C$ | المستوي $Q$ يقطع الكرة $S$ ويكون نصف قطر الدائرة المقطع يساوي $2\sqrt{2}$ | $D$ | المستوي $Q$ يقطع الكرة $S$ ويكون نصف قطر الدائرة المقطع يساوي 3 . |

التبرير

$$dist(A,Q)=\frac{|2(2)-(-2)+2(-3)-3|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1<3$$

فالمستوي $Q$ يقطع الكرة $S$ فالخيار الصحيح هو إمّا $C$ أو $D$ .

لمعرفة الخيار الصحيح لا بدّ من معرفة نصف قطر الدائرة المقطع $r$ :

$$r^2=R^2-d^2=9-1=8$$

ومنه نصف قطر الدائرة المقطع : $r=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

37) المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ اللذان معادلتاهما: $\mathcal{P}:2x-y+z-3=0$ و $\mathcal{Q}:2x+4y+5=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متوازيان وغير منطبقين | $B$ | متقاطعان وغير متعامدين | $C$ | متعامدان | $D$ | منطبقان |

التبرير $\vec{n}_{\mathcal{P}}(2,-1,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(2,4,0)$

نلاحظ أنّ $\vec{n}_{\mathcal{P}}\cdot\vec{n}_{\mathcal{Q}}=(2)(2)+(-1)(4)+0=0$ .

فالمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

38) ليكن المستوي $\mathcal{Q}$ الذي معادلته : $\mathcal{Q}:2x-y+z-3=0$ . والنقطتان $A(3,-1,2)$ و $B(5,-2,3)$

معادلة المستوي $\mathcal{P}$ الوحيد المار بالنقطتين $A$ و $B$ ويعامد المستوي $\mathcal{Q}$ .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $x+y-z=0$ | $B$ | $2x-y-5z+3=0$ | $C$ | $-x+3y+5z-4=0$ | $D$ | لا يوجد مستوٍ وحيد بل يوجد عدد غير منتهٍ من المستويات. |

التبرير نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}(2,-1,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(2,-1,1)$ مرتبطان خطياً كون $\vec{n}_{\mathcal{Q}}=\overrightarrow{AB}$

وبالتالي لا يوجد مستوٍ وحيد بل يوجد عدد غير منتهٍ من المستويات .فالخيار الصحيح هو $D$ .

حيث إذا كان المستقيم $d$ عمودياً على مستوٍ $\mathcal{P}$ أي مستوي يحوي هذا المستقيم $d$ يكون عمودياً على المستوي $\mathcal{P}$ .

ومن جهةٍ أخرى لتشكيل مستوٍ وحيد إذا لم نجد نقطة وشعاع ناظم عليه لا بدّ من وجود شعاعين غير مرتبطين خطياً في المستوي ونقطة منه . في معطيات المسألة يوجد نقطتان من المستوي ولكن معطيات المسألة لا تعطينا شعاعين غير مرتبطين خطياً .

لذلك في كتابنا كان يسألنا في بداية هذه المسألة أثبت أن المستقيم $(AB)$ لا يعامد المستوي $\mathcal{Q}$.

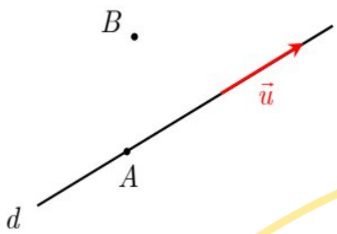
---

39) ليكن المستقيم $d$ المار بالنقطة $A(-2,1,1)$ و الموجّه بالشعاع $\vec{u}(3,-1,2)$.

ولتكن النقطة $B \notin d$ إحداثياتها $B(1,0,-3)$. عندئذٍ معادلة المستوي $\mathcal{P}$ المحدّد بالمستقيم $d$ و النقطة $B$ هي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $x+3y-1=0$ | $B$ | $3x-y+2z+3=0$ | $C$ | $x-5y+2z+5=0$ | $D$ | $-4y+z+3=0$ |

**التبرير** المستوي $\mathcal{P}$ يمر بالنقطة $B(1,0,-3)$




$\overrightarrow{AB}(3,-1,-4)$ و $\vec{u}(3,-1,2)$ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً

لأنّ مركباتهما غير متناسبة $(\frac{3}{3} \neq \frac{-4}{2})$ وهما شعاعا توجيه المستوي $\mathcal{P}$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي $\mathcal{P}$ فيكون :

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

ومنه $3a-b-4c=0$ و $3a-b+2c=0$

لا نستطيع أنْ نفرض قيمة اختيارية لِـ $c \neq 0$ كون أمثال $a$ وأمثال $b$ متناسبة في المعادلتين

فنفرض $a=1$ قيمة اختيارية غير معدومة فنجد $\begin{cases} -b-4c=-3 & (1) \\ -b+2c=-3 & (2) \end{cases}$

بطرح $(1)$ و $(2)$ نجد $6c=0$ ومنه $c=0$ نعوّض في $(1)$ فنجد لـ $b=3$ ومنه $\vec{n}(1,3,0)$

فمعادلة المستوي $\mathcal{P}$ هي : $1(x-1)+3(y-0)=0$

ومنه $x+3y-1=0$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

40) ليكن المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ اللذان معادلتاهما : $\mathcal{P}: 2x-y+z-3=0$ و $\mathcal{Q}: 2x-y+z-9=0$

إذا علمتَ أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متوازيان . كان البعد بينهما يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $6$ | $B$ | $3$ | $C$ | $\sqrt{6}$ | $D$ | $\sqrt{3}$ |

**التبرير**

لإيجاد البعد بين مستويين متوازيين نأخذ نقطة من أحدهما ونحسب بعدها عن المستوي الآخر

لنأخذ نقطة من $\mathcal{P}$ نفرض $x=0$ و $y=0$ فنجد $z=3$ ومنه $A(0,0,3)\in\mathcal{P}$

$$dist(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = dist(A,\mathcal{Q}) = \frac{|2(0)-(0)+3-9|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$ .

فالخيار الصحيح هو $C$ .

<u>**طريقة ثانية :**</u> ليكن المستويان المتوازيان $\mathcal{P}: ax+by+cz+h_1=0$ و $\mathcal{Q}: ax+by+cz+h_2=0$

فإنّ البعد بين المستويين المتوازيين يُعطى بالصيغة $dist(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \dfrac{|h_1-h_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

هنا يجب جعل المعادلتين بنفس الأمثال للمجاهيل $x$ و $y$ و $z$ .

.............................................انتهت الأجوبة.............................................

**ورقة العمل الأولى في مادة التحليل**

**للصف الثالث الثانوي العلمي الفصل الثاني(شتاء 2025)**

**الاسم :.........**

**الدرجة: 600**

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

## التحليل 1:

1) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$

إنّ عدد المماسات للخط $C$ الموازية للمستقيم $y = x$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $0$ | $B$ | $1$ | $C$ | $2$ | $D$ | $3$ |

2) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ الاشتقاقي مرتين على $\mathbb{R}$ جدول تغيرات $f'$ هو الآتي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $4$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | الخط $C$ يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y = -3x$ | $B$ | الخط $C$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم $y = -2x$ | $C$ | الخط $C$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم $7x - 2y = 0$ | $D$ | الخط $C$ يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y = x$ |

3) ليكن $f$ تابعاً اشتقاقياً مرتين على $\mathbb{R}$ ويحقّق : $\sqrt{x^2+1}\, f'(x) = f(x)$ عندئذٍ $(1+x^2)f''(x) + xf'(x)$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f(x)$ | $B$ | $\sqrt{x^2+1}\, f(x)$ | $C$ | $f'(x)$ | $D$ | $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ |

4) ليكن $C$ الخط البياني لتابعٍ $f$ معرّف على مجالٍ $I$ ولتكن $a \in I$ . نقول إنّ $f(a)$ قيمة كبرى محلياً إذا وفقط إذا

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | وُجِدَ مجال مغلق $J$ يضم $a$ ويحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) \le f(a)$ : | $B$ | وُجِدَ مجال مفتوح $J$ يضم $a$ ويحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) \le f(a)$ |
| $C$ | وُجِدَ مجال مفتوح $J$ يضم $a$ ويحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) < f(a)$ | $D$ | أياً كان $J$ مجالاً مفتوحاً يضم $a$ يحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) \le f(a)$ |

5) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln(\ln x)}{x - e}$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $e$ | $B$ | $1$ | $C$ | $\dfrac{1}{e}$ | $D$ | $0$ |

6) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x| + 1}$ .

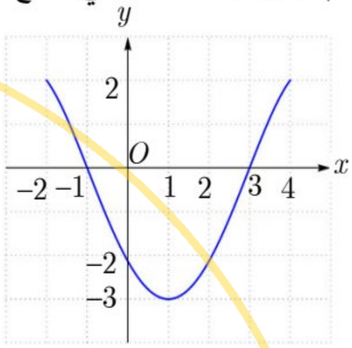
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f$ ليس مستمراً عند الصفر | $B$ | $f$ ليس اشتقاقياً عند الصفر | $C$ | معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي فاصلتها $x = 0$ هي $y = x$ . | $D$ | عندما $x < 0$ يكون $f'(x) = \dfrac{-x\cos x + 1}{(x-1)^2}$ |

7) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 1$ حيث $a$ عددٌ حقيقي

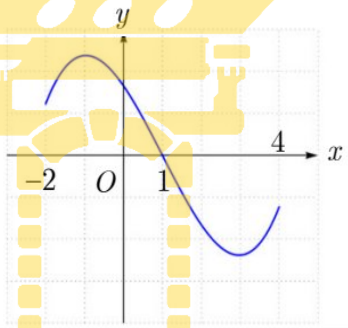
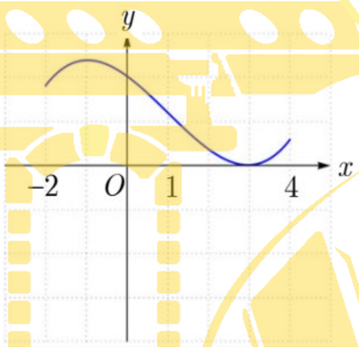
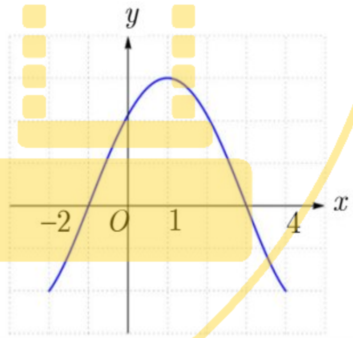
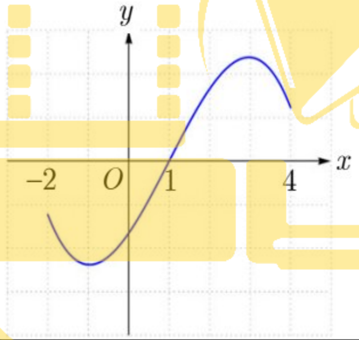
قيمة $a$ حتى يكون للتابع $f$ قيمة حدية محلياً عند $x = 1$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-3$ | $B$ | $3$ | $C$ | $1$ | $D$ | لا يوجد قيمة لـِ $a$ |

8) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ الاشتقاقي على $[-2,4]$ المرسوم جانباً :

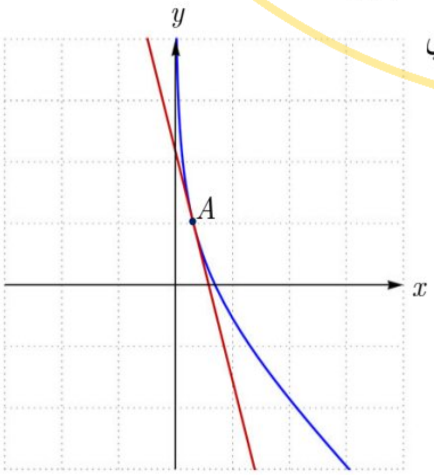


عندئذٍ واحدٌ من الخطوط البيانية الآتية يمثّل الخط البياني لتابعه المشتق $f'$ هو

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ |  | $B$ |  |
| $C$ |  | $D$ |  |

9) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $]0,+\infty[$ والمرسوم في الشكل المجاور :

المستقيم $d$ مماس للخط $C$ في النقطة $A$ التي فاصلتها $a$ عندئذٍ $f'(a)$ تساوي



| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $e$ | $B$ | $e-1$ |
| $C$ | $e-2$ | $D$ | $-e-1$ |

10) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\sin^3 x^2$ . عندئذٍ $f'(x)$ تساوي .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $6x\cos x^2 - 6x\cos^3 x^2$ | $B$ | $3\sin^2 x^2 \cdot \cos x^2$ | $C$ | $6x\sin^2 x^2 - 6x\sin^3 x^2$ | $D$ | $\cos^3 x^2$ |

11) ليكن $f$ تابعاً معرّفاً على مجالٍ $I$ و $a \in I$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | إذا غيّر $f'(x)$ إشارته عند $x=a$ كانت $f(a)$ قيمة حدية محلياً . | $B$ | إذا لم يغيّر $f'(x)$ إشارته عند $x=a$ عندئذٍ $f(a)$ ليست قيمة حديّة محلياً . |
| $C$ | إذا كان $f$ اشتقاقياً عند $a$ و $f(a)$ قيمة حديّة محلياً كانت $f'(a)=0$ . | $D$ | إذا كان $f$ اشتقاقياً على $I$ و $f'(a)=0$ و $f'(x)$ يغيّر إشارته عند $x=a$ كانت $f(a)$ قيمة حدية محلياً . |

12) ليكن $f$ و $g$ تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$ ويحقّقان : $g(-2)=4$ و $g'(-2)=3$ و $f'(4)=5$ .

عندئذٍ $(f\circ g)'(-2)$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | $B$ | 4 | $C$ | 5 | $D$ | 15 |

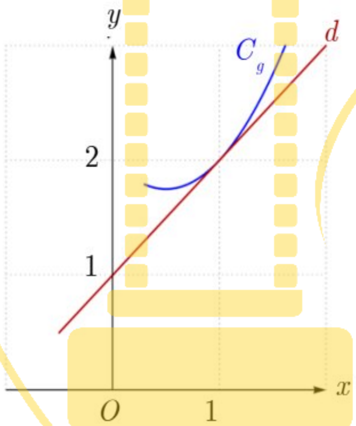
13) ليكن $f$ التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x)=\ln(\sin x)+\ln(\cos x)$ . عندئذٍ $f'(x)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $2\tan 2x$ | $B$ | $2\cot(2x)$ | $C$ | $\sin 2x$ | $D$ | $\cos 2x$ |

14) ليكن $C_g$ الخط البياني للتابع $g$ الاشتقاقي على $\mathbb{R}$ والمستقيم $d$ مماس للخط $C_g$ عند $x=1$ والمرسومين جانباً :

وليكن $f$ تابعاً يحقّق العلاقة : $f(2x-1)=x\cdot g(x)-3$

عندئذٍ $f'(1)$ تساوي




| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 2 | $B$ | $\frac{3}{2}$ |
| $C$ | $\frac{5}{2}$ | $D$ | 3 |

15) ليكن $f$ التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x)=\sin^2(\cos x)+\cos^2(\cos x)$ . عندئذٍ $f'(x)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | $B$ | $\sin^3(\cos x)$ | $C$ | $\cos^3 x$ | $D$ | $\tan^3(\cos x)$ |

16) ليكن التابعان $f$ و $g$ ، خطّاهما البيانيان $C_f$ و $C_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=1$

معادلته $y=2x-3$ . ولنعرّف التابع $h$ وفق العلاقة : $h(x)=\dfrac{2f^2(x)}{g(x)}$ . عندئذٍ $h'(1)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 4 | $B$ | $-4$ | $C$ | 0 | $D$ | 2 |

17) لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n=f(n)$ . التابع $f$ الذي يمكن أنْ يحدّدها هو

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f(x)=\sqrt{10-x}$ | $B$ | $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ | $C$ | $f(x)=\sqrt{2x+1}$ | $D$ | $f(x)=e^{\ln(1-x^2)}$ |

18) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة التدريجية : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ . التابع $f$ الذي يمكن أنْ يحدّدها هو

$A$

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ |

$B$

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$C$

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $4$ |

$D$

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

19) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ . **واحدٌ من العبارات الآتية خاطئ :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | إذا كانت $u_{n+1} - u_n > 0$ أياً تكن $n \geq 0$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً . | $B$ | إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 0$ أياً تكن $n \geq 0$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناوبة بالإشارات. |
| $C$ | إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ أياً تكن $n \geq 0$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . | $D$ | إذا كان $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ أياً كانت $n \geq 0$ . كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة |

20) لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$. **واحدٌ من العبارات الآتية خاطئة هي :**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدتين كانت المتتالية $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . | $B$ | إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدتين كانت المتتالية $(u_n \cdot v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . |
| $C$ | إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة و $u_n \neq 0$ كانت $(\frac{1}{u_n})_{n\geq 0}$ متناقصة . | $D$ | إذا كان $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة كانت المتتالية $(\sqrt{u_n})_{n\geq 0}$ متزايدة . |

21) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$ . عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متزايدة | $B$ | متناقصة | $C$ | ثابتة | $D$ | متناقصة بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 10$ . |

22) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = \frac{n^2}{n!}$ . عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متزايدة | $B$ | متناقصة | $C$ | ثابتة | $D$ | ليست مطردة |

23) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = n^2 + \cos(2\pi n)$ . عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متزايدة | $B$ | متناقصة | $C$ | ثابتة | $D$ | ليست مطردة |

24) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = n^2 + (-1)^n n$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| متزايدة | $D$ | متزايدة تماماً | $C$ | متناقصة | $B$ | متناقصة تماماً | $A$ |

25) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ . عندئذٍ $u_3$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{47}{60}$ | $D$ | $\frac{8}{15}$ | $C$ | $\frac{1}{3}$ | $B$ | $\frac{1}{5}$ | $A$ |

## التحليل 2:

26) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $e^{\frac{1}{x}} > 2 - e^2$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}^*$ | $D$ | $\mathbb{R}$ | $C$ | $]0,+\infty[$ | $B$ | $\varnothing$ | $A$ |

27) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $e^x(e^x - 3) \leq 3(e^x - 3)$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ | $D$ | $\{\ln 3\}$ | $C$ | $\mathbb{R}\setminus\{\ln 3\}$ | $B$ | $\mathbb{R}$ | $A$ |

28) إنّ مجموعة حلول المعادلة : $2e^x - 3e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{0,-2\ln 2\}$ | $D$ | $\{0,\ln 4\}$ | $C$ | $\{0,\ln 2\}$ | $B$ | $\{0\}$ | $A$ |

29) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $3e^x - e^{4-x} - 2e^2 < 0$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $]2,+\infty[$ | $D$ | $]-\infty,2[$ | $C$ | $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ | $B$ | $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$ | $A$ |

30) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\frac{-2}{1+e^{-2x}} > -e^x$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $]0,+\infty[$ | $D$ | $\mathbb{R}^*$ | $C$ | $]-\infty,0[$ | $B$ | $\mathbb{R}$ | $A$ |

31) $f$ تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}$ . **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ متناقص تماماً على $]-\infty,0]$ | $D$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ | $C$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ | $B$ | أياً تكن $x\in[0,+\infty[$ يكون $f'(x)\geq 0$ | $A$ |

32) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$

إنّ $f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويعطى $f'(x)$ بالصيغة

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-2x-1)e^{-2x+3}$ | $D$ | $(-2x+3)e^{-2x+3}$ | $C$ | $e^{-2x+3}$ | $B$ | $-2e^{-2x+3}$ | $A$ |

33) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = x\cdot e^{-x}$ . إنّ $f(\ln 2)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln 2$ | $D$ | $2\ln 2$ | $C$ | $-2\ln 2$ | $B$ | $\ln\sqrt{2}$ | $A$ |

34) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = e^{5x+2}$

إنّ معادلة المماس للخط $C$ في نقطة منه ترتيبها 1 هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $y = 5x + 1$ | $B$ | $y = 5x - 1$ | $C$ | $y = 5x + 3$ | $D$ | $y = \frac{1}{5}x + 1$ |

35) $f$ تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ | $B$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ | $C$ | أياً تكن $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) < 0$ | $D$ | أياً تكن $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ |

36) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} + 2$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $y = x + 2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty, 0[$ | $B$ | $y = x + 2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع فوق المقارب على المجال $]-\infty, 0[$ | $C$ | $y = x - 2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty, 0[$ | $D$ | $y = x - 2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع فوق المقارب على المجال $]-\infty, 0[$ |

37) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \ln(e^{-x} + 2)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | للخط $C$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$ معادلته $y = \ln 2$ | $B$ | للخط $C$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $+\infty$ معادلته $y = 2$ | $C$ | للخط $C$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته $y = -x$ | $D$ | للخط $C$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته $y = x$ |

38) ليكن $f$ التابع المعرّف على $]0, +\infty[$ وفق العلاقة : $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ نكتب $f(x)$ بالصيغة :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ | $B$ | $f(x) = \dfrac{1}{x} \times e^{\sqrt{x}}$ | $C$ | $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$ | $D$ | $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}}{x \cdot e^{\sqrt{x}}}$ |

39) $f$ تابع معرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = (ax + b)e^x$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. جدول تغيّراته هو الآتي :

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $e^6$ | $\searrow$ | |

عندئذٍ $a + b$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 6 | $B$ | 5 | $C$ | 4 | $D$ | 3 |

40) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x) = \begin{cases} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$ .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f$ اشتقاقي عند 0 اليمين | $B$ | $f$ ليس اشتقاقياً عند 0 من اليسار | $C$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ | $D$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ |

...........................................انتهت الأسئلة...........................................

الاسم :.........

الدرجة: 600

فيما يأتي 40 سؤالاً لكل سؤال أربع إجابات مقترحة واحدة منها فقط صحيحة اختر الإجابة الصحيحة ثمّ ظلل على ورقة إجابتك دائرة الحرف الموافق للإجابة الصحيحة : لكل سؤال 15 درجة .

## التحليل 1:

1) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$

إنّ عدد المماسات للخط $C$ الموازية للمستقيم $y = x$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $0$ | $B$ | $1$ | $C$ | $2$ | $D$ | $3$ |

**التبرير**

بما أنّ $f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ نحل المعادلة $f'(x) = 1$ على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$$

ومنه $f'(x) = 1$

$$-4x^3 + 4x + 1 = 1$$

$$-4x^3 + 4x = 0$$

$$-4x(x^2 - 1) = 0$$

إمّا $\boxed{x = 0}$ أو $x^2 - 1 = 0$

أي $\boxed{x = -1}$ أو $\boxed{x = 1}$ .

نلاحظ أنّ للمعادلة $f'(x) = 1$ ثلاثة حلول وهذا لا يعني أنّ للخط $C$ ثلاث مماسات

لمعرفة عدد المماسات : نوجد معادلة المماس في كل نقطة تماس

- معادلة المماس للخط $C$ عند $x = 0$ : هي $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ أي $y = 1(x - 0) + 0$

$$y = x$$

- معادلة المماس للخط $C$ عند $x = -1$ : هي $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ أي $y = 1(x + 1) + 0$

$$y = x + 1$$

- معادلة المماس للخط $C$ عند $x = 1$ : هي $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ أي $y = 1(x - 1) + 2$

$$y = x + 1$$

نلاحظ أنّ المماس للخط $C$ في النقطتين اللتين فاصلتاهما : $x = 1$ و $x = -1$ نفسه فنعدّه مرة واحدة

فالمماسات للخط $C$ الموازية للمستقيم $y = x$ هي $y = x$ و $y = x + 1$ وعددها 2 . فالخيار الصحيح هو $C$ .

2) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ الاشتقاقي مرتين على $\mathbb{R}$ جدول تغيرات $f'$ هو الآتي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $4$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | الخط $C$ يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y=-3x$ | $B$ | الخط $C$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم $y=-2x$ | $C$ | الخط $C$ يقبل مماسين موازيين للمستقيم $7x-2y=0$ | $D$ | الخط $C$ يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y=x$ |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : نحل المعادلة $f'(x)=-3$ حيث نلاحظ من جدول تغيّرات $f'$ أنّه ليس للمعادلة $f'(x)=-3$ أية حلول أي الخط $C$ لا يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y=-3x$. فالخيار $A$ خاطئ

لندقّق في الخيار $B$ : نحل المعادلة $f'(x)=-2$ حيث نلاحظ من جدول تغيّرات $f'$ أنّ للمعادلة $f'(x)=-2$ حل وحيد عند $x=-1$ . أي الخط $C$ يقبل مماساً وحيداً موازياً للمستقيم $y=-2x$ . فالخيار $B$ خاطئ .

ملاحظة : على فكرة إذا كان للمعادلة $f'(x)=-2$ حلان هذا لا يعني أنّ الخط $C$ يقبل مماسين لأنّه يمكن أنْ يكون المماس الأول هو نفسه الثاني . لذلك في الكتاب كان يسأل هل يقبل الخط $C$ مماساً موازياً لمستقيم ما ؟

فالخياران $B$ و $C$ خاطئان لأنّه حتى لو كان للمعادلة $f'(x)=m$ حلان فالمعطيات غير كافية لمعرفة فيما إذا كان يقبل مماسين أم مماساً واحداً .

لندقّق في الخيار $C$ : المستقيم $7x-2y=0$ يكتب بالشكل : $y=\frac{7}{2}x$ .

نحل المعادلة : $f'(x)=\frac{7}{2}$ . نلاحظ من جدول تغيّرات $f'$ أنّ للمعادلة $f'(x)=\frac{7}{2}$ حل وحيد يقع في المجال $]-\infty,-1[$

أي الخط $C$ يقبل مماساً وحيداً موازياً للمستقيم $7x-2y=0$ . فالخيار $C$ خاطئ .

أمّا الخيار $D$ : نحل المعادلة $f'(x)=1$ حيث نلاحظ من جدول تغيّرات $f'$ أنّ للمعادلة $f'(x)=1$ ثلاثة حلول فالخط $C$ يقبل مماساً موازياً للمستقيم $y=x$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

3) ليكن $f$ تابعاً اشتقاقياً مرتين على $\mathbb{R}$ ويحقّق : $\sqrt{x^2+1}\,f'(x)=f(x)$ عندئذٍ $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f(x)$ | $B$ | $\sqrt{x^2+1}\,f(x)$ | $C$ | $f'(x)$ | $D$ | $\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ |

**التبرير**

لدينا $\sqrt{x^2+1}\,f'(x)=f(x)$ نشتق طرفي المساواة السابقة فنجد : $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=f'(x)$

$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot f'(x)+f''(x)\cdot\sqrt{x^2+1}=f'(x)$ نضرب طرفي المساواة السابقة بِـ $\sqrt{x^2+1}$ فنجد :

$$x\cdot f'(x)+(x^2+1)f''(x)=\sqrt{x^2+1}\,f'(x)$$

ومنه $x\cdot f'(x)+(x^2+1)f''(x)=f(x)$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

4) ليكن $C$ الخط البياني لتابعٍ $f$ معرّف على مجالٍ $I$ ولتكن $a \in I$ . نقول إنّ $f(a)$ قيمة كبرى محلياً إذا وفقط إذا

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | وُجِدَ مجال مغلق $J$ يضم $a$ ويحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) \le f(a)$ : | $B$ | وُجِدَ مجال مفتوح $J$ يضم $a$ ويحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) \le f(a)$ |
| $C$ | وُجِدَ مجال مفتوح $J$ يضم $a$ ويحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) < f(a)$ | $D$ | أياً كان $J$ مجالاً مفتوحاً يضم $a$ يحقّق الشرط : أياً كان $x \in I \cap J$ كان $f(x) \le f(a)$ |

**التبرير**

حسب تعريف القيمة الكبرى محلياً : نجد أنّ الخيار الصحيح هو $B$ .

أمّا الخيار $A$ : فالخطأ الموجود فيه: كلمة مجال مغلق .

أمّا الخيار $C$ : فالخطأ الموجود فيه: $f(x) < f(a)$ .

أمّا الخيار $D$ : فالخطأ الموجود فيه : أياً كان $J$ مجالاً مفتوحاً.

---

5) $\lim_{x \to e} \frac{\ln(\ln x)}{x-e}$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $e$ | $B$ | $1$ | $C$ | $\frac{1}{e}$ | $D$ | $0$ |

**التبرير** لإيجاد $\lim_{x \to e} \frac{\ln(\ln x)}{x-e}$

بفرض $f(x) = \ln(\ln x)$

نلاحظ أنّ $f(e) = \ln(\ln(e)) = \ln 1 = 0$ .

$f$ اشتقاقي على $]1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$$

$$f'(e) = \frac{1}{e \cdot \ln e} = \frac{1}{e}$$

نحن نعلم : $\lim_{x \to e} \frac{f(x)-f(e)}{x-e} = f'(e)$

ومنه $\lim_{x \to e} \frac{\ln(\ln x)}{x-e} = \frac{1}{e}$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

6) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \frac{\sin x}{|x|+1}$ .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f$ ليس مستمراً عند الصفر | $B$ | $f$ ليس اشتقاقياً عند الصفر | $C$ | معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي فاصلتها $x=0$ هي $y = x$ . | $D$ | عندما $x<0$ يكون $f'(x) = \frac{-x\cos x + 1}{(x-1)^2}$ |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ومنه $f$ مستمر عند $x=0$ . فالخيار $A$ خاطئ .

على فكرة إذا كان $f$ ليس مستمراً عند الصفر أي الخيار $A$ صحيح كان $f$ ليس اشتقاقياً عند الصفر أي الخيار $B$ أيضاً صحيحاً ولكن هناك خيارٌ واحدٌ فقط صحيح . فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : نصطنع تابع معدّل التغيّر للتابع $f$ عند $x = 0$ وهو

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin x}{|x| + 1}}{x} = \frac{\sin x}{x(|x| + 1)}$$ المعرّف على $\mathbb{R}^*$

ومنه $g(x) = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{|x| + 1}$

بما أنّ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x| + 1} = 1$

ومنه $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 = f'(0)$ وبالتالي $f$ اشتقاقي عند $x = 0$ . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $C$ : معادلة المماس للخط $C$ في النقطة التي فاصلتها $x = 0$

هي $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ ومنه $y = 1(x - 0) + 0$ أي $y = x$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

أمّا الخيار $D$ : عندما $x < 0$ يكون $f(x) = \frac{\sin x}{-x + 1}$ ومنه

$$f'(x) = \frac{\cos x(-x + 1) + \sin x}{(-x + 1)^2} = \frac{-x \cos x + \cos x + \sin x}{(-x + 1)^2}$$

فالخيار $D$ خاطئ .

---

7) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 1$ حيث $a$ عددٌ حقيقي

قيمة $a$ حتى يكون للتابع $f$ قيمة حدية محلياً عند $x = 1$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $-3$ | $B$ | $3$ | $C$ | $1$ | $D$ | لا يوجد قيمة لِ $a$ |

التبرير $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 1$

بفرض $f(1)$ قيمة حدية محلياً

ومنه $f'(1) = 0$

$f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

لدينا $f'(1) = 0$ ومنه $3 + 2a + 3 = 0$ وبالتالي : $2a = -6$ ومنه $a = -3$

والتابع هو : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ . ولكن لا أستطيع أنْ أختار الخيار $A$ .

كونه يوجد الخيار $D$ (لا يوجد قيمة لِ $a$ ): هذا خيار متوقع لأنّ تعيين قيمة $a$ ليكون $f'(1) = 0$ لا يكفي أنْ تكون قيمة حدية محلياً لنتأكّد أنّ $f'(x)$ يغيّر إشارته عند $x = 1$ .

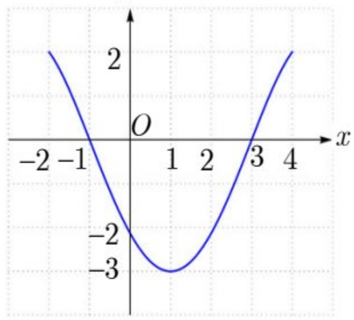
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه $f'(x)$ لا يغيّر إشارته عند $x = 1$ . فلا يوجد قيمة لِ $a$ تجعل $f(1)$ قيمة حدية محلياً .

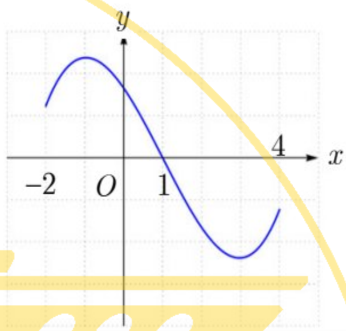
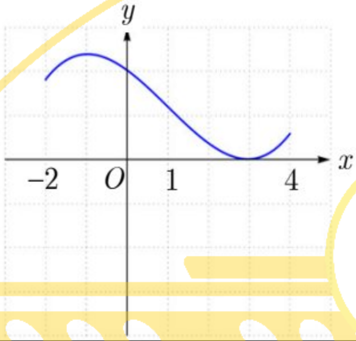
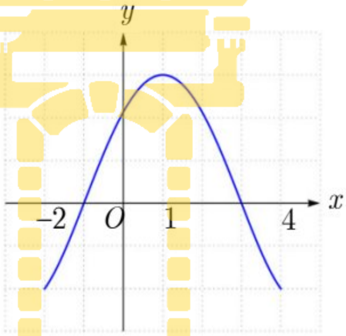
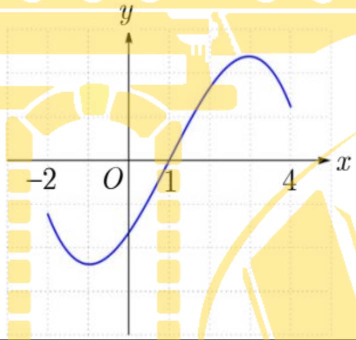
فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

8) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ الاشتقاقي على $[-2,4]$ المرسوم جانباً :



عندئذٍ واحدٌ من الخطوط البيانية الآتية يمثّل الخط البياني لتابعه المشتق $f'$ هو

| | | | |
|---|---|---|---|
| A |  | B |  |
| C |  | D |  |

**التبرير** هذا التمرين يعتمد على المهارات الآتية :

- ❐ إذا كان التابع $g$ اشتقاقياً و متزايداً تماماً على مجال $I$ أي $g'(x) \geq 0$ على هذا المجال $I$ هذا يكافئ أنّ الخط البياني $C_{g'}$ للتابع $g'$ سيكون مرسوماً فوق محور الفواصل على هذا المجال .
- ❐ إذا كان التابع $g$ اشتقاقياً و متناقصاً تماماً على مجال $I$ أي $g'(x) \leq 0$ على هذا المجال $I$ هذا يكافئ أنّ الخط البياني $C_{g'}$ للتابع $g'$ سيكون مرسوماً تحت محور الفواصل على هذا المجال .
- ❐ إذا كان للخط $C_g$ مماساً أفقياً عند نقطة منه فاصلتها $x = a$ أي $g'(a) = 0$ كان الخط البياني $C_{g'}$ للتابع $g'$ يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x = a$ .
- ❐ إذا كان ميل المماس للخط $C_g$ في النقطة التي فاصلتها $a$ يساوي $b$ أي $g'(a) = b$ كان الخط البياني للتابع $C_{g'}$ يمر بالنقطة $(a,b)$ .
- ❐ إذا كان $g$ ليس اشتقاقياً عند $x = a$ كان التابع $g'$ غير معرّف عند هذه النقطة .
- ❐ إذا الخط البياني للتابع $g'$ يقطع محور الفواصل عند $x = a$ وقد غيّر إشارته من السالب إلى الموجب قلنا بأنّ $g(a)$ قيمة صغرى محلياً , أمّا إذا غيّر إشارته من الموجب إلى السالب قلنا بأنّ $g(a)$ قيمة كبرى محلياً .

وهناك أمور أخرى لم يتعرّض إليها منهاجنا .

لنعود إلى مثالنا : نلاحظ أنّ $f$ متناقص تماماً على المجال $]-2,1[$ أي $f'(x) < 0$ على هذا المجال

ومنه يجب أنْ يكون الخط البياني لتابعه المشتق يقع تحت محور الفواصل على المجال $]-2,1[$ .

وهذا ينسجم فقط مع الرسمة الموجودة في الخيار $D$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

**<u>تبرير آخر:</u>** نلاحظ أنّ $f$ متزايد تماماً على المجال $]1,4[$ أي $f'(x) \geq 0$ على هذا المجال

ومنه يجب أنْ يكون الخط البياني لتابعه المشتق يقع فوق محور الفواصل على هذا المجال $]1,4[$ .

وهذا ينسجم مع الرسمتين الموجودتين في الخيارين : $B$ و $D$ . فهذا التبرير لوحده غير حاسم .

**<u>تبرير آخر:</u>** نلاحظ أنّ الخط $C$ يملك مماساً أفقياً في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ أي $f'(x) = 0$

ومنه الخط البياني لتابعه المشتق يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ .

وهذا ينسجم مع الرسمتين الموجودتين في الخيارين: $A$ و $D$ . فهذا التبرير لوحده غير حاسم .

**<u>تبرير آخر:</u>** نلاحظ أنّ $f(1)$ قيمة الصغرى محلياً و $f'(1) = 0$ و $f'(x)$ يغيّر إشارته من السالب والموجب

أي الخط البياني للتابع المشتق يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

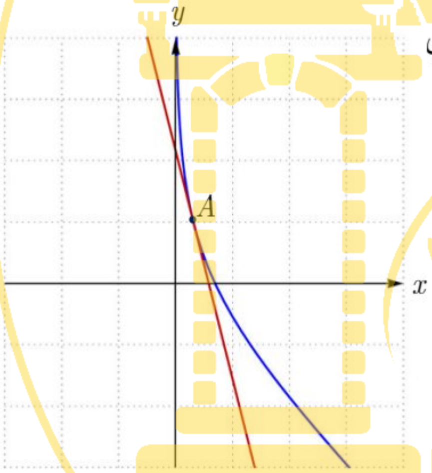
حيث يقع خطّه البياني تحت المحور $xx'$ عند $1^-$ ويقع فوق المحور $xx'$ عند $1^+$ .

وهذا ينسجم فقط مع الرسمة الموجودة في الخيار $D$ .

---

9) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $]0,+\infty[$ والمرسوم في الشكل المجاور :

المستقيم $d$ مماس للخط $C$ في النقطة $A$ التي فاصلتها $a$ عندئذٍ $f'(a)$ تساوي




| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $e$ | $B$ | $e-1$ |
| $C$ | $e-2$ | $D$ | $-e-1$ |

التبرير

نلاحظ أنّ المماس $d$ هو خط نازل من اليسار إلى اليمين فهو متناقص

أي ميله سالب أي $f'(a) < 0$ . فالخيار الوحيد الذي يحقّق ذلك هو الخيار $D$

أي $f'(a) = -e-1$ . أمّا جميع الخيارات الباقية تجعل $f'(a) > 0$ وهذا تناقض .

---

10) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = \sin^3 x^2$ . عندئذٍ $f'(x)$ تساوي .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $6x\cos x^2 - 6x\cos^3 x^2$ | $B$ | $3\sin^2 x^2 \cdot \cos x^2$ | $C$ | $6x\sin^2 x^2 - 6x\sin^3 x^2$ | $D$ | $\cos^3 x^2$ |

التبرير $f(x) = \sin^3 x^2$

$$f'(x) = 3\sin^2 x^2 (2x)(\cos x^2)$$

ومنه $f'(x) = 3(\sin^2 x^2)(2x)(\cos x^2) = 6x\sin^2 x^2 \cos x^2$

نلاحظ أنّ الجواب الأخير غير موجود في الخيارات المقترحة فنتابع

$$f'(x) = 6x\sin^2 x^2 \cos x^2 = 6x(1-\cos^2 x^2)\cos x^2$$

ومنه $f'(x) = 6x\cos x^2 - 6x\cos^3 x^2$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

11) ليكن $f$ تابعاً معرّفاً على مجالٍ $I$ و $a \in I$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | إذا غيّر $f'(x)$ إشارته عند $x = a$ كانت $f(a)$ قيمة حدية محلياً . | $B$ | إذا لم يغيّر $f'(x)$ إشارته عند $x = a$ عندئذٍ $f(a)$ ليست قيمة حديّة محلياً . |
| $C$ | إذا كان $f$ اشتقاقياً عند $a$ و $f(a)$ قيمة حديّة محلياً كانت $f'(a) = 0$ . | $D$ | إذا كان $f$ اشتقاقياً على $I$ و $f'(a) = 0$ و $f'(x)$ يغيّر إشارته عند $x = a$ كانت $f(a)$ قيمة حدية محلياً . |

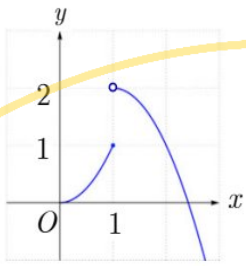
التبرير

لندقّق في الخيار $A$ : نلاحظ في رسمة الخط البياني لتابعٍ $f$

$f'(x)$ يغيّر إشارته عند $x = 1$ من الموجب إلى السالب .

ولكن $f(1) = 1$ ليست قيمة حدية محلياً .

فالخيار $A$ خاطئ .

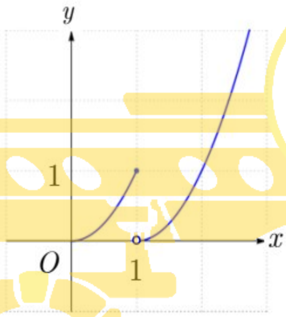



لندقّق في الخيار $B$ : نلاحظ في رسمة الخط البياني لتابعٍ $f$ .

$f'(x)$ لم يغيّر إشارته عند $x = 1$

مع ذلك $f(1) = 1$ قيمة كبرى محلياً .

فالخيار $B$ خاطئ .



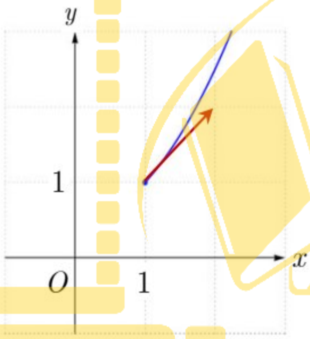

لندقّق في الخيار $B$ : نلاحظ في رسمة الخط البياني لتابعٍ $f$ .

نلاحظ أنّ $f$ اشتقاقي عند $x = 1$ و $f(1)$ قيمة حدية محلياً

ولكن $f'(1) = 1 \neq 0$ .

فالخيار $C$ خاطئ .

مما سبق نستنتج أنّ $D$ هو الخيار الصحيح .




---

12) ليكن $f$ و $g$ تابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$ ويحقّقان : $g(-2) = 4$ و $g'(-2) = 3$ و $f'(4) = 5$ .

عندئذٍ $(f \circ g)'(-2)$ يساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | $B$ | 4 | $C$ | 5 | $D$ | 15 |

التبرير

$(f \circ g)'(-2) = g'(-2)f'(g(-2)) = 3 \cdot f'(4) = 3 \times 5 = 15$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

13) ليكن $f$ التابع المعيّن بالعلاقة : $f(x) = \ln(\sin x) + \ln(\cos x)$ . عندئذٍ $f'(x)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $2\tan 2x$ | $B$ | $2\cot(2x)$ | $C$ | $\sin 2x$ | $D$ | $\cos 2x$ |

التبرير

$f(x) = \ln(\sin x) + \ln(\cos x)$

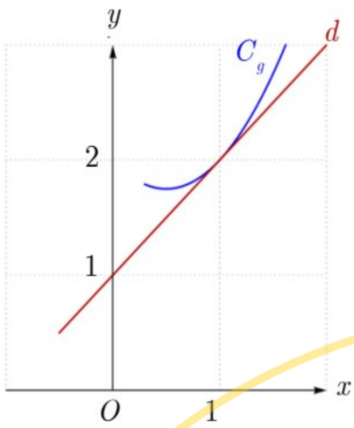
$f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \dfrac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot(2x)$ . فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

14) ليكن $C_g$ الخط البياني للتابع $g$ الاشتقاقي على $\mathbb{R}$ والمستقيم $d$ مماس للخط $C_g$ عند $x = 1$ والمرسومين جانباً :

وليكن $f$ تابعاً يحقّق العلاقة : $f(2x-1) = x \cdot g(x) - 3$

عندئذٍ $f'(1)$ تساوي




| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $2$ | $B$ | $\frac{3}{2}$ |
| $C$ | $\frac{5}{2}$ | $D$ | $3$ |

**التبرير**

$f(2x-1) = x \cdot g(x) - 3$

لنشتق طرفي المساواة السابقة :

$(2) \times f'(2x-1) = 1 \cdot g(x) + g'(x) \cdot x$

نعوّض $x = 1$ في المساواة السابقة : $(2) \times f'(1) = g(1) + g'(1) \times 1$

ولكن $g(1) = 2$

لإيجاد $g'(1)$ نلاحظ أنّ المماس للخط $C_g$ في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ يمر بالنقطتين $(1,2)$ و $(0,1)$

$$m = \frac{2-1}{1-0} = 1 = g'(1)$$

ومنه : $(2) \times f'(1) = 2 + 1 \times 1$

وبالتالي : $f'(1) = \frac{3}{2}$ . فالخيار الصحيح هو $B$ .

---

15) ليكن $f$ التابع المعرّف وفق العلاقة : $f(x) = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\cos x)$ . عندئذٍ $f'(x)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $0$ | $B$ | $\sin^3(\cos x)$ | $C$ | $\cos^3 x$ | $D$ | $\tan^3(\cos x)$ |

**التبرير**

$f(x) = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\cos x) = 1$

أي $f$ تابعٌ ثابت ومنه $f'(x) = 0$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

16) ليكن التابعان $f$ و $g$ ، خطّاهما البيانيان $C_f$ و $C_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 1$

معادلته $y = 2x - 3$ . ولنعرّف التابع $h$ وفق العلاقة : $h(x) = \frac{2f^2(x)}{g(x)}$ . عندئذٍ $h'(1)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $4$ | $B$ | $-4$ | $C$ | $0$ | $D$ | $2$ |

**التبرير**

لمّا كان $C_f$ و $C_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ معادلته $y = 2x - 3$

كان $f(1) = g(1) = 2(1) - 3 = -1$

و $f'(1) = g'(1) = 2$

$$h(x) = \frac{2f^2(x)}{g(x)}$$

$$h'(x) = \frac{4f(x)f'(x)g(x) - g'(x) \cdot 2f^2(x)}{g^2(x)}$$

ومنه $h'(1)=\dfrac{4f(1)f'(1)g(1)-g'(1)\cdot 2f^2(1)}{g^2(1)}$

$h'(1)=\dfrac{4(-1)(2)(-1)-(2)\cdot 2(-1)^2}{(-1)^2}=4$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

17) لتكن المتتالية $(u_n)$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n=f(n)$ . التابع $f$ الذي يمكن أنْ يحددّها هو

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| $f(x)=\sqrt{10-x}$ | $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ | $f(x)=\sqrt{2x+1}$ | $f(x)=e^{\ln(1-x^2)}$ |

**التبرير** نحن نعلم أنّ تعريف المتتالية : هي تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ أو أية مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط $\{n_0,n_0+1,n_0+2,\cdots\}$ حيث $n_0$ عدد طبيعي معطى . و مستقره $\mathbb{R}$ .

لذلك عندما تكون المتتالية $(u_n)$ معرّفة كحد صريح للدليل $n$ أي من الشكل $u_n=f(n)$ كان يجب على التابع $f$ أنْ يكون معرّفاً على مجالٍ من النمط $[A,+\infty[$ .

لندقّق في الخيار $A$ : $f(x)=\sqrt{10-x}$

$f$ معرّف على المجال $]-\infty,10]$ . فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : $f(x)=\sqrt{16-x^2}$

$f$ معرّف على المجال $[-4,4]$ . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $C$ : $f(x)=\sqrt{2x+1}$

$f$ معرّف على المجال $[-\frac{1}{2},+\infty[$ . فالخيار $C$ صحيح .

أمّا الخيار $D$ : $f(x)=e^{\ln(1-x^2)}$

$f$ معرّف على المجال $[-1,1]$ . فالخيار $D$ خاطئ .

---

18) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة التدريجية : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ . التابع $f$ الذي يمكن أنْ يحددّها هو

A

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

B

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

C

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $4$ |

D

| $x$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**التبرير** حتى يحقّق $f$ العلاقة التدريجية يجب أن يتحقّق الشرطين :

- ❐ $u_0\in D_f$ .
- ❐ أياً تكن $x\in D_f$ كان $f(x)\in D_f$ (أي المستقر الفعلي للتابع $f$ يجب أنْ يكون محتوى في مجموعة التعريف $D_f$ )

لندقّق في الخيار $A$ : نلاحظ أنّ $u_0=2\in D_f=]-\infty,3[$

ولكن $f(x)\in]-\infty,+\infty[\not\subset]-\infty,3[$ . فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : نلاحظ أنّ $u_0 = 2 \notin D_f = ]2,+\infty[$ . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $C$ : نلاحظ أنّ $u_0 = 2 \in D_f = [-2,5]$

و $f(x) \in [-1,4] \subseteq [-2,5]$ . فالخيار $C$ صحيح .

أمّا الخيار $D$ : نلاحظ أنّ $u_0 = 2 \in D_f = ]1,+\infty[$

ولكن $f(x) \in ]-\infty,+\infty[ \not\subset ]1,+\infty[$ . فالخيار $D$ خاطئ .

---

19) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ . **<u>واحدٌ من العبارات الآتية خاطئ :</u>**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | إذا كانت $u_{n+1} - u_n > 0$ أياً تكن $n \geq 0$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً . | $B$ | إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 0$ أياً تكن $n \geq 0$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناوبة بالإشارات. |
| $C$ | إذا كانت $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ أياً تكن $n \geq 0$ كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . | $D$ | إذا كان $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ أياً كانت $n \geq 0$ . كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة |

**التبرير** نلاحظ أنّ الخيار $C$ هو الخيار الوحيد الخاطئ لأنّه لم يوضع شرط بأنّ حدود المتتالية موجبة تماماً $u_n > 0$ .
وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

20) لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ . **<u>واحدٌ من العبارات الآتية خاطئة هي :</u>**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A$ | إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدتين كانت المتتالية $(u_n + v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . | $B$ | إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدتين كانت المتتالية $(u_n \cdot v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . |
| $C$ | إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة و $u_n \neq 0$ كانت $(\frac{1}{u_n})_{n\geq 0}$ متناقصة . | $D$ | إذا كان $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة كانت المتتالية $(\sqrt{u_n})_{n\geq 0}$ متزايدة . |

**التبرير** الخيار $B$ هو الخيار الوحيد الخاطئ : لأنّه مثلاً :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = n - 1$ نلاحظ أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$متزايدة .

لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $v_n = \frac{-1}{n+1}$ . نلاحظ أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة .

أمّا المتتالية $(u_n \cdot v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n \cdot v_n = \frac{-n+1}{n+1}$ نلاحظ أنّ $(u_n \cdot v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

حيث جداء ضرب متتاليتين متزايدتين أو متناقصتين أو أحدهما متزايدة والأخرى متناقصة لا يعني شيئاً .

---

21) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$ . عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متزايدة | $B$ | متناقصة | $C$ | ثابتة | $D$ | متناقصة بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 10$ . |

**التبرير** $u_n = 3 - \frac{1}{n^2+1}$

المتتالية $n \mapsto n^2 + 1$ متزايدة ومنه $n \mapsto \frac{1}{n^2+1}$ متناقصة وبالتالي $n \mapsto -\frac{1}{n^2+1}$ متزايدة

وأخيراً $3-\dfrac{1}{n^2+1}$ $n\mapsto$ متزايدة . أي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . فالخيار الصحيح هو $A$ .

22) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n=\dfrac{n^2}{n!}$ . عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متزايدة | $B$ | متناقصة | $C$ | ثابتة | $D$ | ليست مطردة |

التبرير

$$u_n=\frac{n^2}{n!}$$

$$u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}-\frac{n^2}{n!}$$

ومنه $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}\cdot n!}-\dfrac{n^2}{n!}$

وبالتالي $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(n+1)}{n!}-\dfrac{n^2}{n!}=\dfrac{-n^2+n+1}{n!}$

نلاحظ أنّ إشارة $u_{n+1}-u_n$ من إشارة $-n^2+n+1$

فندرس إشارة المقدار $-x^2+x+1$ فنعدمه $-x^2+x+1=0$

ومنه $x^2-x-1=0$ وبالتالي

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(1)(-1)=5$

إمّا $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ | $\cdots 0,1\cdots$ | $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ | $\cdots 2,3\cdots$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

نلاحظ أنّ $-n^2+n+1<0$ عندما $n\geq 2$

أي $u_{n+1}-u_n<0$ عندما $n\geq 2$ .

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة بدءاً من الحد $n_0=2$ .

ولكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ليست مطردة لأنّها لا تحقّق تعريف الاطراد أياً تكن $n\geq 0$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

**<u>طريقة ثانية :</u>** $u_0=0$ و $u_1=1$ و $u_2=\dfrac{4}{2}=2$ و $u_3=\dfrac{9}{6}=\dfrac{3}{2}$ فالمتتالية ليست مطردة .

23) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n=n^2+\cos(2\pi n)$ . عندئذٍ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | متزايدة | $B$ | متناقصة | $C$ | ثابتة | $D$ | ليست مطردة |

التبرير

$$u_n=n^2+\cos(2\pi n)$$

نحن نعلم أنّ $\cos(2\pi n)=\cos 0=1$ ومنه

$$u_n=n^2+1$$

وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة . فالخيار الصحيح هو $A$ .

24) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = n^2 + (-1)^n n$

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | متناقصة تماماً | B | متناقصة | C | متزايدة تماماً | D | متزايدة |

التبرير $u_n = n^2 + (-1)^n n$

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (-1)^{n+1}(n+1) - n^2 - (-1)^n n$$

ومنه $u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 - n^2) + (-1)^{n+1}(n+1) + (-1)^{n+1} n$

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n + 1 - n^2) + (-1)^{n+1}((n+1) + n)$$

$$u_{n+1} - u_n = (2n+1) + (-1)^{n+1}(2n+1) = \underbrace{(2n+1)}_{>0}\underbrace{(1 + (-1)^{n+1})}_{\geq0} \geq 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

25) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق العلاقة : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$ . عندئذٍ $u_3$ يساوي

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{5}$ | B | $\frac{1}{3}$ | C | $\frac{8}{15}$ | D | $\frac{47}{60}$ |

التبرير

$u_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{35+12}{60} = \frac{47}{60}$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

## التحليل 2:

26) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $e^{\frac{1}{x}} > 2 - e^2$ هي

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\varnothing$ | B | $]0, +\infty[$ | C | $\mathbb{R}$ | D | $\mathbb{R}^*$ |

التبرير $e^{\frac{1}{x}} > 2 - e^2$

عدد سالب تماماً $>$ عدد موجب تماماً .

المتراجحة السابقة محقّقة دوماً أياً تكن $x$ تنتمي إلى مجموعة تعريف حلول المتراجحة ومنه $x \in \mathbb{R}^*$ .

---

27) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $e^x(e^x - 3) \leq 3(e^x - 3)$ هي

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\mathbb{R}$ | B | $\mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$ | C | $\{\ln 3\}$ | D | $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ |

التبرير

$$e^x(e^x - 3) \leq 3(e^x - 3)$$

$$e^x(e^x - 3) - 3(e^x - 3) \leq 0$$

$$(e^x - 3)(e^x - 3) \leq 0$$

ومنه $(e^x - 3)^2 \leq 0$

والمتراجحة محقّقة عندما $e^x - 3 = 0$ ومنه $e^x = 3$ وبالتالي $x = \ln 3$ أي $S = \{\ln 3\}$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

28) إنّ مجموعة حلول المعادلة : $2e^x - 3e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{0,-2\ln 2\}$ | $D$ | $\{0,\ln 4\}$ | $C$ | $\{0,\ln 2\}$ | $B$ | $\{0\}$ | $A$ |

التبرير $2e^x - 3e^{\frac{x}{2}} + 1 = 0$

هذه معادلة من الدرجة الثانية بالمجهول $e^{\frac{x}{2}}$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(1) = 1$$

إمّا $e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{2(2)} = 1$

ومنه $e^{\frac{x}{2}} = 1$ وبالتالي $\dfrac{x}{2} = 0$

ومنه $\boxed{x = 0}$

أو $e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{2(2)} = \dfrac{1}{2}$

وبالتالي $e^{\frac{x}{2}} = \dfrac{1}{2}$

ومنه $\dfrac{x}{2} = \ln\dfrac{1}{2}$ وبالتالي $\boxed{x = -2\ln 2}$ .

فمجموعة الحلول هي : $S = \{-2\ln 2, 0\}$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

29) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $3e^x - e^{4-x} - 2e^2 < 0$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $]2,+\infty[$ | $D$ | $]-\infty,2[$ | $C$ | $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ | $B$ | $\mathbb{R}\setminus\{\ln 2\}$ | $A$ |

التبرير $3e^x - e^{4-x} - 2e^2 < 0$

$$3e^x - e^4 \times e^{-x} - 2e^2 < 0$$

لنضرب طرفي المتراجحة بـِ $e^x > 0$ :

$$3e^{2x} - e^4 - 2e^2 \cdot e^x < 0$$

$$3e^{2x} - 2e^2 \cdot e^x - e^4 < 0$$

هذه متراجحة من الدرجة الثانية بالمجهول $e^x$

$$3e^{2x} - 2e^2 \cdot e^x - e^4 = 0$$

$$\Delta = (-2e^2)^2 - 4(3)(-e^4) = 4e^4 + 12e^4 = 16e^4$$

$$\sqrt{\Delta} = 4e^2$$

إمّا $e^x = \dfrac{2e^2 + 4e^2}{2(3)} = e^2$

أو $e^x = \dfrac{2e^2 - 4e^2}{2(3)} = -\dfrac{e^2}{3}$

ومنه $3e^{2x} - 2e^2 \cdot e^x - e^4 = 3(e^x - e^2)(e^x + \dfrac{e^2}{3}) = (e^x - e^2)(3e^x + e^2)$

فالمتراجحة المفروضة تكافئ : $(e^x - e^2)(3e^x + e^2) < 0$

نقسّم طرفي المتراجحة السابقة على $(3e^x + e^2) > 0$

ومنه $e^x - e^2 < 0$ وبالتالي

$e^x < e^2$ ومنه $x < 2$ فحلول المتراجحة المفروضة $x \in ]-\infty, 2[$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

30) إنّ مجموعة حلول المتراجحة : $\frac{-2}{1+e^{-2x}} > -e^x$ هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\mathbb{R}$ | $B$ | $]-\infty, 0[$ | $C$ | $\mathbb{R}^*$ | $D$ | $]0, +\infty[$ |

**التبرير** $\frac{-2}{1+e^{-2x}} > -e^x$

لنضرب طرفي المتراجحة بِ $1 + e^{-2x} > 0$

ومنه $-2 > -e^x(1 + e^{-2x})$

$-2 > -e^x - e^{-x}$

نضرب طرفي المتراجحة بِ $e^x > 0$ فنجد $-2e^x > -e^{2x} - 1$

$e^{2x} - 2e^x + 1 > 0$

ومنه $(e^x - 1)^2 > 0$

المتراجحة محققة عندما $e^x - 1 \neq 0$ أي $e^x \neq 1$ ومنه $x \neq 0$ .

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي $x \in \mathbb{R}^*$ . فالخيار الصحيح هو الخيار $C$ .

---

31) $f$ تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}$ . **واحدٌ من الخيارات الآتية خاطئة :**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | أياً تكن $x \in [0, +\infty[$ يكون $f'(x) \geq 0$ | $B$ | $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ | $C$ | $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim_{x\to+\infty} f(x)$ | $D$ | $f$ متناقص تماماً على $]-\infty, 0]$ |

**التبرير** $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}$

لندقّق في الخيار $A$ : $f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = \frac{-4e^x(e^{2x}+1) - 2e^{2x}(-4e^x)}{(e^{2x}+1)^2}$

ومنه $f'(x) = \frac{-4e^{3x} + -4e^x + 8e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{3x} - 4e^x}{(e^{2x}+1)^2}$

وبالتالي $f'(x) = \frac{4e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(e^{2x} - 1)$ فالخياران $A$ و $D$ صحيحان .

لندقّق في الخيار $B$ : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ . فالخيار $B$ صحيح .

فالخيار الخاطئ الوحيد هو $C$ والتبرير : $f(x) = 1 + \frac{4e^x}{e^{2x}+1} = 1 + \frac{4e^x}{e^{2x}(1+\frac{1}{e^{2x}})}$ ومنه

$f(x) = 1 + \dfrac{4}{e^x(1+\dfrac{1}{e^{2x}})}$ .

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ أي $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ . فالخيار الخاطئ الوحيد هو $C$ . وهو الخيار الذي يجب أنْ نختاره .

---

32) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$

إنّ $f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ويعطى $f'(x)$ بالصيغة

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $-2e^{-2x+3}$ | B | $e^{-2x+3}$ | C | $(-2x+3)e^{-2x+3}$ | D | $(-2x-1)e^{-2x+3}$ |

التبرير $f(x) = (x+1)e^{-2x+3}$

$$f'(x) = 1e^{-2x+3} - 2e^{-2x+3}(x+1) = e^{-2x+3}(1-2x-2) = e^{-2x+3}(-1-2x)$$

فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

33) ليكن $f$ التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = x \cdot e^{-x}$ . إنّ $f(\ln 2)$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\ln\sqrt{2}$ | B | $-2\ln 2$ | C | $2\ln 2$ | D | $\ln 2$ |

التبرير $f(x) = x \cdot e^{-x}$

$f(\ln 2) = \ln 2 \cdot e^{-\ln 2} = \ln 2 \dfrac{1}{e^{\ln 2}} = \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$ .فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

34) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x) = e^{5x+2}$

إنّ معادلة المماس للخط $C$ في نقطة منه ترتيبها 1 هي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $y = 5x+1$ | B | $y = 5x-1$ | C | $y = 5x+3$ | D | $y = \dfrac{1}{5}x+1$ |

التبرير $f(x) = e^{5x+2}$

لنوجد فاصلة نقطة التماس التي ترتيبها 1 فنحل المعادلة $f(x) = 1$

$$e^{5x+2} = 1$$

ومنه $5x+2 = 0$ ومنه $x = \dfrac{-2}{5}$

$$y = f'(\frac{-2}{5})(x+\frac{2}{5}) + f(-\frac{2}{5})$$

$$f'(x) = 5 \cdot e^{5x+2}$$

$$f'(\frac{-2}{5}) = 5$$

ومنه $y = 5(x+\dfrac{2}{5}) + 1 = 5x+3$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

---

35) $f$ تابعٌ معرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ | B | $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ | C | أياً تكن $x\in\mathbb{R}$ <br> $f'(x)<0$ | D | أياً تكن $x\in\mathbb{R}$ <br> $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{\infty}{\infty}$ لإزالتها نكتب

$$f(x)=\frac{2e^x}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}=\frac{2}{1+\frac{1}{e^x}}$$

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ . فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $C$ :

$f'(x)=\dfrac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x)}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ . فالخيار $C$ خاطئ .

أمّا الخيار $D$ : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ لنضرب البسط والمقام بـ $e^{-x}$ .

$f(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ . فالخيار الصحيح هو $D$ .

---

36) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}+2$

| A | | B | | C | | D | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $y=x+2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty,0[$ | B | $y=x+2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع فوق المقارب على المجال $]-\infty,0[$ | C | $y=x-2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty,0[$ | D | $y=x-2$ مقارب للخط $C$ في جوار $-\infty$ و $C$ يقع فوق المقارب على المجال $]-\infty,0[$ |

**التبرير**

لندقّق في الخيار $A$ : $f(x)-y_\Delta=\dfrac{x}{e^x+1}+2-(x+2)$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{x}{e^x+1}-x=\frac{x-xe^x-x}{e^x+1}=\frac{-xe^x}{e^x+1}$$

بما أنّ $\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^x)=0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ ومنه

$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$ . ومنه المستقيم $\Delta$ الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل للخط $C$ في جوار $-\infty$ .

ولكن $f(x)-y_\Delta$ من إشارة $-x$ ومنه $f(x)-y_\Delta>0$ عندما $x\in]-\infty,0[$ أي $C$ يقع فوق $\Delta$ على هذا المجال .

فالخيار $A$ خاطئ . والخيار الصحيح هو $B$ .

---

37) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln(e^{-x}+2)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | للخط $C$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$ معادلته $y=\ln 2$ | $B$ | للخط $C$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $+\infty$ معادلته $y=2$ | $C$ | للخط $C$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته $y=-x$ | $D$ | للخط $C$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ معادلته $y=x$ |

**التبرير** $f(x)=\ln(e^{-x}+2)$

لندقّق في الخيار $A$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لا يوجد مستقيم مقارب أفقي للخط $C$ في جوار $-\infty$ . فالخيار $A$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $B$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2$ فالمستقيم $y=\ln 2$ مقارب أفقي للخط $C$ في جوار $+\infty$ .

فالخيار $B$ خاطئ .

أمّا الخيارين $C$ و $D$ : يدلّان عن البحث عن مقارب مائل للخط البياني للخط $C$ في جوار $-\infty$ .

لذلك للسهولة : سنكتب التابع $f$ بالصيغة : $f(x)=\ln(e^{-x}(1+2e^{x}))$

ومنه $f(x)=\ln(e^{-x})+\ln(1+2e^{x})$

$$f(x)=-x+\ln(1+2e^{x})$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln(1+2e^{x}))=\ln 1=0$ .

فالمستقيم $y=-x$ مقارب مائل للخط $C$ في جوار $-\infty$ . فالخيار الصحيح هو $C$ . أمّا الخبار $D$ خاطئ .

---

38) ليكن $f$ التابع المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ نكتب $f(x)$ بالصيغة :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ | $B$ | $f(x)=\dfrac{1}{x}\times e^{\sqrt{x}}$ | $C$ | $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$ | $D$ | $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}}{x\cdot e^{\sqrt{x}}}$ |

**التبرير** لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

نكتب $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$ . فالخيار الصحيح هو $C$ .

وإذا أردنا أنْ نكمل الحل $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

بفرض $t=\sqrt{x}$

عندما $x\to+\infty$ سيكون $t\to+\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^{t}}{t^2}=+\infty$ .

---

39) $f$ تابع معرّف على $\mathbb{R}$ وفق العلاقة : $f(x)=(ax+b)e^x$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. جدول تغيّراته هو الآتي :

| $x$ | $-\infty$ | $6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $e^6$ | $\searrow$ |

عندئذٍ $a+b$ تساوي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $6$ | $B$ | $5$ | $C$ | $4$ | $D$ | $3$ |

التبرير نلاحظ أنّ $f(6)=e^6$

ومنه $(6a+b)e^6=e^6$

$6a+b=1 \cdots\cdots (1)$

من الواضح أنّ $f(6)=e^6$ قيمة حدية محلياً و $f$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ومنه $f'(6)=0$ .

ومنه $f'(x)=ae^x+e^x(ax+b)$

$f'(x)=e^x(ax+b+a)$

لدينا $f'(6)=0$ ومنه $e^6(6a+a+b)=0$

ومنه $7a+b=0\cdots(2)$

أصبح لدينا المعادلتين :

$$\begin{cases} 6a+b=1 & (1) \\ 7a+b=0 & (2) \end{cases}$$

بالطرح $-a=1$ ومنه $\boxed{a=-1}$ .

نعوّض في $(2)$ فنجد $-7+b=0$ ومنه $\boxed{b=7}$ . وبالتالي $a+b=6$ . فالخيار الصحيح هو $A$ .

---

40) ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق : $f(x)=\begin{cases} x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1) : x\neq 0 \\ 0 \quad\quad : x=0 \end{cases}$ .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $f$ اشتقاقي عند $0$ اليمين | $B$ | $f$ ليس اشتقاقياً عند $0$ من اليسار | $C$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ | $D$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ |

التبرير لندقّق في الخيار $A$ :

نصطنع تابع معدّل التغيّر للتابع $f$ عند الصفر وهو

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{x}=e^{\frac{1}{x}}-1$ المعرّف على $\mathbb{R}^*$

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ ومنه $f$ ليس اشتقاقياً عند $x=0$ . فالخيار $A$ خاطئ .

أمّا الخيار $B$ : $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0-1=-1=f'(0^-)$ ومنه $f$ اشتقاقي عند الصفر من اليسار . فالخيار $B$ خاطئ .

لندقّق في الخيار $C$ : عندما $x\neq 0$ يكون $f(x)=x\cdot(e^{\frac{1}{x}}-1)$ ومنه $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\dfrac{1}{x}}$

بفرض $t=\dfrac{1}{x}$ عندما $x\to+\infty$ سيكون $t\to 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^t-1)}{t}=1$ . فالخيار $C$ خاطئ . والخيار الصحيح هو $D$ .

.............................................انتهت الأجوبة.............................................