طرائق البرهان

(١) البرهان بالمباشر: $P \longrightarrow Q$
نفرض أن P صائبة ونبرهن أن Q صائبة.

(٢) البرهان بالمكافئ العكسي: نعلم أن $(P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P)$
نفرض أن Q خاطئة ونبرهن أن P خاطئة

(٣) البرهان بالتناقض: اثبات العبارة R
نفرض أن R خاطئة ونبرهن أنه يوجد تناقض C
مثلاً من نوع $(\neg P \wedge P)$ أو $(Q \wedge \neg Q)$

(٤) البرهان البديل: $(P \to (Q \vee R) \equiv P \wedge \neg Q \to R)$
نفرض أن P صائبة، Q خاطئة ونبرهن أن R صائبة

(٥) الاستقراء

(1) البرهان بالمباشر

مثال (1,47) ص 45

برهن على أن مربع أي عدد فردي يجب أن يكون فردي.

الحل: نبرهن: إذا كان x عدد فردي فإن x^2 عدد فردي.

نفرض أن x عدد فردي.

فإنه يوجد $p \in \mathbb{Z}$ حيث $x = 2p+1$

فإن

$$\begin{aligned} x^2 &= (2p+1)^2 \\ &= (2p)^2 + 2(2p)\cdot 1 + 1^2 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 \\ &= 2\underbrace{(2p^2+2p)}_{\in \mathbb{Z}} + 1 \end{aligned}$$

فإن x^2 عدد فردي.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

تعريف: ليكن $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$
$(a \in \mathbb{Z}^*)$

وليكن $b \in \mathbb{Z}$

a قاسم للعدد b, ونرمز له $a|b$

اذا وجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث $b = ak$ $\left(\frac{b}{a} = k\right)$

مثال: $3|9$, $2\nmid 3$, $-15 \nmid 3$

$-3|-15$ $(-15 = (-3)\cdot 5)$

ملاحظة: (1) $1|1$

لكل $a \in \mathbb{Z}^*$ فإن $a|a$ $(a = a\cdot 1)$

$a|-a$ $(-a = a\cdot(-1))$

(2) ليكن $a, b \in \mathbb{Z}^*$

$(a|b, b|a) \iff \begin{pmatrix} a = b \\ a = -b \end{pmatrix}$

ص 10:46-7 فبراير

مبرهنة (٢،١) ص 51

ليكن $a,b,c \in \mathbb{Z}$ حيث $a \neq 0$

إذا كان $a|b$, $a|c$ فإن $a|(bx+cy)$ لكل $x,y \in \mathbb{Z}$

الحل: نفرض أن $a|b$, $a|c$

فإنه يوجد $k,p \in \mathbb{Z}$ حيث $b = a \cdot k$, $c = a \cdot p$

فإن لكل $x,y \in \mathbb{Z}$ لدينا

$bx = akx$ و $cy = apy$

فإن $bx+cy = \underline{a}kx + \underline{a}py$

$= a(kx+py)$

و $kx+py \in \mathbb{Z}$

فإن $a|(bx+cy)$ لكل $x,y \in \mathbb{Z}$

مبرهنة (1,3) ص 2؟

إذا كان $a|b$ و $b|c$ فإن $a|c$

الحل: نفرض $a|b$ و $b|c$

فإنه يوجد $k,p \in \mathbb{Z}$ حيث $b = a \cdot k$ و $c = b \cdot p$

فإن $c = bp = (a \cdot k)p = a \cdot (kp)$

ولدينا $k \cdot p \in \mathbb{Z}$

فإن $a|c$

(٢) البرهان بالمكافئ العكسي

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

البرهان بالمكافئ العكسي هو أن نفرض أن
النتيجة خاطئة ونبرهن أن المقدمة خاطئة

مثال (1,50) ص 53

إذا كان n^2 عدد صحيح زوجياً فإن n عدد صحيح زوجي.

الحل: المكافئ العكسي للعبارة هو:

إذا كان n عدد صحيح غير زوجي فإن n^2 عدد صحيح غير زوجي

نفرض أن: n عدد صحيح فردي.

فإن n^2 عدد صحيح فردي (حسب المثال (1,47) ص 50)

مثال (1,53) ص 55

لكل عدد صحيح x , إذا كان $3|x^2$ فإن $3|x$

الحل: نفرض أن $3 \nmid x$ (x عدد صحيح)

فإنه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث $x=3k+1$ أو $x=3k+2$

إذن $x^2=(3k+1)^2$ أو $x^2=(3k+2)^2$

$$x^2=(3k)^2+2(3k)\cdot 1+1^2$$
$$=9k^2+6k+1$$
$$=3(\underbrace{3k^2+2k}_{\in\mathbb{N}})+\boxed{1}$$

$$x^2=(3k)^2+2(3k)2+2^2$$
$$=9k^2+12k+\overset{3+1}{4}$$
$$=3(\underbrace{3k^2+4k+1}_{\in\mathbb{N}})+\boxed{1}$$

إذن $3 \nmid x^2$

(٣) البرهان بالتناقض

لنبرهن أن العبارة P صائبة: نفرض أن P خاطئة
ونبرهن وجود تناقض.

مثال (١,٤٤) ص ٥٥

لكل عددين صحيحين x, y
إذا كان كل منهما عدد صحيح زوجيا أوليا فإنهما متساويان

الحل: ملحوظة:

$$\neg P \equiv \neg(A \rightarrow B)$$
$$\equiv \neg(\neg A \vee B)$$
$$\equiv A \wedge \neg B$$

نفرض أن x و y كل منهما عدد صحيح زوجي وأولي $x \neq y$

$x = 2k$ و $y = 2p$, x و y عدد أولي

فإن $x = 2$ و $y = 2$

فإن $x = y$, نعلم أن $x \neq y$ وهذا تناقض

وبالتالي:

مثال (١,٤٤) ص 56 و 57

أثبت أن $\sqrt{3}$ عدد غير كسري.

الحل: نفرض أن $\sqrt{3}$ عدد كسري.

بأنه يوجد $x, y \in \mathbb{N}$ ، $\sqrt{3} = \frac{x}{y}$

ونفرض أن $gcd(x,y)=1$

فإن: $3 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ بأن $x^2 = 3y^2$

بأن $3|x^2$ فإن $\boxed{3|x}$

ومنه يوجد $p \in \mathbb{N}$ ، $x = 3p$

بأن $x^2 = 9p^2$ ونعلم $x^2 = 3y^2$

بأن $3y^2 = 9p^2$

بأن $y^2 = 3p^2$ فإن $3|y^2$

فإن $\boxed{3|y}$

إذن $gcd(x,y) \geq 3$ وافترضنا: $gcd(x,y)=1$

وهذا تناقض

وبالتالي $\sqrt{3}$ عدد غير كسري.

(٤) البرهان البديل:

لدينا: $P \to Q \vee R \equiv P \wedge \neg Q \to R$

نفرض أن P صائبة، Q خاطئة، ونبرهن على أن R صائبة.
فنحصل على: أن إذا كان P صائبة فإن Q أو R صائبة.

مثال (١،٢٧) ص ٢٩

لكل عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$

الحل: نفرض أن $ab = 0$ و $a \neq 0$

فإن $1 \cdot b = \left(\frac{1}{a} a\right) \cdot b = \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a} \cdot 0$

فإن $b = 0$

مثال (٩،٤٧) ص ٤١

إذا كان α جذراً للمعادلة $x^2 - c = 0$ حيث $c \in \mathbb{Z}$

فإنه، إما أن α عدد صحيح أو α عدد غير كسري

الحل: نفرض أن α جذراً للمعادلة $x^2 - c = 0$

$c \in \mathbb{Z}$ $(c \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ و نفرض أن α عدد كسري.

فإن $\alpha = \frac{a}{b}$ ، $a, b \in \mathbb{N}$

و $\alpha^2 - c = 0$

فإن $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = c$ فإن $\frac{a^2}{b^2} = c$

فإن $a^2 = c b^2$

فإن b^2 قاسم a^2

فإن b قاسم a فإنه يوجد $p \in \mathbb{N}$ ، $a = b \cdot p$

فإن $\alpha = \frac{a}{b} = p$ ، $p \in \mathbb{N}$

فإن p عدد صحيح.

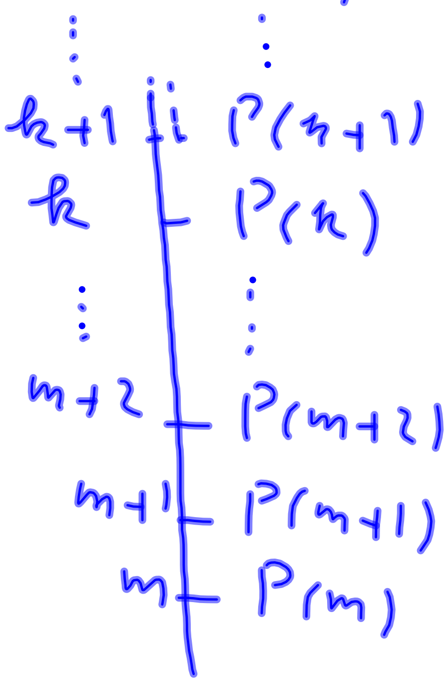
و بالتالي إذا كان α جذراً للمعادلة $x^2 - c = 0$

حيث $c \in \mathbb{Z}$ فإن α عدد صحيح أو α عدد غير كسري

(٥) الاستقراء الرياضي

نبرهن أن $\forall n \geq m \, , P(n)$

المبدأ الأول



نبرهن $P(m)$ صائبة

نفرض $P(k)$ صائبة، $k \geq m$

ونبرهن أن $P(k+1)$ صائبة

النتيجة: $\forall n \geq m, P(n)$

$\forall n \geq m, P(n)$

المبدأ الأول

$\{P(n), \forall n \geq m\}$

$= \{P(m), P(m+1), P(m+2), \dots\}$

$k+1$ — $P(k+1)$ (الخطوة الاساسية) نبرهن أن $P(m)$

k — $P(k)$ (خطوة الاستقراء) ليكن $k \geq m$ ، نفرض $P(k)$ ونبرهن $P(k+1)$

$\vdots$

$m+1$ — $P(m+1)$

m — $P(m)$

النتيجة: أن $\forall n \geq m, P(n)$

مثال (١٩، ٢) ص 65

أثبت أن: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ، $\forall n \geq 1$

الحل:

الخطوة الأساسية: $1=\dfrac{1(1+1)}{2}=1$ صائب

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 1$ ونفرض أن

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

ونبرهن:

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

لدينا $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

إذن $1+2+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

وبالتالي

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

النتيجة: لكل $n \geq 1$:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

مثال (1,60) ص 66

أثبت أن $2^n < n!$ لكل عدد صحيح $n \geq 4$.

الحل: تذكير:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad ; n \geq 1$

$0! = 1$

لاحظ أن $n! = (n-1)! \cdot n$

الخطوة الحسابية: $n = 4$: $4! = 24 > 16 = 2^4$ صحيح

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 4$ ونفرض $2^k < k!$

ونبرهن أن $2^{k+1} < (k+1)!$

لدينا: $2^k < k!$

فإن $2 \cdot 2^k < 2 \cdot k!$

فإن (1) $\boxed{2^{k+1} < 2 \cdot k!}$

ولدينا $2 < (k+1)$ فإن $2 \cdot k! < (k+1) \cdot k!$

فإن (2) $\boxed{2 \cdot k! < (k+1)!}$

حسب (1), (2) فإن $2^{k+1} < (k+1)!$

النتيجة: لكل $n \geq 4$, $2^n < n!$

مثال (1,61) ص 66

أثبت أن n^3-4n+6 يقبل القسمة على 3
لكل عدد صحيح $n \geq 0$.

الحل:

الخطوة الاساسية: $n=0$:

$0^3-4\cdot 0+6=6=3\cdot 2$

و 6 يقبل القسمة على 3.

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 0$ ونفرض أن:

k^3-4k+6 يقبل القسمة على 3

ونبرهن أن $(k+1)^3-4(k+1)+6$ يقبل القسمة على 3

لدينا k^3-4k+6 يقبل القسمة على 3.

لأنه يوجد $p \in \mathbb{Z}$ حيث: $k^3-4k+6=3p$

ولدينا:

$$(k+1)^3-4(k+1)+6$$
$$=k^3+3k^2+3k+1-4k-4+6$$
$$=(k^3-4k+6)+3(k^2+k-1)$$
$$=3p+3(k^2+k-1)=3(\underbrace{p+k^2+k-1}_{\in \mathbb{Z}})$$

فإن $(k+1)^3-4(k+1)+6$ يقبل القسمة على 3.

النتيجة: لكل عدد صحيح $n \geq 0$:
n^3-4n+6 يقبل القسمة على 3.

التعريف الاستقرائي

لتكن المتتالية : $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots \ldots\}$

$a_1 = 3 \,,\, a_2 = 1$

$n \geq 3 : \quad a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$

مثال (1,62) ص 67

ليكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية حيث $a_{n+1}=2a_n , a_0=1$

لكل $n\geq 0$. أثبت أن $a_n=2^n$ لكل $n\geq 0$

الحل:

الخطوة الاساسية: $a_0=1$, $2^0=1$

فان $a_0=2^0$ صائب.

خطوة الاستقراء: ليكن $k\geq 0$, نفرض $a_k=2^k$

ونبرهن أن $a_{k+1}=2^{k+1}$

لدينا $a_k=2^k$ (حسب فرضية الاستقراء).

ولدينا $a_{k+1}=2a_k$ (حسب التعريف الاستقرائي للمتتالية a_n)

فان $a_{k+1}=2\cdot 2^k=2^{k+1}$

النتيجة: $a_n=2^n$ لكل $n\geq 0$.

المبدأ الثاني للاستقراء الرياضي

لكل $n \geq m$, $P(n)$

الخطوة الأساسية

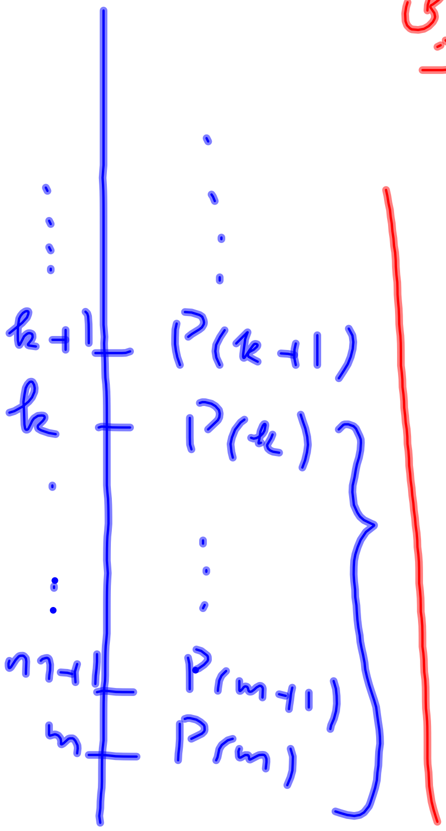
$P(m+t), \dots, P(m)$

خطوة الاستقراء ليكن $k \geq m$

نفرض $P(m), \dots, P(k-1), P(k)$

ونبرهن $P(k+1)$

النتيجة: لكل $n \geq m$, $P(m)$



مثال المعلم ص 71

لتكن $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية معرفة استقرائيا كالتالي:

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ ، $a_0 = 1$ ، $a_1 = 1$

لكل عدد صحيح $n \geq 2$

اثبت أن a_n عدد فردي لكل $n \geq 0$

الحل:

الخطوة الاساسية: $a_0 = 1$ عدد فردي

$a_1 = 1$ عدد فردي.

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 1$ ونفرض $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ كل منها عدد فردي.

ونبرهن أن a_{k+1} عدد فردي.

لدينا: $a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1}$ (حسب التعريف الاستقرائي)

ولدينا: a_{k-1} عدد فردي و a_k عدد فردي (حسب فرضية الاستقراء)

فإنه يوجد $p, h \in \mathbb{Z}$ حيث $a_k = 2p+1$ ، $a_{k-1} = 2h+1$

إذن: $a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1} = 2(2p+1) + (2h+1)$

$= 4p + 2 + 2h + 1$

$= 2(\underbrace{2p+1+h}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$

فإن a_{k+1} عدد صحيح فردي.

النتيجة: لكل ...

مثال (1,64) ص 69

أثبت أن كل عدد صحيح $n \geq 2$، هو عدد أولي أو يساوي حاصل ضرب منتهٍ من الأعداد الأولية.

الحل: الخطوة الأساسية: 2 عدد أولي

خطوة الاستقراء: ليكن $k \geq 2$ عدد صحيح

نفرض أن $2, 3, \dots, (k-1), k$ كل منها عدد أولي أو حاصل ضرب منتهٍ من الأعداد الأولية.

ونبرهن أن $(k+1)$ عدد أولي أو حاصل ضرب عدد منتهٍ من الأعداد الأولية.

① ← إذا كان $(k+1)$ عدد أولي حصلنا على النتيجة.

② ← إذا كان $(k+1)$ عدد ليس أوليًا

فإن $(k+1)$ يقبل القسمة على عدد غير 1 وغير $k+1$

فإنه يوجد $p, q \in \mathbb{N}$ حيث $(k+1) = p \cdot q$، $2 \leq p \leq k$

$2 \leq q \leq k$ و

حسب فرضية الاستقراء فإن p و q كل منهما عدد أولي أو حاصل ضرب عدد منتهٍ من الأعداد الأولية

فإن $k+1 = p \cdot q$ حاصل ضرب لعدد منتهٍ من الأعداد الأولية

من ①، ② فإن $k+1$ عدد أولي أو حاصل ضرب لعدد منتهٍ من الأعداد الأولية

النتيجة: لكل عدد صحيح n، $n \geq 2$

فهو عدد أولي أو حاصل ضرب لعدد منتهٍ من الأعداد الأولية.