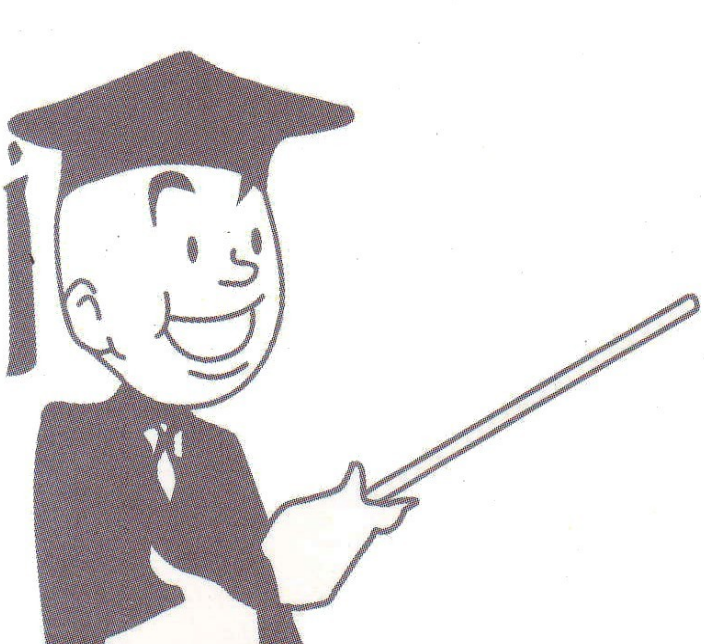
تم بيـع أكثر من ٣٠ مليـون نسخـة من ملخصات شـوم!

الاحتمالات والإحصاء

ملخصات شوم إيزي

- يغطى جميع أساسيات المنهج
- يحتوى على الكثير من المسائل المحلولة حلاً كاملاً
- أفضل وسيلة دقيقة وموجزة لمساعدة الطالب على التفوق والنجاح



د. شبيجل
د. شيلر
د. سرينيڤاسان

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م.
مصر

www.ibtesamh.com/vb

بسم الله الرحمن الرحيم

الاحتمالات والإحصاء

تاليف

د. موراى شبيجل

د. جون شيلر

د. ألو سرينيڤاسان

الملخص والمراجع

د. مايك ليڤان

ترجمة

د. / محمود على أبو النصر

أستاذ ورئيس قسم الإحصاء والرياضة والتأمين

كلية التجارة ـ جامعة عين شمس

د. / مصطفى جلال مصطفى

أستاذ الإحصاء والرياضة

كلية التجارة ـ جامعة عين شمس

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م

مصر

حقوق النشر

Probability and Statistics

by

Murray Spiegel - John Schiller

Alu Srinivasan

الدار الدولية للاستثمارات الثقافية

8 إبراهيم العرابى ـ النزهة الجديدة ـ مصر الجديدة ـ القاهرة ـ ج.م.ع.

ص . ب : 5599 هليوبوليس غرب/ القاهرة ـ تليفون : 6222105/6221944 فاكس : 6221944 (00202)

بريد إلكترونى : ihci@link.net

رقم الإيداع : 2003/9478

I.S.B.N: 977-282-142-7

كتب أخرى فى
سلسلة ملخصات شوم إيزى

ملخص شوم إيـزى : الفيـزياء العامة

ملخص شوم إيـزى : الفيـزياء التطبيقية

ملخص شوم إيـزى : الكهرومغناطيسيات

ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العامة

ملخص شوم إيـزى : الكيمياء العضوية

ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا

ملخص شوم إيـزى : البيولوچيا الجزيئية وبيولوچيا الخلية

ملخص شوم إيـزى : الوراثة

ملخص شوم إيـزى : الجبر العام

ملخص شوم إيـزى : الجبر الأساسى

ملخص شوم إيـزى : الإحصاء

ملخص شوم إيـزى : حساب التفاضل والتكامل

ملخص شوم إيـزى : مبادئ التفاضل والتكامل

ملخص شوم إيـزى : مرجع رياضى لأهم القوانين والجداول

ملخص شوم إيـزى : حساب المثلثات

ملخص شوم إيـزى : الرياضيات المنفصلة

ملخص شوم إيـزى : علم الهندسة

ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة C++

ملخص شوم إيـزى : البرمجة بلغة JAVA

ملخص شوم إيـزى : أساسيات الكهرباء

ملخص شوم إيـزى : مبادئ الاقتصاد

ملخص شوم إيـزى : الإحصاء التجارى

ملخص شوم إيـزى : مبادئ المحاسبة

ملخص شوم إيـزى : مقدمة فى علم النفس

موراى ر. شبيجيل حصل على ماجستير العلوم فى الفيزياء، وذكتوراه الفلسفة فى الرياضيات من جامعة كورنيل. وتولى عدة مناصب فى كل من جامعة هارفارد، وجامعة كولومبيا وفى أواك ريدج ومعهد رنسلير للفنون التطبيقية، كما كان مستشاراً فى الرياضيات لعدة شركات كبرى. وكان آخر منصب له هو أستاذ ورئيس قسم الرياضيات فى معهد رنسلير للفنون التطبيقية، مركز هارتفورد للدراسات العليا. وكان مهتمًا بمعظم فروع الرياضيات خاصة تلك التى تتناول تطبيقات فى مشاكل الفيزياء والهندسة. وله العديد من المقالات البحثية بالإضافة إلى أربعة عشر كتابًا فى مختلف الموضوعات الرياضية.

جون ج. شيلر يعمل أستاذًا مساعدًا للرياضيات فى جامعة تمبل. وقد حصل على درجة دكتوراه الفلسفة من جامعة بنسلفانيا، ونشر أوراقًا بحثية فى مجال مسطحات ريمان، والرياضيات المتقطعة، ورياضيات البيولوجى. كما شارك فى تأليف العديد من المراجع فى الرياضيات.

ر. ألو سرينيڤاسان يعمل أستاذًا للرياضيات بجامعة تمبل. وقد حصل على دكتوراه الفلسفة من جامعة ولاية واين وله مؤلفات فى الاحتمالات والإحصاء.

مايك ليڤان يعمل أستاذًا مساعدًا ورئيسًا لبرنامج فى الرياضيات بجامعة ترانسيلفانيا فى لكسنجتون، كنتاكى. وقد حصل على البكالوريوس من جامعة كنتاكى الشرقية كما حصل على درجتى الماجستير ودكتوراه الفلسفة فى الرياضة التطبيقية من جامعة أوبرن. كما أنه نشر بمفرده ـ أو بالمشاركة العديد من الأوراق البحثية كما أنه الفائز عام 2000 بجائزة بنجهام للامتياز فى التدريس.

المحتويات

الفصل الأول
أساس الاحتمال
Basic Probability

في هذا الفصل:

- ✔ التجارب العشوائية
- ✔ فراغات العينة
- ✔ الأحداث
- ✔ مفهوم الاحتمال
- ✔ بديهيات الاحتمالات
- ✔ بعض النظريات الهامة على الاحتمال
- ✔ تعيين الاحتمالات
- ✔ الاحتمال الشرطى
- ✔ نظريات حول الاحتمال الشرطى
- ✔ الأحداث المستقلة
- ✔ نظرية أو قاعدة بيز
- ✔ تحليل التوافيق
- ✔ المبادئ الأساسية للعد

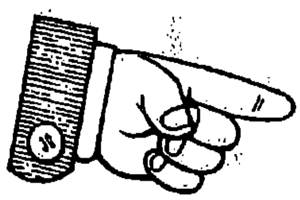
✔ التباديل

✔ التوافيق

✔ معاملات ذات الحدين

✔ تقريب ستيرلنج للمضروب $n!$

التجارب العشوائية Random Experiments



نحن متعودون على أهمية التجارب فى مجالات العلوم والهندسة. فالتجريب مفيد فى الاستخدام لافتراض أن إجراء التجارب تحت شروط متقاربة سوف يعطى نتائج متساوية. وفى هذه الظروف سوف نكون قادرين على تحديد قيم المتغيرات التى تؤثر على نتائج التجربة.

وعلى أى حال، فى بعض التجارب لا نتمكن من تحديد قيم بعض المتغيرات وبالتالى سوف تتغير النتائج من إجراء تجربة إلى أخرى مع أن معظم الشروط تظل كما هى. وتوصف هذه التجارب بالتجارب العشوائية:

مثال.1.1: عند رمى زهرة طاولة، فالنتيجة التى سوف تحدث تكون أحد الأرقام التالية $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Example 1.1. If we toss a die, the result of the experiment is that it will come up with one of the numbers in the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

فراغات العينة Sample Spaces

تتكون المجموعة S من كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويطلق عليها اسم فراغ العينة Sample Space، ويطلق على كل نتيجة نقطة من العينة Sample Point. وغالبًا ما يوجد أكثر من فراغ للعينة يمكن

أن يصف نتائج التجربة، ولكـــن يوجـد فـى العـادة واحـد فقـط يعطـى المعلومات الأكثر.

مثال 1.2.: إذا تم رمى زهرة طاولة، فإن فراغ العينة يكون {1، 2، 3، 4، 5، 6} بينما يوجد آخر يعطى { زوجى، فردى }. ومن الواضح أن الأخـير غير كافى ليحدد، مثلاً ما إذا كان الناتج يقبل القسمة على 3.

Example 1.2. If we toss a die, then one sample space is given by {1, 2, 3, 4, 5, 6} while another is {even, odd}. It is clear, however, that the latter would not be adequate to determine, for example, whether an outcome is divisible by 3.

وإذا كان من الممكن تمثيل فراغ العينة بيانيًا فإنه من الأفضل استخدام الأرقام بدلاً من الحروف ما أمكن ذلك:

ويسمى فراغ العينة المحدد Finite Sample إذا كان به عـدد محـدود من النقط. أما إذا كان به عدد غير محدود من النقط والتى يمكـن عدّهـا فيسمى بفراغ العينة الغير محدود أو اللانهائى Countably Infinite Sample Space. أما إذا وجد به عدد لا نهائى من النقط لا يمكـن عـدّه داخـل فترة على محور x مثل $0 \le x \le 1$ فإنه يسمى بفـراغ العينـة اللانـهائى Noncountably Infinite Sample Space. وفراغ العينة المحدود Finite أو المحدود الممكن عده Countably Finite يطلق عليه عـادة فـراغ العينـة المنفصل Discrete Sample Space، بينما اللانهائى الـذى لا يمكـن عـدّه يسمى بفراغ العينة الغير منفصل Nondiscrete Sample Space.

مثال 1.3.: فراغ العينة الناتج من رمى زهرة نرد يعطى فــراغ عينـة منفصـل. بينما اختيار أى رقم، ليس من الضرورى رقم صحيح بين الواحــد والعشـرة يعطى فراغ عينة غير منفصل.

Example 1.3. The sample space resulting from tossing a die yields a discrete sample space. However, picking *any* number, not just integers, from 1 to 10, yields a nondiscrete sample space.

الأحداث Events

الحدث هو مجموعة جزئية A Subset من مجموعــة فـراغ العينـة S؛ أى أنه مجموعة من النتائج الممكنة. فإذا كان ناتج التجربــة يمثـل عنصـرًا فى الحدث A فإننا نقول أن الحدث A يتحقق. والحدث الـذى يتكـون من نقطة واحدة من فراغ العينـة S يسـمى بـالحدث البسـيط Simple أو الحدث الأوَّلى Elementary Event والأحداث الخاصة حينما يكـون هـو S نفسها فإنه يمثل الحدث المؤكد Sure or Certain Event حيث أنه مــن الضرورى أن يحدث عنصر من S، بينما المجموعة الفارغـة $\varnothing$ Empty set والتى تسمى بالحدث المستحيل Impossible Event لأن أى عنصر فى $\varnothing$ لا يمكن حدوثه.

وباستخدام عمليات المجموعات على الأحداث فى S فإننـا نحصـل على أحداث أخرى في S. وكمثال إذا كانت A، B تمثل أحداثًا، فإن:

1. $A \cup B$ تمثل الحدث « حدوث A أو B أو الاثنين معـا ». وتسمى $A \cup B$ اتحاد الأحداث A و B "Union".
2. $A \cap B$ تمثل الحدث « حدوث الحدثين A، B فـى نفس الوقـت ». وتسمى $A \cap B$ تقاطع الأحداث A و B "Intersection".
3. A' تمثل الحدث "not A" أى مكمل الحدث A "Complement of A".
4. $A - B = A \cap B'$ وتمثل الحدث "A وليس B وخاصة $A' = S - A$.

وإذا كانت الأحداث A، B تمثـل أحداثًـا منفصلـة، أى أن $A \cap B = \varnothing$ فإننـا نقـول فـى الغـالب أن الأحـداث متبـاعدة بالتبـادل Mutually Exclusive. وهذا يعنى أن الأحداث لا يمكن أن تحـدث مـع بعضـها فى نفس الوقت. ونقول أن مجموعة الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تكـون أحداثًا منفصلة إذا كان كل اثنين منهما يمثلان أحداثًا منفصلة.

مفهوم الاحتمال The Concept of Probability

يوجد فى الغالب فى أى تجربة عشوائية عدم تـأكد مـن أن حـدث معيـن سـوف يحـدث أم لا. وكمقيـاس للفرصـة Chance أو للاحتمـال Probability يمكن التوقع بحدوث الحدث بتحديد رقم يقع بيـن الصفـر والواحد الصحيح. فإذا كنا متأكدين من حدوث الحدث فإننا نقول إن الاحتمال يكون 100% أو واحد صحيح. وإذا كنا متأكدين أن الحدث لن يحدث فإننا سنقول إن احتمال حدوثه صفر. وإذا كـان الاحتمـال مساويًا $\frac{1}{4}$ فإننا نقول إنه يوجـد فرصـة تمثـل 25% لحـدوث الحـدث، وإن احتمال عدم حدوثه يساوى 75%؛ أى أن مكمل عكـس الحـدوث هو 75% إلى 25% أو 3 إلى 1.

ويوجد أسلوبان لتقدير احتمال حدوث حدث ما.

1. **الأسلوب الكلاسيكى Classical Approach**: إذا كـان يمكـن حـدوث الحدث بطرق عددها h من الطرق الكلية والتـى عددهـا n. وكلـها متساوية، فإن احتمال حدوث الحدث يساوى h/n.
2. **الأسلوب التكرارى Frequency Approach**: إذا كـان بعـد تكـرار التجربة n مرة، وكانت n كبيرة جدًا وتكرر حدوث الحدث h مـرة منها، كـان احتمـال حـدوث الحـدث يسـاوى h/n. ويسـمى هـذا الأسلوب بالأسلوب التجريبى أيضًا Empirical Probability.

وكلا الأسلوبين التقليدى والتكرارى له خلفيـة، فـالأقل يتمثـل فـى احتمالات الحـدوث المتسـاوية "Equally Likely" وهـى كلمـة غامضـة، والثانى يتمثل فى أن تكون n كبيرة وهى أيضًا تخضع للغمـوض، ومـن هنا قدم الرياضيون لنظرية الاحتمالات بعدد من البديـهيات Axiomatic Approach.

بديهيات الاحتمالات The Axioms of Probability

افترض أننا لدينا فراغ العينة S. إذا كانت S منفصلة Discrete فكل المجموعات الجزئية تتبع الأحداث والعكس صحيح. وإذا كانت S غير منفصلة Nondiscrete فإن مجموعات جزئية خاصة (تسمى مقيسة) تتبع الأحداث. لكل حدث A في الفئة C من الأحداث فإننا نلحق به رقم حقيقي $P(A)$، وتسمى P دالة الاحتمال Probability Function وتسمى $P(A)$ باحتمال حدوث الحدث The Probability of the Event وذلك بتحقق البديهيات الآتية:

البديهية الأولى: لكل حدث A في الفئة C يكون

$$P(A) \geq 0$$

البديهية الثانية: للحدث المؤكد S في الفئة C يكون

$$P(S) = 1$$

البديهية الثالثة: لأى عدد من الأحداث المتنافية بالتبادل Mutually Exclusive Event ($A_1, A_2, \ldots$ في الفئة) يكون

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

وفي حالة خاصة في حالة الأحداث المتنافية A_1، A_2 يكون

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

بعض النظريات الهامة على الاحتمال

Some Important Theorems on Probability

نظرية 1-1: إذا كانت $A_1 \subset A_2$ فإن

$$P(A_1) \leq P(A_2) \text{ and } P(A_2 - A_1) = P(A_1) - P(A_2) \qquad (1)$$

نظرية 1-2: لكل حدث A يكون،

$$0 \le P(A) \le 1 \qquad (2)$$

أى أن الاحتمال يكون بين الصفر والواحد الصحيح.

نظرية 1-3: للمجموعة الفارغة $\varnothing$ Empty Set

$$P(\varnothing) = 0 \qquad (3)$$

أى أن الحدث المستحيل يكون احتمال حدوثه مساويًا للصفر.

نظرية 1-4: إذا كانت A' تمثل مكمل الحدث A فإن

$$P(A') = 1 - P(A) \qquad (4)$$

نظرية 1-5: إذا كانت $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

وكانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ أحداثًا متنافية فإن

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \qquad (5)$$

نظرية 1-6: إذا كانت الأحداث B و A تمثل أى حدثين. فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (6)$$

وبصفة عامة إذا كان لدينا الأحداث A_1، A_2، A_3 فإن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

ويمكن التعميم على n من الأحداث.

نظرية 1-7: لأى حدثين A، B فإن

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') \qquad (7)$$

تعيين الاحتمالات Assignment of Probabilities

إذا تكون فراغ العينة S من عدد محدود من النتائج $a_1, a_2, \ldots, a_n$ فإن النظرية 1-5 تعطى

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1 \qquad (8)$$

حيث أن $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تمثل أحداثًا أولية بحيث $A_i = \{ a_i \}$

وهذا يعنى أنه يمكن اختيار أى أرقام غير سالبة للاحتمالات من هـذه الأحداث البسيطة حتى تتحقق المعادلة السابقة. وفى حالـة خاصـة إذا افترضنا تساوى الاحتمالات لكل الأحداث البسيطة. فإن

$$P(A_k) = \frac{1}{n} \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad (9)$$

وإذا كان الحدث A يحدث إذا تحقق h من الأحداث البسيطة فإن:

$$P(A) = \frac{h}{n} \qquad (10)$$

وهى تعادل الأسلوب الكلاسيكى للاحتمالات. ونحن نتبـع بـالطبع أسلوبًا آخر فى تحديد الاحتمالات مثل الأسلوب التكرارى.

وتحديد الاحتمـالات يتطلـب نمـوذج ريـاضى Mathematical Model يكون قد تم اختباره بنفس الطريقة فى المجالات الطبيعية والعلوم الأخـرى حتى يتحدد نجاحه.

تذكـر!

إن احتمال حدوث حدث معين لا بد وأن يكون بين الصفر والواحد الصحيح.

الاحتمال الشرطى Conditional Probability

إذا كـان لدينـا الحدثـان A، B. حيـث أن $P(A) > 0$ وكـان $P(B|A)$ يرمز لاحتمال حدوث B بشرط حدوث A. وحيث أن الحدث A معروف حدوثه، فإنه يعطى فراغ عينة جديد يحل محل فراغ العينة الأصلـى S.

وهذا يقودنا إلى التعريف

$$P(B|A) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad (11)$$

أو

$$P(A \cap B) \equiv P(A)P(B|A) \qquad (12)$$

وهذا يعنى أن احتمال حدوث الحدثين A و B معًا يكون مساويًا لاحتمال حدوث الحدث A مضروبًا فى احتمال حدوث B بشرط حدوث A. وتسمى $P(B|A)$ باحتمال حدوث B بشرط A، Conditional Probability of B Given A؛ أى أن B سوف يحدث بشرط حدوث A. ومن السهل إثبات أن الاحتمال الشرطى يحقق بديهيات الاحتمال السابقة.

نظريات حول الاحتمال الشرطى

Theorem on Conditional Probability

نظرية 1-8: لأى ثلاثة أحداث A_1, A_2, A_3 يكون لدينا

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \qquad (13)$$

أى أن احتمال الأحداث A_1, A_2, A_3 سويًا يكون مساويًا لاحتمال حدوث الحدث A_1 مضروبًا فى احتمال حدوث الحدث A_2، بشرط حدوث A_1 مضروبًا حتى احتمال حدوث الحدث A_3 بشرط حدوث الحدثين A_1، A_2 سويًا. ويمكن تعميم هذه النتيجة بسهولة على n حدث.

نظرية 1-9: إذا كان الحدث A سوف ينتج فى أحد الأحداث المتنافية فيما بينها الآتية $A_1, A_2, \ldots, A_n$، فإن

$$= P(A_1)P(A | A_1) + P(A_2)P(A | A_2) + \ldots + P(A_n)P(A | A_n) \qquad (14)$$

الأحداث المستقلة Independent Events

إذا كان $P(B|A) = P(B)$، وهـذا يعنـى أن حـدوث الحـدث B لا يتـأثر بحدوث أو عدم حدوث الحدث A. وبالتالى فإننا نقـول أن الأحـداث B، A تمثل أحداثاً مستقلة Independent Events. أى أن:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \qquad (15)$$

ونلاحظ أنه إذا تحققت هذه المعادلة فإننا نقول أن الحدثيـن A، B هما حدثان مستقلان.

ونقول أن الثلاثة أحداث A_1, A_2, A_3 هى أحداث مستقلة إذا كان كل حدثين مستقلين فيما بينهما. أى أن

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k) \; j \neq k \quad \text{حيث} \quad j,k = 1,2,3 \qquad (16)$$

وأيضًا

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \qquad (17)$$

لا بد أن تحدث هاتان الخاصيتان لكى يمكننا القول أن الأحداث A_1, A_2, A_3 هى أحداث مستقلة. واستقلال أكثر مـن ثلاثـة أحـداث يمكـن تعريفه بتعميم هذه النتيجة.

ملاحظة!

لكى يمكننـا اسـتخدام هـذه القـاعدة للضـرب يجـب أن تكـون كـل الأحداث مستقلة.

نظرية أو قاعدة بيز Bayes' Theorem or Rule

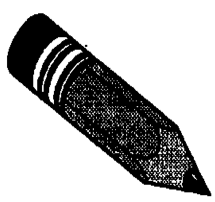
نفترض أننا لدينا الأحداث المتنافيـة فيمـا بينـها الآتيـة $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ويكون اتحادها يمثل فراغ العينة وأن أحدها لا بد وأن يحـدث. فإنـه إذا كان لدينا أى حدث A فسوف تكون لدينا النظرية الهامة الآتية:

نظرية 10-1 قاعدة بيز:

$$P(A_k \mid A) = \frac{P(A_k)P(A \mid A_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(A \mid A_j)} \tag{18}$$

وهذا يمكننا من إيجاد احتمالات حدوث الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ الممكن. ولهذا السبب فإن نظرية بيز غالبًا ما يشار إلى أنها نظرية على احتمال الأسباب A Theorem on the Probability of Causes.

تحليل التوافيق Combinatorial Analysis



يكون في كثير من الحالات عدد النقط في فراغ العينة ليس كبيرًا، ونكون في حاجة إلى عد نقط العينة حتى يمكننا إيجاد الاحتمال. وتنشأ المشاكل عندما نحتاج للعد وتوجد صعوبة في التطبيق. ومن هنا نقوم بتحليل التوافيق Combinational Analysis والتي يمكن أن تسمى بطرق حساب متقدمة A Sophisiticated Way of Counting.

المبادئ الأساسية للعد

Fundamental Principle of Counting

إذا كان من الممكن تحقيق شيء ما بطرق مختلفة عددها n_1، وتحقيق شيء آخر بطرق مختلفة عددها n_2،....، وأخيرًا يمكن تحقيق شيء k بطرق عددها n_k. فإن هذه الأشياء التي عددها k يمكن تحقيقها معًا طبقًا لأي ترتيب بطرق عددها $n_1 n_2 \ldots n_k$.

التباديل Permutations

افترض أننا لدينا n شيء مختلف ونريد ترتيب r منها في خط. وحيث أنه يمكن ترتيب الأول منها بطرق عددها n وترتيب الثاني بطرق عددها

$(n-1)$،...، وترتيب الأخير منها بطرق عددها $(n-r+1)$. وبمبدأ العد الأساسي السابق فإن عدد الترتيبات المختلفة لها جميعًا أو التباديل كما يشار إليها غالبًا يكون في الصورة:

$$ {}_nP_r = n(n-1)...(n-r+1) \qquad (19) $$

ويسمى التراتيب Arrangements أو التباديل Permutations والذي يمثل ضرب r من العوامل. ونسمي المقدار ${}_nP_r$ بعدد تباديل n من الأشياء تأخذ r مرة.

مثال 1.4.: نحتاج إلى أن يجلس 5 رجال و 4 نساء في صف بحيث تمثل المرأة المقاعد الزوجية. ما عدد طرق الترتيب الممكنة؟

Example 1.4. It is required to seat 5 men and 4 women in a row so that the women occupy the even places. How many such arrangements are possible?

يمكن إجلاس الرجال بطرق عددها ${}_5P_5$ والنساء بطرق عددها ${}_4P_4$ وحيث أنهم سوف يجلسون سويًا فإن عملية التراتيب الكلية لهم معًا

$$ = {}_5P_5\,,\ {}_4P_4 = 5!\ 4! = (120)(24) = 2880 $$

وفي الحالة الخاصة عند $r=n$ فإن

$$ {}_nP_n = n(n-1)(n-2)...1 = n! \qquad (20) $$

والتي تسمى مضروب n. n Factorial ويمكن أن تكتب التباديل ${}_nP_r$ على الشكل

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (21) $$

بدلالة المضروب. وعندما $n=r$ فإنه يمكن أن نستنتج أن $0!=1$ وهذا هو تعريف مضروب 0 أي $0!$.

افترض أن مجموعة تتكون من n شيء بحيث تكون مقسمة إلى النوع الأول n_1 (أي أنها لا تختلف فيما بينها)، n_2 تمثل النوع الثاني، ... n_k

النوع الأخير. بحيث أن $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. وبالتالى فإن عدد التباديل لهذه الأشياء هو:

$$ {}_{n}P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} \qquad (22) $$

التوافيق Combinations

فى حالة التباديل قد ركزنا اهتمامنا على تراتيب للأشياء. وكمثال فإن *abc*. وفى كثير من المشاكل نهتم فقط بالاختيار بدون الأخذ فى الاعتبار الترتيب. ويسمى هذا الاختيار بالتوافيق Combination. وكمثال لذلك فإن *abc* تكون هى *bca* أى نفس الاختيار.

والعدد الكلى لاختيار r شىء من n شىء (تسمى أيضًا توافيق n شىء تأخذ r فى المرة) ويرمز له بالرمز ${}_nC_r$ أو $\binom{n}{r}$ حيث

$$ \binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (23) $$

ويكتب أيضًا

$$ \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!} \qquad (24) $$

ومن السهل إثبات أن

$$ \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{or} \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r} \qquad (25) $$

مثال 1.5.: من 7 حروف ساكنة، 5 حروف متحركة كم عدد الكلمات التى يمكن تكوينها من 4 حروف ساكنة و 3 حروف متحركة؟ ليس من الضرورى أن يكون للكلمات معنى.

Example 1.5. From 7 consonants and 5 vowels, how many words can be formed consisting of 4 different consonants and 3 different vowels? The words need not have meaning.

اختيار الأربعة حروف الساكنة من 7 حروف يكون بطرق عددها ${}_7C_4$ وعـدد طرق اختيار ثلاثة حروف متحركة من خمسة حروف عددها ${}_5C_3$ ويمكن ترتيبها مع بعضها بطرق عددها ${}_7P_7 = 7!$ بالتالى فإن عدد الطرق هو:

$${}_7C_4 \cdot {}_5C_3 \cdot 7! = 35 \cdot 10 \cdot 5040 = 1,764,000$$

Binomial Coefficients معاملات ذات الحدين

تسمى الأرقام الناتجة من صيغة التوافيق بمعاملات ذات الحدين لأنـها تنبع من مفكوك ذات الحدين

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n \qquad (26)$$

تقريب ستيرلنج للمضروب $n!$

Stirling's Approximation to $n!$

حيثما تكون n كبيرة، فإن إيجاد $n!$ يكون غير عمليًا وفى هذه الحالـة نلجأ إلى التقريب ذى الشكل التالى:

$$n \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \qquad (27)$$

حيث أن .... $e = 2.71828$ والـذى يعتمـد علـى اللوغـاريتم الطبيعـى. والرمز ~ يعنى أن النسبة فى الطرف الأيسر إلى الطرف الأيمـن تقـترب من الواحد عندما تقترب n من مالانهاية.

وللحاسـبات التكنولوجيـة أثـر علـى قيمـة صيغـة تقريـب ستيرلنج للحسابات الرقمية ولكنه يظل صالحًا لتقدير التقريبـات النظريـة (انظـر الملحق A).

الفصل الثانى
الإحصاء الوصفى
Descriptive Statistics

فى هذا الفصل:

- ✔ الإحصاء الوصفى
- ✔ مقاييس النزعة المركزية
- ✔ الوسط
- ✔ الوسيط
- ✔ المنوال
- ✔ مقاييس التشتت
- ✔ التباين والانحراف المعيارى
- ✔ المئين
- ✔ المدى الربيعى
- ✔ الالتواء

الإحصاء الوصفى Descriptive Statistics

عندما نعطى تقريرًا عن مجموعة من البيانات، فإنه من المفيد أن نصفها بلغة شائعة لأكبر عدد من الناس. ولذلك فإنه تم إيجاد مصطلحات تساعدنا على ذلك. وسوف نناقش طرقًا تصف المركز،

التشتت، والشكل الناتج عند إعطاء فئة من البيانات.

مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

مقياس النزعة المركزية يعطى قيمة مفردة تمثل كل القيم المنتجة أو تتوسط كل القيم الناتجة عن تجربة ما. ويمثل الوسط الحسابى Arithmetic Mean المقياس الرئيسى للنزعة المركزية. وبينما يكون الوسط هو الأكثر استخدامًا فإنه يوجد مقاييس أخرى يمكن استخدامها، وهى الوسيط Median والمنوال Mode.

ملاحظة!

توجد طرق متعددة لقياس النزعة المركزية لمجموعة من البيانات ومنها الوسط الحسابى والوسيط والمنوال. ولكل منها مزاياه وعيوبه اعتمادًا على البيانات والهدف منها.

إذا كان لدينا مجموعة من n من الأرقام، $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإن الوسط والذى يرمز له دائمًا بالرمز $\bar{x}$ أو μ يكون

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \qquad (1)$$

مثال 2.1.: اعتبر مجموعة الأرقام التالية:

Example 2.1. Consider the following set of integers:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

الوسط الحسابى $\bar{x}$ لهذه المجموعة هو

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = 5$$

الوسيط Median

الوسيط هـو تلك القيمة x بحيث أن $P(X \le x) \ge \frac{1}{2}$ و $P(X \ge x) \ge \frac{1}{2}$ وبلغة أخرى يكون الوسيط القيمة التى يكون نصـف القيـم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ أكـبر منها ونصفها أصغر منها.

مثال 2.2.: اعتبر مجموعة الأرقام

Example 2.2. Consider the following set of integers:

$$S = \{1, 6, 3, 8, 2, 4, 9\}$$

فإذا أردنا إيجاد الوسيط، فإننا نريد إيجاد القيمة x بحيـث يكـون نصف عدد القيم قبل x يكون مساويًا لنصف عدد القيـم الآخـر بعـد x. فنبدأ أولاً بترتيب القيم

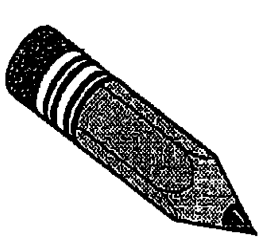
$$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

ونلاحظ أن الرقم 4 هو الرقم الذى قبله ثلاثة أرقام وبعده ثلاثة أرقام. وبالتالى فإن 4 هو الوسيط. وفى بعض الأحيان من الممكـن ألا يكـون الوسيط أحد الأرقام المشاهدة.

مثال 2.3.: اعتبر مجموعة الأرقام الآتية:

Example 2.3. Consider the following set of integers:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$$



وحيث أن الأرقام مرتبة أصلاً فإنه من الملاحـظ أنـه ليس لدينا قيمة واحدة متوسط للمجموعة وبـدلاً مـن ذلك يـوجـد لدينـا رقمـان متوسطان وهمـا 4، 6

وبالتالى فإن الوسيط يكون رقمًا بين 4 و 6. فى أغلب الأحيان هو متوسط الرقمين ويكون الوسيط مساويًا

$$\frac{4+6}{2}=5$$

وبصفة عامة، إذا كان لدينا n قيمة مرتبة وكانت n عدداً فرديًا، فإن وسيط البيانات يقع بالضبط فى المنتصف. ويمكن إيجاد موقعه فى المجموعة باستخدام العلاقة $\frac{n+1}{2}$. أما إذا كانت n عدداً زوجيًا فإن الوسيط يكون متوسط القيمتين اللتين تقعان فى متوسط المجموعة المرتبة. ويكون موقعهما $\frac{n}{2}$، $\frac{n}{2}+1$.

المنوال Mode

المنوال لمجموعة البيانات يمثل القيمة التى تحدث غالبًا؛ وبلغة أخرى التى يكون لها أكبر احتمال حدوث. وفى بعض الأحيان يكون لدينا أكثر من قيمة لها أكبر احتمال حدوث، ففى هذه الحالة يكون للتوزيع منوالان Bimodal إذا كانت قيمتين أو ثلاثة Trimodal أو أكثر Multimodal على الترتيب.

مثال 2.4.: اعتبر التالى الناتج من رمى زهرة بها عشرة جوانب:

Example 2.4. Consider the following rolls of a ten-sided die:

$$R = \{2, 8, 1, 9, 5, 2, 7, 2, 7, 9, 4, 7, 1, 5, 2\}$$

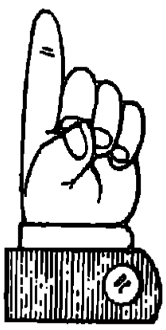
فنجد أن الرقم الأكثر تكراراً هو الرقم 2. فقد ظهر 4 مرات. ولذلك فإن المنوال للمجموعة R هو الرقم 2.

لاحظ أنه إذا ظهر الرقم 7 مرة أخرى فيكون عدد مرات ظهوره هو 4 مرات. وفى هذه الحالة يكون لدينا منوالان هما 7 و 2.

مقاييس التشتت Measures of Dispersion

اعتبر المجموعتين التاليتين من الأرقام الصحيحة:

$$S = \{5, 5, 5, 5, 5, 5\} \text{ and } R = \{0, 0, 0, 10, 10, 10\}$$



فإذا حسبنا الوسط الحسابى لكل منهما نجده 5 مع أنهما مجموعتان من البيانات مختلفتان اختلافًا تامًا. وبالتالى نحتاج إلى إحصاء وصفى بجانب مقياس النزعة المركزية والذى سوف نسميه مقياس التشتت. وسوف نقيس التشتت Dispersion أو الانتشار Scatter للقيم حول الوسط الحسابى للبيانات. فإذا كانت البيانات مركزة حول الوسط الحسابى فإن المقياس يكون صغيرًا؛ بينما إذا كانت البيانات مبعثرة بعيدًا عن الوسط فإن المقياس سوف يكون كبيرًا. والمقياسان اللذان نستخدمهما عادة هما التباين والانحراف المعيارى.

التباين والانحراف المعيارى

Variance and Standard Deviation

كمية ذات أهمية كبيرة فى الاحتمالات والإحصاء تسمى التباين. فالتباين والذى نرمز له بالرمز σ^2 لمجموعة من الأرقام $x_1, x_2, \ldots, x_n$ يمكن إيجاده كالتالى:

$$\sigma^2 = \frac{[(x_1-\mu)^2 + (x_2-\mu)^2 + \cdots + (x_n-\mu)^2]}{n} \qquad (2)$$

والتباين يمثل رقم غير سالب. والجذر التربيعى الموجب للتباين يسمى بالانحراف المعيارى.

مثال 2.5.: أوجد التباين والانحراف المعيارى للمجموعة التالية من درجات اختبار.

Example 2.5. Find the variance and standard deviation for the following set of test scores:

$$T = \{75, 80, 82, 87, 96\}$$

وحيث أننا نوجد التشتت حول الوسط الحسابى فإننا نحتاج لإيجاد الوسط.

$$\mu = \frac{75+80+82+87+96}{5} = 84$$

وباستخدام الوسط يمكن إيجاد التباين.

$$\sigma^2 = \frac{[(75-84)^2+(80-84)^2+(82-84)^2+(87-84)^2+(96-84)^2]}{5}$$

وذلك يؤدى إلى التالى:

$$\sigma^2 = \frac{[(81)+(16)+(4)+(9)+(144)]}{5} = 50.8$$

وبالتالى فإن التباين لهذه المجموعة من الدرجات هو 50.8 ولإيجاد الانحراف المعيارى والذى نرمز له بالرمز σ، فإننا نوجد الجذر التربيعى للتباين

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{50.8} = 7.1274118$$

والتباين والانحراف المعيارى بصفة عامة أكثر الكميات استخدامًا لقياس التشتت ويوجد على أى حال مقاييس أخرى يمكن الإشارة إليها.

✓ يجب أن تعلم

إنه من الممكن القسمة على $(n-1)$ عند إيجاد التباين بدلاً من القسمة على n. ورغم أن النتيجة سوف تختلف إلا أنه عندما تكبر n فإن الفروق سوف تكون صغيرة جدًا.

Percentiles المئين

يكون من الأوفق فى الغالب تقسيم مجموعة البيانات الترتيبية باستخدام الأحداث الرأسية لكى نحدد النسبة الأقل من نقطة معينة بالنسبة إلى إجمالى البيانات الكلية. والقيم التى تقابل كل مساحة تسمى قيم المئين Percentile Values، واختصاراً المئين Percentiles. وكمثال نسبة الدرجات التى تقع أقل من x_α هى α؛ أى كمية الدرجات أقل من $x_{0.10}$ أو 10% ونسمى $x_{0.10}$ على أنها 10th Percentile أو العشير. والمثال الآخر هو الوسيط. حيث أن نصف نقاط البيانات تقع أقل منه فيكون هو المئين الخمسين 50th ويرمز له بالرمز $x_{0.50}$ (أو العشير الخامس 5th Decile).

والمئين الخامس والعشرون 25th Percentile يمثل وسيط القيم قبل الوسيط. كما أن المئين الخامس والسبعين 75th Percentile يمثل وسيط القيم بعد الوسيط. ويسمى المئين 25th Percentile 25 بالربيع الأول 1st Quartile. كما أن المئين 75th Percentile 75 يسمى بالربيع الثالث 3rd Quartile. وبالتالى يعتبر الوسيط هو الربيع الثانى 2nd Quartile.

Interquartile Range المدى الربيعى

ومقياس آخر من مقاييس التشتت هو المدى الربيعى Interquartile Range. وهو عبارة عن الفرق بين الربيع الثالث والربيع الأول. وبعبارة أخرى

$$x_{0.75} - x_{0.25}$$

مثال 2.6.: أوجد المدى الربيعى لمجموعة البيانات التالية لدرجات الجولف.

Example 2.6. Find the interquartile range from the following set of golf scores:

$$S = \{67, 69, 70, 71, 74, 77, 78, 82, 89\}$$

وحيث أننا لدينا 9 نقط وأن البيانات مرتبة تصاعديًا فإن الوسيط يقع فى $\frac{9+1}{2}$ أى عند الموقع 5. أى أن الوسيط = القيمة رقم 5 أى يساوى 74.

والربيع الأول $x_{0.25}$ يقع قبل الوسيط بين الأربعة بيانات الأولى. ويكون متوسط القيمة الثانية والقيمة الثالثة؛ أى أن $x_{0.25} = 69.5$.

كما أن الربيع الثالث $x_{0.75}$ يمثل متوسط القيمة السابعة والثامنة. حيث أنه يمثل وسيط الأربعة قيم بعد الوسيط فيكون $x_{0.75} = 80$.

وبالتالى يكون فى النهاية المدى الربيعى مساويًا

$$x_{0.75} - x_{0.25} = 80 - 69.5 = 11.5$$

ومقياس أخير للتشتت يستحق الذكر هو نصف المدى الربيعى Semi-interquartile Range، وكما يدل الاسم فإنه بكل بساطة يساوى نصف المدى الربيعى.

مثال 2.7: أوجد نصف المدى الربيعى للبيانات السابقة

Example 2.7. Find the semiinterquartile range for the previous data set.

$$\frac{1}{2}(x_{0.75} - x_{0.25}) = \frac{1}{2}(80 - 69.5) = 5.75$$

Skewness الالتواء

وأخر شيء فى الإحصاء الوصفى يمكن أن نشير إليه فى هذا الباب هو شكل توزيع البيانات. فمنها ما يكون متماثلاً Symmetrical Data أو أن تكون البيانات موزعة بانتظام أو أن يكون عدد البيانات فى قيمها العليا أكبر من عددها فى قيمها الصغرى.

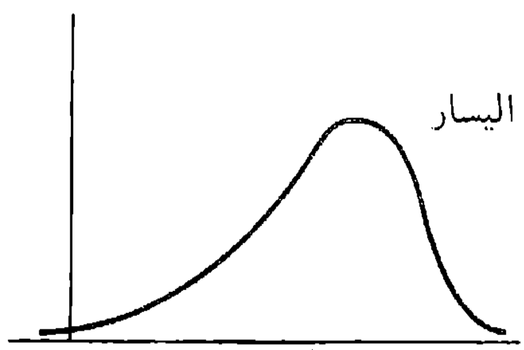
وغالبًا ما تكون البيانات غير متماثلة حول أى قيمة ولكن بدلاً من ذلك قد تكون القيم الكبيرة أكثر قليلاً أو أقل قليلاً. وفى الحالة التى يكون

فيها عدد البيانات الكبيرة أكبر يكون الالتواء لليمين Skewed to the Right.

شكل 2-1

Skewed to the Right التواء ناحية اليمين

وفى الحالة التى يكون فيها عدد البيانات الأقـل أكـثر فإننـا نقـول أن البيانات ملتوية ناحية اليسار Skewed to the Left.



شكل 2-2

Skewed to the Left التواء ناحية اليسار

هـام

إذا وجد التواء فى مجموعة البيانات ناحيـة اليميـن أو اليسـار فإنـه توجد فرصة كبيرة أن تكون هناك قيمة شاذة Outlier فى مجموعة بياناتك. والقيم الشـاذة تؤثـر بشـدة علـى قيمـة الوسـط الحسـابى والانحـراف المعيارى لمجموعة البيانات وبالتالى فإذا كان توزيع البيانات ملتويًا فيجب أن نفكر فى مقاييس أخرى لقياس النزعـة المركزيـة والتشتت بدلاً من الوسط الحسابى والانحراف المعيارى.

الفصل الثالث

المتغيرات العشوائية المنفصلة

Discrete Random Variables

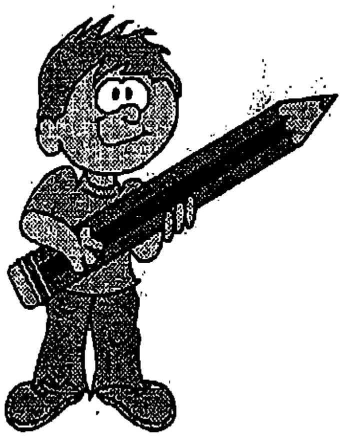
في هذا الفصل.

- ✔ المتغيرات العشوائية
- ✔ التوزيع الاحتمالى المنفصل
- ✔ دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية
- ✔ دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية المنفصلة
- ✔ القيم المتوقعة
- ✔ التباين والانحراف المعيارى
- ✔ بعض النظريات على التوقع
- ✔ بعض النظريات على التباين

المتغيرات العشوائية Random Variables

افترض أننا لكل نقطة فى فراغ العينة نخصص عــدد مـا. فإننـا نحصـل على دالة Function معرفة على فراغ العينة. وتسمى هذه الدالــة بـالمتغير العشوائى Random Variable (أو المتغـير التصـادفى Stochastic Variable) أو بالتحديد دالـة المتغـــير Random Function (أو الدالـة التصادفيـة Stochastic Function). ويرمز لها عادة بـالحروف الكبـيرة مثـل X أو Y.

وفى العموم يمثل المتغير العشوائى ظاهرة طبيعية أو هندسية أو أى معنى آخر.



ويأخذ المتغير العشوائى عدداً محدوداً Finite Number أو عدد غير محدود يمكن عدّه Countably Infinite Number من القيم ويسمى فى هذه الحالة متغيرًا عشوائيًا منفصلاً Discrete Random Variable وحينما يأخذ المتغير عدداً لانهائيًا من القيم لا يمكن عدّه يسمى بالمتغير العشوائى المتصل أو الغير منفصل Nondiscrete Random Variable.

التوزيع الاحتمالى المنفصل

Discrete Probability Distribution

اعتبر X متغيرًا عشوائيًا منفصلاً وافترض أنه يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$ مرتبة طبقًا لترتيب معين. وتأخذ القيم بالاحتمالات الآتية:

$$P(X = x_k) = f(x_k) \quad k = 1,2,... \qquad (1)$$

ومن الأفضل وضع دالة الاحتمال والتى نشير إليها بالتوزيع الاحتمالى probability distribution فى الصورة:

$$P(X = x) = f(x) \qquad (2)$$

لكل $x = x_k$ وتكون المعادلة السابقة مساوية للصفر لأى فئة أخرى x.

حيث $x, f(x) = 0$.

وبصفة عامة $f(x)$ تكون دالة احتمال إذا كان:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x} f(x) = 1$

ويؤخذ هذا المجموع على كل قيم x الممكنة.

مثال .3.1: عند رمى قطعة عملة مرتين. وكـانت X. تمثـل عـدد الصـور الممكن الحصول عليها. فإنه لكل نقطة فى فراغ العينة يرتفق رقم لـ X. كالتالى

Example 3.1. Suppose that a coin is tossed twice. Let X represent the number of heads that can come up. With each sample point we can associate a number for X as follows:

نقطة العينة	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

الآن يمكننا إيجاد دالة الاحتمال التـى تتبـع المتغيـر العشوائـى X وبافتراض أن قطعة العملة متوازنة. فإن

$$P(HH)=\frac{1}{4},\ P(HT)=\frac{1}{4},\ P(TH)=\frac{1}{4},\ P(TT)=\frac{1}{4}$$

وبالتالى

$$P(X=0)=P(TT)=\frac{1}{4}$$

$$P(X=1)=P(HT\cup TH)=P(HT)+P(TH)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=P(HH)=\frac{1}{4}$$

وبالتالى فإن دالة الاحتمال يمكن الحصول عليها كالتالى

x	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية

Distribution Functions for Random Variables

تعرف دالة التوزيع التراكميــة The Cumulative Distribution أو اختصــاراً دالة التوزيع The Distribution Function للمتغير العشوائى X كالتالى

$$F(x) = P(X \le x) \qquad (3)$$

حينما تكون x أى رقم حقيقى. أى أن $-\infty \le x \le \infty$

أى أن دالة التوزيع التراكمية تحــدد احتمــال أن التغـيز العشوائــى يأخذ أى قيمة أقل من أو تساوى x.

ولدالة التوزيع الخصائص التالية:

1. تكون $F(x)$ دالة غير تناقصية بمعنى أن $F(x) \le F(y)$ إذا كانت $x \le y$.
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ، $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ تكون مستمرة مــن اليمين؛ بمعنى أن $\lim_{x \to 0^+} F(x+h) = F(x)$ لكل قيم x.

دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية المنفصلة

Distribution Functions for Discrete Random Variables

دالة التوزيع للمتغير العشوائى X يمكن الحصول عليها من دال الاحتمال باستخدام التالى، لكل x فى المدى $(-\infty, \infty)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \cdots f(x_n) & x_n \le x < \infty \end{cases} \qquad (4)$$

من الواضح أن دالة الاحتمال للمتغير العشوائى المنفصل يمكن الحصول عليها من دالة التوزيع إذا قمنا بعمل التالى

$$f(x) = F(x) - \lim_{u \to x^-} F(u) \qquad (5)$$

القيم المتوقعة Expected Values

يوجد مبدأ هام فى الإحصاء والاحتمالات وهو التوقع الرياضى Mathematical Expectation والقيمة المتوقعة Expected Value أو بالاختصار التوقع Expectation للمتغير العشوائى. بالنسبة للمتغيرات العشوائية المنفصلة X والتى تأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$ فإن توقع X يعرف كالتالى

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + \cdots + x_n P(X = x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j P(X = x_j) \qquad (6)$$

أو إذا كان $P(x = x_j) = f(x_j)$

$$E(X) = x_1 f(x_1) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j) = \sum_{x} x f(x) \qquad (7)$$

حيث أن الجمع الأخير يؤخذ على كل قيم x. لاحظ أنه عندما تكون كل الاحتمالات متساوية فإن

$$E(X) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \qquad (8)$$

والتى هى ببساطة الوسط الحسابى للقيم $x_1, x_2, ..., x_n$

مثال 3.2.: افترض وجود لعبة تستخدم فيها زهرة طاولة واحدة من المفترض أنها متوازنة. ويكسب اللاعب 20$ إذا ظهر الوجه 2، و40$ إذا ظهر الوجه 4، ويخسر 30$ إذا ظهر الوجه 6، بينما لا يخسر ولا يكسب إذا ظهر أى وجه آخر. فأوجد توقع المبلغ المتوقع الذى يكسبه.

Example 3.2. Suppose that a game is to be played with a single die assumed fair. In this game a player wins \$20 if a 2 turns up; \$40 if a 4 turns up; loses \$30 if a 6 turns up; while the player neither wins nor loses if any other face turns up. Find the expected sum of money to be won.

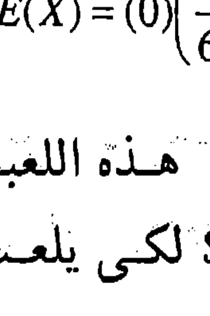
نفترض أن X يمثـل المتغـير العشوائـى الـذى يعطـى المبلـغ الـذى يكسبه أو يخسره. والمبالغ التى يكسبها عندمـا تظـهر الزهـرة الأرقـام 1, 2, 3, 4, 5, 6 هى $x_1, x_2, ..., x_6$ على الـترتيب. بينمـا الاحتمـالات التـى يفترض أن يتحقق بها ذلك هى $f(x_1), f(x_2), ... f(x_6)$ وتكون دالة الاحتمال للمتغير X هى

x	0	+20	0	+40	0	−30
$f(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

ولذلك فإن القيمة المتوقعة أو التوقع هو

$$E(X) = (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (20)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (40)\left(\frac{1}{6}\right) + (0)\left(\frac{1}{6}\right) + (-30)\left(\frac{1}{6}\right) = 5$$

وهذا يعنى أن اللاعب سوف يتوقع أن يكسب \$5. فى هـذه اللعبـة المتوازنة أو العادلة فإن اللاعب سوف يتوقع أن يدفـع \$5 لكـى يلعـب هذه اللعبة.



تذكر!

تمثل القيمة المتوقعة للمتغير العشوائى المنفصل مقياس النزعة المركزية!

التباين والانحراف المعيارى

Variance and Standard Deviation

سبق وأن ذكرنا أن توقع المتغير العشوائى المنفصل غالبًا يمثل متوسطه ونرمز له بالرمز μ. وكما لاحظنا فى الباب الثانى وجود كمية أخرى هامة فى الاحتمال والإحصاء هى التباين. فإذا كانت X تمثل متغيرًا عشوائيًا يأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بدالة الاحتمال $f(x)$. فإن علاقة التباين هى

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{j=1}^{n}(x_j-\mu)^2 f(x_j) = \sum_{x}(x-\mu)^2 f(x) \qquad (9)$$

وفى حالة خاصة عندما تكون كل الاحتمالات متساوية. فإن

$$\sigma_X^2 = \frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n} \qquad (10)$$

وهو التباين لمجموعة n من الأرقام تأخذ القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$

مثال 3.3.: أوجد التباين للعبة فى المثال السابق (3.2.).

Example 3.3. Find the variance for the game played in Example 3.2.

قد كانت دالة الاحتمال كالتالى

x_j	0	+20	0	+40	0	−30
$f(x_j)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

كما تتذكر أن التوقع كان $\mu = 5$ وبالتالى فإن التباين نحصل عليه كالتالى:

$$\sigma_X^2 = (0-5)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(20-5)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(0-5)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(40-5)^2\left(\frac{1}{6}\right)$$
$$+(0-5)^2\left(\frac{1}{6}\right)+(-30-5)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2750}{6} = 458.33\bar{3}$$

وبالتالى يمكن إيجاد الانحراف المعيارى بإيجاد الجذر التربيعى للتباين

$$\sigma_X = \sqrt{458.33\bar{3}} = 21.40872096$$

لاحظ أنه إذا كانت X لها اتجاهات معينة أو وحدات قياس مثل السنتيمتر (cm)، فإن تباين X يأخذ الوحدات cm^2 بينما يأخذ الانحراف المعيارى نفس وحـدات المتغـير X؛ أى cm. ولهذا السبب يستخدم الانحراف المعيارى غالبًا.

بعض النظريات على التوقع

Some Theorems on Expectation

نظرية 1-3: إذا كانت c تمثل أى ثابت. فإن

$$E(cX) = cE(X) \qquad (11)$$

نظرية 2-3: إذا كانت X، Y أى متغيرين عشوائيين. فإن

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \qquad (12)$$

نظرية 3-3: إذا كانت X، Y أى متغيرين عشوائيين مستقلين. فإن

$$E(XY) = E(X)E(Y) \qquad (13)$$

ملاحظة!

تتحقق هذه الخصائص لأى نوع من المتغيرات العشوائيـة، وليس فقط للمتغيرات العشوائية المنفصلة. سوف نختبر نوع آخـر من المتغيـرات العشوائية فى الباب القادم.

بعض النظريات على التباين

Some Theorems on Variance

نظرية 3-4:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad (14)$$

حيث أن $\mu = E(x)$.

نظرية 3-5: إذا كانت c تمثل ثابت. فإن

$$Var(cX) = c^2 Var(X) \qquad (15)$$

نظرية 3-6: الكمية $E[(X-a)^2]$ تكون أقل ما يمكن حينما

$$a = \mu = E(X) \qquad (16)$$

نظرية 3-7: إذا كانت X، Y أى متغيرين عشوائيين مستقلين. فإن

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \quad \text{or} \quad \sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y \qquad (17)$$

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) \quad \text{or} \quad \sigma^2_{X-Y} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y$$

لا تنس

أن هذه النظريات تنطبق على التباين وليس على الانحراف المعيارى. فتأكد أنك لا بد وأن تحول الانحرافات المعيارية إلى التباينات قبل تطبيق هذه النظريات.

ويمكن بسهولة تعميم النظرية (3-7) على أكثر من متغيرين عشوائيين مستقلين. فالتباين لمجموع عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة يكون مساويًا لمجموع تبايناتها.

وتنطبق هذه النظريات أيضًا على المتغيرات العشوائية الغير منفصلة كما تنطبق على المتغيرات المنفصلة.

مثال .3.4: اعتبر X، Y تمثل الأحداث العشوائية المستقلة عند رمى زهرة طاولة متوازنة. فاحسب القيمة المتوقعة للمتغير $X+Y$، وتباين $X+Y$.

Example 3.4. Let X and Y be the random independent events of rolling a fair die. Compute the expected value of $X + Y$, and the variance of $X + Y$.

دالة الاحتمالات لكل من X و Y على حدة هى

x_j	1	2	3	4	5	6
$f(x_j)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

ومنها يمكن إيجاد

$$\mu_X = \mu_Y = 3.5 \qquad \text{و} \qquad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 2.9166\bar{6}$$

وتوجد طريقتين لحساب $E(X+Y)$ وتباين $Var(X+Y)$

ففى الطريقة الأولى نقوم بحساب التوزيع الاحتمالى للمتغير $X+Y$ ثم نوجد التوقع والتباين منها. لاحظ أن القيم الممكنة للمتغير $X+Y$ هى $2, 3, ..., 11, 12$

$x+y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x+y)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

ثم نوجد التوقع كما يلى:

$$E(X+Y)=(2)\left(\frac{1}{36}\right)+(3)\left(\frac{2}{36}\right)+\cdots+(11)\left(\frac{2}{36}\right)+(12)\left(\frac{1}{36}\right)=\frac{252}{36}=7$$

ويتبع ذلك أن التباين يكون:

$$Var(X+Y)=\left[(2-7)^2\left(\frac{1}{36}\right)+\cdots(12-7)^2\left(\frac{1}{36}\right)\right]=\frac{210}{36}=5.833\bar{3}$$

أما الطريقة الثانية فاستخدام النظرية (3-2) والنظرية (3-7) يجعل ذلك أكثر سهولة.

فباستخدام نظرية (3-2).

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=3.5+3.5=7.$$

وباستخدام نظرية (3-7)

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)=2.9166\bar{6}+2.9166\bar{6}=5.833\bar{3}$$

وحيث أن $X=Y$ فإنه يمكننا أيضًا إيجاد التوقع باستخدام نظرية (3-1):

$$E(X+Y)=E(X+X)=E(2X)=2[E(X)]=2(3.5)=7$$

وعلى أى حال لا يمكننا استخدام نظرية (3-5) لإيجاد التباين حيث أننا استخدمنا أصلاً نفس التوزيع للمتغير X، كما أن X ليست مستقلة عن نفسها. لاحظ أننا سوف نوجد التباين الخطأ إذا طبقنا هذه النظرية:

$$Var(X+X)=Var(2X)=\left(2^2\right)Var(X)=4Var(X)=11.66\bar{6}$$

الفصل الرابع
المتغيرات العشوائية المستمرة
Continuous Random Variables

فى هذا الفصل:

- ✔ المتغيرات العشوائية المستمرة
- ✔ التوزيع الاحتمالى المستمر
- ✔ دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية المستمرة
- ✔ القيم المتوقعة
- ✔ التباين
- ✔ خصائص القيم المتوقعة والتباينات
- ✔ التفسيرات البيانية

المتغيرات العشوائية المستمرة
Continuous Random Variables

يقال على المتغير العشوائى غير المنفصل X مستمر مطلقًا Absolutely Continuous أو مستمر Continuous فقط إذا كانت له دالة التوزيع على الشكل:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du \qquad (1)$$

حيث الدالة $f(x)$ لها الخصائص التالية:

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

التوزيع الاحتمالى المستمر

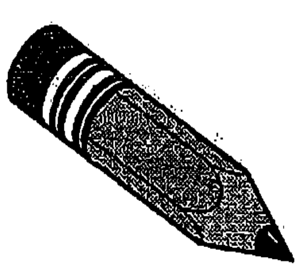
Continuous Probability Distribution

ومن التعريف السابق والخصائص نجد أن المتغير العشوائى المتصل X يكون احتمال أن X تأخذ قيمة معينة للصفر، بينما فترة الاحتمال للمتغير X أن يقع بين قيمتين مختلفتين، نفترض أنها a, b ويكون

$$P(a < X < b) = \int_{b}^{a} f(x)\,dx \qquad (2)$$

مثال 4.1.: إذا تم اختيار شخص ما من بين مجموعة كبيرة من البالغين فإن احتمال أن يكون طوله X 68 بوصة (أى 68.000 بوصة) بالضبط سيكون صفرًا. بينما يكون الاحتمال أكبر من الصفر إذا كانت X بين 67.000 بوصة و68.000 بوصة.

Example 4.1. If an individual were selected at random from a large group of adult males, the probability that his height X is precisely 68 inches (i.e., 68.000… inches) would be zero. However, there is a probability greater than zero that X is between 67.000… inches and 68.000… inches.



والدالة التى تحقق هذه المتطلبات $f(x)$ تسمى بدالة الاحتمال أو دالة التوزيع للمتغير العشوائى المتصل. وتسمى غالبًا بدالة كثافة الاحتمال **Probability Density Function**. وأى دالة $f(x)$ تحقق الشرطين السابقين تسمى دالة الكثافة ويمكن أن تحصل على الاحتمالات من العلاقة (2).

مثال 4.2.: أوجد الثابت c لكى تكون الدالة $f(x)$ دالة كثافة احتمال ، ثم أوجد $P(1<X<2)$.

Example 4.2. Find the constant c such that the function

$$f(x)=\begin{cases} cx^2 & 0<x<3 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

is a density function, and then find $P(1<X<2)$.

لاحظ أنه إذا كان $c\geq 0$ فإن الخاصية الأولى سوف تتحقق. وبالتالى فإن $f(x)$ لا بد وأن تحقق الخاصية الثانية لكى تصبح دالة كثافة احتمال، والآن

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^3 cx^2\,dx=\left.\frac{cx^3}{3}\right|_0^3=9c$$

وحيث أن هذا لا بد وأن يساوى 1. فإن $c=\frac{1}{9}$. وتكون دالة كثافة الاحتمال هى

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0<x<3 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

ثم لإيجاد الاحتمال. نجد أن،

$$P(1<X<2)=\int_1^2 \frac{1}{9}x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{27}\right|_1^2=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$$

دوال التوزيع للمتغيرات العشوائية المستمرة

Distribution Functions for Continuous Random Variables

نتذكر تعريف دالة التوزيع التراكمية أو دالة التوزيع للمتغير العشوائى

$$F(x) = P(X \le x) \qquad (3)$$

حيث أن x أى رقم حقيقى. أى أن $-\infty \le x \le \infty$ وبالتالى،

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (4)$$

مثال 4.3.: أوجد دالة التوزيع فى المثال (4.2.).

Example 4.3. Find the distribution function for example 4.2.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{0}^{x} \frac{1}{9} x^2\,dx = \frac{x^3}{27}$$

حيث $x \le 3$

ويوجد علاقة بين دالة التوزيع The Distribution Function ودالة كثافة الاحتمال Density Function ولكى نوجد هذه العلاقة، نفترض احتمال أن المتغير العشوائى X يأخذ القيم على x وأن قيمه تكون فى المدى x، $x + \Delta x$.

فاحتمال أن X تقع بين X، $x + \Delta x$ هى

$$P(x \le X \le x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,du \qquad (5)$$

وكانت Δx صغيرة جدًا، فإننا نحصل على التقريب

$$P(x \le X \le x + \Delta x) + f(x)\Delta x \qquad (6)$$

ومن (I) بمفاضلة الطرفين ـ نحصل على

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (7)$$

لكل القيم حينما تكون $f(x)$ دالة مستمرة، أى أن تفاضل دالـة التوزيـع يعطى دالة كثافة الاحتمال.

القيم المتوقعة Expected Values

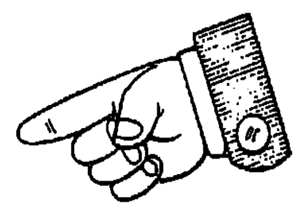
إذا كانت X تمثل متغيراً عشوائيًا مستمراً له كثافة الاحتمال $f(x)$. فإن

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx \qquad (8)$$

مثال 4.4.: دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هى

Example 4.4. The density function of a random X is given by

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$



والقيمة المتوقعة للمتغير X هى

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{2} x\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2}\, dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_{0}^{2} = \frac{4}{3}$$

التباين Variance

إذا كانت X متغيراً عشوائيًا متصلاً له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$. فإن التباين يكون

$$\sigma_X^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, dx \qquad (9)$$

بشرط تقارب التباين.

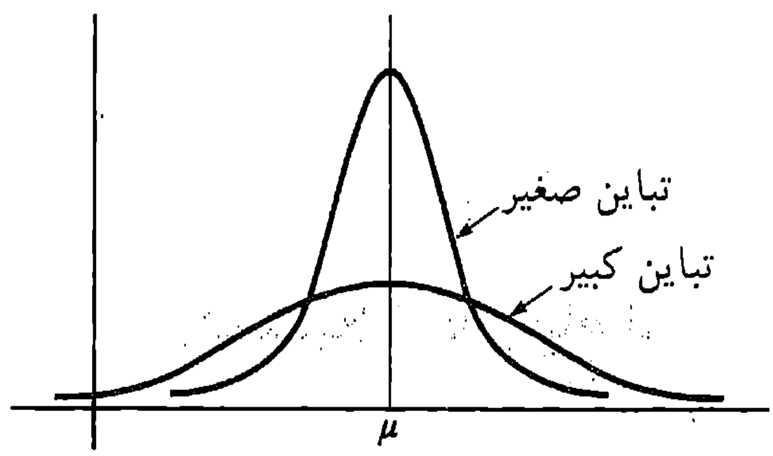
مثال 4.5.: أوجد التباين والانحراف المعيارى للمتغير العشوائى فى المثال السابق (4.4.)، باستخدام أن المتوسط تم إيجاده وهو $\mu = E(x) = \frac{4}{3}$.

Example 4.5. Find the variance and standard deviation of the random variable from Example 4.4, using the fact that the mean was found to be $\mu = E(X) = \frac{4}{3}$.

$$\sigma^2 = E\left[\left(X - \frac{4}{3}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{2}{9}$$

وبالتالى يكون الانحراف المعيارى هو $\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

تذكر أن التباين (أو الانحراف المعيارى) يمثل مقياس للتشتت أو الانتشار لقيم المتغير العشوائى حول الوسط μ. وإذا اتجهت البيانات إلى التمركز قريبًا من الوسط فإن التباين يكون صفرًا. بينما إذا انتشرت البيانات بعيدًا عن الوسط فإن التباين يكون كبيرًا. والرسم الموجود فى الشكل (4.1) يوضح ذلك لمتغيرين لهما نفس المتوسط μ.



شكل 4-1

خصائص القيم المتوقعة والتباينات

Properties of Expected Values and Variances

لقد تم مناقشة نظريات متعددة عن التوقع والتباين للمتغير العشوائى فى الباب الثالث. وحيث أن هذه النظريات تطبق على أى نوع

من المتغيرات العشوائية، فإننا يمكن تطبيقها على المتغـيرات العشوائيـة المتصلة كما تم في المتغيرات العشوائية المنفصلة.

مثال 4.6.: إذا كان لدينا دالة كثافة الاحتمال في المثال (4.4.) فأوجد $E(3X)$، $Var(3X)$.

Example 4.6. Given the probability density function in Example 4.4, find $E(3X)$ and $Var(3X)$.

فإذا استخدمنا طريقة الحساب المباشرة.

$$E(3X) = \int_{-\infty}^{\infty} 3x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{2} 3x\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \int_{0}^{2} \frac{3}{2}x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{2}\right|_0^2 = 4$$

أما باستخدام نظرية (3.1.)، (3.2.) على الترتيب، فإننا نحصل على نفس النتيجة كالتالي:

$$E(3X) = 3E(X) = 3\left(\frac{4}{3}\right) = 4$$

أو

$$E(3X) = E(X+X+X) = E(X)+E(X)+E(X) = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3} = 4$$

باستخدام نظرية (3.5.) لإيجاد التباين

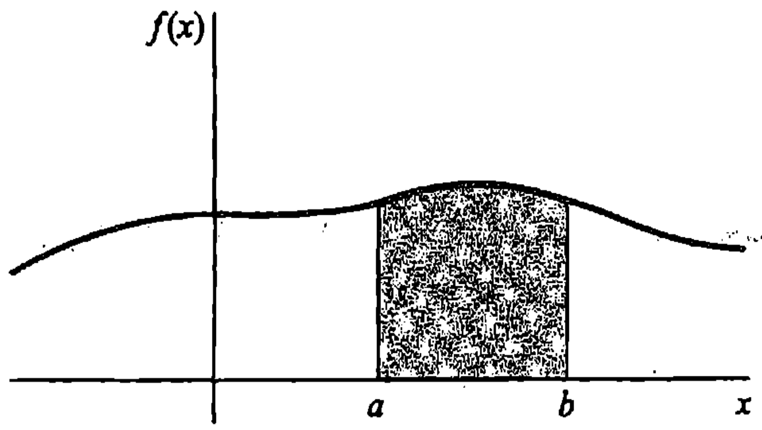
$$Var(3X) = 3^2\, Var(X) = 9\left(\frac{2}{9}\right) = 2$$

ملاحظة!

هذه النظريات صحيحة كما رأينا وتجعل عملية الحساب سهلة فتعلمها واستفد من استخدامها فهي ليست للعرض فقط.

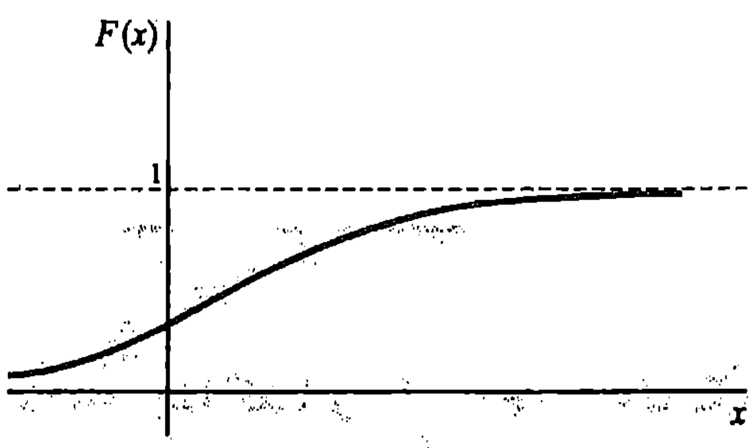
التفسيرات البيانية Graphical Interpretations

إذا كانت $f(x)$ تمثل دالة كثافة الاحتمـال للمتغـير العشوائـى X، فإنـه يمكننا تمثيلها بيانيًا بالمنحنى $y=f(x)$، كما فى الشكل (4-2) وحيـث أن $f(x) \geq 0$ فإن المنحنى لن يكون تحت المحور الأفقى x-axis والمسـاحة الكلية المحدودة بالمنحنى والمحور الأفقى x-axis تكون مسـاوية للواحـد الصحيح طبقًا للخاصية 2. وهندسيًا يكون احتمال أن X تقع بين a، b بمعنى $P(a < x < b)$ يمثل المساحة المظللة فى الشكل (4-2).



شكل 4-2

كما أن دالة التوزيع $F(x) = P(X \leq x)$ تكون دالة تزايديـة Monotonically Increasing Function وذلك بين صفر وواحد صحيـح ويمثلـها المنحنـى فى الشكل (4-3) التالى:



شكل 4-3

الفصل الخامس
أمثلة على المتغيرات العشوائية
Examples of Random Variables

في هذا الفصل:

- ✔ التوزيع ذو الحدين
- ✔ خصائص توزيع ذو الحدين
- ✔ التوزيع الطبيعى
- ✔ أمثلة على التوزيع الطبيعى
- ✔ توزيع بواسون
- ✔ العلاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى
- ✔ العلاقة بين توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون
- ✔ العلاقة بين توزيع بواسون والتوزيع الطبيعى
- ✔ نظرية الحد المركزية
- ✔ قانون الأعداد الكبيرة

التوزيع ذو الحدين — The Binomial Distribution

نفترض أننا لدينا تجربة عشوائية مثل رمى قطعة عملة أو زهرة طاولة على التوالى أو سحب كرة من صندوق بالتوالى. كل عملية رمى أو

سحب تسمى محاولة Trial. وكل محاولة من المحاولات المتتالية يرتبط بها احتمال حدوث حدث ما مثل حدث الحصول على صورة من رمى قطعة العملة، أربع نقط عند رمى الزهرة أو اختيار كرة بلون معين عند السحب من الصندوق. وفى كل حالة من الحالات السابقة يظل الاحتمال ـ احتمال حدوث الحدث ـ ثابتاً لا يتغير من محاولة إلى أخرى (كما فى رمى قطعة العملة أو رمى الزهرة). وهذه المحاولات تكون مستقلة Independent وتسمى فى الغالب محاولات برنوللى Bernoulli Trials وذلك بعد أن درسها جيمس برنوللى James Bernoulli فى نهاية القرن السابع عشر.

افترض أن p يمثل احتمال حدوث حدث ما فى محاولات برنوللى (يسمى باحتمال النجاح Probability of Success). وبالتالى يكون $q = 1 - p$ يمثل احتمال عدم حدوث الحدث فى محاولة واحدة (يسمى باحتمال الفشل Probability of Failure). واحتمال حدوث الحدث بالضبط x مرة فى n محاولة (أى x مرة نجاح، $n - x$ مرة فشل) يتحقق بالمعادلة

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \qquad (1)$$

حيث أن التغير العشوائى X يشير إلى عدد مرات النجاح فى n محاولة كما أن $x = 0, 1, \ldots, n$

مثال 5.1.: احتمال الحصول على 2 صورة بالضبط فى 6 محاولات من رمى قطعة عملة متكامل التوازن هو

Example 5.1. The probability of getting exactly 2 heads in 6 tosses of a fair coin is

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}$$

وتسمى دالة الاحتمال المنفصلة $f(x)$ غالبًا توزيع ذا الحدين Binomial Distribution. حيث $x = 1, 2, \ldots, n$ والتى تتبع الحدود المتتالية فـى مفكـوك ذى الحدين.

$$(q+p)^n = q^n + \binom{n}{1} q^{n-1} p + \binom{n}{2} q^{n-2} p^2 + \cdots + p^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (2)$$

والحالة الخاصة فى توزيع ذى الحدين عندما $n = 1$ تسمى توزيع برنوللى Bernoulli Distribution.

خصائص توزيع ذو الحدين

Properties of Binomial Distributions

كما فى أى توزيع آخر نريد أن نعرف الاحصاءات الوصفية للتوزيع ذو الحدين.

الوسط	$\mu = np$
التباين	$\sigma^2 = np\,(1-p)$
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

مثال 5.2.: ارمى قطعة عملة 100 مرة. واحسب عدد مرات ظهور الصورة. أوجد الوسط الحسابى والتباين والانحراف المعيارى لهذه التجربة.

Example 5.2. Toss a fair coin 100 times, and count the number of heads that appear. Find the mean, variance, and standard deviation of this experiment.

فى 100 رمية لقطعة عملة متكاملة التوازن، فإن التوقع أو الوسـط لعـدد مرات ظهور الصورة هو $\mu = np = 100 \times 0.5 = 50$

والتباين: $\sigma^2 = (100)(0.5)(0.5) = 25$

وهذا يعنى أن الانحراف المعيارى σ هو $\sigma = \sqrt{(100)(0.5)(0.5)} = \sqrt{25} = 5$

The Normal Distribution التوزيع الطبيعى

أخذ أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة هو التوزيع الطبيعى Normal Distribution. والذى يسمى أحيانًا بتوزيع جاوس Gaussian Distribution وكثافة احتمال هذا التوزيع هى

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty<x<\infty \tag{3}$$

حيث أن μ، σ تمثلان الوسط والانحراف المعيارى على الترتيب ودالـة التوزيع له هى:

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(v-\mu)^2/2\sigma^2}\,dv \tag{4}$$

فإذا كانت X لها دالة التوزيع السابقة فإننا نقـول أن X موزعـة توزيعًـا طبيعيًا Normally Distributed بالتوقع μ والتباين σ^2.

وإذا اعتبرنا Z متغيرًا عشوائيًا يمثل بالعلاقة

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \tag{5}$$

فإنها تسمى بـالمتغير القياسـى التـابع للمتغـير العشوائـى X. والقيمـة المتوقعة للمتغير Z هي الصفـر بـانحراف معيـارى الوحـدة. وفـى هـذه الحالة تكون دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z عندما يكون $\mu=0$، $\sigma^2=1$ كالتالى:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \tag{6}$$

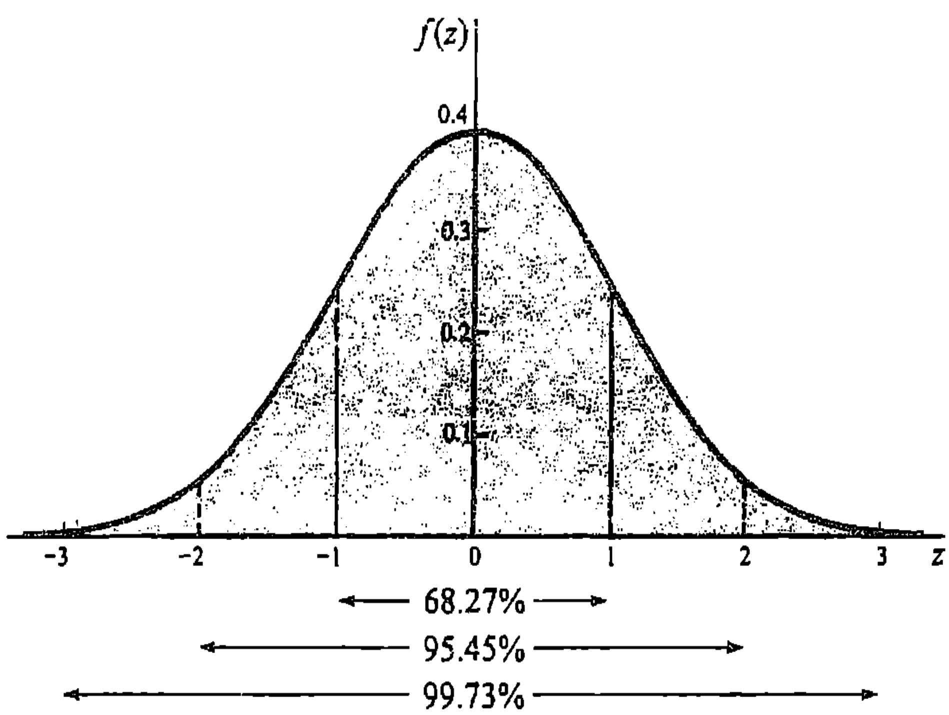
وتمثل دالة كثافـة الاحتمـال المعياريـة Standard Normal Density Function. ودالة التوزيع التى تتبعها هى

$$F(z) = P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\, du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-u^2/2}\, du \qquad (7)$$

وتسمى أحياناً القيمة Z للمتغير المعيارى Z بالدرجة المعيارية Standard Score.

والرسم البيانى لدالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعى المعيارى يسمى بالمنحنى المعتاد المعيارى Standard Normal Curve موضح فى الشكل (5-1). حيث نرى على هذا الرسم تظهر المساحات بين 1، 2، 3 انحراف معيارى من الوسط (أى بين $z = -1, +1$ ،$z = -2, +2$ ،$z = -3, +3$) تساوى 68.27%، 95.45%، 99.73% على الترتيب وذلك من المساحة الكلية التى تساوى الواحد الصحيح. وهذا يعنى أن

$$P(-1 \le Z \le 1) = 0.6827$$
$$P(-2 \le Z \le 2) = 0.9545$$
$$P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973$$



شكل 5-1

ملاحظة!

للتوزيع الطبيعي أهمية كبيرة، حيث يستخدم كثيراً فى الحياة العملية. فتأكد من فهم طريقة استخدامه.

ويوجد فى الملحق B جدول يعطى المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى بين النقط $z = 0$، وأى قيمة موجبة للمتغير المعيارى z. ومن ذلك الجدول يمكننا إيجاد المساحات بين أي نقطتين متتاليتين على محور z باستخدام خاصية التماثل لمنحنى التوزيع الطبيعى $z = 0$

أمثلة على التوزيع الطبيعى

Examples of the Normal Distribution

وحيث أن هذا التوزيع له أهمية كبيرة فإننا نقدم عدداً من الأمثلة لكيفية استخدامه.

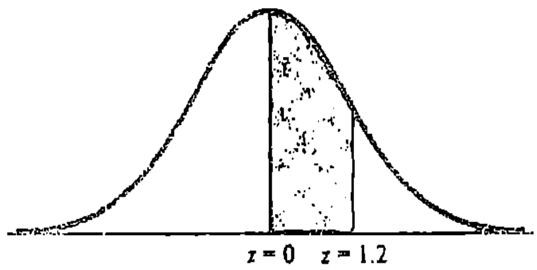
مثال 5.3.: أوجد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى المعيارى بين $z = 0$، $z = 1.2$

Example 5.3. Find the area under the standard normal curve between $z = 0$ and $z = 1.2$.

باستخدام جدول الملحق B. واستخدم العمود z حتى نصل إلى 1.2 ونبحث تحت العمود 0. نجد أن النتيجة هى 0.3849 وهى تمثل احتمال أن z تقع بين 0، 1.2. وبالتالى $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.3849$

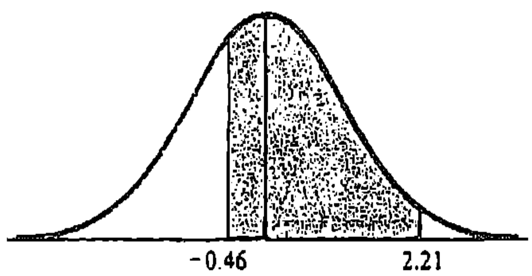
مثال 5.4.: أوجد المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى بين $z = 2.21$ و $z = -0.46$

Example 5.4. Find the area under the standard normal curve between $z = -0.46$ and $z = 2.21$.



شكل 5-2

اعتبر أن الصورة التالية لكثافة احتمال التوزيع الطبيعى.



شكل 5-3

لو نظرنا للشكل (5-3) نجد أن المساحة المطلوبة تنقسم إلى جزئين. الأولى المساحة بين $z = -0.46$، $z = 0$ والثانية.المساحة بين $z = 0$، $z = 2.21$

وحيث أن التوزيع الطبيعى متماثل، فإن المساحة بين $z = -0.46$، $z = 0$ هى نفس المساحة بين $z = 0$، $z = 0.46$ وباستخدام جدول الملحق B نجدها 0.1772 وبلغة أخرى

$$P(-0.46 \le Z \le 0 = P(0 \le Z \le 0.46) = 0.1772$$

ونستخدم جدول الملحق B لإيجاد المساحة بين $z = 0$، $z = 2.21$ وهى

$$P(0 \le Z \le 2.21) = 0.4864$$

وبالتالى تكون المساحة المطلوبة هى المساحة بين $z = -0.46$، $z = 2.21$ أى

المساحة الكلية $=$ (المساحة بين $z = -0.46$ و $z = 0$)

$+$ (المساحة بين $z = 0$ و $z = 2.21$)

$= 0.4864 + 0.1722$

$= 0.6586$

أى أن: $P(0.46 \le Z \le 2.21) = 0.6636$.

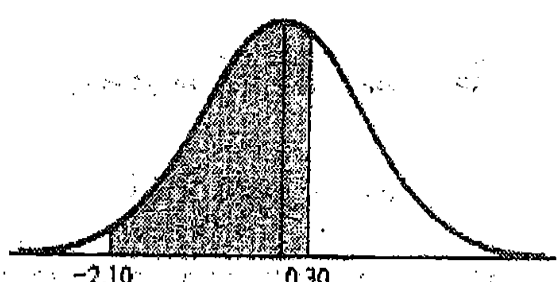
مثال 5.5.: إذا كان متوسط وزن 500 طالب فى إحدى الكليات هو 151 رطلاً بانحراف معيارى 15 رطلاً. افترض أن الأوزان موزعة توزيعًا طبيعيًا. أوجد عدد الطلبة الذين يكون وزنهم (a) بين 120 رطلاً، 155 رطلاً. (b) أكثر من 185 رطلاً.

Example 5.5. The mean weight of 500 male students at a certain college is 151 lb and the standard deviation is 15 lb. Assuming the weights are normally distributed, find how many students weigh (a) between 120 and 155 lb, (b) more than 185 lb.

(a) حيث أن الأوزان مسجلة لأقرب رطل وبالتالى فإن الأوزان بين 120 و 155 رطلاً تعنى أن نحسب بين 119.5 و 155.5 رطل. وبالتالى فإن

119.5 رطل بالوحدات المعيارية $= \frac{119.5-151}{15} = -2.10$

155.5 رطل بالوحدات المعيارية $= \frac{155.5-151}{15} = 0.30$



شكل 5-4

وتكون نسبة الطلاب المطلوبة هى = (المساحة بين $z = -2.10$، $z = 0.30$)

(المساحة بين $z = -2.10$، $z = 0$)

+ (المساحة بين $z = 0$، $z = 0.30$)

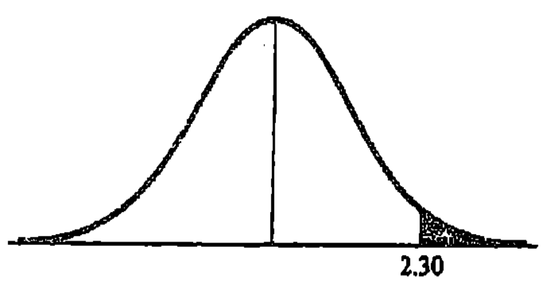
$$0.4821 + 0.1179 = 0.6000$$

وهذا يعنى أنه من بين 500 طالب نجد أن 60% يقع وزنهم بين 120، 155 رطلاً . ويكون عددهم

$500 \times 0.6000 = 300$ طالب

(*b*) لاحظ أن عدد الطلبة الذين يزيد وزنهم عن 185 رطلاً يكون وزنهم على الأقل 185.5 رطل. وبالتالى فإن

الدرجة المعيارية للوزن 185.5 رطل = $\frac{185.5 - 151}{15} = 2.30$



شكل 5-5

وتكون النسبة المطلوبة هى

= (المساحة فى الطرف الأيمن بعد 2.30) = $P(z \geq 2.30)$

= (المساحة فى الطرف الأيمن $z = 0$)

− (المساحة بين $z = 0$، $z = 2.30$)

$= 0.5 - 0.4893 = 0.0107$

وبالتالى يكون عدد الطلبة الذين يكون وزنهم أكبر من 185 رطلاً .

$500 \times 0.0107 = 5$ طلاب

وإذا كان W يمثل وزن طالب اختير بطريقة عشوائية. فإننـا نلخـص الطريقة السابقة كالتالى

$$P(119.5 \leq W \leq 155.5 = 0.6000 \qquad P(W \geq 185.5) = 0.0107$$

توزيع بواسون Poisson Distribution

افترض أن X تمثل متغيـرًا عشوائيًـا منفصـلاً يـأخذ القيـم $0, 1, 2, \ldots$ بحيث أن دالة الاحتمال للمتغير X هى

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

حيث أن λ تمثل ثابتًـا موجبًـا. يسـمى هـذا التوزيـع بتوزيـع بواسـون Poisson Distribution (نسبة إلى مكتشفـه S.D. Poisson فـى بدايـة القـرن التاسع عشر). والمتغير الذى يكون له هذا التوزيـع يسـمى بمتغـير لـه توزيع بواسون.

ويمكن الحصول علـى قيـم توزيـع بواسـون باسـتخدام الملحـق F، والذى يعطى قيم $e^{-\lambda}$ لقيم λ المختلفة.

مثال 5.6.: إذا كان احتمال أن يعانى شخص معيـن كـرد فعـل سـيئ لإعطائه حقنة من دواء معين هو 0.001. احسب احتمال أنه مـن بيـن 2000 شخص (a) يوجد بالضبط 3 يعانون من حقنة هذا الدواء. (b) أكثر مـن 2 يعانون من الحقن بهذا الدواء.

Example 5.6. If the probability that an individual will suffer a bad reaction from injection of a given serum is 0.001, determine the probability that out of 2000 individuals, (a) exactly 3, (b) more than 2, individuals will suffer a bad reaction.

افترض أن X تمثل عدد الذين يعانون من الأثـر لـهذا الـدواء ومـوزع

توزيعًا برنوليًا. وحيث أن الأثر السيئ نادر الوقوع. فإننا نعتبر أنه موزع توزيعًا بواسونيًا. أي أن

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad \lambda = np = (2000)(0.001) = 2$$

(a)

$$P(X = 3) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0.180$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!}\right] \\ &= 1 - 5e^{-2} \\ &= 0.323 \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على تقدير أكثر دقة للاحتمالات باستخدام توزيع ذا الحدين ولكن باستخدام عمليات حسابية أكثر.

العلاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى

Relationships between Binomial and Normal Distributions

عندما تكون n كبيرة ولم تكن أيا من p، q قريبة جدًا من الصفر. فإنه يمكن تقريب التوزيع ذا الحدين إلى توزيع طبيعى بمتغير عشوائى معيارى بحيث أن:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \tag{9}$$

وحينما X يمثل متغيرًا عشوائيًا يمثل عدد مرات النجاح فى n

محاولة برنولية وفيها احتمال النجاح يكون مساويًا p. ويكـون التقريـب جيدًا عندما تزيد n. ومن الناحية العملية يكون التقريب جيدًا عندمـا يكون كلا من $nq \geq 5$، np. وتقريب توزيع ذا الحدين إلى توزيع طبيعى يوضح كالتالى

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-u^2/2}\, du \qquad (10)$$

وبلغة أخرى نقول أن المتغير العشوائى المعيارى $\frac{(X-np)}{\sqrt{npq}}$ يكون معتادًا تقاربيًا Asymptotically Normal.

مثال 5.7.: احسب احتمال الحصول على عدد صور شاملة بين 3، 6 من رمى قطعة عملة متكاملة التوازن 10 مرات (a) باستخدام توزيع ذا الحدين (b) باستخدام تقريب ذا الحدين إلى توزيع طبيعى.

Example 5.7: Find the probability of getting between 3 and 6 heads inclusive in 10 tosses of a fair coin by using (a) the binomial distribution and (b) the normal approximation to the binomial distribution.

(a) نفترض أن X متغير عشوائى يمثل عدد الصور فى تجربة، فى قطعة عملة عشرة مرات. وبالتالى

$$P(X=3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{28}\ , \quad P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256}\ , \quad P(X=6) = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

ويكون الاحتمال المطلوب

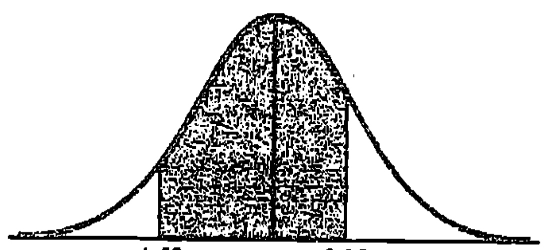
$$P(3 \le X \le 6) = \frac{15}{28} + \frac{105}{512} + \frac{63}{256} + \frac{105}{512} = 0.7734$$

(*b*) وبمعاملة البيانات على أنها مستمرة، وهذا يعنى أن عـدد الصـور 3 إلى 6 يمكن أن نعتبره من 2.5 إلى 6.5 صور. كما أن التوقـع والتبـاين هما: $\mu = np = 10 \times 0.5 = 5$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(10)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.58.$$

وبالتالى فإن الدرجة المعيارية المناظرة للرقم 2.5 هى: $\frac{2.5-5}{1.58} = -1.58$

والمناظرة للقيمة 6.5 هى: $\frac{6.5-5}{1.58} = 0.95$



شكل 5-6

ويكون الاحتمال المطلوب = (المساحة بين $z = -1.58$، $z = 0.95$)

= (المساحة بين $z = -1.58$، $z = 0$)

+ (المساحة بين $z = 0$، $z = 0.95$)

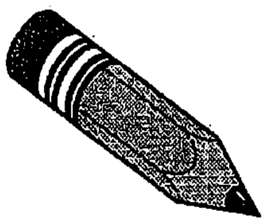
$= 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$

وتعتبر هذه النتيجـة جيـدة مقارنـة بالنتيجـة المضبوطـة فـى (*a*) ويتلاشـى الاختلاف كلما زاد حجم العينة.

العلاقة بين توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون

Relationships between Binomial and Poisson Distributions

فى حالة توزيع ذو الحدين عندما تكون *n* كبيرة ويقترب احتمال النجاح



p من الصفر؛ أى أن $q = 1 - p$ تقترب من الواحد صحيح، فإن الحدث يكون نادر الوقوع Rare Event. وفى الحالات العملية عندما نعتبر الحدث نادر الوقوع ويكون عدد المحاولات لا يقل عن 50.

بينما أن np تكون أقل من 5 $(np < 5)$. فإن توزيع ذا الحدين يقترب من توزيع بواسون بالمتوسط $\lambda = np$. وهذا متوقع بمقارنة توقع وتباين كل منهما. وذلك بإحلال $\lambda = np,\ q \approx 1, p \approx 0$ فى معادلة الوسط والتباين لذى الحدين فإننا نحصل على توقع وتباين التوزيع البواسونى.

العلاقة بين توزيع بواسون والتوزيع الطبيعى

Relationships between Poisson and Normal Distributions

حيث أنه توجد علاقة بين توزيع ذى الحدين والتوزيع الطبيعى وأيضًا بين توزيع ذى الحدين والتوزيع البواسونى، فإننا نتوقع علاقة بين توزيع بواسون والتوزيع الطبيعى. وهذه هى الحالة فى الحقيقة. فإذا كان X متغيرًا عشوائيًا له توزيع بواسونى بدالة الاحتمال التالية

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad (11)$$

وأن

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \qquad (12)$$

يكون هو المتغير العشوائى المعيارى المناظر، وحينئذ فإن

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(a \le \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\, du \qquad (13)$$

وهذا يعنى أن توزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعى عندما $\lambda \to \infty$ أو $\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$ يكون له توزيع طبيعى تقاربى.

نظرية الحد المركزية Central Limit Theorem

يقودنا التشابه بين التوزيعات الثلاثة ذو الحدين وبواسون والطبيعى إلى التساؤل عن وجود توزيعات أخرى بالإضافة إلى ذى الحدين وبواسون تقترب من التوزيع الطبيعى كحالة نهائية.

وهذه الملاحظة تكشف عن نظرية الحد المركزية على أن مجموعة من التوزيعات تخضع لهذا التقارب من التوزيع الطبيعى.

نظرية 5-1: نظرية الحد المركزية (Central Limit Theorem) افترض أننا لدينا عدداً من المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ لها نفس التوزيعات (بمعنى أن كل منها له نفس دالة الاحتمال فى حالة التوزيعات المنفصلة ولها نفس دالة كثافة الاحتمال فى حالة التوزيعات المتصلة) ولها التوقع المحدود μ والتباين σ^2. فإن

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \le \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-u^2/2}\, du \qquad (14)$$

وبالتالى فإن المتغير العشوائى $\frac{(S_n - n\mu)}{\sigma\sqrt{n}}$ والذى يمثل متغير معتاد قياسى للمتغير S_n يكون له توزيع طبيعي معيارى. وهذه النظرية صحيحة أيضًا تحت شروط أكثر عمومية، فمثلاً تكون صحيحة عندما تكون المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عشوائية ومستقلة بنفس المتوسط وبنفس التباين ولكن ليس من الضرورى أن يكون لكل منها نفس التوزيع.

نظرية 5-2: قـانون الأعـداد الكبـيرة (Law of Large Numbers) افــترض المتغيرات العشوائية المستقلة بالتبادل $x_1, x_2, ..., x_n$ (منفصلة أو متصلـة) لكل منها التوقع المحدود μ والتباين σ^2. فإنه إذا كان

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n \quad (n = 1, 2, ...)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| - \mu \geq \varepsilon\right) = 0 \qquad (15)$$

وحيث أن S_n/n تمثل الوسط الحسابى للمجموع $X_1 + X_2 + ... + X_n$ فإن هذه النظرية تقرر احتمال أن الوسط الحسابى S_n/n يختلف عــن العينـة المتوقعة μ بأكثر من ε يقترب من الصفر عندما $n \to \infty$ وتبعًا لذلك فقد نتوقع صحة النتيجة أن $\lim_{n\to\infty} S_n / n = \mu$ ولكنها تكون بالفعل خطأ. وعلى أى حال يمكن إثبات أن $\lim_{n\to\infty} S_n / n = \mu$ باحتمال واحد صحيح. وهــذه النتيجة تسمى بالقانون القوى للأعداد الكبــيرة The Strong Law of Large Numbers. وتســمى نظريــة (5-2) بالقــانون الضعيـف للأعـداد الكبــيرة The Weak Law of Large Numbers.

الفصل السادس
نظرية المعاينة
Sampling Theory

في هذا الفصل:

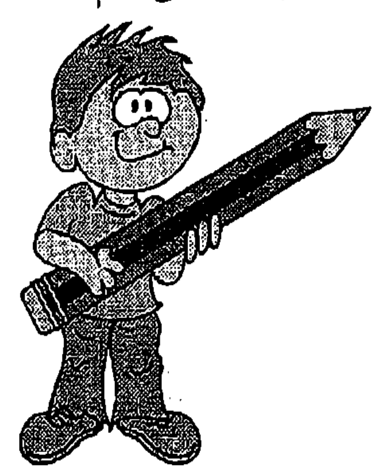
- ✔ المجتمع والعينة
- ✔ المعاينة
- ✔ العينات العشوائية، الأرقام العشوائية
- ✔ معالم المجتمع
- ✔ إحصاءات العينة
- ✔ توزيعات المعاينة
- ✔ الوسط الحسابى للعينة
- ✔ توزيع المعاينة للمتوسطات
- ✔ توزيع المعاينة للنسب
- ✔ توزيع المعاينة للمجاميع والفروق
- ✔ تباين العينة
- ✔ التوزيعات التكرارية
- ✔ توزيعات التكرار النسبى

المجتمع والعينة Population and Sample

نهتم فى الحياة العملية بتقرير النتائج على المجموعات الكبيرة من الأفراد أو الأشياء. وبدلاً من أن نختبر كل المجموعة التى تسمى بالمجتمع Population والتى غالبًا ما يكون صعب أو مستحيل فحصها، فإننا نقوم بعمل فحص لجزء صغير من هذا المجتمع وهذا الجزء يسمى بالعينة Sample. ونقوم بعمل ذلك بهدف الاستدلال على عدد من الحقائق حول المجتمع محل الدراسة وذلك اعتماداً على نتائج العينة، وهذه العملية تسمى بالاستدلال الإحصائى Statistical Inference. كما أن عملية اختيار مفردات العينة تسمى بالمعاينة Sampling.

مثال 6.1.: عندما نرغب فى استخلاص نتائج حول نسبة المعيب من العينة من إنتاج المسامير لمصنع معين خلال فترة 6 أيام الأسبوع وذلك باختيار 20 مسماراً يوميًا. فى هذه الحالة نعتبر كل المسامير المنتجة طول أيام الأسبوع الستة هى المجتمع بينما تمثل العينة 120 مسماراً والتى تم سحبها على أساس 20 مسماراً يوميًا.

Example 6.1. We may wish to draw conclusions about the percentage of defective bolts produced in a factory during a given 6-day week by examining 20 bolts each day produced at various times during the day. In this case all bolts produced during the week comprise the population, while the 120 selected bolts constitute a sample.



ولابد أن نسجل عدداً من الملاحظات. أولاً: أن كلمة مجتمع Population ليس لها نفس المعنى بالضرورة فى لغة الحياة اليومية مثلما تقول أن « مجتمع القاهرة الآن 16 مليون نسمة ». ثانيًا: إنه غالبًا ما تعنى كلمة مجتمع Population المشاهدات Observations أو القياسات Measurements أكثر من أنها تعنى الأفراد Individuals أو الأشياء

Objects. ثالثًا: إن المجتمع يمكن أن يكون محدوداً Finite أو غير محدود Infinite وذلك اعتماداً على حجم المجتمع Population Size والذى نرمز له بالرمز N. وبالمثل سنسمى حجم العينة للعدد الذى اختير فى العينة وسنرمز له بالرمز n وهو محدود عامة.

المعاينة Sampling

إذا سحبنا شيئًا من صندوق فإن لنا الاختيار أمام إعادة الشيء إلى الصندوق قبل سحب المرة التالية With Replacing أو عدم إعادته قبل السحب التالى Without Replacing. ففى الحالة الأولى يمكن لشيء معين أن يظهر فى الاختيار فى مرة تالية ومرة تالية بينما فى الحالة الثانية فإنه يمكن أن يظهر فى الاختبار مرة واحدة فقط. والمعاينة من مجتمع بحيث أنه يمكن اختيار العضو منه أكثر من مرة يسمى بالمعاينة مع الإعادة Sampling With Replacement بينما المعاينة من المجتمع بحيث لا يختار العضو منه أكثر من مرة يسمى بالمعاينة بدون إعادة Sampling Without Replacement.

✓ يجب أن تعرف

المجتمع المحدود الذى تتم فيه المعاينة مع الإعادة يعتبر نظريًا غير محدود حيث أن العينات لأى حجم يتم سحبها دون أن ينقص حجم المجتمع. ولأهداف عملية فإن المعاينة من مجتمع محدود كبير جدًا تعتبر معاينة من مجتمع لانهائى.

العينات العشوائية، الأرقام العشوائية

Random Samples, Random Numbers

من الواضح أن صلاحية النتائج الخاصة بمجتمع تعتمد على صحة

اختيار العينة التى تمثل المجتمع تمثيلاً صادقًا بما فيه الكفاية. وأحد مشاكل الاستدلال الإحصائى الهامة هو عملية اختيار العينة.

وأحد الطرق لاختيار العينة من مجتمع محدود التى يمكن فيها اعتبار أن كل مفردة لها نفس فرصة الاختيار فى العينة وهى ما نسميها بالعينة العشوائية Random Sample. والمعاينة العشوائية من مجتمع محدود نسبيًا تتم باستخدام جدول أعد خصيصًا لذلك الغرض.

وحيث أن الاستدلال الاحصائى من العينة على المجتمع لا يمكن أن يكون مؤكدًا فإننا يجب أن نستخدم لغة الاحتمالات فى أى بيان يتم استنتاجه.

معالم المجتمع Population Parameters

يعتبر المجتمع معروفًا إذا تم معرفة التوزيع الاحتمالى $f(x)$ (دالة الاحتمال أو دالة الكثافة) للمتغير العشوائى X. ففى المثال (6.1.) إذا كانت X تمثل متغيرًا عشوائيًا والتى تُكوِّن قيمة عدد المسامير المعيبة المنتجة كل يوم من أيام الأسبوع فإن X لها التوزيع الاحتمالى $f(x)$.

وإذا كانت X لها توزيع طبيعى. فإننا نقول إن المجتمع موزع توزيعًا طبيعيًا Normally Distributed أو إننا لدينا مجتمعًا طبيعيًا Normal Population. وبنفس الأسلوب إذا كانت X موزعة طبقًا لذى الحدين فإننا نقول أن المجتمع موزع طبقًا لذى الحدين، أو إننا لدينا مجتمع ذى الحدين Binomial Population.

وبالطبع فإنه من المؤكد إنه إذا كان المجتمع موزعًا توزيعًا طبيعيًا فإن كميات مؤكدة لا بد وأن تظهر فى $f(x)$ مثل μ، σ. والمنوال، والالتواء فيمكن إيجادها بدلالة هذه القيمة وتسمى هذه القيم بمعالم المجتمع Population Parameters.

تـذكـر!

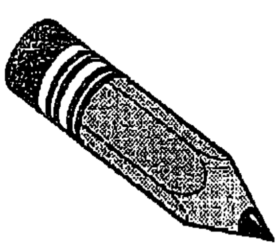
إذا تم إعطاء المجتمع فهذا يعنى معرفـة $f(x)$ وبالتـالى نعرف معالم المجتمع أيضًا.

وتظهر لنا مشكلة رئيسية عندما لا نعرف علـى وجـه الدقـة التوزيـع الاحتمالى للمجتمع $f(x)$. ولكن ربما قد نعرف فكرة عنه أو على الأقل يمكن عمل بعض الفروض حوله، أو نحو سلوك $f(x)$. وكمثال على ذلك عندما نفترض لأسباب ما أن المجتمع له توزيع طبيعى. وفى هذه الحالة ربما لا نعرف قيمة معلمة أو معلمتين من معالمه الاثنين μ، σ. وبالتـالى فإننا يمكن أن نرغب فى الاستدلال الاحصائى حول هذه المعالم.

إحصاءات العينة Sample Statistics

يمكننا اختيار عينات عشوائية من المجتمع ونستخدمها للحصول على قيم تستخدم للتقدير والاختبار حول معالم المجتمع.

ولكى نتصور ذلك نفترض أننا نرغب فى الحصـول علـى النتـائج حـول أطوال 12000 طالب وذلك من خلال فحص عينـة حجمـها 100 طـالب فقط، اختيرت عشوائيًا من هذا المجتمع. ففى هذه الحالة تكون X متغيرًا



عشوائيًا يمثـل قيمـة أطـوال الطـلاب. وللحصـول على العينـة مـن 100 طـالب. نختـار أولاً الطـالب الأول بطريقة عشوائية من المجتمع. وهـذه المفـردة يمكـن أن تأخـذ أى قيمـة x_1 مثـلاً مـن الأطـوال الموجودة. ونقول إن x_1 هى قيمة المتغير العشوائى X_1، حيث يستخدم الدليل 1 دلالة على المفردة الأولى المختارة. ثم نختار المفردة الثانيـة للعينة والتى يمكن أن تأخذ القيمة x_2 مـن الأطـوال الموجـودة. وهـى

القيمة التى يأخذها المتغير X_2. ونستمر فى هذه العملية حتى نصل إلى القيمة x_{100} للمتغير X_{100}. حيث أن العينة حجمها 100. وللسهولة نفترض أن عملية السحب هذه مع الإعادة؛ أى أن المفردة يمكن أن تختار أكثر من مرة فى العينة. وفى هذه الحالة حيث أن حجم العينة صغير جداً بالنسبة إلى حجم المجتمع فإن المعاينة بدون إعادة تعطى نفس النتائج فعلاً فى حالة المعاينة مع الإعادة.

وفى الحالة العامة يكون حجم العينة n والقيم هى $x_1, x_2, \ldots, x_n$ للمتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$. وفى هذه الحالة تكون فى المعاينة مع الإعادة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ، متغيرات مستقلة وذات توزيعات متماثلة ولكل منها دالة الاحتمال $f(x)$. ويكون التوزيع المشترك هو

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)$$

والكمية التى نحصل عليها من العينة بهدف تقدير معلمة المجتمع تسمى إحصاء العينة Sample Statistics. وإحصاء العينة ذات الحجم n يمكن أن يعرف رياضيًا كدالة فى التغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$. أى أن $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ والدالة $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ تمثل هى الأخرى متغيرًا عشوائيًا آخر تمثل قيمها بالدالة $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

ملاحظة!

كلمة إحصاء Statistic تطلق غالبًا على المتغيرات العشوائية أو قيمها، ويكون واضحًا المفهوم الخاص بها من سياق الموضوع.

وبصفة عامة نجد أنه لكل معلمة من معالم المجتمع يوجد إحصاء يحسب من العينة. وعادة ما تكون طريقة الحصول على هذا الإحصاء

من العينة مماثلة لطريقة الحصول على المعلمة المناظرة له من المجتمع المحدود. حيث أن العينة تتكون من مجموعة محدودة. وكما سوف نرى أن ذلك لن يعطى دائمًا أحسن تقدير Best Estimate للمعلمة وأحد المشاكل الهامة فى نظرية المعاينة هو تقرير إحصاء العينة الذى يعطى تقديرًا لمعلمة ما فى المجتمع. سنعتبر تلك المشاكل فيما بعد.

وسوف نستخدم الحروف الإغريقية Greek Letters مثل μ، σ للتعبير عن معالم المجتمع والحروف الرومانية s، m،... إلخ للقيمة المقابلة لإحصاءات العينة.

توزيعات المعاينة Sampling Distributions

كما رأينا إحصاء العينة Sample Statistics والذى يحسب من $X_1, X_2, ..., X_n$ يكون دالة فى هذه المتغيرات العشوائية ولذلك يكون هو الآخر متغيرًا عشوائيًا. والتوزيع الاحتمالى لإحصاء العينة يسمى غالبًا بتوزيع المعاينة Sampling Statistic لهذا الإحصاء.

وبصورة بديلة يمكن أن نعتبر كل العينات الممكنة ذات الحجم n والتى يمكن أن تسحب من المجتمع، ولكل عينة نقوم بحساب هذا الإحصاء. بهذه الطريقة يمكن أن نحصل على التوزيع للإحصاء والذى يمثل توزيع المعاينة.

ولتوزيع المعاينة يمكن حساب الوسط والتباين والانحراف المعيارى.. إلخ. وأحيانًا يسمى الانحراف المعيارى أيضًا بالخطأ المعيارى Standard Error.

الوسط الحسابى للعينة The Sample Mean

نفترض أن $X_1, X_2, ..., X_n$ تشير إلى المتغيرات العشوائية المستقلة ذات التوزيعات المتشابهة للعينة العشوائية ذات الحجم n. وبالتالى فإن

متوسط العينة Sample Mean يكون متغيرًا عشوائيًا يعرف كالتالى

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n} \qquad (1)$$

وإذا كانت $x_1, x_2, ..., x_n$ ترمز للعينة التى تحصل عليها من عينة حجمها n، فإن متوسط هذه العينة يرمز له بالرمز

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n} \qquad (2)$$

توزيع المعاينة للمتوسطات

Sampling Distribution of Means

اعتبر $f(x)$ التوزيع الاحتمالى لمجتمع معين يتم سحب عينة منه حجمها n. وبالتالى فإنه من الطبيعى أن ندرس التوزيع الاحتمالى لإحصاءات المعاينة $\bar{X}$، والتى تسمى بتوزيع المعاينة للوسط الحسابى للعينة أو توزيع المعاينة للوسط وتلخص النظريات التالية ذلك.

نظرية 6-1: الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة لمتوسطات والذى يرمز له بالرمز $\mu_{\bar{X}}$ يمكن الحصول عليه كالتالى

$$E(\bar{X}) = \mu_{\bar{X}} = \mu \qquad (3)$$

حيث μ هى متوسط المجتمع.

وهذه النظرية تقرر أن القيمة المتوقعة لمتوسط العينة هى متوسط المجتمع.

نظرية 6-2: إذا كان المجتمع لانهائى Infinite والمعاينة عشوائية أو أن المجتمع محدود والمعاينة كانت مع الإعادة، فإن تباين توزيع المعاينة للمتوسطات والذى نرمز له بالرمز $\sigma^2_{\bar{X}}$، يكون فى الصورة

$$E\left[\left(\overline{X}-\mu\right)^2\right]=\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n} \qquad (4)$$

نظرية 6-3: إذا كان المجتمــع ذا الحجـم N، وكـانت المعاينـة بـدون إعادة وكان حجم العينة $n \le N$، فإن العلاقة السابقة (4) تصبح

$$\sigma_{\overline{X}}^2=\frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \qquad (5)$$

حيث تكون $\mu_{\overline{X}}$ من النظرية 6-1.

نلاحظ أن النظرية (6-3) تؤول إلى (6-2) عندما تؤول N إلــى مالانهايـة؛ أى أن $N \to \infty$.

نظرية 6-4: إذا كانت المعاينة من مجتمع طبيعــى بـالتوقع μ والتبـاين σ^2، فإن متوسط المعاينة يكون موزعًا توزيعًا طبيعيًا بالتوقع μ والتباين σ^2/n.

نظرية 6-5: افترض أن المجتمع الذى سحبت منــه العينـات لـه توزيـع احتمالى بالمتوسط μ والتباين σ^2 وليس من الضرورى أن يكون طبيعيًــا. فإن المتغير المعيارى الذى يعبر عن $\overline{X}$ هو

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \qquad (6)$$

يكون موزعًا توزيعًا طبيعيًا تقاربيًا Asymptotically Normal؛ أى أن

$$\lim_{n\to\infty} P(Z\le z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-u^2/2}\,du \qquad (7)$$

وهذه النظرية هى نتيجة من نظرية الحد المركزية. ويفــترض هنـا أن المجتمع لانهائى أو أن المعاينة تكون مع الإعادة فإذا كان غــير ذلـك فإن ما سبق يكون صحيحًا إذا تم استبدال $\sigma/\sqrt{n}$ فى نظرية 6-5 بالتباين $\sigma_{\overline{X}}^2$ فى نظرية (6-3).

مثال 6.2.: 500 كرة رمان بلى لها متوسط وزن 5.02 أوقية وانحراف معيارى 0.30 أوقية. فاحسب احتمال أن 100 كرة رمان بلى اختيرت من هذه المجموعة لها أوزان مشتركة أكثر من 510 أوقية.

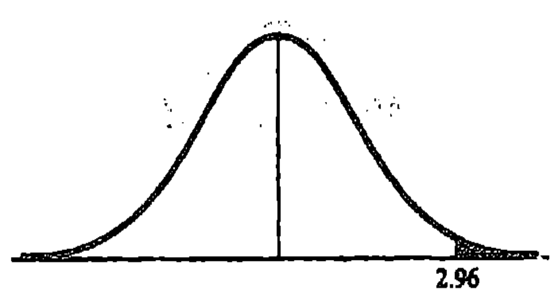
Example 6.2. Five hundred ball bearings have a mean weight of 5.02 oz and a standard deviation of 0.30 oz. Find the probability that a random sample of 100 ball bearings chosen from this group will have a combined weight of more than 510 oz.

بالنسبة لتوزيع المعاينة للمتوسطات فإن $\mu_{\overline{X}} = \mu = 5.02$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{0.30}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{500-100}{500-1}} = 0.027$$

وبالتالى فإن الأوزان المشتركة تزيد عن 510 أوقية إذا كان متوسط الوزن للمائة كرة رمان البلى يزيد عن 5.10 أوقية.

$$Z = \frac{5.10-5.02}{0.027} = 2.96$$



شكل 6-1

ويكون الاحتمال المطلوب هو= (المساحة يمين $z = 2.96$)

= (المساحة يمين $z = 0$)

− (المساحة يمين $z = 0$ و $z = 2.96$)

$= 0.5 - 0.4985 = 0.0015$

ولذلك فإنه يوجد ثلاث فرص من 2000 عند سحب عينة حجمها 100 كرة رمان بلى بوزن كلى يزيد عن 510 درهمًا.

توزيع المعاينة للنسب

Sampling Distribution of Proportions

افترض أن لدينا مجتمعًا غير محدود موزعًا توزيع ذى الحدين باحتمال وجود صفة معينة p واحتمال عدم وجود هذه الصفة $q = 1 - p$ وكمثال على ذلك يكون المجتمع هو كل رميات قطعة عملة متكاملة التوازن ويكون احتمال الحصول على الصورة $p = \frac{1}{2}$.

اعتبر أن كل العينات الممكنة ذات الحجم n المسحوبة من هذا المجتمع. وفى كل عينة نحدد الإحصاء لنسبة النجاح p. وفى هذا المثال تكون النسبة تمثل نسبة عدد الصور التى نحصل عليها إلى حجم العينة n، أو عدد المحاولات n. وبالتالي نحصل على توزيع المعاينة الذى متوسطه μ_p، وانحرافه المعيار σ_p فى الصورة

$$\mu_p = p \qquad \sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{8}$$

والتى نحصل عليها من النظرية (6-1)، (6-2) على الترتيب وذلك بوضع $\mu = p$، $\sigma = \sqrt{pq}$.

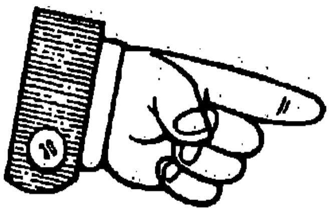
وللقيم الكبيرة n $(n \geq 30)$ فإن توزيع المعاينة يكون توزيعًا طبيعيًا تقاربيًا، كما فى نظرية (6-5).

وفى حالة المجتمعات المحدودة والتى تكون فيها المعاينة بدون الإعادة فإن المعادلة σ_p تستبدل بالمعادلة $\sigma_{\overline{X}}$ كما فى نظرية (6-3) مع $\sigma = \sqrt{pq}$.

لاحظ أن المعادلات μ_p، σ_p يمكن إيجادها بسهولة بقسمة الوسط على n للأولى وقسمة الانحراف المعيارى على n بالنسبة إلى الثانية (np و $\sqrt{npq}$) وذلك بالنسبة لتوزيع ذى الحدين.

توزيع المعاينة للفروق وللمجموع

Sampling Distribution of Differences and Sums



نفترض وجود مجتمعين. وتم سحب عينة عشوائية حجمها n_1 من المجتمع الأول وحساب الإحصاء S_1. وهذا يصل بنا إلى توزيع المعاينة لهذا الإحصاء بحيث يكون متوسطه μ_{S_1} وانحرافه المعيارى σ_{S_1} وبالمثل لكل عينة عشوائية من المجتمع الثانى حجمها n_2 تم حساب الإحصاء S_2 وله توزيع بمتوسط μ_{S_2} وانحرافه المعيارى σ_{S_2}.

وبأخذ كل التوافيق الممكنة للعينات من المجتمعين فإنه يمكن أن نحصل على التوزيع الاحتمالى للفروق بين الإحصائيين $(S_1 - S_2)$ Sampling Distribution of Difference. ويكون للمتوسط والانحراف المعيارى لهذا التوزيع والذى نرمز له $\mu_{S_1 - S_2}$، $\sigma_{S_1 - S_2}$ على الترتيب فى الصورة:

$$\mu_{S_1-S_2} = \mu_{S_1} - \mu_{S_2} \qquad \sigma_{S_1-S_2} = \sqrt{\sigma^2_{S_1} + \sigma^2_{S_2}} \tag{9}$$

وذلك بشرط استقلال العينات عن بعضها البعض وبلغة أخرى يشترط استقلال المتغيرات S_1، S_2.

فإذا كانت S_1، S_2 يمثلان متوسطات العينات من المجتمعين والتى نرمز لها بالرموز $\overline{X}_1$، $\overline{X}_2$ على الترتيب. فإن توزيع المعاينة للفرق بين المتوسطات فى المجتمعات اللانهائية ذات التوقعات μ_1، μ_2 والانحرافات المعيارية σ_1، σ_2 على الترتيب هو

$$\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \mu_{\overline{X}_1} - \mu_{\overline{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 \tag{10}$$

و

$$\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2} = \sqrt{\sigma^2_{\overline{X}_1} + \sigma^2_{\overline{X}_{12}}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{11}$$

باستخدام النظريات (6-1)، (6-2). وهذه النتيجة تكـون صحيحـة أيضًـا فى حالة المجتمعات المحـدودة عندمـا تكـون المعاينـة مـع الإعـادة. ويكون المتغير المعتاد المعيارى هو

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (12)$$

وهذه النتيجة توزع توزيعًا قريبًا جدًا من التوزيع الطبيعى عندما تكـون كل من n_1 و n_2 كبيرة $(n_1, n_2 \geq 30)$. وبالطبع نحصل على نفس النتيجـة فى حالة المجتمعات الغير محدودة وتتم المعاينة بـدون إعـادة باسـتخدام النظريات (6-1)، (6-3).

ويخصوص الفرق بين نسبتين فى مجتمعين من مجتمعات ذى الحدين لهما البارامترات q_1، p_1 و q_2، p_2 على الترتيب. وتكون فى هذه الحالة S_1، S_2 يمثلان نسب النجاح p_1، p_2 بحيث يكـون متوسـطها وانحرافـها المعيارى للفرق كالتالى

$$\mu_{P_1 - P_2} = \mu_{P_1} - \mu_{P_2} = p_1 - p_2 \qquad (13)$$

و

$$\sigma_{P_1 - P_2} = \sqrt{\sigma_{P_1}^2 + \sigma_{P_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}} \qquad (14)$$

وبدلاً من أن نأخذ الفرق بين الإحصاءات نأخذ أحيانًا المجموع لـهذه الإحصاءات. وفى حالة توزيع المعاينـة لمجمـوع الإحصـاءات S_1 و S_1، فيكون الوسط والانحراف المعيارى على الترتيب

$$\mu_{S_1 + S_2} = \mu_{S_1} + \mu_{S_2} \qquad \sigma_{S_1 + S_2} = \sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \qquad (15)$$

وذلك بافتراض أن العينات مستقلة. ويمكن الحصول حينئذ على نتائج مماثلة لـ $\mu_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$ و $\sigma_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$.

مثال 6.3.: وجد أن نسبة الإنتاج المعيب المنتج بواسطة آلة معينة هي أنه 2%. ما احتمال أن عند شحن 400 وحدة من هذا الإنتاج يكون به 3% أو أكثر معيب؟

Example 6.3. It has been found that 2% of the tools produced by a certain machine are defective. What is the probability that in a shipment of 400 such tools, 3% or more will prove defective?

$$\mu_P = p = 0.02 \text{ and } \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.02(0.98)}{400}} = \frac{0.14}{20} = 0.007$$

وباستخدام معامل تصحيح المتغيرات المنفصلة، وهو $\frac{1}{2n} = \frac{1}{800} = 0.00125$

فنحصل على

$$z = \frac{0.03-(0.00125-0.02)}{0.007} = 1.25$$

ويكون الاحتمال المطلوب =

المساحة تحت المنحنى الطبيعي يمين القيمة $z = 1.25$ = 0.1056

وإذا لم نستخدم معامل التصحيح فإننا نحصل على الاحتمال مساويًا 0.0764.

تباين العينة The Sample Variance

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ترمز إلى المتغيرات العشوائية لعينة حجمها n، فإن المتغير العشوائى الذى يعطى تباين العينة Sample Variance هو

$$S^2 = \frac{\left(X_1-\overline{X}\right)^2+\left(X_2-\overline{X}\right)^2+\cdots+\left(X_n-\overline{X}\right)^2}{n} \qquad (16)$$

لقد رأينا فى النظرية (1-6) أن $E(\overline{X})=\mu$. وإذا وجدنــا أن $E(S^2) \neq \sigma^2$ أى أن القيمة المتوقعة لهذا الإحصاء تكون مساوية لمعلمة المجتمع، فإننا نقول أن الإحصاء يمثل مقدارا غير متحيز Unbiased Estimator وأن العينة تمثل تقديرًا غير متحيز Unbiased Estimate لهذه المعلمة. أى أن:

$$E(S^2) = \mu_{S^2} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \qquad (17)$$

والذى يكون قريبًا جدًا من المعلمــة σ^2 فقـط عنـد أحجـام العينـات الكبيرة $(n \geq 30)$. وبالتالى فإن التقدير غير المتحيز يعرف على أساس أن

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{\left(X_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(X_2 - \overline{X}\right)^2 + \cdots + \left(X_n - \overline{X}\right)^2}{n-1} \qquad (18)$$

ومن ثم

$$E(S^2) = \sigma^2 \qquad (19)$$

ولذلك نرى أن بعض الإحصائيين يختــارون $\hat{S}^2$ عنـد إيجـاد تبـاين العينة بدلاً من S^2. أى بالقسمة على $(n-1)$ بدلاً من القسمة على n فى المقام الخاص بتعريف S^2 وذلـك لأنـه بفعـل هـذا نجـد أن كثـيرًا مـن النتائج التالية تكون أكثر بساطة.

التوزيعات التكرارية Frequency Distributions

إذا كان لدينا عينة كبيرة (أو مجتمع)، فإنه يكون من الصعـب ملاحظـة الخصائص المختلفة أو حساب الإحصاءات المختلفة من وسـط حسابى أو انحراف معيارى. ولهذا السـبب فإنـه مـن المفيـد تجميـع أو تنظيـم البيانات الخام Raw Data. ولكى نتصور ذلك نفــترض أننـا لدينـا عينـة

تتكون من أطوال 100 طالب في جامعة XYZ، فإننا نقوم بترتيب البيانات Data في فئات Classes أو مجموعات Categories ونقوم بتحديد عدد الطلاب في كل فئة وتسمى بالتكرارات Class Frequency. ويبين جدول (6-1) هذا التنظيم ويسمى بالتوزيع التكراري Frequency Distribution أو الجدول التكراري Frequency Table.

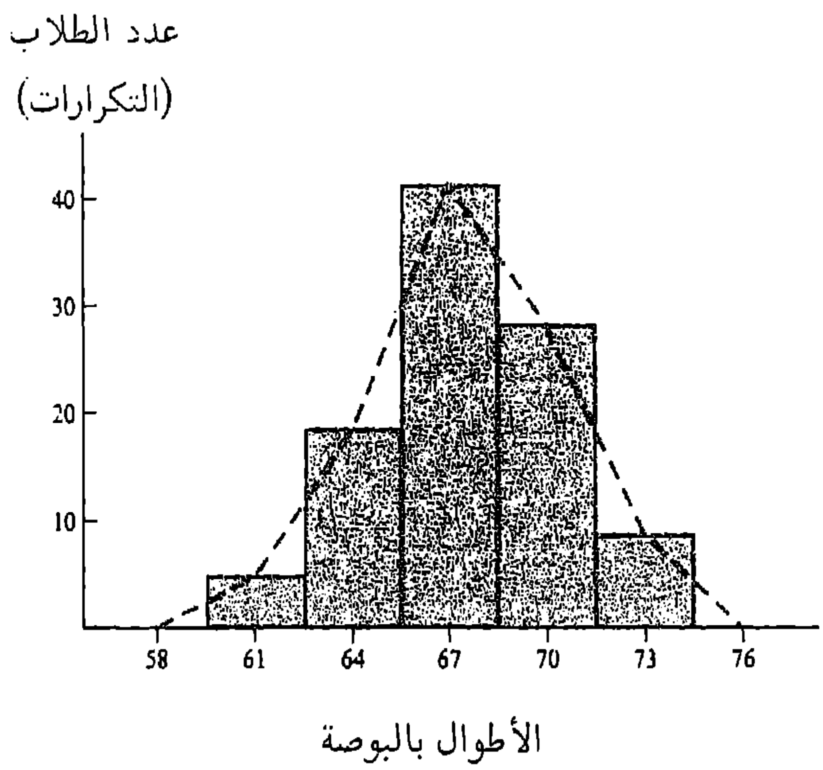
جدول (6-1) يوضح الجدول أطوال 100 طالب في جامعة XYZ

الأطوال بالبوصة	عدد الطلاب
60–62	5
63–65	18
66–68	42
69–71	27
72–74	8
المجموع	100

فأول فئة أو صنف يتكون من الأطوال من 60 إلى 62 بوصة، وتكتب 62-60 وتسمى فترة الفئة Class Interval. وحيث أنه يوجد 5 طلبة لهم هذه الأطوال أي داخل هذه الفئة، فإن تكرار هذه الفئة Class Frequency هو 5. وحيث أن الطول المسجل 60 بوصة يكون فعلاً بين 59.5، 60.5 بوصة، بينما الطول المسجل 62 بوصة يكون بين 61.5، 62.5 بوصة، فإننا نسجل فترات الفئات من 59.5–62.5، والفئة التالية تكون 62.5–65.5.. وهكذا في الفئة 59.5–62.5 تسمى الأرقام 62.5، 59.5 بحدود الفئات Class Boundaries. وطول الفئة j نرمز له بالرمز c_j. حيث أنه متساوي لكل الفئات في هذه الحالة وهو الفرق بين الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة. وفي هذه الحالة يكون مساويًا $c = 62.5 - 59.5 = 3$

ومركز الفئة The Midpoint of the Class الذى يمثل الفئة يسمى بعلامة الفئة Class Mark. وفى الجدول (1-6) نجد أن علامة الفئة الـذى يمثـل الفئة 60–62 هو 61.

والرسم البيانى للتوزيع التكرارى يسمى بالهسـتوجرام Histogram أو المدرج التكرارى. وهو كما هو واضـح فـى الشكـل (2-6) أو المضلـع التكرارى Frequency Polygon ويتم بربط مراكز الفئات فى أعلى المدرج التكرارى. وأنه من المثير أن نجد أن شكل الرسم يشير إلى أن العينـة قد اختيرت من مجتمع للأطوال يتوزع طبيعيًا.



شكل 6-2

توزيعات التكرار النسبى

Relative Frequency Distributions

إذا كان فى الجدول (1-6) تم تسجيل التكرارات النسبية أو النسب المئوية بدلاً من عدد الطلبة فى كل فئة، فإن النتيجة تسـمى النسـب أو توزيـع

التكرارات النسبية Percentage Frequency Distribution. فمثلاً النسبة أو التكرار النسبى الذى يوجد فى الفئة 65-63 هو $\frac{18}{100}$ أو 18%. والمدرج التكرارى التابع للتوزيع التكرارى النسبى لا يختلف عما هو موجود فى الشكل (6-1) ما عدا أن المحور الرأسى يكون مثلاً لتكرارات نسبية بدلاً من تكرارات مطلقة. ويكون مجموع لمساحات الأعمدة واحد صحيح أو 100%.

ويمكن اعتبار التكرارات النسبية توزيع احتمالى. حيث تم استبدال الاحتمالات بالتكرارات النسبية. حيث أن التكرارات النسبية يمكن أن تعتبر احتمالات تجريبية Empirical Probabilities، وبالتالى فإن توزيعات التكرار النسبى تعرف على أنها توزيعات احتمالية تجريبية Empirical Probability Distributions.

الفصل السابع
نظرية التقدير
Estimation Theory

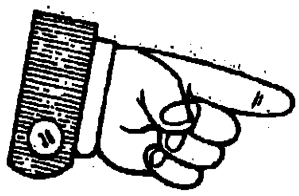
في هذا الفصل:

- ✔ التقديرات غير المتحيزة والتقديرات الكفء
- ✔ التقديرات بنقطة والتقديرات بفترة
- ✔ تقديرات فترة الثقة لمعالم المجتمع
- ✔ فترات الثقة للمتوسطات
- ✔ فترات الثقة للنسب
- ✔ فترات الثقة للفرق والمجاميع

التقديرات غير المتحيزة والتقديرات الكفء
Unbiased Estimates and Efficient Estimates

لقد ذكرنا فى الباب السادس أنه يقال أن الإحصاء غير متحيز Unbiased Estimator لمعلمة المجتمع إذا كان متوسط أو توقع الإحصاء مساويًا لقيمة المعلمة. وقيمة الإحصاء فى هذه الحالة يقال إنها تقدير غير متحيز Unbiased Estimate للمعلمة.

إذا كان توزيع المعاينة لإحصائين له نفس الوسط، فإن الإحصاء الأقل تباين يسمى المقدر الأكثر كفاءة More Efficient Estimator للوسط.



والقيمة التابعة لهذا الإحصاء الكفء تسمى بالتقدير الكفء Efficient Estimate. ومن الواضح أن الإنسان يحاول أن يحصل فى نفس الوقت على التقديرات الغير متحيزة والكفء فى نفس الوقت ولكن ذلك يكون غير ممكن دائمًا.

التقديرات بنقطة والتقديرات بفترة

Point Estimates and Interval Estimates

يسمى التقدير بواسطة قيمة واحدة لمعلمة المجتمع بالتقدير بواسطة نقطة A Point Estimate، أما تقدير معلمة المجتمع بواسطة رقمين من الممكن أن تقع بينهما معلمة المجتمع فيسمى بالتقدير بفترة Interval Estimate.

مثال 7.1.: إذا قلنا أن المسافة هي 5.28 قدم فإننا نكون قد أوجدنا تقدير بنقطة. أما إذا قلنا من ناحية أخرى أن المسافة هى بين 5.28 ± 0.03 قدم؛ أى أن المسافة بين 5.25 قدم و5.31 قدم فإننا نكون قد استخدمنا التقدير بواسطة فترة.

Example 7.1. If we say that a distance is 5.28 feet, we are giving a point estimate. If, on the other hand, we say that the distance is 5.28 ± 0.03 feet, i.e., the distance lies between 5.25 and 5.31 feet, we are giving an interval estimate.

وغالبًا ما تسمى العبارة التى تحدد الخطأ أو الدقة لتقدير بالصلاحية Reliability.

تقديرات فترة الثقة لمعالم المجتمع

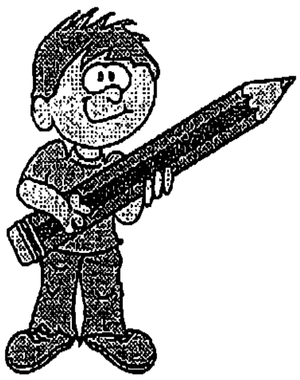
Confidence Interval Estimates of Population Parameters

اعتبر μ_s، σ_s يمثلان الوسط والانحراف المعيارى (الخطأ العيارى) لتوزيع المعاينة للإحصاء S. وبالتالى إذا كان توزيع المعاينة للإحصاء

S له توزيع طبيعى تقاربى (والذى وجدنا أنه سوف يكون له توزيع طبيعى عندما تكون $n > 30$) فإننا نتوقع وجود S تقع فى الفترة $\mu_s - \sigma_s$ إلى $\mu_s + \sigma_s$، $\mu_s - 2\sigma_s$ إلى $\mu_s + 2\sigma_s$ أو $\mu_s - 3\sigma_s$ إلى $\mu_s + 3\sigma_s$ بالنسب المئوية 68.27%، 95.45%، 99.73% على الترتيب. وأن نقول نتوقع وجود أو نحن على ثقة فى وجود μ_s فى الفترات.

$S - \sigma_s$ إلى $S + \sigma_s$، $S - 2\sigma_s$ إلى $S + 2\sigma_s$ أو $S - 3\sigma_s$ إلى $S + 3\sigma_s$

بالاحتمالات 68.27%، 95.45%، 99.73% على الترتيب.



ولهذا سنسمى هذه الفترات المتتالية بأنها 68.27%، 95.45%، 99.73% فترات الثقة Confidence Intervals لتقدير μ_s. (أى لتقدير معلمة المجتمع فى هذه الحالة تكون S غير متحيزة). وتسمى حدود هذه الفترات Confidence Limits ($S \pm \sigma_s$، $S \pm 2\sigma_s$، $S \pm 3\sigma_s$) تسمى 68.27%، 95.45% و 99.73% بحدود الثقة Confidence Intervals وبالمثل تكون $S \pm 1.96\sigma_s$، $S \pm 2.58\sigma_s$، هى 95%، 99% (أو 0.95، 0.99) هى حدود الثقة للمعلمة μ_s. وتسمى النسبة المئوية للثقة غالبًا بمستوى الثقة Confidence Level. وتسمى الأرقام 1.96، 2.58.. إلخ فى حدود الثقة بالقيم الحرجة Critical Values ويرمز لها بالرمز z_c والتى يمكن إيجادها مقابل معامل الثقة. ويوجد فى جدول (7-1) عدداً من قيم z_c تتبع عدد من مستويات الثقة التى تستخدم فى الحياة العملية. وفى حالة مستويات الثقة التى لا توجد بالجدول، فإننا نقوم بإيجادها من جدول مساحات التوزيع الطبيعى فى الملحق B.

جدول 7-1

مستوى الثقة	99.73%	99%	98%	96%	95.49%
z_c	3.00	2.58	2.33	2.05	2.00

مستوى الثقة	95%	90%	80%	68.27%	50%
z_c	1.96	1.645	1.28	1.00	0.6745

وفى حالة ما يكون الإحصاء له توزيع معاينة يختلف عن التوزيع الطبيعى فإنه يتم عمل التعديل المناسب للحصول على فترات ثقة مناسبة.

فترات الثقة للمتوسطات

Confidence Intervals for Means

سوف نرى كيف ننشأ فترة ثقة للوسط الحسابى للمجتمع باستخدام حالات مختلفة. ففى الحالة الأولى عندما يكون حجم العينة كبيرًا $(n \geq 30)$ وفى الحالة الثانية عندما يكون حجم العينة صغيرًا $(n < 30)$ ويكون المجتمع موزعًا توزيعًا طبيعيًا.

فى حالة العينات الكبيرة $(n \geq 30)$ Large Samples $(n \geq 30)$

إذا كان الإحصاء S هو متوسط العينة $\overline{X}$، فإن حدود الثقة 95%، 99% لتقدير متوسط المجتمع μ هى $\overline{X} \pm 1.96\sigma_{\overline{X}}$ ، $\overline{X} \pm 2.58\sigma_{\overline{X}}$ على الترتيب وبصفة عامة تكون حدود الثقة هى $\overline{X} \pm z_c\sigma_{\overline{X}}$ حيث أن z_c تعتمد على مستوى الثقة المطلوب ونحصل عليه من جدول (7-1). وباستخدام قيم $\sigma_{\overline{X}}$ والتى سبق تقديمها فى الباب السادس، نجد أن حدود الثقة لمتوسط المجتمع هى:

$$\overline{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (1)$$

فى حالة المعاينة من مجتمع غير محدود أو أن تكون المعاينة مع الإعادة

$$\overline{X} \pm z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad (2)$$

إذا كان المعاينة من مجتمع محدود N أو أن تكون المعاينة بدون إعادة.

ويكون الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معروف فى العادة وبالتالى

فإننا لكى نوجد حدود الثقة هذه لا بـد وأن نقـوم بتقديـره مـن العينـة بالتقديرات S أو $\hat{S}$.

مثال 7.2. أوجد فترة الثقة 95% لتقدير متوسط أطوال 1546 طالبًا في جامعة XYZ بأخذ عينة من 100 طالب (افترض أن متوسط العينة $\bar{x}$ هـو 67.45 بوصة وانحراف المعيارى في العينة $\hat{s}$ هو 2.93 بوصة).

Example 7.2. Find a 95% confidence interval estimating the mean height of the 1546 male students at XYZ University by taking a sample of size 100. (Assume the mean of the sample, $\bar{x}$, is 67.45 and that the standard deviation of the sample, $\hat{s}$, is 2.93 inches.)

حدود الثقة 95% هى $\bar{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

وباستخدام، بوصة $\bar{x} = 67.45$ و بوصة $\hat{s} = 2.93$

كتقدير للانحراف العيارى σ فإن حدود الثقة تكون:

$$67.45 \pm 1.96 \left(\frac{2.93}{\sqrt{100}} \right) \text{ بوصة}$$

أو أن

$$67.45 \pm 0.57 \text{ بوصة}$$

وبالتالى فإن فترة الثقة 95% للوسط الحسابى للمجتمـع μ هـى بيـن 68.02، 66.88 بوصـة؛ أى أن: $66.88 < \mu < 68.02$ وذلـك بدرجـة ثقـة 95%. ويكافئ ذلك القول بأننـا علـى ثقـة 95% أن متوسـط المجتمـع الحقيقى يقع بين 68.02، 68.88 بوصة.

فى حالة العينات الصغيرة ($n < 30$) والمجتمع طبيعى

Small Samples ($n < 30$) and Population Normal

سوف نستخدم توزيع t فى هذه الحالة (انظر البـاب العـاشر) للحصـول

علـى مسـتويات الثقـة. وكمثـال إذا كـانت $-t_{0.975}$، $t_{0.975}$ تمثـل قيـم T بحيث 2.5% من المساحة تقع فى نهاية كل طرف من توزيع t، وبالتـالى فإن حدود الثقة للتوزيع T تكون

$$-t_{0.975} < \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{\hat{S}} < t_{0.975} \tag{3}$$

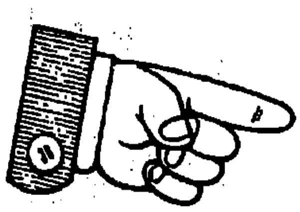
ومن هذه العلاقة يمكن تقدير فترة الثقة للمعلمة μ لتقع فى الفترة.

$$\bar{X} - t_{0.975}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{0.975}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

وذلك بدرجة ثقة 95%. وبصفـة عامـة تكـون حـدود الثقـة لمتوسـطات المجتمع تكون:

$$\bar{X} \pm t_c \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

حيث أن t_c يمكن إيجادها من الجدول بالملحق C. وبمقارنـة العلاقـة (5) مع العلاقة (1) تبين أنه لا بد وأن نقوم بإحلال t_c بـدلاً مـن z_c فـى حالـة العينـات الصغـيرة. وعندمـا تكـون $n > 30$ تكـون z_c، t_c تقريبًـا متساوية. كما يلاحظ أيضًا أنه فى العينات الصغيرة تظهر $\hat{S}$ فى العلاقة (5) على أساس استخدام الانحراف المعيارى للعينة بدلاً مـن الانحـراف المعيارى للمجتمع الذى عادة ما يكون مجهولاً كما فى (1).



حجم العينة له أهمية كبيرة! فنحـن نقـوم بإنشـاء فترات الثقة معتمديـن علـى حجـم العينـة ولـهذا تأكد أنك تعرف الأسلوب الذى سوف تتخذه.

فترات الثقة للنسب

Confidence Intervals for Proportions

افترض أن الإحصاء S يمثل نسبة النجاح فى عينة حجمها $n \geq 30$ سميت عشوائيًا من مجتمع ذى الحدين به نسبة النجــاح p (احتمـال النجـاح). فإن حدود الثقة للنسبة p هى $P \pm z_c \sigma_P$. حيث أن P تمثل نســبة النجـاح فى العينة والتى حجمها n. ونستخدم القيمة σ_p والتــى تـم حسـابها فـى الباب السادس، وبالتالى فإن حدود الثقة للنسبة فى المجتمع هى

$$P \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{n}} = P \pm z_c \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \tag{6}$$

فى حالة المعاينة من مجتمع غير محدود أو حالة المعاينة مـع الإعـادة من مجتمع محدود. وبالمثل تكون الحدود هى

$$P \pm z_c \sqrt{\frac{pq}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{7}$$

إذا كانت المعاينة بدون إعادة من مجتمع محدود حجمــه N. ويلاحـظ أن هذه النتائج قد تم إيجادها من العلاقـات (*1*)، (*2*) وذلـك بـإحلال $\overline{X}$ مكان المقدار P ومكان σ المقدار $\sqrt{pq}$.

ولكى نوجد حدود الثقة نستخدم تقدير العينة P محل المعلمة p.

مثال 7.3.: من المعاينة من 100 صـوت اختـيروا بطريقـة عشوائيـة مـن أصوات إحدى الدوائـر دلـت علـى أن النسـبة 55% يصوتـون لصـالح مرشح معين. فأوجد حدود الثقـة 99% لنسـبة الأصـوات الكليـة التـى ستكون فى صالح هذا المرشح.

Example 7.3. A sample poll of 100 voters chosen at random from all voters in a given district indicate that 55% of them were in favor of a particular candidate. Find the 99% confidence limits for the proportion of all voters in favor of this candidate.

حدود الثقة 99% لصالح المرشح p هى $p \pm 2.58\,\sigma_p$.

$$P \pm 2.58\sigma_p = P \pm 2.58\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$= 0.55 \pm 2.58\sqrt{\frac{(0.55)(0.45)}{100}}$$

$$= 0.55 \pm 0.13$$

أى أن حدود النسبة هى $0.42 \leq p \leq 0.68$.

أى أن حدود الثقة لنسبة المصوتين لهذا المرشح سوف تكون بين 42%، 68% بدرجة ثقة 99%.

فترات الثقة للفروق والمجاميع

Confidence Intervals for Differences and Sums

إذا كانت S_1، S_2 يمثلان إحصاءان للعينة بتوزيعات معتادة تقاربية، فإن حدود الثقة للفرق بين المعالم التابعة لهذه الإحصاءات S_1، S_2 هى

$$S_1 - S_2 \pm z_c\sigma_{S_1 - S_2} = S_1 - S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \qquad (8)$$

بينما حدود الثقة لمجموع المعالم هو

$$S_1 + S_2 \pm z_c\sigma_{S_1 + S_2} = S_1 + S_2 \pm z_c\sqrt{\sigma_{S_1}^2 + \sigma_{S_2}^2} \qquad (9)$$

بشرط استقلال العينات.

فمثلاً حدود الثقة للفرق بين متوسطى مجتمعين فى حالة ما تكون المجتمعات غير محدودة وتكون انحرافاتها المعيارية معروفة σ_1، σ_2 هى

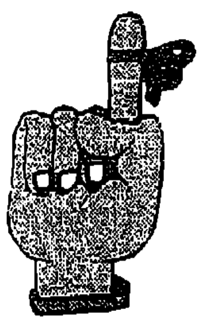
$$\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_c\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \pm z_c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (10)$$

حيث أن n_1، $\bar{X}_1$ و n_2، $\bar{X}_2$ يمثلان الأوساط الحسابية وأحجام العينات المسحوبة من المجتمعات على الترتيب.

وبالمثل تكون حدود الثقة للفرق بين نسبتى مجتمعين حينما تكون المجتمعات غير محدودة هى

$$P_1 - P_2 \pm z_c \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)}{n_2}} \qquad (11)$$

حيث أن P_1، P_2 يمثلان النسبة فى كل عينة على الترتيب. كما أن n_1 و n_2 يمثلان أحجام العينات المسحوبة من المجتمعات.



تذكر!

إن تباين الفرق بين متوسطين هو نفسه تباين مجموع المتوسطين؛ أى أن:

$$\sigma^2_{X+Y} = \sigma^2_{X-Y}$$

مثال 7.4.: فى عينة عشوائية من 400 شخص أعمارهم تزيد عن 21 سنة و 600 مراهق يشاهدون برنامج معين فى التلفزيون، أجاب 100 من الذين تزيد أعمارهم عن 21 سنة و 300 من المراهقين أنهم يحبون هذا البرنامج. أوجد حدود الثقة بمستوى 99.73% للفرق بين النسبتين للبالغين والمراهقين الذين يشاهدون البرنامج ومعجبون به.

Example 7.4. In a random sample of 400 adults and 600 teenagers who watched a certain television program, 100 adults and 300 teenagers indicated that they liked it. Construct the 99.73% confidence limits for the difference in proportions of all adults and all teenagers who watched the program and liked it.

حدود الثقة للفرق بين النسبتين هى بتطبيــق العلاقـة (11) حيــث أن الدليل 1، 2 يرمزان للمراهقين والبالغين على الترتيب. حيث أن

$$Q_1 = 1 - P_1 \quad , \quad Q_2 = 1 - P_2$$

كما أن:

$$P_1 = \frac{300}{600} = 0.50 \quad , \quad P_2 = \frac{100}{400} = 0.25$$

وهى نسب المراهقين P_1 والبالغين P_2 الذين يشاهدون البرنامج ويعجبون به. وبالتالى فإن حدود الثقة بدرجة 99.73% هى

$$0.50 - 0.25 \pm 3\sqrt{\frac{(0.50)(0.50)}{600} + \frac{(0.25)(0.75)}{400}} = 0.25 \pm 0.09 \quad (12)$$

أى أن فترة الثقة بدرجة 99.73% للفروق بين النسبة الحقيقيــة تقـع بيـن 0.34، 0.16.

الفصل الثامن

اختبارات الفروض والمعنوية

Test of Hypothesis and Significance

في هذا الفصل:

- ✔ القرارات الإحصائية
- ✔ الفروض الإحصائية
- ✔ اختبارات الفروض والمعنوية
- ✔ أخطاء النوع الأول والنوع الثانى
- ✔ مستوى المعنوية
- ✔ الاختبار باستخدام التوزيع الطبيعى
- ✔ اختبار الجانب الواحد واختبار الجانبين
- ✔ القيمة P
- ✔ اختبارات خاصة
- ✔ العلاقة بين نظرية التقدير واختبارات الفروض

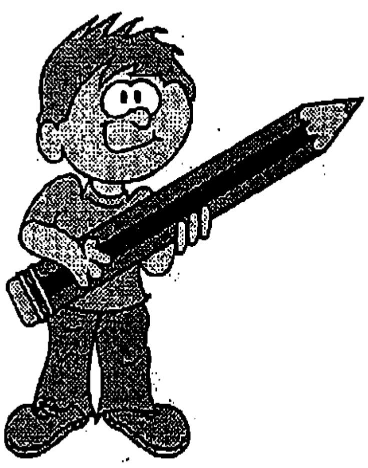
القرارات الإحصائية Statistical Decisions

غالبًا ما يتم فى الحياة العملية اتخاذ قرارات حول المجتمعات بالاعتماد على معلومات من العينة. وتسمى بالقرارات الإحصائية. ومن

أمثلة ذلك إذا ما رغبنا فى تقرير فعالية دواء معين فى علاج مرض ما بناء على بيانات العينة، أو ميزة أسلوب تدريس معين عن أسلوب آخر، أو أن تكون عملة مغينة غير متوازنة.

الفروض الإحصائية Statistical Hypothesis

فى محاولة للوصول إلى قرار فإنه من المفيد وضع افتراضات Assumptions أو تخمينات Guesses حول المجتمعات. ومن هذه الافتراضات التى قد تكون صحيحة أو غير صحيحة ما نسميه بالفروض الإحصائية Statistical Hypothesis وهى بصفة عامة عبارة عن تقريرات Statements حول التوزيعات الاحتمالية للمجتمعات.



وكمثال على ذلك إذا ما أردنا أن نعرف ما إذا كانت قطعة عملة معينة غير متوازنة Loaded، فإننا نقوم بوضع فرض Hypothesis أن قطعة العملة متوازنة Fair بمعنى أن احتمال الحصول على الصورة $p = 0.5$. وبالمثل إذا ما أردنا أن نعرف أن أسلوب ما أفضل من أسلوب آخر، فإننا نقوم بوضع الفرض أنه لا يوجد اختلاف N بين الأسلوبين (أى أن الاختلاف يرجع إلى تقلبات المعاينة من نفس المجتمع) ومثل هذا الفرض يطلق عليه عادة الفرض العدمى Null Hypothesis ويرمز له بالرمز H_0.

وأى فرض يختلف عن فرض العدم المعطى يسمى بالفرض البديل Alternative Hypothesis. ومن أمثلة ذلك إذا كان الفرض العدمى هو $p = 0.5$ فإن الفروض البديلة الممكنة هى $p \neq 0.5$، $p = 0.7$ أو $p > 0.5$.

ويرمز للفرض البديل بالرمز H_1.

اختبارات الفروض والمعنوية

Tests of Hypothesis and Significance

فى حالة افتراض أن فرض معين صحيح True ونجد أن النتيجة فى العينة العشوائية تعطى نتيجة تؤكد غير ذلك طبقًا للصدفة المطلقة التى تخضع لها نظرية المعاينة فإننا نقول إننا أمام اختلاف معنوى Significant Differences ونرفض الفرض (أو على الأقل لا نقبله معتمدين على الشواهد التى حصلنا عليها). وكمثال على ذلك إذا حصلنا على 16 صورة عند رمى قطعة عملة عشرين مرة، فإننا نرفض الفرض الذى يرى أن قطعة العملة متوازنة مع أنه يمكن تصور أنه ربما نحن على خطأ.

✓ يجب أن تعرف

إن الطرق التى تمكننا من تحديد إما قبول أو رفض الفروض أو تحديد أن العينات المشاهدة تختلف اختلافًا معنويًا عن النتائج المتوقعة تسمى باختبارات الفروض أو اختبارات المعنوية أو قواعد اتخاذ القرارات.

أخطاء النوع الأول والنوع الثانى

Type I and Type II Errors

إذا تم رفض فرض وكان هذا الفرض صحيحًا فإننا نكون قد وقعنا فى خطأ من النوع الأول Type I Error وإذا قمنا من ناحية أخرى بقبول فرض كان يجب أن يرفض فإننا نكون قد وقعنا فى خطأ من النوع الثانى a Type II Error وفى كل حالة فإن هناك قرار خطأ أو تقرير خطأ قد حدث.

وحتى تكون أية اختبارات فروض أو قواعد قرارات جيدة فلا بد أن يكون الهدف هو تقليل هذه الأخطاء وهى ليست بالعملية السهلة، فإنه لحجم عينة معين نحاول تخفيض نوع معين من الخطأ رغم أنه يتبع ذلك بتزايد النوع الآخر من ناحية أخرى. وفى الحياة العملية يكون أحد هذه الأخطاء أكثر خطورة من الآخر وبالتالى فإننا نحاول أن نوفق أو نصل إلى تحجيم أكثرهما خطورة مع التوفيق بينهما. والطريقة الوحيدة التى تساعدنا على تخفيض الاثنين معًا هى زيادة حجم العينة والتى ربما قد تكون أو لا تكون ممكنة.

مستوى المعنوية Level of Significance

فى اختبار فرض معين أكبر احتمال يمكن الوصول معه إلى خطأ من النوع الأول يسمى بمستوى المعنوية Level of Significance. ويحدد هذا الاحتمال مقدمًا قبل البدء فى إجراء الاختبار أى قبل إجراء عملية المعاينة حتى لا تؤثر النتائج التى نحصل عليها فى قرارنا.

وفى العادة نستخدم فى الحياة العملية مستويات المعنوية 0.05 أو 0.01 وهذا لا يمنع من استخدام مستويات أخرى للمعنوية. فإذا تم كمثال اختيار 0.05 أو 5% كمستوى معنوية وذلك لتصميم اختبار فرض ما وهذا يعنى أنه يوجد 5 فرص من 100 أنه يتم رفض الفرض الذى كان يجب قبوله؛ أى أنه بينما أن الفرض العدمى هو الصحيح فإننا أمام 95% ثقة أننا سوف نتخذ القرار الصحيح. وبالتالى فإننا نرفض الفرض

☆ ملاحظة!

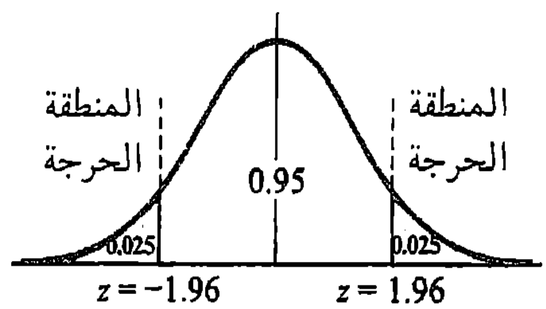
اختيار مستوى المعنوية قبل بداية اختبارات الفروض يساعد بدرجة كبيرة فى الاختيار بين رفض أو قبول الفرض العدمى.

بمستوى معنوية 0.05. Rejected at a 0.05 Level of Significance والتى تعنى أننا نقع فى خطأ باحتمال 0.05.

الاختبار باستخدام التوزيع الطبيعى

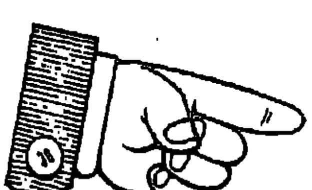
Test Involving the Normal Distribution

ولتوضيح الفكرة المقدمة سابقًا، نفترض أنه تحت فرض معين فإن توزيع المعاينة للإحصاء S له توزيع طبيعى بالتوقع μ_s والانحراف المعيارى σ_s. وتوزيع هـذا المتغير المعيارى $Z = \frac{S-\mu_s}{\sigma_s}$ يكون توزيعًا طبيعيًا معياريًا توقعه صفر وتباينة الوحدة كما هو موجـود فـى الشكـل (1-8). والقيـم المتطرفة للمتغير Z تقودنا إلى مناطق الرفض للفرض العدمى.



شكل 1-8

وكما هو مبين بالرسم نجد أننا نستطيع أن نكون على ثقـة بأنـه إذا كان 95% كان الفرض صحيحًا، فإن الدرجة المعيارية Z لإحصاء العينة الفعلـى S يقـع بيـن 1.96-، 1.96+ (حيـث أن المسـاحة تحـت المنحنـى الطبيعى المعيارى بين هاتين القيمتين تمثل 95% من المساحة الكلية).



فإذا تم اختيار عينة عشوائية ووجـدنا أن الدرجة المعيارية للإحصاء الخاص بها يقـع خـارج المـدى 1.96- ، 1.96+ فإننا نستنتج أن هذا الحدث ينتج باحتمال 5% هـو الجـزء المظلل فى الرسم ـ الشكل (1-8)

وذلك إذا كان الفرض العدمى صحيح. ونقول أن الدرجة Z تختلف معنويًا عما هو متوقع تحت هذا الفرض وبالتالى فإننا نرفض هذا الفرض العدمى.

والجزء المظلل ويمثل 0.05 هو مستوى المعنوية لهذا الاختبار. وهو يمثل احتمال الخطأ الذى نقع فيه عند رفض الفرض العدمى؛ أى احتمال حدوث خطأ من النوع الأول ولذلك نقول أن الفرض رفض عند مستوى معنوية 0.05، أو أن الدرجة Z لإحصاء معاينة معين يكون معنويًا Significant عند مستوى معنوية 0.05.

والمجموعة من الدرجات المعيارية Z خارج المدى 1.96-، 1.96+ تمثل المنطقة الحرجة Critical Region أو منطقة رفض الفرض العدمى. Region of Rejection of the Hypothesis. ومجموعة الدرجات المعيارية داخل المدى 1.96+، 1.96- يمكن أن تسمى إذن منطقة القبول Region of Acceptance of the Hypothesis للفرض العدمى أو المنطقة غير المعنوية The Region of Nonsignificance.

وعلى أساس الملاحظات السابقة يمكننا صياغة قاعدة الاختبار التالية:

(*a*) رفض الفرض عند مستوى معنوية 0.05 إذا كانت الدرجة العيارية z للإحصاء S تقع خارج المدى 1.96، 1.96- (أى إنه إذا كانت $z > 1.96$ أو $z < -1.96$). وهذا مرادف لأن نقول أن إحصاء العينة المشاهدة يكون معنويًا عند مستوى معنوية 0.05.

(*b*) قبول الفرض (أو يمكن إذا أردنا عدم اتخاذ قرار مطلقًا) بخلاف ذلك.

ويجب أن نلاحظ أنه يمكن استخدام مستويات معنوية أخرى. كمثال مستوى المعنوية 0.01 وبالتالى نقوم بإحلال 2.58 بدلاً من 1.96 (انظر

جدول 1-8) ويمكن استخدام جدول (1-7) على اعتبار أن مستوى المعنوية مضافًا إلى مستوى الثقة يساوى 100%.

اختبار الجانب الواحد واختبار الجانبين

One-Tailed and Two-Tailed Tests

فى الاختبار السابق قد ركزنا اهتمامنا على القيم المتطرفة Extreme Values للإحصاء S أو القيم z التابعة له على جانبى الوسط؛ أى على ذيلى التوزيع. ولهذا السبب يقال على مثل هذا الاختبار الاختبار ذى الذيلين Two-tailed Tests أو الاختبار ذى الجانبين Two-sided Tests.

وغالبًا ما نهتم فقط بالقيم المتطرفة فى طرف واحد واحد أو فى جانب واحد فقط. أى فى ذيل واحد من التوزيع. وكمثال على ذلك حينما نقوم باختبار الفرض الذى يرى أن عملية أفضل من العملية الأخرى. فمثل هذا النوع من الاختبارات يسمى بالاختبارات ذات الذيل الواحد One-tailed Tests أو الاختبارات ذات الاتجاه الواحد One-sided Tests. وفى مثل هذا الاختبار تكون المنطقة الحرجة فى اتجاه واحد فقط من التوزيع بمساحة تكون مساوية لمستوى المعنوية.

والجدول (1-8) الذى يعطينا قيم z للاختبارات فى اتجاه واحد واتجاهين لمستويات المعنوية المختلفة وسوف يفيد كثيرًا الرجوع إليه. ويمكن إيجاد القيم الحرجة للدرجة العيارية z لمستويات المعنوية الأخرى من جداول المساحة تحت التوزيع الطبيعى.

جدول 1-8

مستوى المعنوية α	0.10	0.05	0.01	0.005
القيم الحرجة z للاختبارات ذات الذيل الواحد	−1.28 *or* 1.28	−1.645 *or* 1.645	−2.33 *or* 2.33	−2.58 *or* 2.58
القيم الحرجة z للاختبارات ذات الذيلين	−1.645 *and* 1.645	−1.96 *and* 1.96	−2.58 *and* 2.58	−2.81 *and* 2.81

القيمة P P Value

فى معظم الاختبارات نعتبر الفرض العدمى H_0 هو تأكيد على أن معلمة المجتمع تكون مساوية لقيمة معينة وأن الفرض البديل H_1 يكون هو أحد ثلاث قيم أخرى:

(i) أن المعلمة أكبر من القيمة المحددة (اختبار الذيل الأيمن).

(ii) أن المعلمة أقل من القيمة المحددة (اختبار الذيل الأيسر).

(iii) أن المعلمة إما أكبر من أو أقل من القيمة المحددة (اختبار الذيلين).

وفى حالة (i)، (ii) يكون H_1 له اتجاه مفرد بالنسبة إلى المعلمة. أما فى الحالة الثالثة تكون H_1 ثنائية الاتجاه. وبعد عمل الاختبار وحساب الإحصاء S فإن القيمة P (the P Value) للاختبار تكون هى احتمال أن قيمة S فى الاتجاه (أو الاتجاهات) H_1 فى طرف التوزيع مثل ما تحقق فعلاً عندما يكون H_0 صحيح.

وكمثال على ذلك، نفترض أن الانحراف المعيارى σ لمجتمع طبيعى معروف ويساوى 3، وأن H_0 ترى أن الوسط μ يكون مساويًا 12. وتم سحب عينة حجمها 36 من هذا المجتمع أعطت متوسط 12.95، فإن إحصاء الاختبار المحسوب من العينة يكون

$$Z = \frac{\overline{X} - 12}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 12}{0.5},$$

والذى يمثل المتغير المعتاد العيارى عندما يكون H_0 صحيحا. وتكون قيمة إحصاء الاختبار Z هى

$$Z = \frac{12.95 - 12}{0.5} = 1.9.$$

وتكون القيمة P لهذا الاختبار تعتمد على الفرض البديل كالتالى:

(i) عندما $H_1: \mu > 12$ (الحالة الأولى). فإن القيمة p تمثل احتمال أن العينة العشوائية ذات الحجم 36 تعطى الوسط الحسابى 12.95 أو أكثر إذا كان الوسط الحسابى الحقيقى (متوسط المجتمع) 12؛ أى أن $P(z \geq 1.9) = 0.029$ وبلغة أخرى أنه يوجد ثلاث فرص فى كل 100 فرصة يكون $\bar{x} \geq 12.95$ إذا كان المتوسط μ مساويًا 12.

(ii) عندما تكون $H_1: \mu < 12$ (الحالة الثانية) فإن القيمة P تمثل احتمال أن متوسط العينة العشوائية ذات الحجم 36 تعطى متوسطاً مقداره 12.95 أو أقل إذا كان المتوسط الحقيقى للمجتمع مساويًا 12 أى أن $P(Z \leq 1.9) = 0.971$ وبلغة أخرى أنه يوجد 97 فرصة من 100 يكون فيها متوسط العينة $\bar{x} \leq 12.95$ إذا كان المتوسط الحقيقى μ مساويًا 12.

(iii) عندما تكون $H_1: \mu \neq 12$ (الحالة الثالثة) فإن القيمة P تمثل احتمال أن متوسط العينة العشوائية 0.95 يختلف عن متوسط المجتمع $\mu = 12$ بمعنى أن $\bar{x} \geq 12.95$ أو $\bar{x} \leq 11.05$ إذا كان المتوسط الحقيقى يكون مساويًا للقيمة 12. وتكون هنا القيمة P هى $0.057 = P(Z \geq 1.9) + P(Z \leq -1.9)$ والتى تقول أنه يوجد 6 حالات فى كل مائة حالة أن $|\bar{x}-12| \geq 0.095$ إذا كانت القيمة الحقيقية مساوية للقيمة 12؛ (أى $\mu = 12$).

وقيم P الصغيرة تعطينا دليلاً لرفض الفرض العدمى H_0 لصالح الفرض البديل. كما أن قيم P الكبيرة تعطينا دليلاً قويًا عادلاً لعدم رفض الفرض العدمى فى صالح الفرض البديل. ففى الحالة (i) فى المثال السابق فإن القيمة الصغيرة $P = 0.029$ تمثل دليلاً قويًا عادلاً على أن متوسط المجتمع أكبر من 12، بينما فى الحالة (ii) فإن القيمة الكبيرة $P = 0.971$ تمثل دليل

قوى على أن $H_0: \mu = 12$ لا يجب أن يرفض فى صالح الفرض البديل $H_1: \mu < 12$ أما فى الحالة (iii) فإن القيمة $P = 0.057$ تمدنا بدليل لرفض H_0 فى صالح الفرض البديل $H_1: \mu \neq 12$ ولكن ليس بدليل أكثر من رفض الفرض H_0 فى صالح الفرض البديل $H_1: \mu > 12$.

ويجب أن نذكر أن القيمة P ومستوى المعنوية لا تقدم لنا معياراً لرفض أو عدم رفض الفرض العدمى لنفسه ولكن الرفض أو عدم الرفض لصالح الفرض البديل. وكما سبق فى المثال التصويرى السابق أن نتائج اختبار متماثلة ومستويات معنوية مختلفة يمكن أن توصلنا إلى استنتاجات مختلفة بالنظر إلى نفس الفرض العدمى بالعلاقة مع فروض مختلفة بديلة.

حيث يكون إحصاء الاختبار Test Statistic S هو متغير عشوائى معتاد معيارى فإن جدول الملحق B سوف يكون كافيًا لحساب القيمة P ولكن حينما تكون S هى إحدى المتغيرات العشوائية t، F، أو كاى تربيع Chi-square فإن كل منهما له توزيع مختلف يعتمد على درجات الحرية فإنه يوجد برامج جاهزة لحساب القيمة P بالإضافة إلى الجداول بالملاحق (C)، (D)، (E) والعديد من الجداول الأخرى.

مثال 8.1.: متوسط فترة حياة 100 لمبة فلورسنت منتجة من مصنع معين هو 1570 ساعة بانحراف معيارى 120 ساعة. إذا كانت μ تمثل متوسط حياة لكل اللمبات الناتجة بواسطة المصنع، فاختبر الفرض الذى يرى أن، ساعة $\mu = 1600$، ضد الفرض البديل، ساعة $\mu \neq 1600$، استخدام مستوى معنوية 0.05 وأوجد القيمة P للاختبار.

Example 8.1. The mean lifetime of a sample of 100 fluorescent light bulbs produced by a company is computed to be 1570 hours with a standard deviation of 120 hours. If μ is the mean lifetime of all the bulbs produced by the company, test the hypothesis μ = 1600 hours against the alternative hypothesis μ ≠ 1600 hours. Use a significance level of 0.05 and find the P value of the test.

لا بد وأن نقرر أحد هذين الفرضين

$H_0: \mu = 1600$ ساعة ، $H_1: \mu \neq 1600$ ساعة

سوف نستخدم الاختبار ذا الاتجــاهين حيــث أن $\mu \neq 1600$ يشمـل كـل القيم التى تكون أكبر من وأقــل مــن 1600 ســاعة فــى طرفــى التوزيــع. وللاختبار ذى الاتجاهين بمستوى معنوية 0.05، فإننا يكون لدينــا قــاعدة القرار التالى:

1. رفض H_0 إذا كانت الدرجة المعيارية z لمتوسط العينة خارج المدى -1.96 إلى 1.96.
2. قبول H_0 غير ذلك.

والإحصاء محل البحث هو الوسط الحسابى $\overline{X}$. والتوزيع الاحتمالى للوســط الحسابى X يكون له المتوسط $\mu_{\bar{X}} = \mu$ والانحــراف المعيارى $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. حيث أن μ و σ يمثلان الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للمجتمع لكل اللمبات المنتجة بواسطة الشركة.

وتحت ظل الفرض العدمى H_0 حيث، ساعة $\mu = 1600$،

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{120}{\sqrt{100}} = 12$$

باستخدام الانحراف المعيارى للعينة كتقدير σ. وحيث أن Z هى

$$Z = \frac{\overline{X} - 1600}{12} = \frac{1570 - 1600}{12} = -2.50$$

فتقع خارج المــدى -1.96 إلــى 1.96. وبالتــالى فإننــا نرفـض H_0 عنـد مستوى معنوية 0.05.

أما القيمة P فى حالة اتجاهين هى

$$P(Z \le -2.50) + P(Z \ge 2.50) = 0.0124$$

والتى تمثل احتمال أن متوسط فترة حياة اللمبات أقل من 1570 ساعة أو أكثر من 1630 ساعة تحدث بالصدفة حينما تكون H_0 صحيحة.

اختبارات خاصة Special Tests

فى حالة العينات الكبيرة، تقترب كثيرًا من الإحصاءات من التوزيع الطبيعى بالمتوسط μ_S والانحراف المعيارى σ_S. وفى هذه الأحوال نستخدم هذه النتائج لكى نصيغ قواعد الاختبار Decision Rules أو اختبارات الفروض والمعنوية. والحالات الآتية تمثل حالات خاصة للإحصاءات ذات الأهمية العملية. وفى كل حالة تعتبر النتائج على المجتمعات الغير محدودة Infinite أو فى حالة المعاينة مع الإعادة نطبق التوزيع الطبيعى. وفى حالة المعاينة بدون إعادة من مجتمعات محدودة فلا بد وأن يوجد تعديل بالنتائج وسوف نعتبر فقط الحالات ذات العينات الكبيرة $n \ge 30$.

1. **المتوسطات** Means: هنا تكون $S = \overline{X}$ متوسط العينة $\mu_s = \mu_{\overline{X}} = \mu$ يكون مساويًا متوسط المجتمع، $\sigma_s = \sigma_{\overline{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حيث أن σ تمثل الانحراف المعيارى للمجتمع و n هى حجم العينة والمتغير المعيارى هو

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad (1)$$

يمكن للضرورة أن نستخدم الانحراف المعيارى s من العينة (أو $\hat{s}$) كتقدير للانحراف المعيارى للمجتمع σ.

ولاختبار الفرض العدمى H_0 أن متوسط المجتمع $\mu = a$. فإننا

نستخدم الإحصاء (1). وبالتالي، فإذا كان الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 0$ نستخدم الاختبار في اتجاهين. ونقبل H_0 (أو على الأقل لا نرفض) بمستوى معنوية 0.05 إذا ما عينة ذات الحجم n لها متوسط $\bar{x}$ تعطى

$$-1.96 \leq \frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1.96 \tag{2}$$

ونرفض الفرض العدمي في الحالات غير ذلك. ولمستويات المعنوية الأخرى فإننا نقوم بتغيير العلاقة (2) تبعًا لذلك. ولكي نختبر الفرض H_0 ضد الفرض البديل H_1 أن الوسط الحسابي للمجتمع أكبر من a، فإننا نستخدم الاختبار في اتجاه واحد. ونقبل H_0 (أو على الأقل لا نرفضه) عند مستوى معنوية 0.05 إذا

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} < 1.645 \tag{3}$$

(انظر الجدول 1-8) ونرفضه في الحالات غير ذلك. ولاختبار H_0 ضد الفرض البديل H_1 أن الوسط الحسابي للمجتمع أقل من a، فإننا نقبل H_0 عند مستوى معنوية 0.05 إذا

$$\frac{\bar{x}-a}{\sigma/\sqrt{n}} > 1.645 \tag{4}$$

2. **النسب Proportions**: هنا تكون $S = P$ هي نسبة النجاح في العينة $\mu_S = \mu_P = p$ حيث أن p هي النسبة في المجتمع. n تمثل حجم العينة، $\sigma_S = \sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ حيث $q = 1 - p$ والمتغير المعياري

$$Z = \frac{P-p}{\sqrt{pq/n}} \tag{5}$$

وفي حالة $P = X/n$ تمثل النسبة في العينة، X عدد مرات النجاح الفعلي في العينة. فإن العلاقة (5) تصبح

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \qquad (6)$$

وبالمثل سوف نقوم بعمل الاختبار فـي اتجـاه واحـد أو اتجـاهين كما تم فى حالة الوسط الحسابى.

3. **الفـرق بـين متوسـطين Differences of Means**: افـترض أن $\bar{X}_1$، $\bar{X}_2$ يمثلان الأوساط الحسابية فى العينــات الكبـيرة n_1، n_2 المسـحوبة من مجتمعين على الترتيب لـهما المتوسـطات μ_1، μ_2 بالانحرافـات المعيارية σ_1، σ_2. واعتبر الفـرض العدمـى H_0 أنـه لا يوجـد اختـلاف بين متوسطى المجتمعين؛ بمعنى أن $H_0: \mu_1 = \mu_2$ وكما سبق أن أثبتنـا فى الباب السادس أن توزيع المعاينة للفرق بين متوسط مجتمعيــن لـه توزيع طبيعى تقاربى وأن الانحراف المعيارى هو

$$\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = 0 \qquad \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad (7)$$

حيث يمكن استخدام الانحرافات المعيارية المشاهدة إذا احتجنـا إلى ذلك s_1، s_2 (أو $\hat{s}_1$ و $\hat{s}_2$) كتقديرات للانحـرافات المعيارية σ_1، σ_2. ويكون المتغير المعتاد المعيارى كالتالى

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \qquad (8)$$

وكما سبق فى الجزء (1) السـابق، فإنـه يمكـن أن نختـبر الفـرض العدمى ضد الفرض البديل (أو معنوية الفرق المشاهد) عند مستوى المعنوية المناسب.

4. **الفرق بين النسب Differences of Proportions**: افـترض أن P_1، P_2 تمثل النسب المشاهدة فى العينات الكبـيرة ذات الأحجـام n_1، n_2 على الترتيب والمسحوبة من المجتمعات والتـى بـها النسـب هـى

P_1، P_2. اعتبر الفرض العدمى هو أنه لا يوجد اختلاف بين نسب المجتمعات؛ أى أن $p_1 = p_2$. وبالتالى فإن العينات تعتبر مسحوبة من مجتمع واحد.

ومن دراستنا للفرق بين نسبتين فى الباب السادس سوف نضع $p_1 = p_2 = p$ وقد وجدنا أن الفرق بين نسبتين له توزيع طبيعى تقاربى بالمتوسط والانحراف المعيارى

$$\mu_{P_1-P_2} = 0 \qquad \sigma_{P_1-P_2} = \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n2}\right)} \qquad (9)$$

حيث أن: $\overline{P} = \dfrac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}$ تستخدم لتقدير النسبة المشتركة p.

وباستخدام المتغير المعيارى

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - 0}{\sigma_{P_1-P_2}} = \frac{P_1 - P_2}{\sigma_{P_1-P_2}} \qquad (10)$$

ونستطيع ملاحظة الفروق عند أى مستوى معنوية مناسب وبالتالى نطبق اختبار الفرض العدمى.

ويمكن بالمثل تصميم اختبارات مماثلة للإحصاءات الأخرى.

العلاقة بين نظرية التقدير واختبارات الفروض

Relationship between Estimation Theory and Hypothesis Testing

من الملاحظات السابقة نجد وجود علاقة بين نظرية التقدير بواسطة فترات الثقة ونظرية اختبارات الفروض. وكمثال على ذلك نلاحظ أن النتيجة (2) بقبول الفرض H_0 بمستوى معنوية 0.05 يكون معادلاً للنتيجة (1) فى الباب السابع الذى يقودنا إلى فترة الثقة 95%.

$$\bar{x} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (11)$$

وبالتالى فإنه على الأقل فى الاختبارات فى اتجاهين فإننا نقوم فعلاً بتطبيق فترات الثقة فى الباب السابع لعمل اختبارات الفروض. وبالمثل نصل إلى نفس النتيجة لاختبارات الجانب الواحد، حيث تتطلب إعداد فترات ثقة فى اتجاه واحد.

مثال 8.2.: اعتبر المثال (8.1.). فإن فترة الثقة 95% للمثال (8.1.) هى

Example 8.2. Consider Example 8.1. A 95% confidence interval for Example 8.1 is the following

$$1570 - \frac{(1.96)(120)}{\sqrt{100}} \le \mu \le 1570 + \frac{(1.96)(120)}{\sqrt{100}}$$

حيث أن

$$1570 - 23.52 \le \mu \le 1570 + 23.52$$

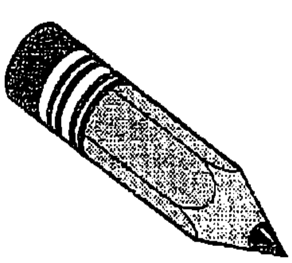
وهذا يقودنا إلى فترة ثقة بين 1546.48 و 1593.52 بدرجة ثقة 95%. وواضح أنه فى حدود هذه الفترة لا يشمل المتوسط الذى نختبره وهو 1600 وهذا يقودنا إلى رفض الفرض العدمى $H_0: \mu = 1600$.

الفصل التاسع
تمهيد المنحنيات والانحدار والارتباط
Curve Fitting, Regression, and Correlation

فى هذا الفصل:

- ✔ تمهيد المنحنيات
- ✔ الانحدار
- ✔ طريقة المربعات الصغرى
- ✔ خط المربعات الصغرى
- ✔ خط انحدار المربعات الصغرى بدلالة تباينات وتغاير العينة
- ✔ الخطأ المعيارى للتقدير
- ✔ معامل الارتباط الخطى
- ✔ معامل الارتباط العام
- ✔ الارتباط وعدم الاستقلال

تمهيد المنحنيات Curve Fitting



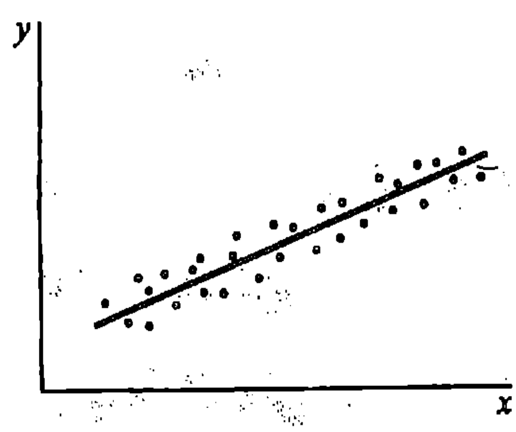
كثيرًا جدًا ما توجد فى التطبيقات العملية علاقة بين متغيرين أو أكثر ونريد التعبير عنها فى صيغة رياضية بتحديد معادلة تربط هذه المتغيرات.

وأول خطوة هى جمــع بيانــات للقيــم المتقابلــة لـهذين المتغـيرين. وكمثال نفترض أن x، y ترمزان إلــى طـول ووزن الإنســان البــالغ علــى الترتيب. وبالتالى فإن عينة من n فــرد تبيــن لنــا الأطـوال $x_1, x_2, ..., x_n$ والأوزان المقابلة $y_1, y_2, ..., y_n$

والخطوة التالية هى رسم هذه النقط $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ علــى رسم بيانى. ويسمى أحيانًا شكل هذه النقط على الرسم بشكل الانتشــار Scatter Diagram.

ولكننا فى الغالب نصور شكل منحنى البيانــات تقريبًــا مــن شكــل الانتشــار. ويسمى هذا الخط بالمنحنى التقريبى Approximating Curve.

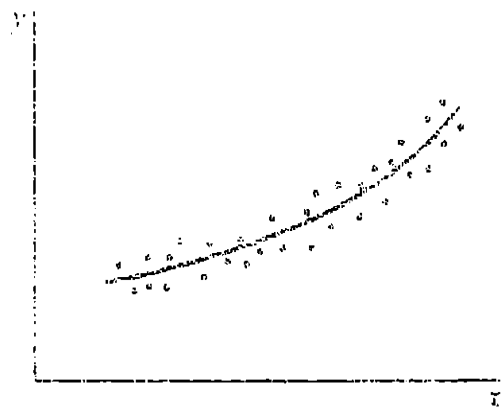
وفى شكل (9-1) كمثال تظهر البيانــات علاقــة بيــن المتغـيرات. تمثــل تقريبًا بصورة جيدة فى خط مستقيم. وبالتالى نقــول أنــه توجــد علاقــة خطية بين المتغيرات Linear Relationship.



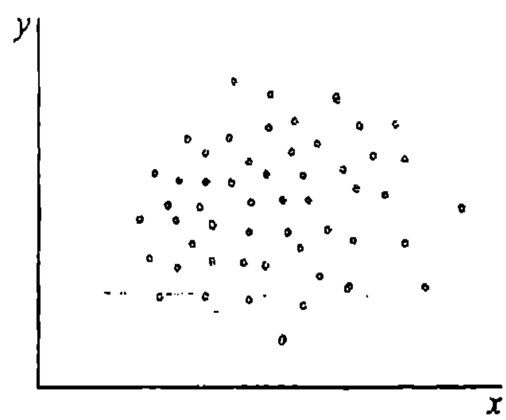
شكل 1-9

أما فى شكل (9-2) يتضح أنه توجــد علاقــة أيضًــا بيــن المتغـيرات ولكنها ليست علاقة خطية ونســميها علاقــة غــير خطيــة Nonlinear Relationship بين المتغيرات.

أما فى شكل (9-3) يظهر شكــل الانتشــار عــدم وجــود علاقــة علــى الإطلاق بين المتغيرات.



شكل 9-2



شكل 9-3

والمشكلة العامة لإيجاد المعادلات التى تعطى المنحنيات التقاربية لمجموعة من البيانات تسمى بتمهيد المنحنيات Curve Fitting. وفى التطبيق يظهر نوع المعادلة من شكل الانتشار. ففى الشكل (9-1) يمكننا استخدام معادلة الخط المستقيم:

$$y = a + bx$$

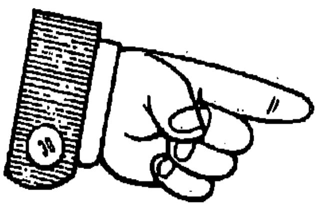
بينما فى الشكل (9-2) يمكننا محاولة استخدام منحنى الدرجة الثانية أو القطع المكافئ بالمعادلة:

$$y = a + bx + cx^2$$

وتحقيقاً للغرض من هذا الكتاب سوف نقتصر على البيانات التى تعطى علاقة خطية فقط.

وأحيانًا يساعدنا رسم شكل الانتشار بعد تحويل المتغيرات Transformed Variables. وكمثال على ذلك المتغيرات $\log x$، $\log y$ تقودنـا إلـى عمـل خط مستقيم فإنه يمكن محاولة اعتبار أن $\log y = a + bx$ تمثـل معادلـة للمنحنى التقاربى.

الانحدار Regression



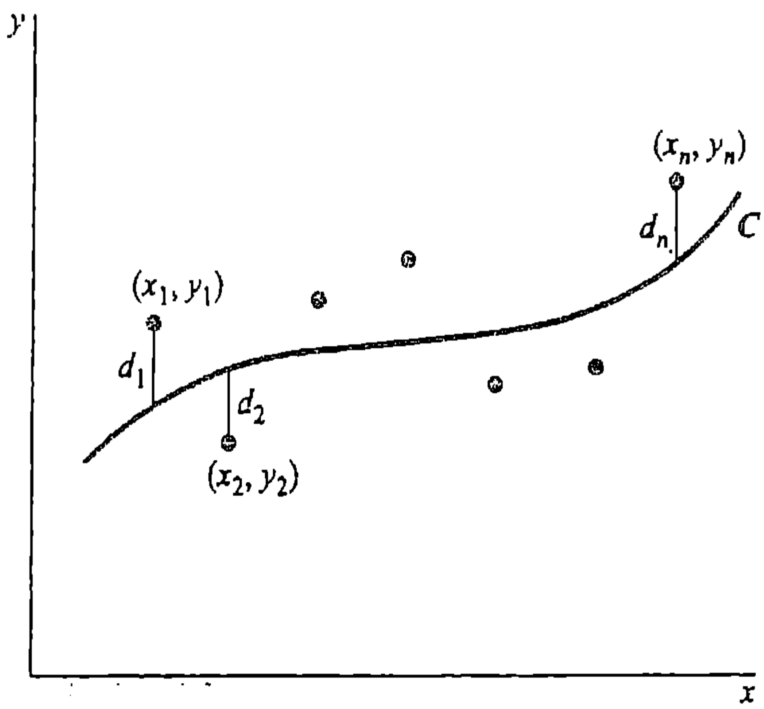
أحد أهم أهداف تمهيد المنحنيات هو تقدير أحـد المتغـيرات (المتغـير التـابع) مـن المتغـير الآخـر (المتغير المسـتقل). ونسـمى عمليـة التقديـر هـذه بالانحدار Regression. فإذا أردنا تقدير y باستخدام x فى معادلة، فإننا نسمى هذه المعادلـة بمعادلـة انحـدار y علـى x، (A Regression Equation of y on x) والمنحنى التابع يسمى بمنحنى انحدار y على x. (A Regression Curve of y on x). وحيث أننا نستخدم فقط الحالة الخطية فإننا نقول أنه خط انحدار y على x، (A Regression Line of y on x).

طريقة المربعات الصغرى The Method of Least Squares

عمومًا يوجد أكثر من منحنى يمكن تمـهيده لمجموعـة مـن البيانـات. ولكى نتحاشى الحكم الشخصى فى وجود أكثر من خـط أو أكـثر مـن منحنى تقريبى لتمثيل هذه البيانات فإنه من الضرورى لتعريف «أفضـل خط ممهد» "Best-Fitting Line" أو «أفضل منحنى ممهد» "Best-Fitting Parabola" وهكذا.

ولكى نصل للتعريف المطلوب، نفترض الشكل (4-9) والذى تم وضـع النقـط $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ عليـه. وبالنسـبة للقيمـة (x_1, y_1) فإنـه يوجـد اختلافات بين y_1 والقيمـة التابعـة علـى الخـط C. وسـوف نرمـز لـهذا الاختلاف بالرمز d_1 والذى يسمى عادة بخطأ الانحراف Deviation Error أو

الباقى Residual ويكون موجبًا أو سالبًا أو مساويًا للصفر. وبالمثل من القيم التابعة والمقابلة لـ $y_1, y_2, \dots, y_n$ نحصل على الانحرافات $d_1, d_2, \dots, d_n$



شكل 9-4

ومقياس تمهيد الخط C لمجموعة من البيانات يرتبط بالكمية $d_1^2 + d_2^2 + \dots d_n^2$ ويكون التمهيد جيدًا إذا كان هذا المقدار صغيرًا. أما إذا كان هذا المقدار كبيرًا فإن التمهيد يكون رديئًا. وبالتالى نقوم بعمل التعريف التالى:

تعريف: من بين كل المنحنيات التى تمثل مجموعة من النقط تقاربيًا، يوجد منحنى واحد يمثل أحسن تمهيد Best Fitting للمجموعة وهو عندما تكون:

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots d_n^2 = \text{نهاية صغرى}$$

والمنحنى الذى له هذه الخاصية يقال أنه يمهد البيانات بإحساس ومفهوم المربعات الصغرى ويسمى بمنحنى انحدار المربعات الصغرى Least-Squares Regression Curve أو ببساطة منحنى المربعات الصغرى.

والخط الذى له هذه الخاصية يسمى بخط المربعات الصغـرى Least Squares Line. والقطع المكافئ الـذى لـه هـذه الخاصيـة يسـمى بقطـع المربعات الصغرى Least-Squares Parabola وهكذا .. إلخ.

وعادة يتم توظيف المفهوم الجديد عندما x تمثل المتغير المسـتقل Independent Variable وتمثل y المتغير التابع Dependent Variable. أما إذا اعتبرنـا x هـى المتغـير التـابع، فـإن التعريـف سـوف يعـدل بـأخذ الانحرافات الأفقية بـدلاً مـن الانحرافـات الرأسـية. وهـذان التعريفـان يقودانا إلى منحنيين مختلفيـن للمربعـات الصغـرى. فـالأول بـه y هـى المتغير التابع والثانى به x هى المتغير التابع. ولكننا سوف نعتبر دائمًا y هى المتغير التابع، x هى المتغير المستقل. إلا إذا نص على غير ذلك.

✓ يجب أن تعرف

أنه من الممكن تعريف منحنى مربعات ـ صغرى آخر باعتبـار المسـافات المتعامدة من نقط البيانات إلى المنحنى بدلاً من المسـافات الرأسـية أو الأفقية. وعلى أى حال لا تستخدم هذه الطريقة غالبًا.

خط المربعات الصغرى The Least-Squares Line

باستخدام التعريف السابق يمكننا أن نبين أن خط المربعـات الصغـرى التقريبى لمجموعة من النقط $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ يكون له المعادلة

$$y = a + bx \qquad (1)$$

حيث أنه يمكن إيجاد قيمة الثوابت a, b على المعـادلات الآتيـة حـلاً آنيًا

$$\sum y = an + b\sum x$$
$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2 \qquad (2)$$

والتى تسمـى بالمعادلات الطبيعية Normal Equations لخـط المربعات الصغـرى. مـع ملاحظـــة أنـــه تــم اختصـــار $\sum xy$ ، $\sum y$ بــدلاً مـــن $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ، $\sum_{i=1}^{n} y_i$.

من السهل تذكر المعادلة الطبيعية (2) بمـلاحظة أن المعادلة الأولى تم إيجادها بجمع المعادلة (1) على جميع النقط، أما المعادلـة الثانيـة فتم إيجادها بضرب طرفى المعادلة (1) فى x ثم إجـراء عمليـة الجمـع بعد ذلك، وبالطبع ليس هذا باشتقاق المعــادلات الطبيعيـة ولكـن فقـط حتى يمكن تذكرها.

وتكون قيمة كل من الثوابت a، b كالتالى

$$a = \frac{\left(\sum y\right)\left(\sum x^2\right) - \left(\sum x\right)\left(\sum xy\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \quad , \quad b = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \qquad (3)$$

كما أنه يمكن كتابة قيمة ما على الشكل

$$b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2} \qquad (4)$$

حيث أن $\bar{x}$ ، $\bar{y}$ هـــى الأوســاط الحسابيـة لكـل مـن x، y. كـمـا أن $\bar{x} = \left(\sum x\right)/n$. وبقسمة طرفى العلاقـة الطبيعيـة الأولـى فـى (2) علـى n نحصل على

$$\bar{y} = a + b\bar{x} \qquad (5)$$

وبالتالى فإننا نوجد قيمة b مــن العلاقـة (3) أو (4) أولاً ثـم اسـتخدام العلاقة (5) لإيجاد قيمة a. حيث أن $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

وذلك يكون مساويًا لكتابة خط المربعات الصغرى كالتالى

$$y-\bar{y}=b(x-\bar{x}) \quad \text{or} \quad y-\bar{y}=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}(x-\bar{x}) \qquad (6)$$

والعلاقة (6) تبين أن الثابت b يمثل ميل الخط (1) The Slope of the Line. وهو الثابت الأساسى لتحديد الخط. ومن (6) يتضح لنا أيضًا أن خط المربعات الصغرى يمر من خلال النقطة $(\bar{x},\bar{y})$ والتى تسمى المركز The Centroid أو مركز ثقل البيانات The Center of Gravity of the Data.

والميل لخط الانحدار يكون مستقلاً عن نقطة الأصل للمحاور. وهذا يعنى أنه إذا تم عمل التحويل (فى الغالب يسمى بعملية نقل المحاور) كالتالى

$$x=x'+h \qquad y=y'+k \qquad (7)$$

حيث أن k، h تمثل ثوابت. فإن قيمة b تكون

$$b=\frac{n\sum x'y'-\left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{n\sum x'^2-\left(\sum x'\right)^2}=\frac{\sum(x-\bar{x}')(y-\bar{y}')}{\sum(x'-\bar{x}')^2} \qquad (8)$$

حيث أن y، x تم تغييرهما بـ x'، y' ولهذا فإن قيمة b لا تتغير بالتحويلة (7). ونلاحظ أن a والتى تحدد الجزء المقطوع من المحور على y والتى تعتمد على نقطة الأصل وبالتالي فإنها سوف تتغير.

وفى الحالة الخاصة $h=\bar{x}$، $k=\bar{y}$ نجد أن (8) تصبح

$$b=\frac{\sum x'y'}{\sum x'^2} \qquad (9)$$

وغالبًا ما نستخدم العلاقات (8)، (9) لتبسيط العمليات الحسابية فى حالة الحصول على خط المربعات الصغرى.

والملاحظة السابقة تنطبق أيضًا على خط انحدار x على y. والنتائج نحصل عليها فى التغيير فى x، y. وعلى ذلك فإن خط انحدار المربعات الصغرى x على y هو

$$x - \bar{x} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (y - \bar{y})^2}(y - \bar{y}) \qquad (10)$$

وتلاحظ أن العلاقة (10) تختلف عن العلاقة (6).

تذكر!

أنك يجب أن تحاول إيجاد معادلة خط الانحدار إذا وفقط إذا كانت مجموعة البيانات لها علاقة خطية.

مثال 9.1. الجدول 9-1 يعطى الأطوال x، y لعينة من 12 أبًا وأكبر الأبناء. فأوجد خط انحدار المربعات الصغرى.

Example 9.1. Table 9-1 shows the respective heights x and y of a sample of 12 fathers and their oldest sons. Find the least-squares regression line of y on x.

جدول 9-1

أطوال الأب x بالبوصة	65	63	67	64	68	62
أطوال الابن y بالبوصة	68	66	68	65	69	66

أطوال الأب x بالبوصة	70	66	68	67	69	71
أطوال الابن y بالبوصة	68	65	71	67	68	70

خط الانحدار y على x هو $y = ax + b$ ويمكن إيجاده بحل المعادلات الطبيعية

$$\sum y = an + b\sum x \qquad \text{and} \qquad \sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

ونقوم بإيجاد المجاميع كالتالى:

جدول 9-2

x	y	x^2	xy	y^2
65	68	4225	4420	4624
63	66	3969	4158	4356
67	68	4489	4556	4624
64	65	4096	4160	4225
68	69	4624	4692	4761
62	66	3844	4092	4356
70	68	4900	4760	4624
66	65	4356	4290	4225
68	71	4624	4828	5041
67	67	4489	4489	4489
69	68	4761	4692	4624
71	70	5041	4970	4900
$\sum x = 800$	$\sum y = 811$	$\sum x^2 = 53{,}418$	$\sum xy = 54{,}107$	$\sum y^2 = 54{,}849$

وباستخدام هذه المجاميع نحصل على المعادلات الطبيعية

$12a + 800b$	=	811
$800a + 53{,}418b$	=	54,107

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على $a = 35.82$، $b = 0.476$ وبالتالى تكون معادلة انحدار المربعات الصغرى y على x هى $y = 35.82 + 0.476\,x$

خط انحدار المربعات الصغرى بدلالة تباينات وتغاير العينة

The Least-Squares Regression Line in Terms of Sample Variances and Covariance

تباينات وتغاير العينة للمتغيرات x، y هى

$$s_x^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}, \quad s_y^2 = \frac{(y-\bar{y})^2}{n}, \quad s_{xy} = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} \qquad (11)$$

ويمكن كتابة خطوط انحدار المربعات الصغرى y على x وأيضًا x على y بدلالة التباينات والتغاير كما يلى على الترتيب

$$y-\bar{y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}(x-\bar{x}) \quad \text{and} \quad x-\bar{x}=\frac{s_{xy}}{s_y^2}(y-\bar{y}) \qquad (12)$$

كما أن معامل ارتباط العينة The Sample Correlation Coefficient هو

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y} \qquad (13)$$

وبالتالى فإن (12) يمكن أن تكتب كالتالى

$$\frac{y-\bar{y}}{s_y}=r\frac{(x-\bar{x})}{s_x} \quad \text{and} \quad \frac{x-\bar{x}}{s_x}=r\frac{(y-\bar{y})}{s_y} \qquad (14)$$

وبالنظر إلى حقيقة أن $\frac{x-\bar{x}}{s_x}$ ، $\frac{y-\bar{y}}{s_y}$ تمثل القيمة المعيارية للعينة أو الدرجات المعيارية. فإن النتائج (14) تمثل أبسط طريقة لإيجاد خطوط الانحدار. ومن الواضح أن خطى الانحدار فى (14) مختلفين ماعدا عندما $r=\pm 1$ حيث فى هذه الحالة نجد أن فقط العينة تقع كلها على الخط والتى تمثل الارتباط والانحدار المستقيم التام Perfect Linear Correlation and Regression.

ومن المهم أن نذكر أنه إذا كان خطى الانحدار (14) $x=c+dy$ $y=ax+b$ على الترتيب. فإن

$$bd=r^2 \qquad (15)$$

وحتى الآن لم نحدد أو ندرس معنوية معامل الارتباط ولكننا قد قمنا فقط بتعريفه بدلالة التباينات والتغاير فقط.

الخطأ المعيارى للتقدير Standard Error of Estimate

إذا اعتبرنا أن y_{est} ترمز إلى القيمة المقدرة للمتغير y بالنسبة إلى قيمة معينة x والتى نحصل عليها من منحنى الانحدار y على x. وبالتالى فإن مقياس التشتت حول خط الانحدار نحصل عليه من الكمية

$$S_{y,x} = \sqrt{\frac{\sum\left(y - y_{est}\right)^2}{n}} \tag{16}$$

والتى تسمى بالخطأ المعيارى المقدر y علــى The Standard Error of x Estimate y on x. وكما ذكرنا من قبل أن $\sum(y-y_{est})^2 = \sum d^2$ إنـه مـن بين كل خطوط الانحدار الممكنة فإن خط انحــدار المربعـات الصغـرى تعطى أقل تقدير للخطأ المعيارى.

وفى حالة خط الانحدار $y_{est} = a + bx$ بحيث أن b، a يمكــن إيجادهمـا من العلاقات (2). ونحصل على

$$s_{y,x}^2 = \frac{\sum y^2 - a\sum y - b\sum xy}{n} \tag{17}$$

أو

$$s_{y-x}^2 = \frac{\sum(y-\bar{y})^2 - b\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} \tag{18}$$

ويمكننا أيضًا التعبير عن $s_{y,x}^2$ لخط انحدار المربعات الصغرى بدلالة التباين ومعامل الارتباط

$$s_{y,x}^2 = s_y^2(1-r^2) \tag{19}$$

والذى نستنتج منه أن $r^2 \le 1$ أى أن $-1 \le r \le 1$.

والخطأ المعيارى للتقدير له خصائص مرادفـة لخصــائص الانحـراف المعيارى. وكمثال لذلك إذا تم إيجاد زوج من الخطوط موازية لخـط

انحدار y على x على مسافات عمودية $s_{y.x}$، $2s_{y.x}$، $3s_{y.x}$ على الترتيب فإننا نجد إذا كانت n كبيرة بما فيه الكفاية فإننا نجد أنه بين هـذه الأزواج من الخطوط حوالى 68%، 95%، 99.7% من نقط العينة على الترتيب.

وحيـث أنـه يوجـد تقديـر غـير متحـيز لتبـاين المجتمــع بالعلاقـة $\hat{s}^2 = ns^2/(n-1)$ وبالتالى فإنـه يوجـد تقديـر غـير متحـيز لمربـع الخطـأ المعيارى المقدر. ونحصل عليه باستخدام $\hat{s}^2_{y.x} = ns^2_{y.x}/(n-2)$ ولهـذا السبب يفضل بعض الإحصائيين اسـتخدام العلاقـة *(16)* بالقسـمة علـى $(n-2)$ بدلاً من n.

ويمكن تعديل الملاحظات السابقة بسهولة لتنطبق على خط انحـدار x على y أو على الانحدار غير الخطى أو الانحــدار المتعـدد (ودائمًـا نستخدم $s_{x.y}$ ليرمز إلى تقدير الخطأ المعيارى).

معامل الارتباط الخطى

The Linear Correlation Coefficient

لقد قمنا حتى الآن بتعريف معامل الارتباط *(13)* بدون أن تختبر معنويته. ومحاولة لإيجاد ذلك تذكر الشكل *(19)* والتعريفات $s_{y.x}$، s_y نجد أن

$$r^2 = 1 - \frac{\sum (y - y_{est})^2}{\sum (y - \bar{y})^2} \qquad (20)$$

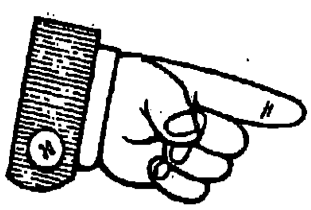
ويمكننا أن نبين أن

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (y - y_{est})^2 + \sum (y_{est} - \bar{y})^2 \qquad (21)$$

والمقدار الموجود فى الجانب الأيسر للمعادلة *(21)* تسمى بالتغيرات الكلية Total Variation. أما المقدار الأول فى الجانب الأيمـن يسـمى بالمتغيرات غير المفسرة Unexplained Variation ويسمى المقــدار الثـانى

بالتغيرات المشروحة أو المفسرة Explained Variation. وهذه التسمية لهذه الانحرافات $(y - y_{est})$ نشأت لأنها تحدث بطريقة عشوائية أو لا يمكن التنبؤ بها بينما تسمى الانحرافات $(y_{est} - \bar{y})$ بالمشروحة أو المفسرة بواسطة خط انحدار المربعات الصغرى والتى تؤول إلى نمط محدد. ومن المعادلة (*20*)، (*21*) نجد أن

$$r^2 = \frac{\sum(y_{est} - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2} = \frac{\text{الانحرافات المشروحة}}{\text{الانحرافات الكلية}} \qquad (22)$$



ولذلك فإن r^2 يمكن أن يفسر على أنه نسبة الانحرافات الكلية المفسرة بواسطة خط انحدار المربعات الصغرى. وبلغة أخرى r تقيس كيفية تمثيل خط انحدار المربعات الصغرى لبيانات العينة، فإذا كان التباين الكلى تم تفسيره كليًا بواسطة خط الانحدار؛ أى أن $r^2 = 1$ أو $r = \pm 1$ فإننا نقول أنه يوجد ارتباط تام كلى Perfect Linear Correlation (أى أنه فى هذه الحالة يوجد انحدار خطى تام Perfect Linear Regression). ومن ناحية أخرى إذا كان كل الاختلاف لم يفسر فإن الاختلاف المفسر يكون مساويًا للصفر وبالتالى فإن $r = 0$. وفى التطبيق فإن الكمية r^2 تسمى معامل التحديد Coefficient of Determination ودائمًا تقع بين الصفر والواحد الصحيح.

وبالتالى يمكننا حساب معامل الارتباط من أحد هذه النتائج.

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y - \bar{y})^2}} \qquad (23)$$

أو

$$r^2 = \frac{\sum(y_{est} - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2} = \frac{\text{الانحرافات المفسرة}}{\text{الانحرافات الكلية}} \qquad (24)$$

والتى تكون دائمًا متساوية فى حالـة الانحـدار الخطـى. والصيغـة (23) تسمى غالبًا بشكل العزوم للانحدار الخطى Product-Moment Formula

وتوجد أشكال أخرى متكافئة بالاستخدام العملى مثل

$$r = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{\sqrt{[n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2][n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2]}} \qquad (25)$$

وأيضًا

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}} \qquad (26)$$

وإذا تم عمل تحويلة (7) فإننا نحصل على

$$r = \frac{n\sum x'y' - \left(\sum x'\right)\left(\sum y'\right)}{\sqrt{[n\sum x'^2 - \left(\sum x'\right)^2][n\sum y'^2 - \left(\sum y'\right)^2]}} \qquad (27)$$

والتى تبين أن r لا تتأثر بأى تغيير فى المحـاور. وفـى حالـة خاصـة، عندما تضع $h = \bar{x}$ ، $k = \bar{y}$ فإن (27) تصبح

$$r = \frac{\sum x'y'}{\sqrt{\left(\sum x'^2\right)\left(\sum y'^2\right)}} \qquad (28)$$

والتى تكون غالبًا مفيدة فى الحساب.

معامل الارتباط الخطى قد يكون إما سالبًا أو موجبًا. فإذا كانت r موجبة، فإن y تزيد بزيادة x (يكون ميل خط انحدار المربعات الصغرى موجبًا) بينما إذا كانت r سالبة فإن y تنقـص بزيـادة x (يكـون الميـل سالبًا). ودائمًا نأخذ إشارة معامل الارتباط فى الاعتبار إذا اسـتخدمنا المعادلات (23)، (25)، (26)، (27) أو (28) بينما إذا تم اسـتخدام (24) لحساب r فإننا يجب أن نستخدم الإشارة الصحيحة.

معامل الارتباط العام

Generalized Correlation Coefficient

التعريف (*23*) (أو التعريفات المتماثلة له (*25*) حتى (*28*)) لمعامل الارتباط يتضمن قيم المعاينة فقط x، y. وبالتالى فإنه يؤدى إلى نفس الرقم لكل أشكال منحنيات الانحدار ولكنــه عديـم الفـائدة لقيـاس درجـة التوفيـق ماعدا حالة الانحدار المستقيم حيــث ينطبـق مـع العلاقـة (*24*). وهـذا التعريف يعطى:

$$r^2 = \frac{\sum(y_{est} - \bar{y})^2}{\sum(y - \bar{y})^2} = \frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين الكلى}} \qquad (29)$$

يعكس شكل منحنى الانحدار (من خلا ل y_{est}) وبالتــالى يكـون مناسـبًا كتعريـف لمعـامل الارتبـاط العـام r. Generalized Correlation Coefficient ونستخدم (*29*) للحصول على معاملات الارتباط غير الخطية (حيث يقيس جودة توفيق منحنى الانحـدار غـير الخطـى Nonlinear Regression Curve للبيانات). العلاقة (*19*) بين معامل الارتبـاط وتقديـر الخطـأ المعيـارى قائمة أيضًا بالمثل فى حالة الارتباط غير الخطى.

مثال 9.2.: أوجد معامل التحديد ومعامل الارتباط فى المثال (8.2.).

Example 9.2. Find the coefficient of determination and the coefficient of correlation from Example 8.2.

معامل التحديد r^2 حيث

$$r^2 = \frac{\text{التباين المشروح}}{\text{التباين الكلى}} = \frac{19.22}{38.92} = 0.4938$$

ويكون معامل الارتباط r هو

$$r^2 = \pm\sqrt{0.4938} = \pm 0.7027$$

وحيث أن y_{est} تزيد بزيادة x (أى أن ميل خط الانحدار موجب) فإن الارتباط يكون موجبًا وبالتالى فإن $r = 0.7027$ أو $r \approx 0.70$ إلى رقمين معنويين.

وحيث أن معامل الارتباط يقيس بصفة عامة كيف أن منحنى الانحدار (أو السطح) يوائم بيانات العينة، وبالتالى فإنه يكون من غير المنطقى استخدام معامل الارتباط الخطى حينما تكون البيانات غير خطية. افترض أنه تم تطبيق العلاقة (*23*) على بيانات غير خطية وحصل على قيمة رقمية تعتبر أقل من واحد بكثير. وبالتالى فإنه لا يستنتج عدم وجود ارتباط ولكن يستنتج بوجود ارتباط خطى ضعيف Little Linear Correlation. (ويصل إلى هذا الاستنتاج أحيانًا هؤلاء غير العارفين بالأسس الخاصة بنظرية الارتباط). ولكنه فى الحقيقة ربما يكون هناك ارتباط غير خطى كبير Large Nonlinear Correlation.

الارتباط وعدم الاستقلال Correlation and Dependence

حينما يوجد معامل ارتباط غير مساوى للصفر بين متغيرين X، Y فإنه يوجد عدم استقلال Dependence بالمعنى الاحتمالى بالإضافة إلى ذلك فإننا نستخدم العلاقة (*6*) للتنبؤ بقيمة المتغير التابع Y من قيمة المتغير المستقل X.

✓ يجب أن تعرف

إنه من الضرورى أن تدرك أن "الارتباط Correlation" و "عدم الاستقلال Dependence" بالمعنى السابق ليس من الضرورى أن يدل ضمنيًا على علاقة سببية مباشرة للاعتماد المتبادل بين X، Y.

مثال 9.3.: إذا كانت X تمثل مرتبات المدرسين فى سنة بينما تمثـل Y حجم الجريمة، فإن معامل الارتباط قد يختلف عن الصفر وقد يمكننا إيجاد خط انحدار للتنبؤ بقيمة متغير من الآخر. ولكنه من الصعب أن نقول أنه توجد علاقة تبادلية مباشرة بين X، Y.

Example 9.3. If X represents teachers' salaries over the years while Y represents the amount of crime, the correlation coefficient may be different from zero and we may be able to find a regression line predicting one variable from the other. But we would hardly be willing to say that there is a direct interdependence between X and Y.

الفصل العاشر
توزيعات احتمالية أخرى
Other Probability Distributions

فى هذا الفصل:

- ✔ **التوزيع المتعدد**
- ✔ **التوزيع الهايبرجيومترى**
- ✔ **التوزيع المنتظم**
- ✔ **توزيع كوشى**
- ✔ **توزيع جاما**
- ✔ **توزيع بيتا**
- ✔ **توزيع كاى تربيع χ^2**
- ✔ **توزيع t ستيودنت**
- ✔ **توزيع F**
- ✔ **العلاقات بين توزيعات كاى تربيع، t و F**

التوزيع المتعدد The Multinomial Distribution

نفترض أننا لدينا الأحداث المتنافية بالتبادل $A_1, A_2, ..., A_k$، بالاحتمالات المقابلة $p_1, p_2, ..., p_k$ بحيث أن $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$ فإذا

كانت $X_1, X_2, ..., X_k$ تمثل متغيرات عشوائية تعطى على الترتيب عدد مرات حدوث الأحداث $A_1, A_2, ..., A_k$ من المحـاولات الكليـة التـى عددهـا n. كما أن $X_1 + X_2 + ... + X_k = n$ فإن

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n}{n_1!n_2!\cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_k} \cdots p_k^{n_k} \quad (1)$$

حيث أن $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ تمثل دالة الاحتمال المشتركة للمتغـيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_k$ ويسمى هذا التوزيع والذى يمثل تعميم للتوزيع ذى الحديـن بـالتوزيع المتعـدد Multinomial Distribution حيـث أن العلاقـة السابقة تمثل الحـد العـام فـى المفكـوك المتعـدد Multinomial Expansion $(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n$.

التوزيع الهايبرجيومترى

The Hypergeometric Distribution

نفترض أننا لدينا صندوق به b كرة زرقاء، r كرة حمراء. ودعنـا نقـوم بعمل n محاولة من تجربة سحب كـرة بطريقـة عشوائيـة مـن الصنـدوق ومعرفة لونها ثم إعادتها إلى الصندوق. وهذا النوع من التجارب يشير غالبًا إلى المعاينة مع الإعادة Sampling With Replacement. فإذا كـانت X تمثل فى هذه الحالة متغيرًا عشوائيًا يرمز إلى عدد الكـرات الزرقـاء المختـارة (حـالات النجـاح) فـى n محاولـة، فباسـتخدام توزيـع ذا الحدين، فإن احتمال الحصول على x حالة نجاح هى

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \frac{b^x r^{n-x}}{(b+r)^n}, \qquad x = 0, 1, \ldots, n \qquad (2)$$

حيث أن: $p = \frac{b}{(b+r)}$ ، $q = 1 - p = \frac{r}{(b+r)}$

وإذا تم عمل تعديل على ما سبق بجعل السحب بدون إعادة Sampling

Without Replacement أى أنه لا يتم إعادة الكرة المسحوبة قبـل سـحب الكرة التالية، فإن

$$P(X=x)=\frac{\binom{b}{x}\binom{r}{n-x}}{\binom{b+r}{n}}, \qquad x=\max(0,n-r),\dots,\min(n,b) \qquad (3)$$

ونسمى هذه العلاقة بالتوزيع الهايبرجيومترى. ويكـون متوسـطة وتباينـاً على الشكل التالى:

$$\mu=\frac{nb}{b+r}, \qquad \sigma^2=\frac{nbr(b+r-n)}{(b+r)^2(b+r-1)} \qquad (4)$$

وإذا اعتبرنا مجموع عدد الكرات الزرقاء والحمـراء هـو N، بينمـا نسبة الكرات الزرقاء هى p والحمراء هى $q=1-p$. فإن

$$p=\frac{b}{b+r}=\frac{b}{N}, \qquad q=\frac{r}{b+r}=\frac{r}{N} \quad \text{or} \quad b=Np, \quad r=Nq$$

وهذا يقودنا إلى

$$P(X=x)=\frac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad (5)$$

كما أن التوقع والتباين هو

$$\mu=np, \qquad \sigma^2=\frac{npq(N-n)}{N-1} \qquad (6)$$

ونذكر أنه عندما $N\to\infty$ (إذا N تكون كبيرة بالمقارنة مع n). فإننا نحصل على

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x} \qquad (7)$$

$$\mu = np, \qquad \sigma^2 = npq \tag{8}$$

وهو نفس متوسط وتباين توزيع ذى الحدين. وهـذه النتـائج المتوقعـة. حيث أنه عندما تكبر N فإن المعاينة مع الإعادة تكون هى نفسها المعاينة بدون الإعادة.

مثال 10.1.: يحتوى صندوق على 6 مرات زرقاء، 4 كرات حمـراء. ثـم إجراء تجربة على أساس سحب كرة ومشاهدة لونها ثم عـدم إعادتـها للصندوق. فأوجد بعد خمسة محاولات للتجربة، احتمال سحب ثـلاث كرات زرقاء

Example 10.1 A box contains 6 blue marbles and 4 red marbles. An experiment is performed in which a marble is chosen at random and its color is observed, but the marble is not replaced. Find the probability that after 5 trials of the experiment, 3 blue marbles will have been chosen.

عدد الطرق المختلفة لاختيار 3 كرات زرقاء من 6 كرات هــو $\binom{6}{3}$.

كما أن عدد الطرق المختلفة لاختيار العدد الباقى، كرتيـن مـن اللـون الأحمر هو $\binom{4}{2}$. ولذلك فإن عدد العينات والتى يكون فيــها 3 كـرات زرقاء و 2 كرة حمـراء هـو $\binom{6}{3}\binom{4}{2}$. كمـا أن عـدد الطـرق المختلفـة لاختيار 5 كرات من 10 كرات $(6+4)$ هو $\binom{10}{5}$. ولذلك فإن الاحتمال المطلوب هو

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{10}{21}$$

التوزيع المنتظم The Uniform Distribution

يكون للمتغير العشوائى X توزيعًا منتظمًا فى الفترة $a \le x \le b$ Uniformly Distributed إذا كانت دالته للكثافة هى

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \le x \le b \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases} \qquad (9)$$

ويسمى التوزيع بالتوزيع المنتظم وتكون دالة التوزيع هى

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ (x-a)/(b-a) & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases} \qquad (10)$$

ويكون المتوسط والتباين كالتالى

$$\mu = \frac{1}{2}(a+b), \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2 \qquad (11)$$

توزيع كوشى The Cauchy Distribution

يكون للمتغير العشوائى X توزيع كوشى أو موزع كوشى إذا كانت دالة كثافة احتمال X كالتالى

$$f(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} \qquad a > 0, -\infty < x < \infty \qquad (12)$$

وتكون دالة الكثافة متماثلة حول $x = 0$ وبالتالى يكون الوسيط مساويًا للصفر. كما أنه لا يوجد له متوسط حسابى وتباين.

توزيع جاما The Gamma Distribution

يكون للمتغير العشوائى X توزيع جاما أو موزع جاما إذا كان له دالة الكثافة التالية

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad (\alpha,\beta>0) \qquad (13)$$

حيث أن $\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة جاما (انظر مرفق A) ويكون المتوسط والتباين كالتالى

$$\mu=\alpha\beta \qquad \sigma^2=\alpha\beta^2 \qquad (14)$$

توزيع بيتا The Beta Distribution

المتغير العشوائى X لـه توزيع بيتـا أو مـوزع بيتـا إذا كـان لـه كثافـة الاحتمال الآتية

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} & 0<x<1 \\ 0 & \text{غير ذلك}\end{cases}\qquad (\alpha,\beta>0) \qquad (15)$$

حيث أن $B(\alpha,\beta)$ هى دالة بيتا (انظر مرفق A). وبالنظر إلى علاقة دوال بيتا بدوال جاما، فإن دالة بيتا يمكن أن تكتب على الصورة.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1 \\ 0 & \text{غير ذلك}\end{cases} \qquad (16)$$

ولكل قيم α، β الموجبة. ويكون المتوسط والتباين هو

$$\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \qquad (17)$$

ويوجد منوال وحيد عندما تكون $\alpha>1$ ، $\beta>1$ كالتالى

$$x_{\text{mode}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + \beta - 2} \qquad (18)$$

توزيع كاى تربيع χ^2 The Chi-Square Distribution χ^2

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ تمثل متغيرات عشوائية معتادة مستقلة لكل منها التوقع صفر وتباين الوحدة. اعتبر المتغير.

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_\nu^2 \qquad (19)$$

وتسمى χ^2 Chi-Square بكاى تربيع. كما أنه لكل قيم $x \geq 0$،

$$P(\chi^2 \leq x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \int_0^x u^{(\nu/2)-1} e^{-u/2}\, du \qquad (20)$$

وتكون $P(\chi^2 \leq x) = 0$، $x < 0$.

ويسمى هذا التوزيع توزيع كاى تربيع وتسمى ν بعدد درجات الحرية Number of Degrees of Freedom. ويكون التوزيع السابق له دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad (21)$$

وتوزيع كاى تربيع يمثل حالة خاصة من توزيع جاما عندما تكون $\alpha = \frac{\nu}{2}$ و $\beta = 2$. ولذلك فإن

$$\mu = \nu, \qquad \sigma^2 = 2\nu \qquad (22)$$

وعندما تكون $\nu(\nu \geq 30)$ كبيرة فإنه يمكننا إثبات أن المقدار $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}$ يوزع توزيعًا طبيعيًا توقعه صفر وتباينه الوحدة؛ أى

توزيع طبيعى معيارى، ونذكر ثلاث نظريات سوف تكون مفيدة وهى كما يلى:

نظرية 10-1: إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية المستقلة والموزعة توزيعًا طبيعيًا $X_1, X_2, ..., X_\nu$ توقعة صفر وتباينه الوحدة، فإن $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + ... + \chi_\nu^2$ يمثل كاى تربيع بدرجات حرية ν.

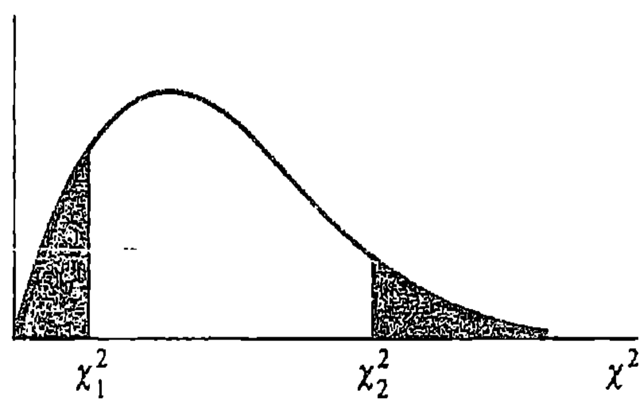
نظرية 10-2: إذا كان المتغيرات العشوائية المستقلة $U_1, U_2, ..., U_k$ لكل منها توزيع كاى تربيع بدرجات حرية $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k$ على الترتيب. فإن المجموع W حيث أن $W = U_1 + U_2 + ... + U_k$ يكون له توزيع كاى تربيع بدرجات حرية $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k$.

نظرية 10-3: إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية المستقلة V_1, V_2. فإذا افترضنا أن V_1 موزعة توزيع كاى تربيع بدرجات حرية ν_1. بينما المجموع $V = V_1 + V_2$ يكون موزعًا توزيع كاى تربيع بدرجات حرية ν، فإن V_2 يكون موزعًا توزيع كاى تربيع بدرجات حرية $\nu_2 = \nu - \nu_1$. (يكون $\nu > \nu_1$).

ويربط التوزيعات كاى تربيع وتوزيع t وتوزيع F وأى توزيعات أخرى فإنه من الشائع استخدام نفس الرمز Same Symbol لكل من المتغير والقيم التي يأخذها المتغير. ولذلك فإن قيم النسبة المئوية Percentile Values لتوزيع كاى تربيع لدرجات الحرية ν يرمز لها بالرمز $\chi^2_{p,\nu}$ أو اختصاراً χ^2_p إذا كانت ν مفهومة وليس بالرمز $\chi^2_{p,\nu}$ أو χ_p (انظر الملحق D). وعلى القارئ أن يكون حريصًا خاصة عند تبديل المتغيرات فى دوال كثافة الاحتمال.

مثال 10.2.: الرسم البيانى لتوزيع كاى تربيع بدرجات حرية 5 فى الشكل (10-1). أوجد القيم χ_1^2 و χ_2^2 التى عندها يكون الجزء المظلل فى الطرف الأيمن = 0.05، وأيضًا حتى يكون الجزء المظلل فى الطرفين مساويًا 0.05.

Example 10.2. The graph of the chi-square distribution with 5 degrees of freedom is shown in Figure 10-1. Find the values for χ_1^2 ، χ_2^2 for which the shaded area on the right = 0.05 and the total shaded area = 0.05.



شكل 10-1

إذا كان الجزء المظلل فى الطرف الأيمن هو 0.05. فإن المنطقة شمال χ_2^2 هى 0.95 = (0.05 – 1). كما أن χ_2^2 تمثل 95% أى $\chi_{0.95}^2$.

وبالرجوع إلى الجدول المرفق D وقراءة أسفل العمود المعنون v حتى تصل إلى الرقم 5. وبالتالى للعمود المعنون $\chi_{0.95}^2$ لنفس السطر 5، نجد أن القيمة هى 11.1 والتى تمثل قيمة كاى تربيع χ^2.

وثانيًا، حيث أن التوزيع غير متماثل Not Symmetric فإنه يوجد أكثر من قيمة تكون المساحة بالنسبة لها 0.05. وكمثال على ذلك تكون المساحة المظللة فى الطرف الأيمن هى 0.04 وتكون فى الطرف الأيسر هى 0.01. ولكنه يكون فى العادة اعتبار المساحتين المظللتين فى كلا الطرفين متساويتين إلا إذا ذكر غير ذلك؛ أى أن كل منهما يكون مساويًا 0.025.

فإذا كـانت المسـاحة المظللـة فـى الطـرف الأيمـن هـى 0.025، فـإن المساحة على شمال χ_2^2 هى $0.975 = (1 - 0.025)$ وتمثل χ_2^2 هى نسبة 97.5% $\chi_{0.975}^2$ وبالتالى نحصل على 12.8 من جدول (D).

وبالمثل إذا كانت المساحة المظللة فى الطرف الأيسـر هـى 0.025، فإن المساحة على شمال χ_1^2 هى 0.025 وتمثل χ_1^2 2.5%، $\chi_{0.025}^2$ تكـون مساوية 0.831.

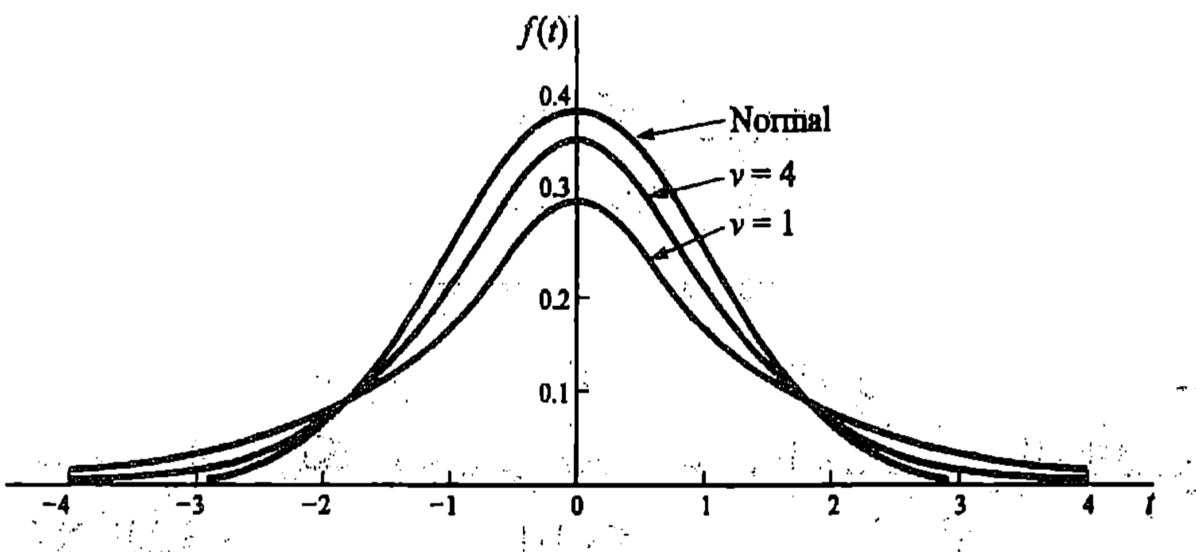
ولذلك فإن القيم المطلوبة هى 12.8، 0.831.

توزيع t ستيودنت Student's t Distribution

إذا كان المتغير العشوائى له كثافة الاحتمال التالية

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \qquad -\infty < t < \infty \qquad (23)$$

فإننا نقول أن له توزيع t ستيودنت وباختصار توزيع t بدرجات حرية ν. فإذا كانت ν كبيرة $(\nu \geq 30)$ فإن الرسـم البيـانى للدالـة $f(t)$ تقـترب مـن المنحنى الطبيعى كما هو مبين فى الشكل 10-2.



شكل 10-2

والقيم المئوية للتوزيع t بدرجات حريــة v يرمـز لـها بـالرمز $t_{p,v}$ أو باختصار t_p تكون مفهومة. وللحصول عليها يكون مــن الجـدول بـالملحق (C). وحيث أن توزيع t متماثل فإن $t_{1-p} = -t_p$ أى أنه $t_{0.05} = -t_{0.95}$
والتوقع والتباين لتوزيع t هو

$$\mu = 0 \qquad \text{and} \qquad \sigma^2 = \frac{v}{v-2} \quad (v > 2) \qquad (24)$$

والنظرية التالية مهمة فى العمل التالى.

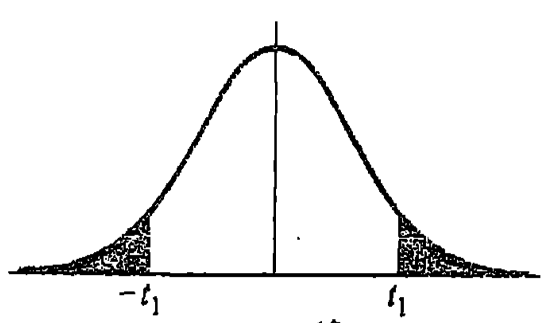
نظرية 10-4: إذا كان لدينــا المتغـيران العشوائيـان المسـتقلان Z، Y، حيث أن Y تكون موزعة توزيعًا طبيعيًـا توقعـه صفـر وتباينـه الوحـدة، بينما Z تكون موزعة طبقاً لتوزيع كـاى تربيـع بدرجـات حريـة v. فـإن المتغير العشوائى.

$$T = \frac{Y}{\sqrt{Z/v}} \qquad (25)$$

يكون له توزيع t بدرجات حرية v.

مثال 10.3.: إذا كان منحنى توزيع t بدرجات حرية 9 الموضح بـالشكل 10-3. فأوجد القيم t_1 التى تمثل المساحة المظلل بالنسبة لها 0.05 فى الطرف الأيمن وتكون المساحة الغير مظللة هى 0.99.

Example 10.3. The graph of Student's t *distribution* with 9 degrees of freedom is shown in Figure 10-3. Find the value of t_1 for which the shaded area on the right = 0.05 and the total unshaded area = 0.99.



شكل 10-3

إذا كانت المساحة المظللة فى الطرف الأيمن هى 0.05 فإن المساحة على شمال t_1 هى $0.95 = (1 - 0.05)$ وأن t_1 تمثل نسبة 0.95، أى $t_{0.95}$. وبالرجوع إلى جدول الملحق (C) فننظر أسفل العمود المعنون v حتى نصل إلى الرقم 9، ثم ننظر يميناً حتى العمود المعنون $t_{0.95}$، فتكون النتيجة هى 1.83 القيمة المطلوبة t.

ثم إذا كانت المساحة الغير مظللة هى 0.99، فإن المساحة المظللة هى $0.01 = (1 - 0.99)$ وتكون المساحة المظللة ناحية اليمين هى $0.005 = \frac{0.01}{2}$.

ومن الجدول نجد أن $t_{0.995} = 3.25$

The F Distribution توزيع F

المتغير العشوائى الذى يكون له توزيع F اختصاراً لاسم فيشر (Named after R.A. Fisher) بدرجات حرية v_1، v_2 Degrees of Freedom يكون بكثافة الاحتمال

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{v_2}{2}\right)} v_1^{v_1/2} v_2^{v_2/2} u^{(v_1/2)-1} (v_2 + v_1 u)^{-(v_1+v_2)/2} & u > 0 \\ 0 & u \le 0 \end{cases} \qquad (26)$$

وقيمة المئين لتوزيع F بدرجات الحرية v_1، v_2 يرمز لها بالرمز F_{p,v_1,v_2}. والجدول الذى يعطينا هذه القيم هو بالملحق (E) ويكون القيم $F_{0.95}$ ، $F_{0.99}$. والمتوسط والتباين لهذا التوزيع هو

$$\mu = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad (v_2 > 2) \qquad \text{and} \qquad \sigma^2 = \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 + 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2} \qquad (27)$$

وللتوزيع منوال وحيد فى القيمة

$$u_{\text{mode}} = \left(\frac{\nu_1 - 2}{\nu_1}\right)\left(\frac{\nu_2}{\nu_2 + 2}\right) \quad (\nu_1 > 2) \tag{28}$$

والنظريات التالية مهمة فى العمل التالى.

نظرية 10-5: إذا كان لدينا المتغيران العشوائيان المستقلان V_1، V_2 بحيث أنه يكون لكل منهما كاى تربيع بدرجات حرية ν_1، ν_2 على الترتيب، فإن المتغير

$$V = \frac{V_1 / \nu_1}{V_2 / \nu_2} \tag{29}$$

يكون له توزيع F بدرجات حرية ν_1، ν_2.

نظرية 10-6:

$$F_{1-p,\nu_2,\nu_1} = \frac{1}{F_{p,\nu_1,\nu_2}} \tag{30}$$

تذكر!

بينما نستخدم بصفة خاصة مع العينات الصغيرة كل من توزيع t وتوزيع χ^2 وتوزيع F فإنهم جميعًا بالمثل صالحون فى حالة العينات الكبيرة.

العلاقات بين توزيعات كاى تربيع، t و F

Relationships Among Chi-Squares, *t*, and *F*

نظرية 10-7:

$$F_{1-p,1,\nu} = t^2_{1-(p/2),\nu} \tag{31}$$

نظرية 10-8:

$$F_{p,\nu,\infty} = \frac{\chi^2_{p,\nu}}{\nu} \tag{32}$$

مثال 10.4.: تأكد مـن نظرية 10-7 ببيان أن $F_{0.95} = t^2_{0.975}$.

Example 10.4. Verify Theorem 10-7 by showing that $F_{0.95} = t^2_{0.975}$.

وذلك بمقارنة النواتج في العمود الأول للجدول $F_{0.95}$ فـي الملحـق (E) مع نظيره فى توزيع t تحت $t_{0.975}$. فنجد أن

$$161 = (12.71)^2, \quad 18.5 = (4.30)^2, \quad 10.1 = (3.18)^2, \quad 7.71 = (2.78)^2, \text{ etc.,}$$

وهكذا..

والتى تمثل التأكد المطلوب.

مثال 10.5.: تحقق من النظرية 10-8 عندما تكون $p = 0.99$.

Example 10.5. Verify Theorem 10-8 for $p = 0.99$.

فنقارن نواتج الصف الأخير من $F_{0.99}$ في جدول الملحق (E) (المناظـــر لدرجة الحـرية $\nu_2 = \infty$) مـع النواتج فـى الملحـق (D) تحت $\chi^2_{0.99}$. فنجد أن:

$$6.63 = \frac{6.63}{1}, \quad 4.61 = \frac{9.21}{2}, \quad 3.78 = \frac{11.3}{3}, \quad 3.32 = \frac{13.3}{4}, \text{ etc.,}$$

والتى تمثل التحقق المطلوب.

ملحق (A)

موضوعات رياضية Mathematical Topics

Special Sums — مجاميع خاصة

يمثل التالى بعض مجاميع متسلسلات. ومن المعروف أن $0! = 1$ وحينما تكون المتسلسلات لانهائية فإن مدى التقارب يكون مذكوراً.

1. $\sum_{j=1}^{m} j = 1+2+3+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2}$

2. $\sum_{j=1}^{m} j^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

3. $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}$ all x

4. $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ all x

5. $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$ all x

6. $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$ $|x|<1$

7. $\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x^j}{j}$ $-1 \le x < 1$

Eulers' Formulas صيغ أويلر

8. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

9. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

The Gamma Function دالة جاما

نرمز لدالة جاما بالرمز $\Gamma(n)$ وهي

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt \qquad n > 0$$

ونلاحظ أن الصيغة المتكررة هي

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

وحيث أن $\Gamma(1)$. فإن فك دالة جاما، $n > 0$ باستخدام الدالة المتكررة السابقة. فإذا كانت n رقمًا صحيحًا موجبًا، فإن

$$\Gamma(n+1) = n!$$

ولهذا السبب تسمى أحيانًا دالة المضروب Factorial Function. ومن أهم خصائص دالة جاما

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

وعندما $p = \frac{1}{2}$، فإن

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

وللقيم الكبيرة n فإننا نحصــل على صيغـة تقريـب سـتيرلنج Stirling's Asymptotic Formula التالية

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

The Beta Function دالة بيتا

نرمز لدالة بيتا بالرمز $B(m, n)$ وتعرف كالتالى

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\, du \qquad m > 0, n > 0$$

وترتبط بدالة جاما كالتالى

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Special Integrals تكاملات خاصة

10. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0$

11. $\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2a^{(m+1)/2}} \qquad a > 0, m > -1$

12. $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/4a} \qquad a > 0$

13. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad a > 0$

14. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad a > 0$

15. $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-ax}\, dx = \dfrac{\Gamma(p)}{a^p} \qquad a > 0,\ p > 0$

16. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-4ac)/4a} \qquad a > 0$

17. $\int_0^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\, dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{(b^2-4ac)/4a}\, erfc\left(\dfrac{b}{2\sqrt{a}}\right) \qquad a > 0$

حيث

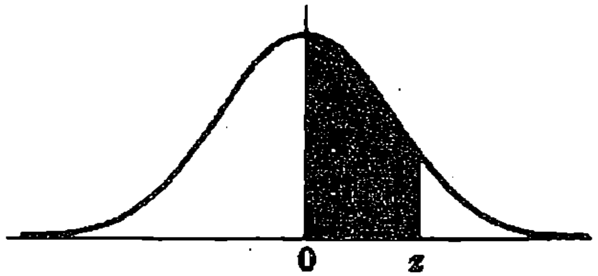
$$erfc(u) = 1 - erf(u) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u} e^{-x^2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

ويسمى دالة مكمل الخطأ Complementary Error Function.

18. $\int_0^{\infty} \dfrac{\cos \omega x}{x^2 + a^2}\, dx = \dfrac{\pi}{2a} e^{-a\omega} \qquad a > 0,\ \omega > 0$

19. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\, d\theta = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{2\Gamma(m+n)} \qquad m > 0,\ n > 0$

ملحق (B)



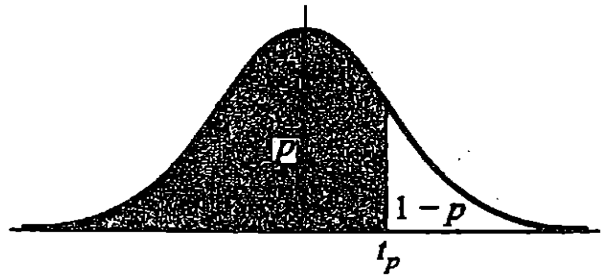
المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى من 0 حتى Z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319

1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

ملحق (C)

توزيع t ستيودنت

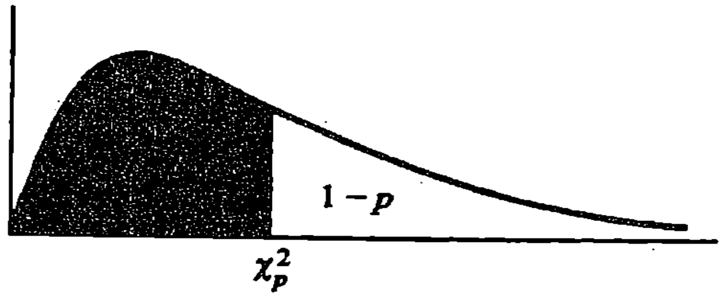


ν	$t_{.55}$	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.158	.325	.727	1.000	1.376	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	.142	.289	.617	.816	1.061	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	.137	.277	.584	.765	.978	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	.134	.271	.569	.741	.941	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	.132	.267	.559	.727	.920	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	.131	.265	.553	.718	.906	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	.130	.263	.549	.711	.896	1.42	1.90	2.36	3.00	3.50
8	.130	.262	.546	.706	.889	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	.129	.261	.543	.703	.883	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	.129	.260	.542	.700	.879	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	.129	.260	.540	.697	.876	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	.128	.259	.539	.695	.873	1.36	1.78	2.18	2.68	3.06

13	.128	.259	.538	.694	.870	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	.128	.258	.537	.692	.868	1.34	1.76	2.14	2.62	2.98
15	.128	.258	.536	.691	.866	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	.128	.258	.535	.690	.865	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	.128	.257	.534	.689	.863	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	.127	.257	.534	.688	.862	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	.127	.257	.533	.688	.861	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	.127	.257	.533	.687	.860	1.32	1.72	2.09	2.53	2.84
21	.127	.257	.532	.686	.859	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	.127	.256	.532	.686	.858	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	.127	.256	.532	.685	.858	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	.127	.256	.531	.685	.857	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.79
26	.127	.256	.531	.684	.856	1.32	1.71	2.06	2.48	2.78
27	.127	.256	.531	.684	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	.127	.256	.530	.683	.855	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.76
30	.127	.256	.530	.683	.854	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	.126	.255	.529	.681	.851	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	.126	.254	.527	.679	.848	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
120	.126	.254	.526	.677	.845	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62
∞	.126	.253	.524	.674	.842	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58

ملحق (D)

توزیع کای تربیع χ^2

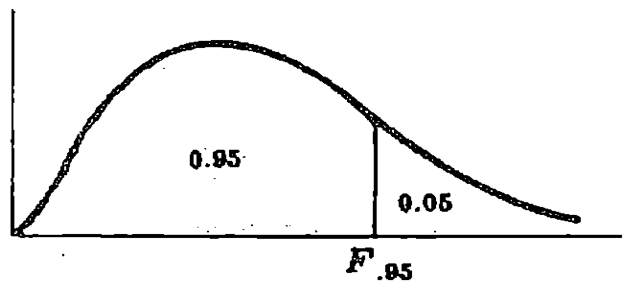


ν	$\chi^2_{.005}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.999}$
1	.0000	.0002	.0010	.0039	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9

13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0	99.6
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100	104	112
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	79.3	88.1	96.6	102	107	112	116	125
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	89.3	98.6	108	113	118	124	128	137
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	99.3	109	118	124	130	136	140	149

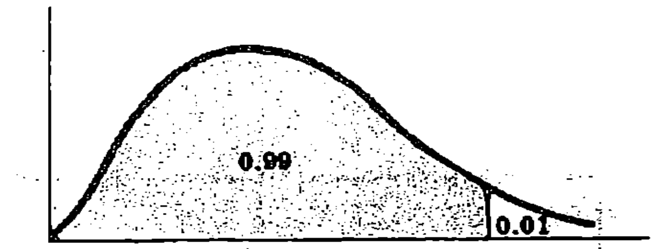
ملحق (E)

قيم النسب %95 ، %99 لتوزيع F



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13

15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00



$F_{.99}$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17

14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

ملحق (F)

قيم $e^{-\lambda}$

$(0 < \lambda < 1)$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	.9900	.9802	.9704	.9608	.9512	.9418	.9324	.9231	.9139
0.1	.9048	.8958	.8869	.8781	.8694	.8607	.8521	.8437	.8353	.8270
0.2	.8187	.8106	.8025	.7945	.7866	.7788	.7711	.7634	.7558	.7483
0.3	.7408	.7334	.7261	.7189	.7118	.7047	.6977	.6907	.6839	.6771
0.4	.6703	.6636	.6570	.6505	.6440	.6376	.6313	.6250	.6188	.6126
0.5	.6065	.6005	.5945	.5886	.5827	.5770	.5712	.5655	.5599	.5543
0.6	.5488	.5434	.5379	.5326	.5273	.5220	.5169	.5117	.5066	.5016
0.7	.4966	.4916	.4868	.4819	.4771	.4724	.4677	.4630	.4584	.4538
0.8	.4493	.4449	.4404	.4360	.4317	.4274	.4232	.4190	.4148	.4107
0.9	.4066	.4025	.3985	.3946	.3906	.3867	.3829	.3791	.3753	.3716

$(\lambda = 1, 2, 3, \ldots, 10)$

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	.36788	.13534	.04979	.01832	.006738	.002479	.000912	.000335	.000123	.000045

ملاحظة : للحصول على قيم $e^{-\lambda}$ لأى قيم أخرى لـ λ استخدم قوانين الأسس

Example: $e^{-3.48} = (e^{-3.00})(e^{-0.48}) = (.04979)(.6188) = .03081.$

ملحق (G)

أرقام عشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280

قائمة المصطلحات العلمية (إنجليزى/عربى)

(A)

Alternative hypothesis الفرض البديل

Areas under the standard normal curve

المساحات تحت المنحنى الطبيعى المعيارى

Arithmetic mean الوسط الحسابى

Asymptotically normal

توزيعًا طبيعيًا تقاربيًا

(B)

Basic probability أساس الاحتمال

Bayes' theorem نظرية بايز

Bernoulli trials and distribution

محاولات وتوزيع برنولى

Best fitting curve توفيق أفضل منحنى

Beta distribution توزيع بيتا

Beta function دالة بيتا

Binomial coefficients

معاملات ذى الحدين

Binomial distribution

توزيع ذى الحدين

Binomial expansion مفكوك ذات الحدين

(C)

Cauchy distribution توزيع كوشى

Central limit theorem

نظرية الحد المركزية

Centroid مركز متوسط

Chi-square distribution توزيع كاى تربيع

Coefficient of determination

معامل التحديد

Combinations توافيق

Combinatorial analysis تحليل التوافيق

Complementary error function

دالة مكمل الخطأ

Conditional probability الاحتمال الشرطى

Confidence intervals فترات الثقة

differences and sums

للفرق وللمجموع

means للمتوسطات

population parameters لمعالم المجتمع

proportions للنسب

Confidence level مستوى الثقة

Confidence limits حدود الثقة

Continuous probability distribution

توزيع احتمالى متصل

Continuous random variables

متغيرات عشوائية متصلة

Correlation and dependence

الارتباط وعدم الاستقلال

Covariance تغاير

Critical values القيم الحرجة

Curve fitting, regression and correlation

تمهيد المنحنيات والانحدار والارتباط

(D)

Degrees of freedom درجات الحرية

Dependent variable متغير تابع

Descriptive statistics إحصاء وصفى

Deviation error خطأ الانحراف

Discrete probability distribution

توزيع احتمالى منفصل

Discrete random variables

متغير عشوائى منفصل

Dispersion تشتت

(E)

Elementary events الأحداث الأولية

Empirical probability الاحتمال التجريبى

Estimates تقديرات

confidence interval بفترة ثقة

point and interval بنقطة وفترة

standard error الخطأ المعيارى

unbiased and efficient

غير متحيز وكفء

Estimation theory نظرية التقدير

Eulers' formulas صيغ أويلر

Expected values القيم المتوقعة

(F)

Factorial function دالة المضروب

F distribution توزيع F

Frequency distributions توزيعات تكرارية

(G)

Gamma distribution توزيع جاما

Gamma function دالة جاما

Gaussian distribution توزيع جاوس

Generalized correlation coefficient

معامل الارتباط العام

(H)

Histogram المدرج التكرارى

Hypergeometric distribution

توزيع هايبرجيومترى

Hypothesis and significance

الفروض والمعنوية

(I)

Independent events أحداث مستقلة

Independent variables متغيرات مستقلة

Interquartile range المدى الربيعى

Interval probability فترة الاحتمال

(L)

Law of large numbers

قانون الأعداد الكبيرة

Least squares line خط المربعات الصغرى

Least squares method

طريقة المربعات الصغرى

Level of significance مستوى المعنوية

Linear correlation coefficient

معامل الارتباط الخطى

Linear regression انحدار خطى

Linear relationship علاقة خطية

(M)

Mathematical topics موضوعات رياضية

Mean متوسط

Masures of central tendency

مقاييس النزعة المركزية

Measures of dispersion مقاييس التشتت

Median	وسيط
Method of least squares	طريقة المربعات الصغرى
Mode	منوال
Multinomial distribution	توزيع متعدد
(N)	
n factorial	مضروب *n*
Nonlinear relationship	علاقة غير خطية
Normal distribution	توزيع طبيعى
Null hypothesis	فرض العدم
(O)	
One-tailed tests	اختبار الجانب الواحد
(P)	
Parabola	قطع مكافئ
Percentiles	المئين
Permutations	تباديل
Poisson distribution	توزيع بواسون
Polygon graph	رسم المضلع
Population and sample	المجتمع والعينة
Principle of counting	مبادئ العد
Probability	احتمال
Probability distributions	توزيعات احتمالية
Product-moment formula	صيغة العزوم
P Value	قيمة *P*
(Q)	
Quadratic curve	منحنى من الدرجة الثانية
(R)	
Random experiments	تجارب عشوائية
Random numbers	أرقام عشوائية
Random samples	عينات عشوائية
Random variables	متغيرات عشوائية
Region of acceptance	منطقة القبول
Region of nonsignificance	منطقة عدم المعنوية
Region of rejection	منطقة الرفض
Region of significance	منطقة المعنوية
Regression	انحدار
Reliability	صلاحية
(S)	
Sample mean	متوسط العينة
Sample spaces and points	فراغات ونقاط العينة
Sample statistics	إحصاءات العينة
Sample variance	تباين العينة
Sampling distributions	توزيعات المعاينة
Sampling theory	نظرية المعاينة
Scatter	انتشار
Scatter diagram	شكل الانتشار
Skewness	التواء
Slope	ميل
Special integrals	تكاملات خاصة
Special sums	مجاميع خاصة
Special tests	اختبارات خاصة
Standard deviation	انحراف معيارى
Standard error	خطأ معيارى
Standard normal curve	المنحنى المعتاد المعيارى

Standard normal density function
دالة الكثافة للتوزيع المعتاد المعيارى
Standard score الدرجة المعيارية
Standard variable متغير معيارى
Statistical decisions قرارات إحصائية
Statistical hypothesis فروض إحصائية
Stirling's approximation to n!
تقريب ستيرلنج لمضروب *n*
Stirling's asymptotic formula
صيغة ستيرلنج التقريبية
Stochastic variable متغير تصادفى
Student's *t* distribution توزيع *t* ستيودنت
Sums of series مجاميع المتسلسلات

(T)

t distribution (*see* Student's t distribution)
توزيع *t* (انظر توزيع *t* ستيودنت)
Test involving normal distribution
اختبار باستخدام التوزيع الطبيعى
Test of hypothesis and significance
اختبار الفروض والمعنوية
Theorems نظريات
Bayes' نظرية بايز
central limit نظرية الحد المركزية
Chi-square نظرية كاى تربيع
expectation نظرية التوقع
F distribution نظرية توزيع *F*
law of large numbers
قانون الأعداد الكبيرة
probability نظرية الاحتمال
sampling distribution of means
توزيع المعاينة للمتوسطات
Student's *t* نظرية توزيع *t*
variance نظرية التباين
Transformed variables متغيرات محورة
Translation of axes نقل المحاور
Two-tailed tests اختبارات الجانبين
Type I and Type II errors
أخطاء من النوع الأول والنوع الثانى

(U)

Unbiased estimate تقدير غير متحيز
Uniform distribution التوزيع المنتظم

(V)

Values of $e^{-\lambda}$ قيمة $e^{-\lambda}$
Variance تباين
Variation تغير ـ اختلاف

ملاحظات

ملاحظات

Study Guides/Statistics

When you don't have the time ... but you still need the grade!

If your life is too busy to spend hours ploughing through weighty textbooks, and you need every study minute to count, *Schaum's Easy Outline* is perfect for you! This super-condensed, high-torque study guide gives you what you need to know in a fraction of the time.

SUPER-IMPACT

Built for quick, effective study, this *Easy Outline* packs exciting new learning tools that make mastering statistics fast, fun—and almost automatic.

SPEEDY

Quick-study experts slashed the time you need to spend with your books by reducing statistics to the essentials the professor expects you to know. This *Easy Outline* is perfect for test preparation, pre-exam review, and handling those last-minute cram situations.

HI-QUALITY

Easy Outlines give you 100% of the authority of Schaum's full-sized guides, known around the world for the highest academic standards.

BACKPACK-ABLE STUDY POWER

Compact and portable, this *Easy Outline* lets you study statistics anywhere.

SCHAUM'S GETS THE GRADE!

Let's talk bottom line. Schaum's *Easy Outlines* give you what you want—better grades, with less work, and more free time!

Get the essence of statistics easy way. *Schaum's Easy Outline of Statistics* helps you master statistics with plenty of illustrations, memory joggers, and the newest, rapid-absorption teaching techniques. Backed by Schaum's reputation for academic authority, this is the study guide students turn to and trust. Students know that Schaum's is going to be there for them when they need it!

- Quick study tips
- At-a-glance tables
- Student-friendly style
- Perfect for test prep

ISBN 977-282-149-4

6 222006 605063

Cultural Investments S.A.E.


روائع مجلة
الابتسامة
من الكتب
المعالجة
والصفحات الفردية