إدارة المناهج والكتب المدرسية

دليل المعلم

الرياضيات

المرحلة الثانوية

المستويان الثالث والرابع

الفرع العلمي

دليل المعلم   الرياضيات   المرحلة الثانوية (م٣ + م٤)   الفرع العلمي   الطبعة الأولى ١٤٢٨هـ/٢٠٠٧م

JSBN : 111-411219-7

المطابع المركزية

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

إدارة المناهج والكتب المدرسية

دليل المعلم

الرياضيات

المستويان الثالث والرابع

المرحلة الثانوية

الفرع العلمي

تأليف

إبراهيم أحمد عمايرة | زياد عيسى جرادات

محمد عبد الكريم الصمادي | محمد تيسير عبابنة

الناشر

وزارة التربية والتعليم

إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال ملاحظاتكم وآرائكم على هذا الكتاب خلال أوقات الدوام الرسمي على العناوين الآتية:

هاتف : ٨ - ٥ / ٤٦١٧٣٠٤ فاكس : ٤٦٤٥٨٨٨ ، ٤٦٣٧٥٦٩ ص. ب. (١٩٣٠) الرمز البريدي : ١١١١٨

قرّرت وزارة التربية والتعليم استخدام هذا الدليل في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها بدءًا من العام الدراسي ٢٠٠٧/٢٠٠٨ وذلك بموجب قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠٠٧/١٠٥م) تاريخ ٢٠٠٧/٧/٢٦ جلسة رقم (٢٠٠٧/٦).

اللجنة الفنية للإشراف على أدلة المعلمين لكتب المباحث العلمية	
وفاء موسى العبداللات	**خالد رضوان عربيات**
شادية صالح غرايبة	**خالد عبدالرحيم حمام**
د. محمد عبد الكريم قعدان	فاتنة سمير التينة

التحرير العلمي : خالد رضوان عربيات

التحرير اللغوي : محمد عريف عبيدات

التحرير الفني : نداء فؤاد أبو شنب

التصميم : عمر أحمد أبو عليان

الرسم : فايزة فايز حداد

الإنتاج : عبد الرحمن سليمان أبو صعيليك

JSBN : 111-411219-7

الطبعة الأولى **١٤٢٨هـ / ٢٠٠٧م**

قائمة المحتويات

الـمـوضـوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

المستوى الرابع

الوحدة الرابعة : التكامل

الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية

الوحدة السادسة: الهندسة الفضائية

الملاحق

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على الرسول الأمين وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

أخي المعلم، أختي المعلمة

السلام عليكم ورحمة الله وبركاته،

نضع بين يديك (دليل المعلم) لكتاب الرياضيات المرحلة الثانوية، المستويان الثالث والرابع، الفرع العلمي، بطبعته الأولى، آملين الاستفادة منه في إعداد الدروس وتنفيذها كأحد المصادر التي تساعد على تحقيق النتاجات التعلمية المرجّوة.

ولعل من الأسس المهمة التي بني عليها هذا الدليل أنه إحدى الركائز لتحقيق المنهاج، إذ ينسجم وخطة التطوير التربوي المنبثقة من فلسفة التربية والتعليم وأهداف تطوير التعليم نحو الاقتصاد المبني على المعرفة.

ونحن إذ نقدّم إليك هذا الدليل، نأمل أن يكون مرشدًا وموردًا في تخطيط الدروس بما يتلاءم مع مستويات الطلبة، والبيئة المادية الصفية، وأهداف المبحث، كما نأمل تحقيق التكامل بين النظرية والتطبيق؛ إذ ارتبط هذا الدليل بكتاب الطالب على نحو مباشر، كما ارتبط بالنتاجات التعلّمية، واستراتيجيات التدريس والتقويم، فضلاً عن اهتمامه بتفعيل دور تكنولوجيا المعلومات والاتصالات (ICT) كأداة لتفعيل التعلّم الإيجابي تخطيطًا وتنفيذًا وتقويمًا.

ونحن إذْ نضع هذا الدليل بين يديك؛ فإننا نقدّم أمثلة واجتهادات لا نتوّقع الوقوف عندها فحسب، بل أن تعدَّها منطلقًا لتنمية خبراتك وإبراز قدراتك الإبداعية في وضع البدائل، أو الأنشطة المتنوعة، أو إضافة الجديد إلى المحتوى، أو بناء أدوات تقويم بمعايير أخرى جديدة.

ارشادات التعامل مع الدليل

تضمّنت صفحات الدليل مجموعة من العناصر التي يعتقد أنها تمثل أبرز جوانب الموقف التعليمي التعلّمي، وفي ما يأتي توضيح لكل من هذه العناصر.

- **نتاجات التعلّم**

نتاجات خاصة يتوقع تحقيقها من قبل الطلبة، وتتميز بشموليتها وتنوّعها (معارف، مهارات، اتجاهات)، وتعدُّ مرجعًا للمعلّم؛ إذ يُبنى عليها المحتوى، وتعدّ الركيزة الأساسية للمنهاج، وتسهم في تصميم نماذج المواقف التعليمية المناسبة وفي اختيار استراتيجيات التدريس وبناء أدوات التقويم المناسبة لها.

- **البنية المعرفية**

تتكون البنية المعرفية لأي مبحث من مجموعة من العناصر (مفاهيم، مصطلحات، مهارات، خوارزميات، نظريات وقوانين ومبادىء)، وتشكل المفاهيم عناصر مفتاحية لبقية عناصر البنية المعرفية، ولذلك تمّ تحديد المفاهيم والمصطلحات الأساسية التي وردت في الكتاب المدرسي؛ بهدف التركيز عليها في تصميم الموقف التعليمي.

- **السلامة العامة**

الإرشادات والاحتياطات الخاصة بالأمن والسلامة التي يجب مراعاتها عند تنفيذ الموقف التعليمي.

- **استراتيجيات التدريس**

الخطوات والإجراءات المنظّمة التي يقوم بها المعلّم وطلبته لتنفيذ الموقف التعليمي، وهي أيضًا خطوات مقترحة يمكن للمعلّم تطويرها أو تغييرها بما يتلاءم وظروف الطلبة، وإمكانات المدرسة، مع مراعاة توظيف تكنولوجيا المعلومات والاتصالات (ICT) عند الحاجة.

- **إدارة الصف**

إجراءات تهدف إلى تنظيم الموقف التعليمي وضبطه؛ لتسهيل تنفيذ الدرس بكفاءة، ومن أمثلتها ما يأتي:

١ – تنظيم زمني متوقع لكل خطوة من خطوات الدرس الإجرائية.

٢ – تنظيم جلوس الطلبة (مجموعات، أو حلقة دائرية، أو حرف U،....).

٣ – تهيئة البيئة الصفية (إنارة كافية وتهوية ونظافة و ....).

٤ – تهيئة الأدوات والمواد اللازمة لتنفيذ الدرس.

٥ – إثارة دافعية الطلبة للتعلّم.

٦ – استخدام أوراق العمل وأدوات التقويم المناسبة والأنشطة المتضمنة.

- **معلومات إضافية**

معلومات إثرائية وضرورية وموجزة ذات علاقة بالمحتوى وموجهة للمعلّم والطالب، تهدف إلى إثارة دافعية الطالب، ومساعدته على التعلّم، وإلى إثراء معارف المعلّم بالمحتوى؛ بقصد إرشاده من خلال استخدام مصادر تعليمية أخرى متنوعة.

- **الزمن المتوقع**

المدة الزمنية المتوقعة لتحقيق النتاجات الخاصة.

- **الفروق الفردية**

مجموعة الأنشطة والأسئلة وإضافات في المحتوى تمّ إعدادها لتقابل احتياجات الطلبة وفق قدراتهم المتنوعة من حيث (النوع الاجتماعي والاحتياجات الخاصة والبيئات الاجتماعية).

- **استراتيجيات التقويم وأدواته**

الخطوات والإجراءات المنظمة التي يقوم بها المعلّم أو الطلبة لتقويم الموقف التعليمي وقياس مدى تحقق النتاجات، وهي عملية مستمرة في أثناء تنفيذ الموقف التعليمي، يمكن تطويرها أو بناء نماذج أخرى مشابهة يتم تطبيقها بالتكامل مع إجراءات إدارة الصف.

- **التكامل الرأسي والأفقي**

أما الرأسي، فربط المفهوم بمفاهيم أخرى ضمن المبحث نفسه، وأما الأفقي، فربطه مع المباحث الأخرى.

- **مصادر التعلّم**

مصادر تعليمية يمكن للطالب والمعلّم الرجوع إليها؛ بهدف زيادة معلوماتهم وخبراتهم وتدعيم تحقيق النتاجات، وتشمل (كتبًا وموسوعات ومواقع إنترنت وأقراصًا مدمجة وزيارات ميدانية ومقابلات أشخاص ....).

- **المادة المحوسبة**

المادة التعليمية الإلكترونية التي أعدتها الوزارة في عدد من المباحث الدراسية (الرياضيات، والعلوم، والحاسوب، واللغة العربية، والتربية الوطنية، والإدارة المعلوماتية)؛ لتكون رديفة وداعمة لتحقيق نتاجات التعلّم، بالإضافة إلى التسجيلات والأقراص المدمجة وأرشيف التلفزيون التربوي.

- **أخطاء شائعة**

توقعات لأخطاء محتملة وشائعة بين الطلبة والمجتمع، تتعلّق بالمهارات والمفاهيم والقيم الواردة، مع تقديم معالجة لهذه الأخطاء.

- **الملاحق**

تضمَّن الدليل ملاحق منفصلة يتناول كل منها أحد الجوانب الآتية:

إجابات أسئلة الكتاب، وأوراق عمل، وأدوات تقويم، واستراتيجيات التدريس والتقويم، وحلول الأسئلة العلاجية والإثرائية.

إرشادات التعامل مع ذوي الاحتياجات الخاصة

- **الطلبة المتفوقون**

١- إجراء تعديل في مستويات الأنشطة حين يكتشف المعلم ما يدلّ على وجود طالب متفوق؛ لتتناسب هذه الأنشطة مع حاجات التفوق عند هذا الطالب وتولّد التحدي عند الطلبة الآخرين، إذ إن الأنشطة التي تكون دون مستوى قدرات الطالب المتفوق تؤدي إلى تراجع اهتمامه وإلى هبوط مستوى الدافعية عنده.

٢- إعلام أولياء أمور الطلبة المتفوقين بشكل دوري ومستمر عن الأنشطة الخاصة بهؤلاء الطلبة، وتوضيح دورهم تجاه أبنائهم المتفوقين من ناحية توفير الجو المناسب، والإمكانات المطلوبة والمناسبة، لتنمية مواهبهم وقدراتهم ورعايتها.

- **الطلبة الذين يعانون من اضطرابات نطقية**

١ – التحلي بالصبر وسعة الصدر في أثناء الاستماع إلى الطالب، حتى لا يشعر بالإحباط، فلا يتحدث في المرات القادمة، إضافة إلى أن للصبر وحسن الإصغاء كبير الأثر في الجانب التربوي والنفسي للطالب، كي يظل قادرًا على الاستمرار في أدائه الناجح.

٢ – تجنّب مساعدة الطالب في أثناء كلامه بلفظ الكلمة بدلاً منه، أو تكميلها نيابة عنه حين يتلعثم في لفظها؛ لأن ذلك يؤدي إلى تعريضه للحرج والاضطراب.

٣ – تجنّب إجبار الطالب على إعادة الكلمة التي يلثغ أو يتلعثم في لفظها أمام الآخرين.

٤ – تجنّب التوجيه والتدريب الصارمين؛ لأنهما يزيدان الضغوطات النفسية على الطالب ويسببان له القلق.

٥ – توجيه الطلبة العاديين إلى عدم الاستهزاء بالطالب الذي يعاني صعوبة في النطق.

٦ – تشجيع الطالب الذي يعاني من اضطرابات نطقية على المشاركة في العمل الجماعي، لمساعدته على التغلب على الصعوبات النطقية التي يواجهها قدر الإمكان.

٧ – استخدام اللغة السليمة في مخاطبة الطالب في كل المواقف، وتجنّب تكرار ما يصدر عنه من نطق غير سليم.

• **الطلبة الذين يعانون من الصعوبات البصرية**

١ – توفير الإضاءة المناسبة في أماكن جلوس الطالب، بحيث لا تكون خافتة.

٢ – الحرص على أن تكون الإضاءة على جانبي الطالب، في أثناء جلوسه، لا أمامه مباشرة. إضافة إلى التأكد من جلوسه إلى جانب النافذة؛ لضمان الإضاءة الجيدة.

٣ – تشجيع الطالب على استعمال الأدوات المُعينة عند الضرورة، مثل المسجلات والعدسات المكبرة، وارتداء النظارات الطبية باستمرار.

٤ – إعطاء الطالب وقتًا أطول من الوقت الذي يعطى للطلبة العاديين؛ ليتمكن من أداء المهمات التي يكلف بها.

• **الطلبة الذين يعانون من الصعوبات الحركية**

١ – إيلاء الطالب ذي الصعوبات الحركية الاهتمام الكافي في الحدود والمواقف المناسبة.

٢ – توفير البدائل من الأنشطة والمواقف الملائمة لإمكاناته وقدراته واحتياجاته.

٣ – العمل على رفع معنوياته عن طريق إقناعه بالقيام بالإنجاز السليم مثل غيره من الطلبة العاديين، وتكليفه بمهمات تناسب إمكاناته.

• **الطلبة الذين يعانون من ضعف في السمع**

١ – تحدّث بصوت مسموع، بحيث لا يكون مرتفعًا، ولتكن سرعتك بالكلام متوسطة.

٢ – أعد صياغة الفكرة أو السؤال ليصبح مفهومًا أكثر للطالب ضعيف السمع.

٣ – استخدم المعينات البصرية إلى الحد الأقصى الممكن، بما في ذلك الشفافيات والأفلام "السلايدات" والسبورة، وتجنّب أن يكون مصدر المعلومات في مكان ضعيف الإضاءة.

٤ – احصل على التغذية الراجعة من الطالب للتأكد من فهمه للموضوع.

٥ – شجّع تطور مهارات التواصل بما فيها الكلام والقراءة وتهجئة الأصابع والتواصل اليدوي.

٦ – دع الطالب يجلس في المكان الذي يسمح له بالإفادة من المعلومات البصرية والطلبة الآخرين والمعلم.

٧ – شجّع الطالب الضعيف سمعيًّا على المشاركة في النشاطات الصفية، ولا تتوقع منه أقل مما تتوقع من الطلبة الآخرين في الصف.

٨ – كن على اتصال مباشر مع الوالدين.

٩ – احرص على التواصل الدائم مع الطالب الضعيف سمعيًّا.

• **الطلبة الذين يعانون من بطء في التعلّم**

١ – استخدام أساليب التعزيز المتنوعة (المادية والمعنوية والرمزية واللفظية)، وتقديم التعزيز مباشرة بعد حصول الاستجابة المطلوبة.

٢ – التنويع في أساليب التعليم المتبعة التي من أهمها أسلوبا التعليم الفردي والتعليم الجماعي.

٣ – الحرص على أن يكون التعليم وظيفيًّا يخدم الطالب في حياته ويخطط له مسبقًا على نحو منظم.

٤ – التركيز على نقاط الضعف التي يعاني منها هؤلاء الطلبة، وتقوية الجوانب الإيجابية ونقاط القوة عندهم.

٥ – إقامة علاقة إيجابية واتصال دائم مع أولياء أمور هؤلاء الطلبة ذوي الاحتياجات الخاصة ومراقبة مدى تقدم الطالب في ضوء البرامج التعليمية والتربوية المقدمة.

٦ – تعزيز عملية التفاعل الإيجابي بين الطلبة ذوي الاحتياجات الخاصة وزملائهم العاديين.

ونحن إذ نضع بين أيديكم هذا الدليل، لنؤكد على أنه نقطة انطلاق لكم، آملين الصورة الأفضل والجديرة بالاقتداء، ومركزين على الجانب التطبيقي في التدريس أكثر من الجانب النظري، وساعين إلى تكامل التوجيه، مع تقديرنا للمعلم دائمًا.

الطالب الذي نريد

تهدف خطة التطوير التربوي المبني على الاقتصاد المعرفي إلى إعداد جيل من الطلبة يتمتع بمهارات حياتية ترتكز على عقيدة الأمة ومبادئها وقيمها الأصيلة ويمثل استثمارًا حقيقيًّا للمعرفة والخبرات.

وحيث إنّ طلبة اليوم هم بناة المجتمع في المستقبل الذين يتحملون مسؤولية الارتقاء به إلى أعلى المستويات في مختلف جوانب الحياة، فإن المناهج الجديد تسعى إلى تنمية الطالب الذي يتميز بأنه:

١ – يبحث عن المعرفة وينظّمها ويحلّلها ويوظّفها، ومن ثم يولّد معرفة جديدة.

٢ – يتواصل مع الآخرين بطرق متعددة ملتزمًا بأخلاقيات العمل الجماعي التي تشمل: احترام الآخرين، وحسن الاستماع، والموضوعية في الحوار..... إلخ.

٣ – يمارس التفكير الناقد والإبداعي والاستقصاء وحل المشكلات بصورة عملية على نحو مستمر، ويستخدم ذلك في اتخاذ القرارات.

٤ – يستخدم أدوات تكنولوجيا المعلومات والاتصالات (ICT) بإتقان وأمان وأخلاق، في البحث، والتحليل، ومعالجة البيانات، والعروض التقديمية...... إلخ، بمستويات متقدمة.

٥ – يقدّر ذاته بمستويات عالية، ويمارس عمليات التقويم الذاتي على نحو مستمر.

النتاجات العامة للصف

يتوقع من الطالب أن يكون قادرًا على:

- يظهر فهمًا للنهاية ورموزها ويحسب نهاية اقتران عند نقطة.
- يظهر فهمًا لموضوع الاتصال وعلاقته بالنهاية.
- يظهر فهمًا للمشتقة ويجدها باستخدام التعريف.
- يحدّد مشتقة اقتران باستخدام طرق متعددة.
- يحل مسائل عملية ضمن مجالات متعددة (فيزيائية، بيولوجية، اقتصادية).
- يميّز التكامل كعملية عكسية للتفاضل.
- يستخدم التكامل لحل مسائل متنوعة.
- يستقصى المحلّ الهندسي للقطوع المخروطية ويوظّفها في حلِّ مشكلات.
- يستقصي الخصائص والعلاقات بين الأشكال ثلاثية الأبعاد ويحلّلها.
- يبيّن صحة الفرضيات الهندسية لبرهنة النظريات.

الخطة الزمنية للوحدات

الوحدات	الدروس	عدد الساعات
المستوى الثالث الوحدة الأولى : النهايات والاتصال	(١ – ١) نهاية اقتران عند نقطة	٣
	(١ – ٢) نظريات النهايات	٢
	(١ – ٣) نهايات اقترانات كسرية وحساب النهايات	٣
	(١ – ٤) نهاية الاقترانات الدائرية	٢
	(١ – ٥) النهاية في المالانهاية	٢
	(١ – ٦) الاتصال عند نقطة	٢
	(١ – ٧) الاتصال على فترة	٢
	مراجعة	١
	اختبار ذاتي	١
الوحدة الثانية : التفاضل	(٢ – ١) متوسط التغير	٣
	(٢ – ٢) المشتقة الأولى	٢
	(٢ – ٣) الاتصال والاشتقاق	٢
	(٢ – ٤) قواعد الاشتقاق (١)	٢
	(٢ – ٥) قواعد الاشتقاق (٢)	٢
	(٢ – ٦) المشتقات العليا	١
	(٢ – ٧) مشتقة الاقترانات الدائرية	٢
	(٢ – ٧) قاعدة السلسلة	٢
	(٢ – ٧) الاشتقاق الضمني	٢
	مراجعة	٢
	اختبار ذاتي	١
الوحدة الثالثة : تطبيقات التفاضل	(٣ – ١) تطبيقات هندسية	٢
	(٣ – ٢) تطبيقات فيزيائية	٢
	(٣ – ٣) المعدلات المرتبطة بالزمن	٣
	(٣ – ٤) التزايد والتناقص	٢
	(٣ – ٥) القيم القصوى	٢
	(٣ – ٦) التقعر	٢
	(٣ – ٧) تطبيقات القيم القصوى	٣
	مراجعة	٢
	اختبار ذاتي	١

الخطة الزمنية للوحدات

الوحدات	الدروس	عدد الساعات
المستوى الرابع الوحدة الرابعة : التكامل	(٤ – ١) الاقتران البدائي	٢
	(٤ – ٢) قواعد التكامل غير المحدود	٢
	(٤ – ٣) التكامل المحدود	٢
	(٤ – ٤) المعادلات التفاضلية	٢
	(٤ – ٥) التكامل بالتعويض	٢
	(٤ – ٦) التكامل بالأجزاء	٢
	(٤ – ٧) حساب المساحة باستخدام التكامل	٣
	(٤ – ٨) اقتران اللوغريتم الطبيعي (مشتقته وتكاملة)	٢
	(٤ – ٩) الاقتران الأسي الطبيعي (مشتقته وتكاملة)	٢
	(٤ – ١٠) التكامل بالكسور الجزئية	٢
	مراجعة	٢
	اختبار ذاتي	١
الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية	(٥ – ١) القطع المخروطي	١
	(٥ – ٢) المحل الهندسي	٢
	(٥ – ٣) الدائرة	١
	(٥ – ٤) القطع المكافئ	٣
	(٥ – ٥) القطع الناقص	٣
	(٥ – ٦) القطع الزائد	٣
	مراجعة	١
	اختبار ذاتي	١
الوحدة السادسة : الهندسة الفضائية	(٦ – ١) البناء الرياضي للهندسة الفضائية	٣
	(٦ – ٢) أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء	٣
	(٦ – ٣) نظريات في التوازي	٣
	(٦ – ٤) التعامد	٤
	(٦ – ٥) الإسقاط العمودي	٣
	مراجعة	١
	اختبار ذاتي	١

نموذج مقترح لتحضير حصة

المبحث : .... الصف : .... الحصة : ....

الموضوع : .... اليوم والتاريخ : ....

النتاجات الخاصة	استراتيجيات التدريس / خطوات التنفيذ	استراتيجيات التقويم وأدواته	مصادر التعلم

ملاحظات : ....

....

المستوى الثالث

٣

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

الدرس ١-١ نهاية اقتران عند نقطة

النتاجات الخاصة

- يبدي فهمًا لنهاية اقتران عند نقطة ويستعمل الرموز للتعبير عن النهاية.
- يظهر فهمًا للنهاية من اليمين ومن اليسار.
- يجد قيمة نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية اقتران عند نقطة ($\lim_{س \to أ} ق(س)$)، نهاية اقتران عند نقطة من اليمين ($\lim_{س \to أ^+} ق(س)$)، نهاية اقتران عند نقطة من اليسار ($\lim_{س \to أ^-} ق(س)$).

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- راجع الطلبة بالمتطلبات السابقة للموضوع: الاقتران، إيجاد قيمة اقتران عند نقطة من خلال قاعدته، ومن الرسم البياني الذي يمثّله.
- كلف الطلبة بإعطاء أمثلة على اقترانات ثم رسمها.
- ناقش مثال (١) أو أي مثال آخر مشابه؛ لتوضيح مفهوم النهاية عند نقطة مثل (أ) وذلك بدراسة قيم الاقتران حول تلك النقطة بأخذ قيم للمتغير س تزداد اقترابًا من (أ)، وربط ذلك بالتمثيل البياني لمنحنى الاقتران.
- ناقش عددًا كافيًا من الأمثلة تتناول تحديد نهاية اقتران عند نقطة، كذلك النهاية من اليمين أو من اليسار عند نقطة، وذلك من خلال التمثيل البياني للاقتران.
- ناقش الطلبة بالمثالين (٢، ٣) أو أمثلة أخرى مشابهة، وأكّد على أن وجود نهاية اقتران عند نقطة لا يتطلب أن يكون الاقتران معرفًا عند تلك النقطة.
- كلف الطلبة بحل تدريب (١) في دفاترهم وتابع حلولهم. وأكد على تبسيط الاقتران بإجراء الاختصار المناسب.
- كلف الطلبة بحل واجب بيتي من التمارين والمسائل المتعلقة بالموضوع.

معلومات إضافية للمعلم

- أكد على الطلبة بأن $\lim_{س \to أ} ق(س)$ تتضمن أن س ≠ أ وهذا يمكنك من تبسيط بعض الاقترانات الكسرية كما في مثال (٣)، تدريب (١).

مفهوم النهاية من المفاهيم الصعبة التي لا يتم استيعابها بسهولة فالطالب المبتدئ يجد صعوبة في استيعاب هذا المفهوم وتطبيقه، وعليه أن ينظر له من جوانب مختلفة حتى يتضح المعنى، والهدف من تقديم هذا المفهوم في هذا الفصل هو أهميته للموضوعات اللاحقة كالاتصال والاشتقاق.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

١-١ نهاية اقتران عند نقطة
Limit of a function at a point

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تبدي فهما لنهاية اقتران عند نقطة وتستعمل الرموز للتعبير عن النهاية.
٢- تظهر فهما للنهاية من اليمين ومن اليسار.
٣- تجد قيمة نهاية اقتران عند نقطة بيانيا.

درست سابقًا كثيرات الحدود وبعض الاقترانات الخاصة وتعرفت إيجاد قيمة اقتران معلوم عند عدد حقيقي من مجاله. ستدرس في هذه الوحدة سلوك الاقترانات عندما يقتربُ المتغير من قيمة معينة، والأمثلة الآتية توضح ذلك.

مثال (١)

ليكن ق(س) = ٢س + ٣، ادرس سلوك الاقتران ق عندما تقترب س من العدد ٣.

الحل

إذا كانت س < ٣ وأخذت قيم س تزداد بحيث تقترب من العدد ٣، نقول بأن س تقترب من العدد ٣ من اليسار. وإذا كانت س > ٣ وأخذت قيم س تنقص بحيث تقترب من العدد ٣، نقول بأن س تقترب من العدد ٣ من اليمين (س تقترب من العدد ٣ تعني أن س ≠ ٣).
والجدول الآتي يبين قيم الاقتران ق عند بعض الأعداد القريبة من العدد ٣ في كلتا الحالتين:

→ ٣ ←

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣,٠٠٠١		٢,٩٩٩٩	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٩,٢	٩,٠٢	٩,٠٠٢	٩,٠٠٠٢		٨,٩٩٩٨	٨,٩٩٨	٨,٩٨	٨,٨

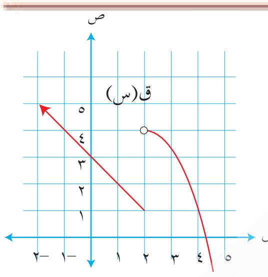
→ ٩ ←

١٣

مثال (٢)

اعتمادًا على الشكل (١-٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق جد كلا مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س)$ ٢) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س)$
٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ ٤) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$



الشكل (١-٢)

الحل

١) من ملاحظة الشكل المرسوم الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، وبتتبع المنحنى عند اقتراب قيم س من ٢ من اليمين وقراءة قيم ص المقابلة لقيم س تجد أن: $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ٤$
٢) من ملاحظة الشكل المرسوم الذي يمثل منحنى الاقتران ق، وبتتبع المنحنى عند اقتراب قيم س من ٢ من اليسار وقراءة قيم ص المقابلة لقيم س تجد أن: $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ١$
٣) بما أن $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ق(س)$، فإن $\lim_{س \to ٢} ق(س)$ غير موجودة.
٤) من ملاحظة الشكل المرسوم الذي يمثل منحنى الاقتران ق، وبتتبع المنحنى عند اقتراب قيم س من الصفر من اليمين ومن اليسار وقراءة قيم ص المقابلة لقيم س تجد أن:
$\lim_{س \to ٠} ق(س) = ٣$

مثال (٣)

ليكن ق(س) = $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

ارسم منحنى الاقتران ق ومن الرسم جد كلا من:

$\lim_{س \to ١^-} ق(س)$ ، $\lim_{س \to ١^+} ق(س)$ ، $\lim_{س \to ١} ق(س)$

إنتبه

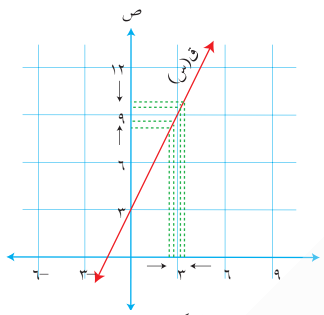
$\lim_{س \to أ} ق(س)$ تتضمن أن س ≠ أ

١٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

لاحظ الشكل (١–١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، وبالاعتماد على الجدول تجد أنه كلما اقتربت س من ٣ من اليسار فإن قيم الاقتران ق تقترب من ٩، نقول في هذه الحالة: إن نهاية ق(س) عندما تؤول س إلى ٣ من اليسار تساوي ٩ ويعبر عن ذلك رمزيًّا كالآتي:

$$\lim\limits_{س \to ٣^{-}} ق(س) = ٩$$



الشكل (١–١)

وكذلك تجد أنه كلما اقتربت س من العدد ٣ من اليمين فإن قيم الاقتران ق تقترب من العدد ٩، نقول في هذه الحالة: إن نهاية ق(س) عندما تؤول س إلى ٣ من اليمين تساوي ٩ ويعبر عن ذلك رمزيًّا كالآتي: $\lim\limits_{س \to ٣^{+}} ق(س) = ٩$

وبما أن قيم الاقتران ق تقترب من ٩ كلما اقتربت قيم س من ٣ من اليسار واليمين فنقول في هذه الحالة: إن نهاية ق(س) عندما تؤول س إلى ٣ تساوي ٩

ويعبر عن ذلك رمزيًّا كالآتي: $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س) = ٩$

وبصورة عامة

إذا كانت $\lim\limits_{س \to أ^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to أ^{+}} ق(س) = ل$ ، حيث ل عدد حقيقي،

فإن: $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ موجودة وتكون $\lim\limits_{س \to أ} ق(س) = ل$

وإذا كانت $\lim\limits_{س \to أ^{-}} ق(س) \neq \lim\limits_{س \to أ^{+}} ق(س)$ ، فإن $\lim\limits_{س \to أ} ق(س)$ غير موجودة.

١٤

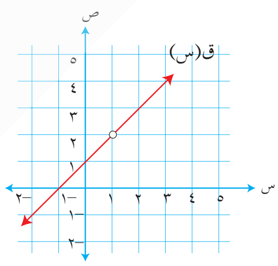
الحل

بسط قاعدة الاقتران ق :

$$ق(س) = \frac{(س-١)(س+١)}{س-١}$$

ومنه ق(س) = س + ١، حيث س ≠ ١

ارسم منحنى الاقتران ق كما في الشكل (١–٣)



الشكل (١–٣)

لاحظ وجود انقطاع في الخط المستقيم عند س = ١ لأن الاقتران ق غير معرف عند س = ١.

لاحظ من الرسم أن:

$$\lim\limits_{س \to ١^{-}} ق(س) = ٢$$

$$\lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) = ٢$$

وبما أن:

$$\lim\limits_{س \to ١^{-}} ق(س) = \lim\limits_{س \to ١^{+}} ق(س) = ٢$$

فإن

$$\lim\limits_{س \to ١} ق(س) = ٢$$

تدريب (١)

ليكن ق(س) = $\frac{٩ - س^{٢}}{س - ٣}$ ، س ≠ ٣

ارسم منحنى الاقتران ومن الرسم جد كلاًّ مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \to ٣^{+}} ق(س)$ ٢) $\lim\limits_{س \to ٣^{-}} ق(س)$ ٣) $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$

١٦

الأخطاء الشائعة

– قد يجد الطلبة قيمة الاقتران عند نقطة بدلاً من إيجاد قيمة نهاية الاقتران عند تلك النقطة وخاصة في الاقترانات المتشبعة. يمكن التغلب على هذه المشكلة بتوضيح الفرق بينهما بالرسم.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق (س) = ٢ ، هـ (س) = س – ٢، أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) مثّل كلاً من ق، هـ بيانيًّا.

ب) اعتمد على الرسم في إيجاد $\lim\limits_{س \to ٣} ق(س)$، $\lim\limits_{س \to ٣} هـ(س)$.

إثراء

– مثّل الاقتران ق (س) = | ٤ – س^{٢}| بيانيًّا، ثم حدّد من الرسم نهاية الاقتران عندما تؤول س إلى كل من : ٢، –٢، صفر.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢ – ١)، فقرة (١).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، ووحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي مبحث الرياضيات، ووحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٤)

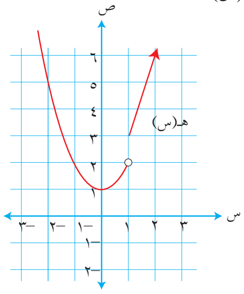
إذا كان
$$\text{هـ(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ \text{ ، } & \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} \text{ ، } & \text{س} \geq ١ \end{cases}$$

ارسم منحنى الاقتران **هـ** ومن الرسم جد كلًّا من:

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$

الحل

ارسم منحنى الاقتران ق



الشكل (١−٤)

لاحظ من الرسم في الشكل (١ − ٤) أن:

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = ٢$

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} = ٣$

وحيث إن $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)} \neq \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$

فإن $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}}\ \text{هـ(س)}$ غير موجودة

من الأمثلة السابقة، تلاحظ أنه لتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س إلى عدد حقيقي مثل أ فإنه من الضروري أن يكون الاقتران معرفًا حول العدد أ (أي معرفًا في فترة مفتوحة قصيرة الطول تحتوي العدد أ ، وليس من الضروري أن يكون معرفًا عند العدد أ نفسه).

ولتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س إلى عدد حقيقي مثل أ من اليسار، فإنه من الضروري أن يكون الاقتران معرفًا حول (أ) من اليسار (أي على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الشكل (جـ،أ)).

ولتحديد نهاية اقتران عندما تؤول س إلى عدد حقيقي مثل أ من اليمين، فإنه من الضروري أن يكون الاقتران معرفًا حول (أ) من اليمين (أي على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الشكل (أ،جـ)).

١٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الدرس ١-١ نهاية اقتران عند نقطة

النتاجات الخاصة

- يبدي فهمًا لنهاية اقتران عند نقطة ويستعمل الرموز للتعبير عن النهاية.
- يظهر فهمًا للنهاية من اليمين ومن اليسار.
- يجد قيمة نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية اقتران عند نقطة (نهــا$_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق (س))، نهاية اقتران عند نقطة من اليمين (نهــا$_{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{+}}$ ق (س))، نهاية اقتران عند نقطة من اليسار (نهــا$_{\text{س} \leftarrow \text{أ}^{-}}$ ق (س)).

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- ناقش الطلبة بحل مثال (٤)، ووضّح لهم طريقة رسم الاقترانات المتشعبة ومن ثم إيجاد النهاية من الرسم.
- كلّف الطلبة بحل تدريب (٢) كتطبيق مباشر على إيجاد النهاية لاقتران متشعب عند نقطة التشعب بعد رسمه، وتابع حلولهم، وارصد الأخطاء التي يقع بها الطلبة.
- ناقش الطلبة بحل مثال (٥) وأمثلة أخرى مشابهة، وأكّد على أن الاقتران غير معرّف على يسار العدد ٣.
- كلّف الطلبة بحل تدريب (٣) كتطبيق على الفكرة الواردة في مثال (٥)، وتابع حلولهم، وقدّم المساعدة وقت الحاجة.
- ناقش الطلبة بحل مثال (٦)، وأكّد على أن هذا الاقتران حالة خاصة من الاقترانات الأسية.
- كلّف الطلبة بحل واجب بيتي من التمارين والمسائل المتعلقة بالدرس.

معلومات إضافية

- تعريف نهاية اقتران عند نقطة:

نهــا$_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق (س) = ل وفقط إذا كان لكل عدد حقيقي $\varepsilon > ٠$ توجد $\delta > ٠$ بحيث $٠ < |\text{س} - \text{أ}| < \delta$ يتضمن $|\text{ق (س)} - \text{ل}| < \varepsilon$. ويستخدم هذا التعريف لإثبات قيمة نهاية اقتران عند نقطة.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (٢)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ ، & س \leq ٢ \\ ٢س + ١ ، & س > ٢ \end{cases}$

ارسم منحنى **ق** ومن الرسم جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٢^{+}}$ ق(س)   ٢) $\lim_{س \to ٢^{-}}$ ق(س)   ٣) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

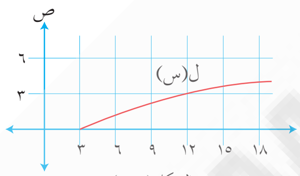
مثال (٥)

إذا كان ل(س) = $\sqrt{س - ٣}$ جد إن أمكن كلًّا من:

١) $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ل(س)   ٢) $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ل(س)   ٣) $\lim_{س \to ٣}$ ل(س)

الحل

لاحظ منحنى الاقتران **ل** في الشكل (١–٥):



الشكل (١–٥)

١) من الرسم تلاحظ أن $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ل(س) = .

٢) بما أن الاقتران ل غير معرف عند س = ٣ من اليسار (على فترة مفتوحة مثل (جـ،٣))، فإن $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ل(س) غير موجودة.

٣) بما أن $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ل(س) غير موجودة، فإن $\lim_{س \to ٣}$ ل(س) غير موجودة.

١٨

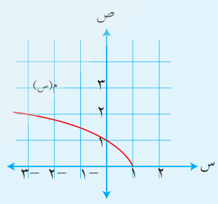
تدريب (٣)

إذا كان م(س) = $\sqrt{١ - س}$ اعتمد على منحنى م في الشكل (١–٦) لإيجاد كلٍّ مما يأتي إن أمكن:

١) $\lim_{س \to ١^{+}}$ م(س)

٢) $\lim_{س \to ١^{-}}$ م(س)

٣) $\lim_{س \to ١}$ م(س)



الشكل (١–٦)

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ ، حيث هـ العدد النيبيري، ارسم منحنى الاقتران **ق** ثم من الرسم جد $\lim_{س \to ٣}$ ق(س).

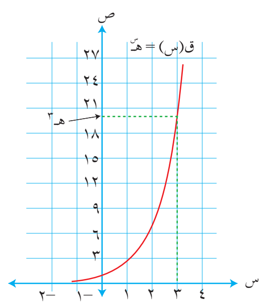
الحل

سبق أن درست التمثيل البياني للاقترانات الأسية، وللاقتران ق(س) = $هـ^{س}$ ، حيث هـ العدد النيبيري لاحظ الشكل (١–٧).

من الشكل تلاحظ أن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س) = $هـ^{٣}$

تذكر

الاقتران الأسي هو اقتران حقيقي يمكن التعبير عن قاعدته على الصورة: ق(س) = $أ^{س}$، حيث أ > ٠، أ ≠ ١



الشكل (١–٧)

١٩

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق (س) = س ، هـ (س) = | س – ٢ | ، أجب عن الأسئلة الآتية:

أ) مثّل كلًا من ق، هـ بيانيًا.

ب) اعتمد على الرسم في إيجاد $\lim_{س \to ٣}$ ق (س)، $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س).

إثراء

– ارسم منحنى الاقتران الذي يحقق المعطيات الآتية:

• ق (س) = $س^{٢}$ – ٢ س + ١ حيث س ≠ ٢، $\lim_{س \to ٢}$ ق (س) = ١، ق (٢) = ٥

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: مراجعة الذات.

– **الأداة**: سلّم التقدير (٢ – ١)، فقرة (١).

– **الأداة**: يوميات الطالب.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي مبحث الرياضيات، وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يبدي فهمًا لنهاية اقتران عند نقطة ويستعمل الرموز للتعبير عن النهاية.
- يظهر فهمًا للنهاية من اليمين ومن اليسار.
- يعيّن قيمة نهاية اقتران عند نقطة بيانيًّا.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية اقتران عند نقطة (نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق (س))، نهاية اقتران عند نقطة من اليمين (نهـــا$_{س \leftarrow أ^+}$ ق (س))، نهاية اقتران عند نقطة من اليسار (نهـــا$_{س \leftarrow أ^-}$ ق (س)).

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

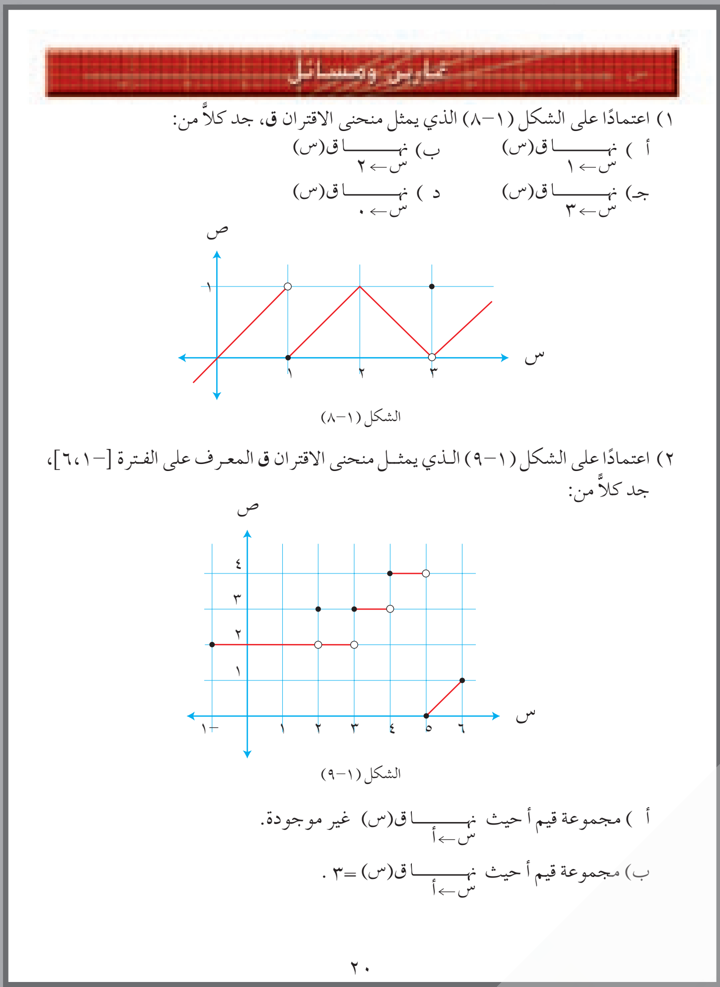
- مراجعة الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات الواردة في الدرس.
- مناقشة الأسئلة المتعمّقة الآتية:

السؤال الثاني (ب)، السؤال الخامس (د).

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات من (٤ – ٦) طلاب في كل مجموعة، وتكليف كل مجموعة حل الأسئلة.
- متابعة حلول الطلبة ورصد الملاحظات.
- تقديم المساعدة للمجموعات التي تواجه صعوبات وحسب الحاجة.
- مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في أثناء الحل والأخطاء الشائعة التي وقعوا بها لتجنبها في مواقف لاحقة.

معلومات إضافية



تمارين ومسائل

١) اعتمادًا على الشكل (١-٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد كلاًّ من:

أ) نهـــا$_{س \leftarrow ١}$ ق(س)　　ب) نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)

جـ) نهـــا$_{س \leftarrow ٣}$ ق(س)　　د) نهـــا$_{س \leftarrow ٠}$ ق(س)

الشكل (١-٨)

٢) اعتمادًا على الشكل (١-٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على الفترة [-١، ٦]، جد كلاًّ من:

الشكل (١-٩)

أ) مجموعة قيم أ حيث نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة.

ب) مجموعة قيم أ حيث نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ٣ .

٢٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٣) ارسم شكلًا تقريبيًّا للمنحنى الذي يمثل كل من الاقترانات الآتية، ثم احسب نهاية كل منها عندما تقترب س من العدد المذكور إزاء كل منها:

أ) $\text{ع(س)} = \begin{cases} ٧ - \text{س} ، & \text{س} \leq -٢ \\ \text{س}^{٢} + ٥ ، & \text{س} > -٢ \end{cases}$ ، $\text{س} \leftarrow -٢$

ب) $\text{ت(س)} = |\text{س} + ٤|$ ، $\text{س} \leftarrow -٤$

٤) ارسم شكلًا تقريبيًّا للمنحنى الذي يمثل كل من الاقترانات الآتية، ثم احسب نهاية كل منها عندما تقترب س من العدد المذكور إزاء كل منها:

أ) $\text{ق(س)} = ٢^{\text{س}}$ ، $\text{س} \leftarrow -١$

ب) $\text{ف(س)} = \begin{cases} \frac{|\text{س}|}{\text{س}} ، & \text{س} \neq ٠ \\ ٥ ، & \text{س} = ٠ \end{cases}$ ، $\text{س} \leftarrow ٠$

جـ) $\text{هـ(س)} = [\text{س}]$ ، $\text{س} \in [٠، ٢]$ ، $\text{س} \leftarrow ١$

٥) إذا كان $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س} - ١}$ ، فارسم المنحنى الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، ثم جد:

أ) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^{+}} \text{ق(س)}$ ب) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢^{-}} \text{ق(س)}$

جـ) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ق(س)}$ د) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ١} \text{ق(س)}$

٢١

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة.
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع النهايات والاتصال.
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة في أثناء مناقشة حل التمارين على توجيه أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة، وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** قائمة الشطب (٢ – ١)، بند (١).
- **الاستراتيجية:** مراجعة الذات.
- **الأداة:** سلّم التقدير (٢ – ١)، بند (١).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

- ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي مبحث الرياضيات، وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ١-٢ نظريات النهايات

النتاجات الخاصة

– يعبّر عن نظريات النهايات بعبارات لغوية مكافئة.
– يجد قيمة النهاية بتطبيق نظريات النهايات.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية الجذر النوني لاقتران.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مراجعة الطلبة بعمليات الاقترانات، نهاية اقتران عند نقطة عن طريق الجداول والرسم، ومراجعة الطلبة كذلك بالجذر النوني لاقتران.
– بيان الحاجة لنظريات تجد من خلالها نهاية اقتران بطرق سهلة وخاصة إذا كان هناك صعوبة في رسم منحنى الاقتران، مثل:
ق (س) = س^{٣} – ٣س^{٢} + ٤ .

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات مناسبة، وتكليف كل مجموعة بتنفيذ إحدى أوراق العمل (٣ – ١)، (٣ – ٢)، (٣ – ٣) للتوصل إلى الحقائق التي تنص عليها النظريتان (١)، (٢).
– تعرض المجموعات النتائج التي توصلت إليها مع التركيز على الشروط الخاصة بكل نظرية.
– مناقشة الطلبة ببنود الملاحظة الواردة في كتاب الطالب والتركيز عليها؛ لأنها تعتبر من القواعد الأساسية في النهايات.
– مناقشة الطلبة بالمثالين (١، ٢)، والتركيز على النظريات التي تمّ استخدامها في إيجاد النهاية مع التأكيد على توفر شروط تطبيقها.
– تكليف الطلبة حل تدريب (١)، والتأكيد على امتلاكهم للمهارات المتضمنة في التدريب، ومناقشة الطلبة بالمثالين (٣ ، ٤) مع التأكيد على توفر شروط النظريات التي تمّ تطبيقها.

معلومات إضافية


١-٢
نظريات النهايات
Limits Theorems

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

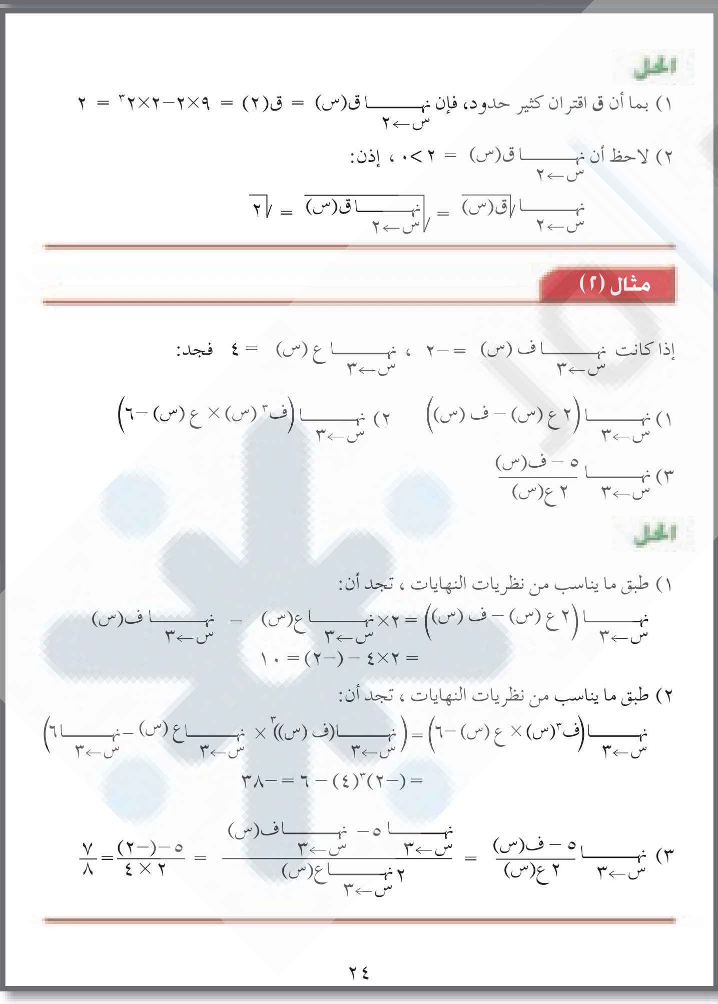
تجد قيمة النهاية بتطبيق نظريات النهايات.

تعرفت في الدرس السابق إيجاد نهاية اقتران عند نقطة من خلال رسم منحنى الاقتران، وحيث إنه ليس من السهل غالبا رسم منحنيات الاقترانات، فإن النظريات الآتية تساعد في حساب النهايات.

نظرية (١)
١) إذا كان أ، ب عددين حقيقيين ، وكان ق(س) = ب لكل س في مجاله، فإن:
$\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = ب
٢) إذا كان أ ∈ ح ، ق(س) = س^{ن}، فإن: $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = أ^{ن} ، حيث ن = ١، ٢، ٣، ...

نظرية (٢)
إذا كان ق، هـ اقترانين، أ ، ب ، جـ ، م ∈ ح
بحيث: $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = ب ، $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ هـ(س) = جـ
فإن:
١) $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ (ق(س) ± هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) ± $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ هـ(س) = ب ± جـ
٢) $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ م ق(س) = م $\underset{س \leftarrow أ}{نهــا}$ ق(س) = م × ب

٢٦


الحل

١) بما أن ق اقتران كثير حدود، فإن $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ ق(س) = ق(٢) = ٩×٢–٢×٢^{٣} = ٢
٢) لاحظ أن $\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ ق(س) = ٢ > ٠ ، إذن:
$\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا}$ $\sqrt{ق(س)}$ = $\sqrt{\underset{س \leftarrow ٢}{نهــا} ق(س)}$ = $\sqrt{٢}$

مثال (٢)

إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ف (س) = –٢ ، $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ع (س) = ٤ فجد:
١) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ (٢ ع (س) – ف (س))
٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ (ف^{٣} (س) × ع (س) –٦)
٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ $\frac{٥ - ف(س)}{٢ ع(س)}$

الحل

١) طبق ما يناسب من نظريات النهايات ، تجد أن:
$\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ (٢ ع (س) – ف (س)) = ٢× $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ع(س) – $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ف(س)
= ٢×٤ – (–٢) = ١٠
٢) طبق ما يناسب من نظريات النهايات ، تجد أن:
$\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ (ف^{٣}(س) × ع (س) –٦) = ($\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ (ف(س))^{٣} × $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ع (س) – $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ ٦)
= (–٢)^{٣}(٤) – ٦ = –٣٨
٣) $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا}$ $\frac{٥ - ف(س)}{٢ ع(س)}$ = $\frac{\underset{س \leftarrow ٣}{نهــا} ٥ - \underset{س \leftarrow ٣}{نهــا} ف(س)}{٢ \underset{س \leftarrow ٣}{نهــا} ع(س)}$ = $\frac{٥ - (-٢)}{٢ × ٤}$ = $\frac{٧}{٨}$

٢٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق (س) = ٥ − ٢ س ، ل (س) = ٣ + ٤ س ، جد:

أ) ق + ل ، ٢ ق ، ق × ل.

ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ ق (س)، $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ (ق (س) + ل (س))، $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ (ق (س) × ل (س))

إثراء

١) إذا كان ق (س) = س^{٣} [س − ١] جد:

أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ق (س)

ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س)

٢) إذا كان $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ (٢ق (س) + ٣هـ (س)) = −٩، وكان $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ١,٥

جد $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}}$ (هـ (س))^{٢}

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢ – ١)، بند (٢).

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢ – ٤)، لتقويم أداء الطلبة في المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي مبحث الرياضيات، وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

٣) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ (ق(س) × هـ(س)) = $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) × $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ هـ(س) = ب × جـ

٤) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)} = \dfrac{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} ق(س)}{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} هـ(س)} = \dfrac{ب}{جـ}$ ، بشرط أن جـ ≠ صفرا

٥) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} \sqrt[ن]{ق(س)} = \sqrt[ن]{\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}} ق(س)} = \sqrt[ن]{ب}$ (بشرط أن ب > ٠ ، إذا كان ن عددا زوجيا)

يمكن التعبير عن الخصائص الواردة في نظرية (٢) كما يأتي:

١) نهاية مجموع (طرح) اقترانين يساوي مجموع (طرح) نهايتي الاقترانين.

٢) نهاية عدد ثابت مضروبا باقتران يساوي العدد الثابت مضروبا بنهاية الاقتران.

٣) نهاية حاصل ضرب اقترانين يساوي حاصل ضرب نهايتي الاقترانين.

٤) نهاية خارج قسمة اقترانين يساوي خارج قسمة نهايتي الاقترانين، بشرط أن نهاية المقام ≠ ٠.

٥) نهاية الجذر النوني لاقتران يساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران بشرط أن يكون الجذر النوني لنهاية الاقتران معرفا.

ملحوظة

١) النظريات السابقة صحيحة في حالتي النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

٢) بالاعتماد على النظريات السابقة، فإنه:

أ) إذا كان ق اقتران كثير حدود، أ ∈ ح ، فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ق(أ).

ب) إذا كانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = ب ، فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـــا}}$ (ق(س))^{ن} = ب^{ن}

حيث ن عدد طبيعي

مثال (١)

إذا كان ق(س) = ٩س − ٢س^{٣} فجد:

١) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق(س) ٢) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \sqrt{ق(س)}$

٢٣

تدريب (١)

إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ٤ ، فجد:

١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}} \sqrt[٣]{٢ ق(س)}$

٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ (س^{٢} ق(س) − (ق(س))^{٢} + ٢س)

مثال (٣)

جد $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٢} + س}{س^{٣} - ١}$

الحل

يمكنك تطبيق النظرية الخاصة بنهاية خارج قسمة اقترانين، حيث إن شروطها متحققة (نهاية كل من البسط والمقام موجودتان، ونهاية المقام ليست صفرا) فتجد أن:

$$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \dfrac{س^{٢} + س}{س^{٣} - ١} = \dfrac{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} (س^{٢} + س)}{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} (س^{٣} - ١)} = \dfrac{٠}{-٢} = \text{صفرًا}$$

مثال (٤)

جد كلاًّ مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow ٤^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}}$

٢) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}}$

تذكر

$\dfrac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\dfrac{أ}{ب}}$

بشرط أن أ ≥ ٠ ، ب > ٠

٢٥

الأخطاء الشائعة

– قد يخطىء الطلبة في توزيع النهاية على ناتج جمع ، طرح، ضرب، قسمة اقترانين دون وجود نهاية أحدهما أو كليهما، ينصح الطالب بالتأكد من وجود نهاية كل من الاقترانين أولًا.

النتاجات الخاصة

– يعبّر عن نظريات النهايات بعبارات لغوية مكافئة.
– يجد قيمة النهاية بتطبيق نظريات النهايات.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية الجذر النوني لاقتران.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: حل المشكلات

– مناقشة الطلبة بمثال (٥)، والتركيز على كيفية إعادة تعريف هذا النوع من الاقترانات دون استخدام رمز القيمة المطلقة.
– مناقشة مثال (٦)، والتأكيد على طريقة الحل المتبعة لمثل هذا النوع من الأسئلة التي يتم فيها توظيف النهاية المعطاة.
– تكليف الطلبة حل تدريب (٢) للتدرب على إعادة تعريف القيمة المطلقة وإيجاد النهاية عند نقطة التشعب.
– تكليف أحد الطلبة حل مثال (٧) على السبورة، وتوضيح أن هذا النوع من الاقترانات يؤول إلى اقتران متشعب بعد إعادة تعريفه.
– تكليف الطلبة حل تدريب (٣)، والتأكيد على أنه إذا كانت نهاية مجموع اقترانين عند نقطة موجودة فليس من الضروري أن تكون نهاية كل من الاقترانين موجودة عند النقطة نفسها.
– تكليف الطلبة حل واجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

– نظرية: إذا كانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = \lim_{س \to أ} هـ(س) = ل$، وكان $ق(س) \geq جـ(س) \geq هـ(س)$ معرفة حول العدد أ فإن $\lim_{س \to أ} جـ(س) = ل$.

تستخدم هذه النظرية لبرهان $\lim_{س \to ٠} \frac{جاس}{س} = ١$ بالطريقة الجبرية.

الحل

١) $\lim_{س \to ٤^+} \frac{\sqrt{س^٢ - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}} = \sqrt{\lim_{س \to ٤^+} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}} = \sqrt{\lim_{س \to ٤^+} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤}}$

$= \sqrt{\lim_{س \to ٤^+} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤}} = \sqrt{\lim_{س \to ٤^+} (س + ٤)} = \sqrt{٨}$

٢) لاحظ أن كلاً من البسط والمقام غير معرفين يسار العدد ٤، وعليه فإنهما غير معرفين حول العدد ٤، فنهاية كل منهما غير موجودة عندما تؤول س إلى ٤، وعليه، فإن:

$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س^٢ - ١٦}}{\sqrt{س - ٤}}$ غير موجودة

مثال (٥)

جد $\lim_{س \to -١} |س^٢ - ١|$

الحل

ليكن ق(س) $= |س^٢ - ١|$. حل المعادلة $س^٢ - ١ = ٠$، لتحصل على س $= ١$، س $= -١$

إشارة $س^٢ - ١$: ‎+ + + + + + (−١) − − − − − − (١) + + + + + +

أعد تعريف ق(س) دون استعمال رمز القيمة المطلقة:

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ &، س \leq -١ \\ -س^٢ + ١ &، -١ < س < ١ \\ س^٢ - ١ &، س \geq ١ \end{cases}$$

٢٦

مثال (٧)

إذا كان د(س) $= [٢س]$، فجد: $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}} د(س)$

الحل

أعد تعريف د(س) حول س $= \frac{٣}{٢}$ دون استعمال رمز أكبر عدد صحيح فتحصل على:

$$د(س) = \begin{cases} ٢ &، ١ \leq س < \frac{٣}{٢} \\ ٣ &، \frac{٣}{٢} \leq س < ٢ \end{cases}$$

لاحظ أن قاعدة الاقتران د تتشعب عند س $= \frac{٣}{٢}$، لذا تجد كلاً من النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عندما تؤول س إلى $\frac{٣}{٢}$ فتحصل على:

$\lim_{س \to \frac{٣}{٢}^+} د(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}^-} د(س) = ٢$

وعليه، فإن $\lim_{س \to \frac{٣}{٢}}$ غير موجودة

تدريب (٣)

إذا كان ق(س) $= [س + ٥]$ ، هـ(س) $= [٤ - س]$ ،

فجد كلا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \to ١} ق(س)$
٢) $\lim_{س \to ١} هـ(س)$
٣) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$

.... ماذا تستنتج؟

٢٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كانت $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = -١$ فجد ما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٢} \left(ق(س) + هـ(س)\right)$

ب) $\lim_{س \to ٢} \left(س^٢ - ٢ ق(س)\right)$،

جـ) $\lim_{س \to ٢} \left(٣ق(س) \times هـ(س)\right)$،

إثراء

– جد $\lim_{س \to ٢} \dfrac{|س - ٢|}{\sqrt{س - ٢}}$ إن وجدت:

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** مراجعة الذات.
– **الأداة:** يوميات الطالب.
– **الاستراتيجية:** الملاحظة.
– **الأداة:** قائمة الشطب (٢ – ٥) لتقويم قدرات الطلبة في حل المشكلات ذاتيًا.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي مبحث الرياضيات، وحدة كثيرات الحدود للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

لاحظ أن قاعدة الاقتران تتشعب عند س = –١، لذا احسب النهاية من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى –١:

$\lim_{س \to -١^-} ق(س) = \lim_{س \to -١^-} (س^٢ - ١) = $ صفرًا

$\lim_{س \to -١^+} ق(س) = \lim_{س \to -١^+} (-س^٢ + ١) = $ صفرًا

وعليه فإن $\lim_{س \to -١} |س^٢ - ١| = $ صفرًا

تدريب (٢)

إذا كان $ق(س) = |٦ - ٢س|$ ، فجد:

١) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

٢) $\lim_{س \to -٣} ق(س)$

تذكر

س تؤول إلى أ
تعني أن س لا تساوي أ

مثال (٦)

إذا كانت $\lim_{س \to ٠} \dfrac{ق(س)}{س} = -٢$ ، فجد $\lim_{س \to ٠} \dfrac{ق(س)}{س^٢}$

الحل

لاحظ أنه يمكنك الحصول على $\dfrac{ق(س)}{س^٢}$ باستعمال النهاية المعطاة، وذلك بأن تضرب كلاً من البسط والمقام في س، فتكون:

$\lim_{س \to ٠} \dfrac{ق(س)}{س} = \lim_{س \to ٠} \dfrac{ق(س) \times س}{س \times س} = \lim_{س \to ٠} \dfrac{ق(س)}{س^٢} \times س$

$= \lim_{س \to ٠} \dfrac{ق(س)}{س^٢} \times \lim_{س \to ٠} س = -٢ \times ٠ = $ صفرًا

٢٧

تمارين ومسائل

١) إذا كانت $\lim_{س \to ١} ق(س) = \frac{١}{٢}$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = -٢$ جد كلاً مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ١} \left(ق(س) - \dfrac{١}{هـ(س)}\right)$ ب) $\lim_{س \to ١} \sqrt{ق(س) - \frac{١}{٢}}$

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٣} (س^٢ - ٢أس + ٥) = -٤$ ، فجد قيمة أ.

٣) جد $\lim_{س \to ٣} \left(\dfrac{س^٢ - ٩}{س - ٣} + س^٢ + ١\right)$

٤) إذا كان: $ق(س) = \begin{cases} ٢س^٢ - ١٥ & ، س > ٣ \\ ٧ & ، س = ٣ \\ ٥ & ، س < ٣ \end{cases}$ ، فجد:

أ) $\lim_{س \to ٣^-} ق(س)$ ب) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

جـ) $\lim_{س \to ٠} ق(س)$ د) $\lim_{س \to ٤} ق(س)$

٥) احسب نهاية كل من الاقترانات فيما يأتي عندما تقترب س من العدد (الأعداد) المذكورة إزاء كل منها:

أ) $ق(س) = \sqrt{\dfrac{س^٢ - ١}{س + ١}}$ ، س ← ١

ب) $هـ(س) = [١ + ٢س]$ ، س ← $\frac{١}{٢}$ ، س ← $\frac{٣}{٢}$

جـ) $ع(س) = |١ - س^٢|$ ، س ← –١

٦) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} \dfrac{ق(س) + ٥}{س + ٢} = ٩$ ، وكان ق(س) كثير حدود، فجد:

أ) $\lim_{س \to ٢} \left(ق(س) + ٢س\right)$ ب) $\lim_{س \to ٢} \left(ق^٢(س) + ٢س\right)$

٢٩

الأخطاء الشائعة

الدرس ١-٣ نهاية اقترانات كسرية

النتاجات الخاصة

- يجد قيمة النهاية لاقترانات (كسرية، متشعبة) بالتحليل.
- يجد نهاية اقتران متشعب عند نقطة.

المفاهيم والمصطلحات

اقتران نسبي، نهاية اقتران نسبي عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مناقشة الطلبة بمفهوم الاقتران النسبي، تحليل المقادير الجبرية، مرافق المقدار الجبري، تبسيط الكسور، نهاية كثير حدود.
- عرض المسألة الواردة في بداية الدرس لإثارة اهتمام الطلبة وإظهار الحاجة إلى إيجاد قيمة نهاية اقتران كسري عند نقطة.
- مناقشة مثال (١)، ومن خلاله توضيح الحاجة لتحليل البسط والمقام لتعذر تطبيق نظرية ناتج قسمة اقترانين بسبب عدم توفر شروطها.
- مناقشة مثال (٢)؛ لتوضيح نمط آخر من الأسئلة التي لا يمكن تطبيق نظريات النهايات السابقة لحساب نهايتها عند نقطة.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١)، والتأكد من قدرتهم على تبسيط الاقترانات الكسرية والتحليل لإيجاد النهاية المطلوبة.

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية من (٤ -٦) طلاب في كل مجموعة، والطلب منهم حل مثال (٣)، وتدريب (٢)، ومثال (٤)، وتدريب (٣) على الترتيب. للتأكد من امتلاك الطلبة مهارة التحليل إلى العوامل باستخدام القسمة الطويلة أو القسمة التركيبية.
- عرض ما توصلت إليه المجموعات والاستفادة من الحلول كتغذية راجعة.
- استخدام طريقة العرض المباشر لمناقشة مثال (٥) مع التركيز على امتلاك الطلبة للمهارات المختلفة المتضمنة في هذا المثال.
- التأكيد على التعويض المباشر (التطبيق المباشر للنظريات) قبل اللجوء للتحليل عند حساب نهاية اقتران عند نقطة.

معلومات إضافية للمعلم

- قاعدة لوبتال للصيغة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق في فترة مفتوحة تحوي العدد أ (ليس من الضروري عند أ) وكانت $\lim_{س \to أ} ق(س) = \lim_{س \to أ} هـ(س) = ٠$

وإذا كانت $\lim_{س \to أ} \frac{قَ(س)}{هـَ(س)}$ موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$

فإن $\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \lim_{س \to أ} \frac{قَ(س)}{هـَ(س)}$

الملاحق

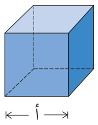
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

١-٣ نهايات اقترانات كسرية
Limits of fractional functions

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تجد قيمة النهاية لاقترانات (كسرية، متشعبة) بالتحليل.

مسألة



إذا تم تسخين قطعة مكعبة من المعدن بحيث تتمدد بانتظام محافظة على شكلها، فإن القيمة العددية لمعدل التغير (غ) في حجمها (في اللحظة التي يكون فيها طول حرفها = أ سم) يعطى بالعلاقة:

$غ(أ) = \lim_{س \to أ} \frac{س^٣ - أ^٣}{س - أ}$. ما قيمة غ(٣)؟

يتناول هذا الدرس حساب نهايات اقترانات كسرية وبعض النهايات الأخرى، حيث تعتمد عليها الكثير من الحسابات في موضوعات التفاضل والتكامل.

مثال (١)

احسب:

$$\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^٢ + ٣س - ٢}{س + ٢}$$

تذكر

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود وكان ق(أ) = ٠، فإن س - أ عامل من عوامل ق(س).

الحل

لاحظ أنك لا تستطيع تطبيق النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين لأن ناتج التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، وهذا لا يتوافق مع شروط تطبيق النظرية، في مثل هذه الحالة

٣٠

الحل

لاحظ أن ناتج تعويض العدد (١) في البسط = صفرًا، وفي المقام = صفرًا، وحسب نظرية العوامل، فإن (س-١) يعتبر عاملاً من عوامل البسط وعاملاً من عوامل المقام. لذلك يمكن تحليل البسط باستخدام القسمة التركيبية أو القسمة الطويلة.

جذر المقسوم عليه — معاملات المقسوم

	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س^١$	$س^٠$
$\boxed{١}$	١	٠	-٢	٠	١
		١	١	-١	-١
	١	١	-١	-١	٠

معاملات الناتج — الباقي

إذن، $س^٤ - ٢س^٢ + ١ = (س - ١)(س^٣ + س^٢ - س - ١)$

ومنه: $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٣ + س^٢ - س - ١)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} = ٠$.

تدريب (٢)

جد: $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٣س - ٢}{س^٣ - ٨}$

مثال (٤)

ليكن $ق(س) = \begin{cases} \frac{٢٧س^٣ + ١}{٣س + ١} &، س \neq \frac{-١}{٣} \\ ٥ &، س = \frac{-١}{٣} \end{cases}$ ، احسب $\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} ق(س)$

الحل

لاحظ أن الاقتران ق معرف يمين العدد $-\frac{١}{٣}$ ويساره وفق الفرع الأول من قاعدته وعليه فإن:

$\lim_{س \to -\frac{١}{٣}} ق(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \left(\frac{٢٧س^٣ + ١}{٣س + ١}\right) = \lim_{س \to -\frac{١}{٣}} \left(\frac{(٣س+١)(٩س^٢ - ٣س + ١)}{(٣س + ١)}\right)$

$= \lim_{س \to -\frac{١}{٣}} (٩س^٢ - ٣س + ١) = ٣$

٣٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

حلل كلًّا من البسط والمقام لمحاولة اختصار المقدار س+٢ الموجود في المقام للتخلص من الحصول على صفر في المقام عند تطبيق النظرية المشار إليها، فتحصل على :

$$\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}} \frac{٢\text{س}^٢+٣\text{س}-٢}{\text{س}+٢} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}+٢)(٢\text{س}-١)}{\text{س}+٢} = \underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}} (٢\text{س}-١) = -٥$$

مثال (٢)

جد:

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{(\text{س}+١)^٢}-١\right)$$

الحل

بسِّط المقدار الذي تريد حساب نهايته بتوحيد المقام لما في داخل القوس فتحصل على:

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{(\text{س}+١)^٢}-١\right) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١-(\text{س}+١)^٢}{(\text{س}+١)^٢}\right)$$

وبفك القوس في البسط، وإخراج (−س) عاملا مشتركا في البسط، ثم الاختصار، تحصل على:

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١-(\text{س}+١)^٢}{(\text{س}+١)^٢}\right) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}}\left(\frac{-\text{س}(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)^٢}\right)$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\frac{-(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)^٢}\right) = -٢$$

تدريب (١)

جد:

١) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢+٤\text{س}+٣}{\text{س}-٣}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٥}{\text{نهــا}} \left(\frac{٢}{\text{س}}-\frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^٢-٢٥}\right)$

مثال (٣)

جد:

$$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \left(\frac{\text{س}^٤-٢\text{س}^٢+١}{\text{س}^٣-١}\right)$$

٣١

تدريب (٣)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس

مثال (٥)

جد: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{٤-٤\text{س}+\text{س}^٢}}{\text{س}^٢+\text{س}-٦}$

الحل

لاحظ أن:

$$\frac{\sqrt{٤-٤\text{س}+\text{س}^٢}}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} = \frac{\sqrt{(٢-\text{س})^٢}}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} = \frac{|\text{س}-٢|}{\text{س}^٢+\text{س}-٦}$$

وعند إعادة تعريف $\frac{|\text{س}-٢|}{\text{س}^٢+\text{س}-٦}$ تحصل على:

$$\frac{|\text{س}-٢|}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} = \begin{cases} \frac{\text{س}-٢}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} & ،\ \text{س} > ٢ \\ \frac{-(\text{س}-٢)}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} & ،\ \text{س} < ٢ \end{cases}$$

إن قاعدة الاقتران تتشعب عند س = ٢، وهذا يتطلب إيجاد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عندما تؤول س إلى ٢:

$$\underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{|\text{س}-٢|}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} = \underset{\text{س}\to ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}-٢}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٣)} = \frac{١}{٥}$$

$$\underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهــا}} \frac{|\text{س}-٢|}{\text{س}^٢+\text{س}-٦} = \underset{\text{س}\to ٢^-}{\text{نهــا}} \frac{-(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٣)} = -\frac{١}{٥}$$

إذن، $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{٤-٤\text{س}+\text{س}^٢}}{\text{س}^٢+\text{س}-٦}$ غير موجودة

٣٣

الأخطاء الشائعة

– قد يلجأ الطلبة إلى التحليل أو الضرب بالمرافق الجبري أو إجراء عمليات أخرى لمسائل لا تحتاج ذلك، ينصح الطلبة بالتعويض المباشر أولًا واللجوء إلى هذه الطرق إذا كان ناتج التعويض المباشر $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد كلًا من النهايات الآتية:

أ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \frac{٥\text{س}}{\text{س}+٢}$

ب) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}-١}{\text{س}^٣+٢}$

جـ) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^٢-٩}{٣\text{س}+٦}$

إثراء

– إذا كان $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{ب}}{\text{جـ}}$ ، فهل من الضروري أن يكون:

$\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ب}$، $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهــا}} \text{هـ}(\text{س}) = \text{جـ}$. وضّح إجابتك بأمثلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة. من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريب.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢ – ٤) لتقويم أداء الطلبة في أثناء العمل في مجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ١-٣ نهاية اقترانات كسرية

النتاجات الخاصة

- يعيّن قيمة النهاية لاقترانات (كسرية، متشعبة) بالتحليل.
- يجد نهاية اقتران متشعب عند نقطة.

المفاهيم والمصطلحات

اقتران نسبي، نهاية اقتران نسبي عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- استخدام طريقة العرض المباشر لمناقشة المثالين (٦، ٧) مع التركيز على امتلاك الطلبة للمهارات المختلفة المتضمنة في هذين المثالين.
- عرض مثال (٨) كمشكلة، والاستماع لآراء الطلبة للتوصل للنتيجة المتعلقة بمضمون السؤال.
- مناقشة المثالين (٩، ١٠)، وتوضيح فكرة الضرب بالمرافق الجبري كواحدة من أهم الطرق في إيجاد النهايات في هذا الدرس.
- تكليف المجموعات حل تدريب (٤) وتدريبات أخرى مشابهة، والاستفادة من الإرشاد الموجود وإمكانية حل التدريب بطريقة أخرى (سؤال إثرائي)، ثم عرض حلولهم.
- تكليف الطلبة بواجب بيتي.

معلومات إضافية

مثال (٦)

جد : $\lim\limits_{\text{س}\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\text{س}^2}-\sqrt{1-\text{س}^2}}{\text{س}^2}$

تذكر

مرافق: $\sqrt{\text{س}}-\sqrt{\text{ص}}$

هو: $\sqrt{\text{س}}+\sqrt{\text{ص}}$

الحل

لاحظ أنك لا تستطيع تطبيق النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين حيث ناتج التعويض المباشر $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، لذا اكتب المقدار الذي تريد حساب نهايته بصورة أخرى تمكنك من تطبيق النظرية، وفي مثل هذه الحالة يمكنك ضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط:

$$\frac{\sqrt{1+\text{س}^2}-\sqrt{1-\text{س}^2}}{\text{س}^2}\times\frac{\sqrt{1+\text{س}^2}+\sqrt{1-\text{س}^2}}{\sqrt{1+\text{س}^2}+\sqrt{1-\text{س}^2}}$$

$$=\frac{2\,\text{س}^2}{\text{س}^2\left(\sqrt{1+\text{س}^2}+\sqrt{1-\text{س}^2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\text{س}^2}+\sqrt{1-\text{س}^2}}\quad،\quad \text{س}\neq\text{صفر}$$

وبذلك تجد أن:

$$\lim_{\text{س}\to 0}\frac{\sqrt{1+\text{س}^2}-\sqrt{1-\text{س}^2}}{\text{س}^2}=\lim_{\text{س}\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+\text{س}^2}+\sqrt{1-\text{س}^2}}=\frac{2}{2}=1$$

مثال (٧)

جد: $\lim\limits_{\text{س}\to 0^+}\dfrac{[\text{س}]}{\text{س}}$

الحل

ليكن $\text{ق(س)}=\dfrac{[\text{س}]}{\text{س}}$

لاحظ أنك تريد حساب نهاية الاقتران **ق** من اليمين بالنسبة للعدد صفر.

أعد تعريف ق(س) يمين العدد صفر دون استعمال رمز أكبر عدد صحيح فتحصل على:

$\text{ق(س)}=\dfrac{0}{\text{س}}=0$، حيث $0<\text{س}<1$

وبذلك تجد أن : $\lim\limits_{\text{س}\to 0^+}\dfrac{[\text{س}]}{\text{س}}=\lim\limits_{\text{س}\to 0^+}\dfrac{0}{\text{س}}=\text{صفرًا}$

٣٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٨)

جد: $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}-٢}$

الحل

لاحظ أن $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} (\text{س}-٢) = \text{صفرا}$ ، وعليه، فإنه لا يمكنك تطبيق النظرية الخاصة بنهاية قسمة اقترانين، وفي الوقت نفسه لا يمكن إجراء أي اختصار للتخلص من هذا الوضع، لأن (س−٢) ليس من عوامل البسط، في مثل هذه الحالة تكون $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}-١}{\text{س}-٢}$ غير موجودة ، وهذا يتفق مع النتيجة الآتية:

> **نتيجة**
>
> إذاكانت $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \text{ل}$، حيث ل عدد حقيقي، ل ≠ صفرًا ، $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{هـ(س)} = \text{صفرًا}$،
>
> فإن $\underset{\text{س}\to \text{أ}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$ غير موجودة.

مثال (٩)

جد: $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{\text{س}^{٢}-١٦}{\text{س}-٤}}$

الحل

لاحظ أن $\sqrt{\dfrac{\text{س}^{٢}-١٦}{\text{س}-٤}}$ معرف حول العدد ٤ . يمكنك تبسيط ما بداخل الجذر فتحصل على:

$$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\dfrac{(\text{س}-٤)(\text{س}+٤)}{\text{س}-٤}} = \underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}+٤} = \sqrt{\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} (\text{س}+٤)} = \sqrt{٨}$$

٣٥

مثال (١٠)

جد: $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}-٢}{\text{س}-٨}$

> **تذكر**
>
> $\text{أ}^{٣} - \text{ب}^{٣} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^{٢} + \text{أب} + \text{ب}^{٢})$
>
> $\text{أ}^{٣} + \text{ب}^{٣} = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ}^{٢} - \text{أب} + \text{ب}^{٢})$

الحل

يمكنك كتابة (س − ٨) على الشكل الآتي:

$(\text{س} - ٨) = (\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢)(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)$ (تحليل فرق بين مكعبين)

لذلك اضرب البسط والمقام في المقدار $(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)$ ومنه:

$$\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}-٢}{\text{س}-٨} \times \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \left(\dfrac{\text{س}-٨}{(\text{س}-٨)(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)}\right) = \dfrac{١}{٤+٤+٤} = \dfrac{١}{١٢}$$

تدريب (٤)

جد: $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}-٢}{\text{س}-٧}$

إرشاد

(اضرب كلًّا من البسط والمقام في المقدار $(\sqrt[٣]{(\text{س}+١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}+١} + ٤)$)

٣٦

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

− جد النهايات الآتية:

أ) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١}-٢}{\text{س}-٣}$

ب) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-١}{\sqrt{\text{س}}-١}$

إثراء

١) جد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س}-١}}{|\text{س}-١|}$ إن وجدت.

٢) حل تدريب ٤ بطريقة أخرى.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية:** مراجعة الذات.

− **الأداة:** يوميات الطالب.

الأداة: سلّم التقدير (٢−١) بند (٣).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يعيّن قيمة النهاية لاقترانات (كسرية، متشعبة) بالتحليل.
- يجد نهاية اقتران متشعب عند نقطة.

المفاهيم والمصطلحات

اقتران نسبي، نهاية اقتران نسبي عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات الواردة في الدرس.
- مناقشة الأسئلة المتعمقة الآتية:

السؤال الثالث (جـ، هـ)، السؤال الرابع، السؤال العاشر.

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات من (٤ – ٦) طلاب في كل مجموعة، وتكليف كل مجموعة حل الأسئلة.
- متابعة حلول الطلبة ورصد الملاحظات.
- تقديم المساعدات للمجموعات التي تواجه صعوبات.
- مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في أثناء الحل والأخطاء الشائعة التي وقع بها الطلبة لتجنبها في مواقف لاحقة.

تمارين ومسائل

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) نها (س→٨) ((س + ١)^٢ − ٨١) / (٨ − س)

ب) نها (س→١/٢) (٨س^٣ − ١) / (س − ١/٢)

جـ) نها (س→٧/٢) (√(٢س + ٩) − ٤) / (٢س − ٧)

د) نها (س→٢) (∛(س + ٢٥) − ٣) / (س − ٢)

هـ) نها (س→٠) ١/س (١/(س+٥) − ١/(٥−س))

و) نها (س→١) (س^٣ + ٣س − ٤) / (س^٢ − ١)

ز) نها (س→٣) (∛(س − ٥) + ٢) / (س^٣ − ٢٧)

٢) إذا كان ل(س) = { (٣س^٢ − ٥س + ٢) / (٢س^٢ − ٣س + ١) ، س < ١ ؛ ب ، س ≥ ١ }

فجد قيمة ب علمًا بأن نها (س→١) ل(س) موجودة.

٣) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) نها (س→٢) (|س − ٣| − ١) / (س − ٢)

ب) نها (س→٥/٢) (٢س − [س]) / (٤س^٢ − ٢٥)

جـ) نها (س→٢) √(٤ − ٤س + س^٢) / (٢ − س)

د) نها (س→٧) √(س − ٧) / √(س^٢ − ٤٩)

هـ) نها (س→١) (س − ٤√(س+٣) + ٣) / (س^٢ − ١)

إرشاد

(اكتب المقدار س − ٤√(س+٣) + ٣ على الصورة (س+٣) − ٤√(س+٣) ، واستخدم المرافق)

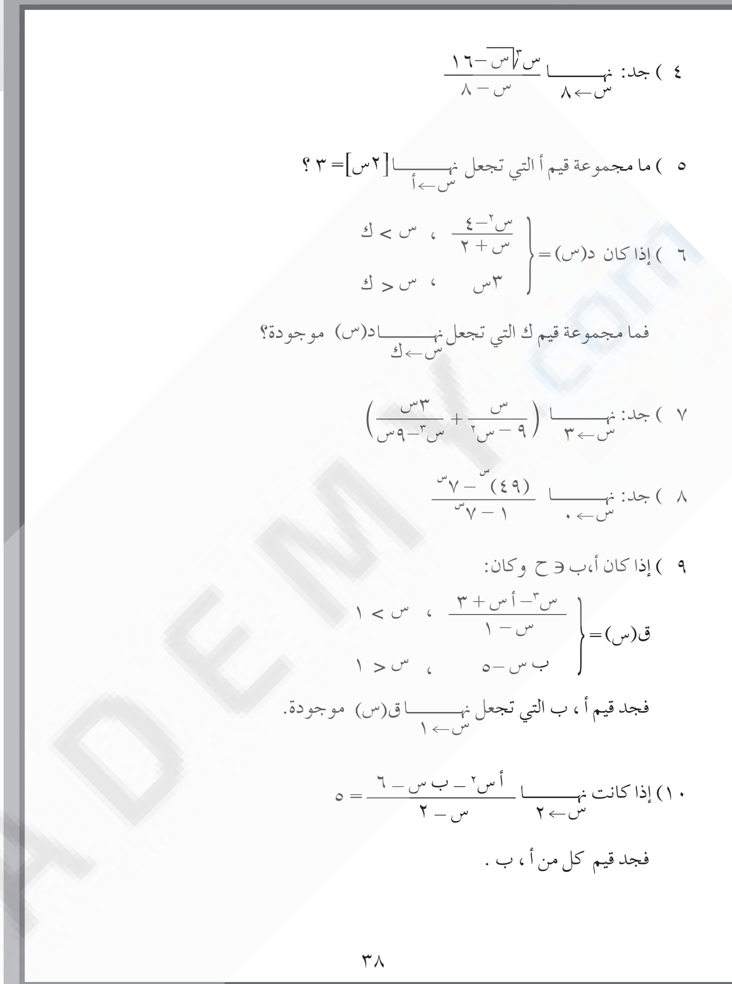
٣٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.



٤) جد: $\lim\limits_{\text{س} \to ٨} \dfrac{\text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} - ١٦}{\text{س} - ٨}$

٥) ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} [٢\text{س}] = ٣$ ؟

٦) إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س} + ٢} & ، \text{س} > \text{ك} \\ ٣\text{س} & ، \text{س} < \text{ك} \end{cases}$

فما مجموعة قيم ك التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ك}} \text{د(س)}$ موجودة؟

٧) جد: $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \left(\dfrac{\text{س}}{٩ - \text{س}^٢} + \dfrac{٣\text{س}}{\text{س}^٣ - ٩\text{س}} \right)$

٨) جد: $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \dfrac{(٤٩)^{\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١ - ٧^{\text{س}}}$

٩) إذا كان أ،ب $\in$ ح وكان:

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٣ - \text{أ س} + ٣}{\text{س} - ١} & ، \text{س} > ١ \\ \text{ب س} - ٥ & ، \text{س} < ١ \end{cases}$

فجد قيم أ ، ب التي تجعل $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{ق(س)}$ موجودة.

١٠) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{أ س}^٢ - \text{ب س} - ٦}{\text{س} - ٢} = ٥$

فجد قيم كل من أ ، ب .

٣٨

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة.
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع النهايات والاتصال.
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة في أثناء مناقشة حل التمارين على توجيه أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** قائمة الشطب (٢ – ١)، بند (٣).
- **الاستراتيجية:** مراجعة الذات.
- **الأداة:** سلّم التقدير (٢–١)، بند (٣).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ١-٤ نهاية الاقترانات الدائرية

النتاجات الخاصة

- يجد قيمة النهاية عند نقطة للاقترانات جاس، جتاس، ظاس من الرسم البياني.
- يجد قيمة النهاية عند نقطة لاقترانات دائرية.

المفاهيم والمصطلحات

الاقتران الدائري، نهاية أقتران دائري عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة بالاقترانات الدائرية الأساسية جاس، جتاس، ظاس وتمثيلها البياني، ومراجعة الاقترانان الدائرية المشتقة قاس، قتاس، ظتاس.
- مناقشة الطلبة بإيجاد نهاية اقتران دائري عند نقطة للاقترانات جاس، جتاس، ظاس من الرسم البياني لها. ثم التوصل للقاعدة التي يمكن من خلالها إيجاد نهاية الاقترانات هذه الاقترانات عند نقطة معطاة.
- مناقشة مثال (١)، والتأكيد على توفرالشروط اللازمة لتطبيق ما يلزم من نظريات النهايات الواردة في بند (١-٢) من هذا الكتاب.
- عرض مشكلة إيجاد $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{س}$ وعدم إمكانية حسابها بالتعويض المباشر، أو تطبيق النظرية الخاصة بإيجاد نهاية خارج قسمة اقترانين.
- تشكيل مجموعات تعاونية تكلف بدراسة سلوك الاقتران $\frac{\text{جاس}}{س}$ باختيار قيم للمتغير س قريبة من الصفر على غرارالجدول الموجود في كتاب الطالب، وإيجاد صورها من منحنى $\frac{\text{جاس}}{س}$ ،والطلب منهم توقع قيمة لـ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{س}$.
- عرض النتائج التي توصلت إليها المجموعات، ثم عرض النظرية $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{س} = ١$.
- مناقشة الطلبة بمثال (٢) أو أمثلة أخرى مشابهة .
- تكليف المجموعات حل تدريب (١) وتدريبات أخرى مشابهة، ثم عرض نتائج ما توصلوا اليه، ومناقشتهم بإمكانية التوصل إلى قاعدة يمكن من خلالها الحصول على الإجابات بشكل مباشر.
- كتابة النتيجة الموجودة في كتاب الطالب بشكل واضح على السبورة ومناقشتها واعتبارها من القواعد التي يمكن الاعتماد عليها في حل التمارين والمسائل.
- مناقشة مثال (٣).

معلومات إضافية للمعلم

- يمكن للطالب تبسيط العمليات الحسابية عند استخدام بعض الحقائق منها: جا $(\pi - س)$ = جاس ، جا $(\frac{\pi}{٢} - س)$ = جتا س، والاقترانات الدائرية لضعف الزاوية جا ٢ س ، جتا ٢ س .... الخ . يفضل التأكيد على هذه الحقائق.

الملاحق

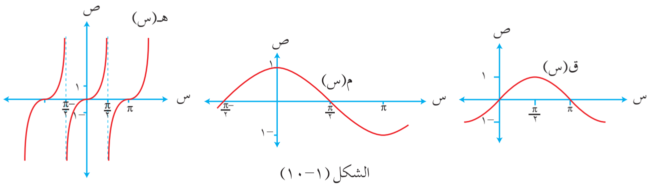
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

١-٤ نهاية الاقترانات الدائرية
Limits of Trigonometric Functions

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تجد قيمة النهاية عند نقطة لاقترانات دائرية.

لاحظ منحنى كل من الاقترانات الدائرية : ق(س) = جا س ، م (س) = جتا س ، هـ (س) = ظا س في الشكل (١-١٠).



الشكل (١-١٠)

من منحنيات هذه الاقترانات، وفي ضوء ما تعلمته حول تحديد نهاية اقتران عند نقطة بيانيا يمكنك التوصل إلى ما يأتي:

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ جا س = جا أ ، أ ∈ ح

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ جتا س = جتا أ ، أ ∈ ح

$\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ظا س = ظا أ ، أ ∈ ح − $\{\pm \frac{ن}{٢}\pi : ن = ١، ٣، ٥، ...\}$

مثال (١)

جد كلًا من النهايات الآتية:

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جتا س}}$ ٢) $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} (٢\text{جا س} - \text{ظا}\frac{١}{٢}س)$

٣٩

س	١	٠,١	٠,٠٠١		−٠,٠٠١	−٠,٠١	−٠,١
$\frac{\text{جاس}}{س}$	٠,٨٤١٤٥	٠,٩٩٨٣٣	٠,٩٩٩٩٨		٠,٩٩٩٩٨	٠,٩٩٨٣٣	٠,٨٤١٤٥

من خلال منحنى ق والجدول المرفق لاحظ أن $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{س} = ١$

نظرية

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{س} = ١$ ، حيث س بالقياس الدائري.

مثال (٢)

جد كلًا مما يأتي:

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جا س}}$ ٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{س}$

٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣س}}{٥ س}$

لاحظ أن
المتغير المستقل (س) في الاقترانات الدائرية يمثل القياس بالتقدير الدائري ما لم يذكر خلاف ذلك.

الحل

١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س}{\text{جا س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\frac{\text{جاس}}{س}} = \frac{\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} ١}{\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{س}} = \frac{١}{١} = ١$

٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{س} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س جتا س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{س} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{جتا س}} = ١ \times ١ = ١$

٣) افرض أن ص = ٣س ، فتكون س = $\frac{ص}{٣}$ ، وعندما س ← ٠ ، فإن ص ← ٠ ، ومنه:

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ٣س}}{٥ س} = \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ص}}{\frac{٥}{٣}ص} = \frac{٣}{٥} \underset{ص \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا ص}}{ص} = \frac{٣}{٥}$

٤١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الحل

١) بتطبيق نظريات النهايات وحيث إن نهاية المقام ≠ صفرًا، تجد أن:

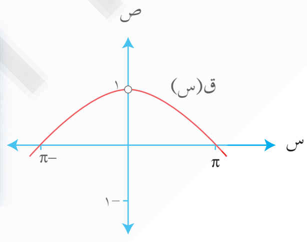
$$\lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جتا}\, س} = \frac{\lim_{س \to ٠} س}{\lim_{س \to ٠} \text{جتا}\, س} = \frac{٠}{١} = ٠$$

٢) بتطبيق نظريات النهايات تجد أن:

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \left(٢\,\text{جا}\, س - \text{ظا} \frac{١}{٢} س\right) = ٢\,\text{جا} \frac{\pi}{٢} - \text{ظا} \frac{\pi}{٤} = ٢ - ١ = ١$$

يعتمد الكثير من نهايات الاقترانات المثلثية على النهاية ($\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\, س}{س}$)، وحساب هذه النهاية غير ممكن بتطبيق النظرية الخاصة بإيجاد نهاية خارج قسمة اقترانين **لأن ذلك يؤدي إلى** $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$.

ولدراسة هذه النهاية يمكن الاعتماد على منحنى الاقتران ق:ق(س) = $\frac{\text{جا}\, س}{س}$ حيث س مقدرة بالقياس الدائري، ويمكنك استعمال التكنولوجيا في رسم منحنى هذا الاقتران، انظر الشكل (١-١١).



الشكل (١-١١)

تذكر

١٨٠° تعادل π (٣,١٤) بالتقدير الدائري

فمثلاً: إذا كانت س = ١(بالتقدير الدائري)

فهي تعادل $\frac{١٨٠ \times ١}{٣,١٤} \approx ٥٧,٣٢°$

جا ٥٧,٣٢° ≈ ٠,٨٤١

كما يمكنك التعرف إلى سلوك ق من خلال إيجاد النقط في منحنى الاقتران **ق** عند اختيار قيم لِـ س قريبة من الصفر، لاحظ الجدول الآتي:

٤٠

تدريب (١)

احسب كلًّا مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{٩س}{\text{جا}\, ٢س}$ ٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\, ٢س}{٧س}$

نتيجة

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا أ}\, س}{\text{ب}\, س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{أ}\, س}{\text{جا ب}\, س} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، حيث أ،ب أعداد حقيقية، ب ≠ ٠

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا أ}\, س}{\text{ب}\, س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{أ}\, س}{\text{ظا ب}\, س} = \frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، حيث أ،ب أعداد حقيقية، ب ≠ ٠

مثال (٣)

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{س\,\text{جا}س - \text{ظا}٢س}{\text{جا}\,(٣س) - ٥\,س}$ ٢) $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{جا}\,(٢س - ٦)}{٣ - س}$

الحل

١) يمكن قسمة حدود كل من البسط والمقام على س (س ← ٠، تتضمن أن س ≠ ٠) فتكون:

$$\lim_{س \to ٠} \frac{س\,\text{جا}س - \text{ظا}٢س}{\text{جا}(٣س) - ٥\,س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س - \frac{\text{ظا}٢س}{س}}{\frac{\text{جا}(٣س)}{س} - ٥}$$

وحيث إن نهاية كل من البسط والمقام موجودتان ونهاية المقام ≠ ٠، فإن:

$$\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س - \frac{\text{ظا}٢س}{س}}{\frac{\text{جا}(٣س)}{س} - ٥} = \frac{\lim_{س \to ٠} \text{جا}س - \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}٢س}{س}}{\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}(٣س)}{س} - \lim_{س \to ٠} (٥)}$$

$$= \frac{٠ - ٢}{٣ - ٥} = ١$$

٤٢

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ الطلبة في تحديد قيم الاقترانات الدائرية للزوايا الخاصة أو الزوايا التي ترتبط بها، ينصح المعلم بتوظيف الأشكال الهندسية الآتية :

المثلث الذي زواياه ٣٠ ، ٦٠، ٩٠ درجة، والمثلث الذي زواياه ٤٥، ٤٥، ٩٠ درجة، دائرة الوحدة.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد قيمة ما يأتي:

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٦}} \text{جتا}\, ٢س$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\, ٣س}{٢\, س}$

إثراء

١) إذا كانت $\lim_{س \to \frac{\pi}{٤}} \text{جتا}\, ٢س$ = صفرًا، فما قيمة أ ؟

٢) جد $\lim_{س \to ٠} \frac{س\, \text{جا} \frac{\pi}{س}}{س - ١}$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : الملاحظة.

– **الأداة** : قائمة الشطب (٢ – ١)، بند (٤).

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٤)، لتقويم فاعلية المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة المثلثات، للصف العاشر، وفي وحدة المثلثات، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤-١ نهاية الاقترانات الدائرية

النتاجات الخاصة

- يجد قيمة النهاية عند نقطة للاقترانات جاس، جتاس، ظاس من الرسم البياني.
- يجد قيمة النهاية عند نقطة لاقترانات دائرية.

المفاهيم والمصطلحات

الاقتران الدائري، نهاية الاقتران دائري عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة بالاقترانات الدائرية الأساسية جاس، جتاس، ظاس وتمثيلها.
- مناقشة مثال (٤) والتركيز على طريقة حله باعتبارها طريقة لحل أسئلة مشابهة.
- تكليف الطلبة إيجاد طرق أخرى لحل مثال (٤) والتركيز على هذا المثال كنتيجة مهمة في هذا الدرس.
- مناقشة الطلبة بمثال (٥) وأمثلة أخرى مشابهة، والتأكيد على الطريقة المتبعة في الحل وهي تحويل حاصل طرح اقترانين مثلثين إلى حاصل ضرب اقترانين مثلثين كطريقة جديدة لحل هذا النوع من الأسئلة.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٣)، والتأكد من امتلاكهم للمهارة الموجودة في مثال (٥).
- مناقشة الطلبة حل مثال (٦)، والتأكيد على استخدام المتطابقات المثلية بشكل سليم.
- تكليف الطلبة، تلخيص طرق إيجاد النهايات لاقترانات دائرية التي تعلموها في هذا الدرس.
- تكليف الطلبة حل واجب بيتي.

معلومات إضافية

٢) بفرض أن ص = س − ٣. عندما س ← ٣ فإن ص ← ٠ ، ومنه تجد أن:

$$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{جا}(٢\text{س}-٦)}{\text{س}-٣} = \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{\text{جا}٢\text{ص}}{-\text{ص}} = -٢$$

مثال (٤)

جد : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢}$

الحل

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^٢} = \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(١ - \text{جتا س})(١ + \text{جتا س})}{\text{س}^٢(١ + \text{جتا س})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢(١ + \text{جتا س})} = \lim \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢(١ + \text{جتا س})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \left(\frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)^٢ \times \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{١}{١ + \text{جتا س}} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

تدريب (٢)

احسب : $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{قا}(٢\text{س}) - ١}{\text{س}^٢}$

لاحظ أن

يمكنك حل مثال (٤) بطريقة أخرى باستخدام العلاقة جتا س = ١ − ٢ جا$^٢\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

٤٣

مثال (٦)

جد : $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{س}^٢\text{ظتا}(٣\text{س})\ \text{قتا}(\text{س})$

الحل

تعلم أن:

$$\text{ظتا}\ ٣\text{س} = \frac{\text{جتا}\ ٣\ \text{س}}{\text{جا}\ ٣\ \text{س}} \ ،\ \text{قتا س} = \frac{١}{\text{جا س}}$$

فتكون: $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{س}^٢\text{ظتا}(٣\text{س})\ \text{قتا}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٢\text{جتا}\ ٣\text{س}}{\text{جا}\ ٣\text{س}\ \text{جا س}}$

$$= \lim_{\text{س} \to ٠} \text{جتا}٣\text{س} \times \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{جا}\ ٣\ \text{س}} \times \lim_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{س}}{\text{جا س}}$$

$$= ١ \times \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{١}{٣}$$

٤٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٥)

جد : $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتاس} - \text{جتا٣س}}{س^{٢}}$

الحل

باستعمال القانون:

$\text{جتاس} - \text{جتاص} = -٢ \text{ جا}\left(\dfrac{س+ص}{٢}\right) \text{ جا}\left(\dfrac{س-ص}{٢}\right)$ تجد أن:

$\text{جتاس} - \text{جتا٣س} = -٢ \text{ جا٢س جا}(-س) = ٢ \text{ جا٢س جاس}$

ومنه:

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتا}(س) - \text{جتا}(٣س)}{س^{٢}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{٢ \text{ جا}(٢س)\text{جا}(س)}{س^{٢}}$$

$$= ٢ \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٢س}}{س} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س}}{س}$$

$$= ٢ \times ٢ \times ١ = ٤$$

تدريب (٣)

جد : $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}}$

تمارين ومسائل

في التمارين من ١ إلى ١٤، جد النهاية المطلوبة.

١) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س}}{س}$

٢) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} (\text{قا س} + \text{ظا ٤ س})$

٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا ٥ س}}{\text{٨ س}}$

٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{ ٣ س}}{س^{٢}}$

٥) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٢ س}^{٢}}{\text{٤ س}^{٢}}$

٦) $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا }(س+٥)}{٢٥ - س^{٢}}$

٧) $\underset{س \leftarrow -٥}{\text{نهــا}} \dfrac{س - \text{جا٣س} + \text{ظا٥س}}{٢س - \text{ظا}^{٢}س}$

٨) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{١ - \text{جتا ٢ س}}{\text{٢ س}^{٢}}$

٩) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتا س}}{\frac{\pi}{٢} - س}$

١٠) $\underset{س \leftarrow ٣\pi}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س}}{\frac{س}{٣} - \pi}$

١١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{س}$

١٢) $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا}(س^{٢} - ٦٤)}{س - ٨}$

(في السؤال (١١) استخدم العلاقة $\text{جتا س} = ١ - ٢ \text{ جا}^{٢}\left(\dfrac{س}{٢}\right)$)

١٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{١ + \text{جا ٤س} - \text{جتا}^{٢}(٢س)}{س}$

١٤) $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا س} - \text{جاأ}}{س - أ}$

١٥) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جا أ س}}{\text{٦ س}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{ظا ٥ س}}{\text{ب س} - س} = ٢$ ، فما قيمة كل من أ،ب؟

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد قيمة $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٣} - \text{جا٣س}}{\text{٣س}}$:

إثراء

– جد قيمة النهايات الآتية:

١) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{جتا س}}{س - \frac{\pi}{٢}}$

٢) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهــا}} (\text{ظا س} - \text{قا س})$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: التقويم المعتمد على الأداء.

– الأداة: السجل القصصي للمعلم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة المثلثات، للصف العاشر، وفي وحدة المثلثات، للفرع العلمي المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ١-٥ النهاية في المالانهاية

النتاجات الخاصة

- يفسّر مفهوم نهاية اقتران عندما س ← ∞، س ← −∞.
- يجد النهاية في المالانهاية لاقترانات نسبية.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية اقتران عندما تؤول س إلى ∞ ، نهاية اقتران عندما تؤول س إلى ـ ∞ .

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : الاستقصاء

- تفسير معنى س ← ∞، س ← −∞.
- عرض المشكلة الواردة في بداية الدرس لتوضيح الحاجة العملية لإيجاد نهاية اقتران عندما تؤول س إلى مالانهاية.
- مناقشة مفهوم $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ق (س) اعتمادًا على منحنى الاقتران ق (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، ثم استقصاء $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{1}{\text{س}}$ بدراسة قيم الاقتران ق (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ عندما تأخذ س قيمًا كبيرة، مثل: (١٠٠، ١٠٠٠، ١٠٠٠٠، ١٠٠٠٠٠٠، ٠٠٠)، وكتابة الصورة الرمزية لهذه النهاية.
- مناقشة مفهوم $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهــا}}$ ق(س) من الاقتران ق(س) = $\frac{1}{\text{س}}$ بطريقة مشابهة.
- تقديم الحقيقة $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{1}{\text{س}} = ٠$، $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهــا}} \frac{1}{\text{س}} = ٠$.

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تقديم كل من $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ س، $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهــا}}$ س بتوظيف منحنى الاقتران ق (س) = س .
- توضيح الملاحظة التي تتضمن أن $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ∞ غيرموجودة، والعبارات الأخرى المشابهة لها الموجودة في الملاحظة نفسها.
- تقديم نظريات النهايات عندما س ← ∞، س ← − ∞ بالعرض المباشر، والتأكيد على الشروط الخاصة بكل نظرية.
- مناقشة مثال (٣) كتطبيق مباشر على النظرية.
- تقديم الحقيقة $\underset{\text{س} \to \pm\infty}{\text{نهــا}} \frac{1}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$، وتوظيفها في حساب نهاية اقترانات نسبية عندما س ← ± ∞ للتوصل للقاعدة الموجودة في كتاب الطالب.

معلومات إضافية للمعلم

- في بعض التطبيقات العملية تكون س عددًا منتهيًا ونقول: إنها تؤول إلى ما لا نهاية، وذلك إذا اقتربت من حدودها العليا فمثلاً: إذا كانت س تمثل درجة حرارة الإنسان فإن س تؤول إلى ما لا نهاية إذا اقتربت من ٤٣ درجة مئوية، وإذا كانت ع تمثل العلامة المعيارية لتوزيع طبيعي فإن ع تؤول إلى ما لا نهاية إذا اقتربت ع من ٣,٧ وهكذا.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

١-٥ النهاية في المالانهاية
Limits at Infinity

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تجد النهاية في المالانهاية لاقترانات نسبية .

إذا كان البعد البؤري لمرآة مقعرة ع ، س بعد الجسم عن مركز المرآة، فإن بعد صورة الجسم الموضوع أمام المرآة عن مركزها (ص) ويعطى بالعلاقة:

$$\text{ص} = \frac{\text{س ع}^{٢}}{\text{س} - \text{ع}}$$

جد بعد صورة الجسم عن مركز المرآة عندما يكون الجسم بعيدا جدا عن مركز المرآة (س ← ∞).

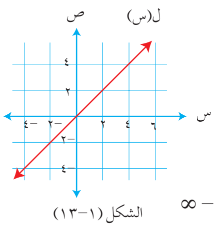
في الكثير من التطبيقات تحتاج إلى دراسة سلوك اقتران مثل **ق** متغيره (س) عندما تتزايد قيم س بلا حدود (س←∞) ، أو عندما تتناقص قيم س بلا حدود (س ←−∞).

٤٧

مثال (٢)

إذا كان ل (س) = س ، فجد:

$\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهــا}}$ ل (س) ، $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ل (س)



الشكل (١−١٣)

الحل

بملاحظة منحنى الاقتران **ل** الموضح في الشكل (١ − ١٣)

تجد أن: $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ل (س) = ∞ ، وأن $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهــا}}$ ل (س) = − ∞

ملاحظة

من المهم أن نؤكد أن + ∞ ، − ∞ ليسا عددين حقيقيين، والتعبير $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ∞ يعني أن قيم الاقتران ق تتزايد دون حدود عندما س←∞ وأن النهاية غير موجودة.

والتعبير $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهــا}}$ ق (س) = − ∞ يعني أن قيم الاقتران ق تتناقص دون حدود عندما س←− ∞ وأن النهاية غير موجودة.

النظريات الآتية تساعدك في حساب نهايات اقترانات أخرى في المالانهاية:

١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ أ = أ ، حيث أ ثابت
٢) اذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ق(س) = جـ ، $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ ل(س) = د ، حيث جـ ، د ∈ ح ، فإن:

- $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ (ق(س) ± ل(س)) = جـ + د
- $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}}$ (ق(س) × ل(س)) = جـ × د
- $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهــا}} \frac{\text{ق(س)}}{\text{ل(س)}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ ، د ≠ ٠

(النظريات السابقة صحيحة عندما س ← −∞)

٤٩

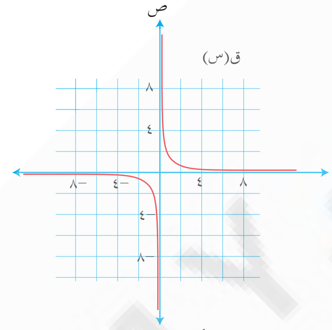
إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

مثال (١)

جد كلًّا من: $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س}$ ، $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س}$

الحل

بملاحظة منحنى الاقتران ق: ق(س) $= \frac{١}{س}$ في الشكل (١-١٢) والجدولين أدناه:



الشكل (١-١٢)

س	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠٠٠
ق(س)	٠,٠١	٠,٠٠١	٠,٠٠٠١	٠,٠٠٠٠١	٠,٠٠٠٠٠٠١	٠,٠٠٠٠٠٠٠١

$\longleftarrow \infty$ ، $\longleftarrow ٠$

س	١٠٠-	١٠٠٠-	١٠٠٠٠-	١٠٠٠٠٠-	١٠٠٠٠٠٠٠-	١٠٠٠٠٠٠٠٠-
ق(س)	٠,٠١-	٠,٠٠١-	٠,٠٠٠١-	٠,٠٠٠٠١-	٠,٠٠٠٠٠٠١-	٠,٠٠٠٠٠٠٠١-

$\longleftarrow -\infty$ ، $\longleftarrow ٠$

تجد أن:

$\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$ ، $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} = ٠$

٤٨

٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س^{ن} = \begin{cases} \infty & \text{: ن عدد حقيقي موجب} \\ \text{صفر} & \text{: ن عدد حقيقي سالب} \end{cases}$

٤) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} س^{ن} = \begin{cases} \infty & \text{: ن عدد زوجي ، ن} \geq ٢ \\ -\infty & \text{: ن عدد فردي ، ن} \geq ١ \end{cases}$

مثال (٣)

جد: $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٩}{س^٣}$

الحل

$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٩}{س^٣} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٩ \times \frac{١}{س^٣} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} ٩ \times \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^٣} = ٩ \times ٠ = ٠$

نتيجة

إذا كان ن عددًا حقيقيًّا موجبًا ، فإن:

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س^{ن}} = \text{صفرًا}$ ٢) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{أ}{س^{ن}} = \text{صفرًا}$

والآن يمكنك حساب نهاية اقتران نسبي عندما تؤول س إلى ∞ ، أو إلى $-\infty$

فإذا كان ق(س) اقترانا نسبيا، فيمكن كتابة قاعدته على الصورة:

$$ق(س) = \frac{أ_{ن}س^{ن} + أ_{ن-١}س^{ن-١} + \dots + أ_{٠}}{ب_{م}س^{م} + ب_{م-١}س^{م-١} + \dots + ب_{٠}} = \frac{س^{ن}\left(أ_{ن} + \frac{أ_{ن-١}}{س} + \dots + \frac{أ_{٠}}{س^{ن}}\right)}{س^{م}\left(ب_{م} + \frac{ب_{م-١}}{س} + \dots + \frac{ب_{٠}}{س^{م}}\right)}$$

٥٠

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ الطلبة باعتبار أن $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ∞ والحالات الأخرى المشابهة موجودة، ينصح المعلم بالتأكيد على الملاحظة الواردة في الدرس بهذا الخصوص وأن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ل تكون موجودة إذا كانت ل عددًا حقيقيًّا.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ٣ ، $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = −٥ جد:

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ (٢ ق (س) + ٣ هـ (س))

٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ (ق(س))^٢

٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ (ق(س) × هـ (س))

إثراء

– إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ ق (س) و $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ هـ (س) غير موجودة، فهل من الضروري أن تكون $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}$ (ق (س) + هـ (س)) غير موجودة؟ أعطِ مثالين يؤيدان إجابتك.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : القلم والورقة .

– **الأداة** : قائمة الشطب رقم (٢-١)، بند (٤) .

– **الأداة** : سجل سير التعلم

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة المتتاليات والمتسلسلات، للفرع العلمي، المستوى الأول.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ١-٥ النهاية في اللانهاية

النتاجات الخاصة

– يفسر مفهوم نهاية اقتران عندما س ← ∞، س ← −∞.
– يجد النهاية في اللانهاية لاقترانات نسبية.

المفاهيم والمصطلحات

نهاية اقتران عندما تؤول س إلى ∞ ، نهاية اقتران عندما تؤول س إلى −∞ .

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : حل المشكلات

– تكليف الطلبة حل تد ريب (١) كتطبيق مباشر على النتيجة.
– مناقشة الطلبة حلول الأمثلة (٤ ، ٥ ، ٦) التي تمثل أنماطًا مختلفة من الأسئلة يمكن حلها باستخدام القاعدة.
– تكليف الطلبة حل تدريب (٢) كتطبيق على أحد الأنماط الموجودة في الأمثلة السابقة.
– مناقشة مثال (٧)، والتأكيد على ضرورة توحيد المقامات لعدم إمكانية تطبيق نظرية نهاية مجموع اقترانين.
– تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل الواردة في الدرس.

معلومات إضافية للمعلم

– هناك علاقة بين العلوم المختلفة حيث يخدم كل منها الآخر، وبصورة خاصة استخدام الرياضيات في خدمة العلوم الأخرى، والسؤال الإثرائي (١) يعطي مثالا على ذلك.
– في هذا السؤال $\underset{\text{نق}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{م (نق)} = \infty$ وتفسير ذلك أن مقاومة الشريان لتدفق الدم فيه تصبح كبيرة جدًّا إذا كان طول نصف القطر الداخلي للشريان يقترب اقترابًا كافيًّا من الصفر.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

وعندما س←∞ فإن المقادير: $\frac{\text{أ}_{\text{ن}-١}}{\text{س}}$ ، .... ، $\frac{\text{أ}_٠}{\text{س}^{\text{ن}}}$ ، والمقادير: $\frac{\text{ب}_{\text{م}-١}}{\text{س}}$، .... ، $\frac{\text{ب}_٠}{\text{س}^{\text{م}}}$ ، جميعها تؤول إلى الصفر. وعليه، فإن:

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{أ}_\text{ن}\text{س}^\text{ن}}{\text{ب}_\text{م}\text{س}^\text{م}}$ وهذا يقود إلى القاعدة الآتية:

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{أ}_\text{ن}\text{س}^\text{ن} + \text{أ}_{\text{ن}-١}\text{س}^{\text{ن}-١} + \dots + \text{أ}_٠}{\text{ب}_\text{م}\text{س}^\text{م} + \text{ب}_{\text{م}-١}\text{س}^{\text{م}-١} + \dots + \text{ب}_٠} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{أ}_\text{ن}\text{س}^\text{ن}}{\text{ب}_\text{م}\text{س}^\text{م}}$$

حيث م ، ن عددان طبيعيان، $\text{أ}_\text{ن} \neq ٠$ ، $\text{ب}_\text{م} \neq ٠$.

وينطبق الشيء نفسه عندما تؤول س إلى − ∞.

تدريب (١)

جد: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٥}{\text{س}^٤}$

مثال (٤)

جد: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{(٢\text{س}+٣)^٣ - \text{س}^٢}{\text{س} - \text{س}^٢ + \text{س}^٥}$

الحل

لاحظ أن ما يهمك في مفكوك $(٢\text{س}+٣)^٣$ في البسط هو الحد ذو القوة الكبرى للمتغير س وهو($٨\text{س}^٣$)، وبالنظر إلى الحدود الأخرى في المقام، فإن الحد ذا القوة الكبرى في المقام هو $\text{س}^٥$، وعليه، فإن:

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{(٢\text{س}+٣)^٣ - \text{س}^٢}{\text{س} - \text{س}^٢ + \text{س}^٥} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٨\text{س}^٣}{\text{س}^٥} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٨}{\text{س}^٢} = \text{صفرًا}$$

٥١

مثال (٧)

جد: $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{\text{س}^٣}{٢ - \text{س}^٢} + \frac{\text{س}^٣}{٢ + \text{س}^٢}\right)$

الحل

لاحظ أنك لا تستطيع تطبيق النظرية الخاصة بنهاية مجموع اقترانين، لأن كلتا النهايتين ليستا أعدادًا حقيقية.

حاول كتابة المقدار بصورة أخرى بجمع الكسرين داخل القوس:

$$\left(\frac{\text{س}^٣}{٢ - \text{س}^٢} + \frac{\text{س}^٣}{٢ + \text{س}^٢}\right) = \frac{\text{س}^٣(٢ + \text{س}^٢) + \text{س}^٣(٢ - \text{س}^٢)}{(٢ - \text{س}^٢)(٢ + \text{س}^٢)}$$

$$= \frac{٤\text{س}^٣}{٤ - \text{س}^٤}$$

إذن :

$$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{\text{س}^٣}{٢ - \text{س}^٢} + \frac{\text{س}^٣}{٢ + \text{س}^٢}\right) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٤\text{س}^٣}{٤ - \text{س}^٤}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{٤\text{س}^٣}{-\text{س}^٤}$$

$$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\ \frac{-٤}{\text{س}} = \text{صفرًا}$$

٥٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد النهايات الآتية إن وجدت:

١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{س}$

٢) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \left(٥ - \frac{١}{س}\right)$

إثراء

١) إذا كانت مقاومة الشريان(م) لتدفق الدم فيه وطول نصف قطره الداخلي (نق) تعطى بالعلاقة $م(نق) = \frac{أ\,ل}{نق^{٤}}$ حيث (أ) ثابت يرتبط بلزوجة الدم، ل طول الشريان، جد $\underset{نق \to \infty}{\text{نهـا}}\ م(نق)$ وفسّر إجابتك.

٢) جد $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} + جـ\,س} - س\right)$ حيث جـ ثابت.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** مراجعة الذات .
– **الأداة:** سلّم التقدير (٢–١)، بند (٤) .
– **الأداة:** يوميات الطالب .
– **الاستراتيجية:** التقويم المعتمد على الأداء .
– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٥) لتقويم قدرات الطلبة في حل المشكلات ذاتيًّا.

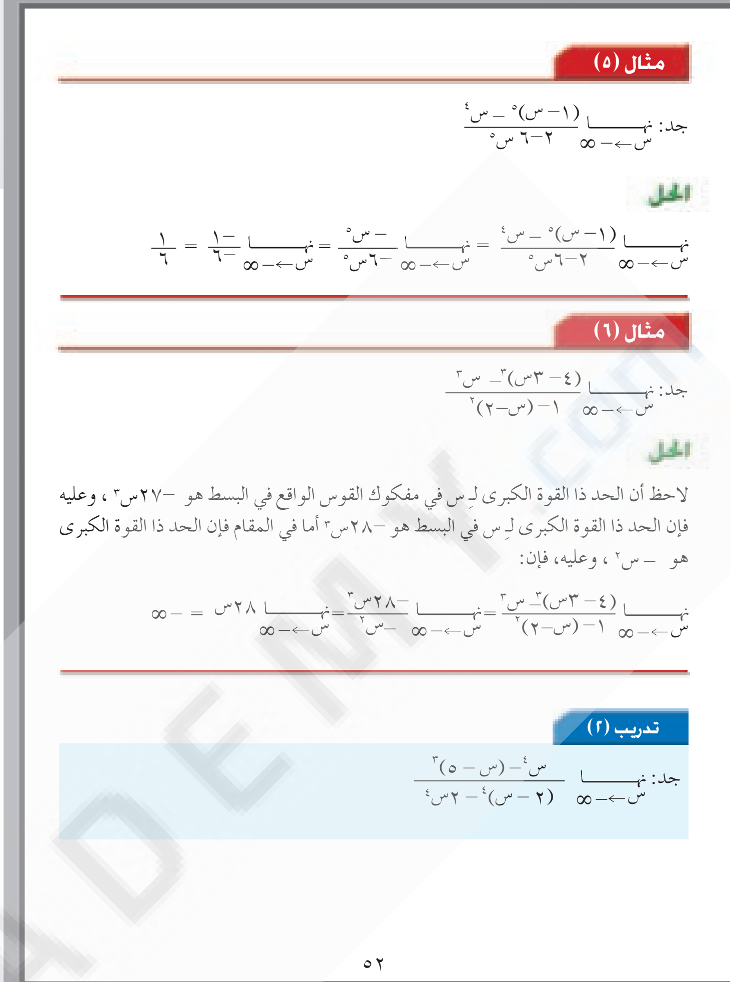
التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة المتتاليات والمتسلسلات، للفرع العلمي، المستوى الأول.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة



مثال (٥)

جد: $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(١-س)^{٥} - س^{٤}}{٢ - ٦س^{٥}}$

الحل

$\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(١-س)^{٥} - س^{٤}}{٢ - ٦س^{٥}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{-س^{٥}}{-٦س^{٥}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{-١}{-٦} = \frac{١}{٦}$

مثال (٦)

جد: $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(٤-٣س)^{٣} - س^{٣}}{١ - (س-٢)^{٢}}$

الحل

لاحظ أن الحد ذا القوة الكبرى لـ س في مفكوك القوس الواقع في البسط هو $-٢٧س^{٣}$، وعليه فإن الحد ذا القوة الكبرى لـ س في البسط هو $-٢٨س^{٣}$ أما في المقام فإن الحد ذا القوة الكبرى هو $-س^{٢}$، وعليه، فإن:

$\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{(٤-٣س)^{٣} - س^{٣}}{١ - (س-٢)^{٢}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{-٢٨س^{٣}}{-س^{٢}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} ٢٨س = -\infty$

تدريب (٢)

جد: $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - (س-٥)^{٣}}{(٢-س)^{٤} - ٢س^{٤}}$

٥٢

تمارين ومسائل

١) اعتماداً على الشكل (١–١٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، جد:

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

ب) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}}\ ق(س)$

الشكل (١–١٤)

٢) جد كلاً من النهايات الآتية:

٣) إذا كانت ... = ٢ ، فما قيمة كل من أ ، ب؟

٥٤

الأخطاء الشائعة

الدرس ١-٦ الاتصال عند نقطة

النتاجات الخاصة

– يفسّر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا.
– يبحث في اتصال اقتران عند نقطة.
– يبرهن نظريات الاتصال عند نقطة.

المفاهيم والمصطلحات

اتصال اقتران عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– مراجعة الطلبة بمفهوم نهاية اقتران عند نقطة مع عرض بعض الأمثلة.
– تقديم مفهوم الاتصال عند نقطة من خلال توضيح المعنى الهندسي للاتصال، ثم عرض المشكلة الواردة في بداية الدرس؛ لإثارة اهتمام الطلبة وإظهار الحاجة العملية لدراسة هذا الموضوع .
– عرض أمثلة على عدم الاتصال عند نقطة بالاستعانة بالرسم من خلال حالة يكون فيها الاقتران غير معرف عند نقطة، وحالة تكون فيها النهاية غير موجودة، وحالة تكون فيها قيمة الاقتران عند نقطة لاتساوي نهاية الاقتران عند تلك النقطة.
– تقديم مثال يحقق الاتصال عند نقطة، ثم توظيف الأمثلة السابقة للتوصل إلى تعريف اتصال اقتران عند نقطة.
– تقديم تعريف اتصال اقتران عند نقطة.
– مناقشة المثالين (١،٢) مع توضيح أسباب عدم الاتصال عندالنقط المحددة في المثالين، والتأكيد على اعتماد الطريقة الجبرية لبحث اتصال اقتران عند نقطة.

معلومات إضافية للمعلم

– يكون للاقتران ق (س) نقطة انفصال قابلة للإزالة عند س = جـ إذا كانت $\lim\limits_{س \to جـ}$ ق (س) موجودة ولكن ق(س) غير متصل عند س = جـ؛ لأن ق (س) غير معرف عند س = جـ أو قيمة ق(جـ) لاتساوي قيمة النهاية. يمكن جعل الاقتران متصلاً بإعادة تعريف الاقتران عند س = جـ بحيث تكون ق (جـ) مساوية نهاية الاقتران ق (س) عند س = جـ .

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

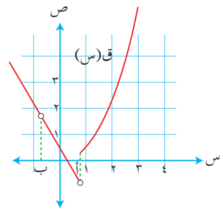
١-٦ الاتصال عند نقطة
Continuity at a point

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تبحث في اتصال اقتران عند نقطة.

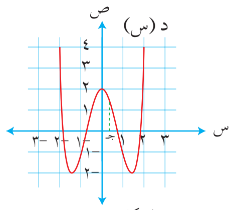
عندما تسير سيارة بسرعة ثابتة، فإن المسافة المعتمدة على الزمن التي تقطعها تمثل على المستوى البياني بخط مستقيم متصل. وعندما تقف سيارة في موقف يتقاضى ٥٠ قرشًا أجرة عن الوقوف خلال الساعة الأولى، ثم ٣٠ قرشًا عن كل ساعة بعد ذلك على اعتبار أن أجزاء الساعة تعتبر ساعة كاملة، فإن الرسم البياني الذي يمثل الأجرة غير متصل. لدراسة مثل هذه المواقف السابقة تحتاج إلى تعرف اتصال اقتران عند نقطة.

هندسيًّا (وبوصف تقريبي) نقول إن الاقتران هـ متصل عند س = م ، إذا كان منحنى الاقتران هـ ليس فيه فجوة أو انقطاع عندما س = م، أي أنك تستطيع رسم منحنى الاقتران بالقلم حول النقطة (م ، هـ(م)) ومرورًا بها دون أن ترفع رأس القلم عن الورقة.


الشكل (١-١٥)

انظر الشكل (١-١٥) تلاحظ وجود فجوة في منحنى الاقتران ق عند س = أ ، ووجود انقطاع في المنحنى نفسه عند س = ب، فالاقتران ق غير متصل عند كل من س = أ، س = ب.

أما منحنى الاقتران د في الشكل (١-١٦) فليس فيه فجوة أو انقطاع عند س = جـ، فيكون الاقتران د متصلا عند س = جـ .

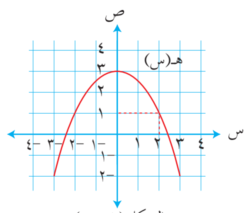

الشكل (١-١٦)

٥٥

أما في الشكل (١-٢٠) فتلاحظ أن منحنى الاقتران هـ ليس فيه فجوة أو انقطاع عندما س = ٢، فالاقتران هـ متصل عند س = ٢

لاحظ أن:

$\lim\limits_{س \to ٢}$ هـ (س) = هـ (٢) = ١


الشكل (١-٢٠)

تعريف

يكون الاقتران ق متصلاً عند س = أ ، إذا حقق الشروط الآتية:
١) الاقتران ق معرف عند س = أ .
٢) $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) موجودة .
٣) $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ) .

مثال (١)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} ٢ - ٣س & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \\ س^٢ - ٨ & ، س > ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

الحل

تحقق من شروط اتصال الاقتران ق عند س = ٢
١) الاقتران ق معرف عند س = ٢ ، ق(٢) = ٣
٢) ابحث وجود نهاية للاقتران ق عند س = ٢ :

$\lim\limits_{س \to ٢^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^-}$ (٢ − ٣س) = −٤

$\lim\limits_{س \to ٢^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٢^+}$ (س^٢−٨) = −٤

٥٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد قيمة (أ) التي تجعل الاقتران $ق(س) = \begin{cases} ٢\ جتا^{٢}س &، س \leq \frac{\pi}{٢} \\ أس^{٢} + \pi^{٢} &، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ متصلاً عند $س = \frac{\pi}{٢}$

إثراء

– إذا كان الاقتران (ق + هـ) متصلاً عند نقطة مثل (أ)، فهل من الضروري أن يكون كل من ق، هـ متصلاً عند (أ)؟ وضّح ذلك بالأمثلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–١)، بند (٦).

التكامل الأفقي

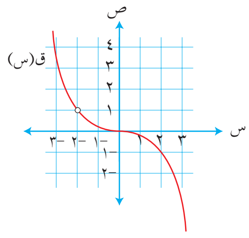
التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في كتاب الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني .

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

وفي الشكل (١–١٧) تلاحظ أن الاقتران **ق** غير معرف عند س = –٢، وأن الاقتران **ق** غير متصل عند س = –٢

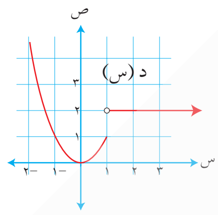


الشكل (١–١٧)

وفي الشكل (١–١٨)

تلاحظ أن $\lim_{س \to ١^{+}} د(س) \neq \lim_{س \to ١^{-}} د(س)$ ،

وأن الاقتران **د** غير متصل عند س = ١



الشكل (١–١٨)

وفي الشكل (١–١٩)

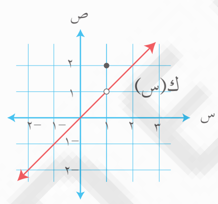
تلاحظ أن الاقتران ك غير متصل عند س = ١

(وجود فجوة في المنحنى الممثل لمنحنى الاقتران)، وأن:

$\lim_{س \to ١} ك(س) = ١$.

كما تلاحظ أن **ك** معرف عند س = ١ حيث أن ك (١) = ٢

لكنك تلاحظ أن $\lim_{س \to ١} ك(س) \neq ك(١)$



الشكل (١–١٩)

٥٦

إذن نهاية **ق** عند س = ٢ موجودة، و $\lim_{س \to ٢} ق(س) = -٤$

لكن $\lim_{س \to ٢} ق(س) \neq ق(٢)$، فالاقتران ق غير متصل عند س = ٢.

مثال (٢)

ليكن $ق(س) = \begin{cases} \frac{|٦-٢س|}{٣-س} &، س \neq ٢ \\ ٢ &، س = ٣ \end{cases}$ ، ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣

الحل

أعد كتابة ق(س) دون استعمال رمز القيمة المطلقة ، تجد أن :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٢(٣-س)}{٣-س} &، س < ٣ \\ \frac{-٢(٣-س)}{٣-س} &، س > ٣ \\ ٢ &، س = ٣ \end{cases}$$

ومنه

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ &، س < ٣ \\ -٢ &، س > ٣ \\ ٢ &، س = ٣ \end{cases}$$

تحقق من شروط اتصال ق عند س = ٣

ق معرف عند س = ٣، ق(٣) = ٢

$\lim_{س \to ٣^{-}} ق(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س) = -٢$

إذن $\lim_{س \to ٣} ق(س)$ غير موجودة، وعليه، فإن **ق** غير متصل عند س = ٣

٥٨

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ الطلبة بالحكم على عدم اتصال اقتران، مثل: (ق + هـ) (س) أو (ق × هـ) (س) عند نقطة مثل (أ)؛ لأن أحد الاقترانين أو كليهما غير متصل عند س = أ، ينصح المعلم بعرض أمثلة توضّح ذلك.

الدرس ١-٦ الاتصال عند نقطة

النتاجات الخاصة

– يفسّر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا.
– يبحث في اتصال اقتران عند نقطة.
– يبرهن نظريات الاتصال عند نقطة.

المفاهيم والمصطلحات

اتصال اقتران عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : حل المشكلات

– تكليف الطلبة حل تدريب (١) للتأكد من قدرة الطلبة على تطبيق شروط الاتصال عند نقطة.
– مناقشة أمثلة كافية ومتنوعة على الاتصال وذلك بمناقشة الأمثلة (٣، ٤، ٥).
– تكليف الطلبة حل تدريب (٢)، والتأكد من قدرة الطلبة على توظيف شروط الاتصال في حل المسائل.
– مناقشة نظريات الاتصال عند نقطة وبيان الحاجة لها؛ لأنها توفر الوقت والجهد عند بحث الاتصال، ثم برهان أحد فروع النظرية (٢).

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات، والطلب منهم برهان ماتبقى من نظريات كتشجيع على التعلم الذاتي.
– عرض ما توصلت اليه المجموعات، ثم مناقشة عدم صحة عكس النظريات الواردة في الفرعين (أ ، ب) من نظرية (٢).
– تكليف الطلبة حل تدريب (٣).
– تكليف الطلبة حل واجب بيتي.

معلومات إضافية

تدريب (١)

ابحث في اتصال الاقتران ق حيث:

ق(س) = س [س + ١] عند س = ١

مثال (٣)

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا ٣س}}{\text{س}} & \text{، س} \neq \text{٠} \\ \text{٣} & \text{، س = ٠} \end{cases}$

فابحث في اتصال ق عند س = ٠

الحل

تحقق من شروط اتصال ق عند س = ٠

ق معرف عند س = ٠، ق(٠) = ٣

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \dfrac{\text{جا ٣س}}{\text{س}} = \text{٣}$

إذن $\lim\limits_{\text{س} \to \text{٠}} \text{ق(س)} = \text{ق(٠)} = \text{٣}$ ، وعليه، فإن ق متصل عند س = ٠.

مثال (٤)

إذا كان $\text{ع(س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{١}}{\text{س} - \text{١}}$ ، س ≠ ١ ، ابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ١

الحل

تحقق من شروط اتصال الاقتران ع عند س = ١:

ع غير معرف عند س = ١، إذن ع غير متصل عند س = ١

٥٩

نظريات في الاتصال

من خلال تعريف الاتصال عند نقطة يمكن التوصل إلى النظريات الآتية:

نظرية (١)

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود، فإن ق متصل عند س لكل س ∋ ح.

نظرية (٢)

إذ كان ق، د ا قترانين متصلين عند س = أ ، فإن:

١) كلا الاقترانين ق + د ، ق – د اقتران متصل عند س = أ
٢) الاقتران ق × د متصل عند س = أ
٣) الاقتران $\left(\dfrac{\text{ق}}{\text{د}}\right)$ متصل عند س = أ، بشرط أن د (أ) ≠ ٠

نظرية (٣)

إذا كان ق اقترانًا متصلاً عند س = أ ، ق(س) ≥. في فترة مفتوحة تحتوي أ ، فإن هـ حيث $\text{هـ(س)} = \sqrt{\text{ق(س)}}$ اقتران متصل عند س = أ

لاحظ أنه إذا كان الاقتران (ق + هـ) متصلا عند س = أ ، فإنه ليس من الضروري أن يكون كل من الاقترانين ق، هـ متصلين عند س = أ ، وهذا ينطبق على الاقترانين (ق – هـ) ، ق × هـ

سنبرهن الفرع (ب) من النظرية (٢)، وباقي أفرع النظرية (٢). والنظريتان (١)، (٣) يمكن برهنتها بالأسلوب نفسه.

برهان الفرع (ب) من النظرية (٢):

افرض أن هـ = ق × د

هـ (أ) = ق(أ) × د (أ) (من تعريف الاقتران هـ)

وحيث إن ق ، هـ اقترانان متصلان عند س = أ، فإن:

$\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{هـ(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \left(\text{ق(س)} \times \text{د(س)}\right) = \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{ق(س)} \times \lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} \text{د(س)}$

= ق(أ) × د (أ) = هـ (أ)

وعليه، فإن هـ اقتران متصل عند س = أ

٦١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٥)

ليكن ل (س) = $\begin{cases} [\text{س}] + \text{أ} & \text{، س} \geq ٢ \\ \text{أ س} & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

جد قيمة **أ** التي تجعل الاقتران ل متصلاً عند س = ٢

الحل

بما أن ل متصل عند س = ٢ فإن:

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^+}$ ل (س) = $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^-}$ ل (س) ،

$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^+} ([\text{س}] + \text{أ})$ = $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢^-}$ أ س

أي أن: ٢ + أ = ٢أ

ومنه أ = ٢

تدريب (٢)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^٣ - \text{ب س} + ١ & \text{، س} < ١ \\ ٥ & \text{، س} = ١ \\ \text{س}^٢ - (\text{أ} + \text{ب})\text{ س} + ٢ & \text{، س} > ١ \end{cases}$

جد قيم أ، ب التي تجعل ق متصلا عند س = ١

٦٠

نتيجة

إذا كان **ق** اقترانًا نسبيًّا معرفًا عند س = أ، فإن **ق** متصل عند س = أ

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = $\frac{١ - \text{س}^٢}{\text{س} - ١}$ ، هـ (س) = $\sqrt{\text{س}^٢ + ٤}$

فابحث في اتصال الاقتران ق × هـ عند س = ٢

الحل

ق اقتران نسبي معرف عند س = ٢ فالاقتران ق متصل عند س = ٢ .... (١)

وحيث إن: س^٢ + ٤ ≤ ٠ في فترة مفتوحة تحتوي ٢ مثل (٠ ، ٣)،

تجد أن س^٢ + ٤ متصل عند س = ٢ (على صورة كثير حدود)، فإن هـ اقتران متصل عند س = ٢ .... (٢)

من (١) و (٢) ، ينتج أن ق × هـ متصل عند س = ٢

تدريب (٣)

إذا كان ق(س) = (س – ٢)^٣ ، هـ (س) = [س + ١]،

فابحث في اتصال ق(س) × هـ (س) عند س = ٢

٦٢

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{|\text{س}| - ٢}$ ، جد قيم س التي تجعل ق(س) غيرمتصل .

إثراء

– إذا كان الاقتران (ق × هـ) متصلاً عند نقطة مثل (أ)، فهل من الضروري أن كل من ق، هـ متصلاً عند (أ) ؟ وضّح ذلك بالأمثلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : التقويم المعتمد على الأداء.
– **الأداة** : سجل سير التعلّم.
– **الأداة** : قائمة الشطب (٢ –٥) لتقويم قدرات الطلبة في حل المشكلات ذاتيًا.
– **الاستراتيجية** : الملاحظة.
– **الأداة** : قائمة الشطب (٢ – ٤) لتقويم أداء الطلبة في أثناء العمل في مجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في كتاب الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ١-٦ الاتصال عند نقطة

النتاجات الخاصة

- يفسّر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا.
- يبحث في اتصال اقتران عند نقطة.
- يبرهن نظريات الاتصال عند نقطة.

المفاهيم والمصطلحات

اتصال اقتران عند نقطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر.

- مراجعة الطلبة بمفهوم اتصال اقتران عند نقطة.
- مناقشة الأسئلة المتعمقة الآتية:

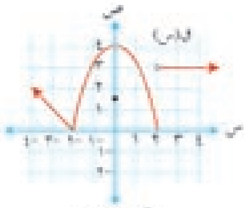
السؤال الرابع ، السؤال السادس ، السؤال التاسع .

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات من (٤ – ٦) طلاب في كل مجموعة، وتكليف كل مجموعة حل الأسئلة.
- متابعة حلول الطلبة ورصد الملاحظات.
- تقديم المساعدة للمجموعات التي تواجه صعوبات.
- مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في أثناء الحل والأخطاء الشائعة التي وقع بها الطلبة لتجنبها في مواقف لاحقة.

تمارين ومسائل

١) ليكن ق اقترانًا معرفًا على ح. اعتمادًا على الشكل (١-٢١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق



الشكل (١-٢١)

حدد قيم س التي يكون عندها ق غير متصل.

٢) إذا كان د(س) = $\begin{cases} ١ - ٤س & ، س \le -٢ \\ ٣س^٢ - ٥ & ، س > -٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د عند كل من: س = −٢ ، س = ٠

٣) ليكن ق(س) = $\begin{cases} \frac{|ظا س|}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢ جتا س & ، س \ge ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٠

٤) إذا كان ك(س) = $\begin{cases} \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \\ [٢س - س^٢] & ، س \le ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند كل من س = ٠ ، س = ٢

٦٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٥) إذا كان ق(س) = [$\frac{١}{٢}$ س] ، فابحث في اتصال ق عند كل من : س = ١ ، س = ٣

٦) إذا كان ك (س) = $\begin{cases} \frac{\text{حا}\sqrt{\text{س}^{٢}}}{\text{س}} &، \text{س} \neq ٠ \\ ١ &، \text{س} = ٠ \end{cases}$

فابحث في اتصال ك عند س = ٠

٧) إذا كان د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١} &، \text{س} > ١ \\ \text{ب} &، \text{س} = ١ \\ ٢\,\text{أ}\,\text{س} &، \text{س} < ١ \end{cases}$

متصلا عند س = ١، فجد كلا من أ، ب.

٨) إذا كان م (س) = $\begin{cases} \frac{\frac{١}{٨}\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ٢} &، \text{س} > -٢ \\ \frac{٣}{٢} &، \text{س} \leq -٢ \end{cases}$ ، هـ (س) = $\frac{\text{جتا}\frac{\pi\,\text{س}}{٤}}{\text{س}}$

فابحث في اتصال الاقتران م + هـ عند س = −٢

٩) أعط مثالا لاقترانين مثل ق ، د، بحيث يكونان غير متصلين عند س = ٣،
والاقتران ق + د متصلا عند س = ٣

٦٤

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة.
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع النهايات والاتصال .
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة أثناء مناقشة حل التمارين على توجيه أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة، وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية** : الملاحظة .
- **الأداة** : قائمة الشطب (٢−١)، بند (٦).
- **الاستراتيجية** : مراجعة الذات .
- **الأداة** : سلّم التقدير (٢−١)، بند (٦) .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

- ورد هذا الموضوع في كتاب الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني .

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يفسّر مفهوم اتصال اقتران على فترة .
- يفسّر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليمين واليسار.
- يبحث في اتصال اقتران على فترة.

المفاهيم والمصطلحات

اتصال اقتران على فترة ،اتصال اقتران عند نقطة من اليمين، اتصال اقتران عند نقطة من اليسار.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة باتصال اقتران عند نقطة، والنهاية من اليمين، والنهاية من اليسار.
- توظيف الرسم البياني الموجود في بداية الدرس لتوضيح مفهوم الاتصال عند نقطة من اليمين ، وعند نقطة من اليسار.
- تكليف الطلبة صياغة تعريف للاتصال عند نقطة من اليمين وعند نقطة من اليسار ،والتعبير عنهما بصيغة رمزية.
- دراسة الاتصال من اليمين واليسار على أطراف الفترة [أ ، ب] حيث تكون الفترة [أ ، ب] مجال الاقتران الذي يتم تناوله.
- استخدام الطريقة الاستنتاجية لتقديم تعريف الاتصال على الفترة [أ ، ب] وذلك بصياغة التعريف أولاً ثم تقديم أمثلة على الموضوع.
- مناقشة الملحوظة الموجودة في كتاب الطالب والتي تتضمن تعريف الاتصال على أنواع مختلفة من الفترات.
- مناقشة الحقائق التي تتعلق باتصال اقتران كثير حدود على مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)، اتصال اقتران على فترة جزئية من ح إذا كان متصلاً على ح، واتصال اقتران نسبي على فترة إذا كان معرفا عليها.
- مناقشة المثالين (١ ، ٢) وبيان خطوات البحث في اتصال اقتران على فترة مغلقة، وعلى ح .
- تكليف الطلبة حل تدريب (١)، والتأكيد على تحديد مجال الاقتران.

معلومات إضافية للمعلم

- إذا كان ق اقترانًا متصلاً على الفترة ف ، وكان هـ اقترانًا متصلاً على الفترة ك فإن كلاً من (ق+ هـ) ، (ق − هـ) ، (ق × هـ) متصل على الفترة ف ∩ ك ، وأن $(\frac{ق}{هـ})$ متصل على الفترة ف ∩ ك ماعدا أصفار هـ .

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

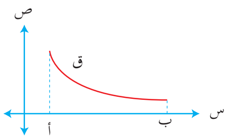
١-٧ الاتصال على فترة
Continuity on an interval

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تبحث في اتصال اقتران على فترة.

إن دراسة اتصال اقتران على فترة من الموضوعات المهمة اللازمة لدراسة خواص أخرى للاقتران في التفاضل والتكامل.

تأمل الشكل (١ − ٢٢) الذي يمثل منحنى الاقتران **ق** المعرف على [أ ، ب].



الشكل (١−٢٢)

إن تعريف الاتصال عند نقطة لا ينطبق على الاقتران ق عند س = أ ، لأن :

$\lim_{س \to أ^-}$ ق(س) غير موجودة ، لكنك تلاحظ أن $\lim_{س \to أ^+}$ ق(س) = ق(أ) ، يقال في مثل هذه الحالة: إن **ق** متصل عند س = أ من اليمين. وكذلك تعريف الاتصال عند نقطة لا ينطبق على الاقتران ق عند س = ب، لأن $\lim_{س \to ب^+}$ ق(س) غير موجودة، لكنك تلاحظ أن :

$\lim_{س \to ب^-}$ ق(س) = ق(ب). يقال في مثل هذه الحالة: إن **ق** متصل عند س = ب من اليسار.

٦٥

مثال (١)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \frac{س^3 - 8}{س - 2} & ، س < 2 \\ 3س + 6 & ، س \geq 2 \end{cases}$

ابحث في اتصال الاقتران ق على ح

الحل

لاحظ أن قاعدة الاقتران تتفرع عند س = ٢ ،

١) إذا كانت س < ٢، فإن ق (س) = $\frac{س^3 - 8}{س - 2}$ وعليه،

فالاقتران ق متصل عند كل س: س < ٢، لأن قاعدته على صورة اقتران نسبي **مقامه ≠ صفرًا** على الفترة (− ∞ ، ٢)

٢) إذا كانت س > ٢، فإن ق (س) = ٣ س + ٦ وعليه،

فالاقتران ق متصل عند س لكل س > ٢ ، لأن قاعدته على صورة كثير حدود على الفترة (٢ ، ∞).

٣) نبحث اتصال الاقتران ق عند س = ٢ بتطبيق شروط اتصال اقتران عند نقطة:

ق(٢) = ٣ × ٢ + ٦ = ١٢

$\lim_{س \to 2^-}$ ق(س) = $\lim_{س \to 2^-} \frac{س^3 - 8}{س - 2}$ = $\lim_{س \to 2^-}$ (س^٢ + ٢ س + ٤) = ١٢

$\lim_{س \to 2^+}$ ق(س) = $\lim_{س \to 2^+}$ (٣ س + ٦) = ١٢

بما أن $\lim_{س \to 2}$ ق (س) = ١٢ = ق (٢)،

فالاقتران ق متصل عند س = ٢

مما سبق ينتج أن ق متصل على ح

٦٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

تعريف

ليكن ق اقترانًا معرفًا على [أ ، ب]:

١) يكون الاقتران **ق** متصلا عند س = أ من اليمين إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \text{ق(س)} = \text{ق(أ)}$.

٢) يكون الاقتران ق متصلا عند س = ب من اليسار إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ب}^{-}} \text{ق(س)} = \text{ق(ب)}$.

٣) يكون الاقتران ق متصلا على (أ ، ب)، إذا كان متصلا عند كل س ∈ (أ ،ب).

٤) يكون الاقتران **ق** متصلا على [أ ، ب]، إذا كان متصلا على (أ ،ب)، ومتصلا عند س = أ من اليمين، ومتصلا عند س = ب من اليسار.

ملاحظة

١) يكون الاقتران ق متصلا على [أ ، ب)، إذا كان متصلا عند كل س ∈ (أ ،ب)، ومتصلا عند س = أ من اليمين.

٢) يكون الاقتران ق متصلا على (أ ، ب]، إذا كان متصلا عند كل س ∈ (أ ،ب)، ومتصلا عند س = ب من اليسار.

٣) يكون الاقتران ق متصلا على (أ ، ∞)، إذا كان متصلا عند كل س ∈ (أ ، ∞).

٤) يكون الاقتران ق متصلا على (−∞،ب)، إذا كان متصلا عند كل س ∈ (−∞، ب).

٥) يكون الاقتران ق متصلا على ح، إذا كان متصلا عند كل س ∈ ح.

واعتمادًا على التعريف السابق، وفي ضوء، ما درسته في النهايات يمكنك التوصل إلى ما يأتي:

١) إذا كان **ق** اقترانًا كثير حدود، فإن **ق** متصل على ح.

٢) إذا كان **ق** اقترانًا نسبيًّا، فإن **ق** متصل على أية فترة يكون معرفًا عليها.

٣) إذا كان **ق** اقترانًا متصلاً على ح، فإن **ق** متصل على أية فترة جزئية من ح.

٦٦

مثال (٢)

إذا كان ع (س) = |٢س ـ ٥| فابحث في اتصال الاقتران ع على [٠ ، ٣].

الحل

أعد تعريف الاقتران ع دون استعمال رمز القيمة المطلقة ، فتحصل على:

$$\text{ع (س)} = \begin{cases} ٥ - ٢\,\text{س} & ،\quad ٠ \le \text{س} < ٢{,}٥ \\ ٢\,\text{س} - ٥ & ،\quad ٢{,}٥ \le \text{س} \le ٣ \end{cases}$$

١) ع (س) على صورة كثير حدود في الفترة [٠ ، ٢,٥) وفي الفترة (٢,٥ ، ٣]، فالاقتران ع متصل على كل من: [٠ ، ٢,٥) ، (٢,٥ ، ٣].

٢) ادرس اتصال الاقتران ع عند س = ٢,٥: ع (٢,٥) = ٠

$$\begin{cases} \lim\limits_{\text{س} \to ٢{,}٥^{-}} \text{ع (س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢{,}٥^{-}} (٥ - ٢\,\text{س}) = ٠ \\ \lim\limits_{\text{س} \to ٢{,}٥^{+}} \text{ع(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٢{,}٥^{+}} (٢\,\text{س} - ٥) = ٠ \end{cases} \Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to ٢{,}٥} \text{ع (س)} = ٠$$

بما أن $\lim\limits_{\text{س} \to ٢{,}٥} \text{ع(س)} = ٠ = \text{ع (٢,٥)}$، فالاقتران ع متصل عند س = ٢,٥

وعليه ، فإن الاقتران ع متصل على [٠ ، ٣]

تدريب (١)

إذا كان
$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢ & ،\quad |\text{س}| \le ٢ \\ \text{س}^{٢} & ،\quad |\text{س}| > ٢ \end{cases}$$

فابحث في اتصال ق(س) على مجاله.

٦٨

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج:

– إذا كان
$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} - \text{س}^{٣} + ١ & ،\quad \text{س} \ne ٣ \\ \text{ل} & ،\quad \text{س} = ٣ \end{cases}$$
،

ما قيمة ل التي تجعل ق متصلاً على الفترة [٠ ، ٥] ؟

إثراء

– ابحث في اتصال $\text{ق (س)} = \dfrac{\sqrt{٩ - \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢} + ١}$ على مجاله .

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : الملاحظة .

– **الأداة** : قائمة الشطب (٢–١)، بند (٧).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في كتاب الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني .

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يفسّر مفهوم اتصال اقتران على فترة.
- يفسّر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليمين واليسار.
- يبحث في اتصال اقتران على فترة.

المفاهيم والمصطلحات

اتصال اقتران على فترة ،اتصال اقتران عند نقطة من اليمين، اتصال اقتران عند نقطة من اليسار.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة مثال (٣) وأكد على أن اتصال اقتران عند نقطة يتضمن أن تكون النهاية موجودة عند تلك النقطة.
- مناقشة مثال (٤) والتأكيد على إعادة تعريف الاقتران لبحث اتصاله عند نقط التشعب.
- تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل المتعلقة بهذا الدرس.

مثال (٣)

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{٣ س}} & \text{، } -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٢ & \text{، س} = ٠ \\ \text{ب (٢ + س)} & \text{، } ٠ < \text{س} \le ١ \end{cases}$

وكان ق متصلا على [−١ ، ١] ، فجد قيمة كل من أ ، ب.

الحل

بما أن ق متصل على [−١ ، ١]. فهو متصل عند س = ٠ وعليه ، فإن:

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{ق(س)} = \text{ق(٠)} = ٢$ ، إذن:

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \dfrac{\text{جا (أس)}}{\text{٣س}} = \dfrac{\text{أ}}{٣} = ٢$ ، ومنه أ = ٦

وكذلك

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{ب (٢ + س)} = ٢\text{ب} = ٢$ ، ومنه ب = ١

مثال (٤)

ليكن $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^٢ + \text{٢ س}}{\text{س}} & \text{، } -٢ \le \text{س} < ٠ \\ ٢ & \text{، س} = ٠ \\ [\text{س} + ٢] & \text{، } ٠ < \text{س} \le ١ \end{cases}$

ادرس اتصال الاقتران ق على [−٢ ، ١] .

٦٩

تمارين ومسائل

١) إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١}{\text{س}} + ٥ & \text{، س} \ge ١ \\ \text{٢ س}^٢ + ٤ & \text{، س} < ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د على ح.

٢) ليكن ف(س) = |٩ س + ٧| ، ابحث في اتصال الاقتران ف على [−٥ ، ٠].

٣) إذا كان ك(س) = $\sqrt{\text{٢ س} + ٩}$ ، فابحث في اتصال الاقتران ك على [−٣ ، ∞).

٤) إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} [\text{٢ س}] & \text{، } -١ \le \text{س} \le ٠ \\ \text{٢ س} - ١ & \text{، } ٠ < \text{س} \le ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على [−١ ، ٢].

٥) إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{|\text{س}|}{\text{س}} & \text{، س} < ١ \text{ ، س} \ne ٠ \\ \dfrac{١}{٢}\text{ س} + \dfrac{١}{٢} & \text{، س} \ge ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د على ح.

٧١

معلومات إضافية

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الحل

أعد تعريف ق دون استعمال رمز أكبر عدد صحيح ، فتحصل على:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}{\text{س}} &، \ -٢ \le \text{س} < ٠ \\ ٢ &، \ ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٣ &، \ \text{س} = ١ \end{cases}$$

١) ق(س) على صورة اقتران نسبي في الفترة [−٢ ، ٠) ، ومعرف عند كل نقطة فيها، فهو متصل على [−٢ ، ٠).

٢) ق(س) على صورة كثير حدود على الفترة (٠ ،١) فهو متصل على الفترة (٠ ، ١)

٣) ندرس اتصال ق عند س = ٠

ق(٠) = ٢

$$\lim_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠^{+}} ٢ = ٢$$

$$\lim_{\text{س} \to ٠^{-}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to ٠^{-}} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س}}{\text{س}} = \lim_{\text{س} \to ٠^{-}} \frac{\text{س}(\text{س} + ٢)}{\text{س}} = ٢$$

إذن $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{ق}(\text{س}) = ٢ = \text{ق}(٠)$، فالاقتران ق متصل عند س=٠

٤) ندرس اتصال الاقتران ق عند س = ١ من اليسار: ق(١) = ٣

$\lim_{\text{س} \to ١^{-}} \text{ق}(\text{س}) = ٢ \ne \text{ق}(١)$، وعليه فإن ق غير متصل عند س = ١

مما سبق يكون ق غير متصل على [− ٢ ، ١] لكنه متصل على [− ٢ ، ١).

تدريب (٢)

ليكن ل (س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ ، س ≠ ٥ ، ابحث في اتصال الاقتران ل على ح.

٧٠

٦) اذا كان د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦٠}{\text{أ س} - ٦\,\text{أ}} &، \ \text{س} > ٦ \\ ١ &، \ \text{س} = ٦ \\ \text{ب س} &، \ \text{س} < ٦ \end{cases}$

اقترانًا متصلا على ح ، فجد قيمة كل من أ، ب.

٧) إذا علمت أن: ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - (٣ - ٢\,\text{جـ})\,\text{س} - ٦\,\text{جـ}}{\text{س} - ٣} &، \ \text{س} \ne ٣ \\ ٤\,\text{س} - ١ &، \ \text{س} = ٣ \end{cases}$

اقتران متصل على ح ، جد قيمة جـ .

٨) إذا كان ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} - ٥}{\text{س}^{٢} - \text{أ س} + ٣}$ متصلا على ح ، جد قيمة أ .

٧٢

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق (س) = $\dfrac{١}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$ ، على أي الفترات الآتية يكون ق متصلاً:

- [٢ ، ∞]
- (− ∞، ∞)
- (٢، ∞)
- [١ ، ٢]

إثراء

– أعطِ مثالاً على اقتران متصل على (− ∞ ، ٠) ، (٠، ∞) لكنه غير متصل على (− ∞، ∞).

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : مراجعة الذات .

– **الأداة** : يوميات الطالب.

– **الأداة** : سلّم التقدير (٢–١)، بند (٧) .

– **الاستراتيجية** : التقويم المعتمد على الأداء.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٥) لتقويم قدرات الطلبة في حل المشكلات ذاتيًا.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مراجعة

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة جميعها.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم والمصطلحات الواردة في الوحدة جميعها.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– مراجعة الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات الواردة في الوحدة .

– مناقشة الأسئلة المتعمقة الآتية:

السؤال الثاني (د ، ز) ، السؤال الثالث ، السؤال الخامس ، السؤال الثامن .

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات من (٤ – ٦) طلاب في كل مجموعة، وتكليف كل مجموعة حل الأسئلة.

– متابعة حلول الطلبة ورصد الملاحظات بالاستفادة من قائمة الشطب (١).

– تقديم المساعدة للمجموعات التي تواجه صعوبات.

– مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في أثناء الحل والأخطاء الشائعة التي وقعوا بها لتجنبها في مواقف لاحقة.

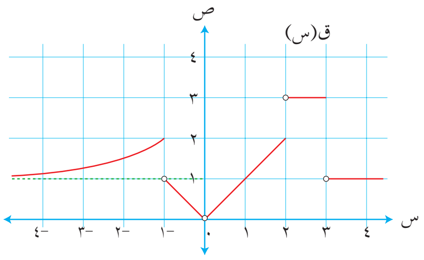
معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مراجعة

١) اعتمادًا على الشكل (١–٢٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، أجب عن الفروع: أ، ب، جـ، د



الشكل (١–٢٣)

أ) ما قيمة كل من:

$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} ق(س)$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+} ق(س)$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow \infty} ق(س)$ ، $\lim\limits_{س \leftarrow -\infty} ق(س)$.

ب) ما مجموعة قيم أ حيث $\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س) = ٣$ ؟

جـ) ما مجموعة قيم ب حيث $\lim\limits_{س \leftarrow ب} ق(س)$ غير موجودة؟

د) ما مجموعة قيم جـ حيث ق غير متصل عند س = جـ ؟

٢) جد كلاًّ من النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{س \leftarrow ٤} \dfrac{٤٨ - ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٦٤}$

ب) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{١}{س - ١}\left(\dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١\right)$

جـ) $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^{٢}\sqrt{س} - ١}{س - ١}$

د) $\lim\limits_{س \leftarrow -\frac{١}{٢}} \dfrac{\sqrt{١ + ٤س + ٤س^{٢}}}{٢س + ١}$

٧٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة.
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع النهايات والاتصال .
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة في أثناء مناقشة حل التمارين على توجيه أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة، وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية :** الملاحظة.
- **الأداة :** قائمة الشطب (٢-١).
- **الاستراتيجية :** مراجعة الذات.
- **الأداة :** سلّم التقدير (٢-١).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

هـ) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠}\dfrac{|\text{س}-٣|-|٢\text{س}-٣|}{\text{س}}$ و) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠}\dfrac{\text{جتا س}-\text{جتا ٥ س}}{\text{س جا٢س}}$

ز) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ١}\dfrac{\text{س}-١}{\text{جا}(\text{س}^{٣}-١)}$ ح) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ٠}\dfrac{١-\text{قا س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}$

ط) $\text{نهـا}_{\text{س}\to ١٢٤}\dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}-٥}{\text{س}-١٢٤}$ ي) $\text{نهـا}_{\text{س}\to {}^{-}٢}\dfrac{\text{س}-[\text{س}]}{\text{س}^{٢}-٤}$

٣) إذا كانت $\text{نهـا}_{\text{س}\to ١}\dfrac{\text{ق(س)}-٦}{\text{س}-١}=٨$ ، فما قيمة $\text{نهـا}_{\text{س}\to ١}\dfrac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣}{\text{ق(س)}-٦}$ ؟

٤) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ) $\text{نهـا}_{\text{س}\to \infty}\dfrac{٩-٢\text{س}^{٣}-(٣+\text{س})^{٣}}{\text{س}^{٢}+\text{س}^{٣}-١}$ ب) $\text{نهـا}_{\text{س}\to -\infty}\dfrac{٦+\text{س}-\text{س}^{٤}}{(١-\text{س}^{٢})^{٣}}$

جـ) $\text{نهـا}_{\text{س}\to -\infty}\dfrac{٩-٢\text{س}^{٥}}{٧+\text{س}^{٤}}$ د) $\text{نهـا}_{\text{س}\to \infty}\left(\dfrac{-\text{س}^{٢}}{\text{س}+٢}+\dfrac{٢\text{س}^{٢}}{٣\text{س}+١}\right)$

٥) إذا كانت $\text{نهـا}_{\text{س}\to \infty}\dfrac{(١+٢\text{س}^{٢})^{٢}}{\text{أ س}^{٢}(١+\text{س})^{\text{ن}}}=-٢$، فما قيمة كل من أ، ن؟

٦) إذا كان $\text{د (س)}=\begin{cases}\dfrac{\text{جا}^{٢}(\text{ب س})-\text{س}^{٢}}{\text{س جا ٢ س}} &، -\dfrac{\pi}{٤}\le \text{س}<٠\\ ٢ &، \text{س}=٠\\ \dfrac{\text{س}^{٢}+(١-\text{أ})\text{س}}{\text{أ س}} &، ٠<\text{س}\le ٢\end{cases}$

اقترانًا متصلا عند س = ٠ ، فجد قيم كل من أ ، ب.

٧٤

٧) إذا كان $\text{ل (س)}=\begin{cases}\dfrac{\text{س}^{٢}-٢\text{س}-١٥}{٥\text{س}-\text{س}^{٢}}-\dfrac{٨}{٥} &، \text{س}>٥\\ \sqrt{٥-\text{س}} &، \text{س}\le ٥\end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران **ل** على **ح**.

٨) إذا كان $\text{ع (س)}=\begin{cases}|٢\text{س}-١| &، -١\le \text{س}\le ١\\ [\tfrac{١}{٢}\text{س}+٢] &، ١<\text{س}\le ٣\end{cases}$

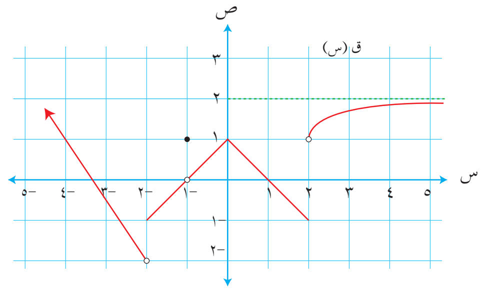
فابحث في اتصال الاقتران ع على [-١،٣] .

٧٥

اختبار ذاتي

اختبار ذاتي

١) اعتمادًا على الشكل (١–٢٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، أكمل كلًّا من الفقرات : أ، ب، جـ، د، هـ، و. لتحصل على عبارة صحيحة في كل حالة:



الشكل (١–٢٤)

أ) $\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ...

ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ...

جـ) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ...

د) $\underset{س \leftarrow -\infty}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ...

هـ) مجموعة قيم أ حيث ق غير متصل عند س = أ هي ....

و) مجموعة قيم ب حيث $\underset{س \leftarrow ب^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ١ هي ....

٧٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

– التأكد من تخطي الطلبة للأخطاء الشائعة التي وردت في الوحدة.

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة جميعها.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم والمصطلحات الواردة في الوحدة جميعها.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية لمساعدتهم على تقييم أدائهم.
– تكليف الطلبة حل الاختبار الذاتي في البيت وتسلمه منهم.
– يسجل الطلبة الصعوبات التي واجهتهم في أثناء أداء الاختبار.
– مناقشة أسئلة الاختبار مع الطلبة.
– يعرض الطلبة أخطاءهم بعد مناقشة الأسئلة.
– يصحّح الطلبة أخطاءهم.
– حصر الأخطاء المشتركة التي وقع بها الطلبة والوقوف على أسبابها:
- هل المفهوم غير واضح عند الطلبة؟
- هل خطوات المهارة غير واضحة ؟
- هل الخطأ ناتج عن عدم إتقان المهارات الأساسية في الرياضيات، مثل التحليل إلى العوامل ، حل المعادلات ، ... إلخ؟

– معالجة الأخطاء والصعوبات من خلال حل مسائل على تلك الموضوعات.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢) يتكون هذا السؤال من ٦ فقرات، لكل منها أربع إجابات، إجابة واحدة منها صحيحة، اختر الإجابة الصحيحة.

(١) إذا كانت $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}}\ \text{ق(س)} = -١$ ، $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}}\ \text{ع(س)} = ٩$

فإن $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهــا}} \left(\dfrac{\text{س}-١}{\text{ع(س)}-٣} - \sqrt[٣]{\text{ق(س)}-٧} \right)$ تساوي:

أ) $-٢{,}٥$ ب) -٢ جـ) $١{,}٥$ د) ٢

(٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{هـ(س)}+٥}{\text{س}} = \dfrac{١}{٢}$ ، وكان هـ(س) كثير حدود

فإن $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \left(\text{هـ(س)} - ٥\right)$ تساوي:

أ) -١٠ ب) $\dfrac{-١}{٢}$ جـ) صفر د) ١٠

(٣) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{(٢\text{س}+١)^٣ - ١٢٥}{\text{س}^٢(\text{س}-٢) + ٢ - \text{س}}$ هي:

أ) -٥٠ ب) ٥٠ جـ) ١٥٠ د) غير موجودة

(٤) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{\text{س}+١}\left(\dfrac{١}{\sqrt[٣]{٢\text{س}+١}} + ١ \right)$ هي:

أ) $\dfrac{١}{٣}$ ب) $\dfrac{٢}{٣}$ جـ) $\dfrac{-٢}{٣}$ د) غير موجودة

(٥) $\underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهــا}} \dfrac{١ - ٣\text{س جاس} - \text{جتا}\,٢\text{س}}{\text{س ظا}\,٢\text{س}}$ تساوي:

أ) $\dfrac{٣}{٢}$ ب) $\dfrac{-٣}{٢}$ جـ) $\dfrac{١}{٢}$ د) $-\dfrac{١}{٢}$

(٦) إذا كانت $\underset{\text{س}\to \infty}{\text{نهــا}} \dfrac{٣ + ٢\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ س}^٥}{١ - ٢\text{س}^٤} = -١$ ، فإن (أ ،ن) يساوي:

أ) (٥ ، ٠) ب) (٠ ، ٤) جـ) (−١ ، ٤) د) (٠ ، −٤)

٧٧

٣) احسب كلًّا مما يأتي:

أ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{١ - \text{ظتا س}}{\text{قتا س}}$

ب) $\underset{\text{س}\to -١^-}{\text{نهــا}} \dfrac{\left|\dfrac{١}{\text{س}+٣}\right| - \dfrac{١}{٤}}{|\text{س}-١|}$

جـ) $\underset{\text{س}\to -\infty}{\text{نهــا}} \left(\left(\dfrac{١+٢\text{س}}{\text{س}+٣}\right)^{-٣} - \dfrac{٩+\text{س}^٢}{\text{س}^٢-\text{س}^٣} \right)$

٤) ليكن $\text{ق(س)} = \begin{cases} [٣\text{س}] + ١ & ، \ -١ \le \text{س} \le ٠ \\ ٣\text{س}^٢ + \text{س} & ، \ ٠ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند كل من : س = $-\dfrac{١}{٣}$ ، س = ٠

٥) ليكن $\text{د (س)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{١}{٢}\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} & ، \ \text{س} < ٢ \\ \dfrac{٥\text{س} - ٨}{\text{س}} & ، \ \text{س} \ge ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران د على ح.

٧٨

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : القلم والورقة.

– **الأداة** : الاختبار.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الوحدة الثانية

التفاضل

الدرس ٢-١ متوسط التغير

النتاجات الخاصة

– يفسّر متوسط التغيّر هندسيًا.
– يجد متوسط التغيّر في فترة محدّدة.
– يفسّر المدلول الفيزيائي لمتوسط التغيّر.

المفاهيم والمصطلحات

التغير في س (Δس) ، متوسط التغيرفي ص بالنسبة إلى س ($\frac{\Delta ص}{\Delta س}$)، القاطع، ميل القاطع، زاوية ميل المستقيم، السرعة المتوسطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية :التدريس المباشر

– مراجعة الطلبة بالمتطلبات السابقة لموضوع الدرس : قيمة اقتران عند نقطة، نهاية اقتران عند نقطة، ميل المستقيم إذا علمت نقطتان عليه أو زاوية ميله.
– تقديم مفهوم التغير من خلال عدة مواقف حياتية يحصل فيها تغير بالزيادة أو النقصان،والتمييز بين التغير الموجب والتغير السالب،والتأكيد على أن Δس رمز واحد، يمكن الاستعانة بمثال الكتاب لهذه الغاية.
– مناقشة مثال (١) لتوضيح مفهوم التغير، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (١).
– تقديم مفهوم التغير في ص في الاقتران ص = ق(س) كنتيجة للتغيرفي س.
– مناقشة مثال (٢) كتطبيق على التغير في ص.
– تقديم مفهوم متوسط التغير في الاقتران ص = ق(س) على أنه النسبة بين التغير في ص والتغير في س.
– مناقشة المثالين (٣،٤) كتطبيق على متوسط التغير والتأكيد على استخدام الصيغة الصحيحة للقاعدة، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٢)، والتأكيد على مهارة إيجاد متوسط التغير لاقتران تغيرت فيه س من $س_1$ إلى $س_2$.

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات، وتكليفهم تنفيذ ورقة العمل (٣-٤).
– عرض الشكل (٢-١) على السبورة وتوضيح مفهوم القاطع ثم تكليف المجموعات بإيجاد ميل القاطع $\overline{أب}$ لمنحنى ص = ق(س)، وإيجاد متوسط التغير ($\frac{\Delta ص}{\Delta س}$) عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$، وتكليفهم كذلك استنتاج العلاقة بين ميل القاطع أ ب ومتوسط التغير من جهة وبين متوسط التغير وظاهر من جهة أخرى، ثُم فسّر هندسيًا معنى $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$.

معلومات إضافية للمعلم

– قد تختلف خواص مماسات منحنيات الاقترانات عن خواص مماسات الدوائر، فمثلاً مماس الدائرة يقطعها في نقطة واحدة هي نقطة التماس، في حين إن مماس منحنى اقتران معين قد يقطعه في نقطة أخرى غير نقطة التماس.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

١-٢ متوسط التغير
Rate of Change

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تجد متوسط التغير في فترة محددة.
٢– تفسر مفهوم متوسط التغير هندسيًّا.
٣– تفسر المدلول الفيزيائي لمتوسط التغير.

أولاً

تتغير بعض السمات زيادة أو نقصانًا، وهذه الزيادة أو النقصان للسمة تسمى تغيرًا، فاذا كانت درجة الحرارة ليلاً ١٥° وأصبحت نهارًا ٢٢°، فانك تلاحظ أن درجة الحراة قد تغيرت من ١٥° إلى ٢٢° وأن مقدار هذا التغير يساوي ٢٢° – ١٥° = ٧°

تعريف

إذا تغيرت قيمة متغير مثل س، من $س_1$ إلى $س_2$، فإن مقدار هذا التغير في س هو $س_2 - س_1$ سنرمز للتغير في س بالرمز Δ س (ويقرأ دلتا س).

مثال (١)

إذا تغيرت س من $س_1$ = ٢,٣ إلى $س_2$ = ٢,١ ، فجد Δ س.

الحل

Δ س = $س_2 - س_1$

= ٢,١ – ٢,٣ = –٠,٢

٨١

تعريف

إذا كان ص = ق (س) حيث $س_1 \neq س_2$ (Δ س $\neq$ ٠) ، فإن المقدار:

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ يسمى متوسط التغير في ص عندما تتغير س من $س_1$ إلى $س_2$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{ق(س_1 + \Delta س) - ق(س_1)}{\Delta س}$$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = ٢ $س^3$ – ٢ س، فجد متوسط التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من س = –٢ إلى س = ١

الحل

متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١) - ق(-٢)}{١ - (-٢)}$

$= \frac{٠ + ١٢}{٣} = ٤$

مثال (٤)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} س^2 & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٤ س & ، ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

فجد متوسط التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من ١,٥ إلى ٢,٢

الحل

متوسط التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٢,٢) - ق(١,٥)}{٢,٢ - ١,٥}$

$= \frac{٤ \times ٢,٢ - (١,٥)^2}{٠,٧}$

$= \frac{٦,٥٥}{٠,٧} = ٩,٤$ لأقرب منزلة عشرية.

٨٣

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد متوسط التغير في الاقتران ق في الفترة [$س_1$ ، $س_2$] أو ميل القاطع $\overline{أب}$ فيكتبون:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = (\text{ميل القاطع } \overline{أب}) = \frac{ق(س_1) - ق(س_2)}{س_2 - س_1}.$$

تدريب (١)

جد Δ س في الحالات التالية:

١) $س_1 = ٣$ ، $س_2 = ٣,٧$

٢) $س_1 = ل + ١$ ، $س_2 = ل$

ثانيًا

إذا كان ص = ق(س) حيث ق اقتران معرف على الفترة [أ، ب] فإن كل تغير في س ينتج عنه تغيرًا في ص ، فإذا تغيرت س من $س_1$ إلى $س_2$، فإن ص ستتغير تبعًا لذلك من قيمة مثل $ص_1$ إلى قيمة مثل $ص_2$ ، حيث $ص_1 = ق(س_1)$ ، $ص_2 = ق(س_2)$

ومقدار التغير في قيمة الاقتران ق يرمز له بـ Δ ص $= ص_2 - ص_1$

$= ق(س_2) - ق(س_1)$

مثال (٢)

ليكن ص= ق(س) = $س^2$ – س، جد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق (Δ ص) إذا تغيرت س من:

١) $س_1 = ٣$ إلى $س_2 = ٤$ ٢) $س_1 = أ$ إلى $س_2 = أ - ٢$

الحل

١) Δ ص = $ص_2 - ص_1$

= ق(٤) – ق(٣)

= ١٢ – ٦ = ٦

٢) Δ ص = ق (أ–٢) – ق(أ)

= $(أ-٢)^2$ – (أ–٢) – ($أ^2$–أ)

= $أ^2$ – ٤أ+٤– أ + ٢ – $أ^2$ + أ

= ٦ – ٤أ

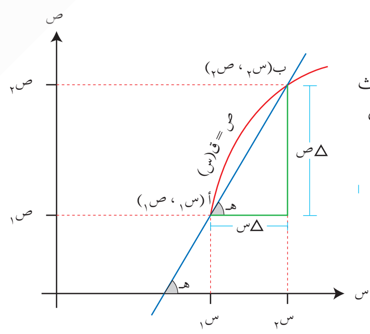
تدريب (٢)

إذا كان ق(س) = $س^3$ –[$\frac{١}{٢}$ س] ، فجد متوسط التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من $س_1 = ٢,٤$ إلى $س_2 = ٢,٣$

ثالثًا

يمثل الشكل (٢–١) منحنى ق حيث ص = ق(س) والنقطتان أ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$) واقعتان عليه.

يسمى الخط المستقيم المار بالنقطتين أ ، ب الواقعتين على منحنى الاقتران قاطعًا



الشكل (٢–١)

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

= $\frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1}$

= $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

= ظا هـ

حيث هـ : زاوية ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

إذن:

ميل القاطع = متوسط التغير = ظا هـ

تذكر

إذا كانت أ ($س_1$، $ص_1$)، ب ($س_2$، $ص_2$) واقعتين على الخط المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ ، فإن:

١) ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$ ، $س_2 \neq س_1$

٢) ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = ظاهـ ، حيث هـ زاوية ميل المستقيم $\overleftrightarrow{ل}$ المحصورة بين محور السينات الموجب والمستقيم $\overleftrightarrow{ل}$

أو $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{س_2 - س_1}{ق(س_2) - ق(س_1)}$ بدلاً من الصيغة الصحيحة.

– أعط تدريبات كافية لحساب متوسط التغير وأكد على تطبيق القانون بشكل صحيح.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق(س) = $س^2$ + ٣س، جد مايأتي:

١) التغيرفي س عندما تتغير س من ٠,٨ إلى ٤,١ .

٢) التغير في ق عندما تتغير س من ٢ إلى ٥ .

٣) متوسط التغير للاقتران ق بالنسبة إلى س عندما تتغير س من –١ إلى ٣.

إثراء

– تحرك جسيم على مساره في المستوى البياني من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة ب (س+Δ س ، ص+Δص) . إذا كانت Δ س = –٢ ، Δص = ٠، فبيّن فيماإذا كانت النقطة ب تقع فوق النقطة (أ) أو تحتها أو يمينها أو يسارها.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : الملاحظة.

– **الأداة** : قائمة الشطب (٢–٢)، بند (١) .

– **الاستراتيجية** : الملاحظة.

– **الأداة** : قائمة الشطب (٢–٤) لتقويم أداء الطلبة في أثناء العمل في مجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي وحدة الهندسة الإحداثية، للصف التاسع، ووحدة النسب المثلثية، للصف التاسع .

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-١ متوسط التغير

النتاجات الخاصة

- يفسّر متوسط التغيّر هندسيًّا.
- يجد متوسط التغيّر في فترة محدّدة.
- يفسّر المدلول الفيزيائي لمتوسط التغيّر.

المفاهيم والمصطلحات

التغير في س (Δس)، متوسط التغيرفي س بالنسبة إلى ص ($\frac{\Delta ص}{\Delta س}$)، القاطع، ميل القاطع، زاوية ميل المستقيم، السرعة المتوسطة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مناقشة مثال (٥) كتطبيق على إيجاد ميل القاطع ومتوسط التغير.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٣) لتأكيد العلاقة بين زاوية ميل القاطع ومتوسط التغير.
- تفسير المعنى الفيزيائي لمتوسط التغير من خلال العرض الموجود في كتاب الطالب ثم كتابة تعريف السرعة المتوسطة.
- تكليف الطلبة حل مثال (٦)، وتدريب (٤) اللذين يتضمنان إيجاد السرعة المتوسطة كتطبيق فيزيائي على متوسط التغير.
- تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل الواردة في الدرس.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٥)

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (١، ق(١)) ، (٢، ق(٢)) لمنحنى الاقتران ق حيث ق(س) = س^{٢} +٢س.

الحل

ميل القاطع = متوسط التغير = $\frac{ق(٢) - ق(١)}{٢ - ١}$

= $\frac{٨-٣}{٢ - ١}$ = ٥

تدريب (٣)

إذا كان القاطع المار بالنقطتين (٢، ق(٢)) ، (٣، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها ١٢٠° مع محور السينات الموجب، فجد متوسط تغير ق إذا تغيرت س من س = ٢ إلى س = ٣

رابعًا

بعد أن تعرفت المعنى الهندسي لمتوسط التغير «ميل القاطع» ستتعرف في هذه الفقرة إلى أحد المعاني الفيزيائية له.

افرض أن جسيمًا يتحرك على خط مستقيم بحيث كان موقعه في اللحظة **ن** معرفًا بالاقتران ل حيث ل = ف (ن)، إذا تغيرت ن من ن$_{١}$ إلى ن$_{٢}$، فإن موقع الجسيم سيتغير من الموقع ل$_{١}$ = ف (ن$_{١}$) إلى الموقع ل$_{٢}$ = ف (ن$_{٢}$) وإذا قسمت تغير المسافة (Δ ل) على تغير الزمن (Δ ن) ، فإنك ستحصل على $\frac{\Delta ل}{\Delta ن}$ = متوسط التغير في اقتران المسافة.

ويسمى هذا المقدار أيضًا السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة [ن$_{١}$، ن$_{٢}$]

ويرمز لها بالرمز $\overline{ع}$

إذن $\overline{ع}$ = $\frac{\Delta ل}{\Delta ن}$ = $\frac{ف (ن_{٢}) - ف (ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$

= $\frac{ف (ن_{١} + \Delta ن) - ف (ن_{١})}{\Delta ن}$ (لاحظ أن Δ ن موجبة دائمًا)

٨٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

- قد يخطئ بعض الطلبة في التمييز بين التغير ومتوسط التغير، ينصح بإعطاء تدريبات كافية، والتأكيد على أن متوسط التغير نسبة بين التغير في ص والتغير في س، في حين إن التغير ليس نسبة.

تعريف

تعرف السرعة المتوسطة لجسيم ($\overline{ع}$) في الفترة [$ن_١$ ، $ن_٢$] بأنها متوسط التغير في اقتران المسافة ل، حيث ل = ف (ن) وبالرموز:

$$\overline{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن}،\ \Delta ن > ٠$$

مثال (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ل = ف (ن) = $ن^٢$ + ١، حيث **ن** الزمن بالثواني، ف (ن) المسافة بالأمتار ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٢].

الحل

$$\overline{ع} = \frac{\Delta ل}{\Delta ن} = \frac{ف(٢) - ف(١)}{٢ - ١} = \frac{(٢^٢ + ١) - (١^٢ + ١)}{١} = \frac{٥ - ٢}{١} = ٣م/ث$$

تدريب (٤)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث يكون بعده (ف) بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف (ن) = ٢ $ن^٢$ −٢ ن + ٢٠، جد السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [٢، ٦].

٨٦

تمارين ومسائل

١) إذا كان متوسط تغير الاقتران ق، حيث ق(س) = ٢ $س^٢$ + س −١، يساوي ٤ عندما تتغير س من $س_١$ إلى $س_١$ + ١ ، فجد قيمة $س_١$.

٢) إذا كان ق(س) = $س^٢$ − ٢ ، فجد متوسط التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ٣ إلى ٣ + هـ بدلالة هـ.

إنتبه
متوسط تغير ق في الفترة [أ،ب] تعني ان س تغيرت من $س_١$ = أ إلى $س_٢$ = ب

٣) ليكن م (س) = أ $س^٢$ − ٣ س + ٤، س ∋ ح وإذا كان متوسط تغير م في الفترة [١،٣] يساوي ٣، فجد قيمة أ.

٤) تحرك جسيم في المستوى البياني على منحنى الاقتران ق من النقطة أ (س،ص) إلى النقطة ب (٣،٥).
إذا كانت Δ س = ٠,١ ، Δ ص = ٠,٨ ، فجد إحداثيي النقطة أ.

٥) إذا كان متوسط التغير في الاقتران ق على الفترة [−١، ٣] يساوي −٤، فجد متوسط تغير الاقتران هـ حيث هـ (س) = ٢ ق(س) −٣ $س^٢$ على الفترة نفسها.

٦) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، إذا زاد طول ضلعها من ٥سم إلى ٥,٢ سم، فجد مقدار التغير في مساحتها؟

٧) يتحرك جسيم عموديًا للأعلى بحيث يكون بعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية معطى بالعلاقة ف (ن) = ٤٠ ن − ٥ $ن^٢$ فجد:
أ) السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١،٤].
ب) السرعة المتوسطة للجسيم إذا تغيرت ن من صفر إلى Δ ن (بدلالة Δ ن).

٨٧

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد متوسط التغير للاقترانات الآتية في الفترة المبينة إزاء كل منها:

أ) ص = $\frac{١}{٢}$ $س^٢$ ، س ∋ [٣ ، ٤] .

ب) ص = $\frac{١}{س}$ ، س ∋ [−٢، ٣] .

٢) جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٠,٠١ ، ق (٠,٠١)) ، (٤، ق (٤)) لمنحنى الاقتران ص = $\sqrt{س}$.

إثراء

− تحرك جسيم في المستوى البياني على منحنى الاقتران ص = ق(س) = $س^٢$ من النقطة أ (١، ١) إلى النقطة ب (س ، ص) حيث س ≠ ١. بيّن أن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = س +١، Δ س ≠ ١.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية** : مراجعة الذات.
− **الأداة** : سلّم التقدير (٢ − ٢)، بند (١).
− **الاستراتيجية** : الملاحظة.
− **الأداة** : قائمة الشطب لتقويم قدرات الطلبة في حل المشكلات ذاتيًّا.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

− ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي وحدة الهندسة الإحداثية، للصف التاسع، ووحدة النسب المثلثية، للصف التاسع .

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة.
- يفسّر المشتقة الأولى عند نقطة هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران بدلالة س باستخدام التعريف.
- يبحث في قابلية الاشتقاق لاقتران على فترة مغلقة.

المفاهيم والمصطلحات

معدل التغير، المشتقة، المشتقة من اليمين عند نقطة، المشتقة من اليسار عند نقطة، قابلية الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة بمتوسط التغير، نهاية اقتران عند نقطة، والتأكد من إتقان الطلبة للمتطلبات السابقة لهذا الدرس بتكليفهم حل تمارين على هذين المفهومين.
- إبراز أهمية المشتقة الأولى في الرياضيات والعلوم الأخرى من خلال عرض الأمثلة يمكن الاستعانة بالمعلومات الواردة في خانة معلومات إضافية في هذا الدرس .
- تقديم مفهوم المشتقة الأولى هندسيًّا من خلال معدل التغير بمناقشة الطلبة بمقدمة الدرس من كتاب الطالب، ثم كتابة تعريف المشتقة على السبورة بشكل واضح.
- تقديم مفهومي قابلية الاشتقاق وعدم قابلية الاشتقاق من خلال ربطهما بالنهايات.
- مناقشة المثالين (١، ٢) لتوضيح آلية إيجاد مشتقة اقتران عند نقطة، وتوظيف المشتقة في حل بعض أسئلة النهايات.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) كتطبيق على إيجاد المشتقة الأولى عند نقطة باستخدام التعريف، وتوظيف المشتقة لحل بعض أسئلة النهايات.
- مناقشة الصورة الثانية للمشتقة الواردة في كتاب الطالب وإجراء التعويض المطلوب لتوضيح تكافؤ الصورتين.
- مناقشة الطلبة بمثال (٣) كتطبيق على الصورة الثانية من صور المشتقة.
- تكليف الطلبة حل التدريبين (٢،٣) للتحقق من اكتسابهم مهارة إيجاد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة بطرق مختلفة.

معلومات إضافية للمعلم

- تعتبر مشتقة الاقتران من أكثر المفاهيم الرياضية تطبيقًا وفائدة حيث لايستغني عنها أي باحث في العلوم الانسانية والطبيعية المتقدمة، وهي أحد المفاهيم الرئيسة في التفاضل والتكامل،والأمثلة الآتية تؤكد أهمية معدل التغير (المشتقة) في العلوم الأخرى :
  - علم الأحياء : يهتم علماء الأحياء الدقيقة بدراسة المعدل الذي يتغيربه عدد البكتيريا في تجمع بكتيري بالنسبة للزمن.
  - علم الهندسة: يهتم القائمون على سكك الحديد بدراسة المعدل الذي يتغيربه طول سكة الحديد بسبب درجة الحرارة.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

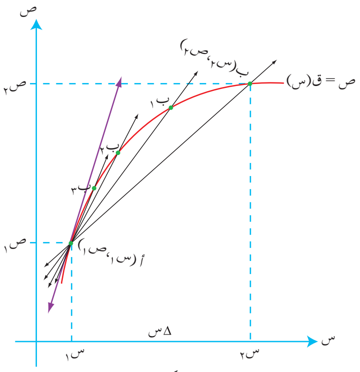
٢-٢ المشتقة الأولى
First derivative

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تتعرف إلى المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة معينة.
٢– تفسر المشتقة الأولى عند نقطة هندسيًّا.
٣– تجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف.
٤– تجد المشتقة الأولى لاقتران بدلالة س باستخدام التعريف.
٥– تبحث في قابلية اشتقاق اقتران على فترة مغلقة.

أولاً

في الشكل (٢-٢) إذا تحركت النقطة ب على منحنى الاقتران ق مقتربة من النقطة أ، فإنك تلاحظ أن $س_٢$ تقترب من $س_١$ وأن Δ س تصغر شيئًا فشيئًا، وتبعًا لذلك، يأخذ القاطع أوضاعًا مختلفة حول أ ($ب_١$أ، $ب_٢$أ، $ب_٣$أ) وعندما تؤول Δ س إلى الصفر فإن القاطع $\overleftrightarrow{أب}$ يؤول إلى مماس لمنحنى ق عند النقطة أ (تنطبق ب على أ)، أي أن ميل القاطع يؤول إلى ميل المماس عند النقطة أ.
وفي هذه الحالة يكون ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة أ($س_١$، $ص_١$) يساوي $\lim\limits_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ في حالة وجودها.



الشكل (٢-٢)

٨٨

مثال (٢)

إذا كانت $ق'(٣) = ٥$، فجد $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + ٤هـ) - ق(٣)}{٥ هـ}$

الحل

افرض م = ٤ هـ $\Leftarrow$ هـ = $\frac{م}{٤}$ ، عندما هـ $\leftarrow$ ٠ فإن م $\leftarrow$ ٠

إذن $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(٣ + ٤هـ) - ق(٣)}{٥ هـ} = \lim\limits_{م \to ٠} \frac{ق(٣ + م) - ق(٣)}{٥ \times \frac{م}{٤}}$

$= \frac{٤}{٥} \lim\limits_{م \to ٠} \frac{ق(٣ + م) - ق(٣)}{م} = \frac{٤}{٥} \times ق'(٣)$

$= \frac{٤}{٥} \times ٥ = ٤$

تدريب (١)

١) ليكن ق(س) = ٢ $س^٣$ + س ، فجد ق$'$(– ٣) باستخدام تعريف المشتقة.
٢) إذا كان ق$'$(٠) = – ٦ ، فجد $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(٠) - ق(٥ هـ)}{٢ هـ}$

ثانيًا

إذا استخدمت الرمز س بدلاً من الرمز $س_١$ + هـ في تعريف المشتقة ، فإن هـ = س – $س_١$
وعندما هـ $\leftarrow$ ٠ فإن س $\leftarrow$ $س_١$

وعليه، فإن ق$'$($س_١$) = $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ} = \lim\limits_{س \to س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$

أي أن ق$'$($س_١$) = $\lim\limits_{س \to س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$ (وهذه صورة ثانية لمشتقة ق عند $س_١$)

٩٠

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في استخدام تعريف المشتقة عند النقطة $س_١$ التي تتغير حولها قاعدة الاقتران نتيجة الخطأ في حساب ق($س_١$) فيحسبونها بالتعويض عن س العدد $س_١$، في قاعدتي الاقتران المجاورتين للعدد $س_١$ لتجنب ذلك أكد للطلبة أن ق($س_١$) تعني قيمة الاقتران عندما س = $س_١$ وليس

ويسمى المقدار $\lim\limits_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ معدل التغير في ص بالنسبة إلى س أو المشتقة الأولى للاقتران ق عند $س_١$ ويرمز لها بالرموز: $ق'(س_١)$ أو $ص'$ أو

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = س_١}$ (وتقرأ دال ص على دال س عند $س = س_١$)

تعريف

إذا كان $ص = ق(س)$ ، حيث ق اقتران معرف عند $س_١$ وكذلك في جوارها ، وكانت $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ}$ موجودة فإنها تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق عند $س = س_١$ ويرمز لها بالرمز $ق'(س_١)$ أو $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = س_١}$

لاحظ أنه تم استبدال (هـ) بـ Δ س وذلك من أجل التبسيط.
إذا كانت النهاية موجودة فنقول إن: $ق'(س_١)$ موجودة، ونقول أيضا: إن ق قابل للاشتقاق عند $س_١$
أما إذا كانت النهاية غير موجودة، فإن $ق'(س_١)$ غير موجودة (ق غير قابل للاشتقاق عند $س_١$).

مثال (١)

ليكن $ق(س) = س^٢$ ، فجد $ق'(١)$ باستخدام التعريف.

الحل

$ق'(١) = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ}$

$= \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{(١+هـ)^٢ - ١}{هـ} = \lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٢ + ٢هـ}{هـ} = ٠ + ٢ = ٢$

٨٩

مثال (٣)

ليكن $ق(س) = س + \sqrt{س}$ ، جد $ق'(٤)$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$ق'(٤) = \lim\limits_{س \to ٤} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim\limits_{س \to ٤} \frac{س + \sqrt{س} - ٦}{س - ٤}$

افرض $ص = \sqrt{س}$ ومنه $ص^٢ = س$ ، فعندما $س \to ٤$ فإن $ص \to ٢$

$ق'(٤) = \lim\limits_{ص \to ٢} \frac{ص^٢ + ص - ٦}{ص^٢ - ٤}$

$= \lim\limits_{ص \to ٢} \frac{(ص + ٣)(ص - ٢)}{(ص - ٢)(ص + ٢)} = \lim\limits_{ص \to ٢} \frac{(ص + ٣)}{(ص + ٢)} = \frac{٢ + ٣}{٢ + ٢} = \frac{٥}{٤}$

تدريب (٢)

جد $ق'(٤)$ في مثال (٣) بطريقة أخرى.

تدريب (٣)

إذا كان $ص = ل(س) = \frac{س}{س + ٢}$ ، فجد $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = -١}$

مثال (٤)

إذا كان $ق(س) = |س - ٢|$ ، فابحث في قابلية اشتقاق ق عند كل من النقط:

١) $س = ١$ ٢) $س = ٣$ ٣) $س = ٢$

٩١

عندما $س > س_١$ أو $س < س_١$، فمثلاً في الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ ، & س \geq ١ \\ ٢س ، & س < ١ \end{cases}$$

تكون $ق(١) = ٦$ ومن الخطأ اعتبار $ق(١) = ٢$.

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان $ق(س) = س^٢$،جد $ق'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة.

٢) إذا كان $ق(س) = س$ ، جد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة.

إثراء

– بدأت شركة منظفات بحملة دعائية مدتها ٣٠ اسبوعًا لأحد منتجاتها الجديدة فإذا كانت العلاقة بين الإيراد الإسبوعي ر(س) بآلاف الدنانير و س التي تمثل عدد الأسابيع بدءًا من بداية الحملة تعطى بالقاعدة:

$ر(س) = ٢٠ + ٨ س - ٠,٢ س^٢$ حيث $٠ \leq س \leq ٣٠$، أجب عما يأتي :

١) جد معدل التغير في المبيعات الإسبوعية عندما س = ٥ ، ٢٠ ، ٢٥ .

٢) صف معدل التغير من حيث الزيادة والنقصان خلال فترة الدعاية.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية : القلم والورقة من خلال متابعة حل التدريبات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٢ المشتقة الأولى

النتاجات الخاصة

- يتعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة.
- يفسّر المشتقة الأولى عند نقطة هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران بدلالة س باستخدام التعريف.
- يبحث في قابلية الاشتقاق لاقتران على فترة مغلقة.

المفاهيم والمصطلحات

معدل التغير، المشتقة، المشتقة من اليمين عند نقطة، المشتقة من اليسار عند نقطة، قابلية الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة مثال (٤) لتقديم مفهوم المشتقة من اليمين، ومن اليسار عند نقطة.
- كتابة تعريف المشتقة من اليمين، ومن اليسار عند نقطة وربطها بمشتقة اقتران عند نقطة.
- مناقشة مثال (٥) لتوضيح طريقة حساب مشتقة اقتران عند نقطة تشعب وربطها بطريقة حساب نهاية اقتران عند نقطة تشعب.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٤) للتدرب على إيجاد مشتقة اقتران عند نقطة تشعب.
- مناقشة أهمية دراسة المشتقة الأولى لاقتران مثل ق(س) كاقتران في س من خلال الطرح الموجود في كتاب الطالب، ثم مناقشة الصورة الثالثة من صور إيجاد المشتقة، وكتابة التعريف على السبورة بشكل واضح.
- مناقشة قابلية اشتقاق اقتران عند أطراف فترة مغلقة إذا كان معرفًا عليها، وتوظيف خبرات الطلبة في حساب النهايات لهذه الغاية.
- توضيح سبب عدم وجود المشتقة لاقتران عند طرفي فترة مثل [أ ، ب]؛ لأن ق غير معرّف على يسار العدد أ وعلى يمين العدد ب.
- مناقشة مثال (٦) بشكل مفصّل؛ لأنه يعتبرمثابة طريقة لبحث مشتقة اقتران على فترة مغلقة، والتأكيد على إمكانية إيجاد المشتقة كاقتران في س وبطريقتين.
- تكليف الطلبة حل واجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

- علم الاقتصاد: يهتم الاقتصاديون بدراسة المعدل الذي يتغير به اقتران الربح بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة أو المبيعة.
- العلوم الطبية: يتم دراسة معدل تغيرطول نصف قطر الشريان الأورطي بالنسبة إلى تركيز بعض الأدوية في الدم.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الحل

١) اعد تعريف ق(س) = |س − ٢| ليصبح ق (س) = $\begin{cases} \text{س} - ٢ ، & \text{س} \geq ٢ \\ ٢ - \text{س} ، & \text{س} < ٢ \end{cases}$

ق(س) = ٢ − س عند س = ١، ومنه

$$\text{قَ}(١) = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{٢ - \text{س} - ١}{\text{س} - ١} = -١$$

٢) ق(س) = س − ٢ عند س = ٣

$$\text{قَ}(٣) = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س}\to ٣} \frac{\text{س} - ٢ - ١}{\text{س} - ٣} = ١$$

٣) $\text{قَ}(٢) = \lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$ بما أن س = ٢ نقطة تشعب لذلك نجد هذه النهاية للمقدار من اليسار ومن اليمين حول العدد ٢.

$$\lim_{\text{س}\to ٢^-} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} \quad ....(١)$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢^-} \frac{٢ - \text{س} - ٠}{\text{س} - ٢} = -١$$

$$\lim_{\text{س}\to ٢^+} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} \quad ....(٢)$$

$$= \lim_{\text{س}\to ٢^+} \frac{\text{س} - ٢ - ٠}{\text{س} - ٢} = ١$$

تذكر

لإيجاد النهاية عند نقطة تشعب، يجب إيجاد النهاية من اليسار (يسار هذه النقطة) ومن اليمين (يمين هذه النقطة)

إذن $\lim_{\text{س}\to ٢} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$ غير موجودة لأن $\lim_{\text{س}\to ٢^-} \text{ق(س)} \neq \lim_{\text{س}\to ٢^+} \text{ق(س)}$

وعليه ، فإن قَ (٢) غير موجودة

تسمى النهاية في (١) المشتقة الأولى للاقتران ق من اليسار عند س = ٢ ويرمز لها بالرمز $\text{قَ}_-(٢)$، فيما تسمى النهاية في (٢) المشتقة الأولى للاقتران ق من اليمين عند س = ٢ ويرمز لها بالرمز $\text{قَ}_+(٢)$.

٩٢

تدريب (٤)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٣ - ١ ، & ٠ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٥ ، & ٢ < \text{س} \leq ٥ \end{cases}$

فاحسب قَ (٤) ، قَ (١) ، قَ (٢) (إن وجدت).

ثالثًا

في كثير من الأحيان يلزمك دراسة مشتقة الاقتران عند أي نقطة في مجاله، أي دراسة المشتقة كاقتران في س، وإذا أردت إيجاد المشتقة كاقتران، فضع الرمز س بدلاً من الرمز س، في تعريف المشتقة.

$$\text{قَ (س)} = \lim_{\text{هـ}\to ٠} \frac{\text{ق(س + هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} \quad ....(١)$$

وإذا استبدلت ع بـ (س + هـ)
أي أن ع = س + هـ فإن هـ = ع − س
عندما هـ ← ٠ ، فإن ع ← س
تصبح المعادلة (١) على الصورة الآتية:

$$\text{قَ (س)} = \lim_{\text{ع}\to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} \quad ....(٢)$$

لاحظ أن الصورتين (١) ، (٢) يمكن بواسطتهما إيجاد قَ (س)

ملحوظة

إذا كان الاقتران ق معرفًا على [أ،ب] ، فإن قَ (أ)، قَ (ب) غير موجودتين، لأن ق غير معرف على يسار العدد أ ، وغير معرف أيضًا على يمين العدد ب.

٩٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، جد قَ (٨) باستخدام تعريف المشتقة.

٢) إذا كان ق (س) = ٤س^{٢}+ س ، جد قَ (س) باستخدام تعريف المشتقة.

إثراء

– إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فاثبت أن:

$$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{ن هـ}) - \text{ق}(\text{س} - \text{ن هـ})}{\text{هـ}} = ٢\,\text{ن}\,\text{قَ}(\text{س})$$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : التقويم المعتمد على الأداء .

– **الأداة** : سجل سير التعلّم

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تعريف

ليكن الاقتران ق معرفًا عند العدد س = أ

١) إذا كانت $\text{قَ}_{+}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^{+}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$ موجودة ، فإن $\text{قَ}_{+}(\text{أ})$ تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليمين عند س = أ.

٢) إذا كانت $\text{قَ}_{-}(\text{أ}) = \lim_{\text{س} \to \text{أ}^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}}$ موجودة، فإن $\text{قَ}_{-}(\text{أ})$ تسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليسار عند س = أ.

٣) إذا كانت $\text{قَ}_{-}(\text{أ}) = \text{قَ}_{+}(\text{أ})$ = ل فإن قَ (أ) = ل موجودة وتساوي ل. وغير ذلك ، فإن قَ (أ) غير موجودة أو ق (س) غير قابل للاشتقاق عند س = أ.

مثال (٥)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\,\text{س} - ١ & ، \ \text{س} \le ١ \\ \text{س}^{٢} & ، \ \text{س} \ge ١ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاشتقاق للاقتران ق عند س = ١

الحل

تلاحظ أن قاعدة الاقتران ق تتفرع عند س = ١، لذا يجب إيجاد $\text{قَ}_{-}(١)$، $\text{قَ}_{+}(١)$

$$\text{قَ}_{-}(١) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{٢\,\text{س} - ١ - ١}{\text{س} - ١} = ٢ \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س} - ١}{\text{س} - ١} = ٢$$

$$\text{قَ}_{+}(١) = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٢$$

بما أن $\text{قَ}_{-}(١) = \text{قَ}_{+}(١) = ٢$

إذن قَ (١) = ٢ أي أن الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ١

٩٣

مثال (٦)

ليكن ق(س) = س^{٢}+٢ ، س ∈ [٢، ٥] فاحسب :

١) قَ (س) ٢) قَ (٣) ، قَ (٤)

الحل

١) قَ (٢)، قَ (٥) غير موجودتين ، لأنهما طرفا فترة.

وعندما س ∈ (٢، ٥) فإن:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{٢} + ٢ - \text{س}^{٢} - ٢}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٢\text{س} + \text{هـ})}{\text{هـ}} = ٢\,\text{س}$$

٢) بما أن قَ (س) = ٢ س لكل س ∈ (٢، ٥)

فإن قَ (٣) = ٢ × ٣ = ٦

قَ (٤) = ٢ × ٤ = ٨

ويمكن حل فرع (١) من هذا المثال بطريقة أخرى

$$\text{قَ}(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}^{٢} + ٢ - \text{س}^{٢} - ٢}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س})}{(\text{ع} - \text{س})} = \text{س} + \text{س} = ٢\text{س}$$

مثال (٧)

ليكن ق(س) = س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٤ س + ٧ ، س ∈ ح ، فجد قَ (س) باستخدام التعريف.

٩٥

الأخطاء الشائعة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة.
- يفسّر المشتقة الأولى عند نقطة هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًّا.
- يجد المشتقة الأولى لاقتران بدلالة س باستخدام التعريف.
- يبحث في قابلية الاشتقاق لاقتران على فترة مغلقة.

المفاهيم والمصطلحات

معدل التغير، المشتقة، المشتقة من اليمين عند نقطة، المشتقة من اليسار عند نقطة، قابلية الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة مثال (٧) كتطبيق على إيجاد المشتقة كاقتران في س.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٥) باعتبار المشتقة اقتران في س.
- مناقشة مثال (٨) كتطبيق عملي على استخدام المشتقة في الحياة اليومية.
- مراجعة الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات الواردة في الوحدة .
- مناقشة السؤالين الثالث والسادس.

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات من (٤ – ٦) طلاب في كل مجموعة، وتكليفها حلّ الأسئلة.
- متابعة حلول الطلبة ورصد الملاحظات .
- تقديم المساعدة للمجموعات التي تواجه صعوبات.
- مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في أثناء الحل والأخطاء الشائعة التي وقعوا بها الطلبة لتجنبها في مواقف لاحقة.

الحل

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ع}^{٣} - ٢\,\text{ع}^{٢} + ٤\,\text{ع} + ٧ - \text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ٧}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ع}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{ع} - \text{س}} + ٢\,\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - \text{ع}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}} + ٤\,\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}^{٢} + \text{ع}\,\text{س} + \text{س}^{٢})}{\text{ع} - \text{س}} + ٢\,\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - \text{ع})(\text{س} + \text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} + ٤$$

$$= ٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} + ٤$$

تدريب (٥)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$ ، $\text{س} \neq ١$ ، فجد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام التعريف.

مثال (٨)

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها عندما يكون طولها يساوي ٢٠ سم.

الحل

افرض طول الضلع س ، والمساحة م ، فتكون $\text{م}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$

المطلوب $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٢}$ (معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طولها)

$$\left.\frac{\text{د م}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٢٠} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{م}(٢٠ + \text{هـ}) - \text{م}(٢٠)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{(٢٠ + \text{هـ})^{٢} - (٢٠)^{٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{٤٠٠ + ٤٠\,\text{هـ} + \text{هـ}^{٢} - ٤٠٠}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{هـ}(٤٠ + \text{هـ})}{\text{هـ}}$$

$$= ٤٠ \text{ سم}^{٢}$$

٩٦

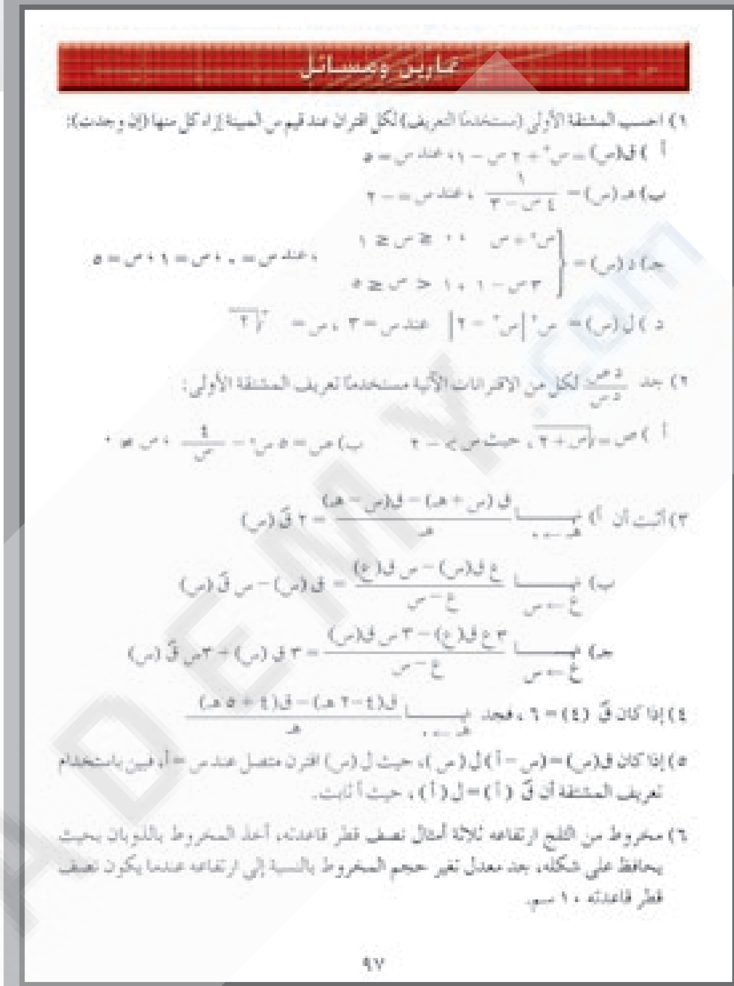
إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع


تمارين ومسائل

١) احسب المشتقة الأولى (مستخدماً التعريف) لكل اقتران عند قيم س المبينة إزاء كل منها (إن وجدت):

أ) ق(س) = س² + ٣ س − ١، عند س = ٥

ب) هـ(س) = $\frac{١}{٤س − ٣}$، عند س = −٢

جـ) ك(س) = س² − س ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ ٣س − ١ ، ١ < س ≤ ٥ ، عند س = ٠، س = ١، س = ٥

د) ل(س) = س² |س² − ٢| عند س = ٣، س = √٢

٢) جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية مستخدماً تعريف المشتقة الأولى:

أ) ص = √(س + ٢)، حيث س ≠ −٢ ب) ص = ٥ س² − $\frac{٤}{س}$، س ≠ ٠

٣) أثبت أن: أ) نها (هـ ← ٠) $\frac{ق(س + هـ) − ق(س − هـ)}{هـ}$ = ٢ ق′(س)

ب) نها (ع ← س) $\frac{ع ق(س) − س ق(ع)}{ع − س}$ = ق(س) − س ق′(س)

جـ) نها (ع ← س) $\frac{٣ ع ق(ع) − ٣ س ق(س)}{ع − س}$ = ٣ ق(س) + ٣ س ق′(س)

٤) إذا كان ق′(٤) = ٦، فجد نها (هـ ← ٠) $\frac{ق(٤ − ٢ هـ) − ق(٤ + ٥ هـ)}{هـ}$

٥) إذا كان ق(س) = (س − أ) ل(س)، حيث ل(س) اقتران متصل عند س = أ، فبين باستخدام تعريف المشتقة أن ق′(أ) = ل(أ)، حيث أ ثابت.

٦) مخروط من الثلج ارتفاعه ثلاثة أمثال نصف قطر قاعدته، أخذ المخروط بالذوبان بحيث يحافظ على شكله، جد معدل تغير حجم المخروط بالنسبة إلى ارتفاعه عندما يكون نصف قطر قاعدته ١٠ سم.

٩٧

الأخطاء الشائعة

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني بملاحظة حلولهم، والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة.
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع النهايات والاتصال.
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة في أثناء مناقشة حل التمارين على توجيه أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة، وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية** : الملاحظة .
- **الأداة** :قائمة الشطب (٢-٢)، بند (٢).
- **الاستراتيجية**: مراجعة الذات.
- **الأداة** : سلّم التقدير (٢-٢)، بند (٢).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٣ الاتصال والاشتقاق

النتاجات الخاصة

– يفسّر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
– يفسّر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.
– يدرس قابلية اشتقاق اقتران عند نقطة معينة بالاستعانة بالاتصال.

المفاهيم والمصطلحات

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– مراجعة الطلبة باتصال اقتران عند نقطة، وتعريف المشتقة الأولى للاقتران عند نقطة، والمشتقة من اليمين عند نقطة، والمشتقة من اليسار عند نقطة.
– عرض عدد كاف من الأمثلة لبحث قابلية اشتقاق اقترانات متصلة عند عدد معين في مجال كل منها بحيث يكون بعضها قابلاً للاشتقاق عند العدد المعين وبعضها غير قابل للاشتقاق عنده،على أن تشتمل الأمثلة على اقترانات تتشعب قاعدة كل منهاعند العدد المطلوب وبحث قابلية الاشتقاق عنده، يمكن الاستعانة بالمثالين (٤، ٥) من الدرس السابق لهذه الغاية.
– توجيه السؤال الآتي: إذا كان الاقتران ق قابلاً للاشتقاق عند نقطة، فهل هو متصل عندها؟

الاستراتيجية : الاستقصاء

– تناول أمثلة متنوعة للإجابة عن التساؤل السابق،واطلب من الطلبة حلها ثم يتم استقصاء العلاقة بين قابلية اشتقاق اقتران عند نقطة واتصاله عند تلك النقطة.
– عرض النظرية (١) التي تنص على أن كل اقتران قابل للاشتقاق عند نقطة يكون متصلاً عندها، ثم مناقشة برهانها، والتأكيد على الفرضيات والعلاقات المتضمنة في النظرية.
– مناقشة مثال (١) كتطبيق مباشر على نظرية (١)، ومناقشة مثال (٢) والتأكيد على الخطوات الروتينية المتبعة في المثال لبحث قابلية اشتقاق اقتران عند نقطة.
– تكليف الطلبة حل تدريب (١)، ثم توجيه التساؤل الآتي: إذا كان الاقتران ق غير متصل عند نقطة، فهل يمكـن أن يكون قابلاً للاشتقاق عند هذه النقطة؟
– كلف الطلبة حلّ أمثلة متنوعة للإجابة عن التساؤل السابق واستقراء النتيجة التي تؤكد على أنه إذا كان ق غير متصل عند نقطة فإنه غير قابل للاشتقاق عند تلك النقطة .
– عرض النظرية (٢) التي تؤيد ماتوصل اليه الطلبة في البند السابق.

معلومات إضافية للمعلم

– توفّر النظرية (٢) الوقت والجهد عند البحث عن قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة، يمكن توضيح ذلك بعرض المثال الآتي: إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} س + \sqrt{س} + ١ & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$$ ، ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س=١

• باستخدام تعريف المشتقة • باستخدام نظرية (٢).

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢-٣ الاتصال والاشتقاق

Continuity and Differentiation

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تفسر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
٢– تفسر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.
٣– تدرس قابلية اشتقاق اقتران عند نقطة معينة مستعينًا بالاتصال.

أولاً

ورد في الدرس السابق أمثلة يكون فيها الاقتران متصلا عند نقطة وغير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة كما في مثال ٤ ، أما في مثال ٥ فقد كان الاقتران متصلاً عند النقطة وقابلاً للاشتقاق عند هذه النقطة.

والآن، إذا كان ق قابلاً للاشتقاق عند س = $س_١$ فهل هو متصل عندها؟ وكذلك إذا كان ق(س) غير متصل عند س = $س_١$ فهل هو قابل للاشتقاق عندها؟

النظريتان (١) ، (٢) الآتيتان ستوضحان ذلك:

نظرية (١)

إذا كان ق قابلاً للاشتقاق عند س = $س_١$ ، فإنه يكون متصلاً عند هذه النقطة.

البرهان: بماأن $ق'(س_١)$ موجودة إذن ق معرفًا عند س = $س_١$

$$ق(س) - ق(س_١) = \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} \times (س - س_١) ، س \neq س_١$$

بأخذ النهاية للطرفين عندما س ←$س_١$

$$\lim_{س \to س_١} (ق(س) - ق(س_١)) = \lim_{س \to س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} \times \lim_{س \to س_١} (س - س_١)$$

٩٨

الحل

١) بما أن س = ١ نقطة تفرع ، اذن جد $\lim_{س \to ١^-} هـ(س)$ ، $\lim_{س \to ١^+} هـ(س)$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim_{س \to ١^-} هـ(س) = \lim_{س \to ١^-} (٤س - ١) = ٤ \times ١ - ١ = ٣ \\ \lim_{س \to ١^+} هـ(س) = \lim_{س \to ١^+} (\frac{٥}{س} - ٢) = \frac{٥}{١} - ٢ = ٣ \end{array}\right. \Leftarrow \lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣$$

$$هـ(١) = \frac{٥}{١} - ٢ = ٣$$

بما أن $\lim_{س \to ١} هـ(س) = هـ(١) = ٣$ ، إذن هـ متصل عند س = ١

٢) لإيجاد $هـ'(١)$ جد كلاً من $هـ'_+(١)$ ، $هـ'_-(١)$ لانه عند س = ١ يوجد نقطة تفرع

$$هـ'_+(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{هـ(س) - هـ(١)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{\frac{٥}{س} - ٢ - ٣}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{\frac{٥}{س} - ٥}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^+} \frac{٥ - ٥س}{س(س - ١)} = ٥ \lim_{س \to ١^+} \frac{(١ - س)}{س(س - ١)} = ٥ \times \frac{-١}{١} = -٥$$

$$هـ'_-(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{هـ(س) - هـ(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{٤س - ١ - ٣}{س - ١}$$

$$= ٤ \lim_{س \to ١^-} \frac{س - ١}{س - ١} = ٤ \times ١ = ٤$$

وبما أن $هـ'_+(١) \neq هـ'_-(١)$ إذن $هـ'(١)$ غير موجودة

أي أن هـ غير قابل للاشتقاق عندما س = ١

لاحظ هنا أن هـ (س) متصل عند س = ١ ، ولكن $هـ'(١)$ غير موجودة.

١٠٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} - \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \text{ق(س}_1\text{)} = \text{قَ(س}_1\text{)} \times \text{صفر}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} - \text{ق(س}_1\text{)} = \text{صفرًا}$$

إذن: $\underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \text{ق(س}_1\text{)}$

وبما أن ق(س$_1$) معرفة ، فإن ق(س) متصل عند س = س$_1$

مثال (١)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{٢س + أ} & \text{، س > ٠} \\ \text{س}^{٢} \text{ + ٢ س − ٣} & \text{، س ≤ ٠} \end{cases}$

قابلًا للاشتقاق عند س = صفرًا، فجد قيمة الثابت أ.

الحل

بما أن ق قابل للاشتقاق عند س = ٠ أي أن قَ (٠) موجودة ، فإن ق(س) متصل عند س = صفر،

أي $\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة وعليه، فإن:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}^{+}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)} = \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}^{-}}{\text{نهـا}} \text{ق(س)}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}^{-}}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} \text{+٢س−٣}) = \underset{\text{س} \leftarrow \text{٠}^{+}}{\text{نهـا}} (\text{٢س + أ})$$

ومنه أ = −٣

مثال (٢)

ليكن هـ(س) = $\begin{cases} \frac{\text{٥}}{\text{س}} - \text{٢} & \text{، س ≥ ١} \\ \text{٤ س − ١} & \text{، س < ١} \end{cases}$

١) ابحث في اتصال الاقتران هـ عند س = ١

٢) ابحث في قابلية اشتقاق هـ عند س = ١

٩٩

تدريب (١)

ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} \text{ + ١} & \text{، س ≤ ٤} \\ \text{٣ س − ١} & \text{، س > ٤} \end{cases}$

١) ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٤

٢) ابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س = ٤

ثانيًا

لا بد أنك لاحظت أن كل الاقترانات في الأمثلة السابقة التي بحثت مشتقتها عند نقطة كانت متصلة عند هذه النقطة، وفي هذا البند سنتعرض لنظرية أخرى مكافئة للنظرية السابقة تتحدث عن علاقة عدم الاتصال عند نقطة بقابلية للاشتقاق عند تلك النقطة.

نظرية (٢)

إذا كان ق(س) غير متصل عند النقطة س = س$_1$ ، فإنه يكون غير قابل للاشتقاق عندها.

مثال (٣)

ليكن ق(س) = $[\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س} - \text{١}]$

١) ابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س = ١.

٢) ابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س = ٤.

الحل

١) أعد تعريف ق حول س = ١.

ق يغير قاعدته بعد كل فترة طولها ٢.

وعليه ، فإن ق(س) = −١ لكل س ∈ [٠ ، ٢)

تلاحظ أن ق متصل عند س = ١

١٠١

الأخطاء الشائعة

– قد يخلط الطلبة بين نصي النظريتين (١) ، (٢) لبحث قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة ، أكد على مضمون النظريتين وكيفية استخدامهما ، وأعطِ مزيدًا من الأمثلة التوضيحية .

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} & \text{، س ≤ ٤} \\ \text{٤س} & \text{، س > ٤} \end{cases}$ ، أجب عن السؤالين الآتيين:

أ) اثبت أن ق متصل عند س = ٤ .

ب) استخدم تعريف المشتقة لإثبات أن قَ (س) غير موجودة عند س = ٤ .

إثراء

– إذا كان ق(س + ص) = ٣ ق (س) × ق (ص) ، وكان قَ (٠) = ق(٠) = ١ .

اثبت أن قَ (س) = ق (س) .

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية : الملاحظة .

– الأداة : قائمة الشطب (٢ – ٢)، بند (٢).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٣ الاتصال والاشتقاق

النتاجات الخاصة

- يفسّر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
- يفسّر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.
- يدرس قابلية اشتقاق اقتران عند نقطة معينة بالاستعانة بالاتصال.

المفاهيم والمصطلحات

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة مثال (٣) كتطبيق مباشر على نظرية (٢).
- تكليف الطلبةحل تدريب (٢) والتأكيد على تنفيذ الخطوات اللازمة لبحث قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة وبحث الاتصال عند هذه النقطة.
- مناقشة مثال (٤) والتركيز على الخطوات المتبعة لبحث مشتقة اقتران على فترة مغلقة .

الاستراتيجية : حل المشكلات

- تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل الموجودة في الدرس.

$\text{ق}'(١) = \lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق}(١)}{\text{س} - ١} = \lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{-١ - (-١)}{\text{س} - ١}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{\text{صفر}}{\text{س} - ١} = \text{صفرًا}$

إذن $\text{ق}'(١) = \text{صفرًا}$

٢) أعد تعريف ق عند س = ٤

بما أن س = ٤ نقطة تشعب في الفترة] ٢ ، ٦)

إذن $[\frac{١}{٢}\text{س} - ١] = \begin{cases} \text{صفر} &، ٢ \le \text{س} < ٤ \\ ١ &، ٤ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$

ابحث في الاتصال أولاً عند س = ٤

$\lim\limits_{\text{س} \to ٤^-} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٤^-} \text{صفر} = \text{صفر}$ ،

$\lim\limits_{\text{س} \to ٤^+} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س} \to ٤^+} ١ = ١$

إذن $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{ق(س)}$ غير موجودة بمعنى ان ق(س) غير متصل عند س = ٤

وبما أن ق غير متصل عند س = ٤ فهو غير قابل للاشتقاق عند س = ٤ (حسب نظرية ٢)

تدريب (٢)

$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٣ + \text{س} &، ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س}^٢ + ٢ &، ٢ \le \text{س} < ٥ \end{cases}$

ابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س = ٢

١٠٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

معلومات إضافية للمعلم

- برهان نظرية (٢)

يمكن استخدام البرهان بالتناقض

نفرض أن ق قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{س}_١$ ومنه ق متصل عند $\text{س} = \text{س}_١$ (نظرية ١).

يناقض هذا معطيات النظرية بأن ق غير متصل عند $\text{س} = \text{س}_١$.

أي أن ق غير قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{س}_١$.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٤)

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{٦ س} - \text{٢} ، & \text{١} \le \text{س} \le \text{٢} \\ \sqrt{\text{س} + \text{٢}} ، & \text{٢} < \text{س} \le \text{١٠} \end{cases}$ ، فجد قَ(س):

الحل

١) ق غير قابل للاشتقاق عند س = ١، س = ١٠ لانهما طرفا فترة.

٢) ابحث في اتصال ق(س) عند س = ٢ (نقطة تفرع)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}^-} \text{ق(س)} = \text{٦} \times \text{٢} - \text{٢} = \text{١٠} \\ \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}^+} \text{ق(س)} = \sqrt{\text{٢} + \text{٢}} = \text{٢} \end{array} \right. \Leftarrow \lim\limits_{\text{س} \to \text{٢}} \text{ق(س) غير موجودة.}$$

إذن ق(س) غير متصل عند س = ٢، وعليه ، فإن قَ (٢) غير موجودة.

٣) عندما ١ < س < ٢ ، فان ق(س) = ٦س − ٢،

$$\text{قَ(س)} = \lim\limits_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{ق(س + هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim\limits_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{٦ (س + هـ)} - \text{٢} - \text{٦س} + \text{٢}}{\text{هـ}} = \lim\limits_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{٦ هـ}}{\text{هـ}} = \text{٦}$$

٤) عندما ٢ < س < ١٠، فان ق (س) = $\sqrt{\text{س} + \text{٢}}$

$$\text{قَ(س)} = \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} = \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\sqrt{\text{ع} + \text{٢}} - \sqrt{\text{س} + \text{٢}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{ع} + \text{٢}} + \sqrt{\text{س} + \text{٢}}}{\sqrt{\text{ع} + \text{٢}} + \sqrt{\text{س} + \text{٢}}}$$

$$= \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع} + \text{٢} - \text{س} - \text{٢}}{\text{ع} - \text{س}} \times \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{ع} + \text{٢}} + \sqrt{\text{س} + \text{٢}}}$$

$$= \lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{٢}}}$$

إذن قَ (س) = $\begin{cases} \text{٦} ، & \text{١} < \text{س} < \text{٢} \\ \text{غير موجودة} ، & \text{س} = \text{١، ٢، ١٠} \\ \dfrac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{٢}}} ، & \text{٢} < \text{س} < \text{١٠} \end{cases}$

١٠٣

تمارين ومسائل

١) ابحث في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيم س (قيمة س) المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = $\frac{[illegible]}{\text{س} - \text{٢}}$ ، عند س = ٢

ب) هـ(س) = [٢ − ٣س] ، عند س = − ٢ ، س = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

جـ) ل(س) = |س^٢| [س] عند س = صفراً

د) د(س) = $\begin{cases} \text{س}^\text{٢} ، & \text{س} \le \text{١} \\ \text{٣س}^\text{٢} - \text{٣س} + \text{٥} ، & \text{س} > \text{١} \end{cases}$ ، عند س = ١

هـ) و(س) = $\begin{cases} \frac{\text{١}}{\text{س}} ، & \text{س} \ge \text{١} \\ \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}^\text{٢} + \frac{\text{٣}}{\text{٢}} ، & \text{س} < \text{١} \end{cases}$ ، عند س = − ١ ، س = ١

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أس}^\text{٢} - \text{ب س} ، & \text{س} \ge \text{٢} \\ \text{٤} - \text{ب س}^\text{٢} + \text{أس} ، & \text{س} < \text{٢} \end{cases}$

فجد قيمة كل من الثابتين أ، ب واللذين يجعلان قَ(٢) موجودة.

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\text{س}] ، & \text{١} \le \text{س} < \text{٢} \\ |\text{س} - \text{٣}| ، & \text{٢} < \text{س} \le \text{٤} \end{cases}$

فابحث في قابلية ق للاشتقاق على مجاله.

٤) إذا كان ل(س) = $\frac{[\frac{\text{س}}{\text{٥}}] - \text{س}}{\text{س} + \text{١}}$

فابحث في قابلية ق للاشتقاق عند: س = − ٢ ، س = ٥

١٠٤

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– بيّن أن ق (س) = $\sqrt[3]{\text{س}}$ متصل عند س= ٠، ثم استخدم تعريف المشتقة لإثبات أنه غير قابل للاشتقاق عند س= ٠.

إثراء

– إذا كان ق اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س=١ وكان $\lim\limits_{\text{هـ} \to \text{٠}} \frac{\text{ق (١ + هـ)}}{\text{هـ}} = \text{٥}$، جد ق (١) ، قَ (١) .

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : التقويم المعتمد على الأداء .

– **الأداة** : سلّم التقدير (٢–٢)، بند (٣).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مشتقات الاقترانات الأساسية .
- يحسب مشتقات الاقترانات الأساسية .

المفاهيم والمصطلحات

مشتقة مجموع (طرح) اقترانين.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة بالمشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف ومراجعة العلاقة $ع^{ن} - س^{ن} = (ع - س)(ع^{ن-١} + ع^{ن-٢}\, س + \ldots + س^{ن-١})$ حيث ن عدد صحيح موجب.
- تكليف الطلبة إيجاد مشتقة الاقتران $ق(س) = س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤$ أوأي اقتران آخر مشابه باستخدام التعريف؛ ليلاحظ الطلبة الصعوبة والجهد المستغرق لتنفيذه، وهذا يدعو إلى الحاجة للبحث عن طرق أخرى لإيجاد مشتقة اقتران هي قواعد الاشتقاق .

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة إلى مجموعات من (٤–٦) طلاب في كل مجموعة، والطلب منهم إثبات القاعدة (١) ،والقاعدة (٢) ، والقاعدة (٣) بعد عرضها عليهم، والتأكيدعلى الطلبة بأن برهانها يتم باستخدام تعريف المشتقة.
- عرض ما توصلت اليه المجموعات، والتعبير عن قواعد الاشتقاق بالكلام كلما أمكن؛ لأن ذلك أدعى للحفظ والتذكر، ثم مناقشة الأمثلة (١، ٢ ، ٣ ، ٤) على القواعد الثلاث .
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) والتأكد من توظيفهم قواعد الاشتقاق بشكل صحيح.
- مناقشة مثال (٥) والتأكيد على إمكانية حله دون الحاجة إلى إعادة تعريف القيمة المطلقة بشكل كامل.
- تكليف المجموعات اثبات القاعدة (٤) (مشتقة مجموع اقترانين تساوي مجموع مشتقتيهما)، ثم استنتاج مشتقة الفرق بين اقترانين.
- عرض ما توصلت اليه المجموعات .

معلومات إضافية

٢-٤ قواعد الاشتقاق (١)

Differentiation Rules (1)

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تتعرف مشتقات الاقترانات الأساسية.
٢– تحسب مشتقات الاقترانات الأساسية.

درست سابقاً إيجاد مشتقة اقتران باستخدام تعريف المشتقة وهذا يتطلب إجراء عمليات جبرية مطولة، وفي هذا البند ستدرس قواعد تمكنك من إيجاد المشتقة بطرق مختصرة.

قاعدة (١)

إذا كان ق (س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت ، فإن قَ (س) = صفرًا، لكل س ∋ ح.

البرهان

باستخدام تعريف المشتقة يكون:

$$قَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{جـ - جـ}{هـ} = صفرًا$$

مثال (١)

إذا كان ق (س) = ٥، فجد قَ (س) ، قَ (٣) ، قَ (–٢).

الحل

بما أن ق (س) = ٥ اقتران ثابت، فإن قَ (س) = ٠، لكل س ∋ ح ومنه
قَ (٣) = ٠ ، قَ (–٢) = ٠

١٠٥

قاعدة (٣)

إذا كان ق اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س، جـ عدد ثابت وكان د (س) = حـ ق (س)، فإن: الاقتران د (س) قابل لاشتقاق عند س، وأن دَ(س) = حـ قَ(س).

البرهان

$$دَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{حـ ق(ع) - حـ ق(س)}{ع - س}$$

$$= حـ \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = حـ قَ(س)$$

مثال (٣)

جد قَ (س) في كل مما يأتي:

١) ق (س) = ٦ $س^{٥}$ ٢) ق (س) = – $س^{٧}$ ٣) ق (س) = $\frac{س^{٣}}{٥}$

الحل

١) قَ (س) = ٦ × (٥ $س^{٤}$) = ٣٠ $س^{٤}$

٢) قَ (س) = (–١) × (٧ $س^{٦}$) = – ٧ $س^{٦}$

٣) قَ (س) = $\frac{١}{٥}$ × (٣ $س^{٢}$) = $\frac{٣}{٥}$ $س^{٢}$

مثال (٤)

إذا كان ل (س) = ٨ ق (س)، وكان ق (س) قابلاً للاشتقاق، قَ (٥) = ٣ ، فجد لَ (٥).

الحل

لَ (س) = ٨ قَ (س)
لَ (٥) = ٨ قَ (٥) = ٨ × ٣ = ٢٤

١٠٧

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في إيجاد مشتقة الاقتران الثابت الذي من نمط ق(س) = $جـ^{٢}$ حيث جـ عدد ثابت فيكتبون: قَ(س) = ٢ جـ ،لمعالجة ذلك أكد على أن المشتقة بالنسبة إلى المتغير س، وأن مشتقة الاقتران الثابت صفر، ثم أعطِ تدريبات

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

قاعدة (٢)

إذا كان ق (س) = س$^{\text{ن}}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإن قَ(س) = ن س$^{\text{ن}-١}$.

البرهان

ستحتاج الحقيقة الآتية في البرهان:

ع$^{\text{ن}}$ − س$^{\text{ن}}$ = (ع − س) (ع$^{\text{ن}-١}$ + ع$^{\text{ن}-٢}$ س + ع$^{\text{ن}-٣}$ س^{٢} + … + ع س$^{\text{ن}-٢}$ + س$^{\text{ن}-١}$)

$$\text{قَ (س)} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق (ع) − ق (س)}}{\text{ع − س}} \quad \text{(المشتقة الأولى من التعريف)}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع − س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{(\text{ع − س}) (\text{ع}^{\text{ن}-١} + \text{ع}^{\text{ن}-٢}\text{س} + \text{ع}^{\text{ن}-٣}\text{س}^{٢} + \dots + \text{ع س}^{\text{ن}-٢} + \text{س}^{\text{ن}-١})}{\text{ع − س}}$$

$$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} (\text{ع}^{\text{ن}-١} + \text{ع}^{\text{ن}-٢}\text{س} + \text{ع}^{\text{ن}-٣}\text{س}^{٢} + \dots + \text{ع س}^{\text{ن}-٢} + \text{س}^{\text{ن}-١})$$

= (س$^{\text{ن}-١}$ + س$^{\text{ن}-١}$ + س$^{\text{ن}-١}$ + … س$^{\text{ن}-١}$ + س$^{\text{ن}-١}$) ن من المرات

= ن س$^{\text{ن}-١}$

مثال (٢)

جد قَ (س) في كل مما يأتي:

١) ق (س) = س^{٥} ٢) ق (س) = س ٣) ق (س) = س^{١٠}

الحل

١) قَ (س) = ٥ س^{٤} ٢) قَ (س) = ١ ٣) قَ (س) = ١٠ س^{٩}

١٠٦

تدريب (١)

جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

١) ق (س) = $\sqrt{٣}$ ٢) ق (س) = − ٤ س^{٢} ٣) ق (س) = $\frac{\text{س}}{\pi}$

مثال (٥)

إذا كان ق (س) = س^{٣} |س| ، فجد قَ(٤).

الحل

عبرّ عن ق (س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

وبما أن |س| = س عند س = ٤ إذن ق (س) = س^{٣} × س = س^{٤}

ومنه قَ (س) = ٤ س^{٣} ⟸ قَ(٤) = ٤ (٤)^{٣} = ٤ × ٦٤ = ٢٥٦

قاعدة (٤)

إذا كان كل من الاقترانين ل ، م قابلاً للاشتقاق عند س ، فإن كلًّا من الاقترانين ق، هـ حيث:
ق (س) = ل (س) + م (س) ، هـ (س) = ل (س) − م (س) قابلان للاشتقاق عند س، وأن:

قَ(س) = لَ (س) + مَ (س) ، هـَ(س) = لَ (س) − مَ (س).

البرهان

بما أن ل (س) ، م (س) قابلان للاشتقاق عند س ، إذن مَ (س) ، لَ (س) موجودتان، وحسب تعريف المشتقة تجد:

$$\text{قَ (س)} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق (س + هـ) − ق (س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ل (س + هـ) + م (س + هـ) − ل (س) − م (س)}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ل (س + هـ) − ل (س)}}{\text{هـ}} + \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{م (س + هـ) − م (س)}}{\text{هـ}}$$

= لَ (س) + مَ (س)

أي أن مشتقة مجموع اقترانين يساوي مجموع مشتقتيهما. لإثبات أن هـَ(س) = لَ (س) − مَ (س)

١٠٨

كافية مثل إيجاد مشتقات الاقترانات :

ق (س) = $(\frac{١}{٢})\pi^{٢}$ ، ق(س) = ن حيث ن ثابت،

ق (س) = جا π.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد قَ (س) لكل مما يأتي :

أ) ق (س) = $\frac{١}{\pi^{٢}}$ ب) ق (س) = س^{٥} + س^{٣} − ٢س + ١

٢) إذا كان ل (س) = ق (س) + ٣هـ (س)، وكان قَ (٢) = ٤ ، هـَ(٢) = −٥ ، جد لَ (٢).

إثراء

١) بدأ شخص بنفخ بالون على شكل كرة، جد قاعدة عامة لحساب معدل تغير حجم البالون بالنسبة إلى نصف قطره، ثم جد معدل تغير الحجم عندما نق = ١٠سم .

٢) إذا كان ق(س) = جـ س^{٢} + ٣س ، جـ ثابت

وكان $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ق (٢ + هـ) − ق (٢)}}{\text{هـ}}$ = −٩، جد قيمة جـ.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة من خلال متابعة حلول الطلبة.

– **الأداة:** قائمة الشطب لتقويم أداء الطلبة في أثناء العمل في مجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٤ قواعد الاشتقاق (١)

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مشتقات الاقترانات الأساسية.
- يحسب مشتقات الاقترانات الأساسية.

المفاهيم والمصطلحات

مشتقة مجموع (طرح) اقترانين.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة مثال (٦) .
- تعميم مشتقة المجموع على أكثر من اقترانين (مشتقة مجموع عدد منتهٍ من الاقترانات يساوي مجموع مشتقات هذه الاقترانات)، وكذلك الأمر بالنسبة لعملية الطرح.

الاستراتيجية : حل المشكلات

- مناقشة الأمثلة (٩،٨،٧) أو أمثلة أخرى مشابهة، والتركيز في هذه المرحلة على تنويع التدريبات بهدف تنمية قدرات الطلبة على اختيار القاعدة المناسبة للاشتقاق، وتوفير التغذية الراجعة لهم.
- تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل الواردة في الدرس.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

يمكن كتابة $هـ(س)$ على الصورة $هـ(س) = ل(س) + (-١)\,م(س)$، وباستخدام قاعدة مشتقة مجموع اقترانين وقاعدة مشتقة حاصل ضرب ثابت في اقتران تجد أن:

$هـ'(س) = ل'(س) + (-١)\,م'(س)$ ومنه $هـ'(س) = ل'(س) - م'(س)$

مثال (٦)

جد $ق'(س)$ في كل مما يأتي:

١) $ق(س) = ٦س^{٢} + ٨س^{٥}$

٢) $ق(س) = ٣س^{٥} - \sqrt{٣}\,س^{٤}$

الحل

١) $ق'(س) = ١٢س + ٤٠س^{٤}$

٢) $ق'(س) = ١٥س^{٤} - ٤\sqrt{٣}\,س^{٣}$

وبصورة عامة: إذا كان كل من الاقترانات $ق_{١}$، $ق_{٢}$، ...، $ق_{ن}$ قابلاً للاشتقاق عند س وكان: $ل(س) = ق_{١}(س) \pm ق_{٢}(س) \pm ق_{٣}(س) \pm .... \pm ق_{ن}(س)$، فإن:

$ل'(س) = ق'_{١}(س) \pm ق'_{٢}(س) \pm ق'_{٣}(س) \pm ...... \pm ق'_{ن}(س)$.

نتيجة

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود ، فإن ق قابلاً للإشتقاق لكل $س \in ح$

مثال (٧)

إذا كان $هـ(س) = ٣س^{٨} - ٢س^{٥} + ٦س + ٧$ ، فجد $هـ'(س)$.

الحل

$هـ'(س) = ٢٤س^{٧} - ١٠س^{٤} + ٦$

١٠٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق (س) = $\frac{-١}{٣}$ (س^{٧} + ٢س − ٩)، جد قَ (س) .

٢) إذا كان ل (س) = ٦ق (س) − ٥هـ (س)، وكان لَ(π) = ٥٠، قَ (π) = ١٠، جد هـَ (π).

إثراء

١) إذا كان ق (س) = س^{٢} $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ ، ابحث في قابلية ق للاشتقاق عند س=٣.

٢) إذا كان ق(س) = س^{٣} − [س+ ٠,٥]، جد قَ (٢) .

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : مراجعة الذات .

– **الأداة** : السجل القصصي.

– **الأداة**: سلّم التقدير (٢−٢)، بند (٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٨)

إذا كان ق (س) = ٣ س^{٢} − [٣ س]، فجد قَ (٠,٧)

الحل

أعد تعريف ق دون استخدام رمز اقتران أكبر عدد صحيح حول س = ٠,٧

لاحظ أن [٣ س] يغير قاعدته بعد كل فترة طولها $\frac{١}{٣}$، ٠,٧ ∋ [$\frac{٢}{٣}$ ، ١)

وأن [٣ س] = [٣× ٠,٧] = [٢,١] = ٢

إذن تصبح قاعدة ق (س) = ٣ س^{٢} − ٢ ⟸ قَ (س) = ٦ س

إذن قَ (٠,٧) = ٦× ٠,٧ = ٤,٢

مثال (٩)

إذا كان ق (س) = ٨ | س | + ٤ س^{٥} ، فجد قَ (−٢)

الحل

أعد تعريف ق (س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة

لاحظ أن | س | = − س حول س = − ٢ وعليه ، فإن:

ق (س) = ٤ س^{٥} − ٨ س ومنه قَ (س) = ٢٠ س^{٤} − ٨

إذن قَ (−٢) = ٣٢٠ − ٨ = ٣١٢

تدريب (٢)

جد قَ (س) لكل مما يأتي:

١) ق (س) = $\frac{١}{٢}$ (س^{٤} + ٧).

٢) ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + د ، حيث أ، ب، حـ ، د أعداد ثابتة.

١١٠

تمارين ومسائل

١) جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ق (س) = ٤ ب) ق (س) = π^{٣} جـ) ص = − ٣ س^{١١}

د) ل (س) = $\frac{١}{٢}$ هـ (س) ، علماً بأن هـ (س) قابل للاشتقاق

٢) جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = ١ − ٣ س^{٢} ب) ص = ٦ س^{٣} − ٥ س^{٢} + س + ٩

جـ) ص = $\frac{س^{٢} + ١}{٥}$ د) ص = $\frac{١}{٤}$ س^{٤} − $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − س + ١٠

٣) جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية عند النقطة المبينة إزاء كل منها.

أ) ص = $\frac{س^{٢}}{٢}$ ، س = − ٢

ب) ص = س^{٢} + | ٣ س − ١٢ | ، س = ٥

جـ) ص = ٨ س^{٢} − [$\frac{١}{٢}$ س + ٣] ، س = ١,٢

د) ص = س + [س + ٠,٢] − | س | ، س = − ١

٤) إذا كان ل (س)، هـ (س) اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ (٢) = ٤، هـَ (٢) = − ٥ ، جد قَ (٢) في كل مما يأتي:

أ) ق (س) = ٥ ل (س) + ٢ هـ (س).

ب) ق (س) = ل (س) − ٣ هـ (س).

١١١

الدرس ٢-٥ قواعد الاشتقاق (٢)

النتاجات الخاصة

- يتعرّف قاعدة اشتقاق حاصل ضرب اقترانين .
- يتعرف قاعدة اشتقاق حاصل قسمة اقترانين.
- يجد مشتقة حاصل ضرب (قسمة) اقترانين.
- يجد مشتقة اقترانات متشعبة.

المفاهيم والمصطلحات

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية :التعلم التعاوني، والتدريس المباشر

- مراجعة مشتقة اقتران عند نقطة ، وقواعد الاشتقاق (١) .
- تقسيم الطلبة مجموعات، وتكليفهم تنفيذ ورقة العمل (٣–٥).
- عرض ما توصلت اليه المجموعات،وتوضيح أهمية وجود قاعدة لحساب مشتقة حاصل ضرب اقترانين لما توفره من وقت وجهد .
- كتابة قاعدة إيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين والتعبير عنها بالكلام، ثم مناقشة مثال (١) كتطبيق مباشرعلى القاعدة،وتكليف الطلبة حل تدريب (١) .
- إعداد ورقة عمل على غرار ورقة العمل (٣ – ٢) تتضمن التوصل إلى قاعدة لإيجاد مشتقة ناتج قسمة اقترانين،وتكليف المجموعات تنفيذها، وإبراز أهمية هذه القاعدة في توفير الوقت والجهد، ثم كتابة القاعدة على السبورة، والتعبير عنها بالكلام.
- مناقشة مثال (٢) كتطبيق مباشر على القاعدة، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٢).
- عرض أمثلة متنوعة تشتمل على حالات يكون فيها البسط مقدارًا ثابتًا لاستخلاص النتيجة (١) من كتاب الطالب، وحالات يكون فيها المقام عددًا ثابتًاومناقشتها بطريقتين الأولى باعتباره حاصل قسمة اقترانين، والثانية باعتباره ثابتًا مضروبًا في اقتران ($\frac{\text{ق (س)}}{\text{أ}} = \frac{١}{\text{أ}} \times$ ق(س)) حيث أ عدد ثابت، ومن ثم إثبات النتيجة (١).
- مناقشة برهان النتيجة (٢) باعتبارها حالة خاصة من قاعدة القسمة.
- تكليف الطلبة حل مثال (٣) ، وتدريب (٣) على النتيجتين (١) ، (٢) .

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢–٥ قواعد الاشتقاق (٢)

Differentiation Rules (2)

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تتعرف قاعدة اشتقاق حاصل ضرب اقترانين.
٢– تتعرف قاعدة اشتقاق خارج قسمة اقترانين.
٣– تجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين وخارج قسمة اقترانين.
٤– تجد مشتقة اقترانات متشعبة.

تعرفت في الدرس السابق بعض القواعد العامة لاشتقاق نوع معين من الاقترانات، وستتعرف في هذا الدرس قواعد أخرى لاشتقاق نوع آخر من الاقترانات دون اللجوء إلى تعريف المشتقة.

قاعدة (١)

قاعدة الضرب

إذا كان م ، ل اقترانين قابلين للاشتقاق عند س وكان ق (س) = م (س) × ل (س)،
فإن الاقتران ق قابلاً للاشتقاق عند س ، وأن:
قَ (س) = م (س) × لَ (س) + ل (س) × مَ(س).
أي أن مشتقة حاصل ضرب اقترانين تساوي:
الاقتران الأول × مشتقة الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الأول

مثال (١)

إذا كان ق (س) = (٤ س^{٢} – ١) (٧ س^{٣} + س)، فجد قَ (س).

الحل

قَ(س) = (٤س^{٢} – ١) × $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (٧ س^{٣} + س) + (٧ س^{٣} + س) × $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (٤ س^{٢} – ١)

= (٤ س^{٢} – ١) (٢١ س^{٢} + ١) + (٧س^{٣} + س) (٨ س)

= ٨٤ س^{٤} + ٤ س^{٢} – ٢١ س^{٢} – ١ + ٥٦ س^{٤} + ٨ س^{٢} = ١٤٠ س^{٤} – ٩ س^{٢} – ١

١١٢

تدريب (٢)

إذا كان ص = $\frac{\text{٤ س + ١}}{\text{س}^{٢} \text{ – ٥}}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{د س}}$

نتيجة (١)

إذا كان الاقتران م قابلاً للاشتقاق عند س، أ عدد ثابت وكان:
ق (س) = $\frac{\text{أ}}{\text{م (س)}}$ ، م (س) ≠ ٠ فإن ق قابل للاشتقاق عند س، وإن:
قَ (س) = $\frac{\text{– أ مَ(س)}}{\text{(م (س))}^{٢}}$

البرهان

باستخدام قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين تجد أن:

قَ (س) = $\frac{\text{م (س) × صفر – أ مَ(س)}}{\text{(م (س))}^{٢}}$ = $\frac{\text{– أ مَ(س)}}{\text{(م (س))}^{٢}}$

نتيجة (٢)

إذا كان ق (س) = س$^{\text{ن}}$، س ≠ ٠ ، ن عدد صحيح سالب، فإن قَ (س) = ن س$^{\text{ن–١}}$

البرهان

افرض أن ن = – م ، حيث م عدد صحيح موجب، فيكون ق (س) = س$^{\text{ن}}$ = س$^{\text{–م}}$، وباستخدام خواص الأسس يكون ق (س) = $\frac{١}{\text{س}^{\text{م}}}$

إذن قَ (س) = $\frac{\text{س}^{\text{م}} \text{ × صفر – (١) (م س}^{\text{م–١}}\text{)}}{\text{(س}^{\text{م}}\text{)}^{٢}}$ = $\frac{\text{– م س}^{\text{م–١}}}{\text{(س}^{\text{م}}\text{)}^{٢}}$ = – م س$^{\text{م–١–٢م}}$ = – م س$^{\text{–م–١}}$

أي أن قَ (س) = – م س$^{\text{–م–١}}$ وبما أن –م = ن، فيكون قَ (س) = ن س$^{\text{ن–١}}$

١١٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

تدريب (١)

١) في مثال (١) اكتب ق (س) على صورة اقتران كثير حدود بفك القوسين، ثم جد قَ (س).

٢) إذا كان ق (س) = (٣ س^{٢} + ٦) (٢ س − $\frac{١}{٤}$) ، فجد قَ (س).

قاعدة (٢)

قاعدة القسمة

إذا كان م، ل اقترانين قابلين للاشتقاق عند س، وكان ل (س) ≠ ٠، فإن ق (س) = $\frac{\text{م (س)}}{\text{ل (س)}}$ قابل للاشتقاق عند س، أي أن مشتقة خارج قسمة اقترانين تساوي:

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{ل (س)} \times \text{مَ (س)} - \text{م (س)} \times \text{لَ (س)}}{(\text{ل (س)})^{٢}}$$

أي أن مشتقة خارج قسمة اقترانين تساوي:

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال (٢)

إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥}{\text{س}^{٤} + ٢}$ ، فجد قَ (١).

الحل

باستخدام قاعدة مشتقة قسمة اقترانين تجد أن:

$$\text{قَ (س)} = \frac{(\text{س}^{٤} + ٢) \times \frac{\text{د}}{\text{د س}} (\text{س}^{٢} - ٥) - (\text{س}^{٢} - ٥) \frac{\text{د}}{\text{د س}} (\text{س}^{٤} + ٢)}{(\text{س}^{٤} + ٢)^{٢}}$$

$$= \frac{(\text{س}^{٤} + ٢)(٢\text{ س}) - (\text{س}^{٢} - ٥)(٤\text{س}^{٣})}{(\text{س}^{٤} + ٢)^{٢}} = \frac{-٢\text{س} (\text{س}^{٤} - ١٠\text{س}^{٢} - ٢)}{(\text{س}^{٤} + ٢)^{٢}}$$

$$\text{قَ (س)} = \frac{-٢(١ - ١٠ - ٢)}{(١ + ٢)^{٢}} = \frac{٢٢}{٩}$$

مثال (٣)

جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

١) ق (س) = س$^{-٨}$ ٢) م (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ٣) ل (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٢}}$

الحل

١) باستخدام النتيجة (٢) ينتج:

$$\text{قَ (س)} = -٨\text{ س}^{-٨-١} = -٨\text{ س}^{-٩} = \frac{-٨}{\text{س}^{٩}}$$

٢) باستخدام النتيجة (١) ينتج:

$$\text{مَ(س)} = \frac{(-١)(١)}{\text{س}^{٢}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}}$$

٣) ل (س) = $\frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٢}} = \frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ = س − $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ = س − س$^{-٢}$

باستخدام النتيجة (٢) وقواعد الاشتقاق ينتج:

$$\text{لَ(س)} = ١ - (-٢)\text{ س}^{-٢-١} = ١ + ٢\text{ س}^{-٣} = ١ + \frac{٢}{\text{س}^{٣}}$$

تدريب (٣)

جد قَ (س) لكل مما يأتي:

١) ق (س) = $\frac{٥}{\text{س}^{٣}}$ ٢) ق (س) = $\frac{\sqrt{٢} - \text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣}}$

اشتقاق الاقتران المتشعب:

إذا كان لديك اقتران على الصورة: ق (س) = $\begin{cases} \text{م (س)} &، \text{س} \leq \text{أ} \\ \text{هـ (س)} &، \text{س} > \text{أ} \end{cases}$

بحيث مَ(س) موجودة لكل س < أ ، هـَ(س) موجوده لكل س > أ، فإنه:

لإيجاد قَ (س)، اتبع الخطوات الآتية:

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في تطبيق قواعد الاشتقاق (٢) فيكتبون مثلًا مشتقة ص = (س^{٢} − ٣) (٥س + ١) على الصورة: صَ = ٢س × ٥ + ٥×٢س أو صَ = ٢س × ٥، لتجنب هذا الخطأ أكد على الصيغة الصحيحة لمشتقة ضرب اقترانين مع مزيد من التدريبات.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد قَ (س) للاقتران ق(س) = (٣س^{٢}+٦) (٢س − ١) .

٢) جد قَ (س) للاقتران ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ١}{٢\text{ س}}$.

إثراء

– إذا كـان ل (س) × هـ (س) = أ حيث أ ثابت، وكـان هـَ(٢) = ٣، هـ (٢) = −٢ $\sqrt{\text{أ}}$ ، جد لَ (٢).

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: الملاحظة.

– الأداة: قائمة الشطب رقم (٢–٥)، بند (٥).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٥ قواعد الاشتقاق (٢)

النتاجات الخاصة

- يتعرّف قاعدة اشتقاق حاصل ضرب اقترانين .
- يتعرّف قاعدة اشتقاق حاصل قسمة اقترانين.
- يجد مشتقة حاصل ضرب (قسمة) اقترانين.
- يجد مشتقة اقترانات متشعبة.

المفاهيم والمصطلحات

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مناقشة مشتقة اقتران متشعب الواردة في كتاب الطالب، والتأكيد على تنفيذ الخطوات المتبعة في الكتاب خاصة عند نقطة التشعب.
- مناقشة المثالين (٤،٥) كتطبيق مباشر على إيجاد مشتقة اقتران متشعب، والتأكيد على كتابة قاعدة المشتقة كاقتران في س بالصورة النهائية.
- مناقشة مثال (٦) والتي تجد فيها مشتقة اقتران يصبح متشعبًا بعد إعادة تعريفه.
- تكليف الطلبة حلّ تدريب (٤).
- تكليف الطلبة حلّ التمارين والمسائل الموجودة في الدرس.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

---

١) جد مَ (س) ، عندما س > أ ، هـَ (س) عندما س < أ

$$\text{فيكون } \text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{مَ(س)} \ ، \ \text{س} > \text{أ} \\ \text{هـَ(س)} \ ، \ \text{س} < \text{أ} \end{cases} \ ، \ \text{س} \neq \text{أ}$$

٢) ابحث في اتصال ق (س) عند س = أ ، وهناك حالتان:

- ق غير متصل عند س = أ ، وعليه، ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ
- ق متصل عند س = أ وفي هذه الحالة ابحث قابلية ق للاشتقاق عند س = أ باستخدام التعريف.

مثال (٤)

$$\text{إذا كان } \text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^3 - ٢\text{س} \ ، \ \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}^2 + ٦\text{س} - ١٢ \ ، \ \text{س} < ٢ \end{cases} \ ، \text{ فجد قَ(س)} .$$

الحل

١) ق متصل عند س = ٢ ويمكنك التأكد من ذلك.

جد قَ(٢)، ومن أجل ذلك جد $\text{قَ}_{-}(٢)$ ، $\text{قَ}_{+}(٢)$ لأن س = ٢ نقطة تفرع.

$$\text{قَ}_{-}(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢^-} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٢)}}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢^-} \frac{\text{س}^2 + ٦\text{س} - ١٢ - ٤}{\text{س} - ٢}$$

$$= \lim_{\text{س} \to ٢^-} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٨)}{\text{س} - ٢} = ٢ + ٨ = ١٠$$

$$\text{قَ}_{+}(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢^+} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٢)}}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢^+} \frac{\text{س}^3 - ٢\text{س} - ٤}{\text{س} - ٢}$$

١١٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

- قد يخطئ بعض الطلبة في كتابة مشتقة $\frac{٥\text{س} + ١}{\text{س}}$ على الصورة $\text{صَ} = \frac{٥}{٢}$ أو على الصورة $\text{صَ} = \frac{٢(٥\text{س} + ١) - ٥(٢\text{س})}{٤\text{س}^2}$ ،

$$\text{قَ}_{+}(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٢)} = ٤ + ٤ + ٢ = ١٠$$

بما أن $\text{قَ}_{-}(٢) = \text{قَ}_{+}(٢) = ١٠$ ، إذن $\text{قَ}(٢) = ١٠$

٢) جد قَ (س) عندما س ≠ ٢ على النحو الآتي:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٢ \text{ ، } \text{س} > ٢ \\ ٢\text{س} + ٦ \text{ ، } \text{س} < ٢ \end{cases} \text{ ، س} \neq ٢$$

والآن يمكنك كتابة قَ (س) لكل س ∋ ح على النحو الآتي:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} - ٢ \text{ ، } \text{س} > ٢ \\ ٢\text{س} + ٦ \text{ ، } \text{س} < ٢ \\ ١٠ \text{ ، } \text{س} = ٢ \end{cases}$$

مثال (٥)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + |\text{س} + ١|$ ، فجد قَ (س)

الحل

أعد كتابة |س + ١| دون استخدام رمز القيمة المطلقة:

$$|\text{س} + ١| = \begin{cases} \text{س} + ١ \text{ ، } \text{س} \geq -١ \\ -\text{س} - ١ \text{ ، } \text{س} < -١ \end{cases}$$

$$\text{وعليه، فإن ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} + ١ \text{ ، } \text{س} \geq -١ \\ \text{س}^{٢} - \text{س} - ١ \text{ ، } \text{س} < -١ \end{cases}$$

لاحظ أن ق(س) متصل عند س = −١

ولإيجاد قَ (س) اتبع الخطوات الآتية:

١١٧

١) جد قَ (−١) باستخدام التعريف على النحو الآتي:

$$\text{قَ}_{-}(-١) = \lim_{\text{س} \to -١^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(-١)}{\text{س} + ١} = \lim_{\text{س} \to -١^{-}} \frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -١^{-}} \frac{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ١)}$$

$$= -١ - ٢ = -٣$$

$$\text{قَ}_{+}(-١) = \lim_{\text{س} \to -١^{+}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(-١)}{\text{س} + ١} = \lim_{\text{س} \to -١^{+}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{\text{س} + ١}$$

$$= \lim_{\text{س} \to -١^{+}} \frac{\text{س}(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)} = -١$$

وبما أن $\text{قَ}_{+}(-١) \neq \text{قَ}_{-}(-١)$ ، إذن قَ (−١) غير موجودة

٢) جد قَ (س) ، عندما س ≠ −١ على النحو الآتي:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ \text{ ، } \text{س} > -١ \\ ٢\text{س} - ١ \text{ ، } \text{س} < -١ \end{cases} \text{ ، س} \neq -١$$

والآن يمكنك كتابة قَ(س) لكل س ∋ ح على النحو الآتي:

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} + ١ \text{ ، } \text{س} > -١ \\ ٢\text{س} - ١ \text{ ، } \text{س} < -١ \\ \text{غير موجودة ، } \text{س} = -١ \end{cases}$$

تدريب (٤)

$$\text{إذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢}{\text{س}} \text{ ، } \text{س} \geq ١ \\ \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \text{ ، } \text{س} < ١ \end{cases} \text{ ، فجد قَ (س)}$$

١١٨

لتجنب ذلك أكد على الصيغة الصحيحة لمشتقة قسمة اقترانين مع مزيد من التدريبات.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ل (٢) = −١، لَ (٢) = ٤، هـ (٢) = ١، هـَ (٢) = −٥، جد قَ (٢) في كل مما يأتي:

أ) ق (س) = ل (س) × هـ (س) ب) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{ل}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$.

إثراء

١) إذا كانت العلاقة $\frac{١}{\text{ع}} = \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{ص}}$ تربط بين البعد البؤري (ع) لعدسة محدبة. س ، ص تمثلان بعد جسم موضوع أمام العدسة ، وبعد الصورة المتكونة له عن مركز العدسة على الترتيب .إذا كانت ع = ٢، جد :

أ) صيغة عامة لإيجاد معدل تغير ص بالنسبة إلى س.

ب) معدل تغير ص بالنسبة إلى س عندما تكون س= ١٢ سم.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : مراجعة الذات.

– **الأداة** : يوميات الطالب .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف قاعدة اشتقاق حاصل ضرب اقترانين .
- يتعرّف قاعدة اشتقاق حاصل قسمة اقترانين.
- يجد مشتقة حاصل ضرب (قسمة) اقترانين.
- يجد مشتقة اقترانات متشعبة.

المفاهيم والمصطلحات

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مراجعة الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات الواردة في الوحدة.
- مناقشة السؤالين السادس، والسابع.

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات من (٤ – ٦) طلاب في كل مجموعة وتكليفها حل الأسئلة.
- متابعة حلول الطلبة ورصد الملاحظات.
- تقديم المساعدة للمجموعات التي تواجه صعوبات.
- مناقشة الصعوبات التي واجهت الطلبة في أثناء الحل والأخطاء الشائعة التي وقعوا بها لتجنبها في مواقف لاحقة.

تمارين ومسائل

١) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) $\text{ص} = \text{س}^{٢}(١ - \text{س}^{٣})$ ب) $\text{ص} = ٨\,\text{س}^{-٣}$

جـ) $\text{ص} = (٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١)(٦\text{س} - ٥)$ د) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{١ - \text{س}}$

هـ) $\text{ص} = \frac{٤\text{س} - ٥}{٣\text{س} + ٢}$

٢) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) $\text{ص} = \text{س}(\text{س}^{٢} + ٢)(١ - ٢\text{س}^{٢})$

ب) $\text{ص} = |\text{س} - ١|(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١)$

جـ) $\text{ص} = \frac{٨ - \text{س} + ٣\text{س}^{٢}}{٢ - ٩\text{س}}$

د) $\text{ص} = \frac{|\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣|}{\text{س}(\text{س} - ١)}$ ، س ∈ (١ ، ٤]

٣) إذا كان ل(س) قابلاً للاشتقاق وكان ل(٣) = −٢ ، لَ(٣) = ٤ جد قَ(٣) في كل مما يأتي:

أ) $\text{ق(س)} = ٣\text{س}^{٢} - ٥\,\text{ل(س)}$ ب) $\text{ق(س)} = \frac{٢\text{س} + ١}{\text{ل(س)}}$

جـ) $\text{ق(س)} = \frac{٦}{\text{ل(س)}}$ د) $\text{ق(س)} = \text{س}^{٢}\,\text{ل(س)}$

٤) إذا كان ل(س) ، هـ(س) قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٣) = −١ ، ل(−٣) = ١٠ ، هـَ(−٣) = ٢ ، هـ(−٣) = −٣ ، جد قَ(−٣) في كل مما يأتي:

أ) $\text{ق(س)} = ٢\,\text{ل(س)} \times \text{هـ(س)}$

ب) $\text{ق(س)} = \frac{\text{ل(س)}}{٤ + \text{هـ(س)}}$

١١٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٥) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية عند النقط المبينة إزاء كل منها:

أ) ق (س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س}}$ − [٢س] ، س = ١,٢

ب) ق (س) = $\frac{\text{١ − ٣ س}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ − ٢}}$ ، س = ٣

جـ) ق (س) = | ١ − س$^{\text{٢}}$ | ، س = −٢

٦) إذا كانت ل، م، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س، استخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أن:

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ل (س) م (س) هـ (س)) =

ل (س) م (س) هـَ (س) + ل (س) هـ (س) مَ (س) + م (س) هـ (س) لَ (س)

٧) إذا كان م (س) = ق (س) = هـ (س) اعتمد على السؤال (٦) لإثبات أن:

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ل(س))$^{\text{٣}}$ = ٣ (ل(س))$^{\text{٢}}$. لَ (س).

٨) إذا كان ق (س) = { ٣ س$^{\text{٢}}$ ، س ≤ ١ ؛ ٢ س$^{\text{٣}}$ + ١ ، س > ١

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١، ثم اكتب قاعدة قَ (س).

٩) إذا كان ق (س) = (س$^{\text{٢}}$ + ٣ س) |س|، فجد قَ (س).

١٠) إذا كان ق (س) = { ٣ س$^{\text{٢}}$ ، س ≤ ١ ؛ أ س + ب ، س > ١

قابلاً للاشتقاق عند س = ١. فجد كلًّا من أ، ب.

١٢٠

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني بملاحظة حلولهم، والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة .
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع النهايات والاتصال .
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة في أثناء مناقشة حل التمارين على توجيه أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة، وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية** : الملاحظة .
- **الأداة** : قائمة الشطب (٢−١)، بند (٥) .
- **الاستراتيجية** : مراجعة الذات .
- **الأداة** : سلّم التقدير(٢−٢)، بند (٥).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٦ المشتقات العليا

النتاجات الخاصة

– يجد المشتقات العليا لاقترانات معطاةَ حتى المشتقة الرابعة.
– يستخدم الرموز المناسبة للدلالة على المشتقات العليا.

المفاهيم والمصطلحات

المشتقة، المشتقات العليا، رموز المشتقات العليا لاقتران.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بمفهوم مشتقة اقتران وشروط قابلية الاقتران للاشتقاق.
– استدراج الطلبة لاستيعاب مفهوم المشتقات العليا لاقتران حتى الدرجة الرابعة مركّزًا على شرط قابلية الاشتقاق في كل مرحلة.
– كتابة الرموز المستخدمة للمشتقات العليا لاقتران حتى الدرجة الرابعة مع التركيز على شرط قابلية الاشتقاق في كل مرحلة.
– كتابة الرموز المستخدمة للمشتقات العليا لاقتران وتدوينها على السبورة.
– عرض أمثلة على حساب المشتقات العليا لاقتران موضّحًا شروط الاشتقاق في كل مرحلة.
– تكليف الطلبة حل تدريب (١) ومساعدة الطلبة على إيجاد قيمة المشتقات العليا عند نقطة.
– تكليف الطلبة حل تمرين (١) من خلال العمل في مجموعات مع التركيز على خصائص بعض الاقترانات كما في اقتران القيمة المطلقة (سؤال (١) فرع (ج)).
– تكليف الطلبة حل تمارين (٢، ٣، ٤، ٥)، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

معلومات إضافية للمعلم

– بيّن للطلبة من خلال الأمثلة أن:
(ق . هـ)ً (س) ≠ ق (س) هـً (س) + هـ (س) . قً (س) بشكل عام. (ذكّر الطلبة بذلك).

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢-٦ المشتقات العليا
Derivatives of Higher Order

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الرابعة.

درست أنه إذا كان ص = ق (س) اقترانًا قابلاً للاشتقاق، فإنه توجد له مشتقة بالنسبة إلى س يُرمز لها بأحد الرموز: صَ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ق (س)) ، قَ (س) وتُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق بالنسبة إلى س.

لاحظ أن قَ (س) اقتران في س يمكن أن يكون قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى س، وإن كان كذلك، فإن مشتقته تُسمى المشتقة الثانية للاقتران ق ، ويرمز لها بأحد الرموز: صً ، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ ، $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (قَ (س))، قً(س) ، وإذا كانت قً(س) قابلة للاشتقاق في س ، فإن مشتقتها تُسمى المشتقة الثالثة للاقتران ق بالنسبة إلى س ويُرمز لها بأحد الرموز:
صًّ ، $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}}$ ، $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (قً(س))، قًّ (س).

وهكذا يمكنك الاستمرار في عملية الاشتقاق للاقترانات الناتجة كلما أمكن ذلك فتحصل على المشتقة الرابعة والخامسة، وتسمى مثل هذه المشتقات بالمشتقات العليا، لاحظ كما في التسلسل السابق أنه لإيجاد المشتقة الثالثة مثلاً، نجد المشتقة الأولى ثم الثانية وأخيرًا الثالثة على الترتيب.

إن استخدام الإشارات (ًّ) للتعبير عن المشتقة الرابعة غير عملي، لذلك تُستخدم الأعداد الصحيحة الموجبة بين أقواس للدلالة على هذه المشتقة، فمثلاً $\text{ص}^{(٤)}$ أو $\text{ق}^{(٤)}$(س) تعني المشتقة الرابعة للاقتران ق بالنسبة إلى س.

١٢١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد المشتقات العليا لاقتران ما وذلك بإغفال الفحص المتتالي لقابلية الاشتقاق سواء للاقتران الأصلي أو للمشتقات المتعاقبة،كلّف الطلبة بذلك، وذكّرهم حيثما يلزم.

مثال (١)

إذا كان ق (س) = ٣ $س^{٤}$ − ٥ $س^{٣}$ + $س^{٢}$ − ٤ س + ٦، فجد $ق^{(٤)}$ (س)

الحل

قَ (س) = ١٢ $س^{٣}$ − ١٥ $س^{٢}$ + ٢ س − ٤
قً(س) = ٣٦ $س^{٢}$ − ٣٠ س + ٢
ق‴(س) = ٧٢ س − ٣٠
$ق^{(٤)}$ (س) = ٧٢

تدريب (١)

جد المشتقة الثانية للاقتران ق (س) = ٧ $س^{٣}$ − ٥ $س^{٢}$ + س ، ثم جد قً (−٢).

مثال (٢)

إذا كان ق (س) = $س^{ن}$ ، وكان $ق^{(٣)}$(س) = ٦٠ $س^{ن-٣}$ فجد قيمة ن.

الحل

جد $ق^{(٣)}$ (س) وقارنها بـ ٦٠ $س^{ن-٣}$
قَ (س) = ن $س^{ن-١}$
قً(س) = ن (ن − ١) $س^{ن-٢}$
ق‴(س) = ن (ن − ١) (ن − ٢) $س^{ن-٣}$ = ٦٠ $س^{ن-٣}$
ومنه ن (ن − ١) (ن − ٢) = ٦٠
ابحث عن ثلاثة أعداد متتالية يكون حاصل ضربها ٦٠
الأعداد هي ٥،٤،٣ وعليه، فإن ن = ٥

تدريب (٢)

إذا كانت ق (س) = ٣ $س^{ن}$ وكان $ق^{(٤)}$ (س) = أ $س^{٣}$ ، فجد قيمة أ.

١٢٢

تمارين ومسائل

١) جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات الآتية:
أ) ص = ٧ $س^{٣}$ − $\frac{٣}{٢}$ $س^{٢}$ + س
ب) ص = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$
جـ) ص = ($س^{٢}$ + ٣ س) |س|

٢) إذا كان ق (س) = (٣ $س^{٢}$ + ٢) ($س^{٢}$ − ٢ س + ١)، فأثبت أن:
قَ (١) × قً(١) = ٢١٠.

٣) إذا كان ق (س) = $\frac{٢}{س}$ ، فأثبت أن قَ (١) = − ٤ قً(٢)

٤) جد المشتقة الثالثة لكل من الاقترانات الآتية:
أ) ص = $س^{٥}$ + $س^{-٢}$
ب) ص = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ حيث أ، ب، جـ ثوابت

٥) جد قيمة ما يأتي:
أ) ق‴ (٢) حيث ق (س) = ٣ $س^{٤}$ − ٢
ب) ق‴ (١) حيث ق (س) = ٦ $س^{٣}$ − ٤ $س^{٢}$
جـ) $ق^{(٤)}$ (١) حيث ق (س) = $\frac{١}{س^{٢}}$

٦) إذا كان كل من ل، لَ، لً قابلا للاشتقاق عند س ، وكان ق (س) = س ل (س)،
فجد قً(س)، ق‴ (س).

١٢٣

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق (س) = $س^{٣}$ − ٤س + ٥، جد قَ (١)، قً (−١).

٢) إذا كان ق (س) = | س | ، فجد قَ (س)، لكل س ∈ ح.

٣) إذا كان ق (س) = [٢س]، فجد قَ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$، قَ $\left(\frac{١}{٢}\right)$.

إثراء

− جد اقتران كثير حدود من الدرجة الثالثة حيث ق (−١) = ٠، قَ (−١) = ٣، قً (−١) = −٢، ق‴ (−١) = ٦.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− الاستراتيجية : الملاحظة .
− الأداة : قائمة الشطب (٢−١)، بند (٦) .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٧ مشتقة الاقترانات الدائرية

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مشتقات الاقترانات الدائرية.
- يجد مشتقات الاقترانات الدائرية.

المفاهيم والمصطلحات

الاقترانات الدائرية، مشتقة الاقتران الدائري، رموز الاقترانات الدائرية.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بصيغ إيجاد مشتقة اقتران وتحديد الصيغة المطروحة في كتاب الطالب لاستخدامها في إيجاد مشتقة الاقترانات الدائرية.
- تذكير الطلبة بالمتطلبات السابقة، مثل $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$، وبعض المتطابقات الدائرية الضرورية.
- مناقشة الطلبة في إيجاد مشتقة ق (س) = جاس، س ∋ح.
- عرض مثال تطبيقي على ذلك من خلال توظيف قواعد الاشتقاق.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) مع التركيز على إيجاد مشتقة اقتران دائري عند قيمة محددة لِـ س.

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات عمل تعاوني، وتشجيعهم على إيجاد مشتقة ق (س) = جتا س، س∋ح وبرهنتها، مع عرض أمثلة عليها.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٢) كتطبيق على قواعد اشتقاق الاقترانات الدائرية ومناقشة مشتقة ظا س من خلال مثال (٥).
- تكليف الطلبة استخدام مشتقات جاس، جتاس في إيجاد مشتقات، قاس، قتاس، ظتاس كواجب بيتي، بالإضافة إلى حل التمارين (١) (أ، ب، جـ، د، هـ)، (٢)، (٣).

معلومات إضافية للمعلم

- ذكر الطلبة عند اشتقاق الاقترانات الدائرية بأن المتغير (س) يكون بالتقدير الدائري، ويمكن إيجاد مشتقة جا س° (س°: بالتقدير الستيني أو الدرجات) حين التعرف إلى قاعدة السلسلة في الدرس اللاحق.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢-٧ مشتقة الاقترانات الدائرية
Derivative of Trigonometric Functions

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تتعرف مشتقات الاقترانات الدائرية.
٢- تجد مشتقات الاقترانات الدائرية.

أولاً

تعرفت سابقاً أن المشتقة الأولى للاقتران ق عند النقطة س هي:

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$. سوف تستخدم هذا التعريف

والنظرية $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = 1$ لإثبات القاعدتين الآتيتين:

قاعدة (١)

إذا كان ق (س) = جا س ، س ∋ ح ، فإن قَ (س) = جتا س

البرهان

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جا ع} - \text{جا س}}{\text{ع} - \text{س}}$

تذكر

$\text{جا ع} - \text{جا س} = 2 \text{ جتا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \text{ جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$

$\text{جتا ع} - \text{جتا س} = -2 \text{ جا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \text{ جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{2 \text{ جتا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \text{ جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\text{ع}-\text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جتا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \times \text{جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}$

افرض أن $\text{ص} = \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$ فيكون $\frac{\text{ع}+\text{س}}{2} = \text{س} + \text{ص}$ ، عندما ع ← س، فإن ص ← ٠

١٢٤

قاعدة (٢)

إذا كان ق (س) = جتا س ، س∋ح ، فإن قَ (س) = − جا س.

البرهان

$\text{ق}'(\text{س}) = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{\text{جتا ع} - \text{جتا س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \frac{-2 \text{ جا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \text{ جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{2 \times \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}} = (-1) \lim_{\text{ع} \to \text{س}} \text{جا} \frac{\text{ع}+\text{س}}{2} \times \frac{\text{جا} \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}{\frac{\text{ع}-\text{س}}{2}}$

افرض أن $\text{ص} = \frac{\text{ع}-\text{س}}{2}$، فيكون $\frac{\text{ع}+\text{س}}{2} = \text{س} + \text{ص}$

عندما ع ← س فان ص ← ٠ .

$\text{ق}'(\text{س}) = (-1) \lim_{\text{ص} \to 0} \left(\text{جا}(\text{س}+\text{ص}) \times \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} \right)$

$= (-1) \lim_{\text{ص} \to 0} \text{جا}(\text{س}+\text{ص}) \times \lim_{\text{ص} \to 0} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = -\text{جا س} \times 1$

إذن قَ (س) = − جا س

مثال (٣)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{جتا س}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠، فجد $\text{ق}'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

الحل

بتطبيق قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين تجد أن:

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س} \times \frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{جتا س}) - \text{جتا س} \times \frac{\text{د}}{\text{د س}}(\text{س})}{\text{س}^2} = \frac{\text{س} \times -\text{جا س} - \text{جتا س} \times 1}{\text{س}^2}$

$\text{ق}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{\pi}{2} \text{ جا} \frac{\pi}{2} - \text{جتا} \frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{2}{\pi}$

١٢٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

$$\text{قَ (س)} = \lim_{\text{ص}\to 0}\left(\text{جتا (س + ص)} \times \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}\right)$$

$$= \lim_{\text{ص}\to 0}\text{جتا (س + ص)} \times \lim_{\text{ص}\to 0}\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$$

$$= \text{جتا (س + ٠)} \times ١$$

$$= \text{جتا س} \times ١ = \text{جتا س}$$

مثال (١)

إذا كان ص = ٢ س − جا س ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ − جتا س

مثال (٢)

إذا كان ق (س) = س + ٣ جا س، فجد قَ $(\frac{\pi}{٣})$.

الحل

قَ (س) = ١ + ٣ جتا س

قَ $(\frac{\pi}{٣})$ = ١ + ٣ جتا $(\frac{\pi}{٣})$ = ١ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{٢}$

تدريب (١)

إذا كان ل (س) = ٦ جا س − ٢ س ، فجد لَ (π).

١٢٥

مثال (٤)

إذا كان ق (س) = أ جا س + ب جتا س ، أ، ب ∈ ح ، فأثبت أن قً(س) + ق (س) = صفرًا.

الحل

قَ (س) = أ جتا س − ب جا س

قً(س) = − أ جا س − ب جتا س = − (أجا س + ب جتا س)

أي أن قً(س) = − ق (س)

قً(س) + ق (س) = − ق (س) + ق (س) = صفرًا.

تدريب (٢)

إذا كان ق (س) = س جتا س ، فجد قَ (س).

ثانيًا

يمكنك استخدام القاعدتين (١) ، (٢) في إيجاد مشتقات الاقترانات الدائرية:
ظا س، ظتا س، قا س، قتا س.

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = ظا س ، فأثبت أن قَ (س) = قا^{٢}س

البرهان

يمكن التعبير عن الاقتران ق(س) بالصورة ق (س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ، وبتطبيق قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين ينتج أن:

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{جتا س} \times \text{جتا س} - \text{جا س} \times - \text{جا س}}{\text{جتا}^٢\text{ س}} = \frac{\text{جتا}^٢\text{ س} + \text{جا}^٢\text{ س}}{\text{جتا}^٢\text{ س}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{ س}} = \text{قا}^٢\text{ س}$$

١٢٧

الأخطاء الشائعة

– قد يخلط الطلبة في إشارة مشتقة كل من المجموعة:
جاس، ظاس، قاس، والمجموعة:
جتاس، ظتاس، قتاس، ذكّر الطلبة أن إشارة مشتقات المجموعة الأولى موجبة والمجموعة الثانية سالبة.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق (س) = جا (− س)، هـ (س) = جتا (− س)، فجد قَ (س)، هـَ (س).

٢) إذا كان ق(س) = س ظتا س، فجد قَ $\left(\frac{\pi}{٤}\right)$.

إثراء

١) إذا كان ق (س) = جا^{٢}س، فجد قَ(س) مستخدمًا مشتقة حاصل ضرب اقترانين.

٢) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{جا س} ، & ٠ \le \text{س} \le \frac{٢\pi}{٣} \\ \text{أس + ب} ، & \frac{٢\pi}{٣} \le \text{س} < ٢\pi \end{cases}$

قابلاً للاشتقاق عند س= $\frac{٢\pi}{٣}$ ، فجد قيم أ، ب.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : الملاحظة .
– **الأداة** : قائمة الشطب (٢–٤) لتقويم فاعلية المجموعات.
– **الاستراتيجية** : مراجعة الذات .
– **الأداة**: يوميات الطالب، لاحظ مدى إتقان الطلبة للمتطلبات السابقة، وشجعهم على تدوين أهم ما تعلموه في الدرس، وكيف تمَّ الربط بين خصائص الاقترانات الدائرية ومفهوم المشتقة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– دراسة مشتقات الاقترانات الدائرية هو إثراء لخصائص الاقترانات الدائرية، حيث ورد هذا الموضوع في وحدة المثلثات، الصف الأول الثانوي.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٧ مشتقة الاقترانات الدائرية

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مشتقات الاقترانات الدائرية.
- يجد مشتقات الاقترانات الدائرية.

المفاهيم والمصطلحات

اقتران دائري، مشتقة الاقتران الدائري.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر.

- تذكير الطلبة بقواعد اشتقاق: جاس، جتاس، ظاس.
- الاطلاع على براهين الطلبة لاشتقاق: قاس، قتاس، ظتاس، واعرض مزيدًا من الأمثلة.
- تكليف الطلبة حل التدريب (٤).
- الاطلاع على حلول الطلبة للواجب البيتي ومناقشتهم في الصعوبات التي واجهوها.

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- قسم الطلبة إلى مجموعات وكلفهم حل بقية التمارين والتي يتضمن حلها مشتقات (ظاس، قاس، قتاس،....).
- ملاحظة أداء المجموعات وتقديم المساعدة لهم حيثما لزمت.

معلومات إضافية

تدريب (٣)

استخدم الأسلوب المستخدم في مثال (٥) لإثبات قواعد اشتقاق الاقترانات:
ظتا س ، قتا س ، قا س كما هو مبين في الجدول الآتي:

الاقتران: ق (س)	المشتقة: قَ (س)
قا س	قا س ظا س
قتا س	– قتا س ظتا س
ظتا س	– قتا^{٢}س

مثال (٦)

إذا كان ق (س) = س^{٢} قتا س ، فجد قَ (س).

الحل

بتطبيق قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين تجد:

قَ (س) = س^{٢} (قتا س)َ + (قتا س) (س^{٢})َ

= (س^{٢}) (– قتا س ظتا س) + قتا س × ٢ س

= ٢ س قتا س – س^{٢} قتا س ظتا س

تدريب (٤)

إذا كان ق (س) = $\frac{\text{ظا س + س}}{\text{جا س}}$ ، فجد قَ ($\frac{\pi}{٣}$).

١٢٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

– مساعدة الطلبة على فهم المسائل والتمارين، واستحضار قواعد الاشتقاق الضرورية لحلّها.

– حصر الصعوبات التي تواجه الطلبة في حل التمارين، وتقديم المساعدة الفورية أو إرجاع الطلبة إلى القواعد والتعميمات الضرورية لحلّها.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : القلم والورقة.

– **الأداة** : اختبار بسيط يتضمن المهارات الأساسية.

– الاستراتيجية : الملاحظة.

– الأداة : قائمة شطب (٢–٤) لتقويم أداء الطلبة في المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) جد $\frac{دص}{دس}$ لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ص = ٢ جتاس − ٣ جاس ب) ص = $\frac{جاس}{س}$

جـ) ص = ظاس − $\sqrt{٢}$ س د) ص = س٢ جتاس

هـ) ص = $\frac{قتا ٣س}{س^٢ + ١}$ و) ص = جاس + جتا٢س

ز) ص = س − ٤ قتاس + ٢ ظتاس

٢) جد قَ(س) لكل من الاقترانات الآتية عند النقطة المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = جتاس جاس، س = $\frac{\pi}{٤}$ ب) ق(س) = جا(−س)، س = $\frac{٣\pi}{٢}$

جـ) ق(س) = $\frac{جاس}{١ + جتاس}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$ د) ق(س) = س جتاس ، س = π

٣) أثبت أن ص = جتاس، ص = جاس حلولاً للمعادلة صً + ص = صفراً

٤) جد قيم س في الفترة [−٢π ، ٢π] التي تحقق المعادلة قَ(س) = صفراً لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = س + جتاس ب) ق(س) = قاس

٥) إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس ، حيث أ، ب ثوابت ، فأثبت أن:

(صَ)٢ + ص٢ = أ٢ + ب٢

٦) جد $\frac{د^٢ص}{دس^٢}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = قاس

ب) ص = س جاس − ٣ جتاس

جـ) ص = $\frac{جتاس − ١}{جتاس + ١}$

١٢٩

الأخطاء الشائعة

الدرس ٢-٨ قاعدة السلسلة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مشتقة تركيب اقترانين.
- يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.

المفاهيم والمصطلحات

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- الانطلاق من قواعد الاشتقاق ليكتشف الطلبة أهميتها في إيجاد مشتقة، مثل : $(\text{س} + ١)^{٩}$.
- تذكير الطلبة بتركيب اقترانين وشرط قابلية التركيب.
- التوضيح للطلبة مبدأ السلسلة في إيجاد مشتقة تركيب اقترانين والشروط اللازمة.
- مناقشة مثال (١) وتوضيح أهمية قاعدة السلسلة في إيجاد مشتقة لاقترانات تتضمن اقترانات دائرية مركبة، التي تتضمن أقواسًا، كما في مثالي (٢، ٣). وتكليفهم حل تدريب (١).

الاستراتيجية : **التعلم التعاوني**

- تقسيم الطلبة مجموعات عمل لبرهنة النتيجة واكتشاف أهميتها وتوظيفها، ثم عرض أمثلة تطبيقية عليها (مثال ٥).
- اعطِ واجبًا بيتيًّا تمارين (١، ٢، ٣).

معلومات إضافية للمعلم والطالب

- عندما تستخدم التقدير الستيني في الاقترانات الدائرية فإن مشتقة الاقتران الدائري حاس تتضمن المعامل $\frac{\pi}{١٨٠}$ ؛ لأن س° (س بالدرجات) تساوي $\frac{\pi\,\text{س}}{١٨٠}$ بالتقدير الدائري فيكون $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{جاس}^\circ) = \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{جا}\left(\frac{\pi\,\text{س}}{١٨٠}\right)\right)$

$$= \frac{\pi}{١٨٠}\ \text{جتا}\ \frac{\pi\,\text{س}}{١٨٠} = \frac{\pi}{١٨٠}\ \text{جتاس}^\circ.$$

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢-٨ قاعدة السلسلة
The Chain Rule

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تتعرف قاعدة مشتقة تركيب اقترانين.
٢- تستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.

أولاً

تعرفت سابقًا بعض قواعد الاشتقاق التي يقتصر استخدامها على إيجاد مشتقة حاصل ضرب، جمع، طرح، قسمة اقترانين، لكن لا يوجد بين هذه القواعد ما يمكنك من حساب مشتقة $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ١)^{٢}$ بصورة مباشرة.

يمكنك حساب $\text{ق}'(\text{س})$ بكتابة ق (س) على الصورة $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢}+١)(\text{س}^{٢}+١)$ وتطبيق قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين، أو تربيع المقدار $(\text{س}^{٢}+١)$ ليصبح $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} + ٢\,\text{س}^{٢} + ١$ ومن ثم إيجاد $\text{ق}'(\text{س})$.

لاحظ أن الاشتقاق بهاتين الطريقتين يزداد تعقيدًا كلما كبر الأس، مثل $(\text{س}^{٢} + ١)^{٧}$، لذا لا بد من إيجاد طريقة أبسط وأسرع لإيجاد مشتقة مثل هذه الاقترانات. وهذا ما توفره قاعدة السلسلة التي تعتمد على فكرة تركيب اقترانين.

قاعدة

قاعدة السلسلة

إذا كان كل من الاقترانين ق، هـ قابلين للتركيب، وكان الاقتران هـ (س) قابلاً للاشتقاق عند س، وكان الاقتران ق قابلاً للاشتقاق عند النقطة هـ(س)، فإن الاقتران المركب (ق ० هـ) يكون قابلاً للاشتقاق عند س ويكون:

$(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$

تذكر

تركيب اقترانين

إذا كان ق،هـ اقترانين حيث ص = ق (ع) ، ع = هـ (س)، وكان مدى هـ $\cap$ مجال ق $\neq \emptyset$، فإنه يمكن كتابة ص على الصورة:

ص = ق(ع) = ق(هـ(س))

أو ص = (ق ० هـ) (س)

١٣٠

مثال (٢)

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}$، $\text{هـ}(\text{س}) = ٤\text{س} + ١$ فجد $(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س})$

الحل

$(\text{ق} \circ \text{هـ})'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{هـ}(\text{س})) \times \text{هـ}'(\text{س})$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = ٤$

$= \text{ق}'(٤\text{س}+١) \times ٤$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

$= ٢(٤\text{س}+١) \times ٤ = ٣٢\text{س} + ٨$

مثال (٣)

إذا كان $\text{هـ}(\text{س}) = ٤\ \text{جتا}\ \text{س}^{٣}$، فجد $\text{هـ}'(\text{س})$.

الحل

ابحث عن اقترانين مثل ق، ل بحيث أن هـ = ل ० ق،

لاحظ أنه إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$، $\text{ل}(\text{ع}) = ٤\ \text{جتاع}$ فيكون:

$(\text{ل} \circ \text{ق})(\text{س}) = \text{ل}(\text{ق}(\text{س})) = \text{ل}(\text{س}^{٣}) = ٤\ \text{جتا}\ \text{س}^{٣} = \text{هـ}(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣\,\text{س}^{٢}$، $\text{ل}'(\text{ع}) = -٤\ \text{جاع}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \text{ل}'(\text{ق}(\text{س}))\ \text{ق}'(\text{س})$

$= (-٤\ \text{جا}\ \text{س}^{٣})(٣\,\text{س}^{٢}) = -١٢\,\text{س}^{٢}\ \text{جا}\ \text{س}^{٣}$

مثال (٤)

إذا كان $\text{ص} = (\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)^{٢٠}$، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل

افرض $\text{ع} = \text{س}^{٢} - \text{س} + ١$ فيكون $\text{ص} = \text{ع}^{٢٠}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٢٠\,\text{ع}^{١٩} \times (٢\,\text{س} - ١)$

$= ٢٠\,(\text{س}^{٢} - \text{س} + ١)^{١٩}\,(٢\,\text{س} - ١)$

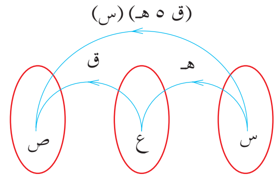
١٣٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

في الشكل المجاور تجد أن:

ص = ق (ع) .... (١)

ع = هـ (س) .... (٢)



أي أن ص = ق (هـ (س)) = (ق ٥ هـ) (س)

ولإيجاد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، فإن المسألة تتحول إلى مشتقة تركيب اقترانين أي أن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = (ق ٥ هـ)َ (س) = قَ (هـ (س)) × هـَ (س) (حسب قاعدة السلسلة)

= قَ (ع). هـَ (س)......... (٣) (لأن ع = هـ (س))

لاحظ أن قَ (ع) = $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ من العلاقة (١)

هـَ (س) = $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ من العلاقة (٢)

وبالتعويض في العلاقة (٣) ينتج أن:

$\boxed{\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}}$ وهذه صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

مثال (١)

إذا كانت ص = (س^{٢} + ١)^{٧}، استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل

يمكنك كتابة ص على صورة اقتران مركب متغيره (س) بفرض ع = س^{٢} + ١، فيكون ص = ع^{٧}

وباستخدام قاعدة السلسلة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ تجد أن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٧ع^{٦} × (٢س) وبالتعويض عن ع بدلالة س تجد أن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٧ (س^{٢}+١)^{٦} (٢ س) = ١٤ س (س^{٢}+١)^{٦}

١٣١

تدريب (١)

١) إذا كان ص = (س^{٣} − ٢س)^{٤} فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

٢) إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٥، هـ (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ ، فجد (ق ٥ هـ)َ (س).

ثانيًا

من الاستخدامات المهمة لقاعدة السلسلة إيجاد قواعد تمكنك من اشتقاق اقترانات مرفوعة لقوة مثل: ص = (هـ (س))^{ن} ، ص = جا^{ن} س، واقترانات أخرى مثل ص = جا (هـ (س)) ...... إلخ

نتيجة

إذا كان هـ (س) قابلًا للاشتقاق عند س، وكان ص = (هـ (س))^{ن}، حيث ن عدد صحيح، فإن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن (هـ (س))$^{ن-١}$. هـَ (س)

البرهان

افرض أن ع = هـ (س) ، ومنه $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = هـَ (س)

فيكون ص = ع^{ن}، ومنه $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ = ن ع$^{ن-١}$ = ن (هـ (س))$^{ن-١}$

وباستخدام قاعدة السلسلة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ ينتج أن :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن (هـ (س))$^{ن-١}$ × هـَ (س)

مثال (٥)

إذا كان ص = (ظا س + قا س)^{ن}، ن عدد صحيح موجب، بيّن أن: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن ص قا س.

١٣٣

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ الطلبة في تركيب الاقترانات، راجع معهم هذا المفهوم والشروط الواجب توفرها لذلك.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق (س) = (س^{٢} − ٣س + ٥)^{٩٩}، فجد قَ (س).

٢) إذا كان ق (س) = ٦ جاس^{٣} ، فجد قَ (س).

إثراء

١) إذا كان قَ (س) = جاس^{٢}، ص = ق ($\frac{\text{٢س} - ١}{\text{س} + ١}$)، فجد صَ.

٢) إذا كان ق (س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ، ع (س) = أس^{٣} وكان (ع٥ ق)َ (٣) = ١٢،

فما قيمة أ؟

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية : الملاحظة .

– الأداة : قائمة الشطب (٢–٢)، بند (٨).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٨ قاعدة السلسلة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مشتقة تركيب اقترانين.
- يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.

المفاهيم والمصطلحات

تركيب اقترانين، مشتقة تركيب اقترانين، قاعدة السلسلة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بقاعدة السلسلة، وأهم الصيغ العامة لهذه القاعدة، وحالات استخدامها لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين.
- مناقشة المزيد من الأمثلة المتنوعة مع الطلبة على استخدام قاعدة السلسلة لإيجاد المشتقة.
- مناقشة المثالين (٦، ٧) بتركيز أكبر لأهمية تحويل صورة الاقتران المعطى إلى الصورة المألوفة عند الطلبة لقاعدة السلسلة.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٢) الذي يتضمن حالات متنوعة على استخدام قاعدة السلسلة.
- الاطلاع على حلول الطلبة للواجب البيتي وتقديم التغذية الراجعة المناسبة لهم عن حلولهم مع تذكيرهم بأهمية ما تتميز به كل فقرة، وما تتضمنه من أفكار، ثم عرض المزيد من الأمثلة والتدريبات على ذلك.
- تكليف الطلبة حل تمارين (٤، ٦، ٧) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الحل

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن (ظا س + قا س)}^{\text{ن}-١} \text{ (قا}^٢\text{س + قا س ظا س)}$

$= \text{ن (ظا س + قا س)}^{\text{ن}-١} \times \text{قا س (قا س + ظا س)}$

$= \text{ن (ظا س + قا س)}^{\text{ن}} \text{ قا س، ومنه } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن ص قا س.}$

مثال (٦)

إذا كان ص = قتا^٣ س، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل

$\text{ص = قتا}^٣\text{س = (قتا س)}^٣$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣ \text{ (قتا س)}^٢ \times \text{(قتا س)}'$ (باستخدام النتيجة السابقة)

$= ٣ \text{ قتا}^٢\text{س} \times - \text{قتا س ظتا س}$

$= - ٣ \text{ قتا}^٣\text{س ظتا س}$

مثال (٧)

إذا كان ص = ظا (س^٢ + ١) ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل

افرض ع = س^٢ + ١، $\Leftarrow$ $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٢ \text{ س}$

ويكون ص = ظا ع، $\Leftarrow$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} = \text{قا}^٢\text{ع} = \text{قا}^٢\text{(س}^٢ + ١)$

وباستخدام قاعدة السلسلة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ ينتج أن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا}^٢\text{ (س}^٢ + ١) \times ٢ \text{ س} = ٢ \text{ س قا}^٢\text{ (س}^٢ + ١).$

١٣٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٨)

إذا كان هـ (س) اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ص = جتا (هـ (س))، فأثبت أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = − هـَ(س) جا (هـ (س)).

الحل

افرض ع = هـ (س) ، ومنه $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = هـَ(س)

ويكون ص = جتاع ، ومنه $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ = − جا ع = − جا (هـ (س))

وباستخدام قاعدة السلسلة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ع}} \times \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ ينتج أن:

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = − جا (هـ (س)) × هـَ(س) = − هـَ(س) جا (هـ (س))

إذا كان ع اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س، يمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إثبات صحة القواعد الآتية:

١) $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (جاع) = جتاع $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

٢) $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ظاع) = قا٢ع $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

٣) $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ظتاع) = − قتا٢ع $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

٤) $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (قاع) = قاع ظاع $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

٥) $\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (قتاع) = − قتاع ظتاع $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

تدريب (٢)

جد قَ (س) لكل مما يأتي:

١) ق (س) = جا ٢ س

٢) ق (س) = (س٣ − ٣ س٢ + ٧)٨

٣) ق (س) = جا٣ ٥ س

١٣٥

ثالثًا

ادرس المثالين الآتيين:

مثال (٩)

إذا كان ق قابلاً للاشتقاق وكان ق (٢ س) = ٣ س٢ + ٨ س، فجد قَ (٢).

الحل

لاحظ أن ق (٢ س) يشكل تركيبًا لاقترانين.

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س لتحصل على:

قَ (٢س) × ٢ = ٦ س + ٨

قَ (٢س) = ٣ س + ٤

يمكنك الحصول على قَ(٢) بوضع س = ١

إذن قَ (٢) = ٣ × ١ + ٤ = ٧

مثال (١٠)

إذا كان ص = ق (س٣ + س) وكانت قَ (−١٠) = ٧ ، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = − ٢

الحل

جد أولاً $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ ، وذلك من خلال اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ (س٣ + س) × (س٣ + س)َ

= قَ (س٣ + س) × (٣ س٢ + ١) (الطرف الأيسر للمعادلة يمثل تركيب اقترانين)

ومنه يكون $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = -٢}$ = قَ (−٨−٢) × (٣ (−٢)٢ + ١)

= قَ (−١٠) × ١٣ = ٧ × ١٣ = ٩١

تدريب (٣)

إذا كان ق (س٣) = $\frac{١}{\text{س}}$ فجد قَ (٨).

١٣٦

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) جد بدلالة قَ:

أ) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ [ق (س٢ + ١)].

ب) $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ [(ق (س))٢ + ٣)].

إثراء

١) إذا كان ص = ظاس، فبرهن أن ص(٣) = ٦ قا٤س − ٤ قا٢ س.

٢) إذا كان ص = ع٢ + ١ ، ع = ٣س + ٥، س = ٢ل + ٧، فجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د ل}}$ عند ل = ١.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية**: الملاحظة.
- **الأداة** : سلّم التقدير (٢−١)، بند (٨).
- **الاستراتيجية**: القلم والورقة.
- **الأداة** : اختبار قصير يتضمن استخدام قاعدة السلسلة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

– النتاجات التي وردت في الدرس.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم والمصطلحات التي وردت في الدرس.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل في البيت.
– مراجعة أبرز المفاهيم والنظريات التي وردت في الدرس (قاعدة السلسلة، النتيجة المرتبطة بقاعدة السلسلة، تركيب الاقترانات وشروطها).
– الاطلاع على حلول الطلبة للواجب البيتي، ومناقشتها، ثم تقديم التغذية الراجعة لهم.
– حصر الصعوبات والأخطاء التي واجهها الطلبة في أثناء حل التمارين والمسائل والعمل على معالجتها لتلافيها فيما بعد.

تمارين ومسائل

١) استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = (س^{٣} + ٢ س + ١)^{١٥} ب) ص = (٨ س − ٧)$^{-٦}$

جـ) ص = $\frac{س}{(س^{٢} - ١)^{٤}}$ د) ص = جا (س^{٢} − س)

٢) إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٣ س ، هـ (س) = س^{٣} − ٤، فجد (ق ٥ هـ)َ (٢).

٣) إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق في مجاليهما وكان ق (١٠) = − ٢ ، قَ (١٠) = ٢ ، هـَ (−٢) = $\frac{١}{٢}$ ، فجد (هـ ٥ ق)َ (١٠).

٤) إذا كان هـ (س) قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ص = جا^{ن} (هـ (س)) حيث ن عدد صحيح فأثبت أن:

$\frac{د ص}{د س}$ = ن جا$^{ن-١}$ (هـ (س)) × جتا (هـ (س)) × هـَ (س)

٥) إذا كان ل(س) = ق (هـ (س))، وكان هـ (٤) = ٤، لَ (٤) = ٢، قَ (٤) = − ٥، فجد هـَ (٤).

٦) جد $\frac{دص}{د س}$ في كل مما يأتي:

أ) ص = ظاع ، ع = ٤ س^{٣} + س
ب) ص = م^{٢} + ٣ م ، م = س^{٣} − ٤

٧) إذا كان ص = جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) ، فأثبت أن : ص + صً = ٠

٨) إذا كان ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س ، برهن أن : $\frac{دص}{د س}$ = قا^{٤}س

١٣٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- مساعدة الطلبة في فهم المسألة وتحديد الطريقة الملائمة للاشتقاق،وتحديد الشروط والتأكد من تحققها.
- مساعدة الطلبة على استخدام أسلوب التعلم التعاوني وتبادل المعلومات فيما بينهم.
- تقبّل أفكار الطلبة وحلولهم ومناقشتهم بها.
- تعزيز الحلول الصحيحة وتشجيع الطلبة الضعاف على تحقيق النجاحات.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية** : الملاحظة .
- **الأداة** : قائمة الشطب رقم (٢-٢) بند (٨).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

٩) جد $\frac{دص}{د س}$ لكن من الاقترانات الآتية عند النقطة المبينة إزاء كل منها.

أ) ص = جا^{٢}٣ س ، س = $\frac{\pi}{٦}$

ب) ص = (س − $\frac{١}{س}$)^٣ ، س = ٢

جـ) ص = س هـ (س) ، س = ٩ علمًا بأن هـَ (٩) = − ٥، هـ (٩) = −٣

١٠) جد قً(س) في كل مما يأتي:

أ) ص = جا (٣ س^٢)

ب) ص = س ظا ($\frac{١}{س}$)

١١) إذا كان ق قابلاً للاشتقاق، وكان ق (جا٢ س) = قتا٢ س ،

حيث س ∋ (٠ ، $\frac{\pi}{٣}$]، جد قَ ($\frac{١}{٢}$)

١٢) إذا كان ص = ق (س^٢ + ٢ س) ، قَ (٣) = ٥ ،

فجد $\frac{دص}{د س}$ عند س = ١

١٣٨

الأخطاء الشائعة

الدرس ٢-٩ الاشتقاق الضمني

النتاجات الخاصة

- يحسب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
- يجد المشتقات العليا لعلاقة ضمنية حتى المشتقة الرابعة.

المفاهيم والمصطلحات

العلاقة الصريحة، العلاقة الضمنية، الاشتقاق الضمني.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- عرض أمثلة تتوافق وخبرة الطلبة، وتوضح مفهوم العلاقة الصريحة أو الاقتران الصريح.
- مناقشة أمثلة لعلاقات واقترانات أخرى توضح صعوبة فصل المتغيرين تسمى بالعلاقات الضمنية.

الاستراتيجية : الاكتشاف

- تقديم مثال على علاقة صريحة ومناقشة الطلبة لإيجاد المشتقة بطريقتين: الاشتقاق المباشر، والاشتقاق الضمني، مثال (١).
- عرض أمثلة أخرى لا يمكن فصل المتغيرين فيها، ليكتشف الطلبة أنه لا يمكنهم إلا اللجوء إلى الاشتقاق الضمني، الأمثلة (١، ٢).

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تكليف الطلبة العمل في مجموعات، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
- محاورة الطلبة بالنظرية المرتبطة باشتقاق: ص $س^{\frac{م}{ن}}$، $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي والاستفادة من خصائص الاشتقاق الضمني واعرض أمثلة عليها، مثال (٤)، ثمّ حدّد بعض الأسئلة من التمارين كواجب بيتي: ١ (أ ، ج ، د ، هـ)، ٣، ٦ ، ٧.

معلومات إضافية

٢-٩ الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تحسب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
٢- تجد المشتقات العليا لعلاقات ضمنية معطاة حتى المشتقة الرابعة.

أولاً

تعلمت في الدروس السابقة إيجاد مشتقة الاقترانات المعطاة بالصورة ص = ق (س) وهي التي يطلق عليها اقترانات صريحة لأن المتغير ص ظهر وحيدًا في أحد طرفي المعادلة. وقد تصادفك علاقات أو معادلات تتضمن متغيرين يصعب أو يتعذر فيها التعبير عن أحد المتغيرين بدلالة الآخر مثل $٢ ص^{٣} س + س^{٢} ص = ١٠$ وحتى في حالة التعبير عن أحد المتغيرين بدلالة الآخر قد تحصل على أكثر من اقتران من علاقة واحدة، مثل $س^{٢} + ص^{٢} = ١$ فتجد منها $ص = \pm\sqrt{١ - س^{٢}}$
وهذه علاقة مكونة من اقترانين هما: $ص = \sqrt{١ - س^{٢}}$، $ص = -\sqrt{١ - س^{٢}}$
يطلق على هذه العلاقات اقترانات ضمنية لكونها تتضمن اقترانًا واحدًا على الأقل. وستتعرف في هذا الدرس إلى كيفية إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ لعلاقات ضمنية.

مثال (١)

إذا كانت ٣ س + ٢ ص − ١٢ = صفرًا ، فجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

يمكنك إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ لهذا المثال بطريقتين

الطريقة الأولى: عبرعن ص بدلالة س (جد علاقة صريحة بين س ، ص) كما يأتي:

$$ص = \frac{١٢ - ٣ س}{٢} = ٦ - \frac{٣}{٢} س$$

$$\frac{د ص}{د س} = -\frac{٣}{٢}$$

١٣٩

مثال (٣)

باستخدام الاشتقاق الضمني، جد $\frac{د ص}{د س}$ من العلاقة: $٥ ص^{٢} + جا ص = س^{٢} ص$

الحل

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س:

$$\frac{د}{د س}(٥ ص^{٢} + جا ص) = \frac{د}{د س}(س^{٢} ص)$$

$$٥ \times ٢ ص \frac{د ص}{د س} + جتا ص \frac{د ص}{د س} = س^{٢} \frac{د ص}{د س} + (ص \times ٢ س)$$

$$(١٠ ص + جتا ص - س^{٢}) \frac{د ص}{د س} = ٢ س ص$$

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س ص}{١٠ ص + جتا ص - س^{٢}}$$

تدريب (١)

جد $\frac{د ص}{د س}$ في كل مما يأتي:

١) $٤ س^{٢} - ٢ ص^{٢} = ٩$
٢) $س^{٣} + ص^{٣} = ٣ س ص$
٣) $س^{٢} = جا ص$

ثانيًا

يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لتعميم مشتقة $س^{ن}$ عندما يكون ن عددًا نسبيًّا كما هو مبين في النظرية الآتية:

نظرية

إذا كان $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ، حيث $\frac{م}{ن}$ عدد نسبي، فإن: $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن} - ١}$

١٤١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الطريقة الثانية: اشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س ، معتبرًا ص كاقتران ضمني في س كما يأتي:

$٣ + ٢ \times \frac{د ص}{د س} = ٠$، ومنه $\frac{د ص}{د س} = -\frac{٣}{٢}$

تسمى الطريقة الثانية الاشتقاق الضمني وتستعمل عادة في الحالات التي يصعب فيها إيجاد علاقة صريحة بين س ، ص

مثال (٢)

جد $\frac{د ص}{د س}$ في المعادلة $ص^٢ + ٣ ص - ٤ س^٣ = ٥ س + ١$

الحل

اشتق طرفي العلاقة بالنسبة إلى المتغير س كما يأتي:

$(ص^٢)' + (٣ ص)' - (٤ س^٣)' = (٥ س + ١)'$.

$٢ ص \frac{د ص}{د س} + ٣ \frac{د ص}{د س} - ١٢ س^٢ = ٥$

يمكنك حل هذه المعادلة بتجميع الحدود التي تحتوي $\frac{د ص}{د س}$ في طرف واحد ونقل الحدود الأخرى إلى الطرف الثاني كما يأتي:

$٢ ص \frac{د ص}{د س} + ٣ \frac{د ص}{د س} = ١٢ س^٢ + ٥$

وبإخراج $\frac{د ص}{د س}$ كعامل مشترك ينتج أن:

$(٢ ص + ٣) \frac{د ص}{د س} = ١٢ س^٢ + ٥$

إذن $\frac{د ص}{د س} = \frac{١٢ س^٢ + ٥}{٢ ص + ٣}$

١٤٠

البرهان

برفع طرفي المعادلة $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ إلى الأس ن تحصل على:

$ص^ن = س^م$ وهذا اقتران ضمني.

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س تحصل على:

$ن ص^{ن-١} \frac{د ص}{د س} = م س^{م-١}$

إذن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}}$ وبما أن $ص = س^{\frac{م}{ن}}$، فإن

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{\left(س^{\frac{م}{ن}}\right)^{ن-١}} = \frac{م}{ن} \times \frac{س^{م-١}}{س^{م-\frac{م}{ن}}} = \frac{م}{ن} س^{م-١-م+\frac{م}{ن}}$$

إذن $\frac{د ص}{د س} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١}$

مثال (٤)

إذا كان $ص = س^{\frac{١}{٢}}$، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ٩

الحل

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢} س^{\frac{١}{٢}-١}$ باستخدام النظرية السابقة

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢ س^{\frac{١}{٢}}} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٩} = \frac{١}{٢\sqrt{٩}} = \frac{١}{٦}$

١٤٢

الأخطاء الشائعة

– قد يغفل بعض الطلبة في حالة الاشتقاق الضمني، اشتقاق المتغير التابع بالنسبة للمتغير المستقل، مثل: ص + ص٣ = س، فيجري بعض الطلبة الاشتقاق كما يأتي:

$\frac{د ص}{د س} + ٣ص^٢ = ١$.

ذكّر الطلبة بهذا الخطأ إن وقعوا به وصوبّه.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– بيّن العلاقات الصريحة من الضمنية في ما يأتي:

أ) $س^٢ + ص = ٣س$ ب) $س^٢ + ص = جاص$

جـ) $س^٢ + ٣س = ص + ٥$ د) $ص^٢ = جتا ص + س ص$

إثراء

– إذا كان : $س^٢ + ص^٢ = أ^٢$ ، أ ثابت، فبيّن أن:

$$\left| \frac{ص''}{[١ + (ص')^٢]^{\frac{٣}{٢}}} \right| = \frac{١}{أ}.$$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة .

– **الأداة:** سلّم التقدير (٢–٢)، بند (٩).

لاحظ مدى إتقان الطلبة لمهارة التفريق بين العلاقة الصريحة والعلاقة الضمنية، وكذلك لمدى تمكنهم من مهارات الاشتقاق الضمني.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– دراسة مشتقات الاقترانات الدائرية هو إثراء لخصائص الاقترانات الدائرية، حيث ورد هذا الموضوع في وحدة المثلثات، الصف الأول الثانوي.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٢-٩ الاشتقاق الضمني

النتاجات الخاصة

- يحسب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.
- يجد المشتقات العليا لعلاقة ضمنية حتى المشتقة الرابعة.

المفاهيم والمصطلحات

العلاقة الصريحة، العلاقة الضمنية، الاشتقاق الضمني.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بمفهومي العلاقة الصريحة والعلاقة الضمنية، وكذلك بأهم المفاهيم والنتائج والتي تمّ تناولها في الحصة السابقة.
- ملاحظة الواجب البيتي ومناقشة الطلبة بالحلول، وتقديم العون والمساعدة لهم وخاصة الذين واجهوا صعوبات في الحل.
- توجيه الطلبة لبرهنة مشتقة ص = (هـ (س))$^{\frac{1}{2}}$، وعرض أمثلة تطبيقية عليها.

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

- تكليف الطلبة حل التدريبات (٢، ٣، ٤) وتذكيرهم بالمهارات والنتائج الضرورية لحلّها، ثم مناقشة مجموعات العمل بنتائجهم من خلال العمل داخل المجموعة.

معلومات إضافية

نتيجة

إذا كان ق (س) اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س، وكان ص = (ق (س))^{ن}، حيث ن عدد نسبي،

فإن: $\frac{د ص}{د س}$ = ن (ق (س))$^{ن-1}$ قَ (س).

مثال (٥)

إذا كان ص = $\sqrt{هـ (س)}$، وكان هـ (س) قابلاً للاشتقاق عند س

فأثبت أن: $\frac{د ص}{د س} = \frac{هـَ (س)}{2\sqrt{هـ (س)}}$

الحل

يمكن التعبير عن ص = $\sqrt{هـ (س)}$ بالصورة ص = (هـ (س))$^{\frac{1}{2}}$. وبما أن هـ (س) قابل للاشتقاق عند س، يمكن تطبيق النتيجة السابقة فيكون:

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{2} (هـ (س))^{\frac{1}{2}-1} \times هـَ (س) = \frac{1}{2} (هـ (س))^{-\frac{1}{2}} هـَ (س)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{هـَ (س)}{(هـ (س))^{\frac{1}{2}}} = \frac{هـَ (س)}{2\sqrt{هـ (س)}}$$

مثال (٦)

إذا كان (س + ص)^{4} = س^{2}، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (١ ، ٠)

الحل

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س لتحصل على:

$$4 (س + ص)^{3} (1 + \frac{د ص}{د س}) = 2 س$$

$$1 + \frac{د ص}{د س} = \frac{2 س}{4 (س + ص)^{3}} \text{، ومنه } \frac{د ص}{د س} = \frac{س}{2 (س + ص)^{3}} - 1$$

$$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(1،0)} = \frac{1}{2 (1 + 0)^{3}} - 1 = -\frac{1}{2}$$

١٤٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (٢)

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ لكل مما يأتي:

١) $\sqrt{\text{ص}}$ − جا س = ٢

٢) ص = ص^3 $\sqrt{\text{٥ س}^2 + 1}$

مثال (٧)

إذا كان س = ظا ص، فأثبت أن:

صً (١ + س^2) = − جا ٢ ص

الحل

نأخذ الطرف الأيمن ونثبت أنه يساوي الطرف الأيسر

نجد صً أولاً

١ = صَ × قا^{2}ص ⟸ صَ = $\frac{1}{\text{قا}^2\text{ص}}$ = جتا^{2}ص

صً = ٢ جتا ص × − جا ص × صَ

= − ٢ جتا ص جا ص × جتا^2 ص

= − جا ٢ ص × جتا^{2}ص (لأن جا ٢ ص = ٢ جا ص جتا ص)

الطرف الأيمن:

صً (١ + س^2) = − جا ٢ ص جتا^{2}ص (١ + ظا^{2}ص)

= − جا ٢ ص جتا^{2}ص × قا^{2}ص ، (لأن قا^{2}ص = ١ + ظا^{2}ص)

= − جا ٢ ص جتا^{2}ص × $\frac{1}{\text{جتا}^2\text{ص}}$ = − جا ٢ ص (الطرف الايسر)

وهو المطلوب.

١٤٤

تدريب (٣)

إذا كان س = جا ص ، ص ∈ (٠ ، $\frac{\pi}{2}$)

أثبت أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{س}^2}}$

مثال (٨)

إذا كان ص = ن^4، س = ٣ ن ، فجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$

الحل

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٣ ومنها $\frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{1}{3}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٤ ن^3

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$

= ٤ ن^3 × $\frac{1}{3}$

= $\frac{\text{٤ ن}^3}{3}$

إذن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$ = ٤ ن^2 × $\frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$ (لأن الاشتقاق بالنسبة إلى س)

= $\frac{4}{3}$ ن^2

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$ = $\frac{4}{3}$ ن^2 = $\frac{4}{3}$ ($\frac{1}{3}$ س)^2 = $\frac{4}{27}$ س^2

تدريب (٤)

إذا كان س = جا٢ن ، ص = جتا٢ن، فجد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{د س}^2}$ عندما ن = $\frac{\pi}{4}$

١٤٥

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

− جد المشتقات المتتالية للاقتران: ق (س) = $\sqrt[3]{\text{س}^4}$ ، عند س = ٠

إثراء

١) إذا كان: جا (س + ص) = س ص، فجد صَ:

٢) إذا كان: ص = $\sqrt{\text{س} + \sqrt{1 + \text{س}^2}}$ ، فاثبت أن:

٢ × $\sqrt{1 + \text{س}^2}$ × صَ = ص.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− الاستراتيجية: الملاحظة

− الأداة: سلّم التقدير (٣−٢)، بند (٩).

− الاستراتيجية: القلم والورقة.

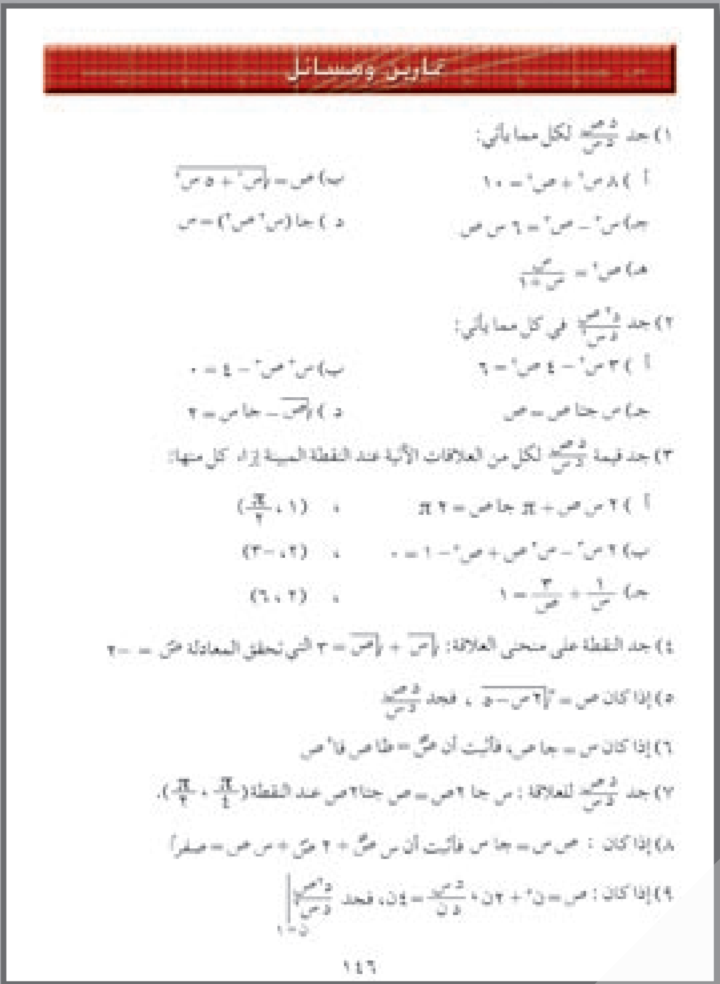
− الأداة: اختبار قصير يتضمن أهم المفاهيم والمهارات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة



تمارين ومسائل

1) جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

أ) $8س^2 + ص^2 = 10$ ب) $ص = \sqrt{س^2 + 5س}$

جـ) $س^2 - ص^2 = 6 س ص$ د) جا$(س^2 ص^2) = س$

هـ) $ص^2 = \frac{س^2}{س + 1}$

2) جد $\frac{د^2ص}{دس^2}$ في كل مما يأتي:

أ) $3س^2 - 4ص^2 = 6$ ب) $س^2 ص^2 - 4 = 0$

جـ) س جا ص = ص د) $\sqrt{ص}$ − جا س = 2

3) جد قيمة $\frac{دص}{دس}$ لكل من العلاقات الآتية عند النقطة المبينة إزاء كل منها:

أ) 2 س ص + π جا ص = 2π ، $(1، \frac{\pi}{2})$

ب) $2س^3 - س^2 ص + ص^3 - 1 = 0$ ، (2، −3)

جـ) $\frac{1}{س} + \frac{3}{ص} = 1$ ، (2، 6)

4) جد النقطة على منحنى العلاقة: $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 3$ التي تحقق المعادلة $ص' = -2$

5) إذا كان $ص = \sqrt[3]{2س - 5}$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$

6) إذا كان س = جا ص، فأثبت أن $ص'' =$ ظا ص قا^2 ص

7) جد $\frac{دص}{دس}$ للعلاقة: س جا 2ص = ص جتا 2س عند النقطة $(\frac{\pi}{4}، \frac{\pi}{2})$.

8) إذا كان: ص س = جا س فأثبت أن $س ص'' + 2 ص' + س ص =$ صفر

9) إذا كان: $ص = ن^3 + 2ن$ ، $\frac{دس}{دن} = 4ن$، فجد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{ن=1}$

146

مراجعة

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة جميعها.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التعلم التعاوني

– تكليف الطلبة (على شكل مجموعات) مراجعة المفاهيم والمهارات والنتائج الواردة في الوحدة (الاقتران المركب، قاعدة السلسلة، العلاقة الصريحة، العلاقة الضمنية، الاشتقاق الضمني).
– تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل ومسائل المراجعة في البيت.
– مناقشة حلول الطلبة للتمارين والمسائل ضمن المجموعة الواحدة وبشكل جماعي إن لزم.
– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية وبعض الحلول المفتاحية لأسئلة المراجعة؛ ليتمكنوا من تقييم تعلّمهم ذاتيًّا.
– حصر الصعوبات التي تواجه الطلبة، ومعالجتها من خلال ربطها بحلول التمارين.

معلومات إضافية

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

1) ملحق إجابات الأسئلة.
2) ملحق أدوات التقويم.
3) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- مساعدة الطلبة على فهم المسائل والتمارين وفق المفاهيم وقواعد الاشتقاق الضمني الواردة في الوحدة.
- حث الطلبة على عمليات التفكير العلمي المنطقي للتوصل إلى الحلول الصحيحة.
- مساعدة الطلبة على استحضار المفاهيم والنتائج والتعميمات اللازمة للحل.
- تعزيز الحلول الصحيحة، وتشجيع الطلبة لإحراز النجاح في مجال الحل.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية** : القلم والورقة.
- **الأداة** : اختبار قصير .
- **الاستراتيجية** : مراجعة الذات .
- **الأداة** :كتابة يوميات الطالب،حيث يدوّن الطالب أبرز الصعوبات والنجاحات التي حققها في مجال حل الأسئلة وأنماط التفكير التي قام بتوظيفها.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مراجعة

١) إذا كان ق (س) = ظا س، فأثبت أن متوسط التغير للاقتران ق يساوي:

قا٢ س ظا هـ / هـ (١ − ظا س ظا هـ) ، إذا تغيرت س من س إلى س + هـ

٢) أ) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد قَ (π/٣) علمًا بأن ق (س) = جا٣س

ب) ليكن ق (س) = { س٢ − ٢ س + ٢ ، ٠ ≤ س ≤ ١ ؛ [س] + ٣ س ، ١ < س ≤ ٢ }

فجد قَ (س).

٣) أ) إذا علمت أن ص = س ظا ص، فأثبت أن:

صً − ٢ ص قا٢ س = ٢ قا٢ ص

ب) إذا كان جا ص = س، |س| < ١، فأثبت أن:

دص/دس = ١/√(١ − س٢) ، ص ∈]−π/٢ ، π/٢[

٤) إذا كان ص = ن٢ − ١/٢ ن ، س = ١/٢ ن٢ − ٢ن، فجد دص/دس عند ن = ٢

٥) ليكن ص = ق (س) ، صً = ق (٢س٢ − س) ، قَ (٦) = ٤ ، ق (٦) = −٤ ، ق (٢) = ١

فجد د٢ص/دس٢ عند س = ٢

١٤٧

٦) إذا كان هـ (س) اقترانًا قابلاً للاشتقاق عند س = −٢، هـ (−٢) = ١، هـَ (−٢) = ٢

فجد قَ (−٢) في كل مما يأتي:

أ) ق (س) = √(س + ٦) × هـ (س)

ب) ق (س) = (س٢ − س) / هـ٢ (س)

جـ) ق (س) = هـ (س) − هـ (س) / س

د) ق (س) = ظا (π هـ (س))

٧) ليكن ق (ص) = جا هـ (ص) ، هـ (١) = π/٣ ، هـَ (١) = ٠ ، هـً (١) = ٣

فجد قً (١) علمًا بأن ق، قَ قابلان للاشتقاق.

٨) إذا ق (س) = س٣ + ٢ س ، هـ (س) = ٣ س٢ فجد:

أ) (قَ ∘ هـ)َ (١)

ب) (قَ ∘ هـ)ً (١)

١٤٨

اختبار ذاتي

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة جميعها.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تكليف الطلبة مراجعة أهم المفاهيم والعمليات والنظريات التي وردت في الوحدة في البيت.
– تكليف الطلبة حل التمارين ومسائل الاختبار الذاتي في البيت.
– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية لأسئلة الاختبارفي أثناء الحصة الصفية.
– يعرض الطلبة إجاباتهم وتصحيحها وفق نموذج الإجابة المقدم من قبل المعلم.
– يسجل الطلبة الأخطاء ومكامن الصعوبة التي واجهتهم عند الإجابة عن أسئلة الاختبار.
– مناقشة أسئلة الاختبار مع الطلبة.
– يصحّح الطلبة الأخطاء التي وقعوا بها.
– حصر الأخطاء وتصنيفها والبحث عن أسباب وقوع الطلبة بها حيث يمكن النظر إلى الأسباب وفق تصنيفها.
  - نقص لدى الطلبة في استيعاب المفاهيم الضرورية.
  - عدم إتقان المهارات الرياضية الأساسية.
  - عدم توظيف المتطلبات السابقة للتوصل للحل الصحيح.
– العمل على معالجة الأخطاء وتذليل الصعوبات وبحل تدريبات مشابهة من قبل الطلبة الذين لم يحققوا المستوى المطلوب.

معلومات إضافية

اختبار ذاتي

١) يتألف هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ويلي كل فقرة أربع إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة.

(١) إذا كان قَ (٣) = ٤، ق (٣) = ٢ ، فما قيمة $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(\text{س})}{٢\text{س} - ٦}$:

أ) ٤ ب) – ٤ جـ) – ٢ د) ٢

(٢) $\lim\limits_{\text{هـ} \leftarrow ٠} \frac{٥(٢+\text{هـ})^{٣} - ٤٠}{١٠\,\text{هـ}}$ =

أ) ٦ ب) ٦٠ جـ) ١٢ د) $\frac{٦}{٥}$

(٣) إذا كان ق (س) = ٢ س^{٢} –١، فإن ميل القاطع لمنحنى ق (س) المار بالنقطتين (٢، ق (٢)) ، (–١، ق (–١)) يساوي:

أ) –٢ ب) ٦ جـ) ٢ د) ٣

(٤) إذا كان ق (س) = س × $[٢ - \frac{\text{س}}{٣}]$ فإن قَ (٣) تساوي:

أ) صفرًا ب) ١ جـ) ٢ د) غير موجودة

(٥) إذا كان ص = ق (س^{٢} + ٢س) ، قً(٣) = ٥، فإن $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = ١}$ تساوي:

أ) ٤ ب) –٢ جـ) ٥ د) ٢٠

(٦) إذا كان ق (س) = جتا^{٢} س، فإن قً(س) + ٦ ق (س) تساوي:

أ) صفر ب) ١٠ جتا ٢س جـ) ٢ جتا٢س د) –٢ جتا٢س

(٧) إذا كان هـ (س) = س^{٢} ق (س) ، ق (٣) = ٦، قَ (٣) = ٥ ، فإن هـَ (٣) تساوي:

أ) ٨١ ب) ١١ جـ) ٤٥ د) ٣٦

١٤٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

(٨) إذا كان ق (٤) = ٥ ، قَ (٤) = − ١ ، قً (٤) = ٢ ، فإن $\left(\frac{\text{ق}}{\text{قَ}}\right)'$ (٤) تساوي:

أ) ١١ ب) ٦ جـ) −٦ د) −٩

(٩) إذا كان ق (س) = |٢ − ٢ س|، فإن قَ (١) تساوي:

أ) صفرًا ب) غير موجودة جـ) −٢ د) ٢

(١٠) إذا كان هـ (س) كثير حدود وكان هـ (١) = ٥، هـَ (١) = −١، فإن (هـ٢)َ (١) تساوي:

أ) ١٠ ب) صفرًا جـ) − ١٠ د) −٢

٢) ليكن ق (س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٣} + \text{ب س} & \text{، س} < ٢ \\ \text{أ س}^{٢} + ٩\,\text{ب س} - ١٢ & \text{، س} \geq ٢ \end{cases}$

فجد أ، ب التي تجعل قَ (٢) موجودة

٣) جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في الحالات الآتية:

أ) ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} - \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$ ب) ص = قا٣ (ظا س) + ١

٤) أ) إذا كان ص = ٣ م٢ − ٢م + ١، م = ٢ س + ٣ فجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = ٠}$

ب) إذا كان ص = $\sqrt{٤ + ٣\text{جا س}}$ ، فأثبت أن:

٢ ص صً + ٢ (صَ)٢ + ص٢ = ٤

جـ) إذا كان ص = جا (س ص)، فجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(\frac{\pi}{٢}، ١)}$

د) إذا كان ق قابلًا للاشتقاق، وكان ص = ق٢ (س٣)،

فجد قَ (٨) علمًا بأن ق (٨) = ١، $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = ٢} = ١٠٠$

١٥٠

الأخطاء الشائعة

– حلّل الأخطاء التي وقع بها الطلبة، وصنّف الشائع منها، وتأكد من تخطيهم لها.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية :** القلم والورقة.
– **الأداة :** اختبار قصير .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

٣

الدرس ٣-١ تطبيقات هندسية

النتاجات الخاصة

– يجد معادلة المماس عند نقطة.
– يحل مسائل هندسية على المشتقة.

المفاهيم والمصطلحات

المماس، ميل المماس، العمودي، ميل العمودي، تقاطع منحنيين، نقطة مشتركة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس مباشر

– كتابة الاقترانين الآتيين على السبورة :
ق (س) = $س^{٣}$ + ١ ، هـ (س) = $س^{٢}$، ويطلب إلى الطلبة أن يجدوا:
• قَ (١) • ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (١ ، ق (١))
• هـَ (٢) • ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (١ ، ق (١))

توجيه الطلبة إلى إيجاد الميل عن طريق إيجاد نقطة أخرى على المنحنى وإيجاد الميل للمماس، ثم مقارنة ذلك مع قَ (س)، هـَ (٢)؛ ليستنتجوا أن ميل المماس لمنحنى ق (س) عند النقطة ($س^{١}$، $ص^{١}$) يساوي قَ (س)، وهذا هو التفسير الهندسي للمشتقة.

مجموعات تعاونية

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية، وتكليفهم رسم منحنى الاقتران ق (س) = $س^{٣}$ في الفترة [– ٢ ، ٢]، ورسم مماس لمنحنى ق عند النقطة (١، ق (١))، وإيجاد ميل المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق باستخدام المشتقة الأولى.
يطلب من الطلبة أن يكتبوا معادلة المماس العمودي على المماس، ومناقشتهم في ما توصلوا اليه.
– مناقشة مثال (١) مع الطلبة، وتكليفهم حل تدريب (١) في دفاترهم.
– مناقشة مثال (٢)، و(٣) مع الطلبة، وتذكيرهم بمفهوم التوازي والتعامد والعلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين ومستقيمين متعامدين. وتكليفهم حل تدريب (٢).
– تكليف الطلبة جميعهم حل الأسئلة (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

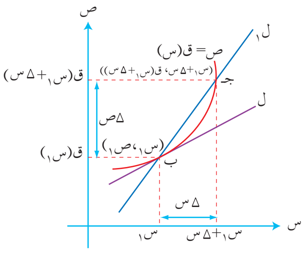
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٣-١ تطبيقات هندسية
geometrical applications

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تجد معادلة المماس عند نقطة.
٢– تحل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.

يمثل الشكل (٣–١) منحنى الاقتران ق:
ص = ق(س)، ونقطة ب ($س_{١}$، ق($س_{١}$)) هي نقطة تقع على منحنى ق(س)، وإذا كانت Δ س ≠ صفرًا، فإن جـ ($س_{١}$ + Δ س، ق($س_{١}$ + Δ س)) تمثل نقطة أخرى على المنحنى والمقدار:



الشكل (٣–١)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$$

هو ميل القاطع $ل_{١}$ المار بهاتين النقطتين.

تلاحظ من الشكل أنه عندما تتحرك النقطة جـ على منحنى ق مقتربة من النقطة ب، فإن Δس تصغر شيئًا فشيئًا، حتى تقترب من الصفر، وباقتراب Δس من الصفر، تجد أن القاطع ($ل_{١}$) يأخذ أوضاعًا مختلفة، حتى يؤول في النهاية إلى وضع المماس (ل) لمنحنى ق عند النقطة ب($س_{١}$،$ص_{١}$)، وأن ميل القاطع ($ل_{١}$) في النهاية يصبح ميلا لمماس منحنى ق عند النقطة ب($س_{١}$، $ص_{١}$) أي أن :

$$\text{ميل المماس}\Big|_{س = س_{١}} = \underset{\Delta س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \underset{\Delta س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{ق(س_{١} + \Delta س) - ق(س_{١})}{\Delta س}$$

وذلك بشرط وجود هذه النهاية، وقيمة هذه النهاية في حالة وجودها هي قيمة المشتقة الأولى للاقتران ق عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$)

١٥٣

تعريف

يكون منحنيا ق(س)، هـ(س) متعامدين عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) الواقعة على منحنييهما إذا كانت قَ ($س_{١}$) ، هـَ ($س_{١}$) موجودتين.
وكانت قَ ($س_{١}$) × هـَ ($س_{١}$) = –١

مثال (٢)

جد نقاط تعامد منحنى الاقترانين
ق(س) = $س^{٢}$ ، هـ(س) = $س^{٢}$ + ٢س +١

الحل

نجد أولاً مشتقة كل من الاقترانين كما يأتي:
قَ (س)=٢س ، هـَ (س) = ٢س + ٢
ضع قَ (س) × هـَ (س) = –١، تجد أن ٢س (٢س +٢)= –١ أي أن:
٤$س^{٢}$ + ٤س+١ = صفراً، ومنه $(٢س + ١)^{٢}$ = ٠، ومنه س = $\frac{-١}{٢}$
يجب أن نتأكد فيما إذا كانت ق ($\frac{-١}{٢}$) = هـ ($\frac{-١}{٢}$)
ق($\frac{-١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ ، هـ ($\frac{-١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ – ١ + ١ = $\frac{١}{٤}$
ومن هذا نستنتج أن منحنى ق، هـ متعامدان عند النقطة ($\frac{-١}{٢}$، $\frac{١}{٤}$) الواقعة على منحنييهما.

تدريب (٢)

بيّن أن المماسين لمنحنى ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، هـ (س) = س متعامدان عند نقط تقاطعهما.

١٥٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

تعريف

المعنى الهندسي للمشتقة الأولى

ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) التي تقع على منحناه يساوي المشتقة الأولى للاقتران عند تلك نقطة أي أن:

ميل المماس $\Big|_{س = س_{١}}$ = قَ (س$_{١}$) ، وتسمى النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطة التماس

مما سبق إذا كان للاقتران ص = ق(س) مشتقة عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) فعندئذ يكون لمنحنى ق مماس عند تلك النقطة ميله م = قَ (س$_{١}$)، وتكون معادلة هذا المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي:

ص − ص$_{١}$ = قَ (س$_{١}$) (س − س$_{١}$)

مثال (١)

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} + ١، عند س = ٢.

تذكر

ميل العمودي = $\frac{-١}{\text{ميل المماس}}$

بشرط أن ميل المماس ≠ صفرًا

الحل

معادلة المماس عند النقطة (٢، ق(٢)) هي:

ص − ق(٢) = قَ(٢) (س − ٢)

لكن ق(٢) = ٢^{٣} + ١ = ٩

وأيضًا قَ(س) = ٣س^{٢} ، ومنه قَ (٢) = ١٢

إذن معادلة المماس هي : ص − ٩ = ١٢(س − ٢) ، أي ص = ١٢ س − ١٥

ومعادلة العمودي على المماس عند النقطة (٢ ، ٩) هي: ص − ٩ = $\frac{-١}{١٢}$ (س − ٢) ، أي أن:

ص = $\frac{-١}{١٢}$ س + $\frac{٥٥}{٦}$

تدريب (١)

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{س}$ ، عند س = ٢

١٥٤

مثال (٣)

بيّن أن لمنحنى الاقتران ق (س) = ٤ جا٢س مماسا أفقيا في الفترة [٠ ، π] .

لاحظ أن

المماس أفقي يعني أن: المماس يوازي محور السينات ويكون ميله عند ذلك يساوي صفرًا.

الحل

أفرض أن النقطة (س$_{١}$ ،ص$_{١}$) هي نقطة تماس

ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هو(م) ، حيث

م = قَ(س) عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) ، قَ(س) = ٨جتا ٢ س

م = قَ(س$_{١}$) = ٠ عندما ٨جتا٢س$_{١}$ = ٠

وبحل هذه المعادلة المثلثية تجد أن:

س$_{١}$ = $\frac{π}{٤}$ ، س$_{١}$ = $\frac{٣π}{٤}$

إذن لمنحنى ق مماسان أفقيان يحدثان عندما س = $\frac{π}{٤}$ ، $\frac{٣π}{٤}$

مثال (٤)

إذا كان المماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} + ٥س، عند س = س$_{١}$ يصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥° ، فجد إحداثيي نقطة التماس.

ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية الموجبة (هـ) التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

م = ظا هـ

الحل

م = ظا هـ = ظا ٤٥° = ١

أيضًا = قَ (س$_{١}$) = ٢س$_{١}$ + ٥

إذن ٢س$_{١}$ + ٥ = ١ ، ومنه س$_{١}$ = −٢

نقطة التماس هي (−٢،ق(−٢)) = (−٢،−٦)

تدريب (٣)

عين الثابت جـ في الاقتران ق(س) = جـ س^{٢} ، إذا كان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى ق عند س = ١ هو ٤٥°

١٥٦

الأخطاء الشائعة

− قد يخلط بعض الطلبة بين مفهومي المماس لمنحنى في نقطة والعمودي على المماس وميليهما ومعادلتيهما، لمعالجة ذلك أكد على مفهومي المماس والعمودي على المماس بالرسوم التوضيحية وإعطاء المزيد من التدريب.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند النقطة (٢ ، ٠) يساوي ١١، فما قيمة قَ (٢)؟

٢) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى.

ق (س) = س^{٢} − ٢ س + ٣ عند س = ٠

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس وتصحيح حلولهم.

− **الاستراتيجية**: الملاحظة.

− **الأداة**: قائمة الشطب (٢ − ٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

− ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٣-١ تطبيقات هندسية

النتاجات الخاصة

- يجد معادلة المماس عند نقطة.
- يحل مسائل هندسية على المشتقة.

المفاهيم والمصطلحات

المماس، ميل المماس، العمودي، ميل العمودي، تقاطع منحنيين، نقطة مشتركة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

استراتيجية التدريس المباشر

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.
- مناقشة المثال (٤) مع الطلبة، وتذكيرهم بأن ميل المستقيم يساوي ظل الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، ثم تكليفهم حل تدريب (٣).
- تذكير الطلبة بحل معادلتين بمتغيرين؛ ليتمكنوا من إيجاد نقط التقاطع، وتذكيرهم أيضًا بالاشتقاق الضمني، ثم مناقشتهم بمثال (٥) وتكليفهم حل تدريب (٤) في دفاترهم.

معلومات إضافية

مثال (٥)

جد النقط التي يكون عندها المماس لمنحنى العلاقة ٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٥٢، موازيًا المستقيم ٩س − ٨ص = ١

الحل

افرض أن النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) هي نقطة تماس فيكون ميل المماس عندها هو م$_{\text{المماس}}$

حيث م$_{\text{المماس}}$ = $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(\text{س}_1،\text{ص}_1)}$ ، وباشتقاق العلاقة ٩س^{٢} + ١٦ ص^{٢} = ٥٢ ضمنياً تجد أن:

١٨س + ٣٢ ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٠ ، ومنه $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٩\text{س}}{١٦\text{ص}}$

إذن م$_{\text{المماس}}$ = $\frac{-٩\text{س}_1}{١٦\text{ص}_1}$

وبما أن المماس يوازي المستقيم ٩س − ٨ص = ١ ، فإن

م$_{\text{المماس}}$ = م$_{\text{المستقيم}}$

ومنه $\frac{-٩\text{س}_1}{١٦\text{ص}_1} = \frac{٩}{٨}$

ومنه س$_{١}$ = −٢ ص$_{١}$ .... (١)

عوض قيمة س$_{١}$ في المعادلة ٩س^{٢} + ١٦ص^{٢} = ٥٢ تجد أن:

٣٦ ص$_{١}^{٢}$ + ١٦ص$_{١}^{٢}$ = ٥٢ ، ومنه ص$_{١}$ = ±١ وبالتعويض في المعادلة (١):

عندما ص$_{١}$ = ١ تجد أن س$_{١}$ = −٢

عندما ص$_{١}$ = −١ تجد أن س$_{١}$ = ٢

وعليه، تكون نقط التماس التي يكون المماسان عندهما يوازيان المستقيم هما (−٢،١) ، (٢،−١).

ومنه تكون معادلة المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة (−٢، ١) هي : ص = $\frac{٩}{٨}$ س + $\frac{١٣}{٤}$

عند النقطة (٢، −١) هي : ص = $\frac{٩}{٨}$ س − $\frac{٥}{٤}$

تذكر

١) إذا توازى مستقيمان ميلاهما م$_{١}$، م$_{٢}$ فإن م$_{١}$ = م$_{٢}$، والعكس صحيح.

٢) ميل الخط المستقيم أس + ب ص + جـ = صفرًا، حيث إن أحد العددين أ، ب ≠ صفرا، يساوي: $\frac{-\text{أ}}{\text{ب}}$ أي $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

١٥٧

تمارين ومسائل

١) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} − ٤ س + ٣ عند النقطة (١، ٠).

٢) اكتب معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق (س) = س^{٣} +١ عند النقطة س= ٢.

٣) جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة س^{٢} − ص^{٢} = − ٨، المرسوم من النقطة (−٤، ٠).

٤) جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) = س^{٢} − ٦س + ٧ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص − ٣س + ١ = صفرًا.

٥) إذا كان المستقيم ٤س − ٢ص + ٥ = صفرًا يمس منحنى ق عند النقطة (٣، ٢)، وكان المستقيم ٩ص + ٣س −٤ = صفرًا عموديًّا على المماس لمنحنى ل عند النقطة (٣، −١)، فجد (ق × ل)َ (٣).

٦) جد معادلة المماس لمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم س + ص = ١.

٧) إذا كان المستقيم أ س + ٣ ص = ١ يمس منحنى الاقتران ق(س) = ٤ س^{٢} + أ س + ب عند النقطة (١،ق(١))، فجد قيمة كل من الثابتين أ،ب.

٨) أثبت باستخدام التفاضل أن نصف قطر الدائرة يكون عموديًّا على مماس الدائرة عند نقطة التماس.

٩) جد جميع قيم س التي يكون العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س − جا٢س عندها موازيًا لمحور الصادات.

١٠) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = س^{٢}، إذا كان العمودي مرسومًا من النقطة (٠، $\frac{٩}{٢}$).

١١) أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنيي العلاقتين: ٤س^{٢} + ٩س^{٢} = ٤٥ ، س^{٢} − ٤ص^{٢} = ٥ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول متعامدان.

١٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، −٢) ، (٢ ، ٦) يمس منحنى الاقتران ق(س) = أ س^{٢} + س^{٢} −١، جد قيمة أ

١٥٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

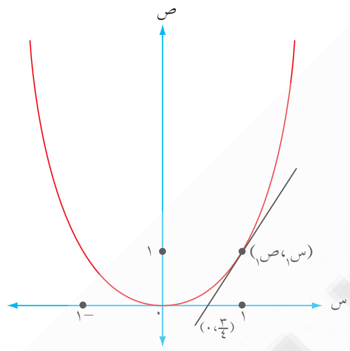
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (٤)

جد معادلة المماس المرسوم من النقطة (٦، ٠) لمنحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ = ١٨$

مثال (٦)

بيّن أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٤$ مماسين مرسومين من النقطة أ $(\frac{٣}{٤}، ٠)$ والتي لا تقع عليه.



الحل

افرض النقطة $(س_١، ص_١)$ نقطة تماس تقع على منحنى ق ومنه $ص_١ = س_١^٤$

وكذلك : $م_{مماس} \Big|_{س = س_١} = قَ(س_١) = ٤س_١^٣$

وأيضًا : $م_{مماس} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_١}{س_١ - \frac{٣}{٤}}$

إذن : $٤ س_١^٣ = \frac{س_١^٤}{س_١ - \frac{٣}{٤}}$

ومنه ينتج أن: $٣س_١^٤ - ٣ س_١^٣ = ٠$.

$٣س_١^٣(س_١ - ١) = ٠$ ، وبحل هذه المعادلة ينتج أن:

$س_١ = ٠$ ومنه $ص_١ = ٠$ ، ومعادلة المماس المرسوم من هذه النقطة هي:

$ص = ٠$ (محور السينات) وكذلك $س_١ = ١$ ومنه $ص_١ = ١$، ومعادلة المماس المرسوم من هذه النقطة هي :

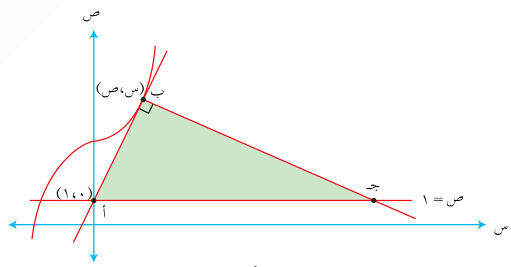
$ص = ٤س - ٢$

تدريب (٥)

بيّن أن لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢ + ٨$ مماسين مرسومين من النقطة (١، ٥) والتي لا تقع عليه.

١٥٨

١٣) في الشكل (٣ – ٢) ، جد مساحة المثلث المكون من المماس المرسوم من النقطة (٠، ١) لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٣ + ٣$ والعمودي على المماس عند نقطة التماس والمستقيم $ص = ١$



الشكل (٣–٢)

١٦٠

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في كتابة معادلة المماس الأفقي والعمودي عليه في نقطة التماس، ولمعالجة ذلك، استخدم الرسوم التوضيحية، وأكد للطلبة أن العمودي على المماس الأفقي لا ميل له، وأن معادلته هي $س = س_١$، ومعادلة المماس هي $ص = ص_١$.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

١) رسم مماس لمنحنى $ق(س) = س^٢ + جـ$ من النقطة (١، ب) الواقعة على منحناه، فقطع محور السينات في النقطة $س = -١$، جد قيم كل من ب، جـ.

٢) اثبت أن المماس لمنحنى الاقتران $ق(س) = س^٢$ عند النقطة (أ، ق(أ))، يقطع محور السينات عند $س = \frac{أ}{٢}$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

– **الأداة:** اختبار قصير.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

– يحل مسائل عملية على (المسافة، والسرعة، والتسارع).

المفاهيم والمصطلحات

المسافة، السرعة، التسارع، أقصى ارتفاع.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

التدريس المباشر

– كتابة المثال الآتي على السبورة:

يتحرك جسم على خط الأعداد وفق الاقتران ف (ن) = $ن^{٢}$ + ٣، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، ثم اطلب من الطلبة أن يجدوا:

– السرعة المتوسطة ع للجسم في الفترة [١، ١ + Δ ن].

– $\lim\limits_{ن \to ١}$ ع، لتسمى السرعة اللحظية للجسم عندما ن تقترب من ١ ويرمز لها بالرمز ع (١).

– فَ (١)، ما العلاقة بين فَ (١) ، و ع (١)؟

– ليستنتجوا أن فَ (ن). وهو التفسير الفيزيائي للمشتقة.

– من خلال تعريف التسارع المتوسط بيّن للطلبة أن التسارع اللحظي ت (ن) = عَ (ن) = فً (ن).

– مناقشة مثال (١)، و(٢) مع الطلبة، وكلفهم حل التدريبين (١،٢) في دفاترهم.

– تكليف الطلبة حل الأسئلة (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ١١) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٣-٢ تطبيقات فيزيائية
Physical applications

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

أن تحل مسائل عملية على (المسافة، السرعة، التسارع).

تعلمت في الدرس (٢-٢) أن السرعة المتوسطة ($\overline{ع}$) في الفترة الزمنية من ن إلى ن + Δن لجسيم يتحرك على خط مستقيم، وفق العلاقة ل= ف (ن) هي:

$$\overline{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن + \Delta ن) - ف(ن)}{\Delta ن}$$

وأنه عندما Δ ن ⟵ ٠، فإن $\lim\limits_{\Delta ن \to ٠} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ في حالة وجودها تسمى السرعة اللحظية للجسيم ويرمز لها بالرمز ع.

تعريف

إذا تحرك جسم على خط مستقيم وتحدد موقعه في اللحظة **ن** بالعلاقة ل= ف(ن) فإن:
السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة **ن** هي ع حيث ع(ن) = فَ(ن)،
وإذا كان فَ(ن) قابلاً للاشتقاق في **ن** ، فإن فً(ن) = عَ (ن) يسمى تسارع الجسيم في اللحظة **ن** ويرمز له بالرمز ت(ن).

مثال (١)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد **ن** ثانية من بدء حركته يعطى وفقًا للاقتران ف(ن) = $ن^{٣}$+٥$ن^{٢}$ +٩، احسب سرعة الجسيم وتسارعه بعد ٣ ثوان من بدء حركته.

١٦١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

– قد يخلط بعض الطلبة بين مفهومي السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة، والتسارع اللحظي والتسارع المتوسط، وضّح لهم الفرق بينهما من خلال الأمثلة.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– يتحرك جسم في خط مستقيم، وبعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثابتة يعرف بالاقتران ف (ن) = ٢ ن^{٢}، جد سرعة الجسم بعد ثانية من بدء الحركة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢ – ٣)، بند (٢).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الحل

السرعة ع(ن) = $\frac{د ف}{د ن}$

ع(ن) = فَ(ن) = ٣ن^{٢} + ١٠ن

ع(٣) = فَ(٣) = ٥٧م/ث

التسارع ت(ن) = $\frac{د ع}{د ن}$ = $\frac{د^{٢}ف}{د ن^{٢}}$

ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن) = ٦ن + ١٠

ت(٣) = ٢٨ م/ث^{٢}

تدريب (١)

إذا كان ف(ن) = ٣جا ٤ن – ٥جتا ٤ن ، حيث **ف** المسافة بالأمتار، **ن** الزمن بالثواني، فاحسب كلاً من المسافة والسرعة والتسارع عندما ن = $\frac{\pi}{٨}$.

مثال (٢)

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقًا للاقتران:

ف(ن) = ٢ن^{٣} – ٣ن^{٢} + ٢، احسب سرعة الجسيم عندما ينعدم تسارعه.

الحل

السرعة = فَ(ن) = ٦ن^{٢} – ٦ن

التسارع = فً(ن) = ١٢ن – ٦

عندما ينعدم التسارع فإن ت=٠ ومنها ١٢ ن – ٦= ٠

١٢ن = ٦ أي أن ن = $\frac{١}{٢}$ أي أنه ينعدم التسارع بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من بدء الحركة.

إذن ع($\frac{١}{٢}$) = ٦($\frac{١}{٢}$)^{٢} – ٦($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣}{٢}$ – ٣ = –$\frac{٣}{٢}$ م/ث

١٦٢

تدريب (٢)

إذا كانت س= ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن^{٣} –٣ن^{٢}+٥ن، هي المعادلة الزمنية لحركة جسيم على خط مستقيم، حيث ن الزمن بالثواني، س المسافة بالأمتار. فاحسب تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة.

مثال (٣)

قذف جسم رأسيًّا للأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد **ن** ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران: ف(ن) = ٢٤,٥ن – ٤,٩ن^{٢}، جد:

١) الزمن اللازم حتى يعود الجسم إلى سطح الأرض.
٢) السرعة التي قذف بها الجسم.
٣) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.
٤) اللحظة التي تكون عندها سرعة الجسم ١٤,٧م/ث.
٥) تسارع الجسم في كل لحظة.

الحل

١) عندما يعود الجسم إلى سطح الأرض تكون ف=٠
ومنه ٢٤,٥ن – ٤,٩ن^{٢}=٠
٤,٩ن (٥ – ن) = ٠ ، ومنه ن = ٠ ، ن = ٥ ، وبما أن ن = ٠ هو زمن الانطلاق
إذن يعود الجسم إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوانٍ من بدء حركته.

٢) السرعة التي قذف بها الجسم هي السرعة الابتدائية (ع.) للجسم أي عندما (ن=٠)
ع = فَ(ن) = ٢٤,٥ – ٩,٨ ن
ومنه ع. = فَ (٠) = ٢٤,٥ م/ث

٣) يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح السرعة ع = ٠ ، أي عندما
٢٤,٥ – ٩,٨ن = ٠ وهذا يتحقق عندما ن = ٢,٥ ثانية

ملحوظة

من البند (١) الزمن الذي يستغرقه الجسيم حتى يعود إلى سطح الأرض = ٥ ثوان ومنها زمن الصعود = $\frac{٥}{٢}$ = ٢,٥ ثانية وعند هذه اللحظة تكون المسافة المقطوعة هي:
ف(٢,٥) = ٢٤,٥ (٢,٥) – ٤,٩ (٢,٥)^{٢}= ٣٠,٦٢٥م

١٦٣

– قد يخطىء بعض الطلبة في حركة المقذوفات.

والعلاج يكون بحل فريد من الأسئلة على هذا المفهوم.

النتاجات الخاصة

– يحل مسائل عملية على (المسافة، والسرعة، والتسارع).

المفاهيم والمصطلحات

المسافة، السرعة، التسارع، أقصى ارتفاع.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.

– مناقشة الطلبة بحركة المقذوفات مع التوضيح أن الجسم يبلغ أقصى ارتفاع له عندما تكون سرعته تساوي صفرًا، وأن زمن الصعود يساوي زمن الهبوط، وذلك من خلال المثال (٣)، وبعد ذلك يكلف الطلبة حل تدريب (٣) في دفاترهم.

– مناقشة المثال (٤) مع الطلبة، وتذكيرهم بأن مجموع المسافة التي يقطعها الجسمان ثابتة.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.

٢) ملحق أدوات التقويم.

٣) ملحق أوراق العمل.

٤) ع = ٢٤,٥ – ٩,٨ن = ١٤,٧ ، ومنه ن = ١ ثانية

لاحظ أن الجسم يصل إلى هذه السرعة بعد ثانية واحدة من انطلاقة أي وهو صاعد. أما إذا كان المطلوب إيجاد اللحظة التي تصل فيها سرعته إلى ١٤,٧ م/ث وهو هابط ، فإن إشارة السرعة تصبح سالبة ويكون:

ع = ٢٤,٥ – ٩,٨ن = –١٤,٧ ، ومنه ن = ٤ ثوان

٥) ت = عَ(ن) = –٩,٨م/ث^{٢}

أي أن الجسم يتحرك بتسارع ثابت وهو تسارع الجاذبية الأرضية.

تدريب (٣)

قذف جسم من سطح بناية رأسيًّا إلى أعلى بحيث إن ارتفاعه عنها بعد **ن** ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف (ن) = ٣٠ن – ٥ن^{٢} ، إذا كانت سرعته لحظة وصوله الأرض تساوي ٦٠م/ث، جد ارتفاع البناية.

مثال (٤)

أسقط جسم من ارتفاع (١٠٠) متر عن سطح الأرض سقوطًا حرًّا حيث إن المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي ف$_{١}$(ن) = ٥ن^{٢}، وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلى حيث إن المسافة التي يقطعها هي ف$_{٢}$(ن) = ٥٠ن – ٥ن^{٢}، جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض.

الحل

يكون للجسمين الارتفاع نفسه عن سطح الأرض عندما يكون ف$_{١}$(ن) + ف$_{٢}$(ن) = ١٠٠م.

٥ن^{٢} + ٥٠ن – ٥ن^{٢} = ١٠٠

٥٠ن = ١٠٠ ومنه ن = ٢

سرعة الجسم الأول ع$_{١}$ = فَ$_{١}$(ن) = ١٠ن ، ومنه فَ$_{١}$(٢) = ١٠×٢ = ٢٠م/ث

سرعة الجسم الثاني ع$_{٢}$ = فَ$_{٢}$(ن) = ٥٠ – ١٠ن ، ومنه فَ$_{٢}$(٢) = ٥٠ – (١٠×٢) = ٣٠ م/ث.

١٦٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– قذف جسم للأعلى وفق العلاقة ف (ن) = أ ن – ١٦ ن^{٢}، فإذا كان أقصى ارتفاع وصل، إليه الجسم ٤٩ مترًا، جد قيمة أ.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيح حلولهم بشكل فردي، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد هذا الموضوع في مبحث الرياضيات في وحدة الاقترانات، **للصف العاشر**، وفي وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) جسيم يتحرك في خط مستقيم فإذا كانت سرعته بعد ن ثانية من حركته هي:
ع(ن) = ن^{٢} – ٣ن + ٢ فجد:
أ) سرعته الابتدائية.
ب) متى يسكن الجسيم لحظيًا وما قيمة تسارعه حينئذ؟

٢) يتحرك جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢م/ث حسب العلاقة ف(ن) = أن^{٢} + ب ن حيث أ، ب ثوابت، احسب المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوانٍ من الحركة علمًا بأن تسارعه ٨ م/ث^{٢}

٣) يتحرك جسيم بحيث إن بعده عن نقطة ثابتة بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقًا للاقتران ف(ن) = جا ن + جتا ن ، ن ∈ [٠، ٢π]، جد المسافة والتسارع في حالة السكون اللحظي للجسيم.

٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته يعطى وفقًا للاقتران ف(ن) = ن^{٣}، فإذا كانت سرعته المتوسطة في الفترة الزمنية [٠، أ] تساوي سرعته اللحظية عندما ن = ٢، جد قيمة أ.

٥) يتحرك جسيم بسرعة تعطى حسب العلاقة ع^{٢} = ١ – ف^{٢}، حيث ف المسافة بالأمتار. بيّن أن تسارع الجسيم يساوي $\frac{-٣}{٢}$ في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

٦) يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية ف(ن) = $\frac{١}{٤}$(ن + ٢)^{٤} – ٦ن^{٢} حيث ن بالثواني، ف بالأمتار. جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٨٩ م/ث.

٧) قذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض، فإذا كانت المسافة التي يقطعها بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف (ن) = ٦٤ن – ١٦ن^{٢}، بيّن أن الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨ م.

٨) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن)=جا^{٢}ن، فجد سرعة الجسيم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لأول مرة بعد تحركه.

١٦٥

٩) تتحرك نقطة مادية على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = $\sqrt{ن}$ (٢٧ – ن)، أثبت أن هذه النقطة تبدأ في العودة إلى النقطة التي بدأت منها الحركة بعد ٩ ثوان، ثم جد سرعتها حينئذ.

١٠) من نقطة على ارتفاع ٨٠ متر من سطح الأرض، قذف جسيم رأسيًا إلى أعلى وفق اقتران المسافة ف(ن) = ٦٤ ن – ١٦ ن^{٢} جد:
أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم
ب) الزمن الذي بعده يعود إلى نقطة القذف.
جـ) الزمن الذي بعده يعود إلى سطح الأرض.
د) متى تصبح سرعة الجسيم ٤٠ م/ث.
هـ) مجموعة القيم ن ≥ ٠ التي تكون عندها ع(ن) > ٠

١١) من سطح بناية، أفلتَ شخص جسمًا من السكون وفق الاقتران ف$_{١}$(ن) = ١٦ ن^{٢}، وفي اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسمًا عموديًّا إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ث وفق الاقتران ف$_{٢}$(ن) = ٢٠ن + ١٦ن^{٢}، فإذا ارتطم الجسم الأول بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالأرض فجد:
أ) سرعة كل من الجسم الأول والجسم الثاني لحظة ارتطامهما بالأرض.
ب) ارتفاع البناية.

١٦٦

الدرس ٣-٣ المعدلات المرتبطة بالزمن

النتاجات الخاصة

- يفسّر مفهوم المعدل الزمني.
- يحل مسائل حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن

المفاهيم والمصطلحات

معدل التغير، المعدل الزمني، المعدلات المرتبطة بالزمن.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي:
الاشتقاق الضمني، مساحة بعض الأشكال الهندسية، حجوم بعض المجسمات والمساحة الجانبية والكلية لها. لذا يقتضي الأمر قبل البدء بتدريس هذا الموضوع مراجعة الطلبة بما يأتي:
جد $\frac{د ص}{د س}$ من الاقتران $س^٢ + ص^٢ - س ص = ٠$
سؤال الطلبة عن مساحة المربع، المستطيل، المثلث، الدائرة، القطاع الدائري، القطعة الدائرية، المثلث بدلالة طولي ضلعين وزاوية محصورة بينهما، مساحة المثلث المتساوي الأضلاع، وحجم كل من المكعب، المخروط، والمخروط الناقص، ومتوازي المستطيلات، والأسطوانة والمساحة الجانبية لكل منها، وحجم الكرة ومساحة سطحها، وكذلك تذكير الطلبة بنظرية فيثاغورس وقانون المسافة بين نقطتين، وقانون جيب التمام، وشروط تشابه المثلثات والتناسبات الناتجة منه.
- كتابة المثال المعروض في بداية الدرس على السبورة لتوضيح مفهوم معدل التغير والمعدل الزمني، ويسأل الطلبة أنه إذا افترضنا أن ارتفاع الماء في الخزان يساوي ١,٥م، فكم يكون ارتفاع الماء بعد $\frac{١}{٢}$ ساعة؟ هل يتغير نصف قطر سطح الماء بعد مرور ساعة؟
- مناقشة الطلبة بعدد من الأمثلة التوضيحية لمتغيرات مرتبطة بالزمن (اقترانات زمنية) قبل البدء بمناقشة أمثلة الكتاب.
- إعطاء الوقت الكافي للطلبة للتدرب على اشتقاق بعض العلاقات بالنسبة للزمن ومناقشة مثال (١) مع الطلبة مركّزًا على قراءة المثال أكثر من مرة من أجل فهم المثال، واطلب إلى بعضهم صياغة المثال بلغتهم الخاصة، بعد ذلك نفذ خطوات حل المسألة لحل المثال.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) في دفاترهم.
- كتابة مثال (٢) على السبورة ومناقشته مع الطلبة مع التأكيد على ضرورة تنفيذ خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن، تكليف الطلبة تحديد المتغيرات والثوابت في المثال، وتكليفهم حل تدريب (٢) في دفاترهم.

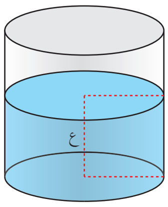
معلومات إضافية

٣-٣ المعدلات المرتبطة بالزمن
Related Rates

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تفسر مفهوم المعدل الزمني.
٢- تحل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.

إذا كان لديك خزان ماء أسطواني (الشكل (٣-٣))، يخرج منه الماء بشكل منتظم، فإنه بمرور الزمن يتغير ارتفاع الماء (ع) في الخزان وكذلك حجمه (ح) ويبقى نصف قطر سطح الماء ثابتًا، حيث إن الماء يأخذ شكل الخزان، فهل يمكنك إيجاد معدل التغير (سرعة انخفاض مستوى سطح الماء في الخزان؟
بما أنه في كل لحظة زمنية يكون هناك قيمة لكل من الارتفاع والحجم أي أنه يمكن اعتبار كل من ارتفاع الماء وحجمه اقترانًا بدلالة الزمن:
ح = ق(ن) ، ع = هـ(ن)



الشكل (٣-٣)

ويكون $\frac{د ح}{د ن}$ هو معدل تغير الحجم بالنسبة للزمن (ن) (سرعة تغير الحجم)،
$\frac{د ع}{د ن}$ هو معدل تغير ارتفاع الماء بالنسبة إلى الزمن (ن) (سرعة تغير ارتفاع الماء).
يسمى كل من $\frac{د ح}{د ن}$ ، $\frac{د ع}{د ن}$ **معدلاً زمنيًا**.
وحيث إن ح، ع مرتبطان بالعلاقة : $ح = \pi نق^٢ ع$ ....(١) (حجم الأسطوانة)
وباشتقاق طرفي العلاقة (١) ضمنيًا بالنسبة للزمن تحصل على :
$\frac{د ح}{د ن} = \pi نق^٢ \frac{د ع}{د ن}$ ....(٢) (تذكر نق ثابت لا يتغير بمرور الزمن)
وهذه العلاقة تربط بين المعدلين المرتبطين بالزمن : $\frac{د ح}{د ن}$ ، $\frac{د ع}{د ن}$
افرض أن الماء يخرج من الخزان بمعدل ٠,٠٠٣م٣/ دقيقة، احسب سرعة انخفاض مستوى سطح الماء في الخزان.

١٦٧

وبالتعويض عن س في المعادلة (١) تجد أن: $(٣)^٢ + ص^٢ = ٢٥$ ومنه ص= ٤، ص = -٤

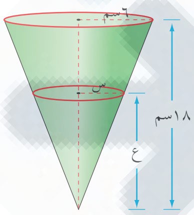
ملاحظة
ص = -٤ تهمل لأن ص عبارة عن بعد الطرف العلوي للسّلم عن الأرض.

وبتعويض ص= ٤ في المعادلة (٢)، تجد أن:
$\left.\frac{دص}{د ن}\right|_{س=٣} = \frac{-٣}{٤} \times ٢ = \frac{-٣}{٢}$ م/ث ، أي أن الطرف العلوي للسلم يقترب من الأرض بمعدل ١,٥ م/ث.

تدريب (١)
في المثال (١) جد سرعة تغير الزاوية بين السّلم والأرض عندما يكون الطرف السفلي على بعد ٢,٥ م من الحائط.

مثال (٢)

إناء مخروطي الشكل قاعدته أفقية ورأسه إلى أسفل، يُسكب فيه الماء بمعدل ٢٠ سم٣/ث ، فإذا كان قطر قاعدة الإناء يساوي ١٢ سم وارتفاعه ١٨ سم، جد معدل تغير ارتفاع الماء في الإناء عندما يصبح ارتفاع الماء فيه ١٠سم.



الشكل (٣-٥)

الحل

افرض أن حجم الماء في لحظة معينة (ح)، وارتفاعه (ع)، ونصف قطر سطح الماء (س)، ومعلوم لديك معدل التغير في الحجم
$\frac{دح}{د ن} = ٢٠$سم٣/ث
والمطلوب هو إيجاد معدل التغير في ارتفاع سطح الماء $\left.\frac{د ع}{د ن}\right|_{ع=١٠}$
لاحظ أن كلاًّ من ح، س، ع كميات متغيرة، وأن العلاقة التي تربط هذه المتغيرات مع بعضها هي:
$ح = \frac{١}{٣} \pi س^٢ ع$ ....(١)

١٦٩

الأخطاء الشائعة

- تتركز الأخطاء لدى الطلبة في هذا الدرس حول عدم استطاعة بعضهم تكوين العلاقات تكوينًا صحيحًا، ويمكن تفادي ذلك من خلال التدريب على تكوين العلاقات.
- خطأ في تحديد زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض، بيّن لهم ذلك من خلال الرسم لزاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

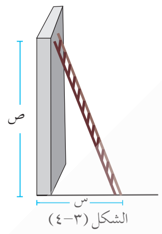
إذن $\frac{دح}{دن} = -٠{,}٠٠٣$ (لاحظ أن إشارة المعدل الزمني سالبة لأن المتغير (الحجم) يتناقص بمرور المزمن)

ومنه يكون المطلوب إيجاد $\frac{دع}{دن}$ عندما $\frac{دح}{دن} = -٠{,}٠٠٣$ وبالتعويض في المعادلة (٢) تجدأن:

$-٠{,}٠٠٣ = \pi$ نق^٢ $\frac{دع}{دن}$ ومنه $\frac{دع}{دن} = \frac{-٠{,}٠٠٣}{\pi \text{ نق}^٢}$ م^٣/د ، أي أن مستوى سطح الماء ينخفض بمعدل $\frac{٠{,}٠٠٣}{\pi \text{ نق}^٢}$ متر في الدقيقة.

مثال (١)

سُلّم طوله ٥م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا انزلق الطرف السفلي مبتعدًا عن الحائط بمعدل ٢م/ث، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م عن الحائط.



الشكل (٣–٤)

الحل

افرض: س بعد الطرف السفلي للسّلم عن الحائط، ص بعد الطرف العلوي للسلم عن الأرض، انظر الشكل (٣–٤).

من خلال نص السؤال، حدد الثوابت والمتغيرات والمعدلات الزمنية المعلومة والمطلوبة كما يأتي:

المعطيات:

$\frac{دس}{دن} = ٢$م/ث (لاحظ أن إشارة المعدل هنا موجبة، لأن س تزداد بمرور الزمن).

المطلوب:

إيجاد $\frac{دص}{دن}$ عندما س = ٣م

إبحث عن علاقة تربط المتغيرات س ، ص، فنجد من خلال نظرية فيثاغورس أن:

س^٢ + ص^٢ = ٢٥ .... (١)

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات ، $\frac{دس}{دن}$ ، $\frac{دص}{دن}$ ، إشتق طرفي المعادلة (١) ضمنيًّا بالنسبة للزمن فنحصل على:

٢س $\frac{دس}{دن}$ + ٢ص $\frac{دص}{دن}$ = صفر ، ومنه $\frac{دص}{دن} = \frac{-س}{ص} \times \frac{دس}{دن}$ .... (٢)

ولإيجاد قيمة $\left.\frac{دص}{دن}\right|_{س=٣}$ يلزمك معرفة قيمة ص عندما س= ٣

وبما أن $\frac{دح}{دن}$ معلومة ، $\frac{دع}{دن}$ مطلوبة ، $\frac{دس}{دن}$ مجهولة ولا يمكنك إيجادها، لذلك لا بد من أن تجد ع بدلالة س وذلك من خلال تشابه المثلثات تجد أن:

$\frac{س}{ع} = \frac{٦}{١٨}$ ، ومنه س = $\frac{١}{٣}$ ع

وبتعويض $\frac{ع}{٣}$ بدلا عن س في المعادلة (١) تحصل على ح = $\frac{١}{٢٧} \pi$ ع^٣ .... (٢)

وباشتقاق طرفي المعادلة (٢) ضمنيًّا بالنسبة للزمن ينتج:

$\frac{دح}{دن} = \frac{٣}{٢٧} \times \pi \times$ ع^٢ $\frac{دع}{دن}$ وبالتعويض عن قيمة كل من $\frac{دح}{دن}$ ، ع تجد أن:

$٢٠ = \frac{١}{٩} \times \pi \times ١٠٠ \frac{دع}{دن}$ ، ومنه $٢٠ = \frac{١٠٠}{٩} \pi \times \frac{دع}{دن}$

$\therefore \frac{دع}{دن} = \frac{٩ \times ٢٠}{١٠٠\pi} = \frac{١٨٠}{١٠٠\pi} = \frac{٩}{٥\pi}$ سم/ث

أي أن ارتفاع الماء يتزايد في الإناء بمعدل $\frac{٩}{٥\pi}$ سم/ث.

تدريب (٢)

يتساقط الرمل مكوّنا كومة على شكل مخروط دائري قائم على الأرض بمعدل ٠,٤٣٢ م^٣/ ث ، إذا كان الرمل الساقط يشكل كومة ارتفاعها دائمًا يساوي ربع قطر قاعدتها ، فجد سرعة ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها ١,٢ من المتر.

مما سبق يتضح أنه لحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن يمكنك اتباع الخطوات الآتية:

١) ارسم الشكل إن أمكن مع كتابة البيانات عليه.
٢) حدد الثوابت والمتغيرات والمعدلات الزمنية المعلومة والمطلوبة.
٣) ابحث عن علاقة رياضية تربط بين المتغيرات والثوابت في المسألة بحيث تكون معدلات جميع متغيراتها معلومة باستثناء المتغير المطلوب إيجاد معدل تغيره (في هذه الخطوة يتم استبدال متغير بدلالة الآخر).
٤) اشتق طرفي العلاقة ضمنيًّا بالنسبة للزمن من أجل الحصول على علاقة تربط بين المعدلات الزمنية.
٥) عوّض في العلاقة (بعد الاشتقاق) القيم المعلومة لإيجاد المطلوب.

– يخطئ بعض الطلبة في إيجاد مساحة القطاع الدائري، بعدم تحويل قياس الزاوية من التقدير الستيني إلى التقدير الدائري، أكد عليهم ضرورة التحويل إلى التقدير الدائري قبل حساب المساحة.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– صندوق قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه يساوي ثلاثة أمثال طول ضلع قاعدته، فإذا كان طول ضلع القاعدة يتمدد بمعدل ٠,٢٥ سم/ث، احسب:

أ) معدل التغير في حجم الصندوق، عندما يكون طول الضلع ٨ سم.

ب) معدل التغير في المساحة الكلية لسطحه عندما يكون طول الضلع ٨سم.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: الملاحظة.

– الأداة: قائمة الشطب (٢ – ٣)، بند (٣).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

– كتاب الطالب، آلة حاسبة.

المادة المحوسبة

الدرس ٣-٣ المعدلات المرتبطة بالزمن

النتاجات الخاصة

– يفسّر مفهوم المعدل الزمني.
– يحل مسائل حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.

المفاهيم والمصطلحات

معدل التغير، المعدل الزمني، المعدلات المرتبطة بالزمن.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مناقشة مثال (٣) مع الطلبة مع التركيز على قراءة المثال أكثر من مرة من أجل فهمه، ثم يطلب إلى بعضهم صياغة المثال بلغتهم الخاصة، بعد ذلك تنفذ خطوات حل المسألة لحل المثال.
– تكليف الطلبة حل تدريب (٣) في دفاترهم.
– كتابة مثال (٤) على السبورة ومناقشته مع الطلبة مؤكّدًا ضرورة تنفيذ خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن، تكليف الطلبة تحديد المتغيرات والثوابت في المثال، وتكليفهم حل تدريب (٤) في دفاترهم.
– مناقشة باقي الأمثلة مع الطلبة، وتكليفهم حل تدريب بعد كل مثال،قدّم لهم الإرشادات اللازمة أثناء الحل محدّدًا الأخطاء ومعالجًا لها أولاً بأول.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٣)

تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 + ٥}$ بحيث يزداد الإحداثي السيني بمعدل ٣ سم/ث ، جد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢ ، ٠) عندما تكون س = ٥ .

الحل

افرض أن النقطة (س ، ص) تقع على منحنى **ق** وأن المسافة بينها وبين النقطة (٢ ، ٠) هي **ف**.

المعطيات: $\frac{\text{دس}}{\text{د ن}} = ٣$ سم / ث

المطلوب: $\left.\frac{\text{دف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=٥}$

العلاقة التي تربط بين المتغيرات س،ص ، ف هو قانون المسافة بين النقطتين

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2 + (\text{س}_2 - \text{س}_1)^2}$$

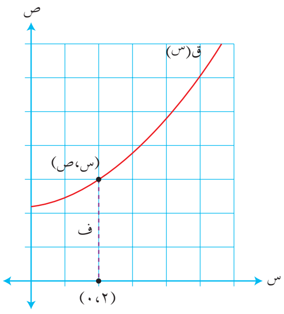
ومنه $\text{ف} = \sqrt{(\text{ص} - ٠)^2 + (\text{س} - ٢)^2}$

لكن $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^2 + ٥}$

إذن $\text{ف} = \sqrt{\text{س}^2 + ٥ + (\text{س} - ٢)^2}$

اشتق العلاقة بالنسبة للزمن تجد أن :

$$\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \frac{٢\text{س}\frac{\text{دس}}{\text{دن}} + ٢(\text{س} - ٢)\frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{٢\sqrt{\text{س}^2 + ٥ + (\text{س} - ٢)^2}}$$



الشكل (٣-٦)

ومنه $\left.\frac{\text{دف}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=٥} = \frac{٥\times٣ + ٣\times٣}{\sqrt{٢٥ + ٥ + ٩}} = \frac{٢٤}{\sqrt{٣٩}}$ سم/ث

تدريب (٣)

تتحرك نقطة على منحنى الاقتران $\text{ص} = \text{س}^2 + ٢$، وفي لحظة ما كان معدل تغير إحداثيها السيني ٠,٢٥ سم /ث، وكان معدل التغير في إحداثيها الصادي ٠,٤٣ سم/ث، جد بعد النقطة المتحركة على المنحنى عندئذ عن النقطة (٠ ، ٢).

١٧١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

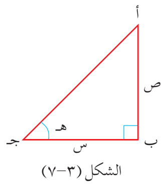
الأخطاء الشائعة

– خطأ بعض الطلبة في إيجاد مساحة المثلث بدلالة طولي ضلعين فيه والزاوية المحصورة بينهما، فيأخذون أي ضلعين وأية زاوية غير المحصورة بينهما، وجّه انتباهم إلى ذلك من خلال الأسئلة.

مثال (٤)

في مثلث قائم الزاوية، إذا كان طولا الضلعين المقابل والمجاور للزاوية الحادة **هـ** في اللحظة **ن** هما ص، س على التوالي، وإذا كان معدل تزايد **س** هو ١سم/ث، ومعدل تناقص **ص** هو ٠,٢٥ سم/ث، فجد سرعة تغير الزاوية **هـ** في اللحظة التي يتساوى فيها الضلعان س، ص، حيث س = ٢سم.

الحل



الشكل (٣–٧)

افرض أن هـ الزاوية الحادة في اللحظة ن ، انظر الشكل (٣–٧)

المعطيات :

$\frac{\text{دس}}{\text{د ن}} = ١\text{سم/ث}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{د ن}} = -٠,٢٥ \text{ سم/ث}$

المطلوب :

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ عندما س = ص = ٢سم.

العلاقة التي تربط بين المتغيرات س ، ص ، هـ هي ظا هـ $= \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ .... (١)

باشتقاق العلاقة (١) ضمنيا بالنسبة إلى الزمن تجد أن:

$$\text{قا}^٢\text{هـ} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{س} \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - \text{ص} \frac{\text{دس}}{\text{دن}}}{\text{س}^٢} \text{ .... (٢)}$$

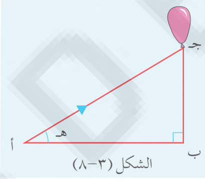
عندما س = ص = ٢ يصبح المثلث قائمًا ومتساوي الساقين، وعندئذ تصبح هـ $= \frac{\pi}{٤}$ ،

وبالتالي قاهـ $= \sqrt{٢}$ ، وبالتعويض في (٢) تجد أن:

$$(\sqrt{٢})^٢ \times \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{٢ \times -٠,٢٥ - ٢ \times ١}{(٢)^٢} \text{ ومنه } \frac{\text{دهـ}}{\text{دن}} = \frac{-٥}{١٦} \text{ راديان/ث}$$

تدريب (٤)

يرتفع بالون رأسيًا إلى أعلى بمعدل ثابت قدره ٤٢م/دقيقة. إذا تم رصد البالون من مشاهد على الأرض يبعد ١٥٠ مترًا عن موقع البالون على الأرض، فجد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد (هـ) للبالون عندما يكون البالون على ارتفاع ١٥٠ مترًا من سطح الأرض.(لاحظ الشكل (٣–٨)).

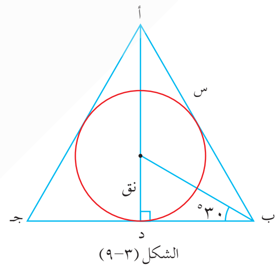


الشكل (٣–٨)

١٧٢

مثال (٥)

تتمدد أضلاع مثلث متساوي الأضلاع بمعدل ٢سم/دقيقة، رسمت دائرة داخل المثلث تمس أضلاعه، وأخذت تتمدد مع المثلث، جد معدل تمدد مساحة المنطقة المحصورة بين المثلث والدائرة، عندما يكون طول ضلع المثلث ١٢سم.



الشكل (٣–٩)

الحل

إفرض أن: س طول ضلع المثلث أ ب جـ في اللحظة ن.

وأن **نق** نصف قطر الدائرة في اللحظة ن.

$\text{م}_١$ مساحة المثلث، $\text{م}_٢$ مساحة الدائرة، **م** مساحة المنطقة المطلوبة.

المعطيات: $\frac{\text{دس}}{\text{د ن}} = ٢\text{سم/د}$

المطلوب: إيجاد $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ عندما س = ١٢ سم.

لاحظ أن : $\text{م} = \text{م}_١ - \text{م}_٢$ ، أي أن :

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س}^٢ \times \text{جا } ٦٠° - \pi \times \text{نق}^٢ = \frac{\sqrt{٣}}{٤} \text{س}^٢ - \pi \text{ نق}^٢$$

لكن ظا ٣٠° $= \frac{\text{نق}}{\text{ب د}} = \frac{\text{نق}}{٠,٥\text{س}}$ ومنه نق $= \frac{\text{س}}{٢\sqrt{٣}}$ ومنه

$\text{نق}^٢ = \frac{\text{س}^٢}{١٢}$

إذن : تصبح م $= \frac{\sqrt{٣}}{٤} \text{س}^٢ - \frac{\pi \text{س}^٢}{١٢}$ ....(١)

وباشتقاق العلاقة (١) ضمنيًّا بالنسبة للزمن تجد أن:

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = (\frac{\sqrt{٣}}{٤} - \frac{\pi}{١٢}) \times ٢\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$$

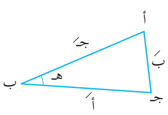
وبالتعويض عن س = ١٢، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٢$، تجد أن :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١٢\sqrt{٣} - ٤\pi}{٤٨} \times ٢ \times ١٢ \times ٢ = ١٢\sqrt{٣} - ٤ \pi \text{ سم}^٢\text{/د}$$

تذكر

مساحة المثلث أ ب جـ

$= \frac{١}{٢} \times \text{أَ} \times \text{جـَ} \times \text{جا هـ}$



١٧٣

– خطأ بعض الطلبة في تثبيت سرعة زاوية بالدرجات وعدم تحويلها بالراديان، أكّد لهم أن سرعة التغير في الزاوية تحسب بالراديان، لذا يجب التحويل من الدرجات إلى الراديان.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته ويتمدد بالحرارة، جد طول نصف قطر قاعدته عندما يكون معدل الزيادة في نصف قطره يساوي ٠,٧٥ سم/ث، ومعدل التغير في حجمه يساوي ١٢ π سم^٣ / ث.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة شطب (٢ – ٥).

– استخدام قائمة الشطب (٢ – ٥) لتقييم أداء الطلبة في حل المشكلات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠١ سم/ث، جد معدل تناقص حجم المكعب عندما يكون طول ضلعه ١٠سم.

٢) حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات، بعدا قاعدته ٢٠م، ٨م وعمقه ٣م، إذا ضخ الماء في الحوض بمعدل ٥م³/دقيقة، جد سرعة ارتفاع الماء فيه.

٣) سلّم طوله ٣٦٠سم، يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض أفقية، إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٩٠ سم/ ث، وفي لحظة ما كان الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨٠ سم من الحائط، جد عند هذه اللحظة:

أ) سرعة انزلاق الطرف العلوي للسلم.

ب) معدل التغير في مساحة المثلث المكون من السلم والأرض والحائط.

جـ) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض.

٤) صفيحة معدنية مثلثة الشكل، ارتفاعها يساوي نصف طول قاعدتها، تتمدد بالحرارة فتزداد مساحتها بمعدل ٠,٠٠٥ سم²/ث. جد معدل التغير في طول قاعدة الصفيحة عندما يصبح طولها ١٠سم.

٥) كرة حديدية قطرها ٨سم مغطاة بطبقة من الجليد، فإذا كان الجليد ينصهر بمعدل ١٠سم³/ دقيقة، جد:

أ) سرعة تناقص حجم الجليد عندما يكون سمكه ٢سم.

ب) سرعة تناقص مساحة السطح الخارجي للجليد عند تلك اللحظة.

٦) خطان حديديان يميل أحدهما على الآخر بزاوية قياسها ٦٠°، ويلتقيان في النقطة م، يسير القطار (أ) على أحدهما بسرعة ٨٠ كم/ساعة مقترباً من النقطة م، ويسير القطار (ب) على الخط الآخر وبسرعة ٥٠ كم/ساعة مقترباً من النقطة م. عند الساعة التاسعة صباحاً كان القطاران على بعد ٢١٠كم، ١٨٠كم على الترتيب من النقطة م. جد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحاً.

١٧٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

النتاجات الخاصة

– يفسّر مفهوم المعدل الزمني.
– يحل مسائل حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.

المفاهيم والمصطلحات

معدل التغير، المعدل الزمني، المعدلات المرتبطة بالزمن.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.
– تكليف كل مجموعة حل أحد الأسئلة الواردة في الكتاب وهي (١، ٢، ٣، ٦، ٨، ٩).
– بعد إنتهاء المجموعات من الحل كلّف أربع مجموعات منها بعرض حل السؤال الذي كلفت به.
– قم بإجراء حوار ومناقشة للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٧) بدأت النقطتان ب،جـ الحركة معًا من نقطة الأصل (أ) بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب بسرعة ٤ وحدات/ث، وتتحرك النقطة جـ في الربع الأول وعلى منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} ، بحيث يبقى دائمًا طول أ جـ يساوي طول ب جـ.
جد معدل التغير في مساحة المثلث أ ب جـ بعد ثانيتين من بدء الحركة.

٨) أثبت أن معدل التغير في حجم الكرة بالنسبة إلى نصف قطرها يساوي مساحة سطح الكرة.

٩) رجل طوله ١٨٠سم، يقف أمام مصباح كهربائي يرتفع عن سطح الأرض بمقدار ٥٤٠ سم، إذا أخذ الرجل في الاقتراب من المصباح بمعدل ٣٠٠سم/ث، جد معدل التغير في الزاوية المحصورة بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل، عندما يكون الرجل على بعد ١٨٠سم من قاعدة المصباح.

١٠) ابتدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (أ،٠) بعكس اتجاه عقارب الساعة، بحيث يزداد طول قوس الدائرة الذي ترسمه في أثناء حركتها بمعدل ٨سم/ ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (أ ، ٠) عندما يقابل القوس الذي ترسمه زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$.

١١) جسر للمشاة يرتفع عن مستوى الشارع ٦م، يسير عليه رجل بمعدل ٣ كم/ ساعة وفي اللحظة نفسها مرت من تحته سيارة بسرعة ٦٠كم/ساعة، جد معدل ابتعاد السيارة عن الرجل بعد دقيقة واحدة من بدء الحركة.

١٢) مضمار سباق دائري يوجد على طرف قطره مصدر ضوء، انطلق حصان من نهاية قطر آخر عمودي على القطر الأول مقتربًا من المركز بسرعة ٤كم/دقيقة، جد سرعة تغير ظل الحصان على المضمار عندما يقطع الحصان نصف المسافة عن المركز.

١٣) مربع تتمدد أضلاعه بمعدل ٤سم/دقيقة، رسمت دائرة داخل المربع، وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى ملامسة لأضلاعه، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين المربع والدائرة، عندما يكون طول ضلع المربع ٢٠سم.

١٧٥

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

اثراء

– يتحرك مستقيم في الربع الأول بحيث يبقى ملامسًا للدائرة التي معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = ١، فإذا كان معدل تغير الإحداثي السيني لنقطة التماس ٣ سم /ث، جد معدل تغير الإحداثي االسيني لنقطة تقاطع المماس مع محور السينات عندما يكون الإحداثي السيني لنقطة التقاطع يساوي ٢ سم.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.
– **الأداة:** اختبار قصير.
وذلك من خلال حلّ الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيح حلولهم بشكل فردي، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٣-٤ التزايد والتناقص

النتاجات الخاصة

– يبيّن العلاقة بين المشتقة الأولى ومجالات التزايد والتناقص له.
– يستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الأولى، التزايد، التناقص.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بخواص كثيرات الحدود مبيّنًا لهم علاقة إشارة المعامل الرئيس باتجاه منحنى الاقتران، والعلاقة بين درجة الاقتران وعدد المرات التي يقطع بها المنحنى محور السينات وعلاقة ذلك بعدد مرات التغير في الإشارة.
– مناقشة مقدّمة الدرس في كتاب الطالب.

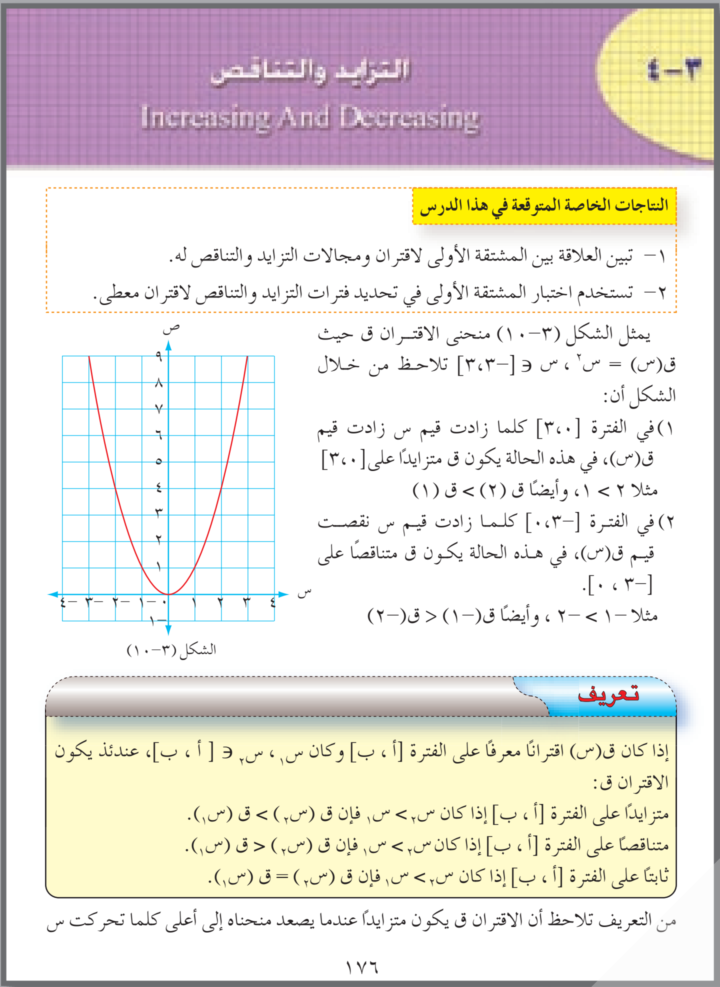
مجموعات تعاونية

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية من (٤ – ٦) طلاب، واطلب من كل مجموعة تنفيذ ورقة العمل (٣ – هـ) التي تهدف إلى استنتاج تعريف التزايد والتناقص.
– عرض نتائج الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابتها على السبورة وتقديم مجموعة كافية من الأمثلة لدعم هذه الاستنتاجات.
– أخذ الاقتران الأول من ورقة العمل وإيجاد المشتقة الأولى له، وبيّن للطلبة العلاقة بين ما توصلوا إليه وبين إشارة المشتقة الأولى، كرّر ذلك بالنسبة للاقترانين الثاني والثالث، بعد ذلك قدم لهم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد مجالات التزايد والتناقص.
– مناقشة مثال (١)، و(٢) مع الطلبة وتكليفهم حل تدريب (١) في دفاترهم.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.



٣-٤ التزايد والتناقص
Increasing And Decreasing

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تبين العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران ومجالات التزايد والتناقص له.
٢– تستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.

يمثل الشكل (٣–١٠) منحنى الاقتران ق حيث ق(س) = س٢ ، س ∈ [–٣،٣] تلاحظ من خلال الشكل أن:

١) في الفترة [٠،٣] كلما زادت قيم س زادت قيم ق(س)، في هذه الحالة يكون ق متزايدًا على [٠،٣]
مثلا ٢ > ١، وأيضًا ق (٢) > ق (١)

٢) في الفترة [–٣،٠] كلما زادت قيم س نقصت قيم ق(س)، في هذه الحالة يكون ق متناقصًا على [–٣ ، ٠].
مثلا –١ > –٢ ، وأيضًا ق(–١) < ق(–٢)

الشكل (٣–١٠)

تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا معرفًا على الفترة [أ ، ب] وكان $س_1$ ، $س_2$ ∈ [أ ، ب]، عندئذ يكون الاقتران ق:
متزايدًا على الفترة [أ ، ب] إذا كان $س_2 > س_1$ فإن ق ($س_2$) > ق ($س_1$).
متناقصًا على الفترة [أ ، ب] إذا كان $س_2 > س_1$ فإن ق ($س_2$) < ق ($س_1$).
ثابتًا على الفترة [أ ، ب] إذا كان $س_2 > س_1$ فإن ق ($س_2$) = ق ($س_1$).

من التعريف تلاحظ أن الاقتران ق يكون متزايدًا عندما يصعد منحناه إلى أعلى كلما تحركت س

١٧٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

تتركز الأخطاء لدى الطلبة في هذا الدرس حول:
– عدم استطاعة بعضهم إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة.
– عدم استطاعة بعضهم تحديد المجال لبعض الاقترانات (الجذر الزوجي).

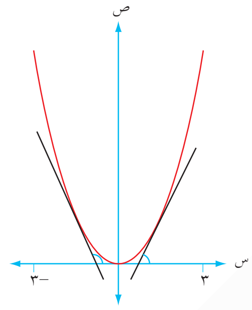
إلى اليمين ، ويكون متناقصًا عندما يهبط منحناه إلى أسفل كلما تحركت س إلى اليمين.

في الشكل (٣-١١) إذا رسمت مماسًا لمنحنى ق في الفترة (٠ ، ٣) تجد أن المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ما علاقة ذلك بإشارة مشتقة الاقتران ق؟

وإذا رسمت مماسًا لمنحنى ق في الفترة (-٣ ، ٠) تجد أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ما علاقة ذلك بإشارة مشتقة الاقتران ق؟



الشكل (٣-١١)

نظرية

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على [أ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على (أ،ب) وكان :

١) قَ (س) > ٠ لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) ، فإن ق(س) يكون متزايدًا في الفترة [أ، ب].

٢) قَ (س) < ٠ لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) ، فإن ق(س) يكون متناقصًا في الفترة [أ، ب].

٣) قَ (س) = ٠ لجميع قيم س ∋ (أ ، ب) ، فإن ق(س) يكون ثابتًا في الفترة [أ، ب].

من خلال هذه النظرية تلاحظ أنه لإيجاد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق، عليك إيجاد مشتقته الأولى ودراسة إشارتها كما في الأمثلة الآتية:

مثال (١)

ليكن ق(س) = س^{٣} - ١٢س ، س ∋ [-٥،٥]، حدد فترات التزايد والتناقص لهذا الاقتران.

الحل

ق متصل على [-٥،٥] وقابل للاشتقاق على (-٥،٥) لأنه كثير حدود

قَ (س) = ٣س^{٢} - ١٢ = ٠ ، أي أن ٣ (س - ٢) (س + ٢) = ٠

ومنه س = ٢ ، س = -٢

١٧٧

يبين الجدول (٣-١) إشارة قَ (س)، وبموجب اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تجد أن:

الجدول (٣-١)

س	٥	٢	-٢	-٥
قَ(س)	++++++++	----------	++++++++++	
ق(س)	↗	↘	↗	

١) قَ (س) > ٠، في الفترتين (-٥ ، -٢) ، (٢ ، ٥) وعليه يكون ق (س) متزايدًا في الفترتين [-٥ ، -٢]، [٢ ، ٥].

٢) قَ (س) < ٠ في الفترة (-٢ ، ٢) وعليه يكون ق (س) متناقصًا في الفترة [-٢ ، ٢].

والجدول (٣-١) يوضح إشارة قَ (س) وفترات تزايد الاقتران ق وفترات تناقصه، (الرمز " ↗ " في الجدول يدل على تزايد الاقتران ، والرمز " ↙ " يدل على تناقص الاقتران)،

تدريب (١)

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} + ١

مثال (٢)

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق (س) = جا س ، س ∋ [٠، ٢π].

الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق على (٠ ، ٢π)

قَ (س) = جتا س

تجد أن قَ (س) = ٠ عندما:

س = $\frac{\pi}{٢}$ ، س = $\frac{٣\pi}{٢}$.

الجدول (٣-٢)

س	٢π	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{\pi}{٢}$	٠
قَ(س)	++++++++	----------	++++++++++	
ق(س)	↗	↘	↗	

والجدول (٣-٢) يبين إشارة قَ (س) ، وبموجب اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

قَ (س) > ٠، لكل س ∋ (٠، $\frac{\pi}{٢}$) ، ($\frac{٣\pi}{٢}$، ٢π) وعليه يكون ق(س) متزايدًا في [٠، $\frac{\pi}{٢}$] ، [$\frac{٣\pi}{٢}$، ٢π].

قَ (س) < ٠، لكل س ∋ ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$) وعليه يكون ق(س) متناقصًا في [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$].

١٧٨

- عدم استطاعة بعضهم إيجاد أصفار المشتقة الأولى.
- عدم استطاعة بعضهم تحليل بعض الاقترانات.
- يمكن تفادي ذلك بالتدريب.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- إذا كان ق (س) = س^{٢}، س ∋ [-٣، ٢] حدّد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية:** القلم والورقة.
- **الأداة:** اختبار قصير.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتمارين والمسائل الواردة في الدرس.

- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** قائمة الشطب (٢ - ٤).

تابع عمل المجموعات مستخدمًا قائمة الشطب.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

- ورد موضوع التزايد والتناقص في مبحث الرياضيات، للصف الحادي عشر، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٣-٤ التزايد والتناقص

النتاجات الخاصة

- يبيّن العلاقة بين المشتقة الأولى ومجالات التزايد والتناقص له.
- يستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الأولى، التزايد، التناقص.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.
- توزيع ستة من فروع السؤال الأول على المجموعات بحيث تبحث كل مجموعة في فرع واحد فقط.
- بعد انتهاء المجموعات تكلّف أربع منها بعرض ما توصلوا إليه على السبورة.
- إجراء حوارٍ بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

تدريب (٢)

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = جتا ٢س ، س ∋ [٠ ، ٢π].

مثال (٣)

إذا كان ق : [−١ ، ٥] ⟵ ح، حيث:

ق(س) = { س^٢+١ ، −١ ≤ س < ١
٢س − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٣
٥ ، ٣ < س ≤ ٥

فجد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

الحل

لاحظ أن ق(س) غير متصل عند س = ١،

قَ (س) = { ٢س ، −١ < س < ١
٢ ، ١ < س < ٣
٠ ، ٣ < س < ٥

تكون قَ (س) غير موجودة عندما س = −١، ١ ، ٣ ، ٥
وتكون قَ (س) = ٠،
عندما ٢س = ٠ أي عندما س = ٠

الجدول (٣-٣)

س	٥	٣	١	٠	−١
قَ (س)	صفر	+ + +	+ + +	− − − −	
ق(س)	→	↗	↗	↘	

ومن جدول الإشارات (٣-٣) وبموجب اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تجد أن:
قَ (س) > ٠، لكل س ∋ (٠ ، ١) ، (١ ، ٣) وعليه يكون ق (س) متزايداً في: [٠، ١) ، [١، ٣].
قَ (س) < ٠، لكل س ∋ (−١ ، ٠) وعليه يكون ق (س) متناقصًا في: [−١ ، ٠].
قَ (س) = ٠، لكل س ∋ (٣ ، ٥) وعليه يكون ق (س) ثابتًا في: [٣ ، ٥].

١٧٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.


تمارين ومسائل

١) حدد فترات التزايد والتناقص لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $س^٢ + ٦س - ٧$

ب) ق(س) = س − [٣ − س] ، س ∈ [−٢ ، ٦]

جـ) ق(س) = جاس ، س ∈ [٠ ، ٢π]

د) ق(س) = $(س - ١)^٣$

هـ) ق(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ ، س ∈ [−٢ ، ٢]

و) ق(س) = $س^{\frac{٢}{٣}}$

ز) ق(س) = س + جاس ، س ∈ [٠ ، $\frac{٣π}{٢}$]

ح) ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \leq ٠ \\ ١ & ، ٠ < س < ٢ \\ \sqrt{س - ٢} & ، س \geq ٢ \end{cases}$

ط) ق(س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ + ٩}$

ي) ق(س) = $\begin{cases} ١ - ٢س & ، -٢ \leq س < ١ \\ |س - ٤| & ، ١ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

٢) بالاعتماد على الشكل (٣−١٢) الذي يمثل منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الثالثة، حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

الشكل (٣−١٢)

٣) إذا كان ق'(س) = هـ'(س) ، لكل س ∈ ح ، أثبت أن ق(س) − هـ(س) = ثابتًا.

٤) إذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين على [أ ، ب] وقابلين للاشتقاق على (أ ، ب)، وكان كل من ق(س) ، هـ(س) متزايدًا على [أ ، ب]، وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س)، فأثبت أن ل(س) متزايد على [أ ، ب].

١٨٠

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

اثراء

– إذا كان ق (س) اقترانًا متزايدًا على ح، وكان هـ (س) متناقصًا على ح، وكان كل من ق، هـ قابلين للاشتقاق، وكان ل (س) = ٤ ق (س) − ٣ هـ (س) متصلاً وقابلاً للاشتقاق على ح، فأثبت أن ل (س) متزايد على ح.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢ − ٤) لتقويم أداء الطلبة في المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد موضوع التزايد والتناقص في مبحث الرياضيات، للصف الحادي عشر، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

– يحدّد النقاط الحرجة لاقتران معطى.
– يبيّن العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران والقيم القصوى المحلية له.
– يستخدم اختبار المشتقة الأولى في إيجاد القيم القصوى المحلية لاقتران معطى إن وجدت.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الأولى، النقاط الحرجة، القيم القصوى المحلية، العظمى المحلية، القيمة الصغرى المحلية، القيمة العظمى المطلقة، القيمة الصغرى المطلقة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– تدريس الطلبة بخواص كثيرات الحدود وتوضيح علاقة إشارة المعامل الرئيس باتجاه منحنى الاقتران، والعلاقة بين درجة الاقتران وعدد المرات التي يقطع بها المنحنى محور السينات، وعلاقة ذلك بعدد القيم القصوى وبالأعداد الحرجة.
– مناقشة مقدمة الدرس الواردة في كتاب الطالب.

التعليم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية، ويطلب من كل مجموعة تنفيذ ورقة العمل (٣ – ٧) التي تهدف إلى استدراج الطلبة للتوصل إلى تعريف القيم الصغرى والعظمى المحلية.
– عرض نتائج الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابتها على السبورة، وتقديم مجموعة كافية من الأمثلة لدعم هذه الاستنتاجات.
– تقديم تعريف النقطة الحرجة من خلال مجموعة من الأمثلة.
– مناقشة الشكل (٣ – ١٤) من كتاب الطالب.
– أخذ الاقتران المعروض في ورقة العمل وإيجاد المشتقة الأولى له، ثم بيّن للطلبة العلاقة بين ما توصلوا إليه من قيم قصوى وبين إشارة المشتقة الأولى، بعد ذلك يقدم لهم اختبار المشتقة الأولى لايجاد القيم القصوى المحلية منها والمطلقة (إن وجدت).

معلومات إضافية

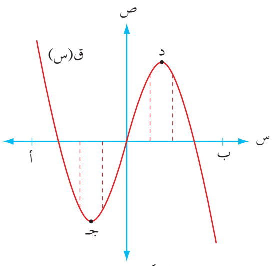
٣-٥ القيم القصوى
Extreme Values

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تحدد النقاط الحرجة لاقتران معطى.
٢– تبين العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران والقيم القصوى المحلية له.
٣– تستخدم اختبار المشتقة الأولى في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لاقتران معطى، إن وجدت.

لاحظ الشكل (٣ – ١٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، المعرف على الفترة [أ،ب]،فإن لهذا الاقتران قيمة صغرى عند النقطة جـ وقيمة عظمى عند النقطة د ...... فسر ذلك.

وستتعلم في هذا الدرس إيجاد القيم القصوى لاقتران معطى بشكل أكثر دقة باستخدام المشتقة الأولى من خلال الشكل (٣ – ١٣).



الشكل (٣–١٣)

هل قَ (جـ) موجودة؟
هل قَ (د) موجودة؟
هل تستطيع رسم مماس وحيد عند كل من النقطتين جـ، د؟ وما علاقة ذلك بالمشتقة الأولى للاقتران ق؟
هل قَ (أ) موجودة؟
هل قَ (ب) موجودة؟
هل تستطيع رسم مماس وحيد عند كل من النقطتين أ، ب؟ وما علاقة ذلك بالمشتقة الأولى للاقتران ق؟

١٨١

٣) ق(١) هي أصغر قيمة يأخذها الاقتران ق في فترة مفتوحة حول العدد ١، لذلك ق(١) هي قيمة صغرى محلية للاقتران ق.
٤) ق(–٣) هي أصغر قيمة يأخذها الاقتران في الفترة [–٣ ، ٣]، لذلك ق(–٣) هي قيمة صغرى مطلقة للاقتران ق.

تعريف

إذا كان ق (س) اقترانًا معرفًا على الفترة [أ ، ب]، وكان $س_١$ ∋ [أ ، ب]، وإذا أمكن إيجاد فترة مفتوحة ف حول العدد $س_١$، فعندئذ:
١) يكون للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند $س_١$ هي :
ق ($س_١$) إذا كان ق ($س_١$) ≤ ق (س) لكل س ∋ ف
٢) يكون للاقتران ق قيمة عظمى مطلقة عند $س_١$ هي :
ق ($س_١$) إذا كان ق ($س_١$) ≤ ق (س) لكل س ∋ [أ ، ب]
٣) يكون للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند $س_١$ هي :
ق ($س_١$) إذا كان ق ($س_١$) ≥ ق (س) لكل س ∋ ف
٤) يكون للاقتران ق قيمة صغرى مطلقة عند $س_١$ هي :
ق ($س_١$) إذا كان ق ($س_١$) ≥ ق (س) لكل س ∋ [أ ، ب]

من خلال المثال (١) ما العلاقة بين النقط الحرجة للاقتران وقيمه القصوى؟

نظرية

إذا كان ق (س) اقترانًا معرفًا على الفترة [أ ، ب] وكانت ق (جـ) قيمة قصوى للاقتران ق حيث جـ ∋ [أ ، ب]، فإن قَ (جـ) غير موجودة أو موجودة وتساوي صفرًا.

تذكر

تسمى القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للاقتران قيمًا قصوى محلية، وكذلك تسمى القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للاقتران قيمًا قصوى مطلقة.

١٨٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تعريف

إذا كانت النقطة جـ في مجال الاقتران ق، فإن النقطة (جـ، ق (جـ)) تسمى نقطة حرجة للاقتران ق إذا كانت:
قَ (جـ) = ٠ أو قَ (جـ) غير موجودة.

مثال (١)

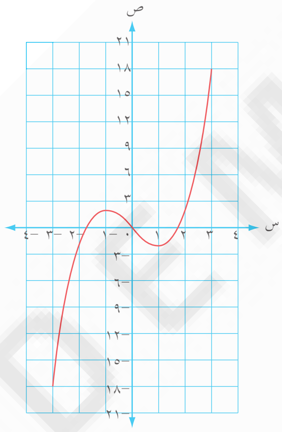
جد النقط الحرجة للاقتران ق (س) = س^{٣} − ٣س ، س ∈ [− ٣، ٣].

الحل

قَ (س) = ٣س^{٢} − ٣ ، قَ (س) = ٠ عندما ٣ س^{٢} − ٣ = ٠ ومنه:
س = ١، س = −١ وكلاهما في الفترة [−٣ ، ٣].
وتكون قَ (س) غير موجودة عندما س = −٣، س = ٣ (أطراف الفترة)
وعليه يكون للاقتران ق أربع نقط حرجة هي
(−١، ٢)، (١، −٢) ، (−٣، −١٨) ، (٣، ١٨)
والآن تأمل الشكل (٣ − ١٤) الذي يمثل منحنى ق(س) ولاحظ أن:

١) ق(−١) هي أكبر القيم التي يأخذها ق(س) في فترة مفتوحة حول العدد −١، لذلك ق (−١) هي قيمة عظمى محلية للاقتران ق.

٢) ق(٣) هي أكبر القيم التي يأخذها ق(س) في الفترة [−٣ ، ٣]، لذلك ق(٣) هي قيمة عظمى مطلقة للاقتران ق.



الشكل (٣−١٤)

١٨٢

إذا كانت النقطة س = جـ نقطة حرجة للاقتران ق، فهل ق (جـ) قيمة قصوى للاقتران ق؟
.... فسر إجابتك.

نظرية (اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى)

إذا كان ق (س) اقترانًا متصلاً على الفترة [أ،ب] وقابلاً للاشتقاق على الفترة (أ،ب)، وكانت (جـ، ق (جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق، حيث جـ ∈ [أ،ب] عندئذ:

١) إذا كان قَ (س) ≤ ٠ لكل س < جـ، وكان قَ (س) ≥ ٠ لكل س > جـ، فإن:
ق(جـ) قيمة عظمى محلية للاقتران ق.

٢) إذا كان قَ (س) ≥ ٠ لكل س < جـ، وكان قَ (س) ≤ ٠ لكل س > جـ، فإن:
ق(جـ) قيمة صغرى محلية للاقتران ق.

والأمثلة الآتية توضح ذلك:

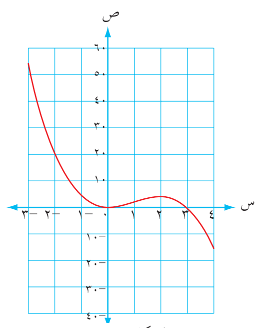
مثال (٢)

جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٣ س^{٢} − س^{٣}، س ∈[−٣ ، ٤]

الحل

لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران طبق اختبار المشتقة الأولى:
ق(س) اقتران كثير حدود متصل لكل س ∈ [−٣، ٤] وقابل للاشتقاق لكل س ∈ (−٣ ، ٤).
جد النقط الحرجة للاقتران، وادرس إشارة المشتقة الأولى حولها تجد أن:

قَ (س) = ٦س − ٣س^{٢}
وتكون قَ (س) = ٠ عندما ٦س − ٣س^{٢} = ٠
٣س (٢ − س) = ٠، أي عندما س = ٠، س = ٢
وتكون قَ (س) غير موجودة عندما س = −٣ ، ٤ (طرفا فترة)
أي أن مجموعة قيم س التي يكون للاقتران ق عندها قيم حرجة هي: {−٣، ٠ ، ٢ ، ٤}



الشكل (٣−١٥)

١٨٤

الأخطاء الشائعة

تتركّز الأخطاء لدى الطلبة في هذا الدرس حول:
− عدم استطاعة بعضهم إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة.
− عدم استطاعة بعضهم تحديد المجال لبعض الاقترانات (الجذر الزوجي).
− عدم استطاعة بعضهم إيجاد أصفار المشتقة الأولى.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

− جد النقط الحرجة للاقترانات الآتية، ثمّ اختبرها لتحديد القيم القصوى المحلية:

أ) ق (س) = | ٦ − ٣ س | .

ب) ق (س) = $\sqrt[3]{\text{س} + ٢}$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− الاستراتيجية : الملاحظة.

− **الأداة:** قائمة الشطب (٢ − ٤) لتقويم أداء المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

− ورد موضوع القيم القصوى في مبحث الرياضيات، للصف الحادي عشر، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

– يحدّد النقاط الحرجة لاقتران معطى.
– يبيّن العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران والقيم القصوى المحلية له.
– يستخدم اختبار المشتقة الأولى في إيجاد القيم القصوى والمحلية والمطلقة لاقتران معطى إن وجدت.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الأولى، النقاط الحرجة، القيم القصوى المحلية، القيمة العظمى المحلية، القيمة العظمى المطلقة، القيمة الصغرى المطلقة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مناقشة مثال (٢) لبيان الخطوات اللازم اتباعها لإيجاد القيم القصوى المحلية.
– تكليف الطلبة تنفيذ تدريب (١).
– مناقشة المثالين (٤،٥) مع الطلبة، لبيان كيفية تحديد القيم القصوى المطلقة.
– تكليف الطلبة حل تدريب (٣) في دفاترهم.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

ومن الجدول (٣–٤) ، الذي يوضح إشارة قَ (س)

الجدول (٣–٤)

س	٤		٢		٠		٣-
قَ (س)		– – – – – – – –		+ + + + +		– – – – – – – –	
ق(س)							

وبموجب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أن للاقتران ق:
قيمة عظمى محلية عند س = ٢ وهي ق (٢) = ٤
قيمة صغري محلية عند س = ٠ وهي ق (٠) = ٠
لاحظ الشكل (٣–١٥) الذي يمثل منحنى ق (س) .
لاحظ أن ق (–٣) = ٥٤ (قيمة عظمى مطلقة، ولا تعتبر قيمة عظمى محلية لأنها طرف فترة)
ق (٤) = – ١٦ (قيمة صغرى مطلقة، ولا تعتبر قيمة صغرى محلية لأنها طرف فترة).

تدريب (١)

جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق (س) = س^{٣} – ٦س^{٢} + ٩س، س ∋ [–١ ، ٥].

لإيجاد القيم القصوى للاقتران ص = ق(س) اتبع الخطوات الاتية:
١) جد المشتقة الأولى (قَ (س)) للاقتران ق
٢) جد أصفار المشتقة الأولى بوضع قَ (س) = ٠.
٣) ابحث في إشارة المشتقة الأولى قَ (س) قبل كل صفر من أصفارها وبعده لتحديد مجالات التزايد والتناقص.
٤) إذا تحول الاقتران من متزايد إلى متناقص، فإنه يمر بقيمة عظمى، وإذا تحول من متناقص إلى متزايد، فإنه يمر بقيمة صغرى.

١٨٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

– عدم استطاعة بعض الطلبة تحليل بعض الاقترانات.
– عدم التمييز بين القيمة الصغرى المطلقة والقيمة العظمى المطلقة ويمكن تفادي ذلك بالتدريب.

مثال (٣)

جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س^{٢} – ٢ س – ٣

الحل

لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران طبق اختبار المشتقة الأولى:

ق (س) اقتران كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق لكل س ∈ ح. جد النقط الحرجة للاقتران وادرس إشارة المشتقة الأولى حولها تجد أن: قَ (س) = ٢ س –٢

وتكون قَ (س) = ٠ عندما ٢ س –٢ = ٠ ، أي أن س =١

إذن للاقتران نقطة حرجة عند س = ١ هي (١ ، –٤)، ومن الجدول (٣–٥) ، الذي يوضح إشارة قَ (س) وبموجب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أن للاقتران ق:

الجدول (٣–٥)

س	∞	١	– ∞
قَ (س)	+ + + + + + + + + + +		– – – – – – – – – – –
ق(س)	↗		↘

قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س =١ وهي ق(١) = –٤

مثال (٤)

جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وجدت) للاقتران ق(س) = جتاس – جاس ، س ∈ [٠ ، π]

الحل

ق(س) متصل على [٠ ، π] لأن ق(أ) = $\lim_{س \to أ}$ ق(س) لكل أ ∈ (٠ ، π)، وقابل للاشتقاق لكل س ∈ (٠ ، π) حيث: قَ (س) = – جا س – جتا س

جد النقط الحرجة للاقتران وادرس إشارة المشتقة الأولى حولها تجد أن:

قَ (س) = ٠ عندما – جا س – جتا س = ٠، ومنه – جا س = جتا س أو ظا س = –١

عندما س = $\frac{٣\pi}{٤}$

فإن للاقتران نقطة حرجة هي ($\frac{٣\pi}{٤}$ ، – $\sqrt{٢}$)

١٨٦

ومن الجدول (٣–٦) الذي يوضح إشارة قَ (س) وبموجب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أن للاقتران ق:

قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = $\frac{٣\pi}{٤}$ هي ق($\frac{٣\pi}{٤}$) = – $\sqrt{٢}$

قيمة عظمى مطلقة عند س = ٠ هي ق(٠) = ١

الجدول (٣–٦)

س	π	$\frac{٣\pi}{٤}$	٠
قَ (س)	+ + + + + + + + + + +		– – – – – – – – – – –
ق(س)	↗		↘

تدريب (٢)

جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = جتا س+جا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

مثال (٥)

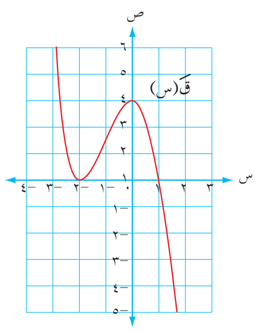
الشكل (٣–١٦) يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق(س) المعرف على الفترة [–٣ ، ٢]

اعتمد على ذلك في تعيين:

١) النقط الحرجة للاقتران ق.

٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق.

٣) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الشكل (٣–١٦)

الحل

١) للاقتران نقط حرجة عندما قَ (س) =٠ أو غير موجودة (عند المقطع السيني وأطراف الفترة) أي عندما س ∈ {–٣، ٢، –٢، ١}.

١٨٧

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– إذا كان ق (س) اقترانًا كثير حدود من الدرجة الثانية يمر بالنقطة (١ ، ٤). وكان للاقتران ق قيمة صغرى هي ق (٢) = ٣، اكتب قاعدة الاقتران ق.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

– **الأداة:** اختبار قصير.

وذلك بمتابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيح حلولهم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد موضوع القيم القصوى في مبحث الرياضيات، للصف الحادي عشر، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٣-٥ القيم القصوى

النتاجات الخاصة

- يحدّد النقاط الحرجة لاقتران معطى.
- يبيّن العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران والقيم القصوى المحلية له.
- يستخدم اختبار المشتقة الأولى في إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة لاقتران معطى إن وجدت.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الأولى، النقاط الحرجة، القيم القصوى المحلية ، **القيمة العظمى المحلية**، القيمة الصغرى، القيمة العظمى المطلقة، القيمة الصغرى المطلقة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التعليم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.
- تكليف كل مجموعة حل أحد فروع السؤال الأول.
- تكليف المجموعات عرض الحل على السبورة.
- قم بإجراء حوار ومناقشة للوصول إلى الحل الصحيح.

٢) ومن الجدول (٣ – ٧) المجاور، الذي يوضح إشارة قَ (س)

الجدول (٣-٧)

س	٢	١	٢–	٣–
قَ (س)	– – – – – – – –	+ + + + + +	+ + + + + +	
ق(س)	↘	↗	↗	

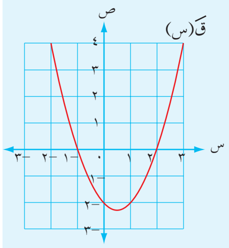
وبموجب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أن للاقتران ق:
قيمة عظمى محلية عند س = ١ هي ق(١)

٣) من الجدول (٣ – ٧) تجد أن:
ق(س) متزايد في الفترة [–٣ ، ١]، ومتناقص في الفترة [١ ، ٢]

تدريب (٣)

الشكل (٣ – ١٧) يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق(س) المعرف على الفترة [–٢ ، ٣]
اعتمد على ذلك في تعيين:

١) النقط الحرجة للاقتران ق.
٢) القيم القصوى المحلية للاقتران ق.
٣) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-١٧)

١٨٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– إذا كان ق (س) = [$\frac{1}{3}$ س + ١]، جد القيم القصوى للاقتران المحلية منها والمطلقة إن وجدت في الفترة [١ ، ٨].

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة :** قائمة الشطب (٢–٤) لتقييم الطلبة في المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد موضوع القيم في مبحث الرياضيات، للصف الحادي عشر، المستوى الثاني.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) جد القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية (إن وجدت) وبين المطلقة منها لكل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = $س^3 - 6س + 5$ ، س ∈ [−٣ ، ١]

ب) ق(س) = $12س - س^3$ ، س ∈ [−٣ ، ٣]

جـ) ق(س) = $س^2 + 4س - 5$ ، س ∈ ح

د) ق(س) = $\begin{cases} س^2 + 5 & ، -2 \le س < 3 \\ 10 - 2س & ، 3 \le س < 7 \end{cases}$

هـ) ق(س) = $س^2|س - 2|$ ، س ∈ ح

و) ق(س) = $س^2 - \frac{س^4}{4}$ ، س ∈ [−١ ، ٤]

ز) ق(س) = $\sqrt{جاس}$ ، س ∈ [٠ ، π]

ح) ق(س) = $\sqrt[3]{(س^2 - 4س)^2}$ ، س ∈ ح

ط) ق(س) = $س^3 + 1$ ، س ∈ ح

٢) جد قيم كلٍّ من الثابتين أ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = $س^3 + أس^2 + ب س$ نقطتين حرجتين عند س = −١، س = ٢.

٣) الشكل (٣–١٨) يمثل منحنى كثير الحدود ق(س) المعرف على الفترة [−٣ ، ٣] اعتمد على ذلك في تعيين:

أ) النقط الحرجة للاقتران ق.

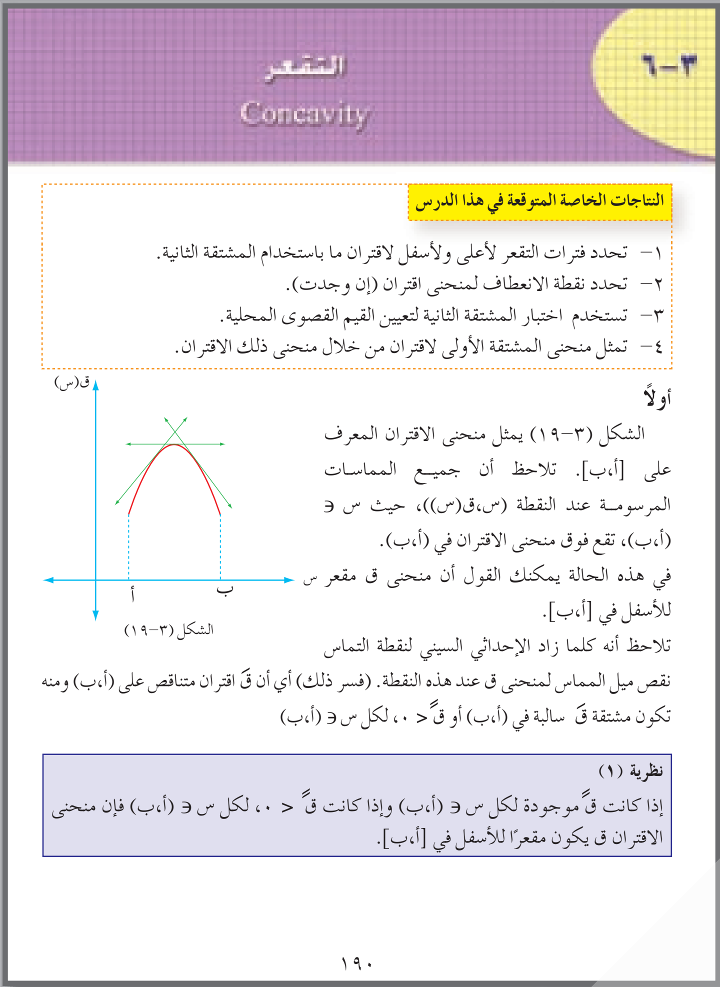
ب) القيم القصوى للاقتران ق.

جـ) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

الشكل (٣–١٨)

١٨٩

الأخطاء الشائعة



٣-٦ التقعر
Concavity

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تحدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
٢- تحدد نقطة الانعطاف لمنحنى اقتران (إن وجدت).
٣- تستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية.
٤- تمثل منحنى المشتقة الأولى لاقتران من خلال منحنى ذلك الاقتران.

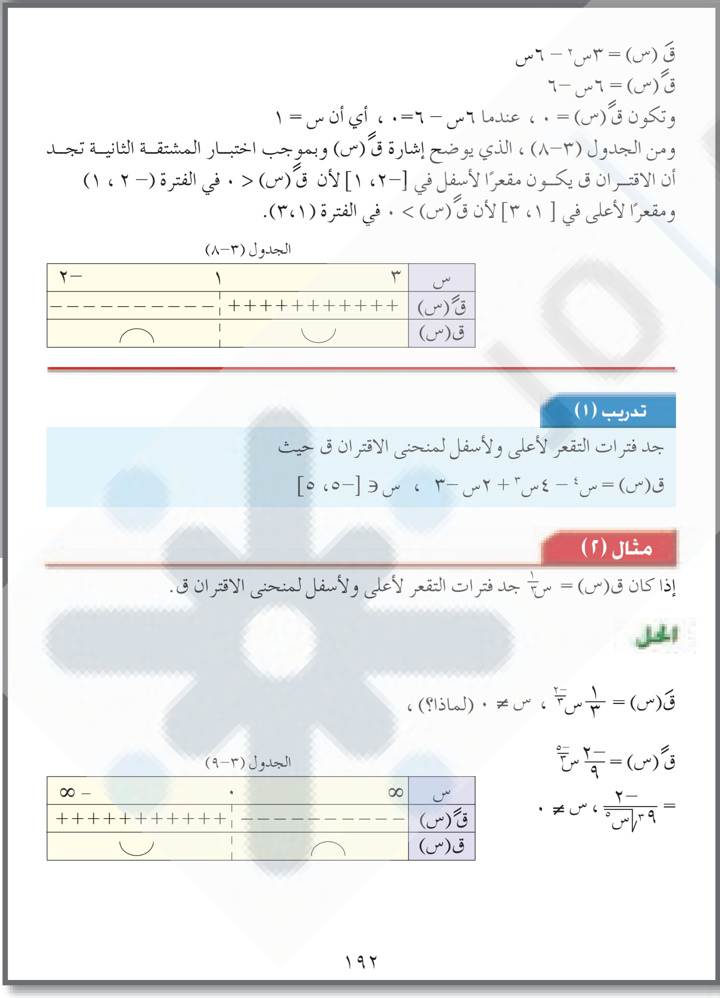
الشكل (٣-١٩)

أولاً

الشكل (٣-١٩) يمثل منحنى الاقتران المعرف على [أ،ب]. تلاحظ أن جميع المماسات المرسومة عند النقطة (س،ق(س))، حيث س ∋ (أ،ب)، تقع فوق منحنى الاقتران في (أ،ب).
في هذه الحالة يمكنك القول أن منحنى ق مقعر للأسفل في [أ،ب].
تلاحظ أنه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس نقص ميل المماس لمنحنى ق عند هذه النقطة. (فسر ذلك) أي أن قَ اقتران متناقص على (أ،ب) ومنه تكون مشتقة قَ سالبة في (أ،ب) أو قً < ٠، لكل س ∋ (أ،ب)

نظرية (١)
إذا كانت قً موجودة لكل س ∋ (أ،ب) وإذا كانت قً < ٠، لكل س ∋ (أ،ب) فإن منحنى الاقتران ق يكون مقعرًا للأسفل في [أ،ب].

١٩٠



قَ(س) = ٣س^{٢} − ٦س
قً(س) = ٦س − ٦
وتكون قً(س) = ٠ ، عندما ٦س − ٦ = ٠ ، أي أن س = ١
ومن الجدول (٣-٨) ، الذي يوضح إشارة قً(س) وبموجب اختبار المشتقة الثانية تجد أن الاقتران ق يكون مقعرًا لأسفل في [−٢، ١] لأن قً(س) < ٠ في الفترة (− ٢ ، ١) ومقعرًا لأعلى في [١ ، ٣] لأن قً(س) > ٠ في الفترة (١،٣).

الجدول (٣-٨)

س	٣ ← ١	١ ← −٢
قً(س)	+ + + + + + + + + + +	− − − − − − − − − − −
ق(س)	∪	∩

تدريب (١)
جد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى الاقتران ق حيث
ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} + ٢س − ٣ ، س ∋ [−٥، ٥]

مثال (٢)
إذا كان ق(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ جد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى الاقتران ق.

الحل

قَ(س) = $\frac{١}{٣}$ س$^{\frac{-٢}{٣}}$ ، س ≠ ٠ (لماذا؟) ،
قً(س) = $\frac{-٢}{٩}$ س$^{\frac{-٥}{٣}}$
= $\frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^{٥}}}$ ، س ≠ ٠

الجدول (٣-٩)

س	∞ ← ٠	٠ ← −∞
قً(س)	− − − − − − − − − − −	+ + + + + + + + + + +
ق(س)	∩	∪

١٩٢

الأخطاء الشائعة

تتركّز الأخطاء والصعوبات لدى الطلبة في هذا الدرس حول:
– صعوبة تطبيق اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى ناتجة عن عكس الإشارة للمشتقة الثانية، وكذلك إيجاد نقط الانعطاف بدلاً من النقط الحرجة.

الدرس ٣-٦ التقعر

النتاجات الخاصة

– يحدّد فترات التقعر لأعلى ولأسفل في اقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
– يحدّد نقط الانعطاف لمنحنى اقتران (إن وجدت).
– يستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية.
– يمثّل منحنى المشتقة الثانية لاقتران من خلال منحنى ذلك الاقتران.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الثانية، التقعر لأعلى، التقعر لأسفل، نقط الانعطاف، زوايا الانعطاف.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس مباشر

– تذكير الطلبة بالمشتقات العليا، وتعريف التزايد والتناقص، والمعنى الهندسي للمشتقة، والعلاقة بين ميل المماس لمنحنى ق عند نقطة والمشتقة الأولى للاقتران ق.
– تكليف الطلبة الإجابة عما يأتي تمهيدًا لتقديم الدرس:
• إذا كان ق (س) = س^{٣} − ٢ س^{٢} − ١، فجد قً (س)، قيم س التي تجعل قً (س) > ٠، قً (س) < ٠ .
• وضّح هندسيًّا معنى أن ق قابل للاشتقاق عند النقطة س$_{١}$ في الفترة (أ ، ب).
• ما العلاقة بين ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة س$_{١}$ وزاوية ميله والمشتقة الأولى للاقتران ق عند س$_{١}$.
– مناقشة الطلبة بالشكل (٣ − ١٩) (٣ − ٢٠) من كتاب الطالب، ويطلب إليهم المقارنة بين ميل المماسات في الشكل الأول وميلها في الشكل الثاني، وما الدلالة الجبرية لميل المماس في كلا المنحنيين.
– سؤال الطلبة عن العلاقة بين الاقتران المتزايد والمتناقص ومشتقته الأولى.
– ما دلالة قَ (س) متزايد في الشكل (٣ − ٢٠)، قَ (س) متناقص في الشكل (٣ − ١٩)؟ وذلك بهدف التوصل إلى اختبار المشتقة في التقعر.
– مناقشة مثال (١) لتطبيق اختبار المشتقة الثانية وتحديد فترات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل، وتكليفهم حل تدريب (١ ، ٢) في دفاترهم.
– تقديم تعريف نقطة الانعطاف للطلبة مع التأكيد على الشروط التي يجب توفرها في النقطة لتكون نقطة انعطاف، وأن نقطة الانعطاف هي نقطة حرجة حسب تعريف النقطة الحرجة لاقتران قَ.
– مناقشة مثال (٣) بوصفه توضيحًا لتطبيق اختبار المشتقة الثانية لتحديد نقطة الانعطاف، وتكليفهم حل التدريبين (١ ، ٢) في دفاترهم.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد فترات التقعر إلى الأعلى وفترات التقعر إلى الأسفل ونقاط الانعطاف إن وجدت لمنحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق (س) = (س − ١)^{٢} | س + ٣ | .

ب) ق (س) = (س^{٢} − ٣٦)$^{\frac{١}{٢}}$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.
– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٣)، وبند (٦).
– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.
– **الاداة:** اختبار قصير.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها.

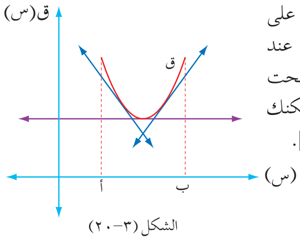
التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الشكل (٣ – ٢٠) يمثل منحنى الاقتران المعرف على [أ،ب] تلاحظ أن جميع المماسات المرسومة عند النقطة (س،ق(س))، حيث إن س ∋ (أ،ب) تقع تحت منحنى الاقتران ق في [أ،ب]. في هذه الحالة يمكنك القول أن منحنى الاقتران ق مقعر لأعلى في [أ،ب].



الشكل (٣–٢٠)

تلاحظ أنه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس زاد ميل المماس لمنحنى ق عند هذه النقطة، أي أن قَ اقتران متزايد على (أ،ب) ومنه تكون مشتقة قَ موجبة في (أ،ب) أو قً > ٠ لكل س ∋ (أ،ب).

تذكر
١) ق متناقص على [أ،ب] إذا كان قَ (س) < ٠ لكل س ∋ (أ،ب).
٢) ق متزايد على [أ،ب] إذا كان قَ(س) > ٠ لكل س ∋ (أ،ب).

نظرية (٢)
إذا كانت قً(س) موجودة لكل س ∋ (أ،ب) وإذا كانت قً(س) > ٠، لكل س ∋ (أ،ب) فإن منحنى الاقتران ق يكون مقعرًا لأعلى في [أ،ب].

مثال (١)
ليكن ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} + ٤ ، س ∋ [−٢، ٣].
جد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لمنحنى ق.

الحل
بما أنه يمكنك تحديد فترات التقعر لأعلى ولأسفل من خلال إشارة المشتقة الثانية، إذن ادرس إشارة المشتقة الثانية في الفترة (−٢، ٣).

١٩١

ولدراسة إشارة قً استخدم خط الأعداد وادرس الإشارة حول س = .
تلاحظ من خلال إشارة المشتقة الثانية في الجدول (٣–٩) أن:
ق مقعر للأعلى في (− ∞،٠] ، ومقعر لأسفل في [٠، ∞).

ملحوظة
أُدخل العدد صفرًا في مجالات التقعر، ذلك لأن العدد صفر ينتمي إلى مجال الاقتران.

تدريب (٢)
ليكن ق(س) = (س + ٤)$^{\frac{-٢}{٣}}$ + ٣ فجد مجالات التقعر إلى أعلى وإلى أسفل.
(إرشاد: حدد المجال أولا).

لا بد أنك لاحظت من خلال المثالين (١) ، (٢) أن ق يغير اتجاه تقعره حول نقطة في مجاله، فقد غير اتجاه تقعره من أسفل إلى أعلى حول النقطة (١، ق(١)) في المثال الأول، كما أنه غير اتجاه تقعره من أعلى إلى أسفل حول النقطة (٠، ق(٠)) في المثال الثاني تسمى كل من هذه النقط التي يغير الاقتران ق اتجاه تقعره حولها نقط انعطاف.

تعريف
إذا كان ق اقترانًا متصلاً عند س = س$_{١}$، تسمى النقطة (س$_{١}$،ق(س$_{١}$)) نقطة انعطاف لمنحنى الاقتران ق إذا غير الاقتران ق اتجاه تقعره حول س$_{١}$ وتسمى الزاوية هـ التي تحقق المعادلة ظاهـ = قَ(س$_{١}$) زاوية انعطاف، حيث هـ زاوية ميل المماس المرسوم لمنحنى ق عند النقطة (س$_{١}$،ق (س$_{١}$)).

١٩٣

– صعوبة في تطبيق اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى ناتجة عن عكس الإشارة للمشتقة الثانية، وكذلك إيجاد نقط الانعطاف بدلاً من النقط الحرجة.
– صعوبة في إيجاد زاوية الانعطاف وذلك بالتعويض في المشتقة الثانية بدلاً من التعويض في المشتقة الأولى.

النتاجات الخاصة

- يحدّد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
- يحدّد نقط الانعطاف لمنحنى اقتران (إن وجدت).
- يستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية.
- يمثّل منحنى المشتقة الثانية لاقتران من خلال منحنى ذلك الاقتران.

المفاهيم والمصطلحات

اختبار المشتقة الثانية، التقعر لأعلى، التقعر لأسفل، نقط الانعطاف، زاوية الانعطاف، وزاوية الانعطاف الأفقي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

- تقديم نظرية (اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى) مع تأكيد شروط تطبيقها واستخدامها لتمييز القيم القصوى المحلية، ومناقشتهم بمثال (٤)، وتكليفهم حل تدريب (٤) في دفاترهم.
- مناقشة الطلبة في مثال (٥) بوصفه موضّحًا لكيفية تمثيل منحنى المشتقة الأولى ومنحنى المشتقة الثانية من خلال منحنى ق، إضافة إلى عرض المزيد من الأمثلة التوضيحية، وتكليفهم حل تدريب (٥) في دفاترهم.
- تكليف الطلبة حل التمارين (١، ٢، ٣، ٤) كواجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

- يكون للاقتران ق(س) نقطة انفصال قابلة للإزالة عند س = جـ إذا كانت نهـــــا ق (س) موجودة ولكن ق(س) غير متصل عند س = جـ؛ لأن ق(س) غير معرف عند س = جـ أو قيمة ق(جـ) لاتساوي قيمة النهاية، يمكن جعل الاقتران متصلاً بإعادة تعريف الاقتران عند س = جـ بحيث تكون ق(جـ) مساوية نهاية الاقتران عند س = جـ .

مثال (٣)

حدد نقط الانعطاف وزوايا الانعطاف لمنحنى ق حيث:

ق(س) = س٤ − ٦س٣ + ١٢س٢ + ١ ، س ∋ ح

الحل

الجدول (٣−١٠)

س	∞	٢	١	− ∞
قً(س)	+++++++		−−−−−−−−	+++++++
ق(س)	∪		∩	∪

يجب إيجاد النقط التي يغير ق اتجاه تقعره حولها، لذلك عليك إيجاد قً (س) لتحديد فترات التقعر لأعلى ولأسفل

قَ(س) = ٤ س٣ − ١٨ س٢ + ٢٤س

قً(س) = ١٢س٢ − ٣٦س + ٢٤ (بالقسمة على ١٢)

وتكون قً(س) = ٠ عندما س٢ − ٣س + ٢ = ٠

ومنه (س−٢) (س−١) = ٠ ، أي أن: س = ٢، س = ١

ومن خلال دراسة إشارة قً في الجدول (٣ − ١٠) تلاحظ أن ق يغير اتجاه تقعره حول س = ١ ، س = ٢ لذلك فإن (١،ق(١)). (٢،ق(٢)) نقطتا انعطاف.

ولإيجاد زوايا الانعطاف هـ١ ، هـ٢ حل المعادلتين ظاهـ١ = قَ(١) ، ظاهـ٢ = قَ(٢)

ظاهـ١ = ١٠ ، ومنه هـ١ = ٨٤,٢٣°

ظاهـ٢ = ٨ ، ومنه هـ٢ = ٨٢,٨٧°

تدريب (٣)

إذا كان ق(س) = جتاس − جاس س ∋ [٠، π] فجد نقط الانعطاف وزوايا الانعطاف لمنحنى ق (إن وجدت)

١٩٤

تدريب (٤)

ليكن هـ (س) = ∛(س٣ − ٢٧س + ١) ، جد القيم الصغرى والعظمى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

ثالثاً

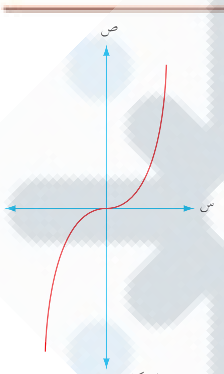
تعلم أنه إذا كان ق(س) متزايدًا في [أ.ب] فإن قَ(س) > ٠ لكل س ∋ (أ،ب) وإذا كان ق متناقصًا في [أ،ب] فإن قَ (س) < ٠ لكل س ∋ (أ،ب).

كما أن **ق** مقعر لأعلى في [أ،ب] إذا كانت قً(س) > ٠ لكل س ∋ (أ،ب) وأن **ق** مقعر لأسفل في [أ،ب] إذا كانت قً(س) < ٠ لكل س ∋ (أ،ب) وعليه فإنه يمكن تمثيل منحنى المشتقة الأولى لاقتران من خلال منحنى ذلك الاقتران بشكل يكون قريبًا إلى منحنى المشتقة الفعلي.

والمثال الآتي يوضح ذلك:

مثال (٥)

بالاعتماد على الشكل (٣ − ٢١) الذي يمثل منحنى ق في (− ∞ ، ∞) ارسم شكلا تقريبيا لمنحنى قَ في (− ∞ ، ∞).



الشكل (٣−٢١)

الحل

تلاحظ من الشكل أن:

١) ق متزايد على ح ولذلك فإن قَ(س) > ٠ لكل س ∋ ح أي أن منحنى قَ(س) يقع فوق محور السينات. (افرض هـ (س) = قَ(س)).

٢) ق مقعر للأسفل في (− ∞، ٠] لذلك فإن قً(س) = هـَ (س) < ٠ لكل س ∋ (− ∞، ٠)

٣) ق مقعر للأعلى في [٠، ∞) لذلك فإن قً(س) = هـَ (س) > ٠ لكل س ∋ (٠، ∞)

٤) (٠ ، ق (٠)) نقطة انعطاف لمنحنى ق، لذلك فإن قً(٠) = هـَ(٠) = ٠

١٩٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– إذا كان ق (س) = س + $\frac{١}{س}$، س ≠ صفرًا، فجد:

أ) فترات التقعر إلى الأعلى وفترات التقعر إلى الأسفل.

ب) نقط الانعطاف، وزوايا الانعطاف (إن وجدت).

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة .

– **الأداة:** اختبار قصير.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها.

ثانياً

تستخدم إشارة المشتقة الثانية للاقتران فضلاً عن التطبيقات السابقة في تمييز القيم الصغرى والعظمى المحلية للاقتران، كما يتضح من النظرية الآتية التي تسمى اختبار المشتقة الثانية.

نظرية (٣) : اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى

ليكن ق (س) اقترانًا متصلاً على الفترة [أ،ب]، ولتكن قَ ، قً معرفتين على (أ،ب)، ولتكن قَ(س$_١$) = صفرًا، س$_١$ ∈ (أ ،ب) عندئذ:

١) للاقتران قيمة صغرى محلية عند س$_١$ هي ق (س$_١$) إذا كان قً(س$_١$) > ٠

٢) للاقتران قيمة عظمى محلية عند س$_١$ هي ق (س$_١$) إذا كان قً(س$_١$) < ٠

ملاحظة

إذا كان قً(س) = ٠ ، فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى.

مثال (٤)

جد نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق حيث ق(س) = س^٢ – س^٣ + ١ باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

الحل

قَ(س) = ٢س – ٣ س^٢

تكون قَ(س) = ٠ ، عندما ٢س – ٣س^٢ = ٠ ، أي عندما س (٢–٣س) = ٠

ومنه س = ٠، س = $\frac{٢}{٣}$

إذن للاقتران نقطتان حرجتان هما (٠ ،ق (٠)) ، ($\frac{٢}{٣}$ ، ق($\frac{٢}{٣}$))

ولاختبار النقط الحرجة لمعرفة القيم العظمى والصغرى المحلية نجد قيمة قً(س) عند هذه النقط

قً(س) = ٢ – ٦س ، وبموجب اختبار المشتقة الثانية تجد أن:

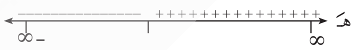
قً(٠) = ٢ > ٠ ، إذن للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي ق(٠) = ١

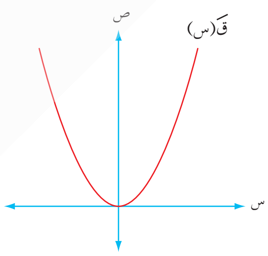
قً($\frac{٢}{٣}$) = –٢ < ٠ ، إذن للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = $\frac{٢}{٣}$ هي ق($\frac{٢}{٣}$) = $\frac{٣١}{٢٧}$

١٩٥

ومن خلال إشارة هـَ (س) تجد أن:

هـ متناقص في (– ∞، ٠] ومتزايد في [٠، ∞) ولذلك يمكن تمثيل منحنى هـ = قَ بالشكل (٣–٢٢).





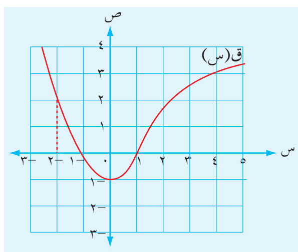
الشكل (٣–٢٢)

لاحظ أنك لا تستطيع تحديد مجالات التقعر لمنحنى قَ من خلال منحنى ق لأن منحنى ق يعطيك دلالة عن إشارتي المشتقة الأولى والثانية فقط من خلال التزايد والتناقص والتقعر. وتحتاج لتحديد مجالات التقعر لمنحنى هـ = قَ معرفة إشارة هـً.

؟ مثّل منحنى قَ في المثال السابق بشكل آخر، (إرشاد: غيّر مجالات التقعر)

تدريب (٥)

مستعينًا بالشكل (٣– ٢٣) الذي يمثل منحنى ق ارسم شكلاً تقريبيًّا لمنحنى قَ.



الشكل (٣–٢٣)

١٩٧

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الأخطاء الشائعة

– عدم استطاعة بعض الطلبة إيجاد تمثيل منحنى المشتقة الثانية من خلال منحنى المشتقة الأولى أو منحنى ق، لتفادي هذه الصعوبات يجب تدريب الطلبة وتزويدهم بالأمثلة الكافية حول الموضوع.

النتاجات الخاصة

- يحدّد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
- يحدّد نقط الانعطاف لمنحنى اقتران (إن وجدت).
- يستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية.
- يمثّل منحنى المشتقة الثانية لاقتران من خلال منحنى ذلك الاقتران.

المفاهيم والمصطلحات

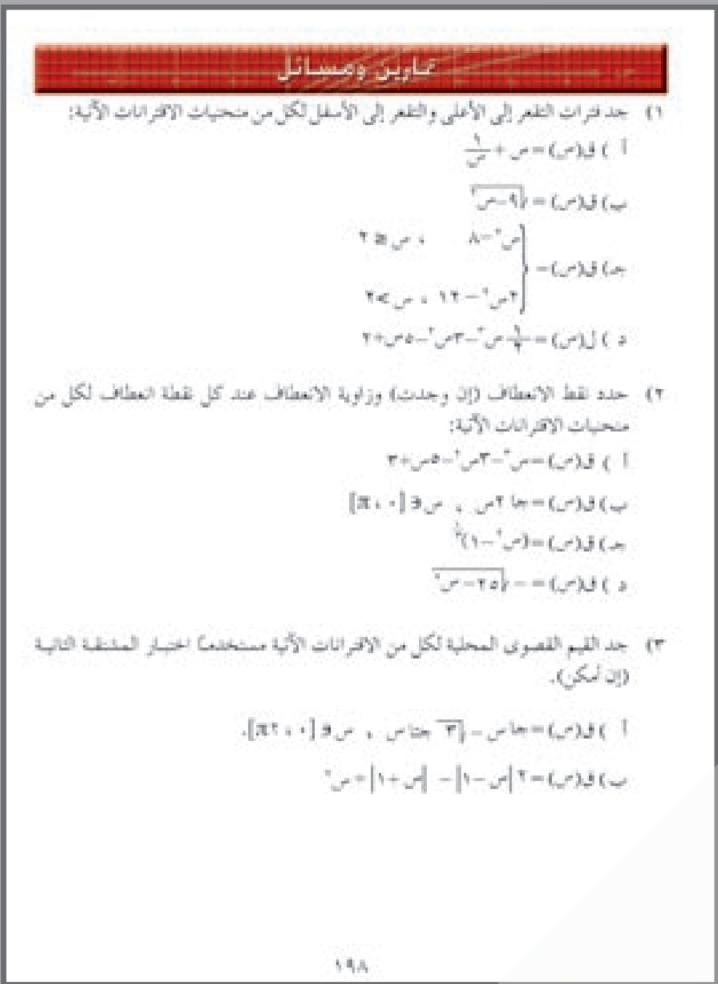
اختبار المشتقة الثانية، التقعر لأعلى، التقعر لأسفل، نقط الانعطاف، زاوية الانعطاف

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.
- تكليف مجموعة من الطلبة عرض الحل على السبورة.

معلومات إضافية


تمارين ومسائل

١) جد فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل لكل من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = س + $\frac{1}{س}$

ب) ق(س) = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

جـ) ق(س) = { س^{٢} − ٨ ، س ≤ ٢ ؛ ٢س^{٢} − ١٢ ، س > ٢ }

د) ل(س) = −$\frac{١}{٤}$س^{٤} − ٣س^{٣} − ٥س + ٢

٢) جد نقط الانعطاف (إن وجدت) وزاوية الانعطاف عند كل نقطة انعطاف لكل من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٥س + ٣

ب) ق(س) = جا ٢س ، س ∈ [٠ ، π]

جـ) ق(س) = (س^{٢} − ١)$^{\frac{٢}{٣}}$

د) ق(س) = −$\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$

٣) جد القيم القصوى المحلية لكل من الاقترانات الآتية مستخدماً اختبار المشتقة الثانية (إن أمكن).

أ) ق(س) = جاس − $\sqrt{٣}$ جتاس ، س ∈ [٠ ، ٢π].

ب) ق(س) = ٢|س − ١| − |س + ١| + س^{٢}

١٩٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية :** القلم والورقة.
- **الأداة:** اختبار قصير.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتمارين والمسائل الواردة في الدرس، وتصحيحها.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

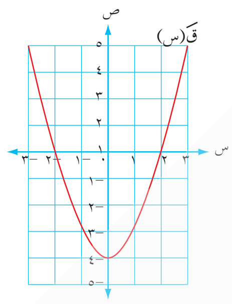
٤) عين قاعدة الاقتران ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + حـ س + د، (أ، ب، جـ، د أعداد حقيقية ثابتة) الذي يمر منحناه بالنقطة (٠ ، ٢)، ومعادلة العمودي على المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (١ ، ٢) هي: ٢س − ص − ٣ = ٠.

٥) يمثل الشكل (٣ −٢٤) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق، اعتمد عليه لإيجاد:

أ) الفترة (الفترات) التي يكون فيها منحنى ق مقعراً إلى الأعلى وتلك التي يكون فيها مقعرا إلى الأسفل.

ب) نقط الانعطاف لمنحنى ق (إن وجدت).

جـ) ارسم منحنى تقريبيًّا للاقتران قً.



الشكل (٣−٢٤)

١٩٩

الأخطاء الشائعة

الدرس ٣-٧ تطبيقات القيم القصوى

النتاجات الخاصة

– يحل مسائل ومشكلات حياتية تتضمن القيم القصوى.

المفاهيم والمصطلحات

أكبر ما يمكن، أقل ما يمكن، أصغر ما يمكن.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي:
القيم القصوى، مساحة بعض الأشكال الهندسية، حجوم بعض المجسمات والمساحة الجانبية والكلية، تشابه المثلثات، الاقترانات الدائرية ومشتقاتها، حل المعادلات الجبرية.

– مناقشة المثال الآتي مع الطلبة:
جد قيم س التي تجعل قيم الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٦س + ١$، أقل ما يمكن .
بيّن للطلبة أثناء المناقشة ماذا نعني بأكبر ما يمكن وأصغر ما يمكن وأقل ما يمكن، وكذلك خطوات حل المسألة الرياضية.

– مناقشة الطلبة في المثال (١)، واستخدام الخطوات الموضّحة بالأمثلة المحلولة من كتاب الطالب، وتشجيع الطلبة على:
- فهم المسألة قبل البدء بحلها وذلك بما يأتي:
  * قراءة المسألة جيدًا.
  * رسم الشكل الدال على المسألة إن أمكن مع وضع المعلومات عليه.
  * تحديد المعطيات والمطلوب.
- التخطيط لحل المسألة قبل تنفيذ الحل، ووضع العلاقة التي تربط بين المتغيرات في المسألة، مؤكّدًا على أن تتضمن العلاقة في صورتها النهائية على متغير واحد فقط.
- تنفيذ الحل واختبار القيمة القصوى التي حصل عليها:

– تكليف الطلبة حل تدريب (١) في دفاترهم.

– مناقشة المثالين (٢ ، ٣) مع الطلبة وقراءة المثال أكثر من مرة من أجل فهمه واطلب إلى بعضهم صياغة المثال بلغتهم الخاصة، بعد ذلك نفذ خطوات حل المسألة في حل المثال.

– تكليف الطلبة حل تدريب (٢ ، ٣) في دفاترهم.

معلومات إضافية

تطبيقات القيم القصوى ٣-٧

Applications of Extreme values

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تحل مشكلات عملية تتضمن القيم القصوى.

في كثير من المسائل الحياتية في العلوم والهندسة والاقتصاد وغيرها، نحتاج إلى معرفة أكبر قيمة لكمية متغيرة أو أصغر قيمة لكمية متغيرة (القيم القصوى لها)، وتحتاج هذه المسائل عند حلها إلى تحويلها من مسائل لفظية إلى اقترانات أو معادلات حتى نتمكن من إيجاد القيم القصوى لها.

مثال (١)

جد العددين اللذين مجموعهما ٢٠، ومجموع مربعيهما أقل ما يمكن.

الحل

بفرض العدد الأول س ، والعدد الثاني ص ، ومجموع مربعيهما م.

المعطيات: مجموع العددين = ٢٠

المطلوب: إيجاد العددين س ، ص ليكون مجموع مربعيهما (م) أقل ما يمكن.

ضع المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير مستقل واحد.

$م = س^{٢} + ص^{٢}$ .... (١)

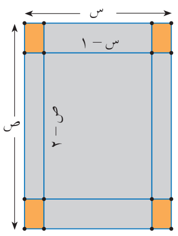
ولجعل العلاقة بدلالة متغير واحد س أو ص استعمل معطيات المسألة، وهي أن مجموع العددين (٢٠) أي أن:

$س + ص = ٢٠$ ، ومنها $ص = ٢٠ - س$ .... (٢)

٢٠٠

مثال (٢)

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٥٠ سم٢، يراد طباعة إعلان عليها، إذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم، وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، فجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-٢٦)

الحل

بفرض بعدي الورقة س، ص، والمساحة المطبوعة م
انظر الشكل (٣-٢٦)

المعطيات: مساحة الصفيحة ٥٠ سم٢

المطلوب: إيجاد بعدي الورقة س ،ص لتكون مساحة المنطقة المطبوعة (م) أكبر ما يمكن ،

ضع المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير مستقل واحد كالآتي : $م = (س - ١)(ص - ٢)$

ومنه $م = س ص - ٢س - ص + ٢$ .... (١)

ولإيجاد أحد المتغيرين س أو ص بدلالة الآخر استعمل معطيات المسألة وهي أن مساحة الورقة (٥٠سم٢) أي أن:

$س \times ص = ٥٠$ ، ومنها $ص = \frac{٥٠}{س}$ .... (٢)

وبالتعويض في (١) تجد أن: $م(س) = س \times \frac{٥٠}{س} - ٢س - \frac{٥٠}{س} + ٢$

$= ٥٢ - ٢س - \frac{٥٠}{س}$ .... (٣) وهو اقتران بمتغير مستقل واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران م (س) اشتق المعادلة (٣) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$م'(س) = -٢ + \frac{٥٠}{س^{٢}}$ ، وتكون $م'(س) = ٠$ ، عندما $-٢ + \frac{٥٠}{س^{٢}} = ٠$. أي عندما س = ٥

ولاختبار أن للاقتران قيمة عظمى عند س = ٥ نجد $م''(س)$ عند س = ٥ ومنه

$م''(س) = \frac{-١٠٠}{س^{٣}}$ ، ومنه $م''(٥) = \frac{-١٠٠}{١٢٥} < ٠$.

٢٠٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة

مراعاة الفروق الفردية

– جد عددين موجبين مجموعهما ٤٠، بحيث يكون مجموع مربعيهما أقل ما يمكن.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : الملاحظة .
– **الأداة** : قائمة الشطب (٢–٣)، بند (٧).
– **الاستراتيجية** : القلم والورقة.
– **الأداة**: اختبار قصير.
– وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتمارين والمسائل الواردة في الدرس، وتصحيحها.

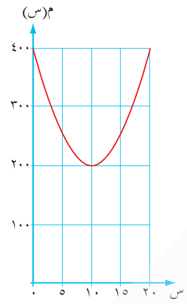
التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

وبالتعويض في (١) تجد أن:
م (س) = س^{٢} + (٢٠ – س)^{٢} وبذلك تصبح (م) بالصورة الآتية:
م (س) = ٢س^{٢} – ٤٠س + ٤٠٠ .... (٣) وهو اقتران بمتغير مستقل واحد
ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران م(س) نشتق المعادلة (٣) ونتحقق من ذلك كما يأتي:
مَ (س) = ٤س – ٤٠
وتكون مَ (س) = ٠ عندما، ٤س – ٤٠ = ٠ ،أي عندما س = ١٠
ولاختبار أن للاقتران قيمة صغرى عند س = ١٠ نجد
مً (س) عند س = ١٠
مً (س) = ٤ ومنه مً(١٠) = ٤ > ٠.
وبما أن مً(١٠) > ٠، إذن للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ١٠
لاحظ الشكل (٣–٢٥) الذي يمثل منحنى م (س)
أي أن مجموع مربعي العددين يكون أقل ما يمكن عندما يكون العدد الأول (س) يساوي ١٠ .
بالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٢) تجد أن
العدد الثاني (ص) يساوي ١٠



الشكل (٣–٢٥)

تدريب (١)

إذا كان مجموع عدد مع ثلاثة أمثال عدد آخر يساوي ٦٠ جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

مما سبق يتضح أنه لحل المسائل العملية على القيم القصوى يمكنك اتباع الخطوات الآتية:
١) افهم المسألة وحدد المتغيرات وارسم شكلًا توضيحيًا للمسألة إن أمكن.
٢) حدد المطلوب (إيجاد قيمته القصوى) واكتب العلاقة التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى (بين المعطيات والمطلوب).
٣) اكتب المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى كاقتران بمتغير مستقل واحد.
٤) حدد مجال الاقتران الناتج إن أمكن.
٥) استخدم ما تعلمته في الدروس السابقة في إيجاد القيم القصوى.

٢٠١

وبما أن مً (١٠) < ٠ إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٥، وبالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن ص = ١٠

أي أن مساحة المنطقة المطبوعة تكون أكبر ما يمكن عندما يكون بعدا الورقة س = ٥سم ، ص = ١٠سم

تدريب (٢)

صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ١٢ سم ، قص من زواياها الأربع أربعة مربعات متساوية طول كل منها س ، ثم طوينا الجوانب بحيث أصبحت الصفيحة بشكل علبة مفتوحة من الأعلى. جد قيمة س ليكون حجم العلبة أكبر ما يمكن.

مثال (٣)

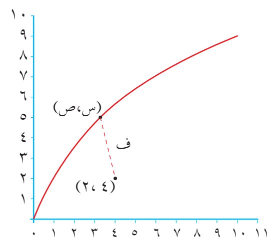
جد النقطة على منحنى ق (س) = $\sqrt{٨س}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٤، ٢).

الحل

افرض (س،ص) تقع على منحنى ق، وأن ف البعد بين النقطة (س،ص) والنقطة (٤، ٢).
انظر الشكل (٣–٢٧)
المعطيات: ق(س) = $\sqrt{٨س}$ ، النقطة (٤، ٢)
المطلوب: إيجاد إحداثيي النقطة (س،ص) لتكون المسافة ف أقل ما يمكن.
ضع المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح المسافة ف المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير مستقل واحد كالآتي :

ف = $\sqrt{(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢}}$ ، لكن ص = $\sqrt{٨س}$

ف = $\sqrt{(س - ٤)^{٢} + (\sqrt{٨س} - ٢)^{٢}}$ .... (١)



الشكل (٣–٢٧)

٢٠٣

الأخطاء الشائعة

تتركز الأخطاء لدى الطلبة في هذا الدرس حول:
– عدم استطاعة بعضهم تكوين العلاقات التي تؤول إليها المسألة تكوينًا صحيحًا، ويمكن تفادي ذلك من خلال التدريب على تكوين العلاقات، واشتقاق العلاقات التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل.

الدرس ٣-٧ تطبيقات القيم القصوى

النتاجات الخاصة

– يحل مسائل ومشكلات حياتية تتضمن القيم القصوى.

المفاهيم والمصطلحات

أكثر ما يمكن، أقل ما يمكن، أصغر ما يمكن.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– كتابة مثال (٤) على السبورة ومناقشته مع الطلبة مؤكداً ضرورة تنفيذ خطوات حل القيم القصوى، تكليف الطلبة بتحديد العلاقة التي تربط بين المتغيرات في المثال.
– تكليف الطلبة حل تدريب (٤) على دفاترهم.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ف نشتق المعادلة (١) ونتحقق من ذلك كما يأتي:

$$\text{ف}' = \dfrac{٢(\text{س}-٤)+٢(\sqrt{٨\text{س}}-٢)\times\dfrac{٨}{٢\times\sqrt{٨\text{س}}}}{٢\sqrt{(\text{س}-٤)^{٢}+(\sqrt{٨\text{س}}-٢)^{٢}}} = \text{صفرًا ومنه:}$$

$$٢(\text{س}-٤)+٢(\sqrt{٨\text{س}}-٢)\times\dfrac{٨}{٢\times\sqrt{٨\text{س}}}=٠$$ ، بتبسيط المقدار تجد أن:

$٣٢\text{س}^{٣}=٢٥٦$ ، ومنه س $=٢$

وبدراسة إشارة فَ في الجدول (٣-١١) تجد أن :

الجدول (٣-١١)

س		٢	
فَ(س)	+ + + + + + + + + + +		– – – – – – – – – – – –
ف(س)	↗		↘

للاقتران ف قيمة صغرى عند س $=٢$ وبالتعويض تجد أن ص $=\sqrt{٨\times٢}=٤$
أي أن المسافة ف تكون أقل ما يمكن عندما تكون النقطة (س،ص) تساوي (٢،٤).

تدريب (٣)

أ ب جـ د مستطيل يقع داخل المنحنيين ق(س) $=٢\text{س}^{٢}$ ، هـ(س) $=٣٦-\text{س}^{٢}$، بحيث يقع رأساه أ،ب على منحنى ق، ورأساه حـ ، د يقعان على منحنى هـ. جد بعدي المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

مثال (٤)

أ (٠،٤)، ب (٠،٩) نقطتان ثابتتان، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب، جد الإحداثي السيني للنقطة جـ الذي يجعل قياس الزاوية أ جـ ب أكبر ما يمكن.

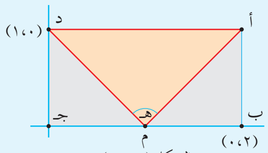
الحل

بفرض (هـ) الزاوية أجـ ب ، (هـ$_{١}$) الزاوية أ جـ د ، (هـ$_{٢}$) الزاوية دجـ ب ، (س) طول جـ د

٢٠٤

تدريب (٤)

يمثل الشكل (٣-٢٩) المستطيل أ ب جـ د، حيث ب (٢،٠) ، د (٠،١) ، إذا فرضت النقطة م على الضلع ب جـ، وعلى بعد س سم من نقطة الأصل جـ، ووصل م أ ، م د فتكونت الزاوية المتغيرة هـ جد قيمة س التي تجعل هـ في نهايتها العظمى.

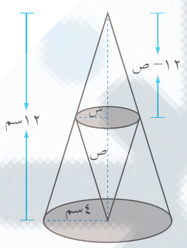


الشكل (٣-٢٩)

مثال (٥)

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري قائم نصف قطر قاعدته ٤سم، وارتفاعه ١٢سم، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.

الحل



الشكل (٣-٣٠)

المعطيات: نصف قطر المخروط الخارجي ٤سم ، وارتفاعه ١٢سم
المطلوب: إيجاد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن رسمه داخل مخروط دائري نصف قطره ٤سم وارتفاعه ١٢سم
افرض نصف قطر المخروط الداخلي س، وارتفاعه ص، وحجمه ح.

ضع المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير مستقل واحد. انظر الشكل (٣-٣٠) .

$\text{ح}=\frac{١}{٣}\times\pi\times\text{نق}^{٢}\times\text{ع}$

$\text{ح}=\frac{١}{٣}\times\pi\times\text{س}^{٢}\times\text{ص}$ .... (١)

ولإيجاد أحد المتغيرين س أوص بدلالة الآخر استعمل تشابه المثلثات من خلال معطيات المسألة أي أن:

$\dfrac{\text{س}}{١٢-\text{ص}}=\dfrac{٤}{١٢}$ ومنه ٣س $=١٢-$ ص أي أن:

ص $=١٢-٣$س .... (٢)

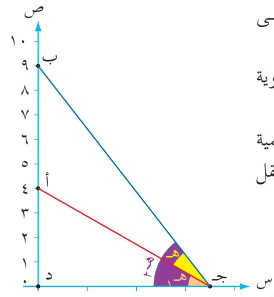
٢٠٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

المعطيات: أ(٠، ٤)، ب(٠، ٩)، جـ نقطة تتحرك على محور السينات.

المطلوب: إيجاد الإحداثي السيني للنقطة جـ لتكون الزاوية أ جـ ب أكبر ما يمكن.

المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا بمتغير مستقل واحد.



الشكل (٣-٢٨)

$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_٢ - \text{هـ}_١) = \frac{\text{ظا هـ}_٢ - \text{ظا هـ}_١}{١ + \text{ظا هـ}_٢\ \text{ظا هـ}_١}$$

$\text{ظا هـ}_١ = \frac{٤}{\text{س}}$ ، $\text{ظا هـ}_٢ = \frac{٩}{\text{س}}$ ومنه

$$\text{ظا هـ} = \frac{\frac{٩}{\text{س}} - \frac{٤}{\text{س}}}{١ + \frac{٩}{\text{س}} \times \frac{٤}{\text{س}}} = \frac{\frac{٥}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^٢ + ٣٦}{\text{س}^٢}}$$

ومنه $\text{ظا هـ} = \frac{٥\text{س}}{\text{س}^٢ + ٣٦}$ وباشتقاق الطرفين تجد أن:

$$\text{قا}^٢\,\text{هـ} \times \text{هـ}' = \frac{(\text{س}^٢ + ٣٦) \times ٥ - ٥\text{س} \times ٢\text{س}}{(\text{س}^٢ + ٣٦)^٢} = \frac{٥\text{س}^٢ + ١٨٠ - ١٠\text{س}^٢}{(\text{س}^٢ + ٣٦)^٢} = \frac{١٨٠ - ٥\text{س}^٢}{(\text{س}^٢ + ٣٦)^٢}$$

$\text{هـ}' = ٠$ عندما $١٨٠ - ٥\text{س}^٢ = ٠$ ومنه س = ٦

وبدراسة إشارة هـَ تجد أن:

الجدول (٣-١٢)

س	٦	
هـَ	+ + + + + + + + + + + + +	- - - - - - - - - - - -
هـ	↗	↘

أي أن الزاوية هـ تكون أكبر ما يمكن عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة جـ يساوي ٦ وحدات

٢٠٥

وبالتعويض في المعادلة (١) تجد أن:

$$\text{ح}(\text{س}) = \frac{١}{٣} \times \pi \times \text{س} \times \text{س}^٢ \times (١٢ - ٣\text{س})$$

$$= \frac{\pi}{٣}(١٢\text{س}^٢ - ٣\text{س}^٣) \quad \text{............ (٣)} \quad \text{وهو اقتران بمتغير مستقل واحد}$$

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح نشتق المعادلة (٣) ونتحقق من ذلك كما يأتي:

$$\text{ح}'(\text{س}) = \frac{\pi}{٣}(٢٤\text{س} - ٩\text{س}^٢)$$

وتكون $\text{ح}'(\text{س}) = ٠$ ، عندما $٢٤\text{س} - ٩\text{س}^٢ = ٠$ ، أي عندما س = ٠ ، $\text{س} = \frac{٨}{٣}$

ولاختبار أن للاقتران قيمة عظمى محلية نجد $\text{ح}''(\text{س})$

$$\text{ح}''(\text{س}) = \frac{\pi}{٣}(٢٤ - ١٨\text{س})$$

ومنه $\text{ح}''(٠) = \frac{٢٤\pi}{٣} > ٠$

$\text{ح}''(\frac{٨}{٣}) = \frac{-٢٤\pi}{٣} < ٠$

وبما أن $\text{ح}''(\frac{٨}{٣}) < ٠$ ، إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند $\text{س} = \frac{٨}{٣}$

أي أن أكبر حجم للمخروط عندما تكون $\text{س} = \frac{٨}{٣}$.

ومنه يكون حجم المخروط $\text{ح} = \frac{\pi}{٣} \times (\frac{٨}{٣})^٢ \times ٤ = \frac{٢٥٦\pi}{٢٧}$ سم^٣

تدريب (٥)

أثبت أن أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم يساوي $\frac{٤}{٩}$ حجم المخروط.

٢٠٧

الأخطاء الشائعة

- خطأ في تحديد المجال لبعض العلاقات التي يكوّنها الطالب لحل المسألة.
- عدم استطاعة بعض الطلبة اختبار القيمة التي حصل عليها بأنها عظمى أو صغرى.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- اثبت أن أكبر مساحة لأي مستطيل محيطه ل تحدث عندما يكون مربعًا.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية** : القلم والورقة.
- **الأداة**: اختبار قصير .
- وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات وللتمارين والمسائل الواردة في الدرس، وتصحيحها.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

- ورد هذا الموضوع في كتاب الرياضيات، وحدة الاقترانات، للصف العاشر، وفي وحدة كثيرات الحدود، للفرع العلمي، المستوى الثاني .

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٣-٧ تطبيقات القيم القصوى

النتاجات الخاصة

– يحل مسائل ومشكلات حياتية تتضمن القيم القصوى.

المفاهيم والمصطلحات

أكبر ما يمكن، أقل ما يمكن، أصغر ما يمكن.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– مناقشة باقي الأمثلة مع الطلبة وتكليفهم حل تدريب بعد كل مثال، قدّم لهم الإرشادات اللازمة في أثناء الحل محدّدًا الأخطاء ومعالجًا لها أولاً بأول.

– تكليف الطلبة حل التمارين (١، ٢، ٣، ٧، ١٠، ١١) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

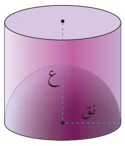
الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٦)

قطعة خشب على شكل أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٤٠٠π سم٢، حفر في هذه القطعة نصف كرة طول قطرها مساوٍ لطول قطر قاعدة الأسطوانة. جد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن.

الحل



الشكل (٣-٣١)

بفرض ارتفاع الأسطوانة (ع) ونصف قطرها (نق) سم وحجم الجزء المتبقي من الأسطوانة ح.

المعطيات: المساحة الجانبية للأسطوانة ٤٠٠π سم٢، طول قطر الكرة يساوي طول قطر قاعدة الأسطوانة .

المطلوب: إيجاد طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة الذي يجعل حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة أكبر ما يمكن.

تلاحظ من الشكل (٣-٣١) أن الجزء المتبقي من حجم الأسطوانة:

ح = حجم الأسطوانة – حجم نصف الكرة.

$$\text{ح} = (\pi\,\text{نق}^{٢} \times \text{ع}) - (\tfrac{١}{٢} \times \tfrac{٤}{٣}\pi \times \text{نق}^{٣}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

ولأجل التخلص من المتغير ع تجد من خلال معطيات المسألة أن:

المساحة الجانبية = $٢\pi\,\text{نق} \times \text{ع} = ٤٠٠\pi$ وبذلك تكون

$$\text{ع} = \frac{٢٠٠}{\text{نق}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

وبالتعويض في المعادلة (١) تجد أن:

$$\text{ح}(\text{نق}) = \pi\,\text{نق}^{٢} \times \frac{٢٠٠}{\text{نق}} - \frac{٢}{٣} \times \pi\,\text{نق}^{٣} = ٢٠٠\pi \times \text{نق} - \frac{٢}{٣}\pi \times \text{نق}^{٣} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

وهو اقتران بمتغير مستقل واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح اشتق المعادلة (٣) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$\text{ح}'(\text{نق}) = ٢٠٠\pi - ٢\pi\,\text{نق}^{٢}$

وتكون $\text{ح}'(\text{نق}) = ٠$ ، عندما $٢٠٠\pi - ٢\pi\,\text{نق}^{٢} = ٠$ ، أي عندما نق = ١٠ سم .

٢٠٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– اثبت أن حجم أكبر مخروط يمكن وضعه داخل كرة يساوي ($\frac{٨}{٢٧}$) حجم الكرة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : القلم والورقة.

– **الأداة:** اختبار قصير.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتمارين والمسائل الواردة في الدرس وتصحيحها.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

ولاختبار أن للاقتران قيمة عظمى محلية نجد:

ح''(نق) = − ٤π نق ، ومنه ح''(١٠) = − ٤٠π <٠

وبما أن ح''(١٠)<٠ ، إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند نق = ١٠

أي أن حجم الجزء المتبقي من الأسطوانة يكون أكبر ما يمكن عندما يكون طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ١٠ سم.

تدريب (١)

كرة مصمتة نصف قطرها ١٠سم ، حفر بداخلها متوازي **مستطيلات قاعدته مربعة الشكل** وارتفاعه (ع) سم ، جد أبعاد متوازي المستطيلات ليكون حجمه أكبر ما يمكن.

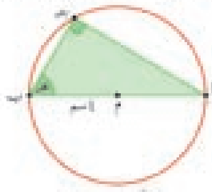
٢٠٩

تمارين ومسائل

١) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٦٠٠ متر ، جد بعدي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.

٢) مثلث طولا ضلعين فيه ٥ سم ، ٧ سم ، والزاوية المحصورة بينهما هـ ، جد قيمة هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

٣) إذا كانت النقطة أ(س١ ، ص١) تقع في الربع الأول من المستوى الديكارتي ، فجد معادلة المستقيم المار بالنقطة أ(س١ ، ص١) ويصنع مع المحورين السيني والصادي ونقطة الأصل مثلثا مساحته أقل ما يمكن.

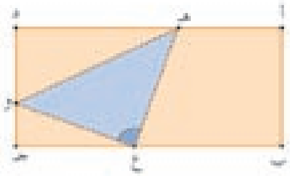


الشكل (٣-٣٢)

٤) الشكل (٣-٣٢) يمثل دائرة، قطرها $\overline{\text{أب}}$ طوله ٤سم ، بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه النقطة أ لترسم مع القطر $\overline{\text{أب}}$ مثلثا قائم الزاوية في جـ.

جد قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

٥) جد ارتفاع الأسطوانة الدائرية القائمة ذات أكبر حجم التي يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها ٣$\sqrt{٣}$.



الشكل (٣-٣٣)

٦) يمثل الشكل (٣-٣٣) المستطيل أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٣سم ، طويت الزاوية أ د جـ وفق الخط (و هـ) حتى انطبق الرأس د على المستقيم ب جـ في النقطة ع ، جد أكبر مساحة ممكنة للمثلث و جـ ع.

٢١٠

٣-٧ تطبيقات القيم القصوى

النتاجات الخاصة

– يحل مسائل ومشكلات حياتية تتضمن القيم القصوى.

المفاهيم والمصطلحات

أكبر ما يمكن، أقل ما يمكن، أصغر ما يمكن.

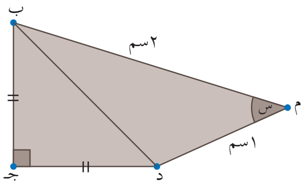
استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– مناقشة الطلبة بحل أسئلة الواجب البيني.

– تكليف مجموعة من الطلبة عرض الحل على السبورة،حيث يحل كل طالب سؤالاً واحدًا.

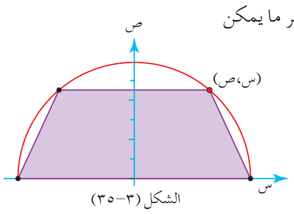
٧) يمثل الشكل (٣–٣٤) الشكل الرباعي م ب جـ د الذي فيه الضلع م ب ثابت وطوله ٢سم وفيه م د ثابت طوله ١ سم إلا أن وضعه متحول، يمكنه أن يدور في مستوى الشكل حول النقطة م ، ويصنع مع الضلع الثابت م ب زاوية قدرها س. أما الزاوية د جـ ب فهي قائمة، والضلعان جـ د ، جـ ب متساويان دومًا. جد قيمة س التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن.



الشكل (٣–٣٤)

٨) اتفقت إحدى الجامعات مع شركة سياحية لتسيير رحلة إلى العقبة بأن يدفع كل شخص (٦٥) دينارًا، إذا كان عدد المشتركين في الرحلة (١٠٠) شخص، وإذا زاد عدد المشتركين عن (١٠٠) شخص، فإن الشركة تخفض نصف دينار عن كل مشترك جديد ، جد عدد المشتركين في الرحلة ليكون إيراد الشركة أكبر ما يمكن

٩) جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف والذي يمكن رسمه فوق محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق (س) = ٩ – س^{٢} انظر الشكل (٣–٣٥).



الشكل (٣–٣٥)

١٠) وجد مصنع أثاث أن التكلفة الكلية بالدينار للإنتاج الأسبوعي لغرف نوم عددها س تقدر بالاقتران ك (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} – ٨٠ س + ٥٠٠ ، فإذا بيعت كل غرفة نوم بسعر ٢٨٠٠ دينار، فما الإنتاج الأسبوعي للمصنع الذي يجعل الربح أكبر ما يمكن؟
(إرشاد: الربح الكلي= الإيراد الكلي – التكلفة الكلية).

١١) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة محيطها ٦ أمتار، إذا كان الزجاج الذي على شكل نصف دائرة ملونًا ويسمح بإدخال نصف كمية الضوء الذي يسمح بإدخاله الزجاج العادي الذي يكّون الجزء المتبقي من النافذة، جد أبعاد المنطقة المستطيلة للنافذة بحيث يسمح بإدخال أكبر كمية ممكنة للضوء.

٢١١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- متابعة الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، والوقوف على الصعوبات التي تحول دون تحسن تحصيلهم، وتقديم المساعدة لهم حسب الحاجة .
- توجيه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المختلفة من مراجع أو مواقع إنترنت ذات صلة بموضوع القيم القصوى.
- تشجيع الطلبة للبحث عن حلول أخرى للمسائل التي لها أكثر من طريقة للحل.
- تشجيع الطلبة في أثناء مناقشة حل التمارين على عرض أسئلة لمواقف افتراضية تتعلق بالمسألة، وتقديم المبررات المنطقية لإجابات الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية :** القلم والورقة.
- **الأداة:** اختبار قصير.

وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات وللتمارين والمسائل الواردة في الدرس وتصحيحها.

- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** السجل القصصي.

سجل الملاحظات عن الطلبة الذين ترى تميّزًا في أدائهم.

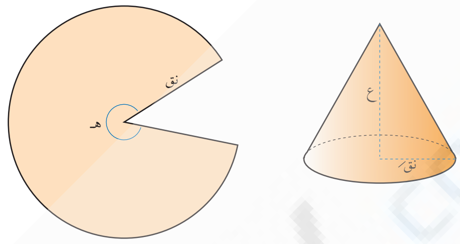
التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

١٢) قطاع دائري زاويته المركزية بالتقدير الدائري هـ، ونصف قطر دائرته نق، حول إلى مخروط دائري قائم، نصف قطر قاعدته نقَ، وارتفاعه ع. جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن.



الأخطاء الشائعة

مراجعة

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم والمصطلحات الواردة في الوحدة.

مراجعة

١) إذا كان المستقيم ٣س − ص − حـ = ٠ ، يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٣}{س+١}$ عند النقطة (س١ ، ص١) الواقعة على منحناه، فجد:

أ) إحداثي النقطة (س١ ، ص١).

ب) قيمة الثابت حـ.

٢) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية معطى بالعلاقة: ف(ن) = ن + جتا ن ، ن ∈ [٠ ، ٢π] جد تسارع الجسيم في اللحظة التي تنعدم فيها السرعة.

٣) خطان حديديان يميل أحدهما على الآخر بزاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ ، ويلتقيان في النقطة م ، يسير القطار (أ) على أحدهما بسرعة ٦٠ كم/ ساعة مقترباً من النقطة م ويسير القطار (ب) على الخط الآخر بسرعة ٨٠كم /ساعة مقترباً من النقطة م. عند الساعة العاشرة صباحاً إذا كان القطاران أ ، ب على بعد ١٠٠ كم، ١٢٠ كم على الترتيب من النقطة م فجد معدل اقتراب القطارين من بعضهما عند الساعة الحادية عشرة صباحاً.

٤) إذا كان ق(س) = $\sqrt[٣]{س^٢ - ٩س}$ ، س ∈ ح ، جد:

أ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقطة حرجة.

ب) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيماً قصوى مبيناً نوعها.

٥) عين قاعدة الاقتران ق(س) = أس^٣ + ب س^٢ + حـ س + د ، حيث: (أ، ب، حـ، د أعداد حقيقية ثابتة) والذي يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) ، ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (٢ ، ١) هي: ٣س + ص = ٧.

٢١٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– مراجعة الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات التي وردت في الوحدة.

– توزيع الطلبة مجموعات وتكليف كل مجموعة حل سؤال ثم مناقشته على السبورة.

– قم بإجراء حوارٍ بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع

ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

– تابع الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، وتقديم المساعدة لهم قدر الإمكان، مع محاورة الطلبة للتعرف إلى سبب الإخفاق.
– وجّه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المتنوعة.
– أعطِ فرصة للحل بأكثر من طريقة لبعض الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : الملاحظة.
– **الأداة** : قائمة الشطب (٢ – ٣).

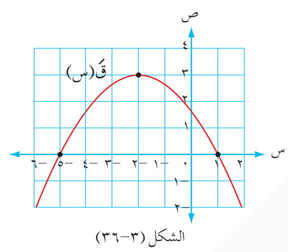
التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

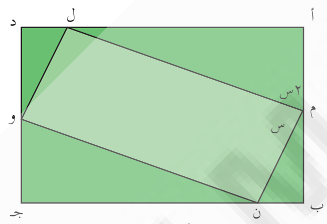
المادة المحوسبة

٦) الشكل (٣–٣٦) يمثل منحنى قَ (س)، حيث ق(س) كثير حدود من الدرجة الثالثة، جد:
أ) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق
ب) القيم القصوى للاقتران ق.
جـ) فترات التقعر لمنحنى ق.
د) نقطة الانعطاف للاقتران ق، وظل زاوية الانعطاف.



الشكل (٣–٣٦)

٧) الشكل (٣–٣٧) يمثل المستطيل أ ب حـ د فيه أ ب = ٦٠ سم، ب حـ = ٨٠ سم ، وبداخله متوازي أضلاع م ن و ل، الذي تقع رؤوسه على اضلاع المستطيل أ ب حـ د.
جد قيمة س التي تجعل مساحة متوازي الأضلاع (م ن و ل) أكبر ما يمكن علمًا بأن م ب = ٢ ب ن.



الشكل (٣–٣٧)

٢١٤

الأخطاء الشائعة

اختبار ذاتي

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة.

المفاهيم والمصطلحات

المصطلحات والمفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية للأسئلة ليتمكنوا من تقييم تعلمهم ذاتيًا.
– تكليف الطلبة تنفيذ حلول الأسئلة كواجب بيتي.
– يسجل الطلبة الصعوبات التي واجهتهم.
– مناقشة الأسئلة التي واجه الطلبة صعوبات في حلها، واحصر الأخطاء المشتركة بين الطلبة، والتعرف إلى أسبابها وعلاجها.

اختبار ذاتي

١) ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة للفقرات من (١ – ١٥)

(١) إذا كانت ص = ٣ س – ٥ هي معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق (س) عند النقطة (٢،١) فإن قَ (٢) تساوي:

أ) ٣ ب) –٣ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{-١}{٣}$

(٢) إذا كان المستقيم ص =٤ س يمس منحنى الاقتران ق(س)= $٤س^٢$ + جـ، عند النقطة ($س_١$، $ص_١$)، فجد قيمة الثابت جـ.

أ) ١ ب) –١ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{-١}{٢}$

(٣) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي: ف(ن) = $٦ن^٢ – ن^٣$ ، فما المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار حتى يصبح تسارعه صفرًا؟

أ) ١٢ ب) ١٦ جـ) ٢٤ د) ٣٢

(٤) يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث إن المسافة (ف) بالأمتار التي يقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي: ف (ن) = أ جا ٣ن ، حيث (أ) ثابت، فإن تسارع الجسيم عندما يقطع ٤ أمتار هي:

أ) ٣٦ $م/ث^٢$ ب) –٣٦ $م/ث^٢$ جـ) ١٢ $م/ث^٢$ د) –١٢ $م/ث^٢$

(٥) إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س) مماس افقي عند النقطة (١ ،٣)، فإن معادلة العمودي على المماس عند تلك النقطة هي:

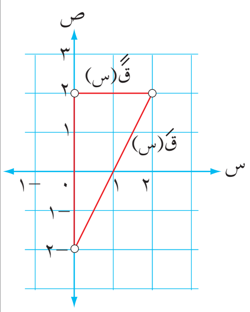
أ) س =١ ب) ص = ٣ جـ) س = صفرًا د) ص = صفرًا

(٦) قذف جسيم رأسيًا لأعلى من سطح الأرض، فإذا كان ارتفاع الجسيم يتعين بالمعادلة ف(ن) = ٧ + ٣٢ ن – $١٦ن^٢$، حيث **ن** الزمن بالثواني، **ف** المسافة بالأمتار، فما أقصى ارتفاع يصله الجسيم عن سطح الأرض؟

أ) ٧ ب) ١٤ جـ) ٢٣ د) ٤٦

٢١٥

* الشكل (٣–٣٨) يمثل منحنى قَ(س) قً(س) للاقتران ق(س) المعرف على الفترة [٠ ، ٢]، اعتمد على هذا الشكل في الإجابة عن الفقرات ١٣، ١٤، ١٥.



الشكل (٣–٣٨)

(١٣) جد الفترة التي يكون فيها الاقتران ق متناقصًا.

أ) [٠، ١] ب) (٠ ، ١)

جـ) [١، ٢] د) (٠ ، ٢)

(١٤) جد الفترة التي يكون فيها منحنى الاقتران ق مقعرًا إلى الأعلى.

أ) [٠، ١] ب) (٠، ١) جـ) [٠، ٢] د) (١ ، ٢)

(١٥) جد نقطة القيمة الصغرى المحلية للاقتران ق.

أ) (٠ ، ق(٠)) ب) (١ ، ق(١)) جـ) (٢،ق(٢)) د) ($\frac{١}{٢}$ ، ق($\frac{١}{٢}$))

٢) أ) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى ق(س) = $(س–٣)^٢$، إذا كان هذا المماس مرسومًا من النقطة (٠ ، ٠).

ب) قذفت كرة رأسيًا إلى الأعلى من قمة برج ارتفاعه ٢٢٥م، إذا كان ارتفاع الكرة من نقطة القذف يتعين بالمعادلة ف(ن) = ٦٠ن – $٥ن^٢$، حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار، فجد:

(١) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة.
(٢) سرعة الكرة عندما تصل إلى سطح الأرض.

٣) انطلق صاروخ رأسيًا إلى الأعلى، حيث تم رصده بواسطة رادار على سطح الأرض يبعد ٢ كم عن قاعدة إطلاق الصاروخ، فإذا كانت سرعة الصاروخ ٥٤٠م/ث، فجد معدل التغير

٢١٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

– تابع الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، وتقديم المساعدة لهم قدر الإمكان مع محاورة الطلبة للتعرف إلى سبب الإخفاق.
– وجّه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المتنوعة.
– أعطِ فرصة للحل بأكثر من طريقة لبعض الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: التقويم المعتمد على الأداء.
– **الأداة**: سلّم التقدير (٢ – ٣).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

(٧) إذا كان ق(س) = ٢س^{٣} + أ س + ٥، وكان للاقتران ق نقطة حرجة عند س = ١ ، فما قيمة الثابت أ ؟

أ) –٧ ب) صفر جـ) –٦ د) –١١

(٨) إذا كان للاقتران ق(س) = أ س^{٣} – ٣س^{٢} قيمة صغرى محلية عند س =١، فإن قيمة الثابت أ تساوي:

أ) ٢ ب) –٢ جـ) –٣ د) ٣

(٩) إذا كان ق(س) = جا س، معرفًا على الفترة (٠ ، π)، فإن الإحداثي السيني لنقطة القيمة العظمى المطلقة للاقتران ق هو:

أ) π ب) صفر جـ) $\frac{\pi}{٢}$ د) $\frac{\pi}{٣}$

(١٠) إذا كان ق(س) = (٢س – ٤)^{٣} + ٣، فإن نقطة الانعطاف لهذا الاقتران هي:

أ) (٣ ، ٢) ب) (٢ ، ٣) جـ) (٠ ، ٢) د) (٢ ، ٠)

(١١) إذا كان قَ (س) = س^{٢} – ٢س، فإن زاوية الانعطاف لمنحنى ق(س) تساوي:

أ) $\frac{\pi}{٤}$ ب) صفر جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ د) $\frac{٥\pi}{٤}$

(١٢) إذا علمت أن للاقتران ص = ق(س) نقطة انعطاف عند س = ٢ ، وان ق(٢) = ٨، قَ (٢) = –٣ ، قً (٢) = صفرا ، فإن ظل زاوية الانعطاف يساوي :

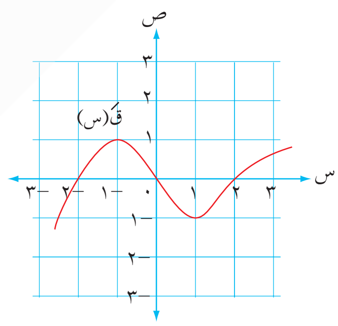
أ) صفر ب) ٤ جـ) ٨ د) –٣

٢١٦

في زاوية ارتفاع الصاروخ لكي يبقى ظاهرًا على شاشة الرادار وهو على ارتفاع ١٢٠٠ متر عن سطح الأرض.

٤) يمثل الشكل (٣–٣٩) منحنى قَ(س)، للاقتران ق(س) المعرف على ح، اعتمد على هذا الشكل في إيجاد:

أ) الفترة (الفترات التي يكون فيها منحنى ق مقعرًا إلى الأعلى وتلك التي يكون فيها مقعرًا إلى الأسفل.
ب) نقط الانعطاف لمنحنى ق (إن وجدت).
جـ) الفترة (الفترات) التي يكون فيها الاقتران ق متزايدًا.



الشكل (٣–٣٩)

٥) بدأت نقطة مادية الحركة من النقطة أ (٨ ، ٠) على محور السينات باتجاه نقطة الأصل بسرعة ٤سم/ث، وفي اللحظة نفسها بدأت نقطة أخرى الحركة من النقطة ب (٠ ، ١٠) على محور الصادات مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢ سم/ث، متى يكون البعد بين النقطتين أقل ما يمكن؟.

٢١٨

الأخطاء الشائعة

المستوى الرابع

٤

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

الدرس ٤ - ١ الاقتران البدائي

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مفهوم الاقتران البدائي.
- يتعرّف مفهوم التكامل المحدود.
- يجد التكامل غير المحدّد لبعض الاقترانات.

المفاهيم والمصطلحات

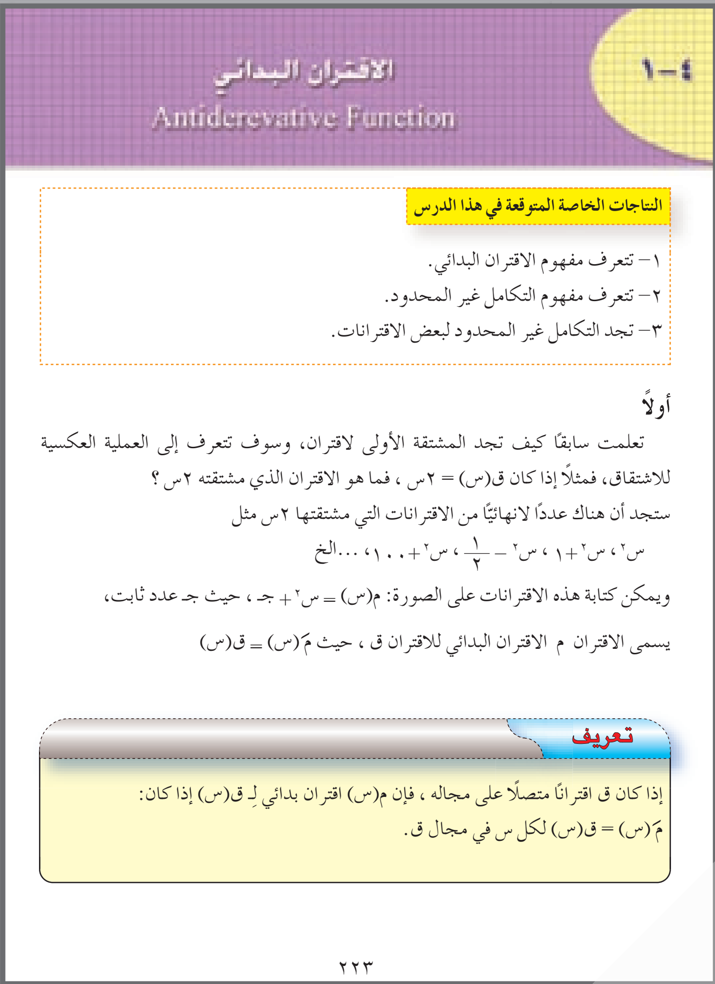
الاقتران البدائي، التكامل غير المحدّد.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- توضيح مفهوم الاقتران البدائي لاقتران معين بعرض أمثلة ثم كتابة التعريف على السبورة.
- مناقشة الطلبة بالمثالين (١، ٢) الواردين في الكتاب.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) في الدفاتر.
- التوصل مع الطلبة للصورة العامة للاقتران البدائي للاقتران ق، ثم عرّف مفهوم التكامل غير المحدود للاقتران ق بالاستفادة من مفهوم الاقتران البدائي.
- مناقشة الطلبة بالأمثلة (٣، ٤، ٥)، ثم تكليفهم حل تدريب (٢) في الدفاتر.
- التوصل مع الطلبة إلى أن عمليتي الاشتقاق والتكامل متعاكستان بالاستعانة بالبند (٣) صفحة (٧).
- مناقشة الطلبة بالمثالين (٦، ٧)، وتكليفهم حل التدريبين (٣، ٤) في الدفاتر.
- تكليف الطلبة جميعهم حل الأسئلة (١، ٢، ٣) كواجب بيتي.

معلومات إضافية



١-٤

الاقتران البدائي

Antiderevative Function

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تتعرف مفهوم الاقتران البدائي.

٢- تتعرف مفهوم التكامل غير المحدود.

٣- تجد التكامل غير المحدود لبعض الاقترانات.

أولاً

تعلمت سابقًا كيف تجد المشتقة الأولى لاقتران، وسوف تتعرف إلى العملية العكسية للاشتقاق، فمثلاً إذا كان ق(س) = ٢س ، فما هو الاقتران الذي مشتقته ٢س ؟

ستجد أن هناك عددًا لانهائيًا من الاقترانات التي مشتقتها ٢س مثل

س^{٢} ، س^{٢}+١ ، س^{٢} − $\frac{١}{٢}$ ، س^{٢}+١٠٠، ...الخ

ويمكن كتابة هذه الاقترانات على الصورة: م(س) = س^{٢} + جـ ، حيث جـ عدد ثابت،

يسمى الاقتران م الاقتران البدائي للاقتران ق ، حيث مَ(س) = ق(س)

تعريف

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على مجاله ، فإن م(س) اقتران بدائي لِـ ق(س) إذا كان:

مَ(س) = ق(س) لكل س في مجال ق.

٢٢٣

ثانيًا

ليكن م$_{١}$(س) = س^{٣} ، م$_{٢}$(س) = س^{٣} + ٢ ، م$_{٣}$(س) = س^{٣} − ٦ اقترانات بدائية للاقتران الذي قاعدته ق(س) = ٣ س^{٢}

حيث إن مَ$_{١}$(س) = ق(س) ، مَ$_{٢}$(س) = ق(س) ، مَ$_{٣}$(س) = ق(س)

تلاحظ أن هناك ثلاثة اقترانات بدائية (م$_{١}$ ، م$_{٢}$ ، م$_{٣}$) للاقتران ق تختلف في الحد الثابت فقط، وأنه بالإمكان إيجاد اقترانات بدائية أخرى للاقتران ق ، وذلك بتغيير الحد الثابت في أي منها

لاحظ أن الفرق بين أي اقترانين بدائيين يساوي ثابتًا.

تعريف

إذا كان م اقترانًا بدائيًّا للاقتران ق على [أ، ب] فإن الصورة العامة لقاعدة الاقتران البدائي للاقتران ق هي : م(س) + جـ ، حيث جـ ثابت وذلك لأن $\frac{د}{د س}$ (م (س) + جـ) = مَ(س) = ق(س)

ويسمى الاقتران البدائي: بالتكامل غير المحدود لِـ ق(س) بالنسبة إلى س ويرمز له على النحو الآتي:

$\int$ ق(س) دس **ويقرأ تكامل ق(س) دال س ويعني تكامل الاقتران ق بالنسبة إلى س.**

مثال (٣)

جد $\int$ ٤س^{٣} دس .

الحل

$\int$ ٤س^{٣} دس = س^{٤} + جـ، وذلك لأن الاقتران الذي قاعدته (س^{٤} + جـ) اقتران بدائي لِـ (٤س^{٣})

٢٢٥

إجابات الاسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.

٢) ملحق أدوات التقويم.

٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (١)

بيّن أن الاقتران م الذي قاعدته م (س) = $س^{٣}$ + ٤ س اقتران بدائي للاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ٣ $س^{٢}$ + ٤

الحل

بما أن مَ (س) = ٣ $س^{٢}$ + ٤ = ق(س)، ق(س) اقتران متصل لأنه كثير حدود

إذن م اقتران بدائي للاقتران ق.

مثال (٢)

جد اقترانًا بدائيًّا للاقتران الذي قاعدته ق(س) = جتا س

الحل

ق(س) اقتران متصل على مجاله

ابحث عن اقتران مشتقته جتا س

لاحظ أن مشتقة (جا س) هي جتا س أو (جاس)َ = جتا س

وعليه فإن م (س) = جا س اقتران بدائي لـ ق(س).

لأن مَ(س) = ق(س)

تدريب (١)

جد اقترانًا بدائيًّا للاقتران ق الذي قاعدته ق(س) = ٤$س^{٣}$ + $قا^{٢}$ س

٢٢٤

مثال (٤)

جد $\int$ قاس ظاس دس

الحل

$\int$ قاس ظاس دس = قا س + جـ ،

لإن (قاس + جـ)َ = قا س ظا س

تذكر

ق (س)	قَ(س)
جا س	جتا س
جتا س	− جا س
ظا س	$قا^{٢}$ س
ظتا س	− $قتا^{٢}$ س
قا س	قا س ظا س
قتا س	− قتا س ظتا س
$س^{ن}$	ن $س^{ن-١}$

مثال (٥)

جد $\int$ $ظا^{٢}$س دس

الحل

تعلم أن $ظا^{٢}$س = $قا^{٢}$س − ١

إذن $\int$ $ظا^{٢}$س دس = $\int$ ($قا^{٢}$س − ١) دس = ظا س − س + جـ

تدريب (٢)

جد التكاملات الآتية:

١) $\int$ (٦س − ٣) دس

٢) $\int$ $ظتا^{٢}$ س دس

٢٢٦

الأخطاء الشائعة

يعتقد بعض الطلبة أنه يوجد اقتران بدائي واحد فقط لأي اقتران، لذا أكد للطلبة أن أي اقتران له عدد مالا نهائي من الاقترانات البدائية تختلف فيما بينها بالحد الثابت فقط، وتكتب على الصورة الآتية:

م (س) + جـ حيث جـ ∈ ح

الزمن المتوقع

ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد الاقتران البدائي للاقتران ق حيث ق (س) = ٤$س^{٣}$.

– جد $\int$ ٣ . دس.

– إذا كان $\int$ ق (س) دس = $س^{٢}$ − س، جد قَ (١).

إثراء

– جسم سرعته تعطى بالعلاقة ع = ٣$ن^{٢}$ + ٢ن + ٢، جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد ثلاث ثوانٍ من حركته علمًا بأن الجسم قطع مسافة ١٠م بعد ثانية واحدة من حركته.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

– **الأداة**: الاختبار الذاتي.

ويتم ذلك من خلال متابعة حل التدريبات.

التكامل الأفقي

– يستخدم مفهوم التكامل في مبحث الفيزياء لايجاد الشغل الناتج عن تأثير قوة متغيرة.

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤ - ١ الاقتران البدائي

النتاجات الخاصة

– يجد الاقتران البدائي لاقتران ما.
– يجد التكامل غير المحدّد لاقتران ما.

المفاهيم والمصطلحات

الاقتران البدائي، التكامل غير المحدّد.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعليم التعاوني

– مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.
– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.
– تكليف كل مجموعة حل الأسئلة (٤، ٥، ٦، ٧) الواردة في كتاب الطالب.
– تكليف أربع مجموعات بالعرض بعد الانتهاء من الحل بحيث تعرض كل مجموعة حل سؤال واحد فقط.
– تكليف مجموعات أخرى مناقشة المجموعات التي تعرض حلها على السبورة.

معلومات إضافية

ثالثًا

تعرفت أن الصورة العامة لقاعدة الاقتران البدائي للاقتران ق

هي : م(س) + جـ حيث مَ(س) = ق(س)

وأن $\int$ ق(س) دس = م (س) + جـ ....(١) وعليه فإن :

$\int$ مَ(س) دس = م (س) + جـ

يُسمى العدد الثابت جـ ثابت التكامل.

وباشتقاق الطرفين في (١) ينتج:

$\frac{د}{د س}$ $\int$ ق(س) دس = $\frac{د}{د س}$ (م (س) + جـ) = مَ(س)

وبما أن مَ(س) = ق (س) فإن :

$\frac{د}{د س}$ ($\int$ ق(س) دس) = ق(س)

أي أن عمليتي الاشتقاق والتكامل متعاكستان.

تذكر

ق(س) إقتران متصل كما ورد في تعريف الإقتران البدائي.

مثال (٦)

إذا كان $\int$ ق(س) دس = س^{٤} + س + ٤ ، فجد ق (١) ،قَ (١)

الحل

اشتق الطرفين ينتج:

ق(س) = ٤س^{٣} + ١

ومنه ق (١) = ٤ (١)^{٣} + ١ = ٥

قَ (س) = ١٢ س^{٢}

قَ (١) = ١٢ (١)^{٢} = ١٢

٢٢٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int$ (٢م + ٦م^{٢}) د م.
- $\int$ (جتا س – قا^{٢}س) د س.

إثراء

– كلف الطلبة حل السؤال الثامن من أسئلة الكتاب.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٤) لمتابعة أداء المجموعات.

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة، ويتم ذلك من خلال تصحيح حلول المجموعات

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تدريب (٣)

إذا كان $\int$ ق(س) دس = جا^{٢} ٢س + ظا س + جـ

فجد قَ ($\frac{\pi}{٤}$)

مثال (٧)

إذا كان $\int$ قَ (س) دس = س^{٢} + ٣ س + ٣ ، ق (١) = ٢

فجد قيمة ق (٤)

الحل

بما أن $\int$ قَ (س) دس = س^{٢} + ٣ س + ٣

إذن ق (س) = س^{٢} + ٣ س + ٣ + جـ

لكن ق (١) = ٢ ⇐ ق(١) = (١)^{٢} + ٣ × ١ + ٣ + جـ = ٢ ⇐ جـ = –٥

إذن ق(س) = س^{٢} + ٣ س – ٢

ق(٤) = ١٦ + ١٢ – ٢ = ٢٦

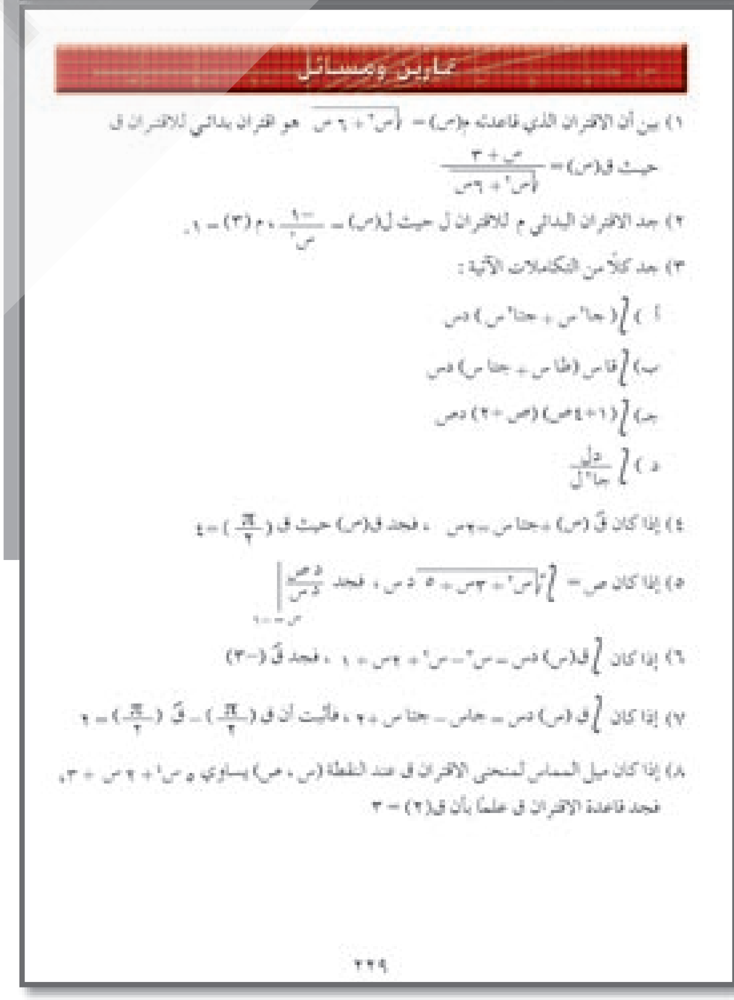
تدريب (٤)

إذا كان $\int$ (قَ (س) + ٢ س) دس = س^{٣} + أ س^{٢} + ١

وكان قَ (١) = ٥ ، ق (٢) = ٧ ، جد :

١) قيمة أ   ٢) ق(٠)   ٣) قَ (٤)

٢٢٨



تمارين ومسائل

١) بين أن الاقتران الذي قاعدته م(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}$ هو اقتران بدائي للاقتران ق

حيث ق(س) = $\frac{\text{س} + ٣}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٦\text{س}}}$

٢) جد الاقتران البدائي م للاقتران ل حيث ل(س) = $\frac{-١}{\text{س}^{٢}}$ ، م (٣) = ١.

٣) جد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int$ (جا^{٢} س + جتا^{٢} س) دس

ب) $\int$ قا س (ظا س + جتا س) دس

جـ) $\int$ (١ + ٤ص) (ص + ٢) دص

د) $\int$ $\frac{\text{دل}}{\text{جتا}^{٢}\text{ل}}$

٤) إذا كان قَ (س) + جتا س = ٢س ، فجد ق(س) حيث ق ($\frac{\pi}{٢}$) = ٤

٥) إذا كان ص = $\int$ $\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٥}$ د س ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ | س = ١

٦) إذا كان $\int$ ق(س) دس = س^{٣} – س^{٢} + ٣س + ١ ، فجد قَ (–٣)

٧) إذا كان $\int$ ق (س) دس = جاس – جتا س + جـ ، فأثبت أن ق ($\frac{\pi}{٢}$) – قَ ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

٨) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س ، ص) يساوي ٤ س^{٣} + ٢ س + ٣،

فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٢) = ٣

٢٢٩

النتاجات الخاصة

– يحسب التكامل غير المحدّد لاقترانات كثيرات الحدود ولاقترانات مثلثية ونسبية.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل غير المحدّد.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– تقديم مبررات لإيجاد قواعد التكامل غير المحدّد.
– عرض القاعدتين الأولى والثانية مع مناقشة الأمثلة (١، ٢، ٣، ٤، ٥) مع الطلبة على السبورة.
– تكليف الطلبة حل تدريب (١) في الدفاتر.
– عرض القاعدة الثالثة على السبورة، ومناقشة مثال (٦) مع الطلبة على السبورة.
– تكليف الطلبة جميعهم حل السؤال الأول (أ، ب، د، و) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٤-٢ قواعد التكامل غير المحدود

Rules of Indefinite Integrals

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تحسب التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات الحدود ولاقترانات مثلثية ونسبية.

سبق أن قمت بإيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات حدود ولاقترانات مثلثية، واعتمدت على المشتقة لإيجاد مثل هذه التكاملات، وهذه الطريقة تقوم على التذكر، وعليه فإنه لا بد من وجود طرق أخرى تعتمد على قواعد محددة لإيجاد التكامل غير المحدود، لذا سيتم تعرف بعض هذه القواعد التي تبسط عملية حساب قيمة هذا التكامل.

قاعدة (١)

$\int$ أ دس = أس + جـ حيث أ عدد ثابت، جـ ثابت التكامل

مثال (١)

جد $\int$ ٤ دس

الحل

$\int$ ٤ دس = ٤س + جـ

مثال (٢)

جد $\int \pi$ دص

الحل

$\int \pi$ دص = π ص + جـ

٢٣٠

مثال (٥)

جد $\int \frac{١}{\sqrt{س}}$ دس

الحل

$\int \frac{١}{\sqrt{س}}$ دس = $\int$ س$^{-\frac{١}{٢}}$ دس

= $\frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}}$ + جـ

= ٢$\sqrt{س}$ + جـ

تدريب (٢)

جد كلاً مما يأتي:

١) $\int \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ دس
٢) $\int \frac{س^٣\sqrt{س}}{س}$ دس

قاعدة (٣)

١) $\int$ أ ق(س) دس = أ $\int$ ق(س) دس

٢) $\int$ (ق$_١$(س) ± ق$_٢$(س) ± ق$_٣$(س) + ... ± ق$_ن$(س)) دس

= $\int$ ق$_١$(س) دس ± $\int$ ق$_٢$(س) دس ± $\int$ ق$_٣$(س) دس ± ..... ± $\int$ ق$_ن$(س) دس

٢٣٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

تدريب (١)

جد

١) $\int \text{د س}$ ٢) $\int \frac{\text{د س}}{4}$

قاعدة (٢)

$$\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{د س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ} \,,\quad \text{ن} \neq -1$$

مثال (٣)

جد $\int \text{س}^3\,\text{د س}$

الحل

$$\int \text{س}^3\,\text{د س} = \frac{\text{س}^{3+1}}{3+1} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^4}{4} + \text{جـ}$$

مثال (٤)

جد $\int \sqrt[3]{\text{س}}\,\text{د س}$

الحل

$$\int \sqrt[3]{\text{س}}\,\text{د س} = \int \text{س}^{\frac{1}{3}}\,\text{د س}$$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \text{جـ} = \frac{3}{4}\,\text{س}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\text{س}^4} + \text{جـ}$$

٢٣١

مثال (٦)

جد كلًا من التكاملات الآتية:

١) $\int 2\text{س}^3\,\text{د س}$ ٢) $\int (\text{س}^2 + 6\text{س} - 3)\,\text{د س}$ ٣) $\int \frac{\text{س} - 1}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{د س}$

الحل

١) $\int 2\text{س}^3\,\text{د س} = 2\int \text{س}^3\,\text{د س} = 2 \times \frac{\text{س}^4}{4} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^4 + \text{جـ}$

٢) $\int (\text{س}^2 + 6\text{س} - 3)\,\text{د س} = \int \text{س}^2\,\text{د س} + \int 6\text{س}\,\text{د س} - \int 3\,\text{د س}$

$= \frac{\text{س}^3}{3} + 6 \times \frac{\text{س}^2}{2} - 3\text{س} + \text{جـ}$

$= \frac{1}{3}\text{س}^3 + 3\text{س}^2 - 3\text{س} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{س} - 1}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{د س} = \int (\text{س} - 1) \times \text{س}^{\frac{-1}{3}}\,\text{د س}$

$= \int (\text{س}^{\frac{2}{3}} - \text{س}^{\frac{-1}{3}})\,\text{د س} = \frac{3}{5}\text{س}^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{جـ}$

تدريب (٣)

جد التكامل في كل مما يأتي :

١) $\int (4\text{س}^3 - 2\text{س} + 6)\,\text{د س}$ ٢) $\int \frac{2\text{س}^2 - 3\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$

٢٣٣

الأخطاء الشائعة

يعتقد بعض الطلبة أن:

$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{د س} = \int \text{ق}(\text{س})\,\text{د س} \times \int \text{هـ}(\text{س})\,\text{د س}$،

بيّن للطلبة خطأ اعتقادهم وذلك بعرض المثال الآتي :

$\int (\text{س} \times 3\text{س})\,\text{د س}$.

الزمن المتوقع

ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int (\text{س}^2 + \sqrt{\text{س}})\,\text{د س}$.
- $\int \frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^3}\,\text{د س}$.

إثراء

– كلف الطلبة حل السؤال الثاني من أسئلة الكتاب.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: القلم والورقة

– الأداة : اختبار قصير

ويتم ذلك من خلال تصحيح دفاتر الطلبة بعد حلهم التدريبات

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يحسب التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات الحدود ولاقترانات مثلثية ونسبية.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل غير المحدود.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.
- عرض القاعدة (٤) على السبورة مع مناقشة مثال (٧) مع الطلبة، وتكليفهم حل تدريب (٣) في الدفاتر.

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- تقسم الطلبة مجموعات تعاونية.
- تكليف كل مجموعة حل السؤال الأول (جـ، هـ، ز، ح).
- تكليف أربع مجموعات عرض الحل على السبورة بحيث تعرض كل مجموعة حل فرع واحد فقط.
- تكليف مجموعات أخرى بمناقشة المجموعة التي تعرض حلها على السبورة.

معلومات إضافية

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

قاعدة (٤)

١) $\int \text{جا س دس} = -\text{جتا س} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جتا س دس} = \text{جا س} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{قا}^2\text{س دس} = \text{ظا س} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{قتا}^2\text{س دس} = -\text{ظتا س} + \text{جـ}$

٥) $\int \text{قا س ظا س دس} = \text{قا س} + \text{جـ}$

٦) $\int \text{قتا س ظتا س دس} = -\text{قتا س} + \text{جـ}$

مثال (٧)

جد التكاملات الآتية:

١) $\int (\text{جا س} - ٣\,\text{جتا س})\,\text{دس}$ ٢) $\int \text{جا}^2 \frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس}$

٣) $\int \frac{\text{دس}}{١ + \text{جا س}}$ ٤) $\int \text{جا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس}$

الحل

١) $\int (\text{جا س} - ٣\,\text{جتا س})\,\text{دس} = \int \text{جا س دس} - ٣\int \text{جتا س دس}$

$= -\text{جتا س} - ٣ \times \text{جا س} + \text{جـ}$

$= -\text{جتا س} - ٣\,\text{جا س} + \text{جـ}$

٢٣٤

٤) $\int \text{جا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس}$

استخدم المتطابقة: جا ٢أ = ٢ جا أ جتا أ

أو $\text{جا أ} = ٢\,\text{جا} \frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جتا} \frac{\text{أ}}{٢}$

$\frac{١}{٢}\,\text{جا أ} = \text{جا} \frac{\text{أ}}{٢}\,\text{جتا} \frac{\text{أ}}{٢}$

إذن $\text{جا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا} \frac{\text{س}}{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{جا س}$

وعليه فإن $\int \text{جا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا} \frac{\text{س}}{٢}\,\text{دس} = \int \frac{١}{٢}\,\text{جا س دس}$

$= \frac{١}{٢} \int \text{جا س دس}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{جتا س} + \text{جـ}$

تدريب (٤)

جد التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{جا}^2\text{س جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ ٢) $\int (\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س})\,\text{دس}$

٢٣٦

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int (\text{قا}^2\text{س} - \text{جتاس})\,\text{د س}$.
- $\int (3\,\text{قاس ظاس} + 2\text{س})\,\text{د س}$.

إثراء

– جد التكاملات الآتية:

- $\int \dfrac{\text{قا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$.
- $\int (\text{جا}\dfrac{\text{س}}{2} + \text{جتا}\dfrac{\text{س}}{2})^2\,\text{د س}$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.
من خلال متابعة الطلبة بعد حلهم التدريب.
– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٤).
استخدام قائمة الشطب (٢–٤) لتقويم أداء المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

٢) $\int \text{جا}^2\dfrac{\text{س}}{2}\,\text{دس}$

استخدم المتطابقة $\text{جا}^2\dfrac{\text{س}}{2} = \dfrac{1 - \text{جتاس}}{2}$

إذن $\int \text{جا}^2\dfrac{\text{س}}{2}\,\text{دس} = \int \dfrac{1 - \text{جتاس}}{2}\,\text{دس} = \dfrac{1}{2}\int (1 - \text{جتا س})\,\text{دس}$

$= \dfrac{1}{2}(\text{س} - \text{جاس}) + \text{جـ}$

٣) $\int \dfrac{\text{دس}}{1 + \text{جاس}}$

اضرب كلاً من البسط والمقام في مرافق المقام : ١– جاس

تذكر
$\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س} = 1$
$1 - \text{جا}^2\text{س} = \text{جتا}^2\text{س}$

$\int \dfrac{\text{د س}}{1 + \text{جاس}} \times \dfrac{1 - \text{جاس}}{1 - \text{جاس}} = \int \dfrac{1 - \text{جاس}}{1 - \text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \dfrac{1 - \text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \dfrac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس} - \int \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$ (بتجزئة الكسر)

$= \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} - \int \dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \dfrac{1}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس} - \int \text{ظاس قاس}\,\text{دس}$

$= \text{ظا س} - \text{قا س} + \text{جـ}$

٢٣٥

تمارين ومسائل

١) جد كلاً من التكاملات الآتية :

أ) $\int (\text{س}^2 + \dfrac{1}{\text{س}^2} - \sqrt[3]{\text{س}^2})\,\text{دس}$

ب) $\int (2 + 3\text{ع})^2\,\text{دع}$

جـ) $\int \dfrac{\text{جتا}^2\text{س} - 5}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

د) $\int (3 - \pi\,\text{س}^2 + \dfrac{1}{\text{س}^3})\,\text{دس}$

هـ) $\int \dfrac{1}{1 + \text{جتا}2\text{س}}\,\text{دس}$

و) $\int \dfrac{\text{س}^3 + 5\text{س}^2 - 4}{\text{س}^2}\,\text{دس}$

ز) $\int \dfrac{5}{\text{جا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

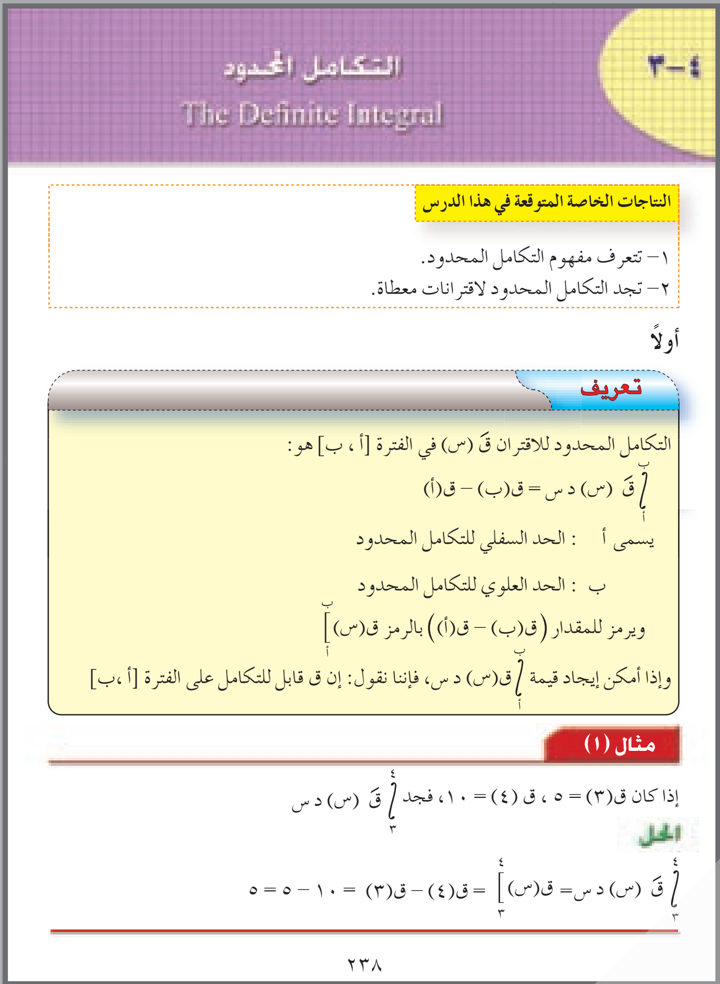
ح) $\int \dfrac{1 - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2} \times \text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2}}\,\text{دس}$

٢) إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة بحيث أن ق″(س) = ٣ س^٢ – ٢، وكانت النقطة (٠ ، ١) تقع على منحناه ، فجد قاعدة الاقتران ق.

٣) إذا كان قَ (س) = س^٣ – س^٢ + ١ ، فجد : ق(٣) – ق(١) .

٢٣٧

الأخطاء الشائعة



٤-٣ التكامل المحدود
The Definite Integral

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تتعرف مفهوم التكامل المحدود.
٢- تجد التكامل المحدود لاقترانات معطاة.

أولاً

تعريف

التكامل المحدود للاقتران $ق'(س)$ في الفترة [أ ، ب] هو:

$$\int_{أ}^{ب} ق'(س)\, د س = ق(ب) - ق(أ)$$

يسمى أ : الحد السفلي للتكامل المحدود

ب : الحد العلوي للتكامل المحدود

ويرمز للمقدار $(ق(ب) - ق(أ))$ بالرمز $ق(س)\Big]_{أ}^{ب}$

وإذا أمكن إيجاد قيمة $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س$، فإننا نقول: إن ق قابل للتكامل على الفترة [أ ،ب]

مثال (١)

إذا كان ق(٣) = ٥ ، ق (٤) = ١٠، فجد $\int_{٣}^{٤} ق'(س)\, د س$

الحل

$$\int_{٣}^{٤} ق'(س)\, د س = ق(س)\Big]_{٣}^{٤} = ق(٤) - ق(٣) = ١٠ - ٥ = ٥$$

٢٣٨

تدريب (١)

احسب قيمة التكاملين الآتيين:

١) $\int_{-٣}^{٦} (\frac{١}{٢} س - ٦)\, دس$

٢) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} قتاس ظتاس\, دس$

ثانيًا

كما أن للتكامل غير المحدود قواعد، فإن هناك أيضًا قواعد للتكامل المحدود تسهل عليك حساب قيمة التكامل وهي:

قاعدة

$\int_{أ}^{ب} جـ\, دس = جـ (ب - أ)$ ، حيث جـ عدد حقيقي

مثال (٤)

جد $\int_{١}^{٦} ٤\, د س$

الحل

$$\int_{١}^{٦} ٤\, د س = ٤ (٦ - ١) = ٢٠$$

مثال (٥)

إذا كانت $\int_{١}^{٢أ} ٣\, د س = ٦$ ، فجد قيمة أ .

الحل

$$\int_{١}^{٢أ} ٣\, د س = ٦$$

$$٣(٢أ - ١) = ٦ \Leftarrow ٢أ - ١ = \frac{٦}{٣} \Leftarrow ٢أ - ١ = ٢ \Leftarrow أ = \frac{٣}{٢}$$

٢٤٠

الدرس ٤ - ٣ التكامل المحدود

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مفهوم التكامل المحدود.
- يجد التكامل المحدود لاقترانات معطاه.
- يستخدم قواعد التكامل المحدود لحساب تكاملات محددة.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل غير المحدود، إشارة التكامل ($\int$)، الحد العلوي للتكامل المحدود، الحد السفلي للتكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- توضيح مفهوم التكامل المحدود بكتابة التعريف على السبورة.
- مناقشة الأمثلة (١، ٢، ٣) مع الطلبة.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) في الدفاتر.
- عرض الخاصية الخطية (١، ٢) على السبورة، ومناقشة الأمثلة المتعلقة بها في كتاب الطالب.
- تكليف الطلبة حل التدريبين (٢، ٣) في الدفاتر.
- تكليف الطلبة جميعهم حل السؤالين (١، ٢) كواجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

- يمكن إيجاد $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس$ باستخدام التعريف حيث إن:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, دس = \lim_{ن \to \infty} \frac{ب - أ}{ن} \sum_{ر=١}^{ن} ق(س_ر)، \quad س_ر = أ + \frac{ب - أ}{ن}\, ر .$$

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد قيمة التكاملات الآتية:

- $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} – س^{٣}) د س.
- $\int_{١}^{١٦}$ $\sqrt{\text{س}}$ د س.

إثراء

– جد قيمة التكامل الآتي:

- $\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$ (قاس – قتاس)^{٢}د س.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

– **الأداة**: اختبار قصير.

ويتم ذلك من خلال تصحيح دفاتر الطلبة بعد حلهم التدريبات.

– **الاستراتيجية**: مراجعة الذات.

– **الأداة**: يوميات طالب.

شجّع الطلبة لتدوين الصعوبات التي واجهوها كذلك النجاحات التي حققوها.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٢)

إذا كان ق(س) = ٢س + ١ فجد:

١) $\int$ ق(س) دس   ٢) $\int_{١-}^{٢}$ ق(س) دس

الحل

١) $\int$ ق(س) دس = $\int$ (٢س + ١) دس = س^{٢} + س + جـ

٢) $\int_{١-}^{٢}$ ق(س) دس = $\int_{١-}^{٢}$ (٢س + ١) دس = س^{٢} + س + جـ $\Big]_{١-}^{٢}$

= (٤ + ٢ + جـ) – (١ + –١ + جـ)

= ٦ + جـ – جـ = ٦

لاحظ أن ثابت التكامل جـ لا يظهر في الجواب النهائي، لأنه تم اختصاره، **لذلك** فإنه لا داعي لكتابة ثابت التكامل عند إجراء التكامل في التكاملات المحدودة ، لأنه يتم اختصاره **بعد** عملية التعويض، فمثلاً:

$\int_{١}^{٢}$ ٣ س^{٢} د س = س^{٣} $\Big]_{١}^{٢}$ = (٢)^{٣} – (١)^{٣} = ٧

مثال (٣)

جد $\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س د س

الحل

$\int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س د س = – جتاس $\Big]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$ = – (جتا $\frac{\pi}{٢}$ – جتا $\frac{\pi}{٣}$) = – (٠ – $\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٢}$

٢٣٩

تدريب (٢)

إذا كانت $\int_{١+أ}^{٢+٣أ}$ ٥ د س = ٤٠ ، فجد قيمة أ.

خاصية (١)

الخواص الخطية

١) $\int_{أ}^{ب}$ جـ ق(س) دس = جـ $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس

٢) $\int_{أ}^{ب}$ (ق(س) ± هـ(س) دس) = $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) دس ± $\int_{أ}^{ب}$ هـ(س) دس

مثال (٦)

جد $\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ٣س) دس.

الحل

$\int_{٠}^{١}$ (س^{٢} + ٣س) دس = $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} دس + $\int_{٠}^{١}$ ٣س دس

= $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big]_{٠}^{١}$ + ٣ $\int_{٠}^{١}$ س دس

= ($\frac{١}{٣}$ – ٠) + ٣ $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big]_{٠}^{١}$

= $\frac{١}{٣}$ + $\frac{٣}{٢}$ (١^{٢} – ٠)

= $\frac{١}{٣}$ + $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{١١}{٦}$

٢٤١

الأخطاء الشائعة

يخطيء بعض الطلبة عند حساب قيمة تكامل محدود بالتعويض أولاً بالحد السفلي للتكامل ويطرح منه قيمة التعويض العلوي.

النتاجات الخاصة

- يستخدم قواعد التكامل لحساب تكاملٍ لاقتران معرف على أكثر من قاعدة.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.
- عرض خاصية الإضافة على السبورة ومناقشة الطلبة بمحتواها.
- مناقشة الطلبة بالأمثلة (٨، ٩، ١٠)، ثم تكليفهم حل التدريبين (٤، ٥).
- عرض خاصية (٣) على السبورة ومناقشتهم بالأمثلة (١١، ١٢).
- تكليف الطلبة حل تدريب (٦).

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية، وتقديم ورقة عمل (٣-٨) لكل مجموعة وتكليفهم تنفيذها.
- تكليف بعض المجموعات عرض حل أحد الأسئلة على السبورة.
- إجراء حوار بين المجموعات أثناء العرض للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

مثال (٧)

إذا كان $\int_{1}^{2} 2\,\text{ق(س)}\,\text{دس} = 10$

فجد $\int_{1}^{2} \left(\text{ق(س)} + 6\right)\text{د س}$

الحل

$\int_{1}^{2} 2\,\text{ق(س)}\,\text{دس} = 10 \Leftarrow 2\int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 10$

إذن $\int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 5$

$$\int_{1}^{2} \left(\text{ق(س)} + 6\right)\text{د س} = \int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{1}^{2} 6\,\text{دس}$$

$$= 5 + 6(2-1)$$

$$= 5 + 6 = 11$$

تدريب (٣)

إذا كان $\int_{0}^{2} \left(\text{ق(س)} - 2\text{س}\right)\text{د س} = 20$

فجد $\int_{0}^{2} 3\,\text{ق(س)}\,\text{دس}$

٢٤٢

مثال (٩)

جد $\int_{0}^{3} \left[\frac{1}{2}\text{س} + 4\right]\text{د س}$.

الحل

نعيد تعريف $\text{ق(س)} = \left[\frac{1}{2}\text{س} + 4\right]$ على الفترة [٠ ، ٣]

ق يغير قاعدته بعد كل فترة طوها ٢

والنقط التي يتشعب عندها الاقتران (يغير قاعدته عندها) هي : ٠، ٢، ٤

لكن ق معرف على [٠ ، ٣] والعدد ٣ يقع في الفترة [٢ ، ٤]

وعليه فإن $\text{ق(س)} = \begin{cases} 4 &, 0 \le \text{س} < 2 \\ 5 &, 2 \le \text{س} \le 3 \end{cases}$ لكل $\text{س} \in [0 , 3]$

إذن $\int_{0}^{3} \left[\frac{1}{2}\text{س} + 4\right]\text{د س} = \int_{0}^{2} 4\,\text{د س} + \int_{2}^{3} 5\,\text{د س} = 4(2-0) + 5(3-2) = 13$

تدريب (٤)

جد $\int_{1}^{4} [\text{س} + 1]\,\text{د س}$.

مثال (١٠)

إذا كان $\int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 4$ ، $\int_{2}^{4} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 3$ ، فجد $\int_{1}^{4} \text{ق(س)}\,\text{دس}$

الحل

$\int_{1}^{4} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{1}^{2} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{2}^{4} \text{ق(س)}\,\text{دس} = 4 + 3 = 7$

٢٤٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

خاصية (٢)

خاصية الإضافة

إذا كان ق قابلاً للتكامل على فترة تنتمي إليها الأعداد أ، ب، جـ فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) دس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) دس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س) دس}$$

ليس شرطاً أن تقع ب بين أ ، جـ

مثال (٨)

ليكن $\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{٣ س}^{٢} \text{ ،} & \text{٠} \le \text{س} \le \text{١} \\ \text{س + ٢ ،} & \text{١} < \text{س} \le \text{٤} \end{cases}$

جد $\int_{٠}^{٤} \text{ق(س) دس}$.

الحل

تلاحظ أن ق معرف على قاعدتين (اقتران متشعب)، لذلك نجد التكامل كما يأتي:

$$\int_{٠}^{٤} \text{ق(س) دس} = \int_{٠}^{١} \text{٣ س}^{٢} \text{ د س} + \int_{١}^{٤} \text{(س + ٢) د س}$$

$$= \Big[\text{س}^{٣}\Big]_{٠}^{١} + \Big[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{٢ س}\Big]_{١}^{٤}$$

$$= \text{١} + \Big[(\frac{١٦}{٢} + ٨) - (\frac{١}{٢} + ٢)\Big]$$

$$= \text{١} + (\text{١٦} - \frac{٥}{٢}) = ١٤\frac{١}{٢}$$

تدريب (٥)

إذا كان $\int_{١}^{٤} \text{٣ ق(س) د س} = -\text{٦}$ ، $\int_{٧}^{١} \text{ق(س) د س} = \text{١٢}$، فجد $\int_{٧}^{٤} \text{ق(س) د س}$

خاصية (٣)

إذا كان ق قابلاً للتكامل على [أ ، ب] فإن:

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق(س) د س} = \text{صفراً}$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) د س} = - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س) د س}$

مثال (١١)

جد $\int_{٣}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \text{ د س}$.

الحل

$\int_{٣}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٢} + ١} \text{ د س} = \text{صفراً}$

مثال (١٢)

إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق(س) دس} = \text{٦}$ ، فجد $\int_{٢}^{١} \text{٣ ق(س) دس}$.

الحل

$\int_{٢}^{١} \text{٣ ق(س) دس} = \text{٣} \int_{٢}^{١} \text{ق(س) دس} = -\text{٣} \int_{١}^{٢} \text{ق(س) دس} = -\text{٣} \times \text{٦} = -\text{١٨}$

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- جد قيمة أ إذا كان $\int_{١}^{\text{أ}} \text{٢س د س} = \text{صفرًا}$.
- $\int_{٠}^{٣} |\text{س} - ٢| \text{ د س}$.

إثراء

– كلّف الطلبة بحل السؤال السادس في كتاب الطالب كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

من خلال تصحيح دفاتر الطلبة بعد حلهم التدريبات.

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٤).

استخدم قائمة الشطب (٢–٤) لتقويم أداء المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤ - ٣ التكامل المحدود

النتاجات الخاصة

– يقارن بين تكاملين لاقترانين على الفترة نفسها.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– عرض خاصية المقارنة على السبورة ومناقشة محتواها مع الطلبة.

– عرض النتيجة المنبثقة عن الخاصية مع إبداء المبرر لهذه النتيجة.

– مناقشة المثالين (١٣، ١٤) مع الطلبة ثم تكليفهم حل السؤال الخامس من أسئلة الكتاب في الدفاتر.

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.

– تقدّيم السؤالين السادس والسابع للمجموعات على ورقة عمل، وتكليفهم تنفيذها.

– إجراء حوار بين المجموعات للوصول للحل الصحيح.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (٦)

١) إذا كان $\int_{-1}^{\text{جـ}} \text{س د س} = \text{صفر}$ ، فجد قيمة جـ .

٢) إذا كان $\int_{1}^{2} \text{ق(س) د س} = ٥$ ، $\int_{1}^{3} \text{ق(س) د س} = ٤$ ، فجد $\int_{2}^{3} \text{ق(س) د س}$

خاصية (٤)

خاصية المقارنة

إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب]، وكان ق(س) $\le$ هـ (س) لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) د س} \le \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) د س}$$

نتيجة

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل على [أ ، ب] ،
وكان ق(س) $\ge$ صفرًا لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن : $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) د س} \ge$ صفرًا
وإذا كان ق(س) $\le$ صفرًا لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) د س} \le$ صفرًا

مثال (١٣)

دون حساب قيمة التكامل ما إشارة $\int_{1}^{2} \text{س}^3 \text{دس}$

الحل

افرض ق(س) = س^3، س $\in$ [١ ، ٢] ، وادرس إشارة ق(س) على الفترة [١ ، ٢]

بما أن ق(س) > صفر لكل س $\in$ [١ ، ٢]

٢٤٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع
ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– دوّن حساب قيمة التكاملين، وبيّن أن:

• $\int_{0}^{1} س^{2}\, د س \geq \int_{0}^{-1} س\, د س$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٤).

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

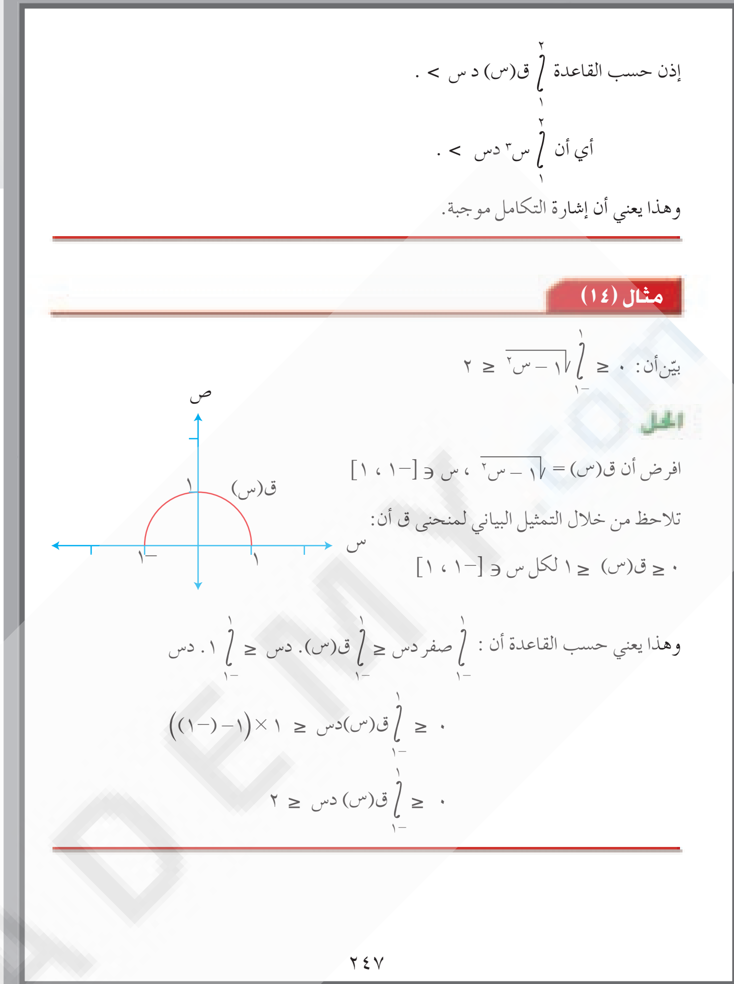
ويتم ذلك بمتابعة الطلبة بعد حلهم السؤال الخامس في الدفاتر.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة



إذن حسب القاعدة $\int_{1}^{2} ق(س)\, د س > 0$.

أي أن $\int_{1}^{2} س^{3}\, د س > 0$.

وهذا يعني أن إشارة التكامل موجبة.

مثال (١٤)

بيّن أن: $0 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - س^{2}} \leq 2$

الحل

افرض أن $ق(س) = \sqrt{1 - س^{2}}$ ، $س \in [-1 ، 1]$

تلاحظ من خلال التمثيل البياني لمنحنى ق أن:

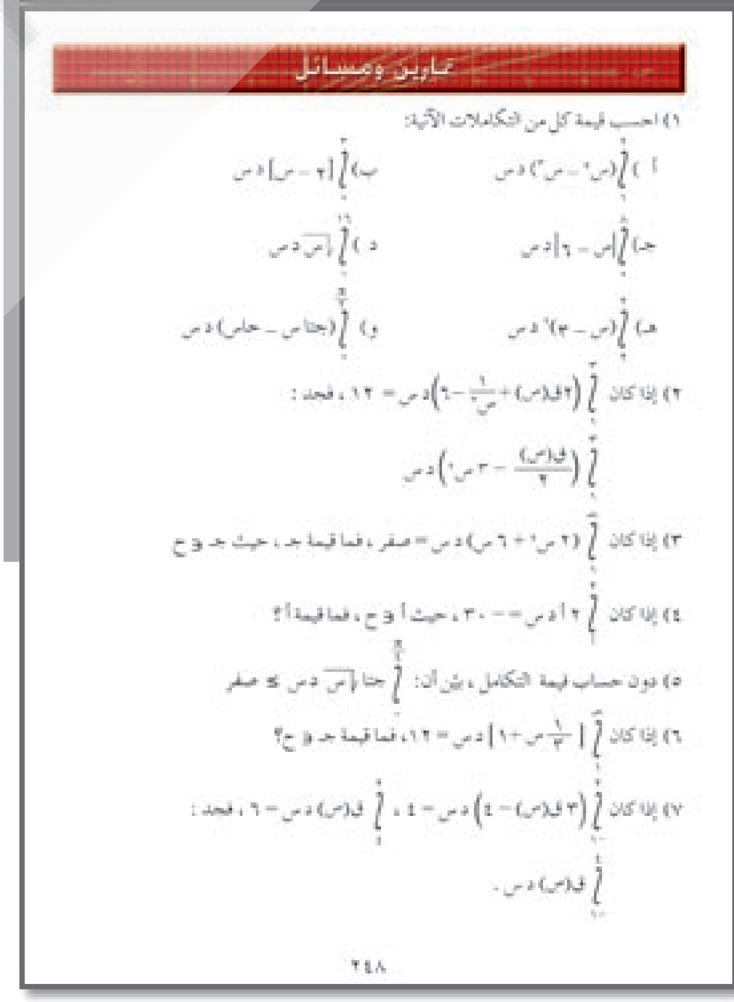
$0 \leq ق(س) \leq 1$ لكل $س \in [-1 ، 1]$

وهذا يعني حسب القاعدة أن : $\int_{-1}^{1} صفر\, د س \leq \int_{-1}^{1} ق(س)\, د س \leq \int_{-1}^{1} 1\, د س$

$0 \leq \int_{-1}^{1} ق(س) د س \leq 1 \times (1 - (-1))$

$0 \leq \int_{-1}^{1} ق(س)\, د س \leq 2$

٢٤٧



تمارين ومسائل

١) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

٢٤٨

الدرس ٤ - ٤ المعادلات التفاضلية

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مفهوم المعادلة التفاضلية.
- يحل معادلات تفاضلية.

المفاهيم والمصطلحات

معادلة تفاضلية، تفاضله س (د س)، تفاضله ص (د ص).

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- توضيح مفهوم كل من تفاضله س (د س)، وتفاضله ص (د ص).
- تعريف الطلبة مفهوم المعادلة التفاضلية.
- توضيح كيفية حل المعادلة التفاضلية من خلال مناقشة المثالين (١، ٢) وتكليفهم حل تدريب (١) في الدفاتر.
- مناقشة المثالين (٣، ٤) مع الطلبة، ثم تكليفهم حل تدريب (٢).
- تكليف الطلبة جميعهم حل السؤال الأول كواجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

- هناك معادلات تفاضلية لا يمكن فصل المتغيرات فيها، وهناك طرق أخرى في الحل، مثل:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢\text{س ص} = ٣\text{س}^{٢} + ١$$

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٤-٤ المعادلات التفاضلية

Differential Equations

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تتعرف مفهوم المعادلة التفاضلية.
٢- تحل معادلات تفاضلية.

تعلمت أنه إذا كان ص = ق(س) فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ (س)

ولأن كلا من: د ص ، د س يعبران عن مقدار متناهٍ في الصغر فإن :

د ص تسمى تفاضلة ص ، د س تسمى تفاضلة س.

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات.

ويقصد بحل المعادلة التفاضلية إيجاد علاقة تربط بين المتغير ص والمتغير س ويتم ذلك بفصل المتغير س مع تفاضلته (د س) عن المتغير ص مع تفاضلته (د ص) فتصبح المعادلة على الصورة الآتية:

هـ (ص) د ص = ل (س) د س

بعد ذلك يكامل الطرفين الأيمن والأيسر ويعبَّر عن ذلك بالرموز:

$\int$ هـ (ص) د ص = $\int$ ل (س) د س

والمثال الآتي يوضح آلية حل المعادلة التفاضلية:

٢٤٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

- يخطئ بعض الطلبة عند حلهم لمعادلة تفاضلية بأن يتجاهلوا وضع الثابت جـ بأحد طرفي المعادلة بعد اجراء التكامل . لذا أكد للطلبة بضرورة كتابة جـ في الطرف الايسر من المعادلة بعد عملية الحل.

الأخطاء الشائعة

مثال (١)

حل المعادلة التفاضلية : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{\text{ص}}$

الحل

يجب فصل المتغيرات أولا، ويتم ذلك باستخدام قاعدة الضرب التبادلي

$\text{ص د ص} = ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{د س}$.

وبأخذ التكامل للطرفين

$\int \text{ص د ص} = \int ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{د س}$

$\frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٣} + \text{جـ}_{١}$

$\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{س}^{٣} + ٢\,\text{جـ}_{١}$

$\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{س}^{٣} + \text{حـ}$ ، حيث $\text{جـ} = ٢\,\text{جـ}_{١}$

مثال (٢)

حل المعادلة التفاضلية

$٢\,\text{حا}^{٢}\text{س دص} + \text{ص}^{٢}\,\text{دس} = ٢\,\text{دص}$

الحل

اجعل المقادير التي تحوي دص في طرف والمقدار الذي يحوي دس في طرف آخر

$٢\,\text{حا}^{٢}\text{س دص} - ٢\,\text{دص} = -\text{ص}^{٢}\,\text{دس}$

$(٢\,\text{جا}^{٢}\text{س} - ٢)\,\text{دص} = -\text{ص}^{٢}\,\text{دس}$ (بأخذ دص عامل مشترك)

قم بفصل المتغيرات عن بعضها وذلك بضرب المعادلة بـ $\frac{١}{-\text{ص}^{٢}\,(٢\,\text{حا}^{٢}\text{س} - ٢)}$ فتصبح:

$\frac{-\text{دص}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{د س}}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س} - ٢}$

$\int \frac{-\text{دص}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{١}{٢}\int \frac{\text{د س}}{\text{جا}^{٢}\text{س} - ١}$

$\int -\text{ص}^{-٢}\,\text{د ص} = -\frac{١}{٢}\int \frac{\text{د س}}{١ - \text{جا}^{٢}\text{س}}$

$\int \text{ص}^{-٢}\,\text{د ص} = \frac{١}{٢}\int \frac{\text{د س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ ، لأن $\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{س}$

$\int \text{ص}^{-٢}\,\text{دص} = \frac{١}{٢}\int \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$-\text{ص}^{-١} = \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

$\frac{-١}{\text{ص}} = \frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}$

$-\text{ص} = \frac{١}{\frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}} \Leftarrow \text{ص} = \frac{-١}{\frac{١}{٢}\,\text{ظاس} + \text{جـ}}$

تدريب (١)

حل المعادلة التفاضلية $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \sqrt{\frac{\text{س}}{\text{ص}}}$ ، س > ٠، ص > ٠

مثال (٣)

إذا كان ميل المماس لمنحنى ق عند النقطة (س ، ص) يساوي (٣س٢ – ٢س) ، فجد قاعدة الاقتران ق علماً بأن ق(٠) = ٣

الحل

ميل المماس $= \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قَ (س)}$

إذن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{س}$

$\text{د ص} = (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\,\text{دس}$

$\int \text{د ص} = \int (٣\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{جـ}$

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– حلّ المعادلات الآتية:

- $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \text{جاس}$
- $٢\text{س د س} = \text{د ص}$

إثراء

– كلّف الطلبة حل السؤال الرابع من أسئلة الكتاب كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

من خلال متابعة حل التدريبات

– **الاستراتيجية**: مراجعة الذات.

– **الأداة**: يوميات الطالب.

شجع الطلبة على تدوين أبرز نقاط القوه والضعف لديهم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤ - ٤ المعادلات التفاضلية

النتاجات الخاصة

- يحلّ معادلات تفاضلية.
- يحلّ مسائل حياتية باستخدام حل المعادله التفاضلية.

المفاهيم والمصطلحات

معادلة تفاضلية، تفاضلة س، تفاضلة ص.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- مناقشة أسئلة الواجب البيتي مع الطلبة.
- تقسّيم الطلبة مجموعات تعاونية، وتقدّيم السؤالين (٣،٢) للمجموعات على ورقة عمل.
- تكليف المجموعات جميعها تنفيذ ورقة العمل.
- تكليف مجموعتين عرض حلهما على السبورة بحيث تعرض كل مجموعة حل سؤال واحد فقط.
- إجراء حوار بين المجموعات في أثناء العرض للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

أو $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + \text{جـ}$

لكن $\text{ق}(٠) = ٣$ ومنه $\text{جـ} = ٣$

وعليه، فإن $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٣$

مثال (٤)

يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة: $\text{ت} = \frac{١}{\text{ع}}$ ، $\text{ع} > ٠$ ،

حيث ت : تسارع الجسيم ، ع : سرعة الجسيم

إذا تحرك الجسيم من السكون فقطع مسافة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ م بعد ٤ ثوان من حركته، فجد المسافة التي قطعها بعد ثانية واحدة من حركته.

الحل

المعطيات

$\text{ت} = \frac{١}{\text{ع}}$ ، $\text{ع}(٠) = \text{صفرًا}$ ، $\text{ف}(٤) = ١٠\sqrt{٢}$ م ، حيث ف اقتران المسافة

المطلوب

إيجاد ف (١) .

تعلم أن $\text{ت} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$ ، إذن $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \frac{١}{\text{ع}} \Leftarrow \text{ع دع} = \text{د ن}$

$\int \text{ع دع} = \int \text{د ن} \Leftarrow \frac{١}{٢}\text{ع}^{٢} = \text{ن} + \text{جـ}_{١}$

لكن $\text{ع}(٠) = ٠$ ، إذن $\frac{١}{٢} \times (٠)^{٢} = ٠ + \text{جـ}_{١} \Leftarrow \text{جـ}_{١} = \text{صفرًا}$

$\frac{١}{٢}\text{ع}^{٢} = \text{ن}$ ، أو $\text{ع}^{٢} = ٢\text{ن}$ ، $\Leftarrow \text{ع} = \sqrt{٢\text{ن}}$ لان $\text{ع} > ٠$

لكن $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{ع}$ ، إذن $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \sqrt{٢\text{ن}} \Leftarrow \text{دف} = \sqrt{٢\text{ن}}\ \text{دن}$

٢٥٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع
ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– حلّ المعادلة التفاضلية الآتية:

• $\frac{دف}{دن} = ٣ن^٢ + ٢ن + ٢$ ، ف (١) = ٧م، حيث ف: بالأمتار، ن: بالثواني.

إثراء

– إذا كان تسارع جسم يعطى بالعلاقة ت = ٢ن فإذا كانت سرعته الابتدائية تساوي ٦م/ث، والمسافة التي يقطعها بعد ثانية من الحركة تساوي ١٢م، فجد المسافة المقطوعة بعد ثلاث ثوانٍ من الحركة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **استراتيجية التقويم**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٥).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

$$\int دف = \sqrt{٢} \int \sqrt{ن}\ دن$$

$$ف = \sqrt{٢}\ \frac{ن^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ_٢ = \frac{٢\sqrt{٢}\ \sqrt{ن^٣}}{٣} + جـ_٢$$

لكن ف (٤) = ١٠ $\sqrt{٢}$ م وعليه :

$$١٠\sqrt{٢} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}\sqrt{٤^٣} + جـ_٢ \Leftarrow جـ_٢ = \frac{١٤\sqrt{٢}}{٣}$$

تصبح المعادلة ف (ن) = $\frac{٢\sqrt{٢}\ \sqrt{ن^٣}}{٣} + \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢}$

إذن ف (١) = $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣} \times ١ + \frac{١٤}{٣}\sqrt{٢} = \frac{١٦\sqrt{٢}}{٣}$ م

أي أن المسافة التي قطعها الجسيم بعد ثانية واحدة من حركته تساوي $\frac{١٦\sqrt{٢}}{٣}$ م

تدريب (٢)

قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ٤٠م/ ث وبتسارع مقداره – ١٠م/ث٢، إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي ٨٠ م، فجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

٢٥٣

تمارين ومسائل

١) حل المعادلات التفاضلية الآتية:

أ) $\frac{٢\,دص}{١-س} = (٢ص+١)\,دس$ ب) قا² $\frac{ص}{٤}$ دص – جا² $\frac{س}{٤}$ دس = صفر

جـ) س² دص – ص² دس = صفر   د) دس + ٣ دص = جتا س دس

٢) تتكاثر بكتيريا حسب المعادلة $\frac{دت}{دن}$ = ٥ ن² + ٢٠ ن ، حيث ت: عدد البكتيريا ، ن: الزمن بالثواني إذا كان عددها بعد ثانية واحدة يساوي ٣٠، فجد عددها بعد ثلاث ثوان.

٣) إذا كان تسارع جسيم ت بعد (ن) من الثواني يعطى بالقاعدة ت = ٦ ن + ٤، فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوان من بدء الحركة علماً بأن السرعة الابتدائية للجسم ٢م/ث، وأنه قطع مسافة (٢١)م في أول ثانيتين من بدء الحركة.

٤) إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{جاس - قا^٢س}{٣ص}$ ، فجد قاعدة العلاقة علماً بأن النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٤) تقع على منحناها.

٢٥٤

الدرس ٤ - ٥ التكامل بالتعويض

النتاجات الخاصة

- يستخدم طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد بعض التكاملات.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل بالتعويض.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: حل المشكلات

- تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية، وتقديم ورقة عمل (٣-٩) لهم.
- تكليف المجموعات تنفيذ ورقة العمل.
- التأكد من فهم الطلبة للمسألة، وذلك من خلال وضع خطة مناسبة للحل (بإيجاد مفكوك (س^{٢} + ٢)^{٤}، وكتابة الذي داخل التكامل على صورة كثيرة حدود).
- بعد أن يتم إيجاد التكامل يطلب من المجموعات إيجاد $\int$ س (س^{٢}+٢)^{١٢}د س سوف تسمع بالتأكيد من أحد الطلبة أن مفكوك (س^{٢}+٢)^{١٢} يحتاج إلى وقت كبير.
- إخبار الطلبة بأن هناك طريقة سريعة لإيجاد هذا التكامل تسمى طريقة التكامل بالتعويض.
- حل التكامل السابق باستخدام التعويض، ثم تعريف الطلبة الصيغة العامة للتكامل بالتعويض.
- مناقشة المجموعات بمثال (١)، ثم تكليفها حل تدريب (١).
- كتابة الخطوات التي يتم بها إجراء التكامل بالتعويض على السبورة ومناقشة مثال (٢) على السبورة، ثم تكليف المجموعات حل تدريب (٢).
- تكليف الطلبة جميعهم حل الفرعين (د، ز) من السؤال الأول كواجب بيتي.

معلومات إضافية


٤-٥ التكامل بالتعويض

Integration by substitution

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تستخدم طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد بعض التكاملات

تواجه أحياناً تكاملاً على الصيغة $\int$ ق(هـ(س)) . هـَ(س) دس

إذا وضعت ص = هـ(س) فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـَ(س)

أو دص = هـَ(س) دس

وعندها فإن $\int$ ق(هـ(س)) . هـَ(س) دس = $\int$ ق(ص) دص

فإذا تمكنت من إيجاد هذا التكامل فتكون قد وجدت التكامل الأصلي.

يسمى هذا الأسلوب بالتكامل بالتعويض، لأنه يتم التعويض عن الاقتران هـ بدلالة متغير آخر.

مثال (١)

جد $\int$ ٥ س^{٤} (س^{٥} + ٢)^{٦} دس

الحل

افرض ص = س^{٥} + ٢

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥ س^{٤} ومنها د ص = ٥ س^{٤} دس

إذن $\int$ ٥ س^{٤} (س^{٥} + ٢)^{٦} دس = $\int$ ص^{٦} دص = $\frac{\text{ص}^{٧}}{٧}$ + جـ = $\frac{١}{٧}$ (س^{٥} + ٢)^{٧} + جـ

تدريب (١)

جد $\int$ س (س^{٢} - ٣)^{٣} دس

٢٥٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

- يقوم بعض الطلبة عند إجراء التعويض في التكامل المطلوب حسابه بإبقاء المتغير الأصلي (س) مع المتغير (ص) وهذا خطأ، لذا أكّد على الطلبة ضرورة إيجاد س بدلالة ص قبل عملية التعويض داخل التكامل.

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

ويمكن تلخيص الخطوات التي يتم بها إجراء التكامل بالتعويض على النحو الآتي:

١) افرض $ص = هـ(س)$

٢) جد $\frac{دص}{دس} = هـَ(س)$، واكتب دص بدلالة س على الصورة: $دص = هـَ(س)\ دس$

٣) عوض ص بدلاً من هـ(س)، وعوض د ص بدلاً من $هـَ(س)\ دس$.

٤) أي مقدار يبقى بدلالة س بعد عملية التعويض، اكتبه بدلالة ص .

٥) احسب التكامل الناتج بعد عملية التعويض بدلالة ص .

٦) اكتب الناتج بدلالة س .

مثال (٢)

جد $\int س^{٣}\sqrt{س^{٢}+١}\ دس$

الحل

افرض $ص = س^{٢}+١$

$$دص = ٢س\ دس \Leftarrow \frac{١}{٢}\ دص = س\ دس$$

اضرب الطرفين بـ $س^{٢}$ ، فتحصل على $\frac{١}{٢}س^{٢}\ دص = س^{٣}\ دس$

لكن $س^{٢} = ص - ١$ وعليه ، فإن $\frac{١}{٢}(ص-١)\ دص = س^{٣}\ دس$

إذن $\int س^{٣}\sqrt{س^{٢}+١}\ دس = \frac{١}{٢}\int \sqrt{ص}\ (ص-١)\ دص$

$$= \int \left(\frac{١}{٢}ص^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١}{٢}ص^{\frac{١}{٢}}\right) دص = \frac{١}{٢}\ \frac{ص^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} - \frac{١}{٢} \times \frac{ص^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + جـ$$

$$= \frac{١}{٥}\sqrt{(س^{٢}+١)^{٥}} - \frac{١}{٣}\sqrt{(س^{٢}+١)^{٣}} + جـ$$

تدريب (٢)

جد $\int س^{٥}\sqrt{س^{٣}+٢}\ دس$

٢٥٦

مثال (٣)

جد $\int جا(أس+ب)\ دس$.

الحل

افرض أن : $ص = أس + ب$

$$\frac{دص}{دس} = أ \Leftarrow دس = \frac{دص}{أ}$$

إذن $\int جا(أس+ب)\ دس = \int جا ص \times \frac{دص}{أ}$

$$= -\frac{١}{أ}\ جتاص + جـ = \frac{-١}{أ}\ جتا(أس+ب) + جـ$$

وبشكل عام $\int جا(أس+ب)\ دس = \frac{-١}{أ}\ جتا(أس+ب) + جـ$

وكذلك $\int جتا(أس+ب)\ دس = \frac{١}{أ}\ جا(أس+ب) + جـ$

مثال (٤)

جد $\int قا٢س\ ظا٢س\ دس$.

الحل

افرض $ص = ٢س$

$$\frac{دص}{دس} = ٢ \Leftarrow دس = \frac{دص}{٢}$$

إذن $\int قا٢س\ ظا٢س\ دس = \int قاص\ ظاص \times \frac{دص}{٢} = \frac{١}{٢}\int قاص\ ظاص\ دص$

$$= \frac{١}{٢}\ قاص + جـ = \frac{١}{٢}\ قا٢س + جـ$$

٢٥٧

الزمن المتوقع

ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– حلّ المعادلات الآتية:

• $\int س(٣س^{٢}+١)^{\frac{١}{٣}}\ دس$

• $\int \frac{٢س^{٢}+٦}{(\frac{١}{٣}س^{٣}+٣س)^{٤}}\ دس$

إثراء

– كلّف الطلبة حل السؤال الثالث من أسئلة الكتاب كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٥).

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

من خلال متابعة حل التدريبات من قبل المعلم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤ – ٥ التكامل بالتعويض

النتاجات الخاصة

– يستخدم طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد بعض التكاملات.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل بالتعويض.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مناقشة أسئلة الواجب البيتي
– مناقشة المثالين (٣، ٤)، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٣).
– مناقشة المثالين (٥، ٦)، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٥).
– ناقش الطلبة بالمثالين (٧، ٨)، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٦).
– تكليف الطلبة جميعهم حل الفرعين (ب، ح) من السؤال الأول كواجب بيتي.

معلومات إضافية

تدريب (٣)

جد التكاملات الآتية

١) ∫ قا^{٢} (أ س + ب) دس
٢) ∫ جتا (١ – ٣ س) دس

مثال (٥)

جد ∫ جا ٤س جتا٨س دس.

الحل

استخدم المتطابقة جاأ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جا (أ + ب) + جا(أ – ب)]

جا ٤س جتا٨س = $\frac{١}{٢}$ [جا ١٢س + جا (– ٤ س)]

إذن ∫ جا٤س جتا٨س دس = $\frac{١}{٢}$ ∫ [جا١٢س + جا (– ٤ س)] د س

= $\frac{١}{٢}$ [$\frac{-١}{١٢}$ جتا١٢ س + $\frac{١}{٤}$ جتا (– ٤ س)] + جـ

= – $\frac{١}{٢٤}$ جتا١٢س + $\frac{١}{٨}$ جتا ٤ س + جـ

تدريب (٤)

جد التكاملين الآتيين:

١) ∫ جا٦س جا٤س د س
٢) ∫ جتا٣س جتا٧س د س

تذكر

١) جتا أ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا (أ + ب) + جتا (أ – ب)]
٢) جا أ جاب = $\frac{١}{٢}$ [جتا (أ – ب) – جا (أ + ب)]
٣) جا أ جتاب = $\frac{١}{٢}$ [جا (أ – ب) + جا (أ + ب)]

٢٥٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– جد $\int$ (س^{٥} + س)^{٣} دس.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

من خلال متابعة الطلبة في أثناء حلهم التدريبات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٦)

جد $\int$ جا^{٤}س د س

تذكر

جتا٢س = جتا^{٢}س – جا^{٢}س

= ٢جتا^{٢}س – ١

= ١ – ٢جا^{٢}س

الحل

يمكن كتابة جا^{٤}س على الصورة الآتية:

جا^{٤}س = (جا^{٢}س)^{٢} = $\left(\frac{\text{١ – جتا٢س}}{٢}\right)^{٢}$

= $\frac{\text{١ – ٢جتا٢س + جتا}^{٢}\text{ ٢س}}{٤}$

إذا كان $\int$ جا^{٤}س د س = $\frac{١}{٤}$ $\int$ (١–٢ جتا٢س + جتا^{٢} ٢س) دس

= $\frac{١}{٤}$ $\int$ (١–٢ جتا٢س) دس + $\frac{١}{٤}$ $\int$ جتا^{٢} ٢س دس

= $\frac{١}{٤}$ (س–جا٢س) + $\frac{١}{٤}$ $\int$ $\frac{\text{١ + جتا٤س}}{٢}$ دس

= $\frac{١}{٤}$ س – $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٨}$ (س + $\frac{١}{٤}$ جا ٤س) + جـ

= $\frac{٣}{٨}$ س – $\frac{١}{٤}$ جا٢س + $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + جـ

تدريب (٥)

جد $\int$ جتا^{٤}س دس

٢٥٩

مثال (٧)

جد $\int$ جا^{٤}س جتاس دس .

الحل

تلاحظ أن جتاس هي مشتقة جاس ولذلك:

افرض ص = جاس ، ومنه دص = جتاس دس

إذن $\int$ جا^{٤}س جتاس دس = $\int$ ص^{٤} دص = $\frac{\text{ص}^{٥}}{٥}$ + جـ = $\frac{١}{٥}$ جا^{٥}س + جـ

مثال (٨)

جد $\int$ (س^{٢}–٢) جا (س^{٣}–٦س) دس .

الحل

افرض ص = س^{٣} – ٦س

دص = (٣س^{٢}–٦) دس ⟸ $\frac{١}{٣}$ دص = (س^{٢} – ٢) دس

إذن $\int$ (س^{٢}–٢) جا (س^{٣}–٦س) دس = $\int$ $\frac{١}{٣}$ حا ص دص = – $\frac{١}{٣}$ جتا ص + جـ

= – $\frac{١}{٣}$ جتا (س^{٣}–٦س) + جـ

تدريب (٦)

جد التكاملين الآتيين:

١) $\int$ ظا^{٤}س قا^{٢}س دس

٢) $\int$ س قا (١–٢ س^{٢}) ظا (١–٢س^{٢}) دس

٢٦٠

الدرس ٤ – ٥ التكامل بالتعويض

النتاجات الخاصة

– يستخدم طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد بعض التكاملات.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل بالتعويض.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مناقشة أسئلة الواجب البيتي.
– مناقشة الطلبة بمثال (٩)، ثم تكليفهم حل تدريب (٧).
– التوصل مع الطلبة إلى النتيجة الواردة في الدرس باستخدام التكامل بالتعويض.
– مناقشة المثالين (١٠، ١١)، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٨).

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات، وتقديم ورقة عمل (٣–١٠) لهم.
– تكليف المجموعات تنفيذ ورقة العمل.
– بعد الانتهاء من تنفيذ ورقة العمل تكلف كل مجموعة من المجموعات بحل أحد الأسئلة على السبورة.
– إجراء حوار بين المجموعات أثناء العرض للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٩)

جد $\int_{0}^{\sqrt{8}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\,\text{دس}$.

الحل

افرض $\text{ص} = \text{س}^2 + 1$

$\text{دص} = 2\,\text{س}\,\text{دس}$ (كما في مثال (٨)) $\Leftarrow \frac{1}{2}\,\text{دص} = \text{س}\,\text{دس}$

وبما أن حدود التكامل بدلالة س إذن يلزم تغيرها بحيث تصبح بدلالة ص

عندما س = ٠ ، فإن $\text{ص} = (0)^2 + 1 = 1$

عندما $\text{س} = \sqrt{8}$ ، فإن $\text{ص} = (\sqrt{8})^2 + 1 = 9$

إذن $\int_{0}^{\sqrt{8}} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^2+1}}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{\text{ص}}}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\int_{1}^{9} \text{ص}^{-\frac{1}{2}}\,\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} \times 2 \Big]_{1}^{9} = \sqrt{\text{ص}}\Big]_{1}^{9} = \sqrt{9} - \sqrt{1} = 2$

ويمكنك إيجاد التكامل غير المحدود كما في الأمثلة السابقة وبعد ذلك تجد قيمة التكامل المحدود لقيمة س .

تدريب (٧)

جد $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جاس جتاس}}{\sqrt{1+\text{جا}^2\text{س}}}\,\text{دس}$.

نتيجة

$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+1}}{\text{أ}(\text{ن}+1)} + \text{جـ}$ ، بحيث $\text{أ} \neq 0$ ، $\text{ن} \neq -1$

٢٦١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int_{٠}^{٣} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+١}}\,\text{د س}$
- $\int \text{ظا}^{٣}\text{س قا}^{٢}\text{س د س}$

إثراء

– كلّف الطلبة بحل السؤالين (٢، ٣) كأنشطة إثرائية.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: القلم والورقة

من خلال متابعة حل التدريبات.

– الاستراتيجية: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

البرهان: افرض ص = أس + ب فيكون $\frac{\text{دص}}{\text{أ}}$ = دس

إذن $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{دس} = \int \text{ص}^{\text{ن}} \times \frac{\text{دص}}{\text{أ}}$

$$= \frac{\text{ص}^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ} = \frac{(\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{جـ}$$

مثال (١٠)

جد $\int (١-٢\text{س})^{٣}\,\text{د س}$.

الحل

باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$\int (١-٢\text{س})^{٣}\,\text{دس} = \frac{(١-٢\text{س})^{٣+١}}{-٢(٣+١)} + \text{جـ} = \frac{-١}{٨}(١-٢\text{س})^{٤} + \text{جـ}$$

مثال (١١)

جد $\int_{٠}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+١}}\,\text{دس}$.

الحل

$$\int_{٠}^{٤} \frac{١}{\sqrt{٢\text{س}+١}}\,\text{دس} = \int_{٠}^{٤} (٢\text{س}+١)^{\frac{-١}{٢}}\,\text{دس}$$

$$= \left[\frac{(٢\text{س}+١)^{\frac{١}{٢}}}{٢\times\frac{١}{٢}}\right]_{٠}^{٤} = \left[\sqrt{٢\text{س}+١}\right]_{٠}^{٤} = \sqrt{٩} - \sqrt{١} = ٢$$

٢٦٢

تمارين ومسائل

١) جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٩}}\,\text{دس}$ ب) $\int \text{جا}^{٣}\text{س دس}$

جـ) $\int \frac{١}{\text{س}^{٢}+٦\text{س}+٩}\,\text{دس}$ د) $\int \frac{\text{س}-١}{(\text{س}^{٢}-٢\text{س}+١)^{٢}}\,\text{دس}$

هـ) $\int \sqrt{\text{س}^{٢}-١٠\text{س}+٢٥}\,\text{دس}$ و) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{دس}$

ز) $\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}-١}\,\text{دس}$ ح) $\int \text{جا}^{٥}\text{س جتا}^{٣}\text{س دس}$

٢) حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{\text{ص}}{\text{دس}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س ظا}^{٢}\text{س}}{\text{د ص}}$$

٣) جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{(١+\text{س})^{٢}}{\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

ب) $\int \text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{س}^{٤}}\,\text{دس}$

جـ) $\int_{١}^{٤} \sqrt{٣\text{س}-٣}\,\text{دس}$.

٢٦٣

النتاجات الخاصة

– يستخدم طريقة التكامل بالأجزاء لحساب تكاملات محددة.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل بالأجزاء.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: حل المشكلات

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية، وتقديم ورقة عمل (٣–١١).
– تكليف المجموعات تنفيذ ورقة العمل.
– التأكد من محاولة المجموعات جميعها إيجاد التكامل.
– بعد أن تقدم المجموعات حلولاً منوعة يتم إخبار الطلبة بأن هناك طريقة تسمى التكامل بالأجزاء نستطيع بوساطتها الوصول إلى الحل.
– تقديم آلية التكامل بالأجزاء والتوصل مع الطلبة إلى النتيجة المتعلقة به.
– حل التكامل الوارد في ورقة العمل، ثم مناقشة مثال (١) مع الطلبة.
– تكليف المجموعات حل تدريب (١).
– مناقشة مثال (١)، ثم كلف المجموعات بحل تدريب (٢).
– تكليف الطلبة جميعهم حل الفروع (أ، ب، جـ، هـ، ز) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٤–٦ التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تستخدم طريقة التكامل بالأجزاء في إيجاد بعض التكاملات.

تعرفت في التفاضل أن $\left(\text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}(\text{س})\right)' = \text{ق}'(\text{س})\times\text{هـ}(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}'(\text{س})$

أي أن $\text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س}) = \left(\text{ق}(\text{س})\times\text{هـ}(\text{س})\right)' - \text{ق}'(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س})$

وبإيجاد التكامل للطرفين:

$$\int \text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس} = \int (\text{ق}\times\text{هـ})'(\text{س})\,\text{دس} - \int \text{ق}'(\text{س})\,\text{هـ}(\text{س})\,\text{دس}$$

لكن $\text{د هـ} = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{د س}$ ، $\text{د ق} = \text{ق}'(\text{س})\,\text{دس}$

وعليه، فإنه يمكن كتابة هذه النتيجة على الصورة الآتية:

$$\boxed{\begin{gathered}\int \text{ق}\,.\,\text{د هـ} = \text{ق}\,.\,\text{هـ} - \int \text{هـ}\,.\,\text{د ق}\\ \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}\,.\,\text{د هـ} = \Big[\text{ق}\,.\,\text{هـ}\Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}\,.\,\text{د ق}\end{gathered}}$$

لاحظ أن ق. د هـ عبارة عن حاصل ضرب مقدارين ليس أحدها مشتقة للآخر وأن المقدار (د هـ) يجب أن يكون قابلاً للتكامل.

٢٦٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

– يخطئ بعض الطلبة عند حساب تكامل بطريقة الأجزاء وذلك باختيار ق، دهـ بطريقة خطأ، ويتبين لنا الخطأ عند حساب $\int$ هـ. د ق لذلك أكد على الطلبة ضرورة أن يكون هـ. د ق قابلاً للتكامل.

مثال : $\int \text{س}\,(\text{٢س} + \text{١})^{\text{٣}}\,\text{د س}$

الزمن المتوقع	حصة صفية واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int_{-1}^{1}$ س (س + ٣)^{٤} دس
- $\int$ س جتاس دس

إثراء

– جد التكامل الآتي:

- $\int$ س^{٥} $\sqrt{\text{س}^{٣} + ١}$ دس

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: الملاحظة

– الأداة: قائمة الشطب (٢–٥) لتقويم أداء الطلبة في أثناء تنفيذ ورقة العمل.

– الاستراتيجية: القلم والورقة وذلك من خلال متابعة حل التدريبات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (١)

جد $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جاس دس

الحل

لاحظ أن المقدار (س جاس) حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقة للآخر أو من مشتقة الآخر مضروبًا بعدد ثابت، لذا فإن طريقة التكامل بالتعويض ليست مناسبة.

ويمكن حساب قيمة التكامل باستخدام طريقة التكامل بالأجزاء على النحو الآتي:

افرض ق = س ، د هـ = جاس دس

ومنه د ق = دس ، هـ = – جتاس (لا نضع جـ هنا)

وباستخدام القاعدة $\int$ ق. د هـ = ق × هـ – $\int$ هـ . د ق

فإن $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ س جاس دس = $\Big[$ س × –جتاس $\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ – $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ – جتاس دس = $\Big[$ –س جتاس $\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ + $\Big[$ جاس $\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= [(–$\frac{\pi}{٢}$ جتا $\frac{\pi}{٢}$) – (– ٠ × جتا ٠)] + [جا $\frac{\pi}{٢}$ – جا ٠]

= ٠ + ٠ + ١ – ٠ = ١

تدريب (١)

جد $\int$ (٢س – ١) جتا ٣ س دس

مثال (٢)

جد $\int$ س^{٢} جتاس دس

الحل

افرض ق = س^{٢} ، د هـ = جتاس دس

ومنه د ق = ٢ س دس ، هـ = جاس

وباستخدام القاعدة $\int$ ق. د هـ = ق. هـ – $\int$ هـ . د ق

$\int$ س^{٢} جتاس دس = س^{٢} × جاس – $\int$ ٢ س جاس دس

لاحظ أن $\int$ ٢ س جاس دس يمثل تكامل حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقة للآخر، لذلك استخدم التكامل بالأجزاء مرة أخرى.

افرض ق = ٢ س ، د هـ = جاس دس

ومنه د ق = ٢دس ، هـ = – جتاس

إذن $\int$ ٢ س جا س دس = – ٢ س جتاس – $\int$ –٢ جتاس دس

وعليه، فإن $\int$ س^{٢} جتاس دس = س^{٢} جاس – (–٢س جتاس + $\int$ ٢ جتاس دس)

= س^{٢} جاس + ٢ س جتاس – ٢ $\int$ جتاس دس

= س^{٢} جاس + ٢ س جتاس – ٢ جاس + جـ

تدريب (٢)

جد $\int$ (س – ٢)^{٢} جتا (س + ١) دس

الخطأ: ق = ٦ (٢س + ١)^{٣}، د ق = (٢ س + ١)^{٢} د س

د هـ = س د س، هـ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

لاحظ أن $\int$ هـ . د ق = $\int$ $\frac{٣}{٤}$ س^{٢} (٢ س + ١)^{٢} د س

ومن الصعب إيجاد هذا التكامل بطريقة سريعة والصحيح أن نأخذ ق = س ، د هـ = (٢ س + ١)^{٢} د س

النتاجات الخاصة

– يستخدم طريقة التكامل بالأجزاء لحساب تكاملات محددة.

المفاهيم والمصطلحات

التكامل بالأجزاء.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– مناقشة أسئلة الواجب البيتي مع الطلبة.

– مناقشة مثال (٣)، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٣).

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.

– تقديم السؤال الثاني على ورقة عمل، وتكليف المجموعات جميعها حله.

– بعد انتهاء المجموعات من حل السؤال كلف إحداها بحله على السبورة.

– إجراء حوار بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

مثال (٣)

جد ∫ جا √س دس

الحل

تلاحظ أن الزاوية √س ليست خطية ، وعليه، فإنه لا يمكن استخدام طريقة التكامل بالأجزاء، ويجب في هذه الحالة استخدام طريقة التكامل بالتعويض أولاً ثم بالأجزاء.

افرض ص = √س

د ص / د س = ١ / (٢ √س)

د س = ٢ √س د ص = ٢ ص د ص

إذن ∫ جا √س دس = ∫ جاص × ٢ص د ص

= ∫ ٢ ص جاص د ص

والآن استخدم طريقة التكامل بالأجزاء.

افرض ق = ٢ ص ، د هـ = جاص د ص

ومنه د ق = ٢ د ص ، هـ = − جتاص

∫ ٢ ص جاص د ص = − ٢ ص جتا ص + ∫ ٢ جتاص د ص

= − ٢ ص جتا ص + ٢ جاص + جـ

= − ٢ √س جتا √س + ٢ جا √س + جـ

تدريب (٣)

جد ∫ جتا √(٢س + ١) دس

٢٦٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.

٢) ملحق أدوات التقويم.

٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– جد التكامل الآتي:

- $\int$ جا $\sqrt{\text{س} + ١}$ جتا^{٣} $\sqrt{\text{س} + ١}$ د س

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة

ويتم ذلك من خلال متابعة الطلبة بعد حل التدريبات.

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة


تمارين ومسائل

١) جد التكاملات الآتية:

٢٦٨

الأخطاء الشائعة

الدرس ٤ - ٧ حساب المساحة باستخدام التكامل

النتاجات الخاصة

- يستخدم التكامل لإيجاد المساحة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ، ب].

المفاهيم والمصطلحات

المساحة

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: الاستقصاء

- مراجعة الطلبة بقوانين مساحة الأشكال المنتظمة (المستطيل، المثلث شبه المنحرف، الدائرة، ...).
- ارسم شكلاً على السبورة شبه الشكل (٤-١) الوارد في الكتاب، واسأل الطلبة كيف يمكن إيجاد المساحة المظللة.
- بعد تلقي الإجابات كتابة مثال (١) على السبورة، وتقسيم الطلبة مجموعات تعاونية، ثم تكليف كل مجموعة حل المثال بفرعيه ومقارنة الإجابة بالفرعين.
- بعد الاتفاق على الإجابة الصحيحة يكتب مثال (٢) على السبورة ثم تكلف المجموعات بحله.
- سؤال الطلبة عن الاستنتاج الذي توصلو إليه، ثم عرض نظرية (١) على السبورة وشرحها.
- مناقشة المثالين (٣،٤) مع الطلبة، ثم تكليف المجموعات حل التدريبين (٢، ٣).
- تكليف الطلبة جميعهم حل السؤال الثاني كواجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

- من خلال مفهوم المساحة، تَم التوصل إلى التكامل المحدود باستخدام مجموع ريمان وباستخدام التكامل، تم إيجاد مساحات لأشكال مختلفة.

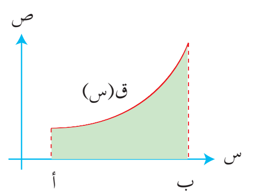
٤-٧ حساب المساحة باستخدام التكامل
Calculating Area by Integration

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

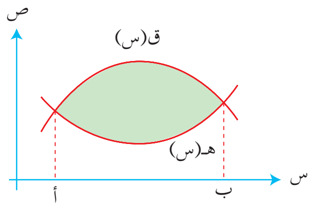
تستخدم التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين اقترانين أو أكثر.

تعلمت سابقًا حساب مساحة منطقة محدودة بقطع مستقيمة، فمثلاً مساحة المنطقة المستطيلة تساوي حاصل ضرب بعدي المستطيل، ومساحة المنطقة المثلثية تساوي نصف حاصل ضرب القاعدة في الارتفاع، ومساحة المنطقة المضلعة تساوي مجموع مساحات المناطق المثلثية التي يمكن أن تنقسم إليها.

ولكن كيف يمكنك حساب مساحة منطقة لا تمثل مضلعًا كما في الشكلين (٤-١) ، (٤-٢). في هذا الدرس سوف تستخدم التكامل المحدود لحساب مثل هذه المساحات.



الشكل (٤-١)



الشكل (٤-٢)

أولاً: حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات.

٢٦٩

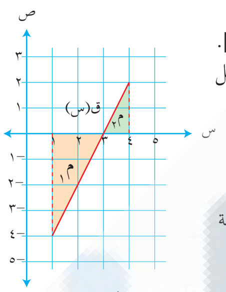
مثال (٢)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٢س -٦ ومحور السينات والمستقيمين س =١، س = ٤، ثم جد $\int_{١}^{٤}$ |ق(س)| دس . ماذا تلاحظ؟

الحل

يمثل الشكل (٤-٤) منحنى الاقتران ق في الفترة [١، ٤].

المساحة المطلوبة (م) عبارة عن مجموع مساحتين $م_1$، $م_2$ كل واحدة منهما عبارة عن منطقة مثلثية.



الشكل (٤-٤)

$م_1 = \frac{1}{2} \times ٢ \times ٤ = ٤$ وحدات مساحة

$م_2 = \frac{1}{2} \times ١ \times ٢ = ١$ وحدة مساحة

المساحة المطلوبة (م) = $م_1 + م_2$ = ٤+١=٥ وحدات مساحة

$\int_{١}^{٤}$ |ق(س)| دس = $\int_{١}^{٣}$ (٦ - ٢س) دس + $\int_{٣}^{٤}$ (٢س - ٦) دس

= (٦س - س^٢) $\Big]_{١}^{٣}$ + (س^٢ - ٦س) $\Big]_{٣}^{٤}$

= [(١٨ - ٩) - (٦ - ١)] + (-٨ + ٩)

= (٩-٥) + (-٨ + ٩) = ٥ وحدات مساحة

لاحظ أن المساحة المطلوبة = $\int_{١}^{٤}$ |ق(س)| دس

تدريب (١)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢-٢س ومحور السينات والمستقيمين س = -٢، س = ٢. ثم جد $\int_{-٢}^{٢}$ |ق(س)| دس .

٢٧١

الأخطاء الشائعة

- يخطئ بعض الطلبة في حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ،ب]، وذلك بحساب قيمة المساحة بالسالب، وهذا الخطأ ناتج عن عدم إيجاد تكامل القيمة المظللة للاقتران وإنما إيجاد تكامل

الملاحق

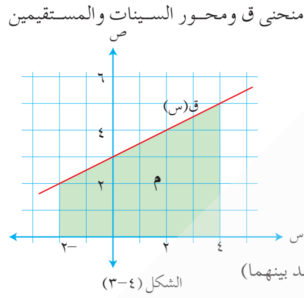
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (١)

بالاعتماد على الشكل (٤-٣) والذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٣ في الفترة [-٢، ٤] أجب عن السؤالين الآتيين، وماذا تلاحظ:

١) احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات والمستقيمين س=-٢، س=٤

٢) جد $\int_{-٢}^{٤}$ |ق(س)|. دس



الشكل (٤-٣)

الحل

١) مساحة المنطقة المطلوبة (م) عبارة عن مساحة شبه منحرف.

م = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين المتوازيتين × البعد بينهما)

م = $\frac{١}{٢}$ (ق(-٢) + ق(٤)) × (٤-(-٢))

= $\frac{١}{٢}$ (٢ + ٥) × (٦) = ٢١ وحدة مساحة

٢) $\int_{-٢}^{٤}$ |ق(س)|. دس = $\int_{-٢}^{٤}$ ($\frac{١}{٢}$ س + ٣) د س = ($\frac{١}{٤}$ س^{٢} + ٣س) $\Big]_{-٢}^{٤}$

= (٤ + ١٢) - (١ - ٦) = ٢١

لاحظ أنك حصلت على الإجابة نفسها في الحالتين، أي أن :

مساحة المنطقة المطلوبة = $\int_{-٢}^{٤}$ |ق(س)| دس

٢٧٠

نظرية (١)

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل في الفترة [أ،ب]، فإن مساحة المنطقة (م) المحدودة بمنحنى ق ومحور السينات في الفترة [أ،ب] تعطى بالقاعدة:

م = $\int_{أ}^{ب}$ | ق(س) | دس

لتجد مساحة منطقة محدودة بين منحنى اقتران ومحور السينات في فترة محددة اتبع الخطوات الآتية:

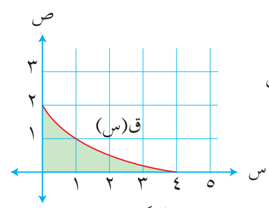
١) ارسم منحنى الاقتران وحدد المنطقة المطلوبة.

٢) جد أصفار الاقتران ثم جزِّئ المنطقة المطلوبة حسب موقعها من محور السينات (فوق محور السينات، تحت محور السينات).

٣) احسب مساحة كل منطقة جزئية على حدة، ثم اجمع المساحات التي حصلت عليها لتحصل على مساحة المنطقة المطلوبة.

مثال (٣)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ٢- $\sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات.



الشكل (٤-٥)

الحل

لتجد المساحة المطلوبة اتبع الخطوات السابقة. الشكل (٤-٥) يمثل منحنى الاقتران ق والمساحة المطلوبة.

جد أصفار الاقتران ق بحل المعادلة ق(س) = ٠

٢ - $\sqrt{س}$ = ٠ ، ومنها س =٤

مساحة المنطقة المطلوبة

م = $\int_{٠}^{٤}$ |٢ - $\sqrt{س}$ | دس = $\int_{٠}^{٤}$ (٢ - $\sqrt{س}$) دس

= ٢س - $\frac{٢}{٣}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ $\Big]_{٠}^{٤}$ = ٨ - $\frac{٢}{٣}$ (٤)$^{\frac{٣}{٢}}$ - ٠ = $\frac{٨}{٣}$ وحدة مساحة

٢٧٢

الاقتران، لذا أكد للطلبة بأنه اذا كان:

١) ق (س) ≤ ٠ لكل س ∈ [أ، ب] فإن م = $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س.

٢) ق (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ، ب] فإن م = $\int_{أ}^{ب}$ | ق (س)| د س.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق (س) = س^{٢}، ومحور السينات ومحور الصادات والمستقيم س = ٣.

إثراء

- كلف الطلبة بحل سؤال (٦) كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- الاستراتيجية: الملاحظة.
- الأداة: قائمة الشطب (٢-٤).
- الاستراتيجية: القلم والورقة.

من خلال حل المجموعات للتدريبات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

- تعرّف الطالب إلى إيجاد مساحات الأشكال المنتظمة في الصفوف السابقة عن طريق قوانين محددة.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤ - ٧ حساب المساحة باستخدام التكامل

النتاجات الخاصة

– يستخدم التكامل لإيجاد المساحة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.

المفاهيم والمصطلحات

المساحة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– مناقشة أسئلة الواجب البيتي مع الطلبة.
– تقسّيم الطلبة مجموعات تعاونية.
– مناقشة مثال (٤) مع المجموعات، ثم تكليف المجموعات، حل تدريب (٤).
– تكليف إحدى المجموعات عرض الحل. واستخدام أسلوب الحوار والمناقشة لتوضيح الحل.
– توضيح كيفية إيجاد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات من خلال مناقشة مثال (٥) مع المجموعات.
– تكليف المجموعات حل تدريب (٥).
– تكليف إحدى المجموعات عرض الحل على السبورة واستخدام أسلوب الحوار والمناقشة لتوضيح الحل.
– تكليف الطلبة جميعهم حل السؤال الأول كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (٢)

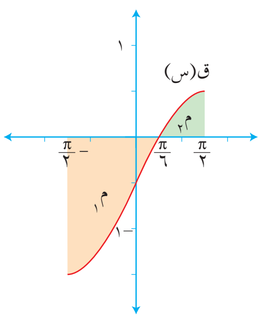
جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = ١٦ – س^٢ ومحور السينات والمستقيمين س = ١ ، س = ٣.

مثال (٤)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جا س – $\frac{١}{٢}$ ، ومحور السينات في الفترة $[\frac{-\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$.

الحل

الشكل (٤–٦) يمثل منحنى الاقتران ق والمنطقة المظللة تمثل المساحة المطلوبة والمكونة من جزأين م$_١$، م$_٢$.



الشكل (٤–٦)

$$م = \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جا س} - \tfrac{١}{٢}|\ دس$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} (\tfrac{١}{٢} - \text{جا س})\ دس + \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جا س} - \tfrac{١}{٢})\ دس$$

$$= (\tfrac{١}{٢}\text{س} + \text{جتا س})\Big]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٦}} + (-\text{جتا س} - \tfrac{١}{٢}\text{س})\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٢}}$$

$$= (\tfrac{\pi}{١٢} + \tfrac{\sqrt{٣}}{٢}) - (\tfrac{-\pi}{٤} + ٠) + \Big(٠ - \tfrac{\pi}{٤} - (-\tfrac{\sqrt{٣}}{٢} - \tfrac{\pi}{١٢})\Big)$$

$$= (\tfrac{\pi}{٦} + \sqrt{٣})\ \text{وحدة مساحة.}$$

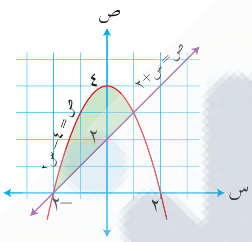
٢٧٣

لتجد مساحة منطقة محصورة بين منحنيين أو أكثر اتبع الخطوات الآتية:
١) ارسم منحنى كل اقتران وحدد المنطقة المطلوب حساب مساحتها.
٢) جزّئ المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى مناطق جزئية بحيث تكون كل منها محصورة بين منحنيين أو منحنى ومحور السينات.
٣) جد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيات مع بعضها ومع محور السينات.
٤) جد مساحة كل منطقة جزئية، ثم جد المساحة المطلوبة بجمع مساحات المناطق الجزئية.

مثال (٥)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ص = ٤ – س^٢ ، ص = س + ٢.

الحل



الشكل (٤–١٠)

لتجد المساحة المطلوبة (م) اتبع الخطوات السابقة.

الشكل (٤–١٠) يوضح منحنيي الاقترانين والمساحة المطلوبة.

جد نقط تقاطع المنحنيين بحل المعادلة.

٤ – س^٢ = س + ٢ ومنه س^٢ + س – ٢ = ٠.

(س + ٢)(س – ١) = ٠ ، ومنه س = –٢ ، س = ١

نقط تقاطع المنحنيين هي: (–٢ ، ٠) ، (١ ، ٣)

لاحظ أن ٤ – س^٢ ≥ س + ٢ لكل س ∈ [–٢ ، ١].

ويمكنك التأكد من ذلك بالتعويض بقيم مختلفة لـ س من الفترة [–٢، ١] لطرفي المتباينة.

$$م = \int_{-٢}^{١} \big((٤ - \text{س}^٢) - (\text{س} + ٢)\big)\ دس = \int_{-٢}^{١} (٢ - \text{س}^٢ - \text{س})\ دس$$

$$= (٢\text{س} - \tfrac{١}{٣}\text{س}^٣ - \tfrac{١}{٢}\text{س}^٢)\Big]_{-٢}^{١} = (٢ - \tfrac{١}{٣} - \tfrac{١}{٢}) - (-٤ + \tfrac{٨}{٣} - ٢) = ٤{,}٥\ \text{وحدة مساحة}$$

٢٧٥

الأخطاء الشائعة

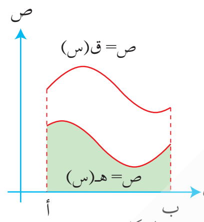
– يخطئ بعض الطلبة عند حساب المساحة المحصورة بين منحنى اقترانين مثل ق، هـ في الفترة [أ، ب] فلا يستخدمون الرسم وإنما يعتقدون أن الاقتران الذي درجته أكبر هو الاقتران الأكبر، وضّح للطلبة خطأ ذلك مستخدمًا المثال الآتي:

تدريب (٣)

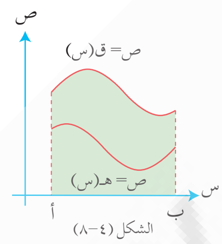
احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٣} − ١ ومحور السينات في الفترة [−٢، ٢].

ثانياً: حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنيين أو أكثر.

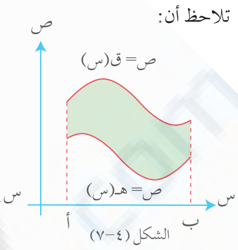
يوضح الشكل (٤−٧) المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين المتصلين ق، هـ والمستقيمين س = أ ، س = ب حيث ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [أ، ب]. وبدراسة الشكلين (٤−٨)، (٤−٩)، تلاحظ أن:



الشكل (٤−٩)



الشكل (٤−٨)



الشكل (٤−٧)

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق، هـ في الفترة [أ، ب] تساوي مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى (ق) ومحور السينات مطروحاً منها مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى (هـ) ومحور السينات.

أي أن مساحة المنطقة (م) المحصورة بين منحنيي ق، هـ في [أ، ب] هي:

$$م = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\,دس = \int_{أ}^{ب} \left(ق(س) - هـ(س)\right)دس$$

نظرية (٢)

إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين على [أ، ب] ، وكان ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [أ، ب] ، فإن مساحة المنطقة (م) المحصورة بين منحنييهما في الفترة [أ، ب] هي:

$$م = \int_{أ}^{ب} \left(ق(س) - هـ(س)\right)دس$$

٢٧٤

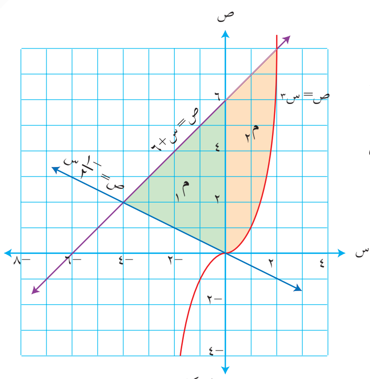
تدريب (٤)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = س^{٢} ، ومنحنى ل(س) = ٤س + ٥.

مثال (٦)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات ص − س = ٦ ، ص = س^{٣} ، ٢ص + س = ٠

الحل



الشكل (٤−١١)

ارسم منحنيات الاقترانات الثلاثة وحدد المنطقة المطلوبة كما في الشكل (٤−١١).

جد نقط التقاطع بين كل منحنيين من المنحنيات الثلاثة بعد كتابة كل اقتران منها على الصورة: ص = هـ(س).

لتجد نقط التقاطع بين ص = س^{٣}، ص = س + ٦ ، حل المعادلة

س^{٣} = س + ٦ ومنها س^{٣} − س − ٦ = ٠

(س − ٢) (س^{٢} + ٢س + ٣) = ٠

ومنها س = ٢

أي أن نقطة التقاطع بين ص = س^{٣}، ص = س + ٦ هي (٢، ٨)

لتجد نقط التقاطع بين ص = س^{٣}، ص = −$\frac{١}{٢}$س حل المعادلة:

س^{٣} = −$\frac{١}{٢}$ س ⟸ س^{٣} + $\frac{١}{٢}$ س = ٠ ⟸ س (س^{٢} + $\frac{١}{٢}$) = ٠ ⟸ س = ٠

فتكون نقطة التقاطع بين ص = س^{٣}، ص = −$\frac{١}{٢}$ س هي (٠ ، ٠)

لتجد نقط التقاطع بين ص = س + ٦ ، ص = −$\frac{١}{٢}$ س حل المعادلة س + ٦ = −$\frac{١}{٢}$ س

ومنها س = −٤، أي أن نقطة التقاطع بين ص = س + ٦، ص = −$\frac{١}{٢}$ س هي (−٤، ٢).

٢٧٦

مثال ق (س) = س ، هـ (س) = س^{٢}

جد المساحة المحصورة بين ق (س) ، هـ (س).

ملاحظة درجة هـ > درجة ق، لكن ق (س) ≥ هـ (س) في الفترة [٠ ، ١]

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

− جد المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) = س^{٢} + ١ والمستقيم ص = ٤.

إثراء

− جد المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) = |س − ٢| ، هـ (س) = ٤ − س^{٢}.

− جد المساحة المحصورة بين منحنى ق (س) = |س − ٢| ، هـ (س) = ٤ − س^{٢} ومحور السينات.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية** : الملاحظة .

− **الأداة** : قائمة الشطب (٢−٤).

− **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

من خلال متابعة الواجب البيتي للطلبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يجد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر باستخدام التكامل.

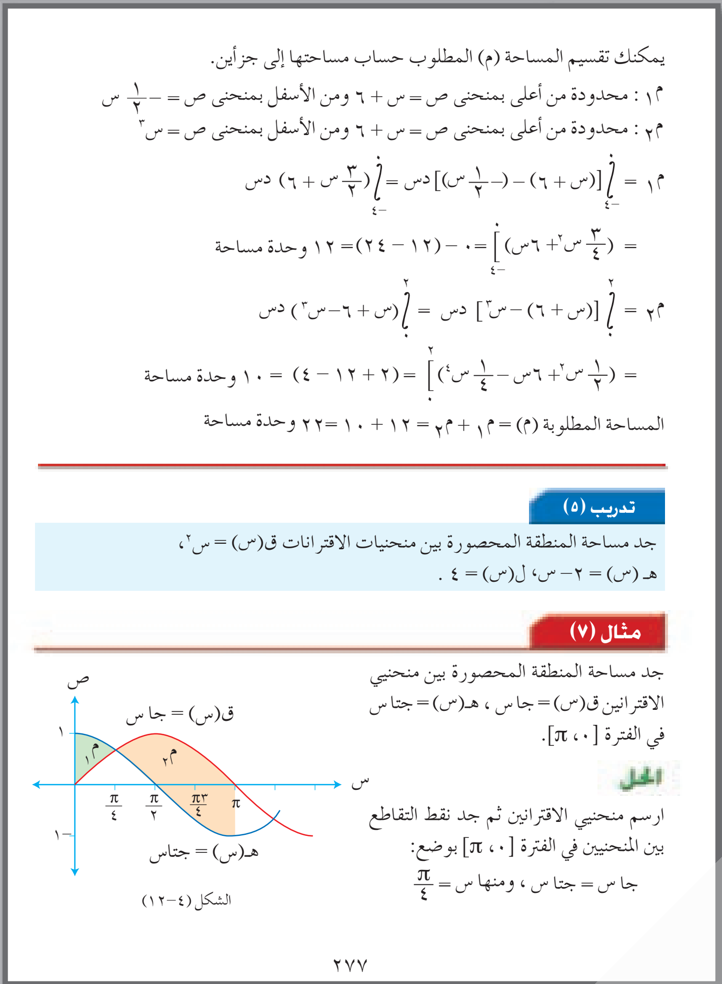
المفاهيم والمصطلحات

المساحة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- مناقشة أسئلة الواجب البيتي مع الطلبة.
- تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية.
- تكليف المجموعات جميعها حل السؤال الرابع.
- بعد الانتهاء من الحل يتم تكليف بعض المجموعات عرض الحل بحيث تعرض كل مجموعة فرعًا واحدًا من السؤال.
- إجراء مناقشة للوصول إلى الحل الصحيح.



يمكنك تقسيم المساحة (م) المطلوب حساب مساحتها إلى جزأين.

م١ : محدودة من أعلى بمنحنى ص = س + ٦ ومن الأسفل بمنحنى ص = $-\frac{١}{٢}$ س

م٢ : محدودة من أعلى بمنحنى ص = س + ٦ ومن الأسفل بمنحنى ص = س^{٣}

م١ = $\int_{-٤}^{٠}$ [(س + ٦) − ($-\frac{١}{٢}$ س)] دس = $\int_{-٤}^{٠}$ ($\frac{٣}{٢}$ س + ٦) دس

= ($\frac{٣}{٤}$ س^{٢} + ٦س) $\Big]_{-٤}^{٠}$ = ٠ − (١٢ − ٢٤) = ١٢ وحدة مساحة

م٢ = $\int_{٠}^{٢}$ [(س + ٦) − س^{٣}] دس = $\int_{٠}^{٢}$ (س + ٦ − س^{٣}) دس

= ($\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٦س − $\frac{١}{٤}$ س^{٤}) $\Big]_{٠}^{٢}$ = (٢ + ١٢ − ٤) = ١٠ وحدة مساحة

المساحة المطلوبة (م) = م١ + م٢ = ١٢ + ١٠ = ٢٢ وحدة مساحة

تدريب (٥)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات ق(س) = س^{٢}، هـ (س) = ٢ − س، ل(س) = ٤ .

مثال (٧)

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = جا س ، هـ(س) = جتا س في الفترة [٠ ، π].

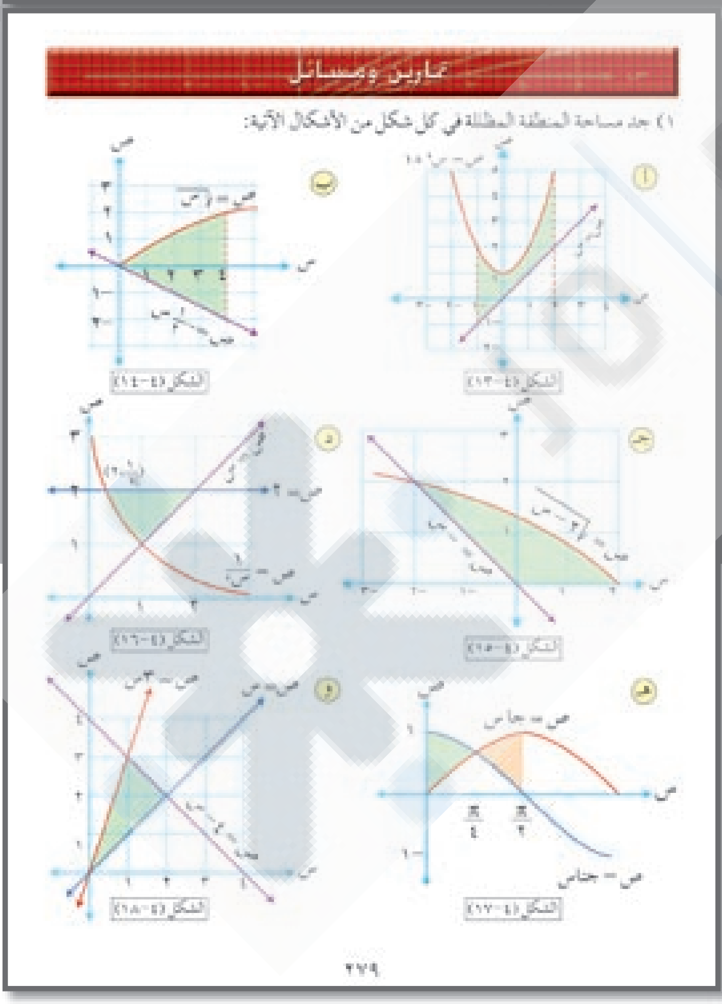
الحل

ارسم منحنيي الاقترانين ثم جد نقط التقاطع بين المنحنيين في الفترة [٠ ، π] بوضع:

جا س = جتا س ، ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

الشكل (٤−١٢)

٢٧٧



الأخطاء الشائعة

- يعتقد بعض الطلبة أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) في [أ، ب] هي | $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) د س|
- وضّح للطلبة صحة اعتقادهم عندما يكون ق (س) ≥ ٠ لكل س ∋ [أ ، ب] وغير ذلك غير صحيح.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

يمكن تقسيم المساحة (م) المطلوبة إلى جزأين:

$م_1$: محدودة من أعلى بمنحنى هـ ، ومن الأسفل بمنحنى ق في $[\,٠ ، \frac{\pi}{٤}\,]$

$م_2$: محدودة من أعلى بمنحنى ق ، ومن الأسفل بمنحنى هـ في $[\frac{\pi}{٤}، \pi]$

$$م_1 = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتا س} - \text{جا س})\,\text{دس} = \Big[(\text{جا س} + \text{جتا س})\Big]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) - ١ = (\sqrt{٢} - ١) \text{ وحدة مساحة}$$

$$م_2 = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (\text{جا س} - \text{جتا س})\,\text{دس} = \Big[(-\text{جتا س} - \text{جا س})\Big]_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi}$$

$$= (١ - ٠) - \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) = ١ + \sqrt{٢} \text{ وحدة مساحة}$$

المساحة المطلوبة $م = م_1 + م_2 = \sqrt{٢} - ١ + ١ + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

٢٧٨

٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = ٢س + ٤ ، أ = ٠ ، ب = ٢

ب) ق(س) = $س^٣$ ، أ = −٢، ب = ٢

جـ) ق(س) = $س^٢$ + ١ ، أ = −١، ب = ٣

د) ق(س) = جتا ٢س ، أ = $\frac{\pi}{٤}$، ب = $\frac{\pi}{٢}$

٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق، هـ في كل مما يأتي:

أ) ق(س) = س + ١ ، هـ(س) = −٢س + ١ في الفترة [٠، ٢]

ب) ق(س) = $س^٢$ ، هـ(س) = ٤س

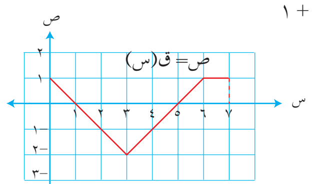
جـ) ق(س) = $\sqrt{س}$ ، هـ(س) = − س في الفترة [١، ٤]

٤) ارسم المنطقة المحدودة بمنحنيات الاقترانات الآتية ثم جد مساحتها.

أ) ق(س) = ٩ − $س^٢$ ، هـ(س) = ٥ في الفترة [−٢، ٢]

ب) ق(س) = $س^٣ + س^٢$ ، هـ(س) = $س^٣$ + ١

٥) اعتمد على الشكل (٤−١٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في إيجاد كل مما يأتي:



الشكل (٤−١٩)

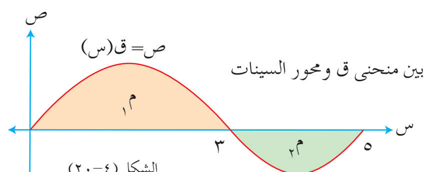
أ) $\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس}$

ب) $\int_{٠}^{٧} |\text{ق(س)}|\,\text{دس}$ جـ) $\left|\int_{٠}^{٧} \text{ق(س) دس}\right|$

٦) الشكل (٤−٢٠) يمثل منحنى الاقتران ق. إذا كانت $م_1$ = ٦ وحدات مربعة، $م_2$ = ٤ وحدات مربعة. أجب عما يأتي:

أ) جد $\int_{٠}^{٥} \text{ق(س) دس}$

ب) جد المساحة المحصورة بين منحنى ق ومحور السينات في الفترة [٠، ٥].



الشكل (٤−٢٠)

٢٨٠

مثال ق (س) = س − ٢، س ∈ [٠ ، ٤]

لاحظ أن $\left|\int_{٠}^{٤} \text{ق (س) د س}\right|$ = صفراً

بينما $\int_{٠}^{٤} |\text{ق (س)}|\,\text{د س}$ = ٤ وهي تمثل مساحة المنطقة المحصور بين منحنى ق (س) في الفترة [٠ ، ٤]

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي

ق(س) = س + ١ ، هـ(س) = ١ − ٢س في الفترة [٠ ، ٢].

إثراء

– كلف الطلبة بحل السؤال الخامس كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

ويتم ذلك عن طريق متابعة الواجب البيتي.

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢−٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يفسّر مفهوم اللوغاريتم الطبيعي كاقتران بدائي للاقتران $\frac{١}{س}$.
- يجد مشتقة الاقتران اللوغاريتم الطبيعي.
- يجد تكامل اقتران نسبيه.

المفاهيم والمصطلحات

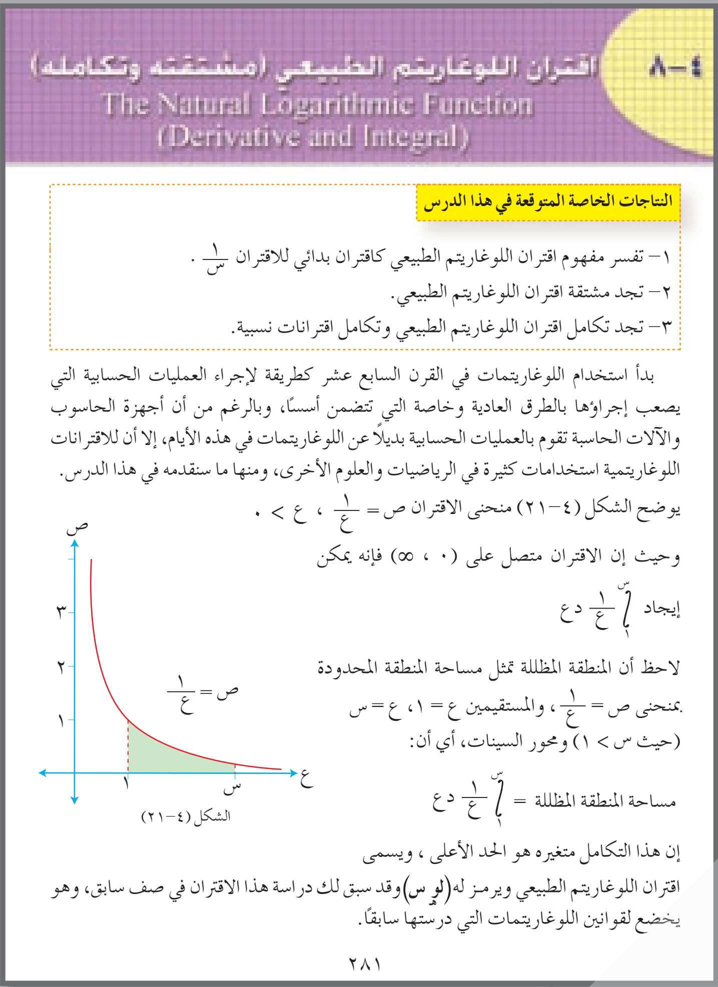
اقتران اللوغاريتم الطبيعي

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- توضيح مفهوم اقتران اللوغاريتم الطبيعي من خلال ربطه بمساحة المنطقة المحصورة بين ص = $\frac{١}{ع}$ ، ع = ١، ع = س، ومحور السنيات.
- كتابة نظرية (١) على السبورة وتوضيحها باستخدام أسلوب الحوار والمناقشة والتبرير المنطقي.
- مناقشة المثالين (١، ٢) على السبورة، وتكليف الطلبة حل تدريب (١) في الدفاتر.
- كتابة نظرية (٢) على السبورة وبرهنتها بمشاركة الطلبة.
- تذكير الطلبة: باقتران اللوغاريتم الطبيعي.
- مناقشة المثالين (٣ ، ٤) مع الطلبة ثم تكليفهم حل التدريبين (٢، ٣) في الدفاتر.
- تكليف الطلبة جميعهم حل السؤال الأول (أ، ب، هـ، ح، ي)، والسؤال الثاني (أ ، ب، د) كواجب بيتي.

معلومات إضافية



٤-٨ اقتران اللوغاريتم الطبيعي (مشتقته وتكامله)
The Natural Logarithmic Function
(Derivative and Integral)

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تفسر مفهوم اقتران اللوغاريتم الطبيعي كاقتران بدائي للاقتران $\frac{١}{س}$.
٢- تجد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي.
٣- تجد تكامل اقتران اللوغاريتم الطبيعي وتكامل اقترانات نسبية.

بدأ استخدام اللوغاريتمات في القرن السابع عشر كطريقة لإجراء العمليات الحسابية التي يصعب إجراؤها بالطرق العادية وخاصة التي تتضمن أسسًا، وبالرغم من أن أجهزة الحاسوب والآلات الحاسبة تقوم بالعمليات الحسابية بديلاً عن اللوغاريتمات في هذه الأيام، إلا أن للاقترانات اللوغاريتمية استخدامات كثيرة في الرياضيات والعلوم الأخرى، ومنها ما سنقدمه في هذا الدرس.

يوضح الشكل (٤-٢١) منحنى الاقتران ص = $\frac{١}{ع}$ ، ع > ٠ .

وحيث إن الاقتران متصل على (٠ ، ∞) فإنه يمكن إيجاد $\int_{١}^{س} \frac{١}{ع}$ دع

لاحظ أن المنطقة المظللة تمثل مساحة المنطقة المحدودة بمنحنى ص = $\frac{١}{ع}$ ، والمستقيمين ع = ١، ع = س (حيث س > ١) ومحور السينات، أي أن:

مساحة المنطقة المظللة = $\int_{١}^{س} \frac{١}{ع}$ دع

الشكل (٤-٢١)

إن هذا التكامل متغيره هو الحد الأعلى ، ويسمى اقتران اللوغاريتم الطبيعي ويرمز له (لوهـ س) وقد سبق لك دراسة هذا الاقتران في صف سابق، وهو يخضع لقوانين اللوغاريتمات التي درستها سابقاً.

٢٨١

مثال (١)

جد قَ(س) لكل مما يأتي:

١) ق(س) = لوهـ ٦س ٢) ق (س) = لوهـ (س^{٢} + ٤) ٣) ق (س) = لوهـ جا٢س

الحل

١) قَ(س) = $\frac{٦}{٦س}$ = $\frac{١}{س}$

٢) قَ(س) = $\frac{٢س}{س^{٢} + ٤}$

٣) قَ(س) = $\frac{٢ جتا ٢س}{جا٢س}$ = ٢ظتا ٢س

تدريب (١)

جد قَ(س) لكل مما يأتي:

١) ق (س) = لوهـ $\frac{س}{٢}$

٢) ق (س) = لوهـ (س^{٣}+١) ، س > -١

٣) ق (س) = لوهـ جا^{٢} س

مثال (٢)

ليكن ص = لوهـ |س| ، حيث س ≠ ٠ ، جد $\frac{دص}{دس}$

الحل

أعد تعريف ص = لوهـ |س| دون استخدام رمز القيمة المطلقة فيكون:

٢٨٣

الأخطاء الشائعة

- يستخدم بعض الطلبة النظرية $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)}$ دس = لوهـ | ق (س) | + جـ بشكل خطأ وذلك بعكس النظرية على النحو الآتي:

$\int \frac{ق(س)}{قَ(س)}$ د س = لوهـ | قَ (س) | + جـ .

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تعريف

إذا كانت س ∈ (٠، ∞) فإن :

$$لو_{هـ}س = \int_{١}^{س} \frac{١}{ع}\, دع$$

ويقرأ اللوغاريتم الطبيعي لِـ س .

إن العدد الحقيقي الذي يجعل مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤–٢١) تساوي وحدة واحدة يسمى العدد النيبيري، ويرمز له بالرمز (هـ) وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي، وهو عدد غير نسبي يساوي ٢,٧ تقريبًا.

إذا كان ق(ع) اقترانًا بدائيًا للاقتران $ق'(ع) = \frac{١}{ع}$.

$$فإن\ لو_{هـ}س = \int_{١}^{س} \frac{١}{ع} \cdot دع$$

$$= ق(ع)\Big]_{١}^{س} \quad \text{(من تعريف التكامل المحدود)}$$

$$= ق(س) - ق(١)$$

أي أن $لو_{هـ}س = ق(س) - ق(١)$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س تجد أن:

$$\frac{د}{دس}(لو_{هـ}س) = ق'(س) = \frac{١}{س}$$

وهذا يؤدي إلى النظرية الآتية:

نظرية (١)

١) إذا كان $ق(س) = لو_{هـ}س$ ، س > ٠ ، فإن $ق'(س) = \frac{١}{س}$.

٢) إذا كان ق (س) = لوهـل(س)، وكان ل(س) قابلًا للاشتقاق فإن:

$$ق'(س) = \frac{ل'(س)}{ل(س)} \quad ، \quad \text{حيث } ل(س) > ٠$$

٢٨٢

$$ص = لو_{هـ}|س| = \begin{cases} لو_{هـ}س & ، \quad س > ٠ \\ لو_{هـ}(-س) & ، \quad س < ٠ \end{cases}$$

$$\frac{دص}{دس} = \begin{cases} \frac{١}{س} & ، \quad س > ٠ \\ \frac{-١}{-س} & ، \quad س < ٠ \end{cases}$$

أي أن $\frac{د}{دس}\left(لو_{هـ}|س|\right) = \frac{١}{س}$ ، حيث س ≠ ٠

من مثال (٢) يتبين أن الاقتران $ق(س) = لو_{هـ}|س|$ هو اقتران بدائي للاقتران $هـ(س) = \frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ .

أي أن $\int \frac{١}{س}\, دس = لو_{هـ}|س| + جـ$ ، س ≠ ٠ .

نظرية (٢)

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = لو_{هـ}|ق(س)| + جـ$$

البرهان

استخدم طريقة التكامل بالتعويض بفرض ص = ق(س) ، فيكون دص = ق'(س) دس

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = \int \frac{١}{ص}\, دص = لو_{هـ}|ص| + جـ$$

ضع ق(س) بدلًا من ص تجد أن : $\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = لو_{هـ}|ق(س)| + جـ$

٢٨٤

فمثلا $\int \frac{س^{٣} + ١}{٣\,س^{٢}}\, دس = لو_{هـ}\left|٣\,س^{٢}\right| + جـ$

لذا وضح للطلبة النظرية بشكل صحيح من خلال زيادة الأمثلة.

الزمن المتوقع

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ١}\, دس$
- $\int \frac{١}{٣س - ٤}\, دس$

إثراء

– جد قيمة $\int$ قاس د س.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة .

بمتابعة حل التدريب في الدفاتر.

– **الاستراتيجية:** التواصل.

– **الأداة:** السجل القصصي.

دوّن النجاحات التي حققها الطلبة، وكذلك الإخفاقات لديهم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٤ – ٨ اقتران اللوغاريتم الطبيعي (مشتقتة وتكامله)

النتاجات الخاصة

– يجد تكامل ومشتقة الاقتران اللوغاريتمات والاقترانات النسبية.

المفاهيم والمصطلحات

اقتران اللوغاريتم الطبيعي

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– ناقش أسئلة الواجب البيتي على السبورة.
– ناقش السؤالين (٥، ٦) على السبورة مع الطلبة، ثم كلفهم بحل تدريب (٤) في الدفاتر.
– ناقش الأسئلة (٧، ٨) على السبورة مع الطلبة.

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– قسم الطلبة إلى مجموعات تعاونية.
– قدّم لهم الأسئلة الواردة في تدريب (٥) على ورقة عمل.
– بعد بنود إكمال تنفيذ أوراق العمل من قبل المجموعات كلف مجموعتين بعرض ورقة العمل بحيث تعرض كل مجموعة بندًا واحدًا فقط.
– إجراء حوار ومناقشة بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

مثال (٣)

جد $\int \frac{٣س^{٢}-٢}{س^{٣}-٢س+١}$ دس .

الحل

افرض أن ق (س) = $س^{٣}-٢س+١$ ، فيكون قَ(س) = $٣س^{٢}-٢$

لاحظ أن التكامل المطلوب على الصورة $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)}$ دس

وبتطبيق النظرية يكون:

$$\int \frac{٣س^{٢}-٢}{س^{٣}-٢س+١}\,دس = لو_{هـ}|س^{٣}-٢س+١| + جـ$$

تدريب (٢)

١) جد $\int_{١}^{٣} \frac{٦س}{٣س^{٢}-٥}$ دس.

٢) حل مثال (٣) باستخدام طريقة التكامل بالتعويض.

مثال (٤)

جد $\int \frac{س}{س^{٢}+٣}$ دس.

الحل

يمكنك أن تجعل التكامل المطلوب على صورة $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)}$ دس، بضرب كل من البسط والمقام في العدد ٢ فيكون:

تذكر

١) $لو_{هـ} أ\times ب = لو_{هـ}أ + لو_{هـ}ب$
٢) $لو_{هـ} \frac{أ}{ب} = لو_{هـ}أ - لو_{هـ}ب$
٣) $لو_{هـ} أ^{ن} = ن\, لو_{هـ}أ$
٤) $لو_{هـ} هـ = ١$
٥) $لو_{هـ} ١ = صفر$

٢٨٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– درّب الطلبة على استخدام قوانين اللوغريتمات قبل عملية الاشتقاق فمثلاً إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 3\text{س})^4$

فإن $\text{ق}(\text{س}) = 4\ \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^2 + 3\text{س})$

$$\text{قَ}(\text{س}) = 4 \times \frac{2\text{س} + 3}{\text{س}^2 + 3\text{س}} = \frac{8\text{س} + 12}{\text{س}^2 + 3\text{س}}$$

إثراء

– جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int \frac{4 - 3\text{س}}{\sqrt{2\text{س} - 1} + 1}\, \text{د س}$$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

ويتم ذلك عن طريق متابعة حل التدريبات.

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

$$\int_1^3 \frac{\text{س}}{\text{س}^2+3}\,\text{دس} = \int_1^3 \frac{2\text{س}}{2(\text{س}^2+3)}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2\text{س}}{\text{س}^2+3}\,\text{دس}$$

$= \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\left[|\text{س}^2+3|\right]_1^3$ باستخدام نظرية (٢)

$= \frac{1}{2}(\text{لو}_{\text{هـ}}12 - \text{لو}_{\text{هـ}}4) = \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{12}{4} = \frac{1}{2}\text{لو}_{\text{هـ}}3$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{3}$ (باستخدام قوانين اللوغاريتمات)

تدريب (٣)

جد $\int_2^4 \frac{1}{9 - 2\text{س}}\,\text{دس}$

مثال (٥)

جد $\int_1^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

الحل

افرض أن $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، ومنه $\text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$،

وافرض أن $\text{دع} = \text{دس}$ ، ومنه $\text{ع} = \text{س}$

استخدم قاعدة التكامل بالأجزاء تجد أن :

$$\int_1^{\text{هـ}} \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\Big]_1^{\text{هـ}} - \int_1^{\text{هـ}} \text{س} \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$$

$$= \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\Big]_1^{\text{هـ}} - \text{س}\Big]_1^{\text{هـ}} = (\text{هـ}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}1) - (\text{هـ} - 1) = 1$$

٢٨٦

مثال (٦)

جد $\int \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس}$

الحل

استخدم طريقة التكامل بالأجزاء:

افرض $\text{ق} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دم} = \text{س}\,\text{دس}$

$\text{دق} = \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$ ، $\text{م} = \frac{1}{2}\text{س}^2$

إذن $\int \text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\text{دس} = \frac{1}{2}\text{س}^2 \times \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{1}{2}\text{س}^2 \times \frac{1}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{2}\int \text{س}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{2}\text{س}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^2 + \text{جـ}$

تدريب (٤)

جد $\int \text{س}^5\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^3\,\text{دس}$

مثال (٧)

جد $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{دس}$

الحل

تلاحظ أن مشتقة (ظاس) = قا^{2}س موجودة في التكامل ، إذن استخدم هنا التكامل بالتعويض

بفرض أن $\text{ص} = \text{ظا س}$ ، ومنه $\text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

إذن $\int \text{قا}^2\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\,\text{دس} = \int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص}$

٢٨٧

الدرس ٤ – ٨ اقتران اللوغاريتم الطبيعي

النتاجات الخاصة

– يجد تكامل اقترانات نسبية ولوغاريتمية.

المفاهيم والمصطلحات

اقتران اللوغاريتم الطبيعي

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

– قسم الطلبة إلى مجموعات تعاونية.
– وزّع على المجموعات ورقة عمل (٣ – ١٢)، وكلّف كل مجموعة بتنفيذ محتوى ورقة العمل.
– بعد إكمال تنفيذ الورقة من قبل المجموعات كلف أربع مجموعات بعرض بنود ورقة العمل على السبورة بحيث تعرض كل مجموعة بندًا واحدًا فقط.
– إجراء حوار ومناقشة بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

ومن المعلوم لديك أن $\int$ لوهـ ص دص يحسب باستخدام الأجزاء حيث إن:

$\int$ لوهـ ص دص = ص لوهـ ص – ص + جـ (انظر مثال ٥)

إذن $\int$ قا^{٢}س لوهـ ظاس د س = ظا س لوهـ ظا س – ظا س + جـ

مثال (٨)

جد $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+١}$ دس .

الحل

افرض ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ومنها ص^{٢} = س

٢ص دص = دس

إذن $\int \frac{\text{س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}+١}$ دس = $\int \frac{\text{ص}\times٢\text{ص}}{\text{ص}^{٢}\times\text{ص}+١}$ دص = $\int \frac{٢\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٣}+١}$ دص

= ٢ $\int \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٣}+١}$ دص = $\frac{٢}{٣}\int \frac{٣\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٣}+١}$ دص

= $\frac{٢}{٣}$ لوهـ |ص^{٣}+١| + جـ = $\frac{٢}{٣}$ لوهـ |$\sqrt{\text{س}^{٣}}$ + ١| + جـ

تدريب (٥)

جد التكاملين الآتيين:

١) $\int$ قا^{٤}س لوهـ ظا س دس

٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}$ دس

٢٨٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int$ ظتاس د س
- $\int \frac{١}{أس + ب}$ د س ، أ $\neq$ ٠

إثراء

– جد قيمة التكامل الآتي:

- $\int \frac{لو_{هـ}(س + ٢)}{\sqrt{س^٢ + ٢}}$ د س

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = لو(س^٢) ، س > ٠ ب) ق(س) = لو(س^٢+١)

جـ) ق(س) = س^٢ لو س د) ق(س) = لو جتا س

هـ) ق(س) = لو جا^٢ س و) ق(س) = لو|٤ − ٣س|

ز) ق(س) = لو|ظا س| ح) ق(س) = (لو س)^٢ ، س > ٠

ط) ق(س) = لو $\left(\frac{جتا س}{١ + جا س}\right)$ ي) ق(س) = لو(س + $\sqrt{س^٢ − ١}$)

٢) جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \frac{٢س}{س^٢ + ٥}$ دس ب) $\int \frac{٥}{س}$ دس

جـ) $\int \frac{س^٢ + ١}{س}$ دس د) $\int \frac{دس}{س لو س}$

هـ) $\int$ س (لو س)^٢ و) $\int \frac{دس}{س + هـ}$ ، (حيث هـ العدد النيبيري)

ز) $\int \frac{١ + ظا^٢ س}{ظا س}$ دس ح) $\int$ ظا س دس

ط) $\int \frac{جا٣س}{١ + جتا٣س}$ دس ي) $\int \frac{١}{\sqrt{س}(٢ + \sqrt{س})}$ دس

٢٨٩

الأخطاء الشائعة

الدرس ٤ - ٩ اقتران الأسي الطبيعي (مشتقتة وتكامله)

النتاجات الخاصة

- يجد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي.
- يجد تكامل الاقتران الأسي الطبيعي.

المفاهيم والمصطلحات

الاقتران الأسي الطبيعي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- راجع الطلبة بمفهوم الاقتران الأسي.
- عرض نظرية (١) وبرهنها على السبورة.
- ناقش الأمثلة (١، ٢، ٣) مع الطلبة، وكلفهم بحل تدريب (١) في الدفاتر.
- بيّن للطلبة أن $\int$ هـ^س^. د س = هـ^س^ + جـ، ثم ناقش معهم المثالين (٤، ٥) على السبورة.
- كلّف الطلبة جميعهم بحل تدريب (٢) في الدفاتر.
- كلّف الطلبة جميعهم بحل تدريب (٤) في الدفاتر.

معلومات إضافية للطالب

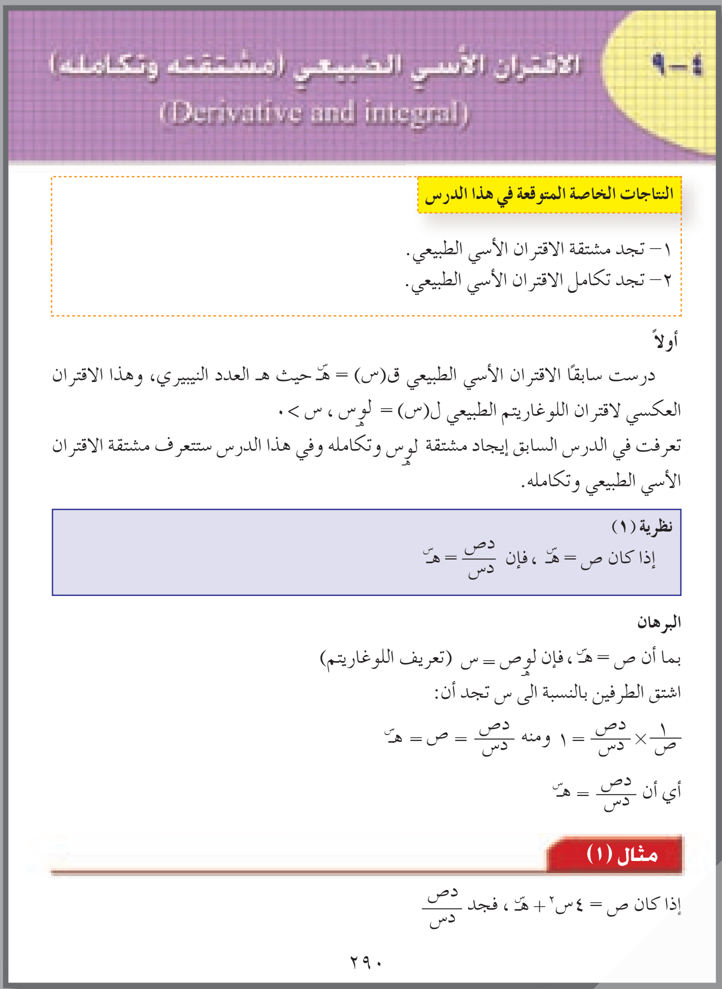
- هناك اقترانات على الصورة ص = $[\text{ق (س)}]^{\text{هـ (س)}}$ ولإيجاد مشتقة مثل هذه الاقترانات نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فتصبح

$\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ = هـ (س) $\text{لو}_{\text{هـ}}$ ق (س)، ثم نشتق الطرفين فيصبح

$$\frac{\text{١}}{\text{ص}} \; \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـَ (س)} \; \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ق (س)} + \text{هـ (س)} \times \frac{\text{قَ (س)}}{\text{ق (س)}}$$

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.



٤-٩ الاقتران الأسي الطبيعي (مشتقته وتكامله)
(Derivative and integral)

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تجد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي.
٢- تجد تكامل الاقتران الأسي الطبيعي.

أولاً

درست سابقًا الاقتران الأسي الطبيعي ق(س) = $\text{هـ}^{\text{س}}$ حيث هـ العدد النيبيري، وهذا الاقتران العكسي لاقتران اللوغاريتم الطبيعي ل(س) = $\text{لو}_{\text{هـ}}$س ، س > ٠.
تعرفت في الدرس السابق إيجاد مشتقة $\text{لو}_{\text{هـ}}$س وتكامله وفي هذا الدرس ستتعرف مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي وتكامله.

نظرية (١)
إذا كان ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

البرهان

بما أن ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، فإن $\text{لو}_{\text{هـ}}$ص = س (تعريف اللوغاريتم)
اشتق الطرفين بالنسبة الى س تجد أن:

$$\frac{\text{١}}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{١} \quad \text{ومنه} \quad \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}$$

أي أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{هـ}^{\text{س}}$

مثال (١)

إذا كان ص = ٤$\text{س}^{\text{٢}}$ + $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، فجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

٢٩٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

- يعامل بعض الطلبة الاقتران الذي على الصورة ص = $\text{أ}^{\text{س}}$ على أنه اقتران أسي طبيعي فيجدوا:

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ}^{\text{س}}$$

$$\int \text{أ}^{\text{س}} \,.\, \text{د س} = \text{أ}^{\text{س}} + \text{جـ}.$$

الحل

استخدم قواعد الاشتقاق والنظرية السابقة لنجد أن:

$$\frac{دص}{دس} = ٨س + هـ^{س}$$

مثال (٢)

إذا كان ص = $هـ^{س^٣+١}$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$

الحل

افرض أن ع = $س^٣ + ١$ ومنه $\frac{دع}{دس} = ٣س^٢$

فيكون ص = $هـ^{ع}$ ، ومنه $\frac{دص}{دع} = هـ^{ع}$

استخدم قاعدة السلسلة لتجد أن:

$$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس} = هـ^{ع} \times ٣س^٢ = ٣س^٢ هـ^{س^٣+١}$$

وبشكل عام إذا كان ق(س) = $هـ^{م(س)}$ فإن قَ(س) = مَ (س) $هـ^{م(س)}$

مثال (٣)

إذا كان ق(س) = $هـ^{\frac{١}{س}}$ فجد قَ (س)

الحل

$$قَ(س) = \frac{-١}{س^٢} هـ^{\frac{١}{س}}$$

تدريب (١)

إذا كان ص = $هـ^{جتاس}$ ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$

مثال (٤)

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

١) ص = $لو_{هـ} هـ^{س^٢}$ ٢) ص = $هـ^{لو_{هـ} س^٣}$

الحل

١) استخدم قوانين اللوغاريتمات لكتابة الاقتران ص على الصورة:

ص = $س^٢ لو_{هـ} هـ = س^٢$ ($لو_{هـ} هـ^{س^٢} = س^٢ لو_{هـ} هـ = س^٢$)

ومنه $\frac{دص}{دس} = ٢س$

٢) يمكنك تبسيط الاقتران ص بأن تأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين

$لو_{هـ} ص = لو_{هـ} هـ^{لو_{هـ} س^٣}$ ومنه $لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^٣ \times لو_{هـ} هـ$ (قوانين اللوغاريتمات)

ومنه $لو_{هـ} ص = لو_{هـ} س^٣$

أي أن ص = $س^٣$ (قوانين اللوغاريتمات)

$$\frac{دص}{دس} = ٣س^٢$$

تدريب (٢)

إذا كان ص = س $لو_{هـ} هـ^{س^٢}$ ، فجد $\frac{دص}{دس}$

بيّن لهم أن ص = $أ^{س}$ ليس اقترانًا أسيًا طبيعيًّا ولا يجوز إيجاد مشتقة وتكامل على الصورة السابقة، ولإيجاد مشتقة نأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ثم نشتق.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد مشتقة الاقترانات الآتية:

• ص = $هـ^{س^٢+١}$ • ص = $لو_{هـ} هـ^{\sqrt{س}}$

– جد تكامل ما يأتي:

• $\int هـ^{٢س} دس$ • $\int جتاس\, هـ^{جاس} د س$

إثراء

– جد تكامل $\int س\, هـ^{\sqrt{س}} د س$.

– كلف الطلبة بحل السؤال السابع في كتاب الطالب كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية : القلم والورقة.

من خلال متابعة الطلبة أثناء حل التدريبات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد مفهوم الاقتران الأسي في الصف الأول ثانوي العلمي.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يجد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي.
- يجد تكامل الاقتران الأسي الطبيعي.

المفاهيم والمصطلحات

الاقتران الأسي الطبيعي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التعلم التعاوني

- قسم الطلبة إلى مجموعات تعاونية.
- وزّع على المجموعات ورقة عمل (٣-١٣)، وكلف كل مجموعة بتنفيذ محتوى الورقة.
- بعد انتهاء المجموعات من تنفيذ ورقة العمل كلف ست مجموعات بعرض حلول بنود ورقة العمل على السبورة بحيث تعرض كل مجموعة بندًا واحدًا فقط.
- إجراء حوار بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

ثانيًا

بما أن الاقتران الأسي ص = هـ^س متصل وقابل للاشتقاق حيث $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ^س فإن:

$\int$ هـ^س دس = هـ^س + جـ

مثال (٥)

جد $\int$ ٢جتا ٢س هـ^(جا٢س) دس

الحل

أفرض أن ص = جا٢س ، ومنه دص = ٢جتا٢س دس ، استخدم التكامل بالتعويض لتجد أن:

= $\int$ ٢جتا ٢س هـ^(جا٢س) دس = $\int$ هـ^ص دص

= هـ^ص + جـ

= هـ^(جا٢س) + جـ

مثال (٦)

جد $\int$ هـ^(٢س+١) دس

الحل

افرض ص = ٢س + ١ ، ومنه دص = ٢دس ⇐ دس = $\frac{١}{٢}$ دص

إذن $\int$ هـ^(٢س+١) دس = $\int$ هـ^ص × $\frac{١}{٢}$ دص = $\frac{١}{٢}$ هـ^ص + جـ

= $\frac{١}{٢}$ هـ^(٢س+١) + جـ

تدريب (٣)

جد $\int_{٠}^{١}$ س^٢ هـ^(س^٣+١) دس

٢٩٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

- يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد تكامل على الصورة $\int$ ق (س) هـ^(م(س)) د س ، فيستخدمون طريقة التكامل بالأجزاء، ويصلون إلى طريق مسدود، وضّح لهم أن هذا التكامل يحل بالتعويض ويفرض هنا ص = م (س) وليس ص = ق (س).

الزمن المتوقع	ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int هـ^{٢س+١}\,دس$.
- $\int س^{٢}\,هـ^{١-س^{٣}}\,دس$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٧)

جد $\int س\,هـ^{س}\,دس$

الحل

افرض ق = س ، $دم = هـ^{س}\,دس$

ومنه د ق = دس ، $م = هـ^{س}$

إذن $\int س\,هـ^{س}\,دس = س\,هـ^{س} - \int هـ^{س}\,دس$

$= س\,هـ^{س} - هـ^{س} + جـ$

مثال (٨)

جد $\int هـ^{\sqrt{س}}\,دس$

الحل

أفرض $ص = \sqrt{س}$ ، فتكون $ص^{٢} = س$ ، ومنه ٢ ص دص = دس

إذن $\int هـ^{\sqrt{س}}\,دس = \int هـ^{ص} \times ٢ص\,دص = ٢\int ص\,هـ^{ص}\,دص$

$= ٢(ص\,هـ^{ص} - هـ^{ص}) + جـ$ كما في المثال السابق (٧)

$= ٢\sqrt{س}\,هـ^{\sqrt{س}} - ٢هـ^{\sqrt{س}} + جـ$

تدريب (٤)

جد التكاملات الآتية:

١) $\int قا^{٢}س\,هـ^{\sqrt{ظاس}}\,دس$

٢) $\int هـ^{أس+ب}\,دس$

٢٩٤

تمارين ومسائل

١) جد مشتقة كل من الاقترانات الآتية:

أ) $ص = س + هـ^{س}$ ب) $ص = س^{٢} + هـ^{٢}$

جـ) $ص = جا\,هـ^{س}$ د) $ص = (هـ^{س})^{٢}$

هـ) $ص = \frac{هـ^{س}+١}{هـ^{س}}$ و) $ص = \sqrt{هـ^{س}}$

ز) $ص = \sqrt{هـ^{س} + ٢س}$ ح) ص = [illegible] عندما $س = \frac{\pi}{٣}$

٢) إذا كان $ص = جاس\,هـ^{س}$ ،

أثبت أن $ص''' - ٢ص'' + ٢ص' = $ صفراً

٣) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ص = (س-١)\,هـ^{س} + ٣\,لو\,س + ٢$ عند النقطة (١، ٢)

٤) جد التكاملات الآتية:

أ) $\int هـ^{[illegible]}\,دس$ ب) $\int س\,هـ^{س}\,دس$ جـ) $\int هـ^{س}\,دس$

د) $\int جا٢س\,هـ^{[illegible]}\,دس$ هـ) $\int س\,هـ^{س}\,دس$ و) $\int \frac{هـ^{[illegible]}}{س^{٢}}\,دس$

٥) جد $\int \frac{هـ^{س}}{٤+هـ^{س}}\,دس$

٦) إذا كان $ص = هـ^{أس}$ فجد قيمة أ التي تحقق المعادلة $ص'' - ٥ص' + ٦ص = ٠$

٧) إذا كان $هـ^{س ص} = س + ص$ ، فأثبت أن: $\frac{دص}{دس} = \frac{١ - س\,ص - ص^{٢}}{س^{٢} + س\,ص - ١}$

٢٩٥

النتاجات الخاصة

– يجد تكامل اقترانات نسبية باستخدام الكسور الجزئية.

المفاهيم والمصطلحات

الكسور الجزئية.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– راجع الطلبة بتجزئة الكسور، ثم اعرض لهم التكاملين الآتيين:

$$\int \frac{س}{س^٢ - ١}\, دس ، \int \frac{٢}{س^٢ - ١}\, دس$$

– بيّن لهم أن البسط في التكامل الأول هو مشتقة للمقام أما في التكامل الثاني فإن البسط ليس مشتقة للمقام.

– بيّن للطلبة أنه من الممكن إيجاد التكامل الثاني وذلك بتجزئة الكسر $\frac{٢}{س^٢ - ١}$ إلى كسور جزئية، ثم إيجاد تكامل هذه الكسور.

– حل التكامل بطريقة تجربة الكسور، ثم كلف الطلبة بحل تدريب (١) في الدفاتر.

– ناقش الأمثلة (٢، ٣، ٤) مع الطلبة على السبورة، ثم كلفهم بحل التدريبات (٢، ٣، ٤) في الدفاتر.

– كلف الطلبة جميعهم بحل الأسئلة (١، ٢، ٣، ٤) كواجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

– يمكن تجزئة الكسر $\frac{أس + ب}{(س + جـ)^٢}$ على الصورة

$$\frac{أ_١}{(س + جـ)^٢} + \frac{أ_٢}{س + جـ}$$

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٤-١٠ التكامل بالكسور الجزئية

Integration by Partial Fractions

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تجد تكامل اقترانات نسبية باستخدام الكسور الجزئية.

يمكنك إيجاد تكامل اقتران نسبي إذا كان بسطه هو مشتقة مقامه أو مشتقة مقامه مضروباً في عدد باستخدام التكامل بالتعويض أو باستعمال القاعدة:

$$\int \frac{ق'(س)}{ق(س)}\, دس = لو_{هـ} |ق(س)| + جـ$$

لكن إذا كان الاقتران نسبيًّا وليس لبسطه علاقة بمشتقة مقامه وأمكن تحليل مقامه إلى عوامله فإنه يمكن إيجاد تكامله بطريقة تسمى التكامل بالكسور الجزئية.

تذكر

يسمى ق(س) اقترانا نسبياً إذا أمكن كتابته على الصورة $ق(س) = \frac{م(س)}{ل(س)}$ حيث م(س) ، ل(س) كثيرا حدود.

تحليل الاقتران النسبي إلى كسور جزئية:

يمكنك كتابة $\frac{٢}{س^٢ - ١}$ على صورة مجموع أو فرق بين كسرين مقام كل منهما من الدرجة الأولى كالآتي:

$$\frac{٢}{س^٢ - ١} = \frac{٢}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س - ١}$$

وبحل هذه المعادلة تجد أن أ = ١، ب = −١

أي أن: $\frac{٢}{س^٢ - ١} = \frac{١}{س - ١} + \frac{-١}{س + ١}$

يسمى الطرف الأيسر من هذه المعادلة تجزئة المقدار $\frac{٢}{س^٢ - ١}$ إلى كسور جزئية.

لاحظ أنه من الصعب إيجاد $\int \frac{٢}{س^٢ - ١}\, دس$ أو $\int \frac{١}{(س - ١)(س + ١)}\, دس$ مباشرة بينما يسهل إيجاد كل من: $\int \frac{١}{س - ١}\, دس$، $\int \frac{-١}{س + ١}\, دس$

٢٩٦

تدريب (١)

جد $\int_{٠}^{٢} \frac{٢}{س^٢ - ٤س + ٣}\, دس$

ملاحظة

١) عند تجزئة الاقتران النسبي يجب أن يكون مقام كل من الاقترانات الجزئية عاملاً من عوامل مقام الاقتران الأصلي، وأن تكون درجة بسط الاقتران النسبي أقل من درجة مقامه.
٢) ستقتصر دراستنا في هذا الدرس على اقترانات نسبية مقامها من الدرجة الثانية ويمكن تحليله.

مثال (٢)

جد $\int_{٠}^{١} \frac{٦س + ٧}{س^٢ - س - ٦}\, دس$

الحل

$$\frac{٦س + ٧}{س^٢ - س - ٦} = \frac{٦س + ٧}{(س - ٣)(س + ٢)} = \frac{أ}{س - ٣} + \frac{ب}{س + ٢} \quad ومنها$$

$$٦س + ٧ = أ(س + ٢) + ب(س - ٣)$$

بوضع س = ٣ تجد أن أ = ٥

بوضع س = −٢ تجد أن ب = ١

إذن $\int_{٠}^{١} \frac{٦س + ٧}{س^٢ - س - ٦}\, دس = \int_{٠}^{١} \frac{٥}{س - ٣}\, دس + \int_{٠}^{١} \frac{١}{س + ٢}\, دس$

$$= ٥ [لو_{هـ} |س - ٣|]_{٠}^{١} + [لو_{هـ} |س + ٢|]_{٠}^{١}$$

$$= ٥(لو_{هـ} ٢ - لو_{هـ} ٣) + لو_{هـ} ٣ - لو_{هـ} ٢$$

$$= ٤ لو_{هـ} ٢ - ٤ لو_{هـ} ٣ = ٤ لو_{هـ} \frac{٢}{٣}$$

٢٩٨

الأخطاء الشائعة

– يخطئ بعض الطلبة عند إيجاد الآتية: $\int \frac{دس}{(س + أ)^٢}$ فيستخدمون الكسور الجزئية على الصورة الآتية:

$$\frac{١}{(س + أ)^٢} = \frac{أ_١}{س + أ} + \frac{أ_٢}{س + أ}$$

بيّن لهم أن $\frac{أ_١}{س + أ} + \frac{أ_١}{س + أ} = \frac{أ_١ + أ_٢}{س + أ} \neq \frac{١}{(س + أ)^٢}$

لإيجاد تكامل اقتران نسبي بهذه الصورة نلجأ إلى تجزئته إلى كسور جزئية ومن ثم إيجاد تكامله.
والمثال (١) يوضح كيفية إجراء ذلك وإيجاد قيم كل من أ ، ب

مثال (١)

جد $\int \frac{٢}{\text{س}^٢ - ١}\,\text{د س}$

الحل

$$\frac{٢}{\text{س}^٢ - ١} = \frac{٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

افرض أنه يمكن كتابة $\frac{٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$ على الصورة:

$$\frac{٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ١} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ١} = \frac{\text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

حيث أ،ب عددان ثابتان.

من هذه المساواة يمكنك استنتاج أن:

$٢ = \text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ١)$ (تساوي كسرين لهما المقام نفسه)

يمكنك إيجاد أ ، ب من استخدام خواص تساوي كثيري حدود:

$٢ = \text{س}(\text{أ} + \text{ب}) + (\text{أ} - \text{ب})$ لتحصل على أ + ب = ٠ ، أ − ب = ٢ ومن ثم حل المعادلتين لتحصل على أ = ١، ب = − ١ يمكنك كذلك إيجاد أ،ب بإعطاء قيم محددة لـ س ولتكن أصفار المقام

عندما س = −١ فإن ٢ = −٢ ب ومنه ب = −١

عندما س = ١ فإن ٢ = ٢ أ ومنه أ = ١

إذن $\int \frac{٢}{\text{س}^٢ - ١}\,\text{دس} = \int \frac{٢}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}\,\text{دس}$

$$= \int \frac{١}{\text{س} - ١}\,\text{دس} + \int \frac{-١}{\text{س} + ١}\,\text{دس}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

تدريب (٢)

جد $\int_{١}^{٣} \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - \text{س} - ٢}\,\text{دس}$.

مثال (٣)

جد $\int \frac{\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س} - ١}\,\text{دس}$.

الحل

لاحظ أنه من الصعب إيجاد التكامل بالطرق التي درستها، لأن درجة البسط أكبر من درجة المقام، لذلك أجرِ عملية القسمة الطويلة أو التركيبية.

لتكتب الاقتران النسبي $\frac{\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س} - ١}$ باستخدام القسمة الطويلة على صورة اقترانين أحدهما كثير حدود والآخر نسبي ودرجة بسطه أقل من درجة مقامه.

$$\begin{array}{r|l} \text{س}^٢ + \text{س} + ٢ & \\ \hline \text{س}^٣ + \text{س} & \text{س} - ١ \\ \mp \text{س}^٣ \pm \text{س}^٢ & \\ \hline \text{س}^٢ + \text{س} & \\ \mp \text{س}^٢ \pm \text{س} & \\ \hline ٢\text{س} & \\ \mp ٢\text{س} \pm ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$\frac{\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س} - ١} = (\text{س}^٢ + \text{س} + ٢) + \frac{٢}{\text{س} - ١}$$

$$\int \frac{\text{س}^٣ + \text{س}}{\text{س} - ١}\,\text{دس} = \int (\text{س}^٢ + \text{س} + ٢ + \frac{٢}{\text{س} - ١})\,\text{دس}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ + \frac{١}{٢}\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \text{جـ}$$

تدريب (٣)

جد $\int \frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{\text{س} + ١}\,\text{دس}$

$$\text{وأن} \int \frac{١}{(\text{س} + \text{أ})^٢}\,\text{د س} = \int (\text{س} + \text{أ})^{-٢}\,\text{د س}$$

$$= \frac{(\text{س} + \text{أ})^{-١}}{-١} + \text{جـ} = \frac{-١}{\text{س} + \text{أ}} + \text{جـ}$$

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

- $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + ٣\text{س} + ٢}\,\text{د س}$
- $\int \frac{١}{\text{س}^٢ - ٩}\,\text{د س}$

إثراء

١) كلف الطلبة بحل السؤال الثامن كنشاط إثرائي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

بمتابعة حلول التدريبات.

– **الاستراتيجية**: التواصل.

– **الأداة**: السجل القصصي.

دوّن بعض الملاحظات على أداء الطلبة واتجاهاتهم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– ورد مفهوم تجزئة الكسور في الصف الأول الثانوي العلمي.

مصادر التعلّم

كتاب الطالب

المادة المحوسبة

الدرس ٤-١٠ التكامل بالكسور الجزئية

النتاجات الخاصة

– يجد تكامل اقترانات نسبية وكسرية باستخدام الكسور الجزئية.

المفاهيم والمصطلحات

الكسور الجزئية

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

–ناقش الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.

– ناقش الطلبة بالمثالين (٥ ، ٦) على السبورة، ثم كلفهم بحل تدريب (٥) في الدفاتر.

الاستراتيجية : **التعلم التعاوني**

– قسم الطلبة إلى مجموعات تعاونية، وكلّفهم بحل الأسئلة (٥، ٦، ٧) من كتاب الطالب).

– بعد انتهاء المجموعات من حل الأسئلة، كلّف ثلاث مجموعات بعرض الحل على السبورة بحيث تعرض كل مجموعة سؤالاً واحدًا.

– إجراء حوار بين المجموعات للوصول إلى الحل الصحيح.

معلومات إضافية

مثال (٤)

جد $\int \frac{\text{س}^2+3\text{س}-11}{\text{س}^2+2\text{س}-15}\,\text{دس}$.

الحل

أجر عملية القسمة الطويلة لتحصل على:

$$\frac{\text{س}^2+3\text{س}-11}{\text{س}^2+2\text{س}-15} = 1 + \frac{\text{س}+4}{\text{س}^2+2\text{س}-15}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline \text{س}^2+3\text{س}-11 & \text{س}^2+2\text{س}-15 \\ \mp\text{س}^2\mp2\text{س}\pm15 & \\ \hline \text{س}+4 & \end{array}$$

جزِّئ $\frac{\text{س}+4}{\text{س}^2+2\text{س}-15}$ إلى كسور

$$\frac{\text{س}+4}{\text{س}^2+2\text{س}-15} = \frac{\text{س}+4}{(\text{س}+5)(\text{س}-3)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}+5} + \frac{\text{ب}}{\text{س}-3}$$

$\text{س}+4 = \text{أ}(\text{س}-3) + \text{ب}(\text{س}+5)$

افرض س = ٣ فيكون ٧ = ٨ ب ، ومنها ب = $\frac{7}{8}$ ،

افرض س = −٥ فيكون −١ = −٨ أ ، ومنها أ = $\frac{1}{8}$

إذن $\int \frac{\text{س}^2+3\text{س}-11}{\text{س}^2+2\text{س}-15}\,\text{دس} = \int \left(1 + \frac{\text{س}+4}{\text{س}^2+2\text{س}-15}\right)\text{دس}$

$$= \int \text{دس} + \int \frac{\frac{1}{8}}{\text{س}+5}\,\text{دس} + \int \frac{\frac{7}{8}}{\text{س}-3}\,\text{دس}$$

$$= \text{س} + \frac{1}{8}\,\text{لوهـ}\left|\text{س}+5\right| + \frac{7}{8}\,\text{لوهـ}\left|\text{س}-3\right| + \text{جـ}$$

تدريب (٤)

جد $\int \frac{2\text{س}^3-\text{س}^2+3\text{س}}{\text{س}^2-3\text{س}-4}\,\text{دس}$

٣٠٠

مثال (٦)

جد $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-9}\,\text{دس}$

الحل

يمكن كتابة $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}-9}\,\text{دس}$ على الصورة $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^2-9}\,\text{دس}$

تلاحظ لو أنه تم فرض ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ لأصبح المقام على شكل ص^2-9 ، ويمكن استخدام الكسور الجزئية عند ذلك.

إذن ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ ، ومنها دص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ دس

وعليه، فإن $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^2-9} = \int \frac{1}{\text{ص}^2-9}\,\text{دص}$

$$\frac{1}{\text{ص}^2-9} = \frac{1}{(\text{ص}-3)(\text{س}+3)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-3} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+3}$$

أي أن $1 = \text{أ}(\text{ص}+3) + \text{ب}(\text{ص}-3)$

عندما ص = ٣ فإن أ = $\frac{1}{6}$ ، وعندما ص = −٣ فإن ب = $-\frac{1}{6}$

إذن $\int \frac{1}{\text{ص}^2-9}\,\text{دص} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\text{ص}-3}\,\text{دص} + \frac{-1}{6}\int \frac{1}{\text{ص}+3}\,\text{دص}$

$$= \frac{1}{6}\,\text{لوهـ}\left|\text{ص}-3\right| - \frac{1}{6}\,\text{لوهـ}\left|\text{ص}+3\right| + \text{جـ}$$

$$= \frac{1}{6}\,\text{لوهـ}\left|\text{هـ}^{\text{س}}-3\right| - \frac{1}{6}\,\text{لوهـ}\left|\text{هـ}^{\text{س}}+3\right| + \text{جـ}$$

تدريب (٥)

احسب كلًا من التكاملين الآتيين:

١) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-1}{\sqrt[3]{\text{س}^2}-4}$

٢) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5\,\text{ظا}^2\text{س}-3\,\text{ظا}\,\text{س}-2}\,\text{دس}$

٣٠٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.

٢) ملحق أدوات التقويم.

٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع
ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد التكاملات الآتية:

• $\int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س} - ١}\ \text{د}$

• $\int_{١}^{٤} \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\ \text{د س}$

إثراء

– جد التكاملات الآتية:

٢) $\int \frac{١}{\text{س}(\sqrt{\text{س}} - ١)}\ \text{د س}$

٣) $\int \frac{\sqrt{\text{س} + ٢}}{\sqrt{\text{س} + ١}}\ \text{د س}$

استراتيجيات التقويم وأدواته :

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

بمتابعة الواجب البيتي ومتابعة حل التدريبات.

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢ – ٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٥)

جد $\int \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\ \text{دس}$

الحل

افرض ص $= \sqrt{\text{س}}$ فتكون ص^2 = س ومنها ٢ ص د ص = د س

إذن $\int \frac{١}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\ \text{دس} = \int \frac{٢\text{ص دص}}{\text{ص}^2 - ٢\text{ص} - ٣}$

والآن استخدم الكسور الجزئية لإيجاد $\int \frac{٢\text{ص دص}}{\text{ص}^2 - ٢\text{ص} - ٣}$

$\frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^2 - ٢\text{ص} - ٣} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ١}$

ومنه ٢ص = أ (ص + ١) + ب(ص − ٣)

وبوضع ص = ٣ ينتج ٦ = ٤أ $\Leftarrow$ أ = $\frac{٣}{٢}$

وبوضع ص = −١ ينتج −٢ = −٤ب $\Leftarrow$ ب = $\frac{١}{٢}$

إذن $\int \frac{٢\text{ص}}{\text{ص}^2 - ٢\text{ص} - ٣}\ \text{دص} = \frac{٣}{٢}\int \frac{١}{\text{ص} - ٣}\ \text{دص} + \frac{١}{٢}\int \frac{١}{\text{ص} + ١}\ \text{دص}$

$= \frac{٣}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - ٣| + \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} + ١| + \text{جـ}$

$= \frac{٣}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} - ٣| + \frac{١}{٢}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |\sqrt{\text{س}} + ١| + \text{جـ}$

٣٠١

تمارين ومسائل

جد التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{\text{دس}}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)}$

٢) $\int \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^2 + \text{س} - ٢}\ \text{دس}$

٣) $\int \frac{٢\text{س}^2 + ٣}{\text{س}^2 - \text{س}}\ \text{دس}$

٤) $\int \frac{\text{س}^3 + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^2 - ٩}\ \text{دس}$

٥) $\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ١}\ \text{دس}$

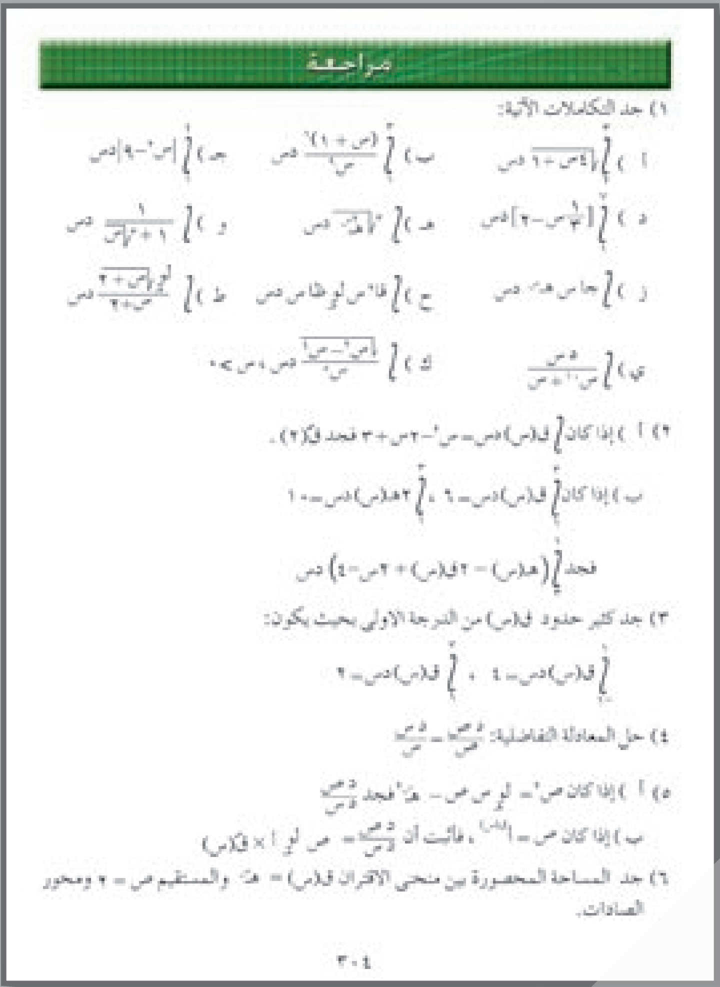
٦) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤}\ \text{دس}$

٧) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٤}\ \text{دس}$

٨) $\int \frac{\text{س دس}}{\text{س}^4 + \text{س}^2}$ ، س > ٠

٣٠٣

الأخطاء الشائعة



مراجعة

١) جد التكاملات الآتية:

٣) جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث يكون:

٤) حل المعادلة التفاضلية:

٦) جد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = هـ^س والمستقيم ص = ٢ ومحور الصادات.

٣٠٤

مراجعة، اختبار ذاتي

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة.

المفاهيم والمصطلحات

المصطلحات والمفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

المراجعة

الاستراتيجية: التعليم التعاوني

– راجع الطلبة بالمفاهيم والمصطلحات التي وردت في الوحدة.

– وزّع الطلبة إلى مجموعات، وكلّف كل مجموعة بحل سؤال ومناقشته على السبورة.

الاختبار الذاتي

– زوّد الطلبة بالإجابات النهائية للأسئلة ليتمكنوا من تقييم تعلمهم ذاتيًا.

– كلّف الطلبة بتنفيذ حلول الأسئلة كواجب بيتي.

– ناقش الأسئلة التي واجه الطلبة صعوبات في حلها، واحصر الأخطاء المشتركة بين الطلبة للتعرّف إلى أسبابها وطرق علاجها.

معلومات إضافية

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.

٢) ملحق أدوات التقويم.

٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة واحدة

مراعاة الفروق الفردية

– تابع الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، وتقديم المساعدة لهم قدر الإمكان مع محاورة الطلبة للتعرف إلى سبب الإخفاق.
– أعطِ فرصة للحل بأكثر من طريقة لبعض الأسئلة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الإستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢ – ٤).
– **الإستراتيجية**: القلم والورقة.
– **الأداة**: الاختبار الذاتي.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

اختبار ذاتي

١) يتألف هذا السؤال من (١٠) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة منها (٤) إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة:

(١) $\int_{٠}^{٤} (\text{س} - ٢)\,\text{د س} =$

أ) ١٤ ب) ٦ جـ) صفر د) ٢

(٢) إذا كان ق اقترانًا معرفًا على [–١، ٣] ، وكان ٢ ≥ ق (س) ≥ ٣، فإن العددين م،ن حيث م ≥ $\int_{-١}^{٣} \text{ق (س) د س}$ ≥ ن تساوي:

أ) ٢ ، ٩ ب) –٢ ، ٩ جـ) ٢ ، ٣ د) ٨ ، ١٢

(٣) حل المعادلة التفاضلية الآتية: $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{ص}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ هو:

أ) ص = $\text{هـ}^{\text{ظاس+جـ}}$ ب) ص = $\text{هـ}^{\text{قا س+جـ}}$ جـ) ص = ظا س+جـ د) ص= قا س+جـ

(٤) إذا كان $\int_{٠}^{٢} \text{ق(س) د س} = ٤$ ، $\int_{٣}^{٢} ٢\text{ق(س) د س} = -٤$ ، فإن $\int_{٠}^{٣} \text{ق(س) د س}$ تساوي:

أ) صفر ب) ٨ جـ) ٢ د) ٦

(٥) إذا كان ق(س) = $\int_{٢}^{٢} (\text{س}^{٢} - ١)\text{دس}$، فإن قَ(س) تساوي:

أ) ٢س ب) صفرًا جـ) $\text{س}^{٢} - ١$ د) ٢س –١

(٦) $\int_{٠}^{\text{هـ} - ١} \frac{١}{\text{س} + ١}\,\text{دس} =$

أ) ١ ب) –١ جـ) $\text{لو}_{\text{هـ}}$(هـ –١) د) صفرًا

٣٠٥

(٧) إذا كان $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س ق(س)د س} = ٤$ ، فإن $\int_{٠}^{٢} \text{ق}(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}})\,\text{د س}$ تساوي:

أ) ١ ب) ٨ جـ) ٢ د) ٤

(٨) إذا كان ص = $\text{هـ}^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٢}}$ ، فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = $-\frac{١}{٢}$ تساوي:

أ) $-\frac{١}{٢}$ ب) –٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ١

(٩) $\int \left(\frac{-١}{\text{س}^{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{١}{\text{س}}\right) \text{د س} =$

أ) $\frac{١}{\text{س}}$+جـ ب) $\text{لو}_{\text{هـ}}(\frac{١}{\text{س}})$+جـ جـ) $\frac{١}{\text{س}}\text{لو}_{\text{هـ}}(\frac{١}{\text{س}}) - \frac{١}{\text{س}}$+جـ د) $\frac{-١}{\text{س}}$+جـ

(١٠) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} \text{قا}^{٢}\text{س دس} =$

أ) ظا س+جـ ب) ١ جـ) $\frac{١}{٣}\text{قا}^{٣}$س+جـ د) – ١

٢) جد التكاملات الآتية:

أ) $\int \text{س}^{\text{ن}} \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^{٣}\text{دس}$ ،ن عدد طبيعي. ب) $\int \frac{\text{د س}}{\sqrt{١ - \sqrt{\text{س}}}}$

جـ) $\int \frac{\text{قا}^{٤}\text{س}}{\text{ظا}^{٢}\text{س} - \text{ظا س} - ٢}\,\text{دس}$ د) $\int (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^{٢}\,\text{دس}$

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} -\text{س} & ، \text{س} \geq ٠ \\ ٣\text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ ، فجد $\int_{-٢}^{٣} \text{ق(س)د س}$

٤) إذا كان $\int \text{ق(س)د س} = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + \text{لو}_{\text{هـ}}$ جا س + جـ ، فجد قَ(س)

٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) = |س –٢| ،ومنحنى ص = ١٠ – $\text{س}^{٢}$ ومحور الصادات في الربع الأول.

٣٠٦

الوحدة الخامسة

القطوع المخروطية

الدرس ٥-١ القطع المخروطي

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع المخروطي هندسيًّا.

المفاهيم والمصطلحات

القطع المخروطي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

- مراجعة تعريف المخروط.
- عرض تعريف القطوع المخروطية.

معلومات إضافية

٥-١ القطع المخروطي
Conic Sections

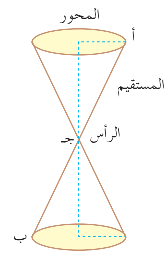
النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تتعرف القطع المخروطي هندسيًّا.

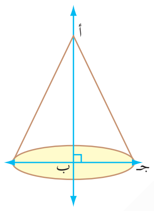
إذا قمت بتدوير مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد أضلاع القائمة، فإنك ستحصل على مخروط دائري قائم لاحظ الشكل (٥-١).

أما في الشكل (٥-٢) فإذا دار المستقيم أ ب حول محور ثابت دورة كاملة بحيث يمر المستقيم الدائر بنقطة ثابتة على المحور وتبقى الزاوية بين المستقيم أ ب ومحور الدوران ثابتة، فإنه ينتج من الدوران مخروط دائري قائم مزدوج، يتكون من فرعين يتقاطعان في الرأس.

وإذا تقاطع مستوى معين مع مخروط دائري قائم مزدوج في أوضاع مختلفة، فإنه ينتج منحنيات مستوية تسمى **القطوع المخروطية** (انظر الاشكال (٥-٣، ٤، ٥، ٦).



الشكل (٥-٢)



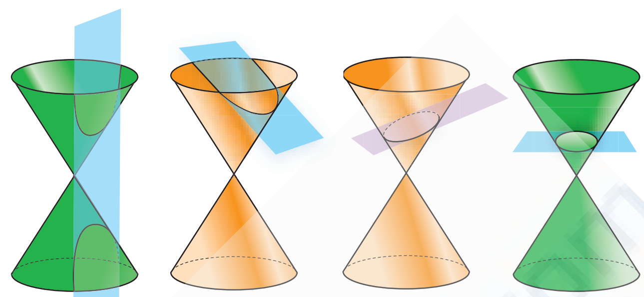
الشكل (٥-١)

٣٠٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.



دائرة
الشكل (٥–٣)

قطع ناقص
الشكل (٥–٤)

قطع مكافيء
الشكل (٥–٥)

قطع زائد
الشكل (٥–٦)

١) إذا كان المستوى القاطع عموديًّا على المحور ولا يحتوي على الرأس، فإن تقاطع **المستوى** مع السطح المخروطي في هذه الحالة يسمى **دائرة**. لاحظ الشكل (٥–٣).

٢) إذا كان المستوى القاطع مائلاً قليلاً على المحور ويقطع فرعًا واحدًا، فإن تقاطع المستوى مع السطح المخروطي في هذه الحالة يسمى **قطعًا ناقصًا**. لاحظ الشكل(٥–٤).

٣) **إذا زاد ميل** المستوى القاطع ليصبح موازيًا لمستقيم على سطح المخروط ويقطع فرعًا واحدًا **فإن تقاطع** المستوى مع السطح المخروطي في هذه الحالة يسمى **قطعًا مكافئًا**. لاحظ الشكل (٥–٥).

٤) **إذا قطع المستوى القاطع فرعي** المخروط ولا يحتوي على نقطة الرأس، فإن التقاطع في هذه الحالة يسمى **قطعًا زائدًا**. لاحظ الشكل (٥–٦).

٣١٠

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

مراعاة الفروق الفردية

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢ – ٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٢ المحل الهندسي

النتاجات الخاصة

– يحدّد معادلة تمثّل محلاً هندسيًّا معطى متضمنًا :
(المستقيمات، الدوائر، القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد).

المفاهيم والمصطلحات

المحل الهندسي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي : مفهوم المحل الهندسي، المسافة بين نقطتين،بعد نقطة مستقيم علمت معادلته.
- ما المقصود بالمحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي؟
- جد بعد النقطة (١ ، ٤) عن المستقيمات : ص = ٧ ، ٣ص = ٣س – ٤ .

– ناقش مع الطلبة مقدّمة الدرس في كتاب الطالب.

الاستراتيجية: **التعلم التعاوني**

– قسم الطلبة إلى مجموعات تعاونية من (٤–٦) طلاب، واطلب من كل مجموعة تنفيذ ورقة العمل (٣ –٤) التي تهدف إلى وصف المحل الهندسي ومعادلته.
– تجول بين الطلبة في أثناء تنفيذ ورقة العمل وأرشدهم، للتوصل إلى وصف المحل الهندسي ومعادلته .
– اعرض نتائج الطلبة، وناقش استنتاجاتهم، واكتب الاستنتاجات النهائية على السبورة مقدّمًا مجموعة كافية من الأمثلة لدعم استنتاجات الطلبة التي توصلوا اليها.
– ناقش الطلبة في حل مثال (١) من كتاب الطالب على السبورة، من أجل تعزيز وصف المحل الهندسي ومعادلته.
– اطلب الى الطلبة حل التدريب (١) في دفاترهم، ثم ناقش حلولهم على السبورة، للتحقق من أنهم أتقنوا مفهوم المحل الهندسي ومعادلته إتقانا جيدًا.
– ناقش الطلبة في حل مثال (٢) من كتاب الطالب على السبورة، من أجل تعزيز وصف المحل الهندسي ومعادلته.
– اطلب إلى الطلبة حل التدريب (٢) في دفاترهم.
– كلّف الطلبة بحل الأسئلة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤) كواجبٍ بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٥-٢ المحل الهندسي
Geometric Locus

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تحدد معادلة تمثل محلاً هندسيًّا معطى متضمنًّا:
(المستقيمات ، الدائرة ، القطع المكافيء ، القطع الناقص ، والقطع الزائد).

خذ خيطًا، وثبت أحد طرفيه في نقطة في المستوى، واربط بطرفه الآخر قلمًا، ثم حرك القلم بصورة مستمرة باتجاه واحد دون رفعه عن المستوى، مع بقاء الخيط مشدودًا حتى يعود رأس القلم إلى نقطة البداية، ولاحظ الشكل الهندسي الناتج، لا بد أنك لاحظت أن نقطة رأس القلم تتحرك تحت شرط وهو بعدها الثابت عن نقطة ثابتة في المستوى.

إن مسار النقطة الناتج عن تحرك نقطة رأس القلم تحت هذا الشرط يسمى المحل الهندسي لتلك النقطة.

تعريف

يسمى المنحنى الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى تحت شروط معينة بالمحل الهندسي لهذه النقطة.

وسوف نستعمل الشروط التي تتحرك وفقها نقطة ما لإيجاد معادلة المحل الهندسي الناتج عن حركة تلك النقطة.

٣١١

مثال (٢)

جد المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ (س ، ص) في المستوى بحيث تبعد بعدًا ثابتًا مقداره وحدة واحدة عن المستقيم ٤ ص = ٣ س + ٥، وتمر في أثناء حركتها بالنقطة ب (٠ ، ٠).

الحل

المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ (س ، ص) هو مستقيم يوازي المستقيم ٤ ص = ٣ س + ٥ ويبعد عنه وحدة واحدة.

وباستعمال قانون البعد بين النقطة أ والمستقيم – ٣ س + ٤ ص – ٥ = صفر ، تجد أن:

$$\left|\frac{-٣\text{س}+٤\text{ص}-٥}{\sqrt{٩+١٦}}\right| = ١$$

$$\frac{|-٣\text{س}+٤\text{ص}-٥|}{٥} = ١$$

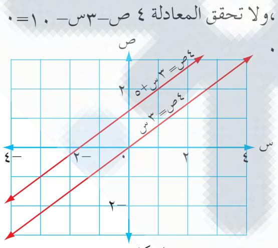
وبالضرب التبادلي تجد أن:

|٤ ص – ٣ س – ٥| = ٥ ، وبحل هذه المعادلة تجد انه:
إما ٤ ص – ٣ س – ٥ = ٥، ومنه : ٤ ص – ٣ س – ١٠ = ٠
أو ٤ ص – ٣ س – ٥ = – ٥، ومنه: ٤ ص – ٣ س = ٠
وبما أن النقطة تمر في أثناء حركتها بالنقطة ب (٠ ، ٠)
والنقطة ب (٠ ، ٠) تحقق المعادلة ٤ ص – ٣ س = ٠ ،ولا تحقق المعادلة ٤ ص–٣س– ١٠ =٠
فتكون معادلة المحل الهندسي هي: ٤ ص – ٣ س = ٠
كما في الشكل (٥–٨).

تذكر

بعد النقطة (س١ ، ص١) عن المستقيم أس + ب ص + جـ = ٠ يساوي

$$\left|\frac{\text{أس}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}\right|$$



الشكل (٥–٨)

وبصورة عامة

معادلة المحل الهندسي هي علاقة جبرية بين الإحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة (س ، ص).

٣١٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

مثال (١)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س ،ص) التي تبعد بعدًا ثابتًا قدره وحدتان عن النقطة م (١ ، ٢)

تذكر

قانون البعد بين النقطتين

أ (س، ص) ، ب (س$_1$ ، ص$_1$)

أ ب = $\sqrt{(س - س_1)^2 + (ص - ص_1)^2}$

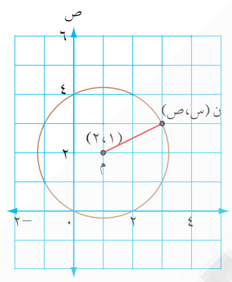
الحل

لإيجاد معادلة المحل الهندسي طبق شرط حركة النقطة، وذلك بإيجاد البعد بين النقطة المتحركة في أحد أوضاعها ن (س، ص) و النقطة الثابتة م (١ ، ٢).
باستخدام قانون البعد بين نقطتين ن ، م ثم مساواته بالعدد ٢ تجد أن:

$(س - س_1)^2 + (ص - ص_1)^2 = (ن م)^2$

إذن: $(س - ١)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

هي معادلة المحل الهندسي المطلوب.
والشكل (٥ – ٧) يمثل منحنى المحل الهندسي.



الشكل (٥–٧)

تدريب (١)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س ،ص) التي تبعد بعدًا ثابتًا قدره (٤) وحدات عن النقطة م (– ٥ ، ٢).

تدريب (٢)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة أ (س ، ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بعداً ثابتاً مقداره ٣ وحدات عن المستقيم ص = –١، وتمر في أثناء حركتها بالنقطة ب (٠ ، –٣).

مثال (٣)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س ، ص) التي يكون بعدها عن النقطة ب (٣ ، –١) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم س =١.

الحل

بما أن بعد النقطة ن (س ، ص) عن النقطة ب (٣ ، –١) يبقى دائمًا مساويًا لبعدها عن المستقيم س =١

أي أن: ن ب = ن د

أي أن : $\sqrt{(س-٣)^2+(ص+١)^2} = \frac{|س - ١|}{\sqrt{٠ + ١}}$

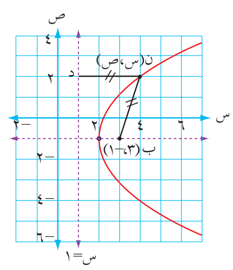
وبتربيع الطرفين وفكّ الأقواس تجد أن:

$س^2 - ٦س + ٩ + ص^2 + ٢ص + ١ = س^2 - ٢ س + ١$

$ص^2 + ٢ص + ١ = ٤ س - ٨$

إذن: $(ص + ١)^2 = ٤ (س - ٢)$

هي معادلة المحل الهندسي المطلوب.
لاحظ الشكل (٥ – ٩)



الشكل (٥–٩)

تدريب (٣)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س ، ص) التي يكون بعدها عن النقطة ب (–٢، ٨) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم ص =٢

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– جد المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن (س ، ص) التي تبقى على بعد ثابت من النقطة (٢ ، ٠) قدرة ثلاث وحدات، ثم جد معادلته.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة، من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢– ٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الأخطاء الشائعة

الدرس ٥-٢ المحل الهندسي

النتاجات الخاصة

– يحدّد معادلة تمثّل محلاً هندسيًّا معطى متضمنًا :
(المستقيمات، الدوائر، القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد).

المفاهيم والمصطلحات

المحل الهندسي ، قطع مخروطي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: التدريس المباشر

– ناقش أسئلة الواجب البيتي مع الطلبة.

– ناقش الطلبة في حل المثالين(٣ ، ٤) من كتاب الطالب على السبورة .

– كلف الطلبة بحل التدريبين (٣ ، ٤) في الدفاتر .

معلومات إضافية

مثال (٤)

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين $ب_١$ (١ ، ٠)، $ب_٢$ (–١ ، ٠) يساوي دائمًا ٦ وحدات.

الحل

بما أن مجموع بعدي النقطة ن (س ، ص) عن النقطتين الثابتتين $ب_١$ (١ ، ٠)، $ب_٢$ (–١ ، ٠) يساوي دائمًا ٦ وحدات.

إذن ن $ب_١$ + ن $ب_٢$ = ٦

$$\sqrt{(س-١)^٢+ص^٢} + \sqrt{(س+١)^٢+ص^٢} = ٦$$

$\sqrt{(س-١)^٢+ص^٢} = ٦ - \sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}$ وبتربيع طرفي المعادلة تحصل على:

$$(س-١)^٢ + ص^٢ = ٣٦ - ١٢\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢} + (س+١)^٢ + ص^٢$$

$$س^٢ - ٢س + ١ + ص^٢ = ٣٦ - ١٢\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢} + س^٢ + ٢س + ١ + ص^٢$$

وبتبسيط هذه المعادلة تجد أن:

$$٩ + س = ٣\sqrt{(س+١)^٢+ص^٢}$$

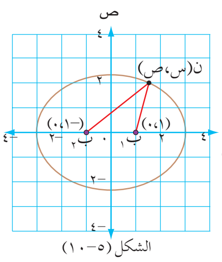
وبتربيع طرفي هذه المعادلة تجد أن:

$$٨١ + ١٨س + س^٢ = ٩س^٢ + ١٨س + ٩ + ٩ص^٢$$

$٨س^٢ + ٩ص^٢ = ٧٢$ وبقسمة الطرفين على ٧٢ تحصل على

$\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٨} = ١$ وهذه هي معادلة المحل الهندسي المطلوبة.

الشكل (٥–١٠) يمثل المحل الهندسي.



الشكل (٥–١٠)

٣١٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– أ ب جـ مثلث محيطه ٣٠ سم فيه إحداثيات الرأسين أ ، ب هما أ (٠ ، ٥) ب (٠ ، −٥)، والرأس جـ يتحرك في المستوى، جد المحل الهندسي الناتج من تحرك الرأس جـ ومعادلته .

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.
وذلك من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات والتمارين والمسائل الواردة في الدرس وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة .

تمارين ومسائل

١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي تبعد بعداً ثابتاً قدره (٥) وحدات عن النقطة م (−١ ، ٢).

٢) جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعدين متساويين من النقطتين الثابتتين (٢ ، ٠)، (−٣ ، ٠).

٣) جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بعدين متساويين من المحورين الإحداثيين.

٤) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س،ص) التي تتحرك في المستوى بحيث إن بعدها عن المستقيم س=٩ يساوي ثلاثة أمثال بعدها عن النقطة ب (١ ، ٠).

٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) التي يكون بعدها عن النقطة ب (−١ ، ١) مساوياً دائماً لبعدها عن المستقيم س=٢.

٦) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س،ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن(س،ص) عن النقطتين الثابتتين ب١ (٠ ، ٥) ، ب٢ (٠ ، −٥) يساوي دائماً ٨ وحدات.

٣١٦

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

الأخطاء الشائعة

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف الدائرة كقطع مخروطي.
- يكتب معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية.
- يميّز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة.
- يمثّل معادلة الدائرة بيانيًّا .

المفاهيم والمصطلحات

الدائرة ، الصيغة العامة لمعادلة الدائرة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

التدريس المباشر

- المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي : مفهوم المحل الهندسي، المسافة بين نقطتين.
  - ما المقصود بالمحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي على بعد ثابت من نقطة ثابتة ؟
- ناقش مع الطلبة مقدمة الدرس في كتاب الطالب، ثم بيّن لهم أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي على بعد ثابت من نقطة ثابتة هو دائرة مركزها النقطة الثابتة، ونصف قطرها البعد الثابت (ر) .
- كلفّ الطلبة بإيجاد معادلة المحل اللهندسي للنقطة (س ، ص) التي تبعد بعدًا ثابتًا عن النقطة الثابتة (د ، هـ) قدرة (ر) وحدة، وذلك من أجل التوصل إلى معادلة الدائرة .
- ناقش المثال (١)، واطلب إليهم فك الأقواس للتوصل إلى صورة أخرى للدائرة، ثم قدّم لهم الصورة العامة لمعادلة الدائرة، وكلفهم بحل تدريب (١) في دفاترهم .
- ناقش الأمثلة (٢،٣،٤) مع الطلبة، وكلفهم بحل تدريب (٢) في دفاترهم.
- ناقش مثال (٥) مع الطلبة، وكلفهم بحل تدريب (٣) في دفاترهم .
- كلف الطلبة بحل التمارين (١، ٢، ٣ ، ٤، ٥، ٦) كواجب بيتي .

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٥-٣ الدائرة
The Circle

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تتعرف الدائرة كقطع مخروطي.
٢- تكتب معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية.
٣- تميز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة.
٤- تمثل معادلة الدائرة بيانيًّا.

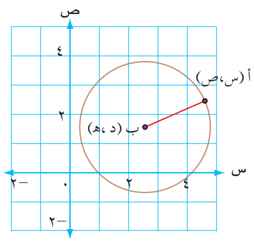
تعرفت في الدرس (٥-١) أن الدائرة هي إحدى أنواع القطوع المخروطية، وكما تعلمت أن المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى على بعد ثابت من نقطة ثابتة هو **دائرة** مركزها النقطة الثابتة، وطول نصف قطرها البعد الثابت، ولإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) وطول نصف قطرها (ر):

افرض نقطة أ (س ، ص) على الدائرة، كما في الشكل (٥-١١) وباستخدام قانون المسافة بين النقطتين أ (س ، ص) ، ب (د ، هـ) تجد أن:

(س − د)^{2} + (ص − هـ)^{2} = (أ ب)^{2} ، لكن أ ب = ر

إذن المعادلة هي:

(س − د)^{2} + (ص − هـ)^{2} = ر^{2}



الشكل (٥-١١)

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) وطول نصف قطرها يساوي (ر) هي:
(س − د)^{2} + (ص − هـ)^{2} = ر^{2}

٣١٧

ويمكن حل هذا المثال بتحويل معادلة الدائرة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية عن طريق إكمال المربع في س وإكمال المربع في ص كما يأتي.

س^{2} + ص^{2} + ٤ س + ٦ ص − ١٢ = صفرًا
س^{2} + ٤ س + ص^{2} + ٦ ص − ١٢ = صفرًا
(س^{2} + ٤ س + ٤ −٤) + (ص^{2} + ٦ ص +٩ − ٩) − ١٢ = صفرًا.
(س^{2} + ٤ س + ٤) + (ص^{2} + ٦ ص + ٩) − ١٢ − ٤ −٩ = صفرًا
(س+٢)^{2} + (ص +٣)^{2} = ٢٥
إذن مركز الدائرة (−٢ ، −٣) ، وطول نصف قطرها = ٥

تذكر
لإكمال مربع في س نضيف ($\frac{١}{٢}$ معامل س)^{2} ونطرحه في المعادلة

تدريب (١)
جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:
س^{2} + ص^{2} − ٢ س + ٦ ص − ٦ = صفرًا

مثال (٣)
جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:
٢ س^{2} + ٢ ص^{2} − ١٢ س = ١٤

الحل
نكتب المعادلة ٢س^{2} + ٢ص^{2} − ١٢ س = ١٤ على الصورة العامة لمعادلة الدائرة:
س^{2} + ص^{2} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفرًا
لذلك نقسم طرفي المعادلة ٢س^{2} + ٢ص^{2} − ١٢ س = ١٤ على ٢، تجد أن:
س^{2} + ص^{2} − ٦ س − ٧ = ٠ وبالمقارنة مع الصورة العامة لمعادلة الدائرة تجد أن:
مركز الدائرة (−ل ، − ك) هو النقطة (٣ ، ٠) ونصف قطرها:
ر = $\sqrt{(٣)^{2} + (٠)^{2} − (−٧)}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدات.

٣١٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

مثال (١)

جد معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ،−٣) وطول نصف قطرها (٥) وحدات.

الحل

معادلة الدائرة هي: (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = ر^{٢}

ومنه (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

ويمكن فكّ الأقواس في الصورة القياسية السابقة للدائرة، فتجد أن:

س^{٢} − ٢س د + د^{٢} + ص^{٢} − ٢ ص هـ + هـ^{٢} = ر^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ د س − ٢ هـ ص + د^{٢} + هـ^{٢} − ر^{٢} = صفرًا

وبفرض أن: − د = ل ، − هـ = ك ، د^{٢} + هـ^{٢} − ر^{٢} = جـ تنتج الصورة:

> س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = صفرًا
>
> تسمى هذه الصورة بالصورة العامة لمعادلة الدائرة، وفي هذه الحالة يكون:
>
> مركز الدائرة (− ل ، − ك) أي (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص)
>
> وطول نصف قطرها ر = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ حيث ل^{٢} + ك^{٢} − جـ > صفر
>
> لاحظ أن: معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١، وأن معامل س ص = صفرًا.

مثال (٢)

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ ص − ١٢ = صفرًا.

الحل

بمقارنة المعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ ص − ١٢ = صفرًا

بالمعادلة س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفرًا تجد أن:

ل = ٢ ، ك = ٣ ، جـ = − ١٢

وبما أن مركز الدائرة هو (−ل، −ك) فإن مركز الدائرة هو (−٢، −٣)

وبما أن ر = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$

فإن طول نصف قطر الدائرة ر = $\sqrt{(٢)^{٢} + (٣)^{٢} - (-١٢)}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات

٣١٨

مثال (٤)

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٤، ٥) ، وتمس محور السينات.

الحل

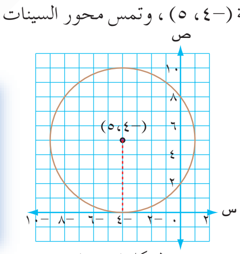
بما أن الدائرة مركزها النقطة (−٤، ٥) وتمس محور السينات.

انظر الشكل (٥−١٢)

إذن نصف قطرها ر = ٥

فتكون معادلة الدائرة هي:

(س + ٤)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥



الشكل (٥−١٢)

تذكر

نصف القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس

تدريب (٢)

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٢ ، −٣) ، وتمس محور الصادات.

مثال (٥)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٠ ، ٠) ، (٨ ، ٠) ، (٤ ، −٤).

الحل

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي: س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفرًا

بما أن الدائرة تمر بالنقطة (٠ ، ٠) ، إذن النقطة (٠ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة أي أن:

٠ + ٠ + ٠ + ٠ + جـ = ٠ ، ومنه جـ = صفرًا

بما أن الدائرة تمر بالنقطة (٨ ، ٠) ، إذن النقطة (٨ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة أي أن:

(٨)^{٢} + (٠)^{٢} + ١٦ ل + ٠ + ٠ = ٠ ، ومنه ٦٤ + ١٦ل = صفرًا

إذن ١٦ ل = − ٦٤ ، ومنها ل = − ٤

بما ان الدائرة تمر بالنقطة (٤ ،−٤)، إذن النقطة (٤ ،−٤) تحقق معادلة الدائرة أي أن:

(٤)^{٢} + (−٤)^{٢} + ٨ل − ٨ك + ٠ = ٠ ، ومنه ٣٢ + ٨ل − ٨ك = صفرًا

٣٢ − ٨(٤) − ٨ك = صفرًا ، إذن ٨ك = صفرًا ، ومنه ك = صفرًا

إذن، معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س = ٠

٣٢٠

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

أ) جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها ٣ وحدات ومركزها النقطة (٠،٠).

ب) جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها ٣وحدات ومركزها النقطة (−٣، ٥)

إثراء

− جد معادلة الدائرة التي نهايتها فيها النقطتان (٥ ، ٠)، و(٣ ، ٠)

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية**: القلم والورقة، من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٣ الدائرة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف الدائرة كقطع مخروطي.
- يكتب معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية .
- يميّز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة .
- يمثّل معادلة الدائرة بيانيًّا.

المفاهيم والمصطلحات

الدائرة ، الصيغة العامة لمعادلة الدائرة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي، ثم تكليف مجموعة منهم عرض الحلول بحيث تعرض كل مجموعة حل مسألة واحدة .
- مناقشة الطلبة في حل مثال (٦) من كتاب الطالب على السبورة .
- تكليف الطلبة حل التدريب (٤) في دفاترهم.

تدريب (٣)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط: (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٣ ، −١).

مثال (٦)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−١ ، ١) ويقع مركزها على الخط المستقيم س − ٣ ص − ١١ = ٠

الحل

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي:

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفرًا .... (١)

بما أن الدائرة تمر بالنقطة (٢ ، ٣) ، إذن النقطة (٢ ، ٣) تحقق معادلة الدائرة أي أن:

٤ + ٩ + ٤ ل + ٦ ك + جـ = ٠، ومنه ١٣ + ٤ل + ٦ك + جـ = ٠ .... (٢)

بما أن الدائرة تمر بالنقطة (−١ ، ١)، إذن النقطة (−١ ، ١) تحقق معادلة الدائرة أي أن:

٢ − ٢ ل + ٢ ك + جـ = ٠ .... (٣)

ومركز الدائرة (−ل، − ك) يحقق معادلة الخط المستقيم: س − ٣ ص − ١١ = ٠، أي أن:

−ل + ٣ك − ١١ = ٠ .... (٤)

وبحل المعادلات: (٢)، (٣) ، (٤) ينتج أن: ل = $\frac{-٧}{٢}$ ، ك = $\frac{٥}{٢}$ ، جـ = − ١٤

وبالتعويض في (١) تصبح معادلة الدائرة كما يأتي:

س^{٢} + ص^{٢} − ٧ س + ٥ ص − ١٤ = صفرًا

تدريب (٤)

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (١، −٢) ، (٤ ،−٣) ويقع مركزها على الخط المستقيم ٣س + ٤ ص = ٧.

٣٢١

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية** : القلم والورقة، من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) اكتب معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

ب) مركزها (٥ ، −٣) ، وطول قطرها ٦ وحدات.

جـ) مركزها (٥ ، −٣) ، وتمر بنقطة الأصل.

د) نهايتا قطر فيها هما النقطتان (٤ ، ١) ، (٦ ، −٣).

٢) جد إحداثيات المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

أ) $(س+٣)^{٢} + (ص-١)^{٢} = ١٢$

ب) $س^{٢} + (ص-٧)^{٢} = ٨١$

جـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س - ٤ص = ٩$

٣) جد معادلة الدائرة التي مركزها (٤ ، ٤) وتمس المستقيم ص = ٢س −٣.

٤) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣ ، −١) ، (١ ، ٥) ويقع مركزها على محور السينات.

٥) جد معادلة الدائرة التي تقع في الربع الثالث وتمس محوري السينات والصادات، علمًا بأن طول قطرها ٦ وحدات.

٦) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم ص = ٢س + ٤ وتمس محور السينات عند النقطة (٦ ، ٠).

٧) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (١ ، ٠) ، (٧ ، ٠) ، (٥ ، −٣).

٨) تتحرك النقطة و(س،ص) في المستوي بحيث س = ٥ + ٣ جا هـ، ص = ٢ + ٣ جتا هـ حيث هـ زاوية متغيرة. جد معادلة المحل الهندسي للنقطة و(س،ص) وبين نوعه.

٢٢٢

الأخطاء الشائعة

الدرس ٥-٤ القطع المكافئ

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع المكافئ.
- يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا .
- يحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته .
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة .

المفاهيم والمصطلحات

القطع المكافئ ، الدليل ، البؤرة ، محور القطع.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

التدريس المباشر

- المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي: مفهوم المحل الهندسي ومعادلته، المسافة بين نقطتين، بعد نقطة عن مستقيم، وذلك من خلال الأسئلة مثل :
  - جد بعد نقطة (٢ ، ٥) عن النقطة (−٣ ، ٤) .
  - جد بعد النقطة (١ ، ٤) عن المستقيم ص = ٧ .

مجموعات تعاونية

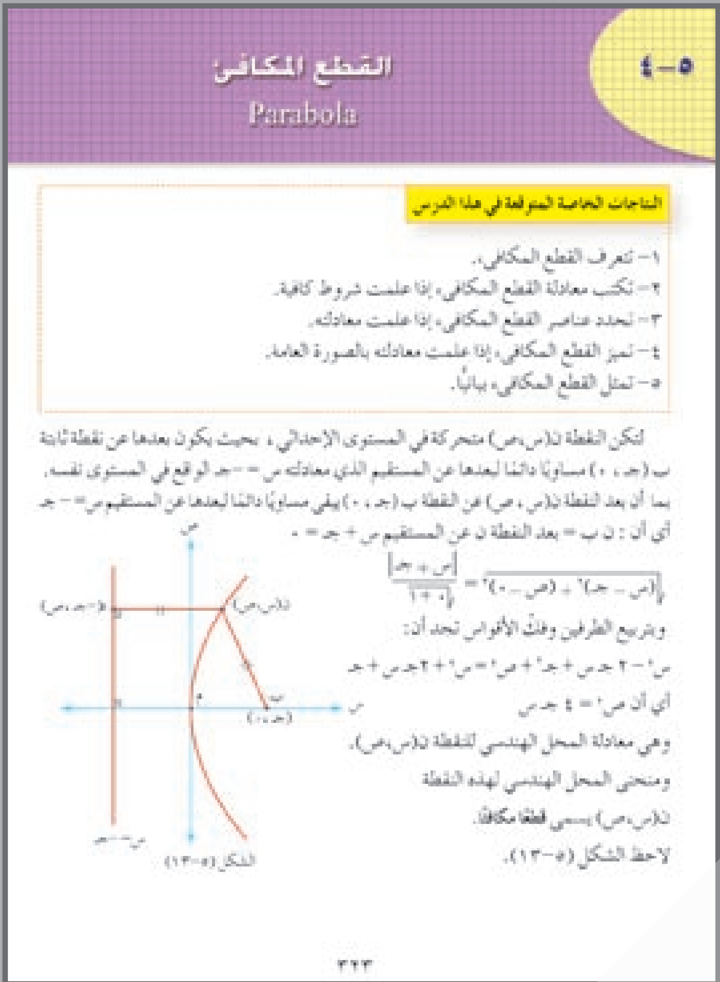
- مناقشة الطلبة بمقدمة الدرس في كتاب الطالب ، ثم تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية من (٤−٦) طلاب، واطلب من كل مجموعة تنفيذ ورقة العمل (٣ ، ١٥) التي تهدف إلى استنتاج تعريف القطع المكافئ وخواصه وعناصره.
- عرض نتائج الطلبة، وناقش استنتاجاتهم، وكتابة الاستنتاجات النهائية على السبورة مع تقديم مجموعة كافية من الأمثلة لدعم استنتاجات الطلبة التي توصلوا إليها .
- رسم محورين متعامدين م س، م ص في مستوى القطع المكافئ الذي رأسه (٠ ، ٠) ومحوره منطبقًا على م س وبؤرته النقطة ب (±جـ ، ٠)، وقطع آخر محوره منطبقًا على م ص وبؤرته ب (٠ ، ±جـ)، واطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية :
  - اكتب معادلة الدليل ومثله في كل حالة من حالات المحور والبؤرة .
  - افرض أن النقطة ن (س ، ص) تقع على منحنى القطع ، واستعمل تعريف القطع المكافئ في تعيين العلاقة بين س ، ص .
- التجول بين الطلبة ومتابعة حلولهم ليصلوا إلى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ :

ص^{٢}= ٤ جـ س، ص^{٢} = −٤ جـ س ، س^{٢} = ٤ جـ ص ، س^{٢} = −٤ جـ ص .

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.



٥−٤ القطع المكافئ
Parabola

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١− تتعرف القطع المكافئ.
٢− تكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية.
٣− تحدد عناصر القطع المكافئ إذا علمت معادلته.
٤− تميز القطع المكافئ إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
٥− تمثل القطع المكافئ بيانياً.

لتكن النقطة ن(س،ص) متحركة في المستوى الإحداثي ، بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة ب (جـ ، ٠) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم الذي معادلته س = −جـ الواقع في المستوى نفسه.
بما أن بعد النقطة ن(س ، ص) عن النقطة ب (جـ ، ٠) يبقى مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم س = −جـ
أي أن : ن ب = بعد النقطة ن عن المستقيم س + جـ = ٠
$\sqrt{(س - جـ)^2 + (ص - ٠)^2} = \frac{|س + جـ|}{\sqrt{١ + ٠}}$
وبتربيع الطرفين وفك الأقواس نجد أن:
س^{٢} − ٢ جـ س + جـ^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} + ٢ جـ س + جـ^{٢}
أي أن ص^{٢} = ٤ جـ س
وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س،ص).
ومنحنى المحل الهندسي لهذه النقطة ن(س،ص) يسمى **قطعًا مكافئًا**.
لاحظ الشكل (٥−١٣).

الشكل (٥−١٣)

٣٢٣

معادلة القطع المكافىء

أولاً: إذا كـان رأس القطع المكـافىء نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوره يطابق محور السينات.
لإيجاد معادلة القطع المكافىء في هذه الحالة بالصورة القياسية تعرّف محورين متعامدين م س،م ص في مستوى القطع المكافىء بحيث يكون محوره يطابق محور السينات ورأسه في نقطة الأصل وبؤرته ب (جـ ،.)، حيث جـ > صفر وبذلك تكون معادلة دليله س = − جـ.
لاحظ الشكل (٥−١٥).

الشكل (٥−١٥)

وبفرض أن النقطة ن(س ،ص) تقع على منحنى القطع وأن النقطة د تقع على العمود النازل من النقطة ن على الدليل ل ، فيكون إحداثيا النقطة د هما (− جـ ، ص) وبناء عليه ومن تعريف القطع المكافىء يكون ن ب = د ن أي أن:
$\sqrt{(س - جـ)^2 + ص^2} = \sqrt{(س + جـ)^2}$ وبتربيع الطرفين تجد أن:
(س − جـ)^{٢} + ص^{٢} = (س + جـ)^{٢}
أي أن: س^{٢} − ٢ جـ س + جـ^{٢} + ص^{٢} = س^{٢} + ٢ جـ س + جـ^{٢} وبالتبسيط تحصل على المعادلة

$\boxed{ص^2 = ٤ جـ س ، جـ > ٠}$ ، .... (١)

وهي تمثل إحدي الصور القياسية للقطع المكافىء.
من خلال المعادلة (١) لما كانت ص^{٢} ≥ ٠، جـ > صفر، فإن س ≥ ٠، ولذلك فإن هذا القطع يقع بأكمله في الربعين الأول والرابع ، وبالرجوع إلى المعادلة: ص^{٢} = ٤ جـ س تجد أن:
قيم |ص| = ٢ $\sqrt{جـ س}$ تتزايد بتزايد قيم س، وعليه يكون منحنى القطع المكافئ متجهًا نحو اليمين (أي مفتوحًا في الاتجاه الموجب لمحور السينات).

الاختلاف المركزي للقطع المكافىء
من تعريف القطع المكافىء يكون ن ب = ن د لاحظ الشكل (٥ −١٥)
وبقسمة طرفي المعادلة على ن د تجد أن: $\frac{ن ب}{ن د} = ١$
تسمى هذه النسبة $\frac{ن ب}{ن د}$ الاختلاف المركزي للقطع المكافىء ويرمز له بالرمز هـ، وكما تلاحظ أن قيمة هـ = ١ ولهذا سمي القطع مكافئًا، لأن اختلافه المركزي يساوي(١).

٣٢٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) عيّن عناصر (بؤرة ، رأس ، دليل ، محور) القطوع المكافئة الآتية :

أ) ص^{٢} = ٢٤ س

ب) ص^{٢} = −٢٠ س

جـ) س^{٢} = ١٦ ص

د) س^{٢} = −٤ ص

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢ – ٤) لتقويم أداء الطلبة في المجموعات.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تعريف

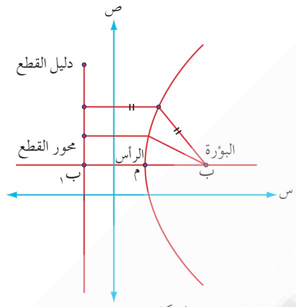
القطع المكافىء هو: المحل الهندسي للنقطة ن(س،ص) المتحركة في المستوى التي يكون بعدها عن نقطة ثابتة ب (تسمى بؤرة القطع المكافىء) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم ل (يسمى دليل القطع المكافىء) لا يحوي النقطة ب

واضح من الشكل (٥–١٤) أن القطع المكافىء متماثل حول المستقيم المار من البؤرة والعمودي على الدليل ل، ويسمى هذا المستقيم محور التماثل للقطع المكافىء أو اختصارًا **محور القطع المكافىء**.

وتسمى النقطة الواقعة على محور القطع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل بِـ

رأس القطع المكافىء.

فإذا كانت ب م = جـ فتكون المسافة بين البؤرة والدليل هي ب ب$_{١}$ = ٢ جـ ، لاحظ الشكل (٥–١٤).



الشكل (٥–١٤)

تذكر

المقصود بالتماثل حول محور السينات:
النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$)
والنقطة (س$_{١}$ ، − ص$_{١}$)
تحققان المعادلة
ص^{٢} = ٤ حـ س

٣٢٤

وكذلك إذا كان محور القطع المكافىء منطبقًا على محور السينات ورأسه في نقطة الأصل وبؤرته ب (− جـ ، ٠) ومعادلة دليله س = جـ.

فإن معادلة هذا القطع المكافىء بالصورة القياسية هي:

$\boxed{\text{ص}^{٢} = -٤ \text{ حـ س ، جـ} > ٠}$ .... (٢)

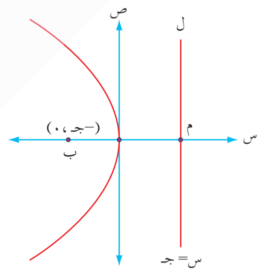
وأيضًا لما كانت ص^{٢} ≤ ٠، جـ > صفر، فإن س ≥ ٠ ،

أي أن هذا القطع يقع بأكمله في الربعين الثاني والثالث،

وأن قيم |ص| = ٢ $\sqrt{-\text{ جـ س}}$

تتزايد بتناقص قيم س ، وعليه يكون منحنى القطع المكافىء متجهًا نحو اليسار (أي مفتوحًا في الاتجاه السالب لمحور السينات).

لاحظ الشكل (٥ – ١٦).



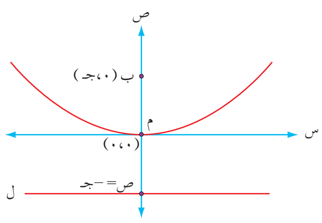
الشكل (٥–١٦)

ثانيا: إذا كان رأس القطع المكافىء نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوره يطابق محور الصادات.

إذا كان رأس القطع المكافىء في نقطة الأصل ومحوره منطبقا على محور الصادات وبؤرته ب (٠ ، جـ) ومعادلة دليله ص = − جـ.

فإن معادلة هذا القطع المكافىء بالصورة القياسية هي:

$\boxed{\text{س}^{٢} = ٤ \text{ حـ ص ، جـ} > ٠}$ .... (٣)



الشكل (٥–١٧)

من خلال المعادلة (٣) لما كانت س^{٢} ≤ ٠، جـ > صفر، فإن ص ≤ ٠ ، وبما أن ص يجب أن تحقق العلاقة ص ≤ ٠ حتى تكون قيم س حقيقية فإن منحنى القطع المكافىء يكون متجهًا نحو الأعلى (أي مفتوحًا في الاتجاه الموجب لمحور الصادات)، ويقع بأكمله في الربعين الأول والثاني، لاحظ الشكل (٥ – ١٧).

٣٢٦

الأخطاء الشائعة

– تتركز الأخطاء والصعوبات لدى الطلبة في هذا الدرس حول:

- خطأ استعمال قانون بعد نقطة عن مستقيم وذلك بعدم كتابة معادلة المستقيم بالصورة أ س + ب ص + جـ = ٠

ويمكن التخلص من هذه المشكلة بتدريب الطلبة على ذلك .

الدرس ٥-٤ القطع المكافئ

النتاجات الخاصة

- يعرّف القطع المكافئ.
- يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًا.
- يحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.

المفاهيم والمصطلحات

القطع المكافئ ، الدليل ، البؤرة ، محور القطع ، رأس القطع المكافئ.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

التدريس المباشر

- مناقشة المثالين (١ ، ٢) مع الطلبة، وتكليفهم حل التدريبين (١ ، ٢) في دفاترهم.
- رسم محورين متعامدين م س ، م ص في مستوى القطع المكافئ الذي رأسه (د ، هـ)، ومحورًا منطبق على م س وبؤرته النقطة ب (د ± جـ ، هـ)، وقطع آخر محوره منطبق على م ص وبؤرته ب (د ، هـ ± جـ)، واطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية:
  - اكتب معادلة الدليل ومثله في كل حالة من حالات المحور والبؤرة .
  - افرض أن النقطة ن (س ، ص) تقع على منحنى القطع ، واستعمل تعريف القطع المكافئ في تعيين العلاقة بين س ، ص .
- التجول بين الطلبة ومتابعة حلولهم ليصلوا إلى الصور الآتية لمعادلة القطع المكافئ:

(ص − هـ)^{٢} = ٤ جـ (س − د) ، (ص − هـ)^{٢} = −٤ جـ (س − د)

(س − د)^{٢} = ٤ جـ (ص − هـ) ، (س − د)^{٢} = −٤ جـ (ص − هـ)

- مناقشة مثال (٣) مع الطلبة، وتكليفهم حل تدريب (٣) في دفاترهم .

معلومات إضافية

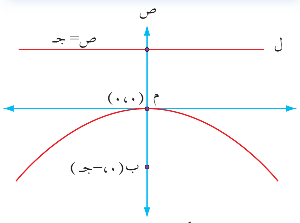
أما إذا كانت بؤرة القطع المكافىء هي ب (٠، − جـ) ورأسه نقطة الأصل م ، معادلة دليله ص = جـ فإن معادلة هذا القطع المكافىء بالصورة القياسية هي:

س^{٢} = − ٤ جـ ص ، جـ > ٠ ....(٤)

تذكر

المقصود بالتماثل حول محور الصادات النقطة (س$_{١}$، ص$_{١}$) والنقطة (−س$_{١}$ ، ص$_{٢}$) تحققان المعادلة س^{٢} = ٤ جـ س

وبما أن س^{٢} ≥ ٠ ، جـ > صفر، فإن ص يجب أن تحقق العلاقة ص ≤ ٠ حتى تكون قيم س حقيقية، فإن منحنى القطع المكافىء يكون متجهًا نحو الأسفل (أي مفتوحًا في الاتجاه السالب لمحور الصادات). ويقع بأكمله في الربعين الثالث والرابع، لاحظ الشكل (٥ −١٨).



الشكل (٥−١٨)

مثال (١)

عين إحداثيي البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافىء ص^{٢} = ٨ س ، ثم ارسم منحناه.

الحل

بمقارنة المعادلة ص^{٢} = ٨ س بالصورة القياسية:

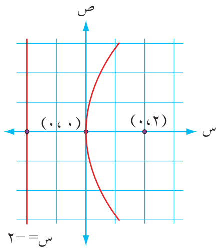
ص^{٢} = ٤ حـ س تجد أن:

٤ جـ = ٨ ، ومنه جـ = ٢

وبما أن محور القطع المكافىء منطبق على محور السينات ومعامل س موجب، فإن منحنى القطع المكافىء يتجه نحو اليمين وبذلك تكون البؤرة على محور السينات وهي (جـ ، ٠) ومعادلة دليله س = − جـ أي أن:

البؤرة هي (٢ ، ٠) ومعادلة الدليل هي س = − ٢

والشكل (٥−١٩) يمثل منحنى القطع المكافىء.



الشكل (٥−١٩)

٣٢٧

مثال (٣)

اكتب معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته (−٣ ، ٠) ومعادلة دليله س = ٣.

الحل

بما أن البؤرة (−٣ ، ٠) تقع على محور السينات السالب والدليل س = ٣ ، فإن منحنى القطع المكافىء يتجه نحو اليسار والرأس (٠ ، ٠) يقع في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل أي أن جـ = ٣ ، وبذلك تكون المعادلة على الشكل ص^{٢} = − ٤ جـ س .

إذن المعادلة المطلوبة هي: ص^{٢} = − ١٢ س.

تدريب (٣)

اكتب معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته (٠ ، ٥) ومعادلة دليله ص = − ٥.

ثالثًا: إذا كان رأس القطع المكافىء النقطة (د ،هـ) ومحوره يوازي محور السينات.

إذا كان رأس القطع المكافىء النقطة م (د ، هـ) ومحوره يوازي محور السينات. وكانت **النقطة** ن(س ، ص) تقع على منحنى القطع المكافىء الذي بؤرته **ب** تقع إلى اليمين من رأسه، فيكون إحداثيًا البؤرة ب هما (د + جـ ، هـ)، حيث **جـ** هي بعد البؤرة عن الرأس، وأن النقطة ب$_{١}$ هي موقع العمود النازل من النقطة ن على الدليل **ل**، فيكون إحداثيًا النقطة ب$_{١}$ هما (د − جـ ، ص) وبناء عليه، ومن تعريف القطع المكافىء يكون:

ن ب = ن ب$_{١}$ أي أن:

$\sqrt{(\text{س} - (\text{د}+\text{جـ}))^{2} + (\text{ص} - \text{هـ})^{2}} = \sqrt{(\text{س} - (\text{د}-\text{جـ}))^{2} + (\text{ص} - \text{ص})^{2}}$ وبتربيع الطرفين:

$(\text{س} - (\text{د}+\text{جـ}))^{2} + (\text{ص} - \text{هـ})^{2} = (\text{س} - (\text{د}-\text{جـ}))^{2} + (\text{ص} - \text{ص})^{2}$

$((\text{س} - \text{د})^{2} - \text{جـ})^{2} + (\text{ص} - \text{هـ})^{2} = ((\text{س} - \text{د}) + \text{جـ})^{2}$ وبفك الأقواس

$(\text{س}-\text{د})^{2} - 2\,\text{جـ}(\text{س}-\text{د}) + \text{جـ}^{2} + (\text{ص}-\text{هـ})^{2} = (\text{س}-\text{د})^{2} + 2\,\text{جـ}(\text{س}-\text{د}) + \text{جـ}^{2}$

وبعد الاختصار تجد أن:

(ص−هـ)^{٢} = ٤ جـ (س −د) ، جـ > ٠ .... (٥)

٣٢٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (١)

عيّن البؤرة والدليل للقطع المكافىء ص^٢ = − ١٨ س ، ثم ارسم منحناه.

مثال (٢)

عيّن البؤرة والدليل للقطع المكافىء س^٢ = −٦ ص ، ثم ارسم منحناه.

الحل

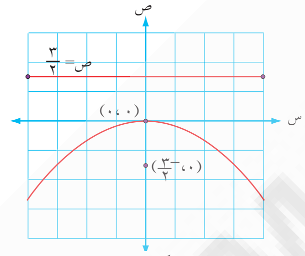
بمقارنة المعادلة س^٢ = −٦ ص بالصورة القياسية س^٢ = −٤ حـ ص تجد أن:

−٤ جـ = −٦ ، ومنه جـ = ٣/٢

وبما أن محور القطـع المكافىء يطابق محور الصادات ومعامل ص سالب، فإن منحنى القطع المكافىء يتجه نحـو الأسـفل، وبذلك تكون البؤرة على محور الصـادات وهي (٠ ، − جـ) ومعادلة دليله ص = جـ أي أن:

البؤرة هي: (٠، − ٣/٢) ومعادلةالدليل هي:

ص = ٣/٢ والشكل (٥ − ٢٠) يمثل منحنى القطع المكافىء.



الشكل (٥−٢٠)

تدريب (٢)

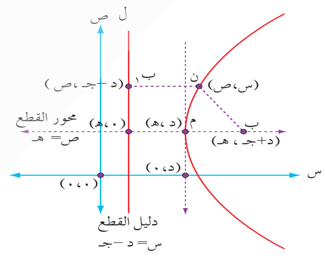
عيّن إحداثيي البؤرة ومعادلة الدليل للقطع المكافىء س^٢ = ١٦ ص ، ثم ارسم منحناه.

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافىء الذي:

١) محوره يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ
٢) رأسه في النقطة (د ، هـ)
٣) بؤرته ب (د + جـ ، هـ)
٤) معادلة دليله س = د − جـ.

مما سبق تجد أن منحنى القطع المكافىء يتجه نحو اليمين، لاحظ الشكل (٥ − ٢١).

أما إذا كان محور القطع المكافىء يوازي محور السينات ورأسه في النقطة (د ، هـ) وبـؤرته ب (د − جـ ، هـ) تقع إلى اليسار من رأسه، فإن معادلته هي:



الشكل (٥−٢١)

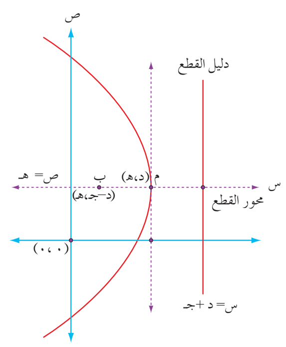
$\boxed{\text{(ص −هـ)}^2 = −٤ \text{ حـ (س−د) ، جـ} > ٠}$ .... (٦)

(تحقق من ذلك بإجراء الخطوات نفسها التي اتبعت في التوصّل إلى المعادلة (٥))

هذه المعادلة تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافىء الذي:

١) محوره يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ .
٢) رأسه في النقطة (د ، هـ).
٣) بؤرته ب (د − جـ ، هـ).
٤) معادلة دليله س = د + جـ.

مما سبق تجد أن منحنى القطع المكافئ يتجه نحو اليسار، لاحظ الشكل (٥−٢٢).



الشكل (٥−٢٢)

الأخطاء الشائعة

- خطأ بعض الطلبة في اختيار الصورة القياسية، عند إيجاد معادلة القطع المكافئ أو عند تحديد عناصره، عالج ذلك بالتأكيد على رسم تقريبي لمعطيات المسألة، وإعطاء تدريبات كافية على ذلك.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

٢) جد معادلة القطع المكافئ في كل من الحالات الآتية :

أ) الرأس (٠ ، ٠) ، البؤرة (٣ ، ٠)

ب) الرأس (٠ ، ٠) ، البؤرة (−٣ ، ٠)

٣) عيّن عناصر (بؤرة ، رأس ، دليل ، محور) القطوع المكافئة الآتية:

أ) (ص − ٥)^٢ = ٢٠ (س + ٣)

ب) (س − ٢)^٢ = −١٦ (ص + ٢)

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

– **الأداة**: اختبار قصير.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة .

– **الاستراتيجية**: مراجعة الذات

– **الأداة**: يوميات الطالب، شجع الطلبة لتدوين أبرز ما تعلموه والصعوبات التي واجهوها .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٤ القطع المكافئ

النتاجات الخاصة

– يتعرّف القطع المكافئ.
– يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
– يحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته.
– يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.

المفاهيم والمصطلحات

القطع المكافئ ، الدليل ، البؤرة ، محور القطع ، رأس القطع المكافئ.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

التدريس المباشر

– مناقشة مثال (٤) مع الطلبة، وتكليفهم حل التدريب (٤) في دفاترهم .
– مناقشة مثال (٥) مع الطلبة، وتكليفهم فك حدود معادلة القطع المكافئ، وذلك من أجل التوصل إلى أنه يمكن كتابة معادلة القطع المكافئ على إحدى الصور الآتية:

ص^{٢} = أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ صفرًا، إذا كان محور القطع يوازي محور الصادات.

س^{٢} = أ ص^{٢} + ب ص + جـ ، أ ≠ صفرًا، إذا كان محور القطع يوازي محور السينات.

– تكليف الطلبة حل تدريب (٥) في دفاترهم.
– تكليف الطلبة حل الأسئلة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٦) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

رابعًا: إذا كان رأس القطع المكافئ النقطة (د ، هـ) ومحوره يوازي محور الصادات.

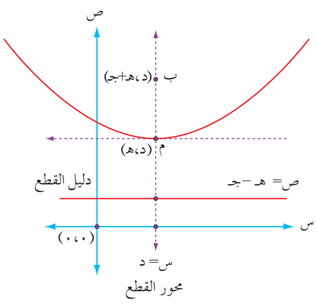
أما إذا كان رأس القطع المكافئ النقطة (د ، هـ) ومحوره يوازي محور الصادات، وبؤرته ب (د، هـ + جـ) تقع إلى الأعلى من رأسه، وبإتباع الخطوات التي تم التوصل من خلالها للمعادلة (٥) نفسها تجد أن معادلة هذا القطع المكافئ هي:

(س−د)^{٢} = ٤ جـ (ص − هـ) ، جـ > ٠ ....(٧)

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي:

١) محوره يوازي محور الصادات ومعادلته س = د
٢) رأسه في النقطة (د،هـ)
٣) بؤرته ب (د ، هـ + جـ)
٤) معادلة دليله ص = هـ − جـ.

مما سبق تجد أن منحنى القطع المكافئ يتجه نحو الأعلى، لاحظ الشكل (٥−٢٣).



الشكل (٥−٢٣)

أما إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات ورأسه في النقطة (د ، هـ)، وبؤرته ب (د ، هـ − جـ) تقع إلي الأسفل من رأسه، فإنه وباتباع الخطوات السابقة نفسها تجد أن معادلة هذا القطع المكافئ هي:

(س−د)^{٢} = − ٤ جـ (ص − هـ) ، جـ > ٠ ....(٨)

٣٣١

مثال (٥)

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (−١ ، −٣) وبؤرته النقطة (٢ ،−٣) ثم ارسم منحناه.

الحل

بما أن الرأس والبؤرة يقعان على محور القطع المكافئ، فإنه ومن خلال إحداثيي الرأس والبؤرة تجد أن:

محور القطع المكافئ يوازي محور السينات ومعادلته هي: ص = − ٣

أيضًا ومن خلال المعطيات تجد أن منحنى القطع المكافئ يتجه نحو اليمين ومعادلته هي على الصورة

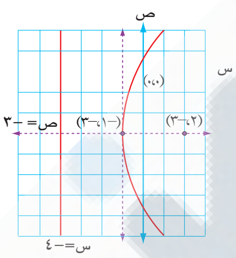
(ص − هـ)^{٢} = ٤ حـ (س ـ د)

جـ = ٢ − −١ = ٣ (جـ هي المسافة بين الرأس والبؤرة)

إذن معادلة هذا القطع المكافئ هي:

(ص + ٣)^{٢} = ١٢ (س + ١)

والشكل (٥−٢٦) يمثل منحنى القطع المكافئ.



الشكل (٥−٢٦)

وبفكّ حدود هذه المعادلة أعلاه، تجد أنها تصبح على الصورة:

ص^{٢} + ٦ ص − ١٢ س − ٣ = ٠ لاحظ أن المعادلة هي من النوع: س = أص^{٢} + ب ص + حـ

وبشكل عام:

١) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات هي:
ص = أ س^{٢} + ب س + حـ ، أ ≠ صفرًا ، أ ، ب ، حـ ∋ ح
٢) معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات هي:
س = أ ص^{٢} + ب ص + حـ ، أ ≠ صفرًا ، أ، ب، حـ ∋ ح

٣٣٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافىء الذي:

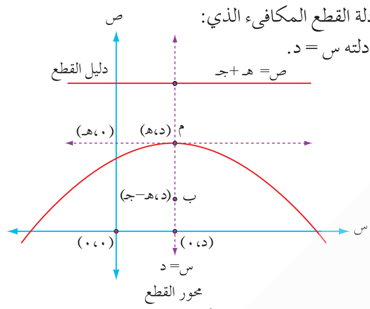
١) محوره يوازي محور الصادات ومعادلته س = د.

٢) ورأسه في النقطة (د ، هـ).

٣) وبؤرته ب (د، هـ − جـ).

٤) ومعادلة دليله ص = هـ + جـ.

مما سبق تجد أن منحنى القطع المكافىء يتجه نحو الأسفل، لاحظ الشكل (٥−٢٤).



الشكل (٥−٢٤)

مثال (٤)

عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافىء،
(ص − ٢)^{٢} = ٨ (س − ٣)، ثم ارسم منحناه.

الحل

بمقارنة المعادلة (ص− ٢)^{٢} = ٨ (س −٣) بالصورة القياسية لها وهي (ص − هـ)^{٢} = ٤ حـ (س − د) تجد أن:

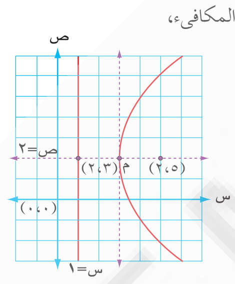
الرأس (د ، هـ) = (٣ ، ٢) ، ٤ جـ = ٨ ، ومنه جـ = ٢

إذن البؤرة (جـ + د ، هـ) = (٥ ، ٢)

ومعادلة المحور ص = هـ أي أن: ص = ٢

ومعادلة الدليل س = د − جـ أي أن: س = ١

والشكل (٥−٢٥) يمثّل منحنى هذا القطع المكافىء.



الشكل (٥−٢٥)

تدريب (٤)

عين الرأس والبؤرة ومعادلة المحور ومعادلة الدليل للقطع المكافىء:
(س − ٢)^{٢} = ١٢ (ص − ٣)، ثم ارسم منحناه.

٣٣٢

تدريب (٥)

اكتب معادلة القطع المكافىء الذي بؤرته النقطة (١،١) ، ومعادلة دليله ص = − ٣، ثم ارسم منحناه.

مثال (٦)

جد معادلة القطع المكافىء الذي محوره يوازي محور السينات، وبؤرته (−٣ ، ٣) ويمر بالنقطة (٠ ، −١) ويقع رأسه إلى يمين بؤرته.

الحل

بما أن محوره يوازي محور السينات ويقع رأسه إلي يمين بؤرته، فإن معادلة هذا القطع هي على الصورة (ص−هـ)^{٢} = − ٤ حـ (س −د) حيث النقطة (د ، هـ) رأس القطع ، جـ البعد البؤري للقطع وبؤرته (د − جـ ، هـ) لكن البؤرة (−٣ ، ٣) تقع على محور القطع الذي معادلته ص = هـ إذن معادلة محور القطع هي: ص = ٣ لاحظ الشكل (٥−٢٧)

إذن هـ = ٣، د − جـ = − ٣

ومنه د = حـ − ٣

وعليه، يكون رأس القطع المكافىء (حـ − ٣ ، ٣)

ومعادلته هي:

(ص − ٣)^{٢} = − ٤ حـ (س − (حـ − ٣))

بما أن منحنى القطع المكافيء يمر بالنقطة (٠ ، − ١)

إذن، (١− ٣−)^{٢} = − ٤ حـ (٠ − (حـ − ٣)) ومنه

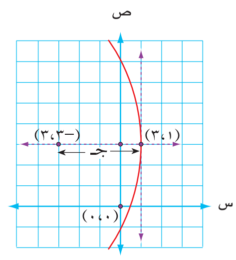
١٦ = −٤ حـ (− حـ + ٣)

حـ^{٢} − ٣ جـ − ٤ = ٠

(حـ − ٤) (جـ + ١) = ٠ ومنه حـ = ٤ أو حـ = − ١ يهمل لأن المسافة موجبة.

وبما أن جـ هي المسافة بين البؤرة والرأس، إذن جـ = ٤ ، ورأس القطع هو (١ ، ٣) وتكون معادلة القطع المكافىء هي:

(ص − ٣)^{٢} = − ١٦ (س − ١)



الشكل (٥−٢٧)

٣٣٤

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

− حل سؤال (٩) من تمارين ومسائل الكتاب .

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

− **الأداة:** اختبار قصير.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٤ القطع المكافئ

النتاجات الخاصة

– يتعرّف القطع المكافئ.
– يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
– يحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته.
– يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.

المفاهيم والمصطلحات

القطع المكافئ ، الدليل ، البؤرة ، محور القطع ، رأس القطع المكافئ.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– مناقشة مع الطلبة أسئلة الواجب البيتي، ثم تكليف مجموعة من الطلبة عرض الأسئلة بحيث يعرض كل طالب حل مسألة واحدة.
– مناقشة مثال (٧) مع الطلبة.
– تكليف الطلبة حل التدريب (٧) في الدفاتر.

معلومات إضافية

الملاحق
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تدريب (٦)

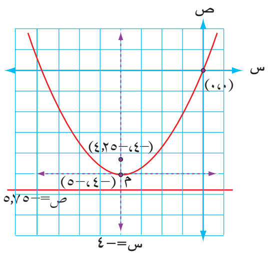
جد معادلة القطع المكافيء الذي رأسه النقطة (٢ ، ١) ويمر منحناه بالنقطة (٤ ، ٥) ومحوره يوازي محور الصادات.

مثال (٧)

جد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافيء الذي معادلته:
س^{٢}+ ٨ س – ٣ ص + ١ = صفرًا.

الحل

تكتب المعادلة س^{٢} + ٨ س –٣ ص + ١ = ٠ بالشكل س^{٢} + ٨ س = ٣ ص – ١ وبإكمال المقدار (س^{٢} + ٨ س) إلى مربع كامل تجد أن:
س^{٢} + ٨ س + (٤)^{٢} = ٣ ص – ١ + (٤)^{٢} أي أن
(س + ٤)^{٢} = ٣ (ص + ٥) ، وهي على الصورة العامة
للقطع المكافيء (س – د)^{٢} = ٤ حـ (ص – هـ)
وعليه فإن:
رأسه النقطة (–٤ ، –٥)
إذن ٤ جـ = ٣ ومنها حـ = ٠,٧٥
بؤرته النقطة (–٤ ، – ٤,٢٥)
معادلة دليله ص = – ٥,٧٥
معادلة محوره س = – ٤
والشكل (٥ –٢٨) يمثل منحنى القطع.



الشكل (٥–٢٨)

تدريب (٧)

جد إحداثيات الرأس والبؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافيء الذي معادلته:
٤ ص^{٢} – ٤ س – ٨ ص =٣

٣٣٥

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– حل سؤال (١٠) من تمارين ومسائل الكتاب.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

– **الأداة:** اختبار قصير.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

– الاستراتيجية: الملاحظة.

– **الأداة:** قائمة الشطب، سجّل بعض الملاحظات عن الطلبة الذين تميّزوا في أدائهم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) جد معادلة القطع المكافئ، في كل مما يأتي، ثم ارسم المنحنى البياني له.

أ) الرأس هو النقطة (٠ ، ٠) والبؤرة هي النقطة (−٥ ، ٠).

ب) الرأس هو النقطة (٣ ، ٢) والبؤرة هي النقطة (٣ ، −١).

جـ) الرأس هو النقطة (−١ ، −١) والبؤرة هي النقطة (−٥ ، −١).

د) الرأس هو النقطة (٠ ، ٠)، ومعادلة الدليل ص = ١,٢٥.

هـ) الرأس هو النقطة (٢ ، −٥)، ومعادلة الدليل س = −٧.

و) البؤرة هي النقطة (٠ ، ٠)، ومعادلة الدليل ص = ٦.

ز) البؤرة هي النقطة (−٣ ، ١)، ومعادلة الدليل س = −٥.

٢) جد إحداثيي الرأس والبؤرة ومعادلتي الدليل والمحور لكل من القطوع الآتية:

أ) (ص + ٢)² = (س − ١)

ب) ص² = −٨ (س − ٢)

جـ) (س + ٢)² = ١٢ (ص − ٢)

د) س² − ١٢ ص + ٢٤ = ٠

هـ) ٨ س − ٩ص² + ١٨ ص + ٣٣ = ٠

٣) قذف جسم رأسياً إلى أعلى حسب العلاقة: ف(ن) = ٢٠ن − ٥ن²، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، احسب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم مستخدماً تعريف القطع المكافئ.

٤) جد معادلة القطع المكافئ، الذي محوره يوازي محور الصادات ورأسه يقع على المستقيم ص = س، ويمر بالنقطتين (٤ ، ٣)، (٠ ، ٣).

٥) اكتب معادلة القطع المكافئ، الذي بؤرته النقطة (٣ ، ١) ومحوره يوازي محور السينات ويمر منحناه بالنقطة (٠ ، ٥).

٦) ارسم منحنى القطع المكافئ، الذي معادلته ٣ س² − ٩س − ٥ ص − ٩ = ٠ موضحاً عليه عناصره.

٣٣٦

٧) جد معادلة القطع المكافيء الذي يمر بالنقاط (٣ ،٢)، (٦ ،١) ، (٠ ، ١) ودليله يوازي محور السينات.

٨) جد معادلة القطع المكافيء الذي يمر بالنقطتين (٨ ، ١٠)، (٤ ، ٤) ومحوره هو محور السينات.

٩) جد معادلة القطع المكافيء الذي معادلة محوره س = ٢ ، ومعادلة دليله ص = ١ ، ويمر منحناه بالنقطة (٦ ، ٦).

١٠) تتحرك نقطة و (س،ص) في المستوى الديكارتي بحيث يتحدد موقعها في اللحظة ن≥٠، بالمعادلتين: س = جتا ن − جا ن ، ص = جا ٢ن ، جد معادلة مسار النقطة و، ثم بين نوع هذا المسار.

٣٣٧

الدرس ٥-٥ القطع الناقص

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الناقص.
- يكتب معادلة القطع الناقص إذا عُلمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

المفاهيم والمصطلحات

القطع الناقص، مركز القطع، رأسي القطع، المحور الأكبر (البؤري)، المحور الأصغر، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس المباشر

- المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي: مفهوم المحل الهندسي ومعادلته، المسافة بين نقطتين، بعد نقطة عن مستقيم، وذلك من خلال الأسئلة، مثل :
  - جد بعد النقطة (٢ ، ٥) عن النقطة (−٣ ، ٤).
  - جد بعد النقطة (١ ، ٤) عن المستقيم ص = ٧.

مجموعات تعاونية

- مناقشة مقدمة الدرس في كتاب الطالب، ثم تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية من (٤ – ٦) طلاب، واطلب من كل مجموعة تنفيذ ورقة العمل (٣ ،) التي تهدف إلى استنتاج تعريف القطع الناقص وخواصه وتحديد عناصره (مركزه، رأساه، بؤرتاه، محوره الأكبر) البؤري (ومحوره الأصغر).
- التجول بين الطلبة أثناء تنفيذ ورقة العمل وإرشادهم ، لتصل كل مجموعة إلى استنتاج تعريف القطع الناقص وخواصه وعناصره (مركزه، رأساه، بؤرتاه، محوره الأكبر (البؤري)، محوره الأصغر).
- عرض نتائج الطلبة ، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابة الاستنتاجات النهائية على السبورة مع تقديم مجموعة كافية من الأمثلة لدعم استنتاجات الطلبة التي توصلوا إليها .

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٥-٥ القطع الناقص

The Ellipse

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تتعرف القطع الناقص.
٢– تكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية.
٣– تحدد عناصر القطع الناقص إذا علمت معادلته.
٤– تميز القطع الناقص إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
٥– تمثل القطع الناقص بيانيًّا.
٦– تتعرف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

تعرفت في الدرس السابق أحد أنواع القطوع المخروطية وهو القطع المكافىء، وستتعرف في هذا الدرس نوعًا آخر من القطوع المخروطية وهو القطع الناقص، وسوف تتناول تعريفه والصورة القياسية لمعادلته وبعض خصائصه كما يأتي:

لتكن النقطة ن (س،ص) متحركة في المستوى الإحداثي، بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين: ب_1 (−جـ ، ٠) ، ب_2 (جـ ، ٠) يساوي دائمًا مقدارًا ثابتًا.

وبما أن النقطتين ب_1 (−جـ ، ٠) ، ب_2 (جـ ، ٠) ثابتتان وهما تقعان على محور السينات فإن البعد بينهما يساوي ٢جـ.

وإذا عرفنا أن مجموع بعدي النقطة ن (س ، ص) عن النقطتين ب_1 ، ب_2 يساوي ٢أ (المقدار الثابت) حيث إن: ٢ أ > ٢ جـ ، وكل من أ ، جـ ∈ ح +

أي أن : ن ب_1 + ن ب_2 = ٢ أ ، انظر الشكل (٥–٢٩) ومنه

$$\sqrt{(\text{س}-\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}}+\sqrt{(\text{س}+\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}}=\text{٢أ}$$

$\sqrt{(\text{س}-\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}}=\text{٢أ}-\sqrt{(\text{س}+\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}}$ ، وبتربيع طرفي المعادلة تحصل على:

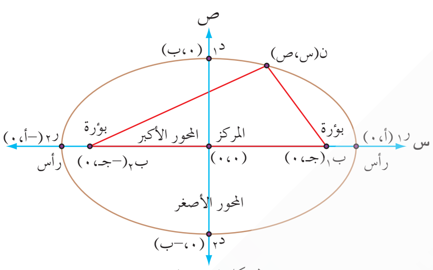
$$(\text{س}-\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}=\text{٤أ}^{٢}-\text{٤أ}\sqrt{(\text{س}+\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}}+(\text{س}+\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}$$

$$\text{س}^{٢}-\text{٢جـ س}+\text{جـ}^{٢}+\text{ص}^{٢}=\text{٤أ}^{٢}-\text{٤أ}\sqrt{(\text{س}+\text{جـ})^{٢}+\text{ص}^{٢}}+(\text{س}^{٢}+\text{٢جـ س}+\text{جـ}^{٢})+\text{ص}^{٢}$$

٣٣٨

واضح من الشكل (٥ – ٣٠) أن للقطع الناقص محورين للتماثل هما :

المستقيم المار بالبؤرتين ب_1، ب_2 والمستقيم العمودي عليه والمنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{ب}_1\text{ب}_2}$. تسمى نقطة تقاطع محوري التماثل **مركز القطع الناقص**، وتسمى المسافة بين البؤرتين ب_1 ، ب_2 **بالبعد البؤري** ، كما أن منحنى القطع الناقص



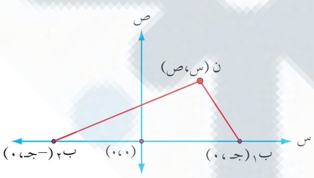
الشكل (٥–٣٠)

يتقاطع مع المحور المار بالبؤرتين ب_1 ، ب_2 في نقطتين هما ر_1(أ ، ٠) ، ر_2(− أ ، ٠) وتسميان **رأسي القطع الناقص** ، وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{\text{ر}_1\text{ر}_2}$ المحور الأكبر (**المحور البؤري**) بينما يتقاطع منحنى القطع مع المحور العمودي على المحور الأكبر في نقطتين هما د_1(٠ ، ب)، د_2(٠ ، − ب) ، وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{\text{د}_1\text{د}_2}$ **المحور الأصغر** للقطع الناقص.

معادلة القطع الناقص

أولاً : إذا كان مركز القطع الناقص نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر يطابق محور السينات

افرض أن البؤرتين ب_1 ، ب_2 تقعان على محور السينات وهما ب_1 (جـ ، ٠)، ب_2 (−جـ ، ٠)، وأن المسافة بينهما (البعد البؤري) تساوي (٢ جـ)، وأن المقدار الثابت المشار إليه بالتعريف هو ٢أ ، حيث ٢أ > ٢جـ ، وكل من أ ، جـ ∈ ح+ ويتضح من الشكل (٥–٣١) ومن خلال التعريف أنه لا بد لأي نقطة ن(س،ص) تقع على منحنى القطع الناقص أن تحقق المعادلة:



الشكل (٥–٣١)

٣٤٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

وبتبسيط هذه المعادلة تجد أن:

$\text{أ}^2 + \text{جـ س} = \text{أ}\sqrt{(\text{س}+\text{جـ})^2 + \text{ص}^2}$ وبتربيع طرفي هذه المعادلة تجد أن:

$\text{أ}^4 + 2\text{أ}^2\text{جـ س} + \text{جـ}^2\text{س}^2 = \text{أ}^2\text{س}^2 + 2\text{أ}^2\text{جـ س} + \text{أ}^2\text{جـ}^2 + \text{أ}^2\text{ص}^2$

ومنه $(\text{أ}^2 - \text{جـ}^2)\text{س}^2 + \text{أ}^2\text{ص}^2 = \text{أ}^2(\text{أ}^2 - \text{جـ}^2)$ وبقسمة طرفي المعادلة على $\text{أ}^2(\text{أ}^2 - \text{جـ}^2)$ تجد أن:

$$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2} = 1 \quad ....(1)$$

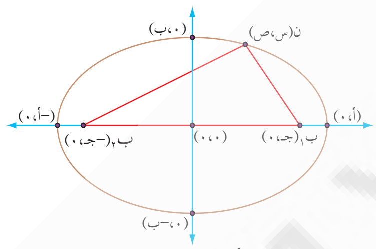
وبما أن أ > جـ ، وأن كلًّا من العددين أ ، جـ موجب، فإن $\text{أ}^2 > \text{جـ}^2$ ومنه $\text{أ}^2 - \text{جـ}^2 > 0$

وإذا عرفنا المقدار $\text{ب}^2 = \text{أ}^2 - \text{جـ}^2$ تجد أن المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ب}^2} = 1$$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص).

وأن منحنى المحل الهندسي لهذه النقطة ن (س ،ص) يسمى **قطعًا ناقصًا** لاحظ الشكل (٥ – ٢٩).



الشكل (٥–٢٩)

وبشكل عام : لتكن ب_1 ، ب_2 نقطتين في المستوى الإحداثي، المسافة بينهما (٢ جـ) ، وليكن (٢أ) عددًا حقيقيًا موجبًا حيث ٢أ > ٢جـ، وإذا كانت النقطة ن (س،ص) تتحرك في المستوى على المنحنى بحيث يكون مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين ب_1،ب_2 يساوي المقدار الثابت (٢أ) فإنها ترسم منحنى هو المحل الهندسي لها ويسمى **قطعًا ناقصًا**، وعليه، فإن:

تعريف

القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقطة ن (س،ص) المتحركة في المستوى والتي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب_1 ، ب_2 (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

٣٣٩

$\text{ن ب}_1 + \text{ن ب}_2 = 2\text{أ}$ ، ومنه:

$\sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} + \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} = 2\text{أ}$

$\sqrt{(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} = 2\text{أ} - \sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2}$ وبتربيع طرفي المعادلة تحصل على:

$(\text{س} - \text{جـ})^2 + \text{ص}^2 = 4\text{أ}^2 - 4\text{أ}\sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} + (\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2$

$\text{س}^2 - 2\text{جـ س} + \text{جـ}^2 + \text{ص}^2 = 4\text{أ}^2 - 4\text{أ}\sqrt{(\text{س} + \text{جـ})^2 + \text{ص}^2} + \text{س}^2 + 2\text{جـ س} + \text{جـ}^2 + \text{ص}^2$

وبتبسيط هذه المعادلة تجد أن:

$\text{أ}^2 + \text{جـ س} = \text{أ}\sqrt{(\text{س}+\text{جـ})^2 + \text{ص}^2}$ وبتربيع طرفي هذه المعادلة تجد أن:

$\text{أ}^4 + 2\text{أ}^2\text{جـ س} + \text{جـ}^2\text{س}^2 = \text{أ}^2\text{س}^2 + 2\text{أ}^2\text{جـ س} + \text{أ}^2\text{جـ}^2 + \text{أ}^2\text{ص}^2$

ومنه $(\text{أ}^2 - \text{جـ}^2)\text{س}^2 + \text{أ}^2\text{ص}^2 = \text{أ}^2(\text{أ}^2 - \text{جـ}^2)$ وبقسمة طرفي المعادلة على $\text{أ}^2(\text{أ}^2 - \text{جـ}^2)$ تجد أن:

$$\frac{\text{س}^2}{\text{أ}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{أ}^2 - \text{جـ}^2} = 1 \quad ....(1)$$

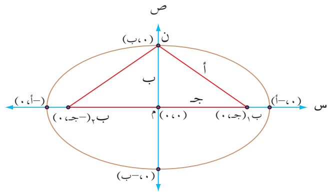
وبما أن أ > جـ من تعريف القطع الناقص، وأن كلاًّ من العددين أ،جـ موجب فان $\text{أ}^2 > \text{جـ}^2$ ومنه $\text{أ}^2 - \text{جـ}^2 > 0$

وإذا أخذت النقطة المتحركة ن(س،ص) الوضع المبين في الشكل (٥– ٣٢) تجد أن المثلث ن ب_1 ب_2 متساوي الساقين أي أن : $\text{ن ب}_1 = \text{ن ب}_2 = \text{أ}$ ، وبما أن محوري القطع الناقص يعامد كل منهما الآخر عند مركز القطع م فإن:

$\text{م ب}_1 = \text{جـ}$ (نصف البعد البؤري) ، م ن = ب (نصف طول المحور الأصغر)

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث م ن ب_1 القائم الزاوية في م تجد أن:

$\text{أ}^2 = \text{ب}^2 + \text{جـ}^2$ ومنه $\text{ب}^2 = \text{أ}^2 - \text{جـ}^2$



الشكل (٥–٣٢)

٣٤١

الأخطاء الشائعة

– تتركز الصعوبة لدى الطلبة في هذا الدرس حول : اختيار صورة المعادلة المطلوبة عند إيجادها أو عند تحديد عناصر القطع، عالج ذلك بتأكيد الرسم التقريبي لمعطيات المسألة .

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

١) عيّن عناصر (مركزه، رأسه ، وبؤرتيه ، ومحوره الأكبر (البؤري)، ومحوره الأصغر) القطوع الآتية :

أ) $\frac{\text{س}^2}{25} + \frac{\text{ص}^2}{16} = 1$

ب) $\frac{\text{س}^2}{36} + \frac{\text{ص}^2}{100} = 1$

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب.
– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.
– **الأداة**: اختبار قصير.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٥ القطع الناقص

النتاجات الخاصة

– يتعرّف القطع الناقص.
– يكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
– يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة .
– يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص .

المفاهيم والمصطلحات

القطع الناقص، مركز القطع، رأسي القطع، المحور الأكبر (البؤري)، المحور الأصغر، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس المباشر

– رسم محورين متعامدين م س ، م ص في مستوى القطع الناقص الذي مركزه (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر (البؤري) منطبقًا على محور السينات، وبؤرتاه النقطة (± جـ ، ٠) ، وقطع آخر محوره الأكبر (البؤري) منطبقًا على محور الصادات وبؤرتاه (٠ ، ± جـ)، واطلب إلى الطلبة الإجابة عن الآسئلة الآتية:

- افرض أن النقطة ن (س ، ص) تقع على منحنى القطع الناقص، واستعمل تعريف القطع الناقص في تعيين العلاقة بين س ، ص. تجوّل بين الطلبة وتابع حلولهم.
- استخدم تعريف القطع الناقص ونظرية فيثاغورس للتوصل مع الطلبة إلى أن $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ للتوصل إلى الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص:

$$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١ \text{ ، } أ > ب$$

– مناقشة المثالين (١ ، ٢) مع الطلبة، وتكليفهم حل التدريبين (١ ، ٢) في دفاترهم .

معلومات إضافية

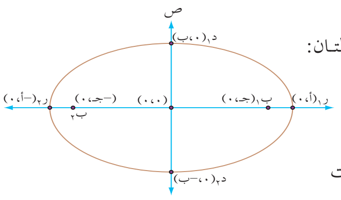
الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

وبتعويض المقدار $ب^2$ عن المقدار $أ^2 - جـ^2$ في المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$\boxed{\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١}$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الناقص الذي فيه:

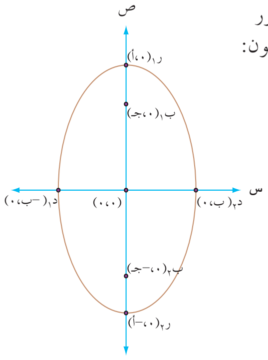


الشكل (٥–٣٣)

١) المركز نقطة الأصل (٠ ، ٠).
٢) البؤرتان على محور السينات وهما النقطتان: $ب_1$ (جـ ، ٠) ، $ب_2$ (– جـ ، ٠).
٣) الرأسان هما النقطتان: $ر_1$ (أ ، ٠)، $ر_2$ (–أ ، ٠).
٤) المحور الأكبر منطبق على محور السينات وطوله يساوي ٢أ.
٥) المحور الأصغر منطبق على محور الصادات وطوله يساوي ٢ب .
٦) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين $ب_1$ ، $ب_2$) يساوي ٢جـ.
٧) $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ لاحظ الشكل (٥–٣٣).

ثانيًا: إذا كان مركز القطع الناقص نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوره الأكبر يطابق محور الصادات:

إذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص منطبقًا على محور الصادات ومركزه في نقطة الأصل ففي هذه الحالة تكون:



الشكل (٥–٣٤)

بؤرتاه هما النقطتين: $ب_1$ (٠ ، جـ)، $ب_2$ (٠ ، –جـ)، ورأساه هما النقطتين: $ر_1$ (٠، أ)، $ر_2$ (٠ ، –أ) ، لاحظ الشكل (٥– ٣٤).

في هذه الحالة تكون معادلة القطع الناقص بالصورة القياسية هي :

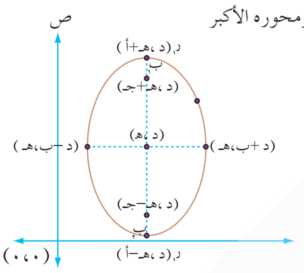
$$\boxed{\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{ب^2} = ١}$$

٣٤٢

رابعًا : إذا كان مركز القطع الناقص النقطة (د،هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور الصادات.

أما إذا كان مركز القطع الناقص النقطة (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور الصادات، فإن بؤرتي القطع الناقص هما: $ب_1$ (د،جـ + هـ) ، $ب_2$ (د،جـ – هـ) لاحظ الشكل (٥–٣٦)

وبإجراء الخطوات نفسها كما في الحالة السابقة تحصل على المعادلة:



الشكل (٥–٣٦)

$$\boxed{\frac{(س - د)^2}{ب^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} = ١}$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الناقص الذي فيه:

١) المركز النقطة (د،هـ)
٢) البؤرتان واقعتان على محور الصادات وهما النقطتان: $ب_1$ (د،هـ + حـ) ، $ب_2$ (د،هـ– حـ)
٣) الرأسان هما النقطتان: $ر_1$ (د، هـ + أ) ، $ر_2$ (د، هـ –أ)
٤) المحور الأكبر يوازي محور الصادات ومعادلته س = د ، وطوله يساوي ٢أ
٥) المحور الأصغر يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ ، وطوله يساوي ٢ب
٦) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢جـ.
٧) $جـ^2 = أ^2 - ب^2$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص

من تعريف القطع الناقص فإن جـ < أ وإن كل من العددين أ ، حـ موجب.

وبقسمة طرفي المتباينة حـ < أ على العدد أ ينتج أن $\frac{جـ}{أ} < ١$،

تسمى النسبة ($\frac{جـ}{أ}$) الاختلاف المركزي للقطع الناقص ويرمز له بالرمز (هـ) ، وكما تلاحظ أن قيمة هـ < ١، ولهذا سمي القطع ناقصًا، لأن اختلافه المركزي نقص عن الواحد.

تعريف

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور الأكبر.

٣٤٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

ثالثًا: إذا كان مركز القطع الناقص النقطة (د،هـ) ومحوره الأكبر يوازي محور السينات.

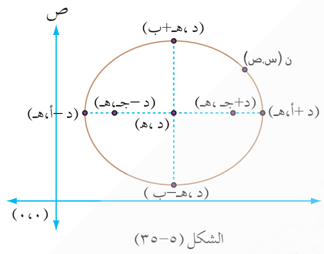
إذا كان مركز القطع الناقص النقطة (د ، هـ) ومحوره الأكبر يوازي السينات فإن بؤرتي القطع الناقص هما: $ب_{١}$ (د+جـ ، هـ) ، $ب_{٢}$ (د−جـ ، هـ) ،ومن خلال تعريف القطع الناقص تجد أن:

ن $ب_{١}$ + ن $ب_{٢}$ = ٢أ ومنه.

$$\sqrt{((س-(د+جـ))^{٢}+(ص-هـ)^{٢}} + \sqrt{((س-(د-جـ))^{٢}+(ص-هـ)^{٢}} = ٢أ$$

وبإجراء التبسيط لهذه المعادلة كما في الحالة السابقة تحصل على المعادلة:

$$\boxed{\frac{(س-د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص-هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١}$$



الشكل (٥−٣٥)

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الناقص الذي فيه:

١) المركز النقطة (د، هـ).
٢) البؤرتان على محور السينات وهما النقطتان:
$ب_{١}$(د + جـ، هـ)، $ب_{٢}$(د − جـ، هـ).
٣) الرأسان هما النقطتان $ر_{١}$(د + أ، هـ) ، $ر_{٢}$(د − أ ، هـ).
٤) **المحور** الأكبر يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ ، وطوله يساوي ٢أ
٥) **المحور** الأصغر يوازي محور الصادات ومعادلته س = د ، وطوله يساوي ٢ب.
٦) **البعد البؤري** (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢ جـ.
٧) $جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$ لاحظ الشكل (٥−٣٥).

٣٤٣

مثال (١)

عيّن عناصر القطع الناقص $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$، ثم ارسم منحناه.

الحل

المعادلة $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ هي على الصورة $\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ ، حيث أ > ب، ومحوره الأكبر يطابق محور السينات وفيه:

$أ^{٢}$ = ٢٥ ، ومنه أ = ٥

$ب^{٢}$ = ٩ ، ومنه ب = ٣

$جـ^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢} = ٢٥ - ٩ = ١٦$ ،ومنه جـ = ٤

وعليه، فإن:

بؤرتاه: $ب_{١}$ (جـ ، ٠) = (٤ ، ٠) ، $ب_{٢}$ (− جـ ، ٠) = (−٤ ، ٠)

رأساه: $ر_{١}$ (أ ، ٠) = (٥، ٠) ، $ر_{٢}$ (− أ ، ٠) = (− ٥ ، ٠)

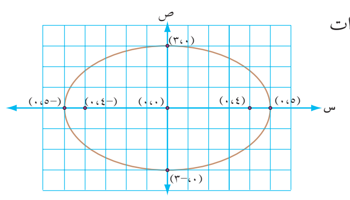
معادلة محوره الأكبر هي ص = ٠ ، وطوله = ٢أ = ٢ × ٥ = ١٠ وحدات

معادلة محوره الأصغر هي س = ٠، وطوله = ٢ب = ٢ × ٣ = ٦ وحدات

بعده البؤري = ٢ جـ = ٢ × ٤ = ٨ وحدات

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٤}{٥}$

ويبيّن الشكل (٥ − ٣٧) منحنى القطع الناقص



الشكل (٥−٣٧)

تدريب (١)

عيّن عناصر القطع الناقص $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{٢٥} = ١$ ، ثم ارسم منحناه.

٣٤٥

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

٢) جد معادلة القطع الناقص في كل من الحالات الآتية :

أ) المركز (٠ ، ٠) ، بؤرتاه (±٣ ، ٠)، وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات.

ب) المركز (٠ ، ٠) ، رأساه (٠ ، ±٤)، وطول محوره الأصغر ٦ وحدات.

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية**: القلم والورقة.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٥ القطع الناقص

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الناقص.
- يكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

المفاهيم والمصطلحات

القطع الناقص، مركز القطع، رأسي القطع، المحور الأكبر (البؤري)، المحور الأصغر، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس المباشر

- رسم محورين متعامدين م س ، م ص في مستوى القطع الناقص الذي مركزه (د ، هـ) ومحوره الأكبر (البؤري) موازيًا لمحور السينات وبؤرتاه النقطة (د ± جـ ، هـ) ، وقطع آخر محوره الأكبر (البؤري) موازيًا لمحور الصادات وبؤرتاه (د ، هـ ± جـ)، واطلب إلى الطلبة الإجابة عن الآسئلة الآتية : افرض أن النقطة ن (س ، ص) تقع على منحنى القطع الناقص ، واستعمل تعريف القطع الناقص في تعيين العلاقة بين س ، ص. تجوّل بين الطلبة وتابع حلولهم للتوصل إلى الصور الآتية لمعادلة القطع الناقص :

$$\frac{(س-د)^2}{أ^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{ب^2} = ١ \text{ ، } أ > ب$$

$$\frac{(س-د)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{أ^2} = ١ \text{ ، } أ > ب$$

- مناقشة المثالين (٣ ، ٤) مع الطلبة وتكليفهم حل التدريبين (٣ ، ٤) في دفاترهم.
- مناقشة مثال (٥) مع الطلبة وتكليفهم فك حدود معادلة القطع الناقص وذلك من أجل التوصل إلى أنه يمكن كتابة معادلة القطع الناقص على الصورة : أ $س^2$ + ب $ص^2$ + جـ س + د ص + هـ = ٠ ، أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية ، أ × ب > صفر .
- كلّف الطلبة بحل تدريب (٥) في دفاترهم .

معلومات إضافية

مثال (٢)

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠) ويتقاطع مع محور السينات عند س = ٤، −٤

الحل

بما أن البؤرتين تقعان على محور السينات، فإن المحور الأكبر للقطع يقع أيضًا على محور السينات، إذن معادلة القطع هي: $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = ١$، حيث $أ^2 = ب^2 + جـ^2$

البؤرتان (٢ ،٠) ، (−٢ ، ٠)، ومنه تجد:

أن البعد البؤري ٢ جـ = ٤ أي أن جـ = ٢

ورأساه هما نقط تقاطعه مع محور السينات، أي أن:

طول محوره الأكبر ٢أ = ٨ أي ان أ =٤

$أ^2 = ب^2 + جـ^2$ أي أن ١٦ = $ب^2$ +٤ ، ومنه $ب^2$ = ١٢،

وبذلك تكون معادلة القطع هي: $\frac{س^2}{١٦} + \frac{ص^2}{١٢} = ١$

تدريب (٢)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر على محور الصادات، وطول محوره الأصغر يساوي ٤ وحدات، وبعده البؤري يساوي ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة، ثم ارسم منحناه.

٣٤٦

مثال (٤)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (−٣، ٢) ، وأحد رأسيه النقطة (−٣، −٤) واختلافه المركزي يساوي ٠,٥، ثم عين باقي عناصره وارسم منحناه.

الحل

من المعطيات المحور الأكبر يوازي محور الصادات، إذن تكون معادلة القطع الناقص على الصورة: $\frac{(س-د)^2}{ب^2} + \frac{(ص-هـ)^2}{أ^2} = ١$ ، حيث المركز (د،هـ) = (−٣ ، ٢)

وبما أن أ تساوي بعد أحد الرأسين عن المركز، فإن أ = ٦

ومن الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{١٠}$

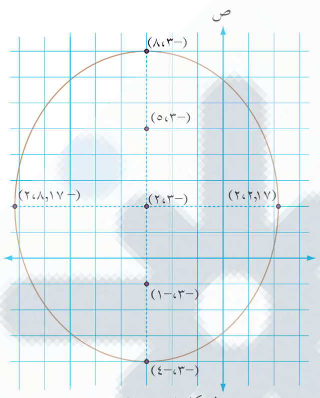
وبالتعويض عن قيمة أ = ٦ تجد أن جـ = ٣

وبالتعويض عن قيم كل من أ = ٦، جـ = ٣ في العلاقة $أ^2 - ب^2 = جـ^2$ تجد أن $ب^2$ = ٢٧ وبالتعويض عن قيم د، هـ، $أ^2$، $ب^2$ في المعادلة تحصل على:

وهذا القطع الناقص فيه:

١) البؤرتان هما: $ب_1$ (د،هـ+جـ) ، $ب_2$ (د،هـ − جـ) أي أن $ب_1$ (−٣ ، ٥) ، $ب_2$ (−٣، −١)

٢) الرأسان هما: $ر_1$ (د، هـ +أ)، $ر_2$ (د، هـ −أ) أي أن $ر_1$ (−٣ ، ٨)، $ر_2$ (−٣، −٤)



الشكل (٥ – ٣٨)

٣) المحور الأكبر يوازي محور الصادات ومعادلته س = −٣ ، وطوله = ٢أ = ١٢وحدة

٤) المحور الأصغر يوازي محور السينات ومعادلته ص = ٢ ، وطوله = ٢ب = ٢ $\sqrt{٢٧}$ وحدة

٥) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين) = ٢ جـ = ٦ وحدات والشكل (٥ – ٣٨) يمثل منحنى القطع الناقص.

٣٤٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

مثال (٣)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (٣،٢)، وإحدى بؤرتيه النقطة (–١ ، ٣) ، وطول محوره الأكبر يساوي $٢\sqrt{١٠}$ وحدة

الحل

من المعطيات مركز القطع النقطة (٢ ،٣) والمحور الأكبر يوازي محور السينات وطوله (٢أ)،

ومنه تكون معادلة القطع الناقص هي $\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

حيث المركز (٢ ،٣) أي ان د = ٢، هـ = ٣

$٢أ = ٢\sqrt{١٠}$ أي أن $أ = \sqrt{١٠}$

وبما أن جـ = نصف البعد البؤري أي بعد إحدى البورتين عن المركز، فإن حـ = ٣

وبما أن $أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$ تجد أن $١٠ = ب^{٢} + ٩$ ومنه $ب^{٢} = ١$،

وبالتعويض عن قيم كل من د، هـ، $أ^{٢}$، $ب^{٢}$ في المعادلة:

$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ تجد أن:

معادلة القطع الناقص المطلوبة هي: $\frac{(س - ٢)^{٢}}{١٠} + \frac{(ص - ٣)^{٢}}{١} = ١$

تدريب (٣)

عيّن عناصر القطع الناقص $\frac{(س - ٢)^{٢}}{٩} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٢٥} = ١$، ثم ارسم منحناه.

٣٤٧

تدريب (٤)

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (١، ٢) وإحدى بؤرتيه النقطة (– ٣ ، ٢) واختلافه المركزي يساوي ٠,٨، ثم عيّن باقي عناصره وارسم منحناه.

مثال (٥)

قطع ناقص اختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$ وأحد رأسيه (٣ ، ١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (١ ، ١) جد معادلته.

الحل

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة منه تساوي أ – جـ ومنه

أ – جـ = ٢ .... (١) لاحظ الشكل (٥ – ٣٩)

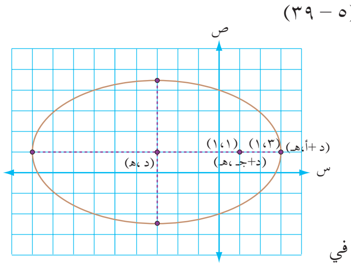
الاختلاف المركزي $\frac{جـ}{أ} = \frac{٢}{٣}$ ، ومنه

$جـ = \frac{٢}{٣} أ$ وبالتعويض في المعادلة (١)

تجد أن:

$أ - \frac{٢}{٣} أ = ٢$ ومنه أ = ٦ ، جـ = ٤

وبالتعويض عن قيم كل من أ = ٦، حـ = ٤ في العلاقة $أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢}$ ، تجد أن $ب^{٢} = ٢٠$



الشكل (٥ – ٣٩)

وبما أن محور القطع يوازي محور السينات ومعادلته ص = ١، والمسافة بين أحد الرأسين والمركز (د ، هـ) هي (أ) وتساوي ٦ وحدات تجد أن المركز (د ، هـ) = (–٣ ، ١) انظر الشكل (٥ – ٣٩) وبالتعويض عن قيم كل من د = – ٣ ، هـ = ١، $أ^{٢} = ٣٦$، $ب^{٢} = ٢٠$ في المعادلة:

$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ ، تحصل على معادلة هذا القطع الناقص وهي:

$$\frac{(س + ٣)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص - ١)^{٢}}{٢٠} = ١$$

٣٤٩

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– عيّن عناصر (مركزه، رأساه ، بؤرتاه، محوره الأكبر (البؤري)، ومحوره الأصغر). القطوع الآتية:

- $\frac{(س - ٢)^{٢}}{٨١} + \frac{(ص - ٤)^{٢}}{٣٦} = ١$
- $\frac{(س - ١)^{٢}}{٣٦} + \frac{(ص - ٢)^{٢}}{١٦} = ١$

– جد معادلة القطع الناقص في كل من الحالات الآتية :

- المركز (–٣ ، ٠)، وطول محوره الأكبر ١٠ وحدات، وطول محوره الأصغر ١٠ وحدات.
- المركز (٤ ، –١) ، رأساه (١٣ ، –١) (–٥ ، –١)، وطول محوره الأصغر ١٠ وحدات.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

– **الأداة:** اختبار قصير.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٥ القطع الناقص

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الناقص.
- يكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

المفاهيم والمصطلحات

القطع الناقص، مركز القطع، رأسا القطع، المحور الأكبر (البؤري)، المحور الأصغر، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي.
- تكليف مجموعة من الطلبة عرض حلولهم.
- مناقشة مثال (٦) مع الطلبة، وتكليفهم حل التدريب (٦) في دفاترهم.

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

وبفكّ حدود هذه المعادلة لتحويلها إلى الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص: تجد أن المعادلة تصبح على الصورة:

٢٠ (س+٣)^{٢} + ٣٦ (ص−١)^{٢} = ٧٢٠

٢٠ (س^{٢}+٦س+٩) + ٣٦ (ص^{٢} − ٢ص +١) − ٧٢٠ = ٠

٢٠س^{٢} + ١٢٠س + ١٨٠ + ٣٦ ص^{٢} − ٧٢ ص + ٣٦ − ٧٢٠ = ٠

٢٠س^{٢}+ ٣٦ ص^{٢} + ١٢٠ س − ٧٢ ص − ٥٠٤ = ٠

لاحظ أن المعادلة هي من النوع: أس^{٢} + ب ص^{٢} + حـ س + د ص + هـ = ٠

وبشكل عام

تكون المعادلة التربيعية:

أس^{٢} +ب ص^{٢} + حـ س + د ص + هـ = ٠ ، حيث أ، ب، حـ، د، هـ ∋ح .

معادلة قطع ناقص بالصورة العامة إذا كان أ × ب > صفر

تدريب (٥)

جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلًّا من المستقيمات: س = ٣، س = ١٣ ، ص = − ١، ص = ٧

مثال (٦)

عيّن عناصر القطع الناقص الذي معادلته: ٢٥س^{٢} + ١٦ ص^{٢} − ١٠٠ س − ٣٢ ص − ٢٨٤ = ٠

الحل

يمكن كتابة المعادلة ٢٥س^{٢} +١٦ص^{٢} − ١٠٠س − ٣٢ ص − ٢٨٤ = ٠ بالشكل:

٢٥ (س^{٢} − ٤س) + ١٦ (ص^{٢}−٢ص) = ٢٨٤ وبإكمال المقدارين داخل الأقواس إلى مربع كامل تجد أن:

٢٥ (س^{٢} −٤س + (−٢)^{٢} − (−٢)^{٢}) +١٦ (ص^{٢} − ٢ص + (−١)^{٢} −(−١)^{٢}) = ٢٨٤

٢٥ (س−٢)^{٢} − ١٠٠ +١٦ (ص − ١)^{٢} − ١٦ = ٢٨٤

٣٥٠

تمارين ومسائل

١) جد معادلة القطع الناقص في كل من ما يأتي، ثم ارسم المنحنى البياني له:

أ) المركز (٠ ، ٠) ورأساه هما النقطتان: (±٣ ، ٠) وطول محوره الأصغر ٤ وحدات.

ب) بؤرتاه هما النقطتان: (٠ ، ±٢) ورأساه هما النقطتان: (٠ ، ±٥).

جـ) بؤرتاه هما النقطتان: (٤ ، −٢) ، (١٢ ، −٢) ورأساه هما النقطتان: (١٣ ، −٢) ، (٣ ، −٢).

د) بؤرتاه هما النقطتان: (٥ ، ١) ، (−١ ، ١) وطول محوره الأكبر ٨ وحدات.

هـ) بؤرتاه هما النقطتان: (١ ، ٢) ، (٥ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي ٦ أمثال البعد البؤري له.

و) ورأساه هما النقطتان: (−٤ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

ز) ورأساه هما النقطتان: (٣ ، −١٠) ، (٣ ، ٨) واختلافه المركزي $\frac{٢}{٣}$

ح) نهايتا محوره الأصغر (٣ ، ٠) ، (−٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

٢) جد إحداثيات المركز والرؤوس والبؤرتين، ومعادلة وطول كل من المحورين الأكبر والأصغر والبعد البؤري والاختلاف المركزي لكل من القطوع الناقصة الآتية:

أ) $\frac{س^{٢}}{٨١} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$

ب) $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{١٤٤} = ١$

جـ) $\frac{(س+٢)^{٢}}{١٦} + \frac{(ص-١)^{٢}}{٣٦} = ١$

د) $\frac{(س-٤)^{٢}}{٨١} + \frac{(ص+١)^{٢}}{٢٥} = ١$

هـ) س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ١٠٠

و) ٩س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ١٨ س − ٨ص + ٢٣

٣٥٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

٢٥ (س−٢)^{٢} + ١٦ (ص − ١)^{٢} = ٤٠٠ وبقسمة الطرفين على ٤٠٠ تجد أن:

$\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{٢٥} = ١$ وهي معادلة قطع ناقص محوره الأكبر يوازي محور الصادات

ومركزه النقطة (٢ ، ١) فيه:

أ^{٢} = ٢٥ ومنه أ = ٥

ب^{٢} = ١٦ ومنه ب = ٤

وبالتعويض عن قيم كل من أ، ب في العلاقة أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} ، تجد أن جـ = ٣، ومنه يكون:

طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٠ ومعادلته س = ٢

طول المحور الأصغر = ٢ب = ٨ ومعادلته ص = ١

البعد البؤري = ٢ جـ = ٦

بؤرتاه هما النقطتان: (٢، − ٢) ، (٢ ، ٤)

ورأساه هما النقطتان: (٢، − ٤)، (٢، ٦)

الاختلاف المركزي للقطع $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{٥} = ٠{,}٦$

تدريب (٦)

عيّن عناصر القطع الناقص الذي معادلته: س^{٢} + ٤ص^{٢} + ٦س − ٨ص + ٩ = ٠

٣٥١

٣) قطع ناقص بؤرتاه ب$_{١}$ (٤ ، ٠) ، ب$_{٢}$ (−٤ ، ٠) والنقطة و (س،ص) تقع على منحنى القطع بحيث إن محيط المثلث و ب$_{١}$ ب$_{٢}$ يساوي ٢٤ سم، جد معادلته.

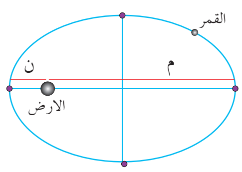
٤) تتحرك النقطة و(س،ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين : س = ٥ + ٣ جا هـ ، ص = ٢ + ٢ جتا هـ، حيث هـ زاوية متغيره. بيّن أن النقطة و (س،ص) تتحرك على منحنى قطع ناقص ، ثم عين عناصره.

٥) تعطى مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$ بالمقدار π أ ب، جد نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص $\frac{\text{س}^{٢}}{٨١} + \frac{\text{ص}^{٢}}{١٦} = ١$

٦) قطع ناقص مساحته (٢٠ π) وحدة مربعة ورأساه هما النقطتان (−٥ ، ٠) ،(٥ ، ٠) جد معادلته.

٧) اكتب معادلة القطع الناقص الذي اختلافه المركزي يساوي ٠,٦ ويمر بالنقطة (−٨ ، ٣) ومركزه يقع على المستقيم س =٢، وبؤرتاه تقعان على المستقيم ص = ٣.

٨) يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الأرض في إحدى بؤرتي المدار (انظر الشكل (٥ − ٤٠).
فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر تساوي م كم، وأقصر مسافة بينهما ن كم.
فأثبت أن الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي $\frac{\text{م}-\text{ن}}{\text{م}+\text{ن}}$



الشكل (٥ − ٤٠)

٩) إذا كان طول المحور الأكبر لقطع ناقص يساوي ضعف طول محوره الأصغر، فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص.

٣٥٣

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- إذا كان طول المحور الأكبر لقطع ناقص يساوي ضعف طول محوره الأصغر، فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص.
- عيّن عناصر القطع الناقص الذي معادلته: س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ٦س − ٨ص + ٩ = ٠
- تتحرك النقطة و (س، ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س = أ (جتا ن − جا ن). ص = ب (جتا ن + جا ن)، بيّن أن النقطة و (س ، ص) تتحرك على منحنى قطع ناقص، ثم عيّن عناصره.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية**: الملاحظة.
- **الأداة**: السجل القصصي.

سجل بعض الملاحظات عن الطلبة الذين ترى تميزًا في أدائهم .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٦ القطع الزائد

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الزائد.
- يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.

المفاهيم والمصطلحات

القطع الزائد ، مركز القطع ، رأسا القطع ، المحور القاطع (البؤري)، المحور المرافق ، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس المباشر

- المتطلبات السابقة لتدريس هذا الموضوع، هي: مفهوم المحل الهندسي ومعادلته، المسافة بين نقطتين، بعد نقطة عن مستقيم، وذلك من خلال الأسئلة، مثل:
  - جد بعد النقطة (٢ ، ٥) عن النقطة (−٣ ، ٤).
  - جد بعد النقطة (١ ، ٤) عن المستقيم ص = ٧.

مجموعات تعاونية

- مناقشة مقدمة الدرس في كتاب الطالب،ثم تقسيم الطلبة مجموعات تعاونية من (٤−٦) طلاب، واطلب من كل مجموعة تنفيذ ورقة العمل (٣، ٧) التي تهدف إلى استنتاج تعريف القطع الزائد وخواصه وتحديد عناصره (مركزه، رأساه، بؤرتاه، محوره الأكبر (البؤري)، ومحوره الأصغر).
- التجول بين الطلبة أثناء تنفيذ ورقة العمل وإرشادهم ، لتصل كل مجموعة إلى استنتاج تعريف القطع الزائد وخواصه وعناصره (مركزه، رأساه، بؤرتاه، محوره القاطع (البؤري)، ومحوره المرافق).
- عرض نتائج الطلبة، ومناقشة استنتاجاتهم، وكتابة الاستنتاجات النهائية على السبورة مع تقديم مجموعة كافية من الأمثلة لدعم استنتاجات الطلبة التي توصلوا إليها .

معلومات إضافية

٥-٦ القطع الزائد
The Hyperbola

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس
١- تعرف القطع الزائد.
٢- تكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية.
٣- تحدد عناصر القطع الزائد إذا علمت معادلته.
٤- تميز القطع الزائد إذا علمت معادلته بالصورة العامة.
٥- تمثل القطع الزائد بيانياً.
٦- تعرف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.

تعرفت في الدرس السابق أحد أنواع القطوع المخروطية وهو القطع الناقص، وستتعرف في هذا الدرس نوعاً آخر من القطوع المخروطية وهو القطع الزائد، وسوف نتناول تعريفه والصورة القياسية لمعادلته وبعض خصائصه كما يأتي:

لتكن النقطة ن (س،ص) متحركة في المستوى الإحداثي، بحيث يكون الفرق المطلق بين بعدي ن (س،ص) عن نقطتين ثابتتين $ب_1$ (−جـ ، ٠) ، $ب_2$ (جـ ، ٠) يساوي دائماً مقداراً ثابتاً.

وبما أن النقطتين $ب_1$ (−جـ ، ٠) ، $ب_2$ (جـ ، ٠) ثابتتان، وهما تقعان على محور السينات ، فإن البعد بينهما يساوي ٢ جـ.

وإذا عرفنا أن الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن (س ، ص) عن النقطتين $ب_1$ ، $ب_2$ يساوي ٢أ (المقدار الثابت) حيث إن ٢أ < ٢ جـ ، وكل من أ، جـ ∋ ح⁺.

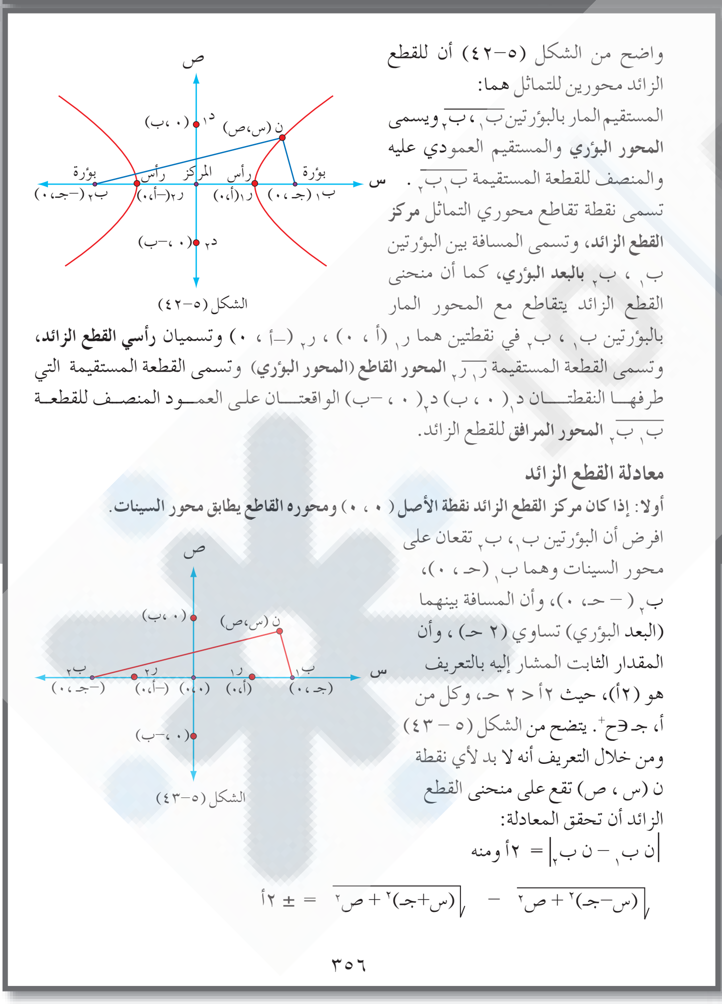
ومن خلال ما تقدم لا بد لأي نقطة تقع على منحنى المحل الهندسي للنقطة المتحركة ن(س،ص) أن تحقق المعادلة:

$|ن ب_1 - ن ب_2| = ٢أ$ ومنه

$$\sqrt{(س-جـ)^2 + ص^2} - \sqrt{(س+جـ)^2 + ص^2} = \pm ٢أ$$

$$\sqrt{(س-جـ)^2 + ص^2} = \pm ٢أ + \sqrt{(س+جـ)^2 + ص^2}$$ وبتربيع طرفي المعادلة نحصل على:

٣٥٤



واضح من الشكل (٥−٤٢) أن للقطع الزائد محورين للتماثل هما:

المستقيم المار بالبؤرتين $\overline{ب_1 ، ب_2}$ ويسمى **المحور البؤري** والمستقيم العمودي عليه والمنصف للقطعة المستقيمة $\overline{ب_1 ب_2}$.

تسمى نقطة تقاطع محوري التماثل **مركز القطع الزائد**، وتسمى المسافة بين البؤرتين $ب_1$ ، $ب_2$ **بالبعد البؤري**، كما أن منحنى القطع الزائد يتقاطع مع المحور المار بالبؤرتين $ب_1$ ، $ب_2$ في نقطتين هما $ر_1$ (أ ، ٠) ، $ر_2$ (−أ ، ٠) وتسميان **رأسي القطع الزائد**، وتسمى القطعة المستقيمة $\overline{ر_1 ر_2}$ **المحور القاطع (المحور البؤري)** وتسمى القطعة المستقيمة التي طرفها النقطتان $د_1$(٠ ، ب) $د_2$(٠ ، −ب) الواقعتان على العمود المنصف للقطعة $\overline{ب_1 ب_2}$ **المحور المرافق** للقطع الزائد.

الشكل (٥−٤٢)

معادلة القطع الزائد

أولا: إذا كان مركز القطع الزائد نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوره القاطع يطابق محور السينات.

افرض أن البؤرتين $ب_1$، $ب_2$ تقعان على محور السينات وهما $ب_1$ (حـ ، ٠)، $ب_2$ (− حـ، ٠)، وأن المسافة بينهما (البعد البؤري) تساوي (٢ حـ) ، وأن المقدار الثابت المشار إليه بالتعريف هو (٢أ)، حيث ٢أ < ٢ حـ، وكل من أ، جـ∋ح⁺. يتضح من الشكل (٥ − ٤٣) ومن خلال التعريف أنه لا بد لأي نقطة ن (س ، ص) تقع على منحنى القطع الزائد أن تحقق المعادلة:

$|ن ب_1 - ن ب_2| = ٢أ$ ومنه

$$\sqrt{(س-جـ)^2 + ص^2} - \sqrt{(س+جـ)^2 + ص^2} = \pm ٢أ$$

الشكل (٥−٤٣)

٣٥٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

$\sqrt{(س-جـ)^{٢} + ص^{٢}} = ٤أ^{٢} \pm ٤أ \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}} + (س + جـ)^{٢} + ص^{٢}$

$س^{٢} - ٢ حـ س + حـ^{٢} + ص^{٢} = ٤أ^{٢} \pm ٤أ \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}} + س^{٢} + ٢ حـ س + حـ^{٢} + ص^{٢}$

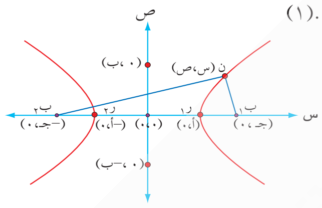
وبتبسيط هذه المعادلة تجد أن:

$أ^{٢} + حـ س = \pm أ \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}}$ وبتربيع طرفي هذه المعادلة تجد أن:

$أ^{٤} + ٢أ^{٢} حـ س + حـ^{٢} س^{٢} = أ^{٢} س^{٢} + ٢أ^{٢} حـ س + أ^{٢} حـ^{٢} + أ^{٢} ص^{٢}$

ومنه $(أ^{٢} - حـ^{٢}) س^{٢} + أ^{٢} ص^{٢} = أ^{٢} (أ^{٢} - حـ^{٢})$ وبقسمة طرفي المعادلة على $أ^{٢} (أ^{٢} - حـ^{٢})$ تجد أن:

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢} - حـ^{٢}} = ١ \quad ....(١)$$



الشكل (٥-٤١)

وبما أن أ > حـ وكلا العددين أ، حـ موجب

فإن $أ^{٢} > حـ^{٢}$ ومنه $أ^{٢} - حـ^{٢} > ٠$

وإذا عرفنا المقدار $- ب^{٢} = أ^{٢} - حـ^{٢}$ تجد أن المعادلة (١) تصبح على الصورة:

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة ن (س،ص).

منحنى المحل الهندسي لهذه النقطة ن (س ،ص) يسمى **قطعًا زائدًا** لاحظ الشكل (٥-٤١).

وبشكل عام: لتكن $ب_{١}$، $ب_{٢}$ نقطتين في المستوى الإحداثي ، المسافة بينهما ٢ حـ، وليكن ٢أ عددًا حقيقيًّا موجبًا حيث ٢أ < ٢ حـ، وإذا كانت النقطة ن (س ،ص) تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بعديها عن النقطتين الثابتتين $ب_{١}$، $ب_{٢}$ يساوي المقدار الثابت (٢أ) فإنها ترسم المنحنى الذي يمثل المحل الهندسي للنقطة ن (س،ص) وهو قطع زائد وعليه فإن:

تعريف

القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقطة ن (س ، ص) المتحركة في المستوى التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين: $ب_{١}$، $ب_{٢}$ (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

٣٥٥

$\sqrt{(س-جـ)^{٢} + ص^{٢}} = \pm ٢أ \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}}$ وبتربيع طرفي المعادلة تحصل على:

$(س-حـ)^{٢} + ص^{٢} = ٤أ^{٢} \pm ٤أ \sqrt{(س+حـ)^{٢} + ص^{٢}} + (س+حـ)^{٢} + ص^{٢}$

$س^{٢} - ٢ حـ س + حـ^{٢} + ص^{٢} = ٤أ^{٢} \pm ٤أ \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}} + س^{٢} + ٢ حـ س + حـ^{٢} + ص^{٢}$

وبتبسيط هذه المعادلة تجد أن:

$أ^{٢} + حـ س = \pm أ \sqrt{(س+جـ)^{٢} + ص^{٢}}$ وبتربيع طرفي هذه المعادلة تجد أن:

$أ^{٤} + ٢أ^{٢} حـ س = حـ^{٢} س^{٢} = أ^{٢} س^{٢} + ٢أ^{٢} حـ س + أ^{٢} حـ^{٢} + أ^{٢} ص^{٢}$

ومنه $(أ^{٢} - حـ^{٢}) س^{٢} + أ^{٢} ص = أ^{٢} (أ^{٢} - حـ^{٢})$ وبقسمة طرفي المعادلة على $أ^{٢} (أ^{٢} - حـ^{٢})$ تجد أن:

$$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{أ^{٢} - حـ^{٢}} = ١ \quad ....(١)$$

وبما أن أ > حـ من تعريف القطع الزائد، وأن كلًّا من العددين أ، حـ موجب،

فإن $أ^{٢} > حـ^{٢}$ ومنه $أ^{٢} - حـ^{٢} > ٠$

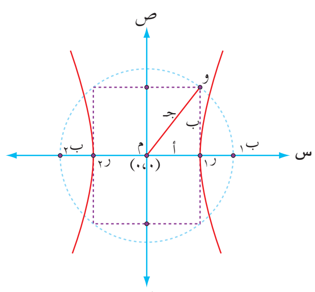
وإذا رسمت دائرة مركزها (٠ ، ٠) وقطرها (٢ حـ) وبداخلها مستطيل أبعاده (٢أ) ، (٢ ب) كما في الشكل (٥ - ٤٤)، تجد أن زوايا المستطيل جميعها تمس الدائرة.

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث م $ر_{١}$ و القائم الزاوية في $ر_{١}$ تجد أن:

$جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$ ومنه $- ب^{٢} = أ^{٢} - حـ^{٢}$

وبتعويض المقدار $- ب^{٢}$ عن المقدار $أ^{٢} - حـ^{٢}$ في المعادلة (١) تصبح على الصورة

$$\boxed{\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١}$$



الشكل (٥-٤٤)

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الزائد الذي فيه:

١) المركز نقطة الأصل (٠ ، ٠)

٢) البؤرتان على محور السينات، وهما النقطتان $ب_{١}$ (حـ ، ٠)، $ب_{٢}$ (- حـ ، ٠)

٣) الرأسان هما النقطتان $ر_{١}$ (أ ، ٠) ، $ر_{٢}$ (- أ ، ٠)

٤) المحور القاطع ينطبق على محور السينات وطوله يساوي ٢أ.

٣٥٧

الأخطاء الشائعة

- تتركز الإخطاء والصعوبات لدى الطلبة في هذا الدرس حول : اختيار صورة المعادلة المطلوبة عند إيجادها أو عند تحديد عناصر القطع ، عالج ذلك بتأكيد الرسم التقريبي لمعطيات المسالة .

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

- عيّن عناصر (مركزه ، رأساه ، بؤرتاه، محوره القاطع (البؤري)، محوره المرافق). القطوع الآتية :

- $\frac{س^{٢}}{٦٤} - \frac{ص^{٢}}{٣٦} = ١$

- $\frac{ص^{٢}}{٩} - \frac{س^{٢}}{١٦} = ١$

استراتيجيات التقويم وأدواته

- الاستراتيجية: الملاحظة
- الأداة: قائمة الشطب (٢ ، ٤) لتقديم أداء الطلبة في المجموعات.
- الاستراتيجية: القلم والورقة.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٦ القطع الزائد

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الزائد.
- يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة .
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد .

المفاهيم والمصطلحات

القطع الزائد، مركز القطع، رأسا القطع، المحور القاطع (البؤري)، المحور المرافق، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

تدريس المباشر

- رسم محورين متعامدين م س ، م ص في مستوى القطع الزائد الذي مركزه (٠، ٠) ومحوره القاطع (البؤري) منطبقًا على محور السينات وبؤرتاه النقطة (± جـ ، ٠)، وقطع آخر محوره القاطع (البؤري) منطبقًا على محور الصادات وبؤرتاه (٠، ± جـ)، واطلب إلى الطلبة الإجابة عن الأسئلة الآتية:
  - افرض أن النقطة ن (س ، ص) تقع على منحنى القطع الزائد ، استعمل تعريف القطع الزائد في تعيين العلاقة بين س، ص، تجول بين الطلبة وتابع حلولهم.
  - استخدم تعريف القطع الزائد ونظرية فيثاغورس للتوصل مع الطلبة إلى أن $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ للتوصل إلى الصور القياسية لمعادلة القطع الزائد :

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1 \text{ ، } \frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = 1 \text{ ، } أ < ب$$

- مناقشة مثال (١) مع الطلبة، وتكليفهم حل التدريب (١) في دفاترهم .

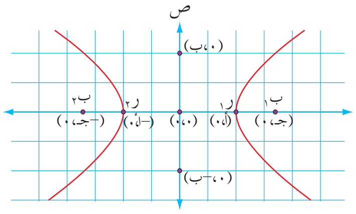
معلومات إضافية

٥) المحور المرافق ينطبق على محور الصادات وطوله يساوي ٢ب وطرفاه (٠ ، ب) ، (٠ ، − ب)

٦) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢ حـ.

٧) $جـ^2 = أ^2 + ب^2$

لاحظ الشكل (٥ – ٤٥).



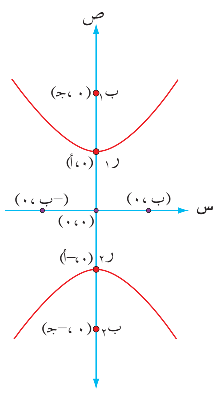
الشكل (٥–٤٥)

ثانيًا: إذا كان مركز القطع الزائد نقطة الأصل (٠ ، ٠) ومحوره القاطع يطابق محور الصادات.

وفي هذه الحالة تكون:

البؤرتان هما النقطتان $ب_1$ (٠ ، حـ) ، $ب_2$ (٠ ، − حـ)، والرأسان هما النقطتان $ر_1$ (٠ ، أ) ، $ر_2$ (٠ ، −أ). لاحظ الشكل (٥ – ٤٦) وفي هذه الحالة تكون معادلة القطع الزائد بالصورة القياسية:

$$\frac{ص^2}{أ^2} - \frac{س^2}{ب^2} = 1$$



الشكل (٥–٤٦)

٣٥٨

رابعًا: إذا كان مركز القطع الزائد النقطة (د ،هـ) ومحوره القاطع يوازي محور الصادات

في هذه الحالة البؤرتان هما $ب_1$(د، هـ + حـ)، $ب_2$ (د، هـ ــ جـ)

لاحظ الشكل (٥ – ٤٨) وبإجراء الخطوات نفسها كما في الحالة السابقة تحصل على المعادلة:

$$\frac{(ص - هـ)^2}{أ^2} - \frac{(س - د)^2}{ب^2} = 1$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الزائد الذي فيه:

١) المركز النقطة (د ، هـ)

٢) البؤرتان على محور الصادات وهما النقطتان $ب_1$ (د ، هـ + جـ) ، $ب_2$ (د ، هـ − جـ)

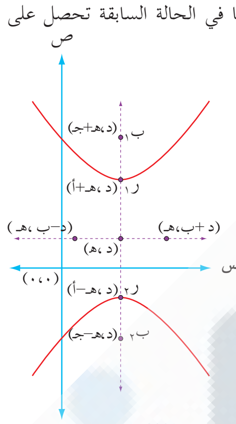
٣) الرأسان هما النقطتان $ر_1$ (د، هـ + أ) ، $ر_2$ (د ، هـ − أ)

٤) المحور القاطع يوازي محور الصادات ومعادلته س = د ، وطوله يساوي ٢أ

٥) المحور المرافق يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ ، وطوله يساوي ٢ ب

٦) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢ جـ

٧) $جـ^2 = أ^2 + ب^2$



الشكل (٥–٤٨)

الاختلاف المركزي للقطع الزائد

من تعريف القطع الزائد حـ > أ ، وبما أن كلا العددين أ، حـ موجب، وبقسمة طرفي المتباينة حـ > أ على العدد أ، ينتج أن $\frac{جـ}{أ} > 1$

تسمى النسبة $\frac{جـ}{أ}$ الاختلاف المركزي للقطع الزائد ويرمز له بالرمز هـ، وكما تلاحظ أن قيمة هـ > ١، ولهذا سمي القطع زائدًا، لأن اختلافه المركزي زاد عن الواحد.

تعريف

الاختلاف المركزي للقطع الزائد هو النسبة بين نصف البعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع.

٣٦٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

ثالثًا: إذا كان مركز القطع الزائد النقطة (د ، هـ) ومحوره القاطع يوازي محور السينات.

في هذه الحالة تكون بؤرتا القطع الزائد هما $ب_١$ (د+جـ ، هـ) ، $ب_٢$ (د − جـ، هـ). ومن خلال تعريف القطع الزائد تجد أن: $|ن\,ب_١ - ن\,ب_٢| = ٢أ$ ومنه

$$\sqrt{\left(س-(د+جـ)\right)^٢ + (ص-هـ)^٢} - \sqrt{\left(س-(د-جـ)\right)^٢ + (ص-هـ)^٢} = \pm ٢أ$$

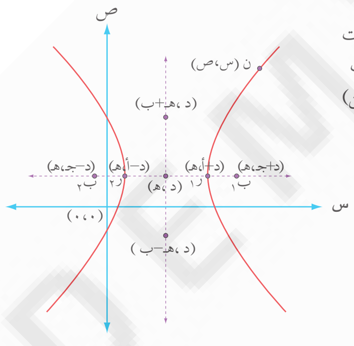
وبتبسيط المعادلة كما في الحالة الأولى تحصل على المعادلة:

$$\boxed{\frac{(س-د)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص-هـ)^٢}{ب^٢} = ١}$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الزائد الذي فيه:

١) المركز النقطة (د ، هـ)
٢) البؤرتان على محور السينات وهما النقطتان $ب_١$ (د+ حـ ، هـ) ، $ب_٢$ (د − حـ ، هـ)
٣) الرأسان هما النقطتان، $ر_١$ (د+أ ، هـ)، $ر_٢$ (د − أ ، هـ)
٤) المحور القاطع يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ ، وطوله يساوي ٢أ
٥) المحور المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س = د ، وطوله يساوي ٢ ب
٦) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢حـ
٧) $حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$

لاحظ الشكل (٥ − ٤٧)



الشكل (٥−٤٧)

مثال (١)

عيّن عناصر القطع الزائد: $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$، ثم ارسم منحناه.

الحل

المعادلة $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$، وهي على الصورة: $\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$، حيث محوره القاطع يطابق محور السينات وفيه:

$أ^٢ = ١٦$ ومنه أ = ٤

$ب^٢ = ٩$ ومنه ب = ٣

$حـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ = ١٦ + ٩ = ٢٥$ ومنه جـ = ٥

وعليه فإن:

بؤرتاه $ب_١$ (جـ ، ٠) = (٥ ، ٠) ، $ب_٢$ (−جـ ، ٠) = (−٥ ، ٠)

رأساه $ر_١$ (أ ، ٠) = (٤، ٠) ، $ر_٢$ (− أ، ٠) = (− ٤ ، ٠)

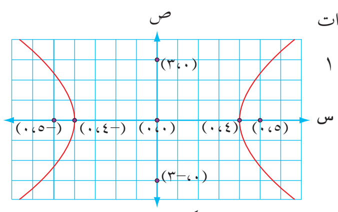
معادلة محوره القاطع ص = ٠ ، وطوله = ٢أ = ٢ × ٤ = ٨ وحدات

معادلة محوره المرافق س = ٠ ، و طوله = ٢ب = ٢ × ٣ = ٦ وحدات

بعده البؤري = ٢ جـ = ٢ × ٥ = ١٠ وحدات

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٤} > ١$

ويبين الشكل (٥ − ٤٩) منحنى القطع الزائد.



الشكل (٥−٤٩)

تدريب (١)

عيّن عناصر القطع الزائد $\frac{ص^٢}{٤} - \frac{س^٢}{١} = ١$ ، ثم ارسم منحناه.

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

− جد معادلة القطع الزائد في كل من الحالات الآتية :

- المركز (٠ ، ٠) ، رأساه (±٤ ، ٠)، وطول محوره المرافق ١٠ وحدات.
- المركز (٠ ، ٠) ، بؤرتاه (٠ ، ± ٧)، رأساه (٠ ، ± ٥).

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية:** القلم والورقة.

من خلال متابعة حلول الطلبة للتدريبات الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الزائد.
- يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًّا.
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة .
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد .

المفاهيم والمصطلحات

القطع الزائد ، مركز القطع، رأسا القطع ، المحور القاطع (البؤري)، المحور المرافق ، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

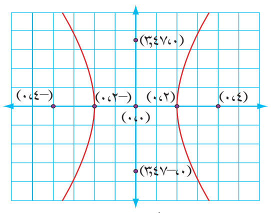
- استخدام تعريف القطع الزائد ونظرية فيثاغورس للتوصل مع الطلبة إلى أن $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ لاستنتاج المتباينة بين جـ ، أ ، ثم تكليف الطلبة قسمة طرفي المتباينة على أ للتوصل إلى تعريف الاختلاف المركزي وقيمته .
- مناقشة الأمثلة (٢)، و(٣)، و(٤) مع الطلبة، وتكليفهم حل التدريبات (٢)، و(٣)، و(٤) في دفاترهم .
- مناقشة مثال (٥) مع الطلبة، وتكليفهم فك حدود معادلة القطع الزائد وذلك من أجل التوصل إلى أنه يمكن كتابة معادلة القطع الزائد على الصورة الآتية :
  $أ س^2 + ب ص^2 + جـ س + د ص + هـ = 0$ ، أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية ، $أ \times ب < صفر$.
- تكليف الطلبة حل الأسئلة (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧) كواجب بيتي.

معلومات إضافية

مثال (٢)

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه (٤ ، ٠)، (−٤ ، ٠) ويتقاطع مع محور السينات عند س = ٢ ، −٢، ثم ارسم منحناه .

الحل



الشكل (٥−٥٠)

بما أن البؤرتين تقعان على محور السينات، فإن المحور القاطع للقطع يقع أيضًا على محور السينات، إذن معادلة القطع هي:

$$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$$

البؤرتان (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) ، ومنه
البعد البؤري = ٢ جـ =٨ ، أي أن جـ = ٤
ورأساه هما نقط تقاطعه مع محور السينات، أي أن طول محوره القاطع ٢أ = ٤ أي أن أ = ٢
لكن $حـ^2 = أ^2 + ب^2$ ، أي أن $16 = ب^2 + 4$ ، ومنه $ب^2 = 12$
وبالتعويض عن $أ^2 = 4$ ، $ب^2 = 12$ في المعادلة تحصل على $\frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{12} = 1$
ويبين الشكل (٥ − ٥٠) منحنى هذا القطع الزائد.

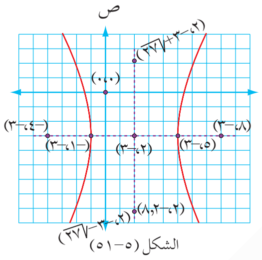
تدريب (٢)

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع على محور الصادات وطول محوره المرافق يساوي ٤ وحدات وبعده البؤري يساوي $2\sqrt{5}$ وحدة، ثم ارسم منحناه.

مثال (٣)

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (١ ، −١)، وإحدي بؤرتيه هي النقطة (١ ،٣) وطول محوره القاطع يساوي ٦ وحدات.

٣٦٢



الشكل (٥−٥١)

حيث المركز (د ، هـ) = (٢ ، −٣)
وبما أن (أ) تساوي بعد أحد الرأسين عن المركز، فإن
أ = ٣ ومن الاختلاف المركزي $هـ = \frac{جـ}{أ} = 2$
وبالتعويض عن قيمة أ = ٣ تجد أن جـ = ٦
وبالتعويض عن قيم كل من أ = ٣ ، حـ = ٦
في العلاقة $جـ^2 = أ^2 + ب^2$ تجد أن $ب^2 = 27$

وبذلك تكون معادلة القطع الزائد المطلوب هي:
$\frac{(س-2)^2}{9} - \frac{(ص+3)^2}{27} = 1$، ومنها:

١) البؤرتان هما $ب_1$ (د + جـ ، هـ) ، $ب_2$ (د − جـ، هـ) أي أن $ب_1$ (٨، −٣) ، $ب_2$ (−٤ ، −٣)
٢) الرأسان هما $ر_1$ (د + أ، هـ) ، $ب_2$ (د − أ ، هـ) أي أن $ر_1$ (٥ ، −٣) ، $ر_2$ (−١ ، −٣)
٣) المحور القاطع يوازي محور السينات ومعادلته ص = −٣ وطوله = ٢أ = ٦ وحدات
٤) المحور المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س = ٢ وطوله = ٢ب = $2\sqrt{27}$ وحدة
٥) البعد البؤري (المسافة بين البؤرتين) = ٢ حـ = ١٢ وحدة
والشكل (٥ − ٥١) يمثل منحنى القطع الزائد.

تدريب (٤)

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (١، ٢) وأحد رأسيه النقطة (−٣ ، ٢) واختلافه المركزي $هـ = \frac{3}{2}$. ثم عيّن باقي عناصره وارسم منحناه.

مثال (٥)

قطع زائد اختلافه المركزي يساوي ٢,٥، وأحد رأسيه النقطة (٠، −١) والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (٣، −١). جد معادلته.

٣٦٤

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الحل

من المعطيات: مركز القطع هو النقطة (١ ، −١)، والمحور القاطع يوازي محور الصادات وطوله ٢أ، ومنه تكون معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}-\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١$$

حيث المركز (د ، هـ) = (١ ، −١) أي أن د = ١ ، هـ = −١

٢أ = ٦ أي ان أ = ٣

وبما أن جـ = نصف البعد البؤري أي بعد إحدى البؤرتين عن المركز، فإن حـ = ٤

وبما أن حـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} تجد أن ١٦ = ٩ + ب^{٢} ومنه ب^{٢} = ٧ ، وبالتعويض عن قيم كل من د، هـ، أ^{٢}، ب^{٢} في المعادلة $\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}-\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١$ تجد أن:

معادلة القطع الزائد المطلوبة هي: $\frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{٩}-\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{٧}=١$

تدريب (٣)

عيّن عناصر القطع الزائد: $\frac{(\text{س}-٢)^{٢}}{٩}-\frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{١٦}=١$، ثم ارسم منحناه.

مثال (٤)

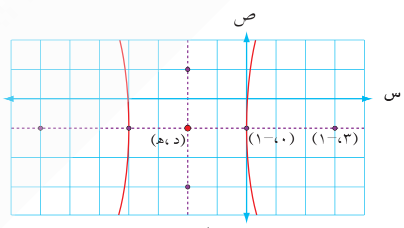
جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه (٢ ، −٣) ، وأحد رأسيه النقطة (٥،−٣) واختلافه المركزي هـ = ٢، ثم عيّن باقي عناصره وارسم منحناه.

الحل

من معطيات المثال المحور القاطع يوازي محور السينات إذن تكون معادلة القطع الزائد على الصورة: $\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}-\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١$

٣٦٣

الحل



الشكل (٥−٥٢)

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة منه تساوي جـ − أ

ومنه جـ − أ = ٣ .... (١)

الاختلاف المركزي:

$\frac{\text{حـ}}{\text{أ}}=\frac{٥}{٢}$ ومنه جـ = $\frac{٥}{٢}$أ

وبالتعويض في المعادلة (١) تجد أن: $\frac{٥}{٢}$أ − أ = ٣ ، أي أن أ = ٢ ، جـ = ٥

وبالتعويض عن قيم كل من أ = ٢ ، حـ = ٥ في العلاقة جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} تجد أن ب^{٢} = ٢١

وبما أن المحور القاطع يوازي محور السينات ومعادلته ص = −١، والمسافة بين أحد الرأسين والمركز هي (أ) وتساوي ٢ وحدة تجد أن المركز (د ، هـ) = (−٢، −١) انظر الشكل (٥ − ٥٢)

وبالتعويض عن قيم كل من د = −٢ ، هـ = −١، أ^{٢} = ٤ ، ب^{٢} = ٢١ في المعادلة:

$$\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}-\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١$$

تحصل على المعادلة لهذا القطع الزائد وهي: $\frac{(\text{س}+٢)^{٢}}{٤}-\frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{٢١}=١$

وبفك حدود هذه المعادلة تجد أن المعادلة تصبح على الصورة:

$$٢١\,(\text{س}+٢)^{٢}-٤\,(\text{ص}+١)^{٢}=٨٤$$

$$٢١\,(\text{س}^{٢}+٤\text{س}+٤)-٤\,(\text{ص}^{٢}+٢\text{ص}+١)-٨٤=٠$$

$$٢١\text{س}^{٢}+٨٤\,\text{س}+٨٤-٤\,\text{ص}^{٢}-٨\,\text{ص}-٤-٨٤=٠$$

$$٢١\text{س}^{٢}-٤\,\text{ص}^{٢}+٨٤\,\text{س}-٨\,\text{ص}-٤=٠$$

لاحظ أن المعادلة هي من النوع: أ س^{٢} + ب ص^{٢} + حـ س + د ص + هـ = ٠

وبشكل عام

تكون المعادلة التربيعية

أس^{٢} + ب ص^{٢} + حـ س + د ص + هـ = ٠، حيث أ ، ب ، حـ ، د، هـ $\in$ ح

معادلة قطع زائد بالصورة العامة إذ كان أ × ب < صفر

٣٦٥

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

− عيّن عناصر (مركزه ، رأساه ، بؤرتاه ، محوره القاطع (البؤري)، محوره المرافق).

القطوع الآتية:

- $\frac{(\text{س}+٢)^{٢}}{٩}-\frac{(\text{ص}+٣)^{٢}}{٤}=١$

- $\frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{٦٤}-\frac{(\text{س}-٦)^{٢}}{٣٦}=١$

استراتيجيات التقويم وأدواته

− **الاستراتيجية**: الملاحظة.

− **الأداة**: قائمة الشطب (٢ − ٦) بند (٥).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٥-٦ القطع الزائد

النتاجات الخاصة

- يتعرّف القطع الزائد .
- يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية ويمثّله بيانيًا .
- يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة .
- يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد .

المفاهيم والمصطلحات

القطع الزائد ، مركز القطع، رأسا القطع ، المحور القاطع (البؤري)، المحور المرافق ، الاختلاف المركزي.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- مناقشة الطلبة بأسئلة الواجب البيتي، ثم تكليف مجموعة من الطلبة عرض الحلول بحيث يعرض كل طالب حل أحد الأسئلة.
- مناقشة مثال (٦) مع الطلبة.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٥) في دفاترهم.

مثال (٦)

عيّن عناصر القطع الزائد الذي معادلته: ٧ س^{٢} − ٩ ص^{٢} − ١٤ س − ٥٤ ص − ١٣٧ = ٠

الحل

يمكن كتابة المعادلة ٧ س^{٢} − ٩ ص^{٢} − ١٤ س − ٥٤ ص − ١٣٧ = ٠ على الشكل:

٧ (س^{٢} −٢س) − ٩ (ص^{٢}+٦ص)= ١٣٧، وبإكمال المقدارين داخل الأقواس إلى مربع كامل تجد أن:

٧ (س^{٢} −٢س+(−١)^{٢} − (−١)^{٢}) −٩ (ص^{٢}+ ٦ص+(٣)^{٢} − (٣)^{٢}) =١٣٧

٧ (س−١)^{٢} − ٩ (ص+ ٣)^{٣} + ٧٤ = ١٣٧

٧ (س−١)^{٢} − ٩ (ص+ ٣)^{٢} = ٦٣ وبقسمة الطرفين على ٦٣ تجد أن:

$$\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{٩} - \frac{(\text{ص}+٣)^{٢}}{٧} = ١$$

وهي معادلة قطع زائد محوره القاطع يوازي محور السينات ومركزه النقطة (١، −٣) فيه:

أ^{٢} = ٩ ومنه أ = ٣

ب^{٢} = ٧ ومنه ب = $\sqrt{٧}$

وبالتعويض عن قيم كل من أ^{٢}، ب^{٢} في العلاقة جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} تجد أن:

جـ^{٢} = ١٦، ومنه جـ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وعليه يكون:

طول المحور القاطع ٢أ = ٦ ، ومعادلته ص = −٣

طول المحور المرافق ٢ ب = ٢$\sqrt{٧}$ ، ومعادلته س = ١

البعد البؤري ٢ جـ = ٢ × ٤ = ٨

بؤرتاه هما النقطتان (٥ ، −٣) ، (− ٣ ، −٣)

ورأساه هما النقطتان (٤ ، −٣) ، (−٢، −٣)

الاختلاف المركزي للقطع $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٤}{٣}$

تدريب (٥)

عيّن عناصر القطع الزائد الذي معادلته: ٤ س^{٢}− ص^{٢} + ١٦س + ١٠ ص − ١٧ =٠.

٣٦٦

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

- قطع الزائد مركزه (٠ ، ٠)، والبعد بين بؤرتيه ١٦ وحدة، والبعد بين رأسيه ١٢ وحدة، ومحوره القاطع هو محور السينات ، جد معادلته.
- عين عناصر القطع الزائد الذي معادلته:

$$\text{س}^2 - ٤\text{ص}^2 + ٦\text{س} - ٨\text{ص} + ٩ = ٠$$

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية:** القلم والورقة.
من خلال حلول الطلبة للتدريبات والتمارين والمسائل الواردة في الدرس، وتصحيحها، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة.
- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** السجل القصصي، سجل بعض الملاحظات عن الطلبة الذين ترى تميّزًا في أدائهم.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

تمارين ومسائل

١) جد معادلة القطع الزائد في كل من ما يأتي ثم ارسم المنحنى البياني له:
أ) المركز (٠ ، ٠) ورأساه هما النقطتان (±٣ ، ٠) وطول محوره المرافق ٤ وحدات.
ب) بؤرتاه هما النقطتان (٠ ، ±٤) ويتقاطع مع محور الصادات في النقطتين (٠ ، ±٣).
جـ) رأساه هما النقطتان (٤ ، −٢)، (١٢ ، −٢) وبؤرتاه هما النقطتان: (١٣ ، −٢)، (٣ ، −٢).
د) بؤرتاه هما النقطتان (٥ ، ١)، (−١ ، ١) وطول محوره القاطع ٣ وحدات.
هـ) بؤرتاه هما النقطتان (١ ، ٢) ، (٥ ، ٢) والبعد البؤري له ضعف طول محوره القاطع.
و) رأساه هما النقطتان (−٢ ، ٠)، (٢ ، ٠) ويمر بالنقطة (٣ ، ٢).
ز) رأساه هما النقطتان (٣ ، −١)، (٣ ، ٨) واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$
ح) نهايتا محوره المرافق (٣ ، ٠)، (−٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣)

٢) جد إحداثيات المركز والرأسين والبؤرتين ، ومعادلة وطول كل من المحورين القاطع والمرافق والبعد البؤري والاختلاف المركزي لكل من القطوع الزائدة الآتية:

أ) $\frac{\text{س}^2}{١٦} - \frac{\text{ص}^2}{٩} = ١$

ب) $\frac{\text{س}^2}{٢٥} - \frac{\text{ص}^2}{١٤٤} = ١$

جـ) $\frac{(\text{ص}-٢)^2}{١٦} - \frac{(\text{س}-١)^2}{٣٦} = ١$

د) $\frac{(\text{س}+٤)^2}{٨١} - \frac{(\text{ص}-١)^2}{٢٥} = ١$

هـ) $٤\text{س}^2 - ١٦\text{ص}^2 = -٦٤$

و) $٩\text{س}^2 - ٤\text{ص}^2 + ١٨\text{س} - ٨\text{ص} + ٣١$

٣٦٧

٣) قطع زائد مركزه (٠ ، ٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم $\text{ص} = \sqrt{٣}\,\text{س} + ٢$ عند النقطة ($٢\sqrt{٣}$ ، ٤) جد معادلته.

٤) تتحرك نقطة ن (س،ص) بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين: س = جا هـ + جتا هـ ، $\text{ص} = ٢\sqrt{\text{جا هـ جتا هـ}}$ حيث هـ زاوية متغيرة، أثبت أن النقطة ن (س،ص) تتحرك على منحنى قطع زائد.

٥) اكتب معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي يساوي $\frac{\sqrt{٢١}}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٤ ، −٣) ومركزه يقع على المستقيم س = ٢، وبؤرتاه تقعان على المستقيم ص = ٣.

٦) جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتا القطع الناقص $٩\text{س}^2 + ٤\text{ص}^2 = ٣٦$، وبؤرتاه هما رأسا هذا القطع.

٧) إذا كان طول المحور القاطع لقطع زائد يساوي ٣ أمثال طول محوره المرافق، فما قيمة الاختلاف المركزي لهذا القطع الزائد ؟

٣٦٨

مراجعة

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة.

المفاهيم والمصطلحات

المصطلحات والمفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية للأسئلة، ليتمكنوا من تقييم تعلمهم ذاتيًا .
– تكليف الطلبة تنفيذ حلول الأسئلة كواجب بيتي.
– يسجل الطلبة الصعوبات التي واجهتهم.
– مناقشة الأسئلة التي واجه الطلبة صعوبات في حلّها، وحصر الأخطاء المشتركة بين الطلبة، والتعرّف إلى أسبابها وعلاجها .

معلومات إضافية

مراجعة

١) عين العناصر الأساسية لكل من القطوع الآتية:
أ) (س+٢)^2 +(ص−٧)^2 = ١٠٠
ب) ٤س^2 + ٩ص^2 − ٨س = ٣٢
جـ) ص^2 + ٣س − ٨ص + ١ = ٠
د) ٩س^2 − ٤ص^2 − ٥٤س − ١٦ص + ٢٩ = ٠

٢) جد معادلة القطع المكافئ، الذي محوره يوازي محور السينات وبؤرته (−٣ ، ٣)، ويمر بالنقطة (٠ ، −١) ويقع رأسه على يمين بؤرته.

٣) في القطع الناقص برهن أن جـ^2 = أ^2 − ب^2

٤) إذا كانت م، ن نقطتان ماديتان، النقطة م تدور في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع النقطة ن في إحدى بؤرتي هذا المدار، فإذا كان طول المحور الأكبر = ١٠ وحدات، والاختلاف المركزي = ٠٫٣ ، جد:
أ) أطول مسافة بين م ، ن.
ب) أقصر مسافة بين م ، ن.

٥) قطع مخروطي بؤرتاه هما النقطتان (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٨) ، إذا كان البعد بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من الرأس وحدة واحدة، جد معادلته.

٦) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة (س،ص) المتحركة في المستوى بحيث يكون بعدها عن النقطة (٠ ، ٤) مساويًا $\frac{٣}{٤}$ بعدها عن المستقيم ٤ص = ٩

٧) قطع مخروطي بعده البؤري أقل من البعد بين رأسيه، مركزه (١ ، ٢) وإحدى بؤرتيه (٦ ، ٢) ويمر بالنقطة (٤ ، ٦) جد معادلته.

٨) جد معادلة القطع المكافئ، الذي محوره يوازي محور السينات، ويمر منحناه بالنقاط (٣ ، ١)، (٦ ، ٣)، (٣ ، −٣)

٣٦٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- تابع الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، وتقديم المساعدة لهم قدر الإمكان مع محاورة الطلبة للتعرّف إلى سبب الإخفاق.
- وجّه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المتنوعة.
- أعطِ فرصة للحل بأكثر من طريقة لبعض الأسئلة .

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الإستراتيجية**: الملاحظة.
- **الأداة**: قائمة الشطب (٢ - ٦).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الأخطاء الشائعة

اختبار ذاتي

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة.

المفاهيم والمصطلحات

المصطلحات والمفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية للأسئلة ليتمكنوا من تقييم تعلمهم ذاتيًا.
– تكليف الطلبة تنفيذ حلول الأسئلة كواجب بيتي .
– يسجل الطلبة الصعوبات التي واجهتهم.
– مناقشة الأسئلة التي واجه الطلبة صعوبات في حلها، واحصر الأخطاء المشتركة بين الطلبة، والتعرّف إلى أسبابها وعلاجها.

معلومات إضافية

اختبار ذاتي

١) ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة للفقرات من (١–١٥):

(١) إذا قطع مخروط دائري قائم مزدوج بمستوى عمودي على محور المخروط ولا يحتوي رأسًا، فإن المنحنى الناتج هو:
أ) دائرة ب) قطع مكافىء جـ) قطع ناقص د) قطع زائد

(٢) نصف قطر الدائرة التي معادلتها: س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ص − ١٢ = صفرًا، يساوي:
أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٥ د) $\sqrt{١٢}$

(٣) معادلة القطع المكافىء الذي رأسه النقطة (٠ ، ٠) وبؤرته النقطة (٢ ، ٠) هي:
أ) س^{٢} = ٨ص ب) س^{٢} = −٨ ص جـ) ص^{٢} = ٨س د) ص^{٢} = −٨س

(٤) معادلة الدليل للقطع المكافىء ص^{٢} − ٤ س − ٤ = ٠ هي:
أ) س = ٢ ب) س = −٢ جـ) ص = ٢ د) ص = −٢

(٥) إذا كانت النقطة (٤ ، ٤) تقع على منحنى القطع المكافىء ص^{٢} = ٤ س، فإن بعد هذه النقطة عن دليل القطع يساوي:
أ) ٣ ب) ٤ جـ) ٥ د) ٨

(٦) المعادلة ٢ س^{٢} + ك ص = ٨ تمثل قطعًا ناقصًا عندما ك تنتمي إلى:
أ) (٠،∞) ب) (−∞ ، ٠) جـ) {صفر} د) {٢}

(٧) الاختلاف المركزي للقطع المخروطي $\frac{س^{٢}}{١٤٤} + \frac{ص^{٢}}{١٦٩} = ١$
أ) $\frac{١٣}{١٢}$ ب) $\frac{٥}{١٢}$ جـ) $\frac{٥}{١٣}$ د) $\frac{١٢}{١٣}$

(٨) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته ٣ س^{٢} + ٢ ص^{٢} = ٦ هما:
أ) (٠ ، ±١) ب) (±١ ، ٠) جـ) (٠ ، ±٣) د) (±٣ ، ٠)

(٩) إحداثيا رأس القطع المكافىء (س −١)^{٢} + ٨ (ص +٢) = صفرًا هما:
أ) (−١ ، −٢) ب) (١ ، ٢) جـ) (−١ ، ٢) د) (١، −٢)

٣٧٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- تابع الطلبة ذوي التحصيل المتدني من خلال ملاحظة حلولهم، وتقديم المساعدة لهم قدر الإمكان مع محاورة الطلبة للتعرّف إلى سبب الإخفاق.
- وجّه الطلبة المتميزين للاستفادة من الأسئلة الإثرائية ومصادر المعرفة المتنوعة.
- أعطِ فرصة للحل بأكثر من طريقة لبعض الأسئلة .

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الإستراتيجية:** التقويم المعتمد على الإداء.
- **الأداة:** سلّم التقدير (٢ – ٥).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

(١٠) معادلة القطع الناقص الذي رأساه النقطتان (٠ ،٢)، (٠، –٢) وطول محوره الأصغر يساوي ٢ وحدة طول هي:

أ) ص^{٢} +س^{٢}=١ ب) ص^{٢} + ٤س^{٢} =١

جـ) ص^{٢} + ٤ س^{٢} =٤ د) ٤ص^{٢} + س^{٢} =٤

(١١) إحداثيات نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته:
(ص+٦)^{٢} – (س–٢)^{٢} = ١ هما:

أ) (٢،–٦) ، (–٦، ٢) ب) (٢ ،–٥) ، (٢ ، –٧)

جـ) (٣ ،–٦) ، (١ ، –٦) د) (٢ ،٦) ، (٢ ،–٦)

(١٢) قطع زائد معادلته ٩س^{٢} – ١٦ ص^{٢} =١٤٤، ن(س،ص) نقطة واقعة عليه، فإن الفرق المطلق بين بعدي النقطة ن عن بؤرتي القطع هو:

أ) ١٦ ب)٩ جـ)٦ د) ٨

(١٣) قطع زائد معادلته ٢س^{٢} – ٣ص^{٢} + ١٨ ص = ك، فإن قيم ك التي تجعل محوره القاطع موازيًا لمحور الصادات هي:

أ) ك >٢٧ ب) ك<٢٧ جـ) ك <– ٢٧ د) ك > –٢٧

(١٤) قطع مخروطي بعده البؤري يساوي ثلاثة أمثال طول محوره المرافق، فإن الاختلاف المركزي لهذا القطع يساوي:

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٤}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{\sqrt{٨}}$ د) $\frac{٦}{\sqrt{٣٥}}$

(١٥) المعادلة ٤س^{٢} – ص^{٢} – ١٦س + ١٠ ص – ١٧ = ٠ تمثل معادلة:

أ) دائرة ب) قطع مكافيء جـ) قطع ناقص د) قطع زائد

٢) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين ص = – ١ ، س = ٣ علمًا بأن طول نصف قطرها (٣) وحدات.

٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي يكون بعدها عن النقطة ب (–١، –٣) مساويًا دائمًا بعدها عن المستقيم ص =١

٣٧١

٤) إذا كانت المعادلة: ك س^{٢} + ٥ ص^{٢} = ١٧ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر موازٍ لمحور السينات، أثبت أن ك = $\frac{١٧}{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}$

٥) قطع مخروطي اختلافه المركزي هـ <١، وبؤرتاه تقعان في النقطتين (–١،١) ، (١،١) ويمر بنقطة الأصل جد ما يأتي:

أ) مركز القطع ب) إحداثيات الرأسين جـ) قيمة الاختلاف المركزي

٦) إذا كان هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين:

$$\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ل}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}^{٢}} = ١ \quad ، \quad \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}^{٢}} - \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ل}^{٢}} = ١$$

فأثبت أن: $\frac{١}{\text{هـ}_{١}^{٢}} + \frac{١}{\text{هـ}_{٢}^{٢}} = ١$

٧) جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كل من المستقيمات : س=٣، س=١٣، ص= –١، ص=٧.

٨) جد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$ وإحداثيات بؤرتيه (٧ ،٢) ، (٧ ، – ٤).

٣٧٢

الوحدة السادسة

الهندسة الفضائية

النتاجات الخاصة

- يتعرّف مفهوم الفضاء.
- يتعرّف مفهوم الهندسة الفضائية.
- يتعرّف مسلمات الهندسة الفضائية.

المفاهيم والمصطلحات

النقطة، المستقيم، المستوى، الفضاء، الهندسة الفضائية،المسلمة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية :التدريس المباشر

- تذكير الطلبة ببعض المفاهيم الهندسية التي تعلموها في المراحل الأساسية كالنقطة والمستقيم والمستوى الديكارتي.
- تقريب هذه المفاهيم من خلال إعطاء وصف لها وليس من خلال تعاريف رياضية.

التعلم التعاوني

- إحضار مجموعة من المجسّمات الجاهزة (مكعب، هرم،...)، وتقسيم الطلبة مجموعات عمل، ثم توزيع المجسّمات على المجموعات وتكليفهم دراسة خصائصها كمقدمة ليتعرفوا مفهومي الفضاء والهندسة الفضائية.
- عرض أمثلة توضيحية للنقطة والمستقيم والمستوى من خلال النماذج المجسّمة، ومن خلال أمثلة معدة مسبقًا مدعمة بأشكال هندسية تعرض بوساطة (Data Show).
- تكليف الطلبة تنفيذ تدريب (١).
- توضيح مفهوم المسلمة، وهيئ لمنطوقها من خلال أمثلة تقربه، ثم مناقشة نصوص المسلمات (١، ٢)، وتدوينها على السبورة.

معلومات إضافية للمعلم

- تُعرف المسلمة أحياناً بأنها قضية بلغت في ذاتها حداً من البداهة يجعلنا نعجز عن الاهتداء إلى قضايا أشد بداهة منها لنبرهن بها عليها، واشترط "باسكال" أن تكون المسلمة واضحة بذاتها.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٦-١ البناء الرياضي للهندسة الفضائية
Mathematical Structure of Space Geometry

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تعرف مسلمات الهندسة الفضائية.

لقد تعرفت في دراستك السابقة للهندسة المستوية مفاهيم أساسية منها :

النقطة : وتتحدد بموقع ليس له أبعاد (طول ، عرض ، ارتفاع) ونرمز لها بأحد أحرف الهجاء أ ،ب ،جـ ... كما في الشكل(٦-١).

الشكل(٦-١)

المستقيم : يتكون من مجموعة من النقط غير المنتهية الواقعة على استقامة واحدة يمتد من طرفيه إلى ما لانهاية وهو ذو بعد واحد، ونرمز له عادة بأحد حروف الهجاء أو نقطتين واقعتين عليه.

الشكل (٦-٢) يمثل المستقيم (م) : أب أو م

سوف نستخدم الرمز أب للدلالة على القطعة المستقيمة أب، والرمز أب للدلالة على طول القطعة المستقيمة أب.

الشكل(٦-٢)

المستوى: سطح منبسط ذو بعدين يمتد بلا حدود من جميع جهاته، وغالبًا ما يمثل هندسيًا لأغراض الدراسة بمنطقة رباعية، ونرمز له بأحد حروف الهجاء ، أو ثلاثة (أربعة) أحرف تمثل ثلاث (أربع) نقط عليه ليست على استقامة واحدة.

الشكل (٦-٣) يمثل المستوى س أو المستوى أ ب جـ أو المستوى أ ب جـ د

الشكل(٦-٣)

٣٧٥

مثال (١)

اعتمد على الشكل (٦-٥) للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) سمِّ ثلاث نقط.
٢) سمِّ ثلاثة مستويات.
٣) سمِّ ثلاثة مستقيمات.
٤) سمِّ مستقيمين يمران بالنقطة جـ.
٥) كم مستقيمًا يمر بالنقطتين د، جـ معًا ؟
٦) سمِّ مستقيمًا يقع في مستويين مختلفين، ثم اذكر المستويين.

الشكل (٦-٥)

الحل

١) ثلاث نقط: أ، ح ، د.
٢) ثلاثة مستويات : أ ب جـ ، و أ ز ، أ و هـ.
٣) ثلاثة مستقيمات : أب ، أد ، زح
٤) مستقيمان يمران بالنقطة جـ: ب جـ ، دجـ
٥) يمر بالنقطتين د، جـ معًا مستقيم واحد.
٦) المستقيم د جـ يقع في المستويين د جـ ب ، د جـ هـ.

تدريب (١)

اعتمد على الشكل (٦-٦) في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) سمِّ ثلاثة مستقيمات.
٢) سمِّ ثلاثة مستويات.
٣) سمِّ ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة ب.
٤) مستقيم يقع في مستويين مختلفين، ثم اذكر اسمي المستويين .

الشكل (٦-٦)

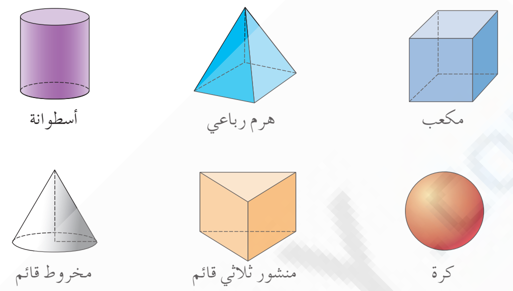
٣٧٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

ومن الأمثلة على المستويات سطح الطاولة، سطح السبورة، سطح ملعب كرة القدم.

وقد اقتصرت دراستك السابقة على العلاقة بين النقط والمستقيمات التي يحويها مستوى واحد فسميت **بالهندسة المستوية**.

كما سبق لك دراسة بعض المجسمات ، وهي تمثل أشكالا هندسية ذات ثلاثة أبعاد : طول ، عرض ، ارتفاع، أنظر الشكل (٦–٤).



الشكل (٦–٤)

وإذا نظرت حولك تجد أجسامًا كثيرة ذات ثلاثة أبعاد كالبنايات والسيارات والأثاث. إن الدراسة الهندسية لمثل هذا النوع من الأشكال التي تشغل حيزًا في **الفضاء** تسمى **الهندسة الفضائية**، وهي موضوع دراستنا في هذه الوحدة، حيث يعتبر **الفضاء** في الهندسة بأنه مجموعة غير منتهية من النقط يحوي المستقيمات والمستويات، لذلك فإن الهندسة الفضائية تهتم بالعلاقة بين تلك المستقيمات والمستويات التي يحويها الفضاء .

٣٧٦

تعريف

إذا وقعت مجموعة نقط على مستقيم واحد تسمى نقاطًا مستقيمة، وإذا وقعت في مستوى واحد تسمى نقاطًا مستوية.

مسلمات الهندسة الفضائية

بني علم الهندسة على مفردات أولية غير معرفة كالنقطة والمستقيم وتعريفات ومسلمات يؤخذ بصحتها دون برهان، ونظريات يمكن إثبات صحتها ، وفيما يأتي نعرض مسلمات الفضاء تمهيدًا لدراسة النظريات المتعلقة بالمستقيمات والمستويات في الفضاء .

تعلم أن النقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات، وهذا ينطبق على النقطة في الفضاء، أما عدد المستقيمات التي تمر بنقطتين مختلفتين في الفضاء فتحدده المسلمة الآتية:

مسلمة (١)

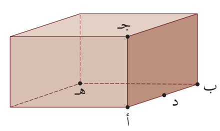
أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم واحد.

لاحظ أنه يمكن التوصل من هذه المسلمة إلى أن أي مستقيم في الفضاء يحوي نقطتين على الأقل.

مسلمة (٢)

إذا تقاطع مستقيمان مختلفان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة.

والآن لاحظ الشكل (٦–٧)، إن النقاط الثلاث أ، د ،ب تقع في مستويين مختلفين هما أ ب هـ، أ ب جـ بينما تقع النقاط الثلاث أ ، ب ، جـ في مستوى واحد فقط هو أ ب جـ، وهذا ما يميز مجموعة النقاط أ ، ب ، د عن مجموعتي النقط (أ،ب،هـ)،(أ،ب،جـ)، إذ إن الأولى نقط مستقيمة، بينما هي في المجموعتين الثانية والثالثة غير مستقيمة، وهذا ما تنص عليه المسلمة الثالثة.



الشكل (٦–٧)

٣٧٨

الأخطاء الشائعة

– يخلط بعض الطلبة بين وصف المفهوم الهندسي وتعريفه، ذكّر الطلبة بأن المفاهيم الهندسية الأساسية الواردة غير معرفة.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– كلف الطلبة النظر إلى داخل الغرفة الصفية، واطلب إليهم إعطاء أمثلة واقعية على مفاهيم: النقطة، المستقيم، المستوى، ...إلخ.

إثراء

– كلف الطلبة بتصميم مجسّمات "عديدة السطوح" وإحضارها للغرفة الصفية في الحصة التالية؛ لعرض أمثلة إثرائية من خلالها.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (١) .

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

– وردت بعض المفاهيم البسيطة المرتبطة بهذه الوحدة في وحدة المجسمات في الصف الثامن.

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٦-١ البناء الرياضي للهندسة الفضائية

النتاجات الخاصة

– يتعرّف المزيد من مسلمات الهندسة الفضائية.

المفاهيم والمصطلحات

النقطة، المستقيم، المستوى، التوازي، التقاطع.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بالمفاهيم التي تمت دراستها في الحصة السابقة وخاصة مفاهيم: النقطة، المستقيم، المستوى مع التركيز على نصوص المسلمتين اللتين تمت دراستهما.

– الاعتماد على مدلول المسلمة (٢) في استنتاج حالات تعيين المستوى، وذلك من خلال الاستعانة بالأشكال والرسومات التي يمكن عرضها على جهاز عرض البيانات.

التعلم التعاوني

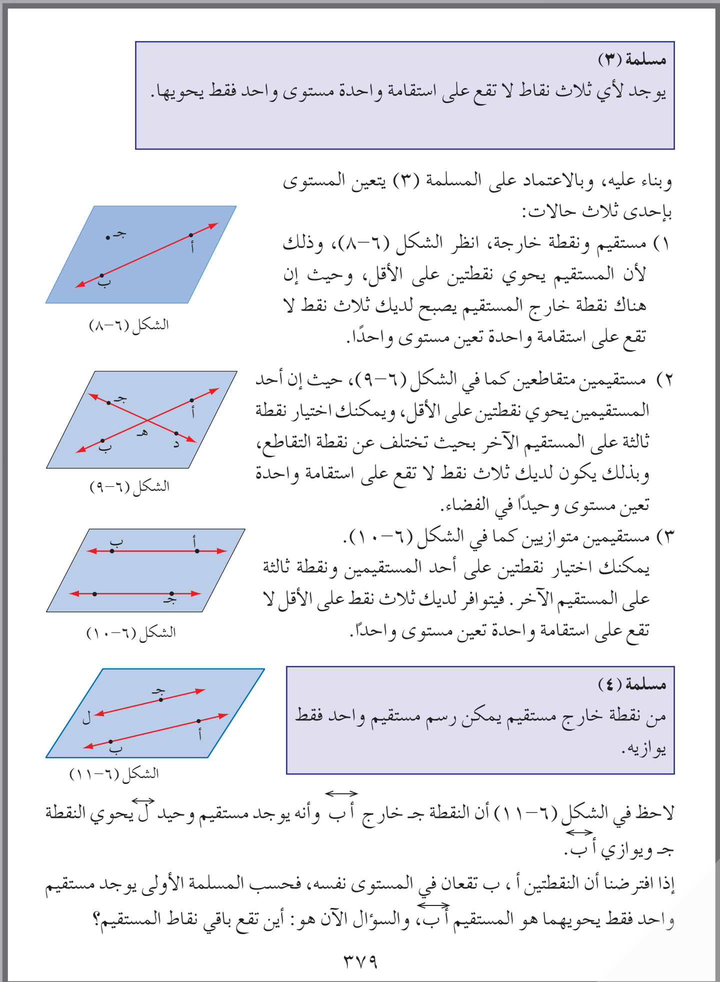
– مناقشة نصوص ومدلولات المسلمات (٣، ٤، ٥، ٦)، ويمكن تقسيم الطلبة مجموعات عمل تعاوني، تقوم كل مجموعة بدراسة مسلمة، ومناقشة النص مع شرح نموذج معتمد على الأشكال والرسومات، بهدف تمثّل هذه المسلمات.

– مناقشة الطلبة في مثال (٢).

– تكليف الطلبة حل تدريب (٢).

– واجب بيتي : تمارين ١، ٢، ٣، ٤.

– ناقش الطلبة في الحصة الثانية حلول التمارين الواجب البيتي.



مسلمة (٣)

يوجد لأي ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة مستوى واحد فقط يحويها.

وبناء عليه، وبالاعتماد على المسلمة (٣) يتعين المستوى بإحدى ثلاث حالات:

١) مستقيم ونقطة خارجة، انظر الشكل (٦–٨)، وذلك لأن المستقيم يحوي نقطتين على الأقل، وحيث إن هناك نقطة خارج المستقيم يصبح لديك ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوى واحدًا.

الشكل (٦–٨)

٢) مستقيمين متقاطعين كما في الشكل (٦–٩)، حيث إن أحد المستقيمين يحوي نقطتين على الأقل، ويمكنك اختيار نقطة ثالثة على المستقيم الآخر بحيث تختلف عن نقطة التقاطع، وبذلك يكون لديك ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوى وحيدًا في الفضاء.

الشكل (٦–٩)

٣) مستقيمين متوازيين كما في الشكل (٦–١٠). يمكنك اختيار نقطتين على أحد المستقيمين ونقطة ثالثة على المستقيم الآخر. فيتوافر لديك ثلاث نقط على الأقل لا تقع على استقامة واحدة تعين مستوى واحدًا.

الشكل (٦–١٠)

مسلمة (٤)

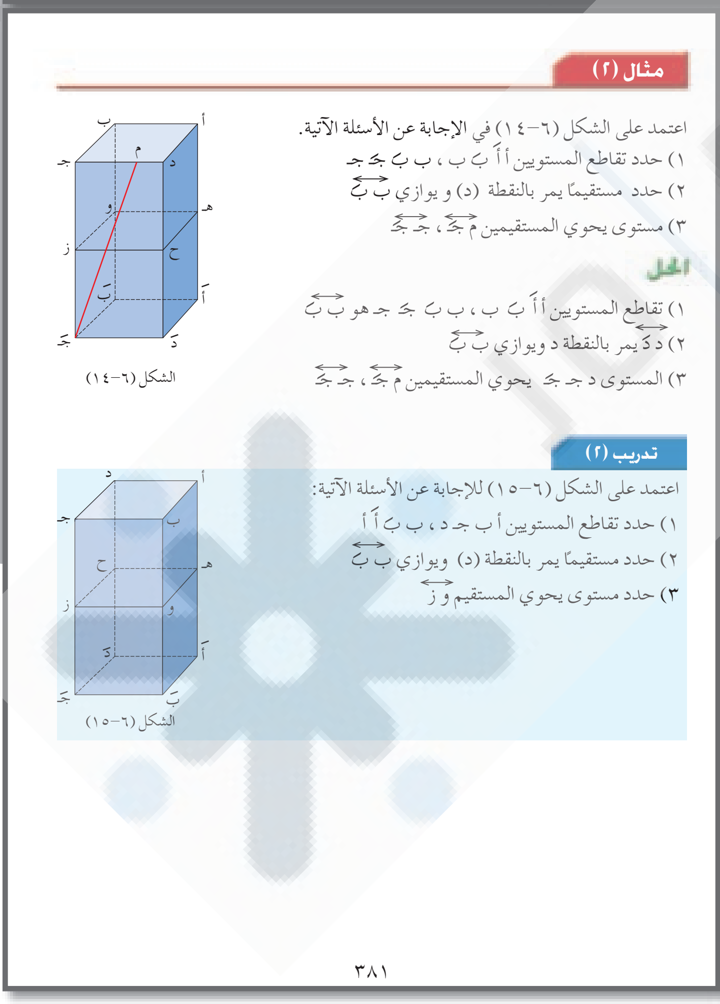
من نقطة خارج مستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازيه.

الشكل (٦–١١)

لاحظ في الشكل (٦–١١) أن النقطة جـ خارج أ ب وأنه يوجد مستقيم وحيد ل يحوي النقطة جـ ويوازي أ ب.

إذا افترضنا أن النقطتين أ ، ب تقعان في المستوى نفسه، فحسب المسلمة الأولى يوجد مستقيم واحد فقط يحويهما هو المستقيم أ ب، والسؤال الآن هو: أين تقع باقي نقاط المستقيم؟

٣٧٩



مثال (٢)

اعتمد على الشكل (٦–١٤) في الإجابة عن الأسئلة الآتية.

١) حدد تقاطع المستويين أ أَ بَ ب ، ب بَ جَ جـ

٢) حدد مستقيمًا يمر بالنقطة (د) و يوازي ب بَ

٣) مستوى يحوي المستقيمين م جَ ، جـ جَ

الحل

١) تقاطع المستويين أ أَ بَ ب ، ب بَ جَ جـ هو ب بَ

٢) د دَ يمر بالنقطة د ويوازي ب بَ

٣) المستوى د جـ جَ يحوي المستقيمين م جَ ، جـ جَ

الشكل (٦–١٤)

تدريب (٢)

اعتمد على الشكل (٦–١٥) للإجابة عن الأسئلة الآتية:

١) حدد تقاطع المستويين أ ب جـ د ، ب بَ أَ أ

٢) حدد مستقيمًا يمر بالنقطة (د) ويوازي ب بَ

٣) حدد مستوى يحوي المستقيم و ز

الشكل (٦–١٥)

٣٨١

معلومات إضافية للمعلم

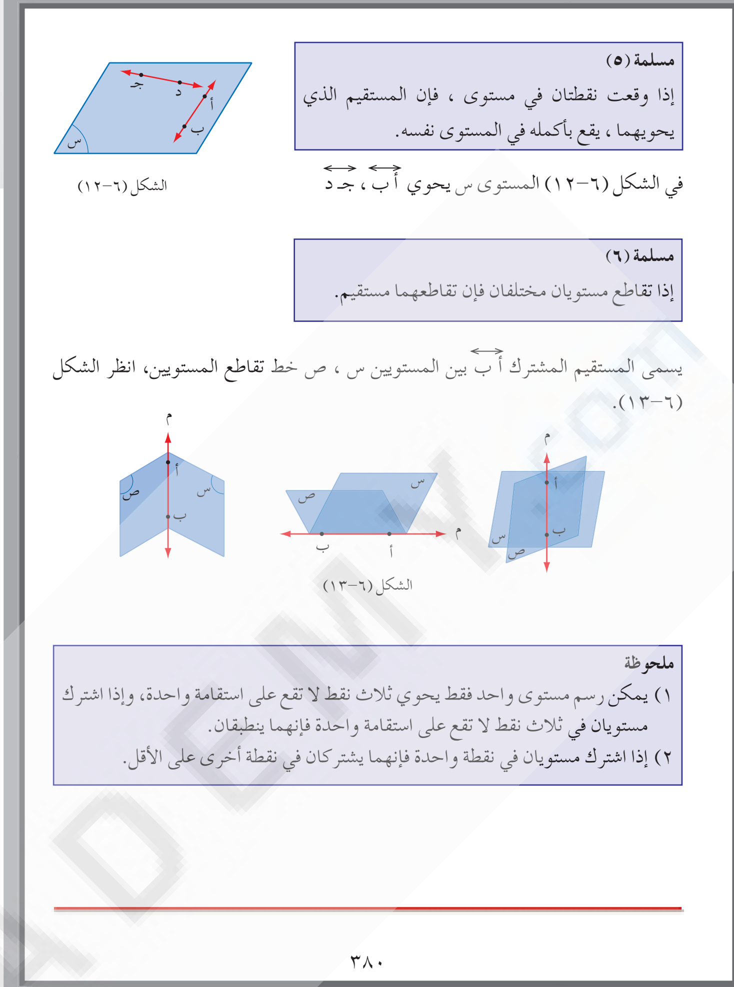
– يتكون البناء الرياضي من العناصر الآتية:

- مجموعة من المسميات (غير المعرفة)
- مجموعة من المسلمات
- مجموعة من المعرفات
- مجموعة من النظريات والنتائج.

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.


مسلمة (٥)

إذا وقعت نقطتان في مستوى ، فإن المستقيم الذي يحويهما ، يقع بأكمله في المستوى نفسه.

في الشكل (٦–١٢) المستوى س يحوي أ ب ، جـ د

الشكل (٦–١٢)

مسلمة (٦)

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما مستقيم.

يسمى المستقيم المشترك أ ب بين المستويين س ، ص خط تقاطع المستويين، انظر الشكل (٦–١٣).

الشكل (٦–١٣)

ملحوظة

١) يمكن رسم مستوى واحد فقط يحوي ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة، وإذا اشترك مستويان في ثلاث نقط لا تقع على استقامة واحدة فإنهما ينطبقان.

٢) إذا اشترك مستويان في نقطة واحدة فإنهما يشتركان في نقطة أخرى على الأقل.

٣٨٠


تمارين ومسائل

١) الشكل (٦–١٦) يمثل هرم خوفو في مصر، والنقطتان: و، ز تمثلان فتحتين إلى داخل الهرم.
أعط مثالاً لكل مما يأتي:
أ) ثلاث نقط على استقامة واحدة.
ب) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.
جـ) خمس نقط مستوية.
د) أربع نقط ليست مستوية.
هـ) ثلاث نقط على استقامة واحدة من بينها النقطة ز.
و) نقطة تقاطع أ ز مع هـ د

الشكل (٦–١٦)

٢) ما عدد المستويات التي يمكن رسمها بحيث يمر كل منها:
أ) بثلاث نقط على استقامة واحدة.
ب) بأربع نقط ثلاث منها على استقامة واحدة.
جـ) رؤوس هرم ثلاثي.
د) بثلاث نقاط من بين أربع نقاط غير مستوية.

٣) أي العبارات الآتية صحيحة وأيها خطأ:
أ) يوجد أكثر من مستوى يمر بمستقيمين متوازيين.
ب) كل مستقيم يمكن أن يمر به عدد غير منتهٍ من المستويات.
جـ) إذا كان أ ب يقع في المستوى س فإن أ ب يقطع المستوى س في نقطتين فقط.
د) يقع المثلث بأكمله في مستوى واحد.

٤) اعتمد على الشكل (٦–١٧) في الإجابة عن الأسئلة الآتية:
أ) سمِّ أربعة مستويات مختلفة.
ب) سمِّ مستويين يحويان المستقيم ح ي

الشكل (٦–١٧)

٣٨٢

الأخطاء الشائعة

– قد يواجه الطلبة صعوبات في رسم الأشكال في الفضاء، حاول تركيز هذه المهارة لديهم من خلال نماذج من الرسومات والأشكال تقوم بها شخصيًّا أمامهم، ثم يقوم الطلبة بمحاكاتها.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– احضر نموذجًا لمكعب، وكلف الطلبة تحديد: المستويات المكونة من الأوجه، مستقيمات متقاطعة، مستويات متقاطعة، وتحديد مستقيمات التقاطع.

إثراء

– اثبت أن أضلاع متوازي الأضلاع أ ب ج د تقع في مستوى واحد.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **استراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (١).
– **الاستراتيجية**: التقويم المعتمد على الأداء.
– **الأداة**: سلّم التقدير (٢ – ٥)، بند (١).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

٦-٢ أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

تتعرف أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

ستدرس في هذا البند العلاقة بين كل من: مستقيمين، مستقيم ومستوى، مستويين في الفضاء.

الشكل (٦-١٨)

أولاً: العلاقة بين مستقيمين في الفضاء

١) إذا وقع مستقيمان في مستوى واحد، واشتركا في نقطة واحدة، فإنهما **يكونان متقاطعين**. مثل $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$

٢) إذا وقع مستقيمان في مستوى واحد ولم يتقاطعا فإنهما يكونان **متوازيين**. مثل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

٣) إذا كانا المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين ولا يحويهما مستوى واحد مثل المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ز ح}}$ في الشكل (٦-١٨). يقال لهذا الوضع **التخالف**، ويسمى المستقيمان في هذه الحالة **متخالفين**.

لاحظ أن ما يميز التوازي والتقاطع عن التخالف، أن المستقيمين سواء أكانا متوازيين أو متقاطعين، فإنه يوجد مستوى واحد يحتويهما، بينما المستقيمان المتخالفان لا يمكن أن يحويهما مستوى واحد.

لاحظ أن

تعتبر القطعتان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ متوازيتين إذا كان المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ متوازيين، وتعتبران متخالفتين إذا كان المستقيمان متخالفان.

الزاوية بين مستقيمين متخالفين

درست سابقًا كيف تحدد الزاوية بين مستقيمين متقاطعين. ولكن كيف يمكنك تحديدها بين مستقيمين متخالفين.

٣٨٣

الدرس ٦-٢ أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

النتاجات الخاصة

– يتعرّف أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفاهيم والمصطلحات

المستقيمان المتقاطعان، المستقيمان المتوازيان، **المستقيمان المتخالفان، الزاوية** بين مستقيمين متخالفين، تعامد مستقيمين متخالفين، **المستقيم الواقع في** المستوى، المستقيم الموازي للمستوى.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بالمفاهيم الهندسية التي وردت والمسلمات ومنطوقها ومدلولها.

– لاحظ الواجب البيتي والاطلاع على حلول الطلبة، ثم تكليف الطلبة بمناقشة الحلول فيما بينهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

الاستراتيجية : الاكتشاف

– عرض نموذج لمكعب واستخدامه كوسيلة موضّحة لاكتشاف العلاقة بين مستقيمين في الفضاء (التقاطع، التوازي، التخالف).

– تصميم وسيلة لتوضيح كيفية قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين، وتقديم الأمثلة على ذلك (مثال ١).

– تكليف الطلبة حل تدريب (١) وتقديم التغذية الراجعة المناسبة، وعرض مزيد من الأمثلة والتدريبات.

– جعل الطلبة يكتشفون العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء من خلال نماذج توضيحية (كنموذج مكعب، أو متوازي مستطيلات، أو مكونات الغرفة الصفية)، ثم تدوين هذه العلاقة على السبورة.

– واجب بيتي: ١ (أ، جـ، د) ٢(أ، ب، جـ، د، هـ، ح، ط) ٣ (أ، ب، جـ،هـ)، ٤ (أ، ب، جـ، د).

معلومات إضافية

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

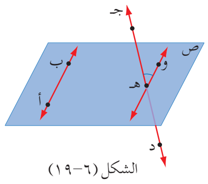
– قد يخطئ الطلبة في قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين، احضر قطعة من الورق المقوى، وارسم في مستواها مستقيمًا، واحضر سلكًا معدنيًّا مستقيمًا وأدخله في نقطة من نقاط طبق

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

في الشكل (٦–١٩) أب ، جـ د مستقيمان متخالفان.
المستقيم جـ د يقطع المستوى ص في النقطة هـ،

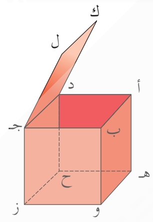
أ ب يقع في المستوى ص ، من النقطة هـ ارسم مستقيمًا يوازي أ ب ويقع في المستوى ص وليكن هـ و فتكون الزاوية الحادة جـ هـ و الناتجة عن تقاطع جـ د ، هـ و هي الزاوية بين المستقيمين المتخالفين أ ب ، جـ د


الشكل (٦–١٩)

يقال لمستقيمين متخالفين أنهما متعامدان إذا كانت الزاوية بينهما قائمة

مثال (١)

يمثل الشكل (٦–٢٠) صندوقًا مرفوع الغطاء. أعط مثالاً على كل حالة من الحالات الآتية:
١) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية.
٢) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.
٣) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.


الشكل (٦–٢٠)

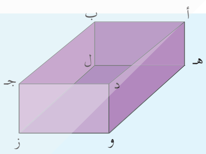
الحل

١) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتوازية.
المستقيمان أ د ، ب جـ ، المستقيمان هـ و ، ح ز ، المستقيمان د ح ، ب و
٢) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.
المستقيمان أ ب ، ب جـ ، المستقيمان ل جـ ، جـ د ، المستقيمان د ح ، ح ز
٣) ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.
المستقيمان ب جـ ، د ح ، المستقيمان د ك ، و ز ، المستقيمان د جـ ، هـ ح

٣٨٤

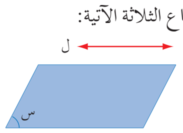
تدريب (١)

اعتمد على الشكل (٦–٢١) الذي يمثل متوازي مستطيلات في الإجابة عن الأسئلة الآتية:
١) سمِّ ثلاثة مستقيمات توازي المستقيم د جـ.
٢) سمِّ ثلاثة أزواج من المستقيمات المتقاطعة.
٣) سمِّ ثلاثة أزواج من المستقيمات المتخالفة.

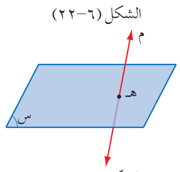

الشكل (٦–٢١)

ثانيًا: العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء

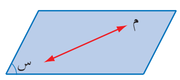
يمكن حصر العلاقة بين مستقيم ومستوى في الفضاء في أحد الأوضاع الثلاثة الآتية:
١) المستقيم لا يشترك مع المستوى في أية نقطة،
في هذه الحالة نقول أن المستقيم **يوازي** المستوى.
كما في الشكل (٦–٢٢)، المستقيم ل يوازي المستوى س


الشكل (٦–٢٢)

٢) المستقيم **يقطع** المستوى في نقطة واحدة. كما في الشكل (٦–٢٣)، المستقيم م يقطع المستوى س في النقطة هـ

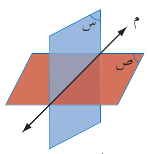

الشكل (٦–٢٣)

٣) المستقيم **يقع بكامله** في المستوى.
كما في الشكل (٦–٢٤) ، المستقيم م يقع بكامله في المستوى س


الشكل (٦–٢٤)

ثالثًا: العلاقة بين مستويين في الفضاء

استخدم قطعتين من الكرتون لتمثلا مستويين. ضع القطعتين في أوضاع مختلفة محاولاً تحديد العلاقة بين مستويين في الفضاء ستجد أنه يمكن حصر هذه الأوضاع في حالتين:
١) يتقاطع المستويان في مستقيم.
في الشكل (٦–٢٥) يتقاطع المستويان س،ص في المستقيم م


الشكل (٦–٢٥)

٣٨٥

الورق، فيكون المستقيم موازيًا للمستقيم المرسوم ويمر بنقطة التقاء السلك مع طبق الورق، احضر منقلة وقس الزاوية بين المستقيم المرسوم والسلك فتكون هي الزاوية المطلوبة.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– اذكر ثلاثة نماذج من العالم المحيط بك لبيان ما يأتي:
- مستقيمان متخالفان.
- مستقيم يقطع مستوى.
- مستقيمان يوازيان مستوى.
- مستقيم يقع في مستوى.

إثراء

– أ ب ج مثلث، د نقطة لا تقع في مستوى هذا المثلث، اذكر أزواج القطع المستقيمة المتخالفة الناتجة من وصل د مع رؤوس المثلث.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية:** الملاحظة.
– **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٧)، بند (٢).
– استخدم السجل القصصي للمعلم لتوضيح قدرة الطلبة على تصور الأشكال في الفضاء وقدرتهم على تمثيلها في المستوى.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٦-٢ أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

النتاجات الخاصة

– يتعرّف أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفاهيم والمصطلحات

توازي مستقيم ومستوى، تقاطع مستقيم مع مستوى، وقوع مستقيم في مستوى، تقاطع مستويين، توازي مستويين.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بأبرز المفاهيم والعلاقات الرياضية المرتبطة بعلاقة مستقيم مع مستقيم ومستقيم مع مستوى.

– استخدام وسيلة مكونة من قطعتي كرتون متداخلتين لتوضيح تقاطع مستويين (الشكل ٦–٥).

– استخدام نموذج متوازي المستطيلات لتوضيح توازي مستويين.

– عرض مثالٍ على تقاطع وتوازي مستويين من أمثلة الكتاب.

– تكليف الطلبة حل تدريب (٢). يمكن تصور درج المدرسة في تمثّل فقرات التدريب.

– مناقشة مثال (٣) مع إعطائه أهمية خاصة لكونه يستخدم أسلوب البرهان المعتمد على المسلمات.

– تكليف الطلبة حل تدريب (٣)، ومتابعة حلولهم، ومساعدتهم على اكتشاف الحل بالاستعانة بمفاهيم ومسلمات الهندسة الفضائية التي تمت دراستها في الدروس السابقة والدرس الحالي.

– تكليف الطلبة حل واجب بيتي ١ (ب)، ٢ (و، ز)، ٣ (د، و)، ٥، ٦ من كتاب الطالب مع متابعة الحل ومناقشة الصعوبات.

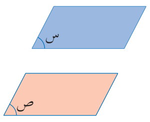
– مناقشة حلول الطلبة للواجب البيتي في الحصة التالية مع إيلاء أهمية خاصة للأسئلة المعتمدة على البرهان المنطقي ونظام المسلمات، الأسئلة (٥، ٦).

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

٢) لا توجد نقط مشتركة بين المستويين، أي أن المستويين لا يتقاطعان. في هذه الحالة نقول إن المستويين متوازيان. كما في الشكل (٦–٢٦) المستويان س،ص متوازيان.

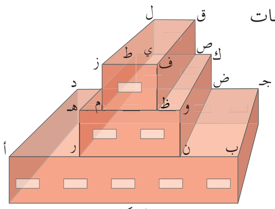


الشكل (٦–٢٦)

مثال (٢)

يمثل الشكل (٦–٢٧) البناء الهيكلي لأحد المجمعات التجارية في مدينة عمان. أجب عن الأسئلة الآتية:

١) سمِّ زوجين لمستويين متوازيين.
٢) سمِّ زوجين لمستويين متقاطعين.
٣) سمِّ مستقيمًا يوازي مستوى.
٤) سمِّ مستقيمًا يقطع مستوى.



الشكل (٦–٢٧)

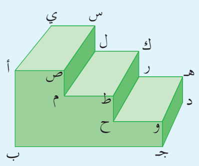
الحل

١) المستويان أ ب جـ ، هـ و ك متوازيان ، وكذلك المستويان ن و ك ،ر هـ ط
٢) المستويان و ن ر ، أ ب جـ متقاطعان ، وكذلك المستويان ك و هـ ، ن و ك
٣) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ك و}}$ يوازي المستوى أ ب جـ
٤) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{و ن}}$ يتقاطع مع المستوى أ ب جـ

تدريب (٢)

يمثل الشكل (٦–٢٨) درجًا لأحد المنازل، أعط مثالاً على كل حالة من الحالات الآتية:

١) مستويان متوازيان.
٢) مستوى يوازي المستوى س ل م
٣) مستقيم يوازي المستوى هـ و ح
٤) مستقيم يقطع المستوى أ ب جـ



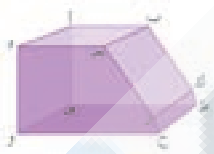
الشكل (٦–٢٨)

٣٨٦

تمارين ومسائل

١) ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وإشارة (✗) أمام العبارة الخطأ، مع ذكر السبب.
أ) إذا لم يشترك المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مع المستوى س في أية نقطة فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ // س
ب) إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستوى.
جـ) من نقطة خارج مستوى يمكن رسم مستقيم واحد فقط يوازي هذا المستوى.
د) إذا توازى مستقيمان فإن أي مستقيم يقطع أحدهما يقطع الآخر.

٢) في الشكل (٦–٣٠) اذكر أسماء كل مما يأتي:
أ) حرفان متقاطعان.
ب) حرفان متوازيان.
جـ) حرفان متعامدان.
د) حرفان متخالفان.
هـ) حرفان متخالفان ومتعامدان.
و) مستويان متوازيان.
ز) مستويان متقاطعان.
ح) حرف يوازي مستوى.
ط) حرف يقطع مستوى.


الشكل (٦–٣٠)

٣) يمثل الشكل (٦–٣١) هرمًا سداسيًا قائمًا. أعط مثالاً على كل مما يأتي:
أ) مستقيمين متوازيين.
ب) مستقيمين متقاطعين.
جـ) مستقيمين متخالفين.
د) مستويين متقاطعين.
هـ) مستقيم يقطع مستوى.


الشكل (٦–٣١)

٣٨٨

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– ارسم شكلاً تمثّل فيه مستويين متقاطعين.

– ارسم شكلاً تمثّل فيه مستويين متوازيين.

إثراء

– أثبت أنه إذا قطع مستقيم ثلاثة مستقيمات متقاطعة في نقطة فإن المستقيمات الأربعة تقع في مستوى واحد.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: التواصل.

– **الأداة**: سجل سير التعلم.

- في سجل سيرالتعلم، دون بعض الملاحظات حول الطلبة الذين لديهم قدرات خاصة في التعامل مع البرهان المنطقي، وعزّز هذا الاتجاه لديهم.
- شجّع الطلبة على كتابة أهم ما تعلموه والصعوبات التي واجهتهم في سجل سير العمل.

التكامل الأفقي

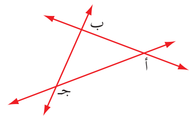
التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٣)

أثبت أنه إذا تقاطعت ثلاثة مستقيمات في ثلاث نقط فإنها تقع في مستوى واحد.



الشكل (٦–٢٩)

الحل

المعطيات

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ثلاثة مستقيمات متقاطعة في ثلاث نقط

المطلوب :

إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ تقع في مستوى واحد.

البرهان

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مستقيمان متقاطعان فهما يشكلان مستوى واحدًا، ليكن س (نتائج مسلمة ٣).

بما أن أ، جـ تنتميان إلى المستوى س ، فإن المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ الذي يحويهما يقع بأكمله في المستوى س (مسلمة٥).

أي أن المستقيمات: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ تقع في مستوى واحد.

لاحظ الشكل (٦–٢٩)

تذكر

خطوات حل المسألة الهندسية.
١) ارسم شكلاً يوضح المسألة.
٢) حدد المعطيات
٣) حدد المطلوب واكتبه.
٤) ضع خطة للحل من اجل التوصل للمطلوب.
٥) نفذ خطة الحل مستعينًا بالمعطيات والنظريات والمسلمات الهندسية.

تدريب (٣)

أثبت أن كل مستوى يحوي ثلاثة مستقيمات على الأقل.

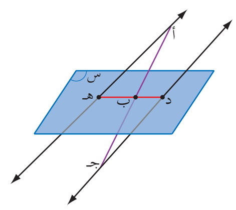
٣٨٧

٤) اذكر ثلاثة أمثلة من البيئة المحيطة بك على:

أ) مستقيمين متقاطعين.
ب) مستقيمين متوازيين.
جـ) مستقيم يقطع مستوى.
د) مستقيم يوازي مستوى.
هـ) مستويين متوازيين.
و) مستقيمين متخالفين.

٥) إذا كانت النقط أ ، ب ، هـ تقع في المستوى س ، والنقط أ ، ب ، جـ تقع في المستوى ص. أثبت أن المستويين س ، ص يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أب}}$.

٦) قَطعت القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ جـ}}$ المستوى س في النقطة (ب) رُسِم من أ ، جـ مستقيمان متوازيان قطعا المستوى س في النقطتين هـ ، د على الترتيب كما في الشكل (٦–٣٢) أثبت أن النقط هـ ، ب ، د تقع على استقامة واحدة.



الشكل (٦–٣٢)

٣٨٩

الأخطاء الشائعة

الدرس ٦-٣ نظريات في التوازي

النتاجات الخاصة

- يبرهن النظريات التي تتضمن التوازي.
- يحل مسائل تتعلق بالتوازي.

المفاهيم والمصطلحات

توازي مستقيم ومستوى، مستقيم قاطع لمستوى، توازي مستويين.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بالمفاهيم الرئيسة التي وردت سابقًا، ثم مناقشة الطلبة بحلولهم للواجب البيتي، وتقدم التغذية الراجعة لهم، ومساعدتهم في الارتقاء بتفكيرهم الرياضي.
- تذكير الطلبة بأسلوب حل المشكلة بشكل عام، وتهيئة الطلبة لمساعدتك في برهنة بعض النظريات المتعلقة بمفهوم التوازي باستخدام أسلوب البرهان بالتناقض أحيانًا.
- عرض نص نظرية (١) وبرهنتها من خلال أسلوب البرهان بالتناقض، وتوضيح النتيجة المرتبطة بهذه النظرية، مدعمًا ذلك بالأشكال والنماذج المجسمة.
- مناقشة الطلبة بحل مثال (١) مستخدمًا نظرية (١)، وتكليفهم حل تدريب (٢).
- عرض منطوق نظرية (٢)، وبرهنتها بمساعدة الطلبة، ومحاورتهم بالاستعانة بالأشكال والرسومات التوضيحية ونماذج من البيئة (الغرفة الصفية).
- مناقشة حل مثال (٢) مع الطلبة بالاستفادة من نظرية (٢).
- واجب بيتي: تمارين ١، ٢.

معلومات إضافية للمعلم

- **نظرية أويلر:** لأي كثير السطوح إذا كان و، ر، ح ترمز إلى عدد الأوجه الرؤوس، والأحرف على التوالي فإن:

و + ر = ح + ٢

- كلف الطلبة بالتحقق من هذه العلاقة ومحاولة برهانها.

٦-٣ نظريات في التوازي
Parallelism theorems

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تبرهن النظريات التي تتضمن التوازي.
٢- تحل مسائل تتعلق بالتوازي.

تعرفت في الدرس السابق مفهوم التوازي بين مستقيم ومستوى وبين مستويين، وفي هذا الدرس ستتعرف بعض نظريات التوازي وتبرهنها وفق خطوات حل المسألة الهندسية، كما سيتم تناول مسائل هندسية يتطلب حلها تطبيق هذه النظريات.

نظرية (١)
إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيما في المستوى فإنه يوازي هذا المستوى

المعطيات
أ ب خارج المستوى س ، جـ د واقع في المستوى س ،
أ ب // جـ د. (انظر الشكل (٦ – ٣٣)

المطلوب
إثبات أن أ ب // المستوى س

البرهان
سنبرهن هذه النظرية بأسلوب البرهان بالتناقض
افرض أن أب لايوازي المستوى س
وعليه ، فإنه يوجد نقطة مشتركة بين أ ب والمستوى س، ولتكن هـ.
أ هـ د مستوى، د نقطة فيه خارج أب.
إذن يمكن رسم مستقيم يوازي أب من النقطة د ويقع في المستوى أ هـ د

تعلم
يعتبر البرهان بالتناقض إحدى طرق البرهان، حيث يتم فرض عدم صحة المراد إثباته، وأثناء استخدام الحقائق من نظريات ومسلمات تجد تناقضًا إما مع معطيات السؤال أو مع مسلمات ونظريات سابقة وهذا يؤكد عكس الفرض.

الشكل (٦-٣٣)

٣٩٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

- قد يواجه بعض الطلبة صعوبات في استيعاب طريقة البرهان بالتناقض، وضح أسلوب هذا البرهان عند استخدامه في حل التدريبات أو المسائل، أو برهنة النظريات. يمكنك عرض أمثلة بسيطة على استخدام هذا الأسلوب في البرهان.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– تحقّق من صحة العبارتين الآتيتين:

- إذا وازى مستقيم مستوى فإنه يوازي كل مستقيم فيه.
- المستقيمان الموازيان لمستوى واحد متوازيان.

إثراء

– أ ب ج، أ ب د مثلثان في مستويين مختلفين، اثبت أن المستقيم الذي ينصف كلاً من ج أ، ج ب يوازي المستوى أ ب د.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (١).
– **الاستراتيجية**: تقويم الذات.
– **الأداة**: يوميات الطالب، يدون الطلبة أبرز ما تعلموه بالإضافة إلى النظريات وأسلوب البرهان بالتناقض، الذي استخدموه في برهنة بعض النظريات كما سيستخدمونه لاحقًا في هذه الوحدة.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

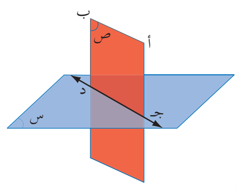
لكن أب // جـ د

إذن أمكن رسم مستقيمين من النقطة د يوازيان أ ب

وهذا يناقض مسلمة (٤) أي أن : أ ب لا يقطع المستوى ، ومنه أ ب// المستوى س .

نتيجة

إذا وازى مستقيم مستوى فإن كل مستوى مار بالمستقيم وقاطع للمستوى المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم.



الشكل (٦–٣٤)

لاحظ الشكل (٦– ٣٤) فيه أ ب// المستوى س،
والمستوى ص يمر بالمستقيم أب ويقطع المستوى س في حـ د وعليه (حسب النتيجة) يكون: أ ب // حـ د

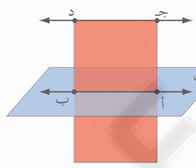
مثال (١)

أ،ب نقطتان في المستوى س، والنقطتان جـ ، د خارج المستوى س بحيث أ جـ // ب د، أ حـ = ب د. برهن أن: جـ د// المستوى س . انظر الشكل (٦ – ٣٥)

الحل

المعطيات

أ ، ب نقطتان في المستوى س ، جـ ، د نقطتان تقعان خارج المستوى س بحيث أ جـ // ب د ، أ جـ = ب د



الشكل (٦–٣٥)

المطلوب

إثبات أن جـ د // المستوى س.

البرهان

بما أن أ جـ // د ب ، أ جـ = د ب
إذن الشكل أ ب د جـ متوازي أضلاع
وعليه فإن جـ د // أ ب
إذن جـ د// المستوى س (نظرية ١)

٣٩١

تدريب (١)

أثبت أنه إذا وازي مستقيم مستوى، فالمستقيم الذي يمر بأية نقطة من نقط المستوى موازيًا للمستقيم المعلوم يقع بتمامه في المستوى.

نظرية (٢)

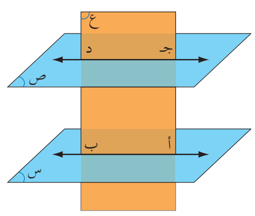
إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خَطَّيْ تقاطعه مع المستويين متوازيان.

المعطيات

س ، ص مستويان متوازيان، ع مستوى ثالث قاطع لهما في أ ب ، جـ د

المطلوب

إثبات أن أ ب // جـ د



الشكل (٦–٣٦)

البرهان

أب واقع في المستوى س
جـ د واقع في المستوى ص
والمستويات س ،ص متوازيان،
إذن أ ب ، جـ د لا يتقاطعان
لكن أب ، حـ د واقعان في المستوى ع
إذن أ ب // جـ د. انظر الشكل (٦ – ٣٦)

مثال (٢)

إذا كانت (ن) نقطة خارج المستويين المتوازيين س ، ص ، ومر بالنقطة (ن) مستقيمان قطعا المستوى س في أ ، ب كما قطعا المستوى ص في جـ ، د. برهن أن أب // جـ د

٣٩٢

الدرس ٦-٣ نظريات في التوازي

النتاجات الخاصة

- يبرهن النظريات التي تتضمن التوازي.
- يحل مسائل تتعلق بالتوازي.

المفاهيم والمصطلحات

توازي مستقيم ومستوى، مستقيم قاطع لمستوى، توازي مستويين.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بنصوص ونظرية (١)، ونظرية (٢) السابقتين في الدرس، وإبراز العلاقات المتضمنة فيها.

الاستراتيجية: الاكتشاف

- استخدام نموذج ورقي لتوضيح نظرية (٣)، وحث الطلبة على اكتشاف الحل بالاستفادة من الحقائق والنظريات السابقة.
- مناقشة مثال (٣) مع الطلبة. ويمكن (تحضير نموذج مكعب مكون من الأسلاك المعدنية لتوضيح حقائق المثال).
- تكليف الطلبة حل تدريب (٢)، وتذكيرهم بوضع تخالف مستقيمين والحالات التي يمكن بها تحديد مستوى وذلك لأهميتها في حل التدريب، والتجول بين الطلبة ومساعدتهم.
- الاطلاع على حلول الطلبة للتمرينين (١ ، ٢) من تمارين كتاب الطالب.
- واجب بيتي الأسئلة ٣، ٥، ٦ من كتاب الطالب.

معلومات إضافية للطالب

- يتشابه المثلثان في الحالات الآتية:
  - إذا تساوت قياسات زواياهما.
  - إذا تساوت النسب بين أطوال أضلاعهما المتناظرة.
  - إذا كان قياس زاوية في أحدهما يساوي قياس زاوية في الآخر، وكانت أطوال الأضلاع المحيطة بهاتين الزاويتين متناسبة.

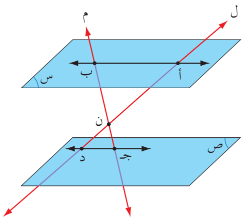
الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الحل

المعطيات

س ، ص مستويان متوازيان، ن نقطة خارجهما
المستقيمان ل ، م يتقاطعان في ن ، ويقطعان
المستوى س في أ ، ب.
والمستوى ص في جـ ، د ، انظر الشكل (٦– ٣٧)



الشكل (٦–٣٧)

المطلوب

إثبات أن أ ب // جـ د

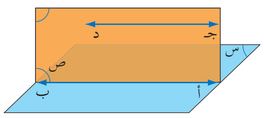
البرهان

المستقيمان ل ، م يتقاطعان في نقطة ن
فهما يحددان مستوى وحيدًا وليكن ع
المستوى ع يقطع المستويين المتوازيين س ، ص في أ ب ، جـ د على الترتيب
إذن: أ ب // جـ د (نظرية ٢) وهو المطلوب.

نظرية (٣)
إذا تقاطع مستويان ورسم في أحدهما مستقيم يوازي المستوى الآخر ، فإن هذا المستقيم يوازي خط تقاطع المستويين .

المعطيات

المستويان س ، ص يتقاطعان في أ ب،
جـ د // المستوى س ، جـ د يقع في المستوى ص.



الشكل (٦–٣٨)

المطلوب

إثبات أن جـ د // أ ب

البرهان:

جـ د يقع خارج المستوى س ويوازيه ، جـ د لا يتقاطع مع المستوى س
وحيث إن أ ب يقع في المستوى س ، إذن جـ د لا يتقاطع مع أ ب
لكن جـ د ، أ ب يقعان في المستوى ص ، إذن أ ب // جـ د وهو المطلوب

٣٩٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– تحقّق من صحة العبارتين الأتيتين:

- المستويان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان.
- المستويان الموازيان لمستقيم واحد متوازيان.

إثراء

– أب ، ج د مستقيمان في الفراغ، (و) نقطة ليست على أي منها، فإذا كان أب // المستوى و ج د، وكان د ج // المستوى و أب فأثبت أن أب // ج د.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة .
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (٣).
– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.
– **الأداة**: اختبار قصير يقيس أبرز المفاهيم الواردة في الدرس.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

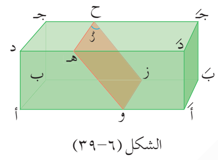
مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٣)

يمثل الشكل (٦ – ٣٩) متـوازي المستطيلات أ ب جـ د دَ جـَ بَ أَ ، إذا قطع المستوى س أحرفه أأَ، ب بَ ، جـ جـَ ، د دَ الجانبية في و، ز ، ح، هـ على التوالي.

أثبت أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع.



الشكل (٦–٣٩)

الحل

المعطيات

أ ب جـ د دَ جـَ بَ أَ متوازي مستطيلات، المستوى س قطع أحرفه الجانبية في و، ز، ح، هـ على التوالي.

المطلوب

إثبات أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع.

البرهان:

المستويان أ أَ بَ ب، جـ جـَ دَ د في متوازي المستطيلات متوازيان.

وحيث إن المستوى س يقطع هذين المستويين في وز ، هـ ح على الترتيب .... فرضًا

إذن وز // هـ ح (نظرية ٢)............(١)

وبالمثل ح ز // هـ و ....(٢)

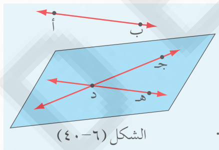
من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل هـ و ز ح متوازي أضلاع، وهو المطلوب.

تدريب (٢)

أ ب ، جـ د مستقيمان متخالفان.

رسم من د المستقيم د هـ يوازي أ ب.

برهن أن أ ب // المستوى د جـ هـ (انظر الشكل (٦ – ٤٠)).



الشكل (٦–٤٠)

٣٩٤

تمارين ومسائل

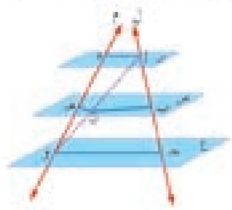
١) أ، ب نقطتان تقعان على مستقيم يوازي المستوى س ، مر بالنقطتين مستقيمان متوازيان قطعا المستوى س في جـ، د على الترتيب. أثبت أن : أ جـ = ب د ، أ ب = جـ د.

٢) أ ب ، جـ د ، هـ و، ثلاثة مستقيمات متوازية ولا تقع جميعها في مستوى واحد.
أثبت أن أ ب يوازي المستوى الذي يعينه المستقيمان جـ د ، هـ و.

٣) س ، ص مستويان متوازيان، (و) نقطة واقعة بينهما ، أ ب ، جـ د ، يقطعان المستوى س في أ، جـ ويقطعان المستوى ص في د ، ب ، ويتقاطعان في النقطة (و) أثبت أن: و أ ÷ و ب = أ جـ ÷ د ب .

٤) أ ب // جـ د ، أ ب يقع في المستوى س ، جـ د يقع في المستوى ص ، المستوى س والمستوى ص يتقاطعان في المستقيم هـ و.
برهن أن: هـ و يوازي كلا من أ ب ، جـ د

٥) س ، ص ، ع ثلاثة مستويات متوازية قُطعت بمستقيمين ل ، م (ل ، م في مستوى واحد) وصل أ و فقطع المستوى ص في (ن) كما في الشكل (٦ – ٤١) أثبت أن أ ب ÷ ب جـ = د هـ ÷ هـ و


الشكل (٦–٤١)

٦) س ، ص مستويان متوازيان ، م نقطة خارجهما . م أ ب، م جـ د ، م هـ و، ثلاثة مستقيمات تقطع المستوى س في النقط أ ، جـ ، هـ ، والمستوى ص في النقط ب ، د ، و فإذا كان م أ: أ ب = ٢ : ٣ وكان أ جـ = ٤ سم ، جـ هـ = ٣ سم ، أ هـ = ٥ سم ، فجد:
أ) أطوال أضلاع المثلث ب د و.
ب) مساحة المثلث ب د و.

٣٩٥

الدرس ٦-٤ التعامد

النتاجات الخاصة

- يتعرّف وضع المستقيم العمودي على مستوى.
- يبرهن النظريات التي تتضمن التعامد.
- يحل مسائل تتعلق بالتعامد.

المفاهيم والمصطلحات

المستقيم العمودي على مستوى.

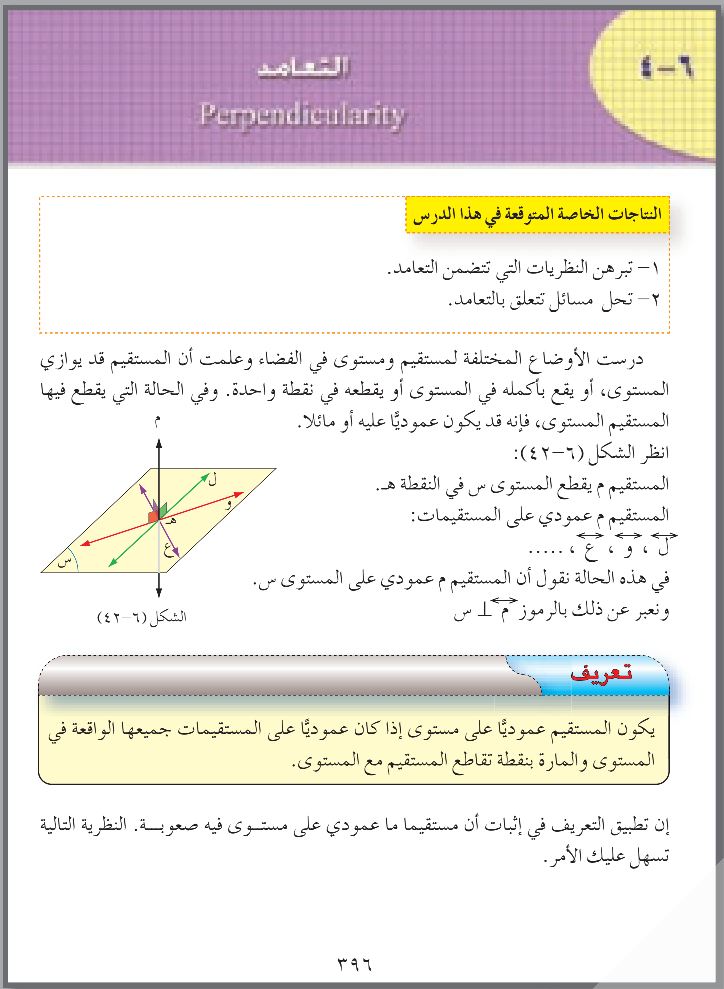
استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بالأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوى في الفضاء، ثم تعريف المستقيم العمودي على المستوى.
- ذكر الطلبة بنص نظرية (١)، وتدوينه على السبورة دون برهان، ركّز على التعميم على أن المستقيم العمودي على مستوى يكون عموديًا على كل مستقيم فيه.
- مناقشة مثال (١)، ومساعدة الطلبة على تصور معطيات السؤال باستخدام نموذج أو وسيلة تعد مسبقًا بهدف تقريب الحل لأذهان الطلبة.
- تكليف الطلبة حل تدريب (١)، ومساعدتهم في تصور معطيات التدريب، وتحديد الصعوبات لمساعدة الطلبة الضعاف على تخطي عقبات الحل في البعد الثالث.
- واجب بيتي سؤال (١) من التمارين من كتاب الطالب.

معلومات إضافية للمعلم

- ذكّر الطلبة بأن بعض الأسئلة والتمارين والتدريبات يمكن حلّها لاحقًا بطرق مختلفة، وذلك بشرح مزيد من النظريات والنتائج في الدروس القادمة. (كما في سؤال الإثراء المرفق).



٦-٤ التعامد
Perpendicularity

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١- تبرهن النظريات التي تتضمن التعامد.
٢- تحل مسائل تتعلق بالتعامد.

درست الأوضاع المختلفة لمستقيم ومستوى في الفضاء وعلمت أن المستقيم قد يوازي المستوى، أو يقع بأكمله في المستوى أو يقطعه في نقطة واحدة. وفي الحالة التي يقطع فيها المستقيم المستوى، فإنه قد يكون عموديًّا عليه أو مائلا.

انظر الشكل (٦-٤٢):

المستقيم م يقطع المستوى س في النقطة هـ.

المستقيم م عمودي على المستقيمات:

$\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{و}$ ، $\overleftrightarrow{ع}$ ، .....

في هذه الحالة نقول أن المستقيم م عمودي على المستوى س.

ونعبر عن ذلك بالرموز $\overleftrightarrow{م} \perp$ س

الشكل (٦-٤٢)

تعريف

يكون المستقيم عموديًّا على مستوى إذا كان عموديًّا على المستقيمات جميعها الواقعة في المستوى والمارة بنقطة تقاطع المستقيم مع المستوى.

إن تطبيق التعريف في إثبات أن مستقيما ما عمودي على مستـوى فيه صعوبـة. النظرية التالية تسهل عليك الأمر.

٣٩٦

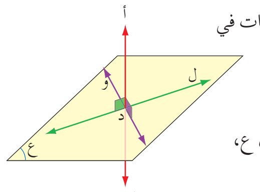
إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

نظرية (١)
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين في مستوى يكون عموديًا على مستواهما.



الشكل (٦–٤٣)

سوف نقبل هذه النظرية دون برهان لاعتمادها على نظريات في الهندسة المستوية لم يسبق لك دراستها

في الشكل (٦–٤٣):

$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و}}$ مستقيمان متقاطعان في د ، ويشكلان **المستوى** ع،

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ عموديٌّ على كل من المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و}}$

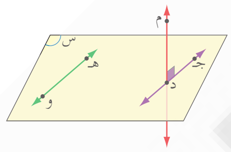
فيكون $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ عموديًا على المستوى ع

في الشكل (٦–٤٤):

ليكن $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ ⊥ س ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ (أي مستقيم يقع بتمامه في المستوى س).

من النقطة د يمكنك رسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$ بحيث يقع في المستوى س ويوازي **المستقيم** $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$.

وبما أن $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$ (تعريف المستقيم العمودي على مستوى)



الشكل (٦–٤٤)

وحيث أن $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ مستقيمان متخالفان

إذن $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$.

وعليه يكون $\overleftrightarrow{\text{م د}}$ عموديا على كل مستقيم في المستوى.

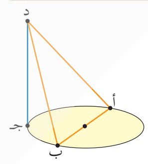
وبشكل عام:

المستقيم العمودي على مستوى يكون عموديًا على كل مستقيم فيه.

٣٩٧

مثال (١)

يمثل الشكل (٦–٤٥) دائرة قطرها $\overline{\text{أ ب}}$ ، جـ نقطة على الدائرة، حيث $\overline{\text{جـ د}}$ تعامد مستوى الدائرة. أثبت أن: $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ المستوى د جـ ب



الشكل (٦–٤٥)

الحل

المعطيات

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في دائرة، $\overline{\text{د جـ}}$ يعامد مستوى الدائرة.

المطلوب

إثبات أن $\overline{\text{أ جـ}}$ يعامد المستوى د ب جـ

البرهان

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة

إذن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ (الزاوية المحيطة في الدائرة والمقابلة للقطر هي قائمة)

أي أن $\overline{\text{أ جـ}}$ يعامد $\overline{\text{ب جـ}}$ ....(١)

بما أن $\overline{\text{جـ د}}$ يعامد مستوى الدائرة

إذن $\overline{\text{جـ د}}$ يعامد $\overline{\text{أ جـ}}$ ....(٢)

من (١) ، (٢) تجد أن $\overline{\text{أ جـ}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$

إذن $\overline{\text{أ جـ}}$ عمودي على المستوى د ب جـ

تدريب (١)

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د نقطة ليست في مستوى هذا المثلث ، بحيث إن ب د = ب أ، د جـ = جـ أ. أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ يعامد مستوى المثلث أ ب د

نظرية (٢)
الأعمدة المقامة من نقطة على مستقيم تقع جميعها في مستوى واحد.

٣٩٨

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– قد يواجه الطلبة صعوبات في تصور الأسئلة الفراغية، كلّف الطلبة تكوين نماذج من الورق المقوى والأسلاك المعدنية لبناء نماذج للأسئلة والتدريبات والنظريات.

إثراء

– أب ج مثلث قائم الزاوية في ب، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ⊥ المستوى أ ب ج، برهن أن المستقيم الواصل بين منتصفي $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{هـ ج}}$ يكون عموديًّا على $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ (ملاحظة: سيرد هذا السؤال في تمارين الإسقاط العمودي، وسيتم حله بطريقة الإسقاط في حينه).

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٦-٤ التعامد

النتاجات الخاصة

- يبرهن النظريات التي تتضمن التعامد.
- يحل مسائل تتعلق بالتعامد.

المفاهيم والمصطلحات

المستقيم العمودي على مستوى، المستقيمان العموديان على مستوى، المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بأهم المفاهيم الواردة في الدرس السابق، وكذلك بالنظريات التي تمت مناقشتها.
- ملاحظة حلول الطلبة للواجب البيتي، وتقديم التغذية الراجعة المناسبة لهم.
- مناقشة نص نظرية (٢) دون برهان وعرض تمثيل عليها.
- تقديم نظرية (٣)، وكتابة نصهما على السبورة، ومناقشة الطلبة ببرهانها، وعرض مثال تطبيقي عليها.
- تكليف الطلبة حل تدريب (٢) واستخدامه كمقدمة للاستنتاج المرتبط به .
- مناقشة الطلبة بمثال (٣)، وتشجيعهم على التفكير المنطقي المتسلسل وعلى طريقة الاستفادة من التعريفات والنظريات في التوصل لحلول التمارين والتدريبات.
- تكليف الطلة حل تدريب (٣)، ثم توضيح النتيجة المتعلقة بتوازي مستقيمين لمستقيم ثالث في الفراغ.
- تكليف الطلبة حل السؤالين ٢، ٣ من التمارين والمسائل في كتاب الطالب كواجب بيتي.

معلومات إضافية للمعلم

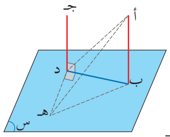
- قد تكون بعض النتائج أو التعميمات غير المبرهنة في محتوى هذه الوحدة نظريات في مراجع أخرى وبالعكس، وعليك التأكيد على الطلبة الالتزام بمنهجية الوحدة وفق ما هو وارد في محتواها للأهمية في برهنة التمارين والمسائل.

درست سابقاً في الهندسة المستوية أن المستقيمين العموديين على مستقيم واحد متوازيان. فهل ينطبق ذلك على المستقيمين العموديين على مستوى واحد؟ النظرية الآتية توضح ذلك.

نظرية (٣)
المستقيمان العموديان على مستوى واحد متوازيان.

المعطيات

أ ب ، جـ د عموديان على المستوى س ويتقاطعان معه في النقطتين ب ، د على الترتيب



الشكل (٦-٤٦)

المطلوب

إثبات أن أ ب // جـ د

العمل

ارسم المستقيم د هـ في المستوى س بحيث يكـون عموديًّا علـى ب د .

البرهان

صل أ د ، أ هـ، ب هـ انظر الشكل (٦-٤٦)

(أ هـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب هـ)^٢ (لأن الزاوية أ ب هـ قائمة)

= (أ ب)^٢ + (ب د)^٢ + (د هـ)^٢ (لأن الزاوية ب د هـ قائمة)

= (أ د)^٢ + (د هـ)^٢

إذن الزاوية أ د هـ قائمة وعليه أ د ، د جـ ، د ب تقع في مستوى واحد لكونها عمودية جميعها على دهـ من نقطة واحدة. (نظرية ٢)

المستقيمان أ ب ، جـ د واقعان في هذا المستوى وعموديان على د ب

إذن أ ب // جـ د ، وهو المطلوب

مثال (٢)

في الشكل (٦-٤٧) إذا كانت أ أَ تعامد أَ بَ ، أَدَ تعامد المستوى أ أَ بَ ، د دَ ، تعامد المستوى دَ أَ بَ ، أثبت أن أ أَ // د دَ

٣٩٩

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

- قد يخلط الطلبة بين النظريات المبرهنة وبعض التعميمات والنتائج التي تمّ اعتمادها دون برهان، ذكّر الطلبة بين حين وآخر بكل منها وذلك بهدف عدم الخلط والالتباس.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– سلك مستقيم طوله ٢٥ سم، ثني ثنيتين لتشكيل ثلاث قطع مستقيمة متصلة: أ ب، ب ج، ج د بحيث أن أ ب ⊥ ب ج، ج د ⊥ مستوى المثلث أ ب ج، فإذا كان أ ب = ج د = ١٠سم.

فاثبت أن أ د = ١٥سم.

(كلف الطلبة تكوين نموذج حقيقي يتأكدون من صحة الإجابة التي يتوصلون إليها من خلال القياس الحقيقي).

استراتيجيات التقويم وأدواته

– الاستراتيجية: التقويم المعتمد على الأداء.

– الأداة: سلّم التقدير (٢–٥)، بند (٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الحل

المعطيات

أ أَ يعامد أَ بَ . أَ دَ يعامد المستوى أ أَ بَ ،

د دَ يعامد المستوى دَ أَ بَ

المطلوب

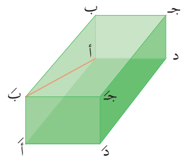
إثبات أن أ أَ // د دَ

البرهان

بما أن أَ دَ يعامد المستوى أ أَ بَ ، إذن أَ دَ يعامد أ أَ (تعريف تعامد مستقيم مع مستوى)

وبما أن أ أَ يعامد أَ بَ، إذن أ أَ يعامد المستوى دَ أَ بَ

لكن د دَ يعامد المستوى دَ أَ بَ (بالفرض)، إذن أ أَ // د دَ (نظرية ٣)



الشكل (٦–٤٧)

تدريب (٢)

أ ب جـ مثلث، اختيرت نقطة هـ خارج مستوى المثلث أ ب جـ بحيث كان أ هـ عموديًّا على كل من أ ب ، أ جـ ، فإذا كانت (و) منتصف أ ب ، (م) منتصف هـ ب. أثبت أن : و م تعامد المستوى أ ب جـ.

من خلال حلك للتدريب (٢) يمكنك استنتاج أن:

إذا توازى مستقيمان وكان أحدهما عموديًّا على مستوى ، فإن المستقيم الآخر يكون عموديًّا على المستوى نفسه.

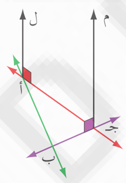
مثال (٣)

إذا كان م ، ل مستقيمين متوازيين والنقطة ب خارج مستواهما.

رسم ب جـ يعامد م في نقطة جـ ، و رسم أ جـ يعامد ل في نقطة أ.

أثبت أن أ ب يعامد ل.

انظر الشكل (٦–٤٨).



الشكل (٦–٤٨)

٤٠٠

الحل

المعطيات

م // ل ، ب جـ ⊥ م ، أ جـ ⊥ ل

المطلوب

إثبات أن أ ب ⊥ ل

البرهان

بما أن م // ل ، أ جـ ⊥ ل

إذن أ جـ ⊥ م ....(١)

(المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديًّا على الآخر)

لكن ب جـ ⊥ م بالفرض ....(٢)

من (١) ، (٢) يكون م ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين أ جـ ، ب جـ

إذن م ⊥ المستوى أ ب جـ

بما أن م // ل بالفرض ،

إذن ل ⊥ المستوى أ ب جـ (نتيجة)

ومنه ل ⊥ أ ب.

تدريب (٣)

أ جـ قطر في دائرة، د نقطة على الدائرة، هـ نقطة خارج مستوى الدائرة. رسم د هـ عموديًّا على أ د ، ثم رسم جـ ن موازيًّا للمستقيم د أ . أثبت أن جـ ن يعامد المستوى هـ د جـ

إذا كان أ ب // جـ د ، هـ و // جـ د ، يكون أ ب // هـ و

لا ضرورة أن تكون المستقيمات الثلاث معًا في مستوى واحد وهذا ما تنص عليه النتيجة الآتية:

نتيجة

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان.

٤٠١

الدرس ٦-٤ التعامد

النتاجات الخاصة

– يبرهن النظريات التي تتضمن التعامد.
– يحل مسائل تتعلق بالتعامد.
– يتعرّف مفهوم الزاوية الزوجية ويحدّد قياسها.

المفاهيم والمصطلحات

تعامد مستقيم ومستوى، تعامد مستويين، الزاوية الزوجية.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بمفاهيم ونظريات التعامد التي وردت في الدرس السابق.
– ملاحظة حلول الطلبة، وتقديم الحلول الصحيحة لهم، ومناقشتهم بها.
– استخدام طبق من الورق لتعريف الطلبة بمفهوم الزاوية الزوجية ورمزها.
– توضيح قياس الزاوية الزوجية بين مستويين عن طريق وسيلة تعليمية وربطه بتعامد مستويين.
– استخدام مفهوم قياس الزاوية الزوجية في برهنة نظرية (٤) بالاستعانة بوسيلة من الكرتون المقوى في ذلك.
– مناقشة مثال (٤) باستخدام أسلوب البرهان المنطقي المعتمد على النظريات السابقة.
– واجب بيتي لأسئلة (٥، ٧) من كتاب الطالب.

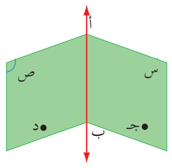
معلومات إضافية

الملاحق

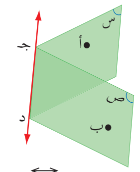
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزاوية الزوجية

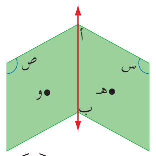
ليكن س ، ص نصفي مستويين متقاطعين في مستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$، إن اتحاد نصفي المستويين س ، ص يسمى زاوية زوجية ، ويرمز للزاوية الزوجية بأربعة أحرف، بحيث يمثل الحرف الأول نقطة في أحد نصفي المستويين والحرف الرابع نقطة في النصف الآخر، أما الحرفان الأوسطان فيمثلان المستقيم المشترك بين المستويين. (انظر الشكل (٦–٤٩).



الزاوية الزوجية (حـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، د)
الشكل (٦–٤٩)



الزاوية الزوجية (أ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$ ، ب)
الشكل (٦–٥٠أ)



الزاوية الزوجية (هـ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، و)
الشكل (٦–٥٠ب)

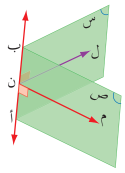
يسمى كل من نصفي المستويين س،ص وجهًا للزاوية الزوجية، ويسمى المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ الناتج عن تقاطع نصفي المستويين حرف الزاوية الزوجية.

تعريف

الزاوية الزوجية هي اتحاد نصفي مستويين لهما الحرف نفسه.

قياس الزاوية الزوجية

خذ أية نقطة على حرف الزاوية الزوجية مثل ن.
ارسم $\overleftrightarrow{\text{ن ل}}$ عمودًا على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في المستوى س ثم
ارسم $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ عمودًا على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في المستوى ص
كما في الشكل (٦–٥١).



الشكل (٦–٥١)

٤٠٢

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في تحديد الزاوية الزوجية وقياسها، استخدم طبقًا من الورق المقوى بحيث تقوم بطيه ورسم زاوية زوجية واعمل شقًّا في قطعة الكرتون، ثم أدخل فيه منقلة، بعد

فيكون قياس الزاوية الزوجية (ل، أ ب ، م) هو قياس الزاوية المستوية ل ن م.

ملاحظة

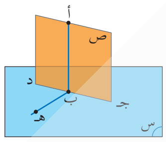
تقاس الزاوية بين مستويين بقياس الزاوية الزوجية بينهما، وإذا كان هذا القياس ٩٠°،فإن المستويين متعامدان، وبالعكس إذا كان المستويان متعامدين، فإن قياس الزاوية الزوجية بينهما ٩٠°.

نظرية (٤)

إذا كان مستقيم معلوم عموديًّا على مستوى معلوم، فكل مستوى يحوي ذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوى المعلوم.

المعطيات

أ ب عمودي على المستوى س ويلاقيه في ب، المستوى ص يحوي المستقيم أ ب ويقطع المستوى س في جـ د ، انظر الشكل (٦–٥٢)



الشكل (٦–٥٢)

المطلوب

إثبات أن المستوى ص عمودي على المستوى س

العمل

ارسم في المستوى س المستقيم ب هـ يعامد جـ د

البرهان

أ ب عمودي على المستوى س فهو عمودي على جـ د

ب هـ عمودي على جـ د بالعمل

إذن جـ د عمودي على المستوى أ ب هـ (لأن جـ د عمودي على كلٍ من أ ب ، ب هـ)

إذن قياس الزاوية أ ب هـ هو قياس الزاوية الزوجية بين المستويين س، ص

لكن الزاوية أ ب هـ قائمة، لأن أ ب عمودي على المستوى س فهو عمودي على ب هـ

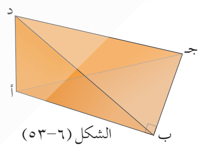
إذن المستوى ص عمودي على المستوى س لكون الزاوية الزوجية بينهما قائمة .

وهو المطلوب .

٤٠٣

مثال (٤)

في الشكل (٦ – ٥٣) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، أ د عمودية على مستوى المثلث أ ب جـ. أثبت أن المستويين أ د ب، ب جـ د متعامدان.



الشكل (٦–٥٣)

الحل

المعطيات

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ د عمودية على مستوى المثلث أ ب جـ.

المطلوب

إثبات أن المستويين أ د ب ، ب جـ د متعامدان.

البرهان

أ د ⊥ المستوى أ ب جـ

إذن أ د ⊥ ب جـ ....(١) (لأن ب جـ تقع في المستوى أ ب جـ).

لكن أ ب ⊥ ب جـ بالفرض ....(٢)

من (١) ، (٢) تكون ب جـ عمودية على كل من أ د ، أ ب

إذن ب جـ عمودية على المستوى أ ب د (نظرية ١)

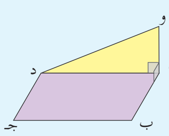
بما أن المستوى ب جـ د يحوي ب جـ

إذن المستويان أ د ب ، ب حـ د متعامدان. (نظرية ٤)

وهو المطلوب .

تدريب (٤)

أ ب جـ د مستوى، أ و عمودي على المستوى أ ب جـ د
أثبت أن المستوى أ و د عمودي على المستوى أ ب جـ د
انظر الشكل (٦–٥٤).



الشكل (٦–٥٤)

٤٠٤

ذلك غيّر في وضع الزاوية واترك الطلبة يقيسونها في أوضاع مختلفة حتى يتم إتقان مفهوم الزاوية الزوجية وقياسها، وكذلك حدّد زوايا زوجية من محيط البيئة. وكلّف الطلبة بقياسها.

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– كلّف الطلبة قياس الزاوية الزوجية بين مستويين من بيئة الطالب.

إثراء

– أ ب ج د شكل رباعي أضلاعه ليست مستوية، فيه أب = أج فرضت نقطة هـ على ب ج ووصل هـ أ، هـ د وكانت الزاوية أ هـ د هي الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب ج، د ب ج، أثبت أن: ج د = ب د

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.

– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (٤).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

النتاجات الخاصة

– النتاجات التي وردت في الدرس.

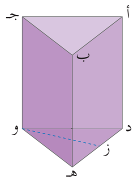
المفاهيم والمصطلحات

تعامد مستقيم ومستوى، تعامد مستويين، الزاوية الزوجية.

نظرية (٥)
إذا تعامد مستويان فالمستقيم في أحدهما العمودي على خط تقاطعهما يكون عموديًّا على المستوى الآخر.

مثال (٥)

يمثل الشكل (٦–٥٥) المنشور الثلاثي القائم أ ب جـ د هـ و الذي قاعدته المثلث د هـ و، وفيه $\overline{\text{وز}}$ يعامد $\overline{\text{د هـ}}$.
أثبت أن $\overline{\text{وز}}$ يعامد المستوى أ د هـ ب.



الشكل (٦–٥٥)

الحل

المعطيات

أ ب جـ د هـ و منشور ثلاثي قائم فيه $\overline{\text{و ز}}$ يعامد $\overline{\text{د هـ}}$

المطلوب

إثبات أن $\overline{\text{و ز}}$ ⊥ المستوى أ د هـ ب

البرهان

المستويان د هـ و ، أ د هـ ب متعامدان (خواص المنشور الثلاثي القائم)

والقطعة $\overline{\text{د هـ}}$ خط تقاطعهما

وبما أن $\overline{\text{و ز}}$ ⊥ $\overline{\text{د هـ}}$ بالفرض ، $\overline{\text{و ز}}$ تقع في المستوى د هـ و

إذن $\overline{\text{و ز}}$ ⊥ المستوى أ د هـ ب (نظرية ٥).

٤٠٥

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

– تذكير الطلبة بنظريات التعامد السابقة وهيء لنظرية (٥) من خلال أمثلة واقعية، وتدوين النص على السبورة، ومناقشته دون برهان، ثم عرض مثال (٥) وتحضير منشور ثلاثي قائم لتقريب طريقة الحل والبرهان لأذهان الطلبة.
– تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل في البيت.
– مراجعة أبرز المفاهيم والنظريات التي وردت في الدرس.
– الاطلاع على حلول الطلبة للواجب البيتي، بشكل مجموعات عمل تعاوني ليقوم الطلبة بتقويم حلولهم، ثم مناقشتهم بها، وتقديم التغذية الراجعه حولها.
– حصر الصعوبات والأخطاء التي واجهت الطلبة في أثناء حل التمارين والمسائل، ووضع خطة علاج مناسبة لذلك.

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

تمارين ومسائل

١) أ ب جـ د هرم ثلاثي فيه أ ب = ب د ، أ جـ = جـ د ، هـ منتصف $\overline{أد}$ الشكل (٦-٥٦) أثبت أن:

أ) $\overline{أد}$ يعامد المستوى هـ ب جـ

ب) $\overline{أد}$ يعامد $\overline{ب جـ}$

الشكل (٦-٥٦)

٢) $\overleftrightarrow{ل}$ ، $\overleftrightarrow{م}$ مستقيمان متوازيان ، أ نقطة خارج مستواهما ، رسم المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يعامد $\overleftrightarrow{ل}$ في النقطة ب ، ورسم $\overleftrightarrow{ب جـ}$ يعامد $\overleftrightarrow{م}$ في النقطة جـ أثبت أن: $\overleftrightarrow{أجـ}$ يعامد $\overleftrightarrow{م}$

٣) أ ب جـ د شبه منحرف فيه $\overline{أد}$ // $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ، رسم العمودان $\overline{هـ أ}$ ، $\overline{و د}$ على مستوى شبه المنحرف بحيث كان هـ أ = و د . أثبت أن $\overline{هـ و}$ توازي مستوى شبه المنحرف أ ب جـ د.

٤) أقيم من مركز دائرة عمود على مستواها، ثم فرضت أي نقطة عليه مثل د ، إذا كانت أ ، ب نقطتين على الدائرة أثبت أن: د أ = د ب

٥) أ ب جـ د مستطيل أقيم على مستواه عمود من د، ثم فرضت عليه نقطة مثل ن برهن أن: $(ن ب)^2 = (ن د)^2 + (د أ)^2 + (د جـ)^2$

٦) أ ب جـ د مستطيل في المستوى س يتقاطع قطراه في النقطة م ، م ط ⊥ مستوى المستطيل، أثبت أن: ط أ = ط ب = ط جـ = ط د

٧) أ ب جـ د أَ بَ جَـ دَ متوازي مستطيلات فيه: أ أَ = ١٠سم ، أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم. احسب طول قطره $\overline{أ جَـ}$ (انظر الشكل (٦-٥٧)).

الشكل (٦-٥٧)

٤٠٦

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

– مساعدة الطلبة على فهم المسائل وفق خطوات حل المسألة الرياضية.
– مساعدة الطلبة على رسم المسألة وتمثيلها بالأشكال والرسومات، واستخدام النماذج الورقية وغيرها لتقريب المسألة إلى أذهان الطلبة.
– استخدام اسلوب التعلم التعاوني في تقاسم المعلومات حول حلول التمارين.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: التقويم الذاتي.
– **الأداة**: سلّم التقدير الذاتي (٢–٥)، بند (٤).
– **الاستراتيجية**: القلم والورقة.
– الأداة: اختبار بسيط للمفاهيم الأساسية.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٦-٥ الإسقاط العمودي

النتاجات الخاصة

- يتعرّف لإسقاط العمودي.
- يحدّد مسقط كل من النقطة والمستقيم على المستوى.
- يميّز بين المسقط والمائل.
- يبرهن نظرية الأعمدة الثلاثة.

المفاهيم والمصطلحات

العمود، المسقط، المائل.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية: الاكتشاف

- استخدم سطح الطاولة كمستوى، أحضر قلم رصاص ومسطرة، ثم وضّح مفهوم المسقط العمودي لنقطة ممثلاً رأس القلم كنقطة، كذلك حاول تمثيل المسقط العمودي لقطعة على مستوى من خلال استعمال المسطرة، وغيّر في وضع المسطرة لتوضح الأوضاع المختلفة لمسقط قطعة مستقيمة على مستوى؛ ليكتشف الطالب المسقط في كل حالة رابطًا ذلك مع مثال (١).
- تكليف الطلبة حل تدريب (١) بحيث يمكن اكتشاف الإجابة من خلال الوسيلة التي تم استخدامها في مقدمة الدرس ومن خلال الرسومات والأشكال.
- توضيح مفهوم المسقط والمائل من خلال الوسيلة التعليمية (سطح الطاولة والمسطرة).
- استخدام وسيلة لتوضيح منطوق نظرية الأعمدة الثلاثة، ومحاورة الطلبة في برهنتها.
- واجب بيتي تمارين (١،٢) من كتاب الطالب.

معلومات إضافية للمعلم

- يمكن برهنة النظريات بطريقة أخرى. (انظر الشكل ٦ – ٦٢).

في المثلث أ هـ ج، (هـ ج)^{٢} = (أ ج)^{٢} – (أ هـ)^{٢} ....(١)

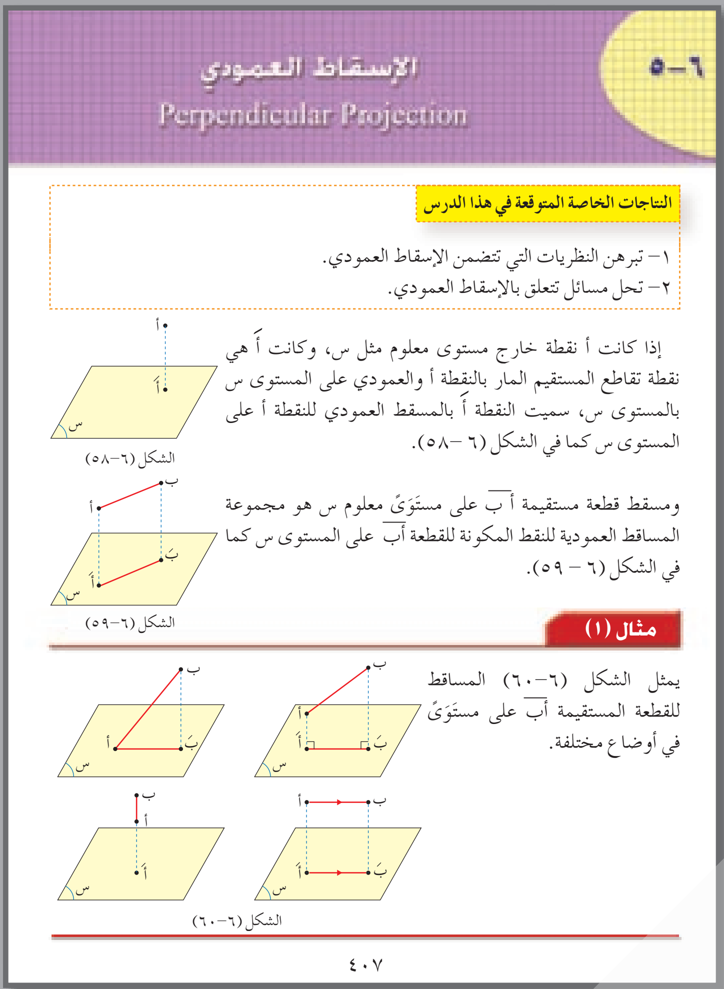
في المثلث أ ج ب، (أج)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب ج)^{٢} ....(٢)

إذن (هـ ج)^{٢} = (ب ج)^{٢} + (أ ب)^{٢} – (أ هـ)^{٢} ....(٣)

= (ب ج)^{٢} + (هـ ب)^{٢} إذن ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ ج) = ٩٠°

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.



٦–٥ الإسقاط العمودي
Perpendicular Projection

النتاجات الخاصة المتوقعة في هذا الدرس

١– تبرهن النظريات التي تتضمن الإسقاط العمودي.
٢– تحل مسائل تتعلق بالإسقاط العمودي.

إذا كانت أ نقطة خارج مستوى معلوم مثل س، وكانت أَ هي نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطة أ والعمودي على المستوى س بالمستوى س، سميت النقطة أَ بالمسقط العمودي للنقطة أ على المستوى س كما في الشكل (٦ –٥٨).

الشكل (٦–٥٨)

ومسقط قطعة مستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ على مستوًى معلوم س هو مجموعة المساقط العمودية للنقط المكونة للقطعة $\overline{\text{أب}}$ على المستوى س كما في الشكل (٦ – ٥٩).

الشكل (٦–٥٩)

مثال (١)

يمثل الشكل (٦–٦٠) المساقط للقطعة المستقيمة $\overline{\text{أب}}$ على مستوًى في أوضاع مختلفة.

الشكل (٦–٦٠)

٤٠٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

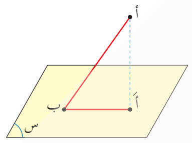
تدريب (١)

أجب عن الأسئلة الآتية:

١) هل يمكن أن يكون طول مسقط القطعة المستقيمة أكبر من طول القطعة نفسها؟
٢) متى يتساوى طولا قطعة مستقيمة ومسقطها على مستَوَىً؟
٣) إذا لم يتقاطع مستقيمان فهل يمكن أن يتقاطع مسقطاهما؟
٤) إذا تساوت قطعتان مستقيمتان في الطول فهل يتساوى طولا مسقطيهما؟
٥) هل مسقط منتصف قطعة مستقيمة هو منتصف مسقط القطعة.؟

تعريف

القطعة المستقيمة (أو المستقيم) الواصلة بين أي نقطة (أ) خارج مستوى وأي من نقاط المستوى (عدا مسقط أ) تسمى مائلا على المستوى.



الشكل (٦–٦١)

وكما في الشكل (٦ – ٦١)

أ أَ ⊥ المستوى س ، أ ب مائل على المستوى س

نظرية الأعمدة الثلاثة

نظرية

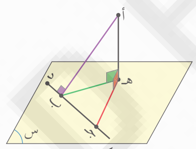
إذا مد مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى وكان المستقيم المائل عموديًّا على مستقيم في المستوى، فإن مسقط المستقيم المائل يكون عموديًّا على هذا المستقيم.

المعطيات

في الشكل (٦–٦٢)

جـ د مستقيم في المستوى، أ نقطة خارج المستوى س ،

أ هـ ⊥ المستوى س ، أ ب ⊥ جـ د



الشكل (٦–٦٢)

المطلوب

إثبات أن هـ ب ⊥ جـ د

البرهان

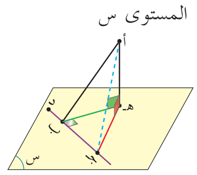
بما أن أ هـ ⊥ المستوى س
إذن أ هـ عمود على كل مستقيم في المستوى س
جـ د مستقيم في المستوى س
إذن أ هـ ⊥ جـ د
لكن أ ب ⊥ جـ د (بالفرض)
إذن جـ د ⊥ كل من المستقيمين المتقاطعين أ ب ، أ هـ
إذن جـ د ⊥ المستوى أ هـ ب ⇐ جـ د ⊥ كل مستقيم في المستوى أ هـ ب ،
لكن هـ ب يقع في المستوى أ هـ ب
إذن جـ د ⊥ هـ ب وهو المطوب

عكس النظرية

إذا مد مستقيم مائل من نقطة خارج مستوى ليلاقي مستقيماً معلوماً في المستوى، وكان مسقط المستقيم المائل عموديًّا على المستقيم المعلوم، فإن المستقيم المائل يكون عموديًّا أيضًا على هذا المستقيم.

المعطيات

جـ د مستقيم في المستوى س ، أ نقطة خارج المستوى ، أ هـ ⊥ المستوى س
أ ب مائل ، انظر الشكل (٦ – ٦٣)
هـ ب مسقط المائل أ ب على س ،
هـ ب ⊥ جـ د



الشكل (٦–٦٣)

المطلوب

إثبات أ ب ⊥ جـ د

العمل

صل أ جـ

الزمن المتوقع

ساعة

مراعاة الفروق الفردية

علاج

– كوّن نموذجًا من الكرتون المقوى والأسلاك المعدنية تُمثل من خلاله معطيات نظرية الأعمدة الثلاثة.

إثراء

– كلّف الطلبة محاولة برهنة نظرية الأعمدة الثلاثة بالاعتماد على خصائص نظرية فيثاغورس، وخَيِّر الطلبة في اختيار الحل المناسب لهم.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب (٢–٧)، بند (٥).

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الدرس ٦-٥ الإسقاط العمودي

النتاجات الخاصة

- يبرهن عكس نظرية الأعمدة الثلاثة.
- يحل مسائل تطبيقية على التعامد باستخدام النظرية وعكسها.

المفاهيم والمصطلحات

العمود، المسقط، المائل.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

الاستراتيجية : التدريس المباشر

- تذكير الطلبة بمفهوم العمود والمسقط والمائل، ونص نظرية الأعمدة الثلاثة.
- ملاحظة الواجب البيتي ومناقشة الطلبة بحلول الأسئلة.
- استخدام وسيلة تعليمية (من الورق المقوى والأسلاك المعدنية) لتوضيح نص عكس نظرية الأعمدة الثلاثة، ثم مناقشة الطلبة ببرهان النظرية، وعرض الأمثلة (٢، ٣)، ومناقشة الطلبة في الحلّ، ثم تكليف الطلبة حل تدريب (٢) المرتبط بالزاوية الزوجية ونظرية الأعمدة.
- محاولة تمثيل الأمثلة بطريقة معبرة لأهمية ذلك في استيعاب معطيات الأمثلة وتسهيل الوصول للحل.

معلومات إضافية للمعلم

- يمكن برهنة عكس نظرية الأعمدة الثلاثة بالطريقة التي برهنت بها النظرية الأساسية،حاول برهنتها بهذه الطريقة.

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

البرهان

في المثلث أ هـ جـ القائم الزاوية في هـ (أهـ ⊥ المستوى س ، فهو عمود على هـ جـ)

إذن (أجـ)^{٢} = (أهـ)^{٢} + (هـ جـ)^{٢} .... (١)

لكن في المثلث أ هـ ب القائم الزاوية في هـ ، أهـ ⊥ المستوى س ، فيكون أهـ ⊥ هـ ب

إذن (أهـ)^{٢} = (أب)^{٢} − (ب هـ)^{٢} .... (٢)

من (١) و (٢)

(أ جـ)^{٢} = (هـ جـ)^{٢} + (أب)^{٢} − (ب هـ)^{٢}

لكن (هـ جـ)^{٢} − (ب هـ)^{٢} = (ب جـ)^{٢} لكون المثلث هـ ب جـ قائم الزاوية في ب (بالفرض)

إذن (أجـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

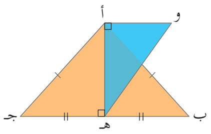
أي أن المثلث أ جـ ب قائم الزاوية في ب (عكس نظرية فيثاغورس)

إذن أ ب ⊥ جـ د

وهو المطلوب

مثال (٢)

يمثل الشكل (٦−٦٤) المثلث أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ ، أ و ⊥ المستوى أ ب جـ، هـ منتصف ب جـ ، أثبت أن : و هـ ⊥ ب جـ.



الشكل (٦−٦٤)

العمل

نصل أ هـ ، و هـ

الحل

أ و ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

أ هـ ⊥ ب جـ (أ هـ متوسط في المثلث أ ب جـ المتساوي الساقين)

و هـ مائل على المستوى أ ب حـ ، بما أن مسقطه أ هـ ⊥ ب جـ

إذن و هـ ⊥ ب جـ (عكس النظرية للأعمدة الثلاث)

٤١٠

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع
ساعة

مراعاة الفروق الفردية

إثراء

– أ ب ج مثلث، رسم ج د عمودي على المستوى أ ب ج، ثم وصل د أ، نصفت أ د، أ ج، ب ج في م، ل، ن على الترتيب، ثم وصل م ن فكان عموديًا على ب ج، أثبت أن زاوية أ ب ج = قائمة.

استراتيجيات التقويم وأدواته

– **الاستراتيجية**: الملاحظة.
– **الأداة**: قائمة الشطب.
– **الاستراتيجية**: مراجعة الذات
– **الأداة**: يوميات الطالب
– كلف الطلبة تدوين أبرز ما تعلموه، والصعوبات التي واجهتهم، بهدف وضع الخطط العلاجية والخطط الإثرائية.

التكامل الأفقي

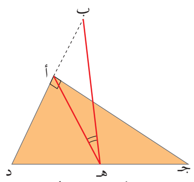
التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

مثال (٣)

أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ، المستقيم أ ب ⊥ مستوى المثلث،
إذا كان أ ب = ٢ سم ، أ جـ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ، أ د = ٤ سم
جد قياس الزاوية الزوجية (ب ، جـ د ، أ)


الشكل (٦–٦٥أ)

الحل

المعطيات

أ جـ د مثلث قائم الزاوية في أ ، المستقيم
أ ب ⊥ مستوى المثلث ، أ ب = ٢ سم ، أ جـ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم . أ د = ٤ سم

المطلوب

إيجاد قياس الزاوية الزوجية (ب ، جـ د ، أ).

العمل

نسقط من أ العمود أ هـ على جـ د ، نصل ب هـ .

البرهان

أ ب ⊥ مستوى المثلث أ جـ د
ب هـ مائل ، أ هـ مسقط المائل
أ هـ ⊥ جـ د (بالعمل)
إذن ب هـ ⊥ جـ د (عكس النظرية) ، (انظر الشكل (٦–٦٥أ))
أي أن قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية أ هـ ب
لنجد قياس الزاوية نجد ظا أ هـ ب

ظا أ هـ ب = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$

في المثلث جـ أ د القائم في أ

(جـ د)^{٢} = (أ جـ)^{٢} + (أ د)^{٢} = ٤٨ + ١٦ = ٦٤

جـ د = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم.

لكن أ جـ × أ د = جـ د × أ هـ   (كل مقدار يساوي مثلي مساحة المثلث)

٤١١

إذن ٤ $\sqrt{٣}$ × ٤ = ٨ × أ هـ

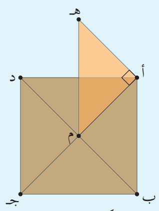
أ هـ = $\frac{٤\sqrt{٣} \times ٤}{٨}$ = ٢$\sqrt{٣}$ سم

إذن ظا أ هـ ب = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ هـ}}$ = $\frac{٢}{٢\sqrt{٣}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

إذن قياس الزاوية أ هـ ب = ٣٠° (قياس الزاوية الزوجية المطلوبة)

تدريب (٢)

في الشكل (٦–٦٥ب) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٤ سم ، تقاطع قطراه في م ،
أ هـ ⊥ مستوى المربع، أثبت أن :
١) ب د ⊥ المستوى أ هـ م
٢) إذا كان أ هـ = ٢ $\sqrt{٢}$ سم فبين أن قياس الزاوية الزوجية
(هـ ، ب د ، أ) = ٤٥°


الشكل (٦–٦٥ب)

٤١٢

النتاجات الخاصة

– يبرهن عكس نظرية الأعمدة الثلاثة.
– يحل مسائل تطبيقية على التعامد باستخدام النظرية وعكسها.

المفاهيم والمصطلحات

العمود، المسقط، المائل.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل في البيت.
– مراجعة أبرز المفاهيم والنتائج والنظريات التي وردت في الدرس، والتأكد من إتقانها من قبل الطلبة. (التعامد، الإسقاط العمودي، المسقط، نظرية الأعمدة الثلاثة، عكس النظرية).
– الاطلاع على حلول الطلبة للواجب البيتي، ومناقشتها، وتقديم التغذية الراجعة لهم حول حلولهم للتمارين والمسائل.
– حصر الصعوبات والأخطاء التي واجهها الطلبة أثناء الحل للتمارين والمسائل والعمل على تلافيها، وتحديد نقاط القوة والعمل على تعزيزها.

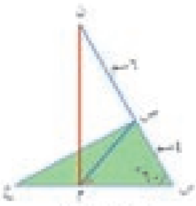
معلومات إضافية

تمارين ومسائل

١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فيه أ ب = ٨ سم، أ جـ = ٦ سم، أقيم العمود أد على مستوى المثلث، بحيث كان أد = ٥ سم، رسم د ن ⊥ ب جـ، وصل أ ن.
جد طول كل من أ ن، د ن.

٢) س مستوى معلوم، أ نقطة خارجة عنه، رسم أ ب عموداً على المستوى س يلاقيه في ب، ثم رسم في المستوى س المستقيمان المتعامدان ب جـ، جـ د.
اثبت أن أ جـ ⊥ جـ د.

٣) يمثل الشكل (٦-٦٦) المثلث س ص ع فيه قياس الزاوية ص س ع = ٦٠°، س ص = ٤ سم، رسم ص ن ⊥ مستوى المثلث ورسم ص م ⊥ س ع، إذا كان ص ن = ٦ سم.
اثبت أن:
أ) ن م ⊥ س ع
ب) قياس الزاوية الزوجية (ص، س ع، ن) = ٦٠°


الشكل (٦-٦٦)

٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، رسم جـ د ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ، ثم وصل أ د، نصفت ب جـ في هـ، كذلك نصفت أ د في و.
اثبت أن و هـ ⊥ ب جـ.
(إرشاد: نصف أ جـ في ل وصل ل هـ، ل و)
كما في الشكل (٦-٦٧)


الشكل (٦-٦٧)

٤١٣

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق
١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع	ساعة

مراعاة الفروق الفردية

- مساعدة الطلبة في تحليل التمارين والمسائل.
- مساعدة الطلبة في طريقة استحضار المفاهيم والنظريات، وكيفية توظيفها في حل التمارين والمسائل.
- تشجيع الطلبة على إعداد وسائل تعليمية ونماذج تساعدهم على التوصل للحل الصحيح وخاصة نماذج تمثل نظرية الأعمدة الثلاثة وعكسها.
- تعزيز حلول الطلبة وتشجيعهم لتحقيق نجاحات في حل التمارين والمسائل.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** قائمة الشطب (٢-٧) بند (٥).
- اجمع المعلومات حول تقدم الطلبة وقدراتهم في حل التمارين والمسائل سواء كان ذلك على المستوى الفردي أو من خلال مجموعات العمل التعاوني.

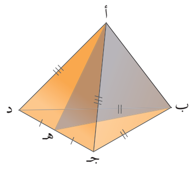
التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

٥) يمثل الشكل (٦ – ٦٨) الهرم الثلاثي أ ب جـ د فيه ب جـ = ب د ، أ جـ = أ د، نصفت $\overline{\text{جـ د}}$ في هـ.



الشكل (٦–٦٨)

أ) أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى أ ب هـ.

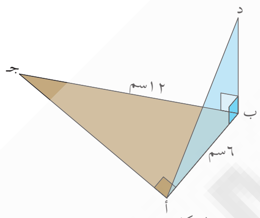
ب) إذا رسم $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ ، فأثبت أن $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ ⊥ المستوى ب جـ د.

جـ) إذا كان جـ د = ١٨ سم، أ جـ = ١٥ سم، أ و = ٦$\sqrt{٣}$ سم.
جد قياس الزاوية الزوجية (ب ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، أ).

٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ ، $\overline{\text{د ب}}$ ⊥ مستوى المثلث: (انظر الشكل (٦–٦٩))

أ) أثبت أن المستويين د أ ب ، د أ جـ متعامدان.

ب) إذا كان أ ب = ٦سم، ب جـ = ١٢ سم،
فجد قياس الزواية الزوجية بين المستويين
أ ب د ، جـ ب د.
(أي الزاوية : (أ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، جـ))



الشكل (٦–٦٩)

٤١٤

الأخطاء الشائعة


مراجعة

١) س، ص مستويان متقاطعان، رسم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في المستوى س موازياً للمستوى ص، كما رسم المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ في المستوى ص موازياً للمستوى س. برهن أن: $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} // \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

٢) إذا وازى مستقيم مستوىً، ومرّ بالمستقيم مستويان يقطعان المستوى المعلوم، فبرهن أن خطي تقاطعهما معه متوازيان.

٣) إذا كانت ن نقطة خارج المستويين المتوازيين س ، ص، ومرّ بالنقطة ن ثلاث مستقيمات غير مستوية (لا تقع جميعاً في مستوى واحد)، فقطعت المستوى س في أ، ب ، جـ، كما قطعت المستوى ص في د، هـ ، و
برهن أن: المثلثين أ ب جـ ، د هـ و متشابهان

٤) ليكن أ ب جـ مثلث، ن نقطة خارج مستواه، إذا كان $\overline{\text{هـ و}}$ يمر بمنتصفي $\overline{\text{ن أ}}$، $\overline{\text{ن ب}}$، وكان $\overline{\text{ع ط}}$ يمر بمنتصفي $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أثبت أن $\overline{\text{هـ و}} // \overline{\text{ع ط}}$

٥) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب. أقيم من جـ عمود على مستوى المثلث وعينت النقطة د على هذا العمود بحيث أ ب = جـ د = ٢ ب جـ أثبت أن أ د = ٣ ب جـ

٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب. أقيم من أ عمود على مستوى المثلث ثم فرضت أي نقطة مثل ن على هذا العمود برهن أن الزاوية ن ب جـ قائمة.

٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب. والنقطة د مفروضة خارج مستواه وعلى أبعاد متساوية من رؤوسه، فاذا كانت هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ فأثبت أن $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ يعامد المستوى أ ب جـ

١٤٥

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة جميعها.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

– مراجعة المفاهيم والنظريات الواردة في الوحدة.
– تكليف الطلبة حل التمارين والمسائل في البيت.
– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية وبعض الحلول المفتاحية للأسئلة ليتمكنوا من تقييم تعلمهم ذاتيًا.
– حصر الصعوبات لدى الطلبة، ومعالجتها من خلال مناقشة حلول التمارين والمسائل.

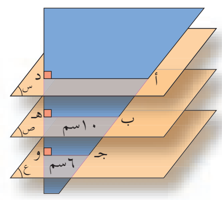
إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

معلومات إضافية

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

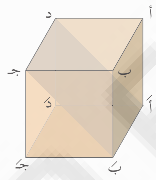
٨) يمثل الشكل (٦–٧٠) ثلاثة مستويات متوازية س، ص، ع، رسم القاطعان أ ب جـ، د هـ و فقطعا المستوى س في النقطتين أ، د والمستوى ص في النقطتين ب، هـ والمستوى ع في النقطتين جـ، و.
فإذا كان القاطعان في مستوى واحد، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ⊥ على المستويات الثلاثة، و هـ = ٣سم، و حـ = ٦ سم، هـ ب = ١٠سم، هـ د = ٥سم.
احسب طول كل من $\overline{\text{أ د}}$، $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$



الشكل (٦–٧٠)

٩) س، ص مستويان متوازيان، أ ب جـ د، أ هـ و قاطعان يقطعان المستوى س في ب، هـ على الترتيب ويقطعان ص في جـ، و على الترتيب، وصل $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ فقطع ص في ن:
أثبت أن:
أ) النقط و، ن، جـ، على استقامة واحدة.
ب) إذا كان أ ب = ٤ سم، ب جـ = ب هـ = ٦ سم، جـ د = ٣سم. احسب طول $\overline{\text{و ن}}$.

١٠) في الشكل (٦–٧١) متوازي مستطيلات
أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ أبعاده أأَ = ٤ سم،
أَ بَ = ٦ سم، بَ جـَ = ٨ سم. جد ظل الزاوية الزوجية بين
المستويين أَ بَ جـَ دَ، أَ بَ جـ د



الشكل (٦–٧١)

٤١٦

الأخطاء الشائعة

الزمن المتوقع

ساعتان

مراعاة الفروق الفردية

- مساعدة الطلبة في فهم المسائل والتمارين .
- مساعدة الطلبة في تمثيل المسائل والتمارين بوسائل مناسبة وخاصة المسائل الممثلة في الفراغ.
- مساعدة الطلبة في استحضار المفاهيم والنتائج والتعميمات والمهارات والنظريات اللازمة لحل المسألة.
- تعزيز الحلول الصحيحة، وتشجيع الطلبة لإحراز نجاحات في مجال الحل.

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية:** الملاحظة.
- **الأداة:** قائمة الشطب (٢–٧).
- **الاستراتيجية:** مراجعة الذات.
- **الأداة:** يوميات الطالب. تدوين أبرز الصعوبات والنجاحات التي حققها الطلبة في مجال حل التمارين والمسائل، وأنماط التفكير التي قاموا بتوظيفها.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

اختبار ذاتي

النتاجات الخاصة

– النتاجات الواردة في الوحدة جميعها.

المفاهيم والمصطلحات

المفاهيم الواردة في الوحدة.

استراتيجيات التدريس وإدارة الصف

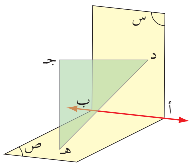
– تكليف الطلبة بمراجعة أهم المفاهيم والعمليات والنظريات التي وردت في الوحدة وذلك في البيت.
– تكليف الطلبة حل التمارين ومسائل الاختبار الذاتي في البيت.
– تزويد الطلبة بالإجابات النهائية لأسئلة الاختبار في أثناء الحصة الصفية.
– يعرض الطلبة إجاباتهم وتصحيحها وفق نموذج الإجابة المقدم من قبل المعلم.
– يسجل الطلبة الأخطاء ومكامن الصعوبة التي واجهتهم عند الإجابة عن أسئلة الاختبار.
– مناقشة أسئلة الاختبار مع الطلبة.
– يصحّح الطلبة الأخطاء التي وقعوا فيها.
– حصر الأخطاء وتصنيفها، والبحث عن الأسباب التي أوقعت الطلبة في هذه الأخطاء، يمكن النظر إلى الأسباب وفق تصنيفها:
• نقص لدى الطلبة في استيعاب المفاهيم الضرورية.
• عدم إتقان المهارات الأساسية.
• عدم توظيف المتطلبات السابقة للتوصل للحل الصحيح.
• صعوبات في عملية تمثيل المسألة بالرسم أو بوسيلة توضيح المسألة في الفراغ.
– العمل على معالجة الأخطاء، وتذليل الصعوبات، وحل تدريبات مشابهة.

معلومات إضافية

اختبار ذاتي

١) أ ب، جـ د مستقيمان متخالفان . وصل ب د ، ثم فرضت عليه نقطة مثل ن ، فإذا رسم من هذه النقطة ن هـ // ب أ ، ن و // د جـ. فأثبت أن المستوى ن هـ و يوازي كلا من أ ب، جـ د.

٢) إذا كان س، ص مستويين متقاطعين في أ ب، جـ نقطة لا تنتمي لأي من المستويين. رسم من النقطة جـ العمودان جـ د، جـ هـ على المستويين س، ص على الترتيب كما في الشكل (٦–٧٢)، أثبت أن أ ب يعامد د هـ

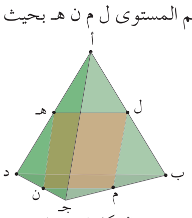


الشكل (٦–٧٢)

٣) برهن أن المستويين العموديين على مستقيم واحد متوازيان.

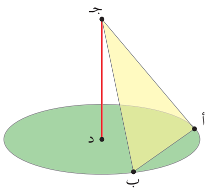
٤) أ ب جـ د هرم ثلاثي رأسه (أ) وقاعدته المثلث ب جـ د ، رسم المستوى ل م ن هـ بحيث يوازي كلا من أ جـ ، ب د فقطع أ ب، أد، جـ ب، جـ د في النقط ل، هـ ،م، ن على الترتيب كما في الشكل (٦– ٧٣)
أثبت أن المستوى ل م ن هـ يقسم أ ب، أ د، جـ ب، جـ د إلى أجزاء متناسبة أي أن:

$$\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$$



الشكل (٦–٧٣)

٥) يمثل الشكل (٦–٧٤) دائرة مركزها النقطة د ونصف قطرها = ١٠سم، أ ب وتر في الدائرة طولة ١٢سم، د جـ ⊥ مستوى الدائرة حيث د جـ = ٦سم.
احسب ظل قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ، ومستوى الدائرة.



الشكل (٦–٧٤)

٦) برهن عكس نظرية الأعمدة الثلاث بالأسلوب نفسه الذي اتبع في برهنة النظرية الأساسية.

٤١٧

إجابات الأسئلة الواردة في المحتوى

الملاحق

١) ملحق إجابات الأسئلة.
٢) ملحق أدوات التقويم.
٣) ملحق أوراق العمل.

الزمن المتوقع ساعة

مراعاة الفروق الفردية

استراتيجيات التقويم وأدواته

- **الاستراتيجية**: الملاحظة.
- **الأداة**: سلّم التقدير (٦)
- **الأداة**: قائمة الشطب (٦).
- وزّع سلّم التقدير على الطلبة ليقيم كل طالب ذاته ومستوى أدائه، اجمع النماذج وقارنها بالنتائج التي جمعتها في قائمة الشطب.

التكامل الأفقي

التكامل الرأسي

مصادر التعلّم

المادة المحوسبة

الأخطاء الشائعة

- حلّل الأخطاء التي وقع بها الطلبة، وصنّف الشائع منها، وتأكّد من تخطيهم لها.

الملاحق

ملحق ١

إجابات الأسئلة

(التمارين والمسائل)

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال

(١–١) نهاية اقتران عند نقطة

السؤال الأول

أ) $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = صفرًا ، $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ١

بما أن $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـــا}}$ ق (س) ≠ $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـــا}}$ ق (س) فإن $\underset{س \to ١}{\text{نهـــا}}$ ق (س) غير موجودة

ب) $\underset{س \to ٢^+}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = $\underset{س \to ٢^-}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ١

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ١

جـ) $\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = $\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ١

$\underset{س \to ٣}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = صفرًا

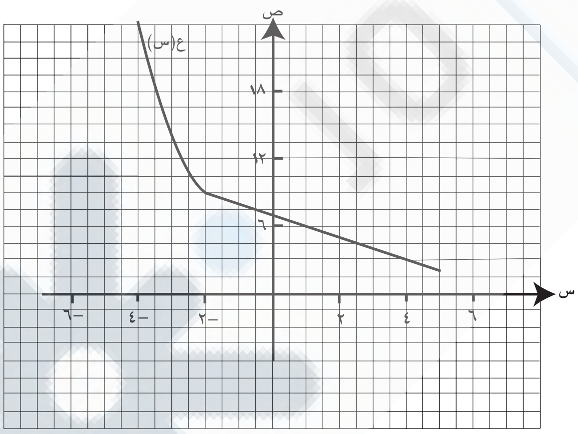
د) $\underset{س \to ٠^+}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = $\underset{س \to ٠^-}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = صفرًا

$\underset{س \to ٠}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = صفرًا

السؤال الثاني

أ) {–١، ٣، ٤، ٥، ٦} ب) {س : ٣ < س < ٤}

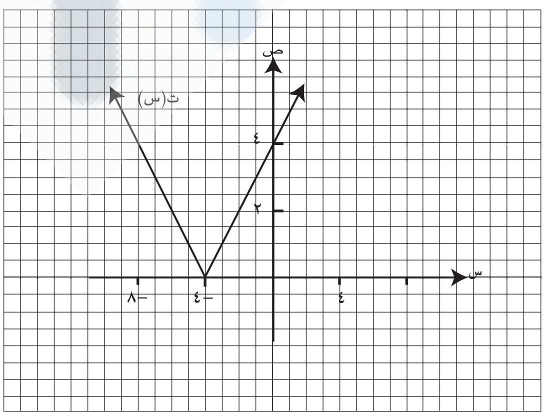
السؤال الثالث



أ) $\underset{س \to -٢^+}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = ٩

$\underset{س \to -٢^-}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = ٩

$\underset{س \to ٢}{\text{نهـــا}}$ ع (س) = ٩

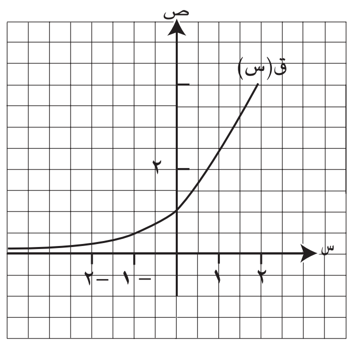


ب) $\underset{س \to -٤^+}{\text{نهـــا}}$ ت (س) = صفرًا

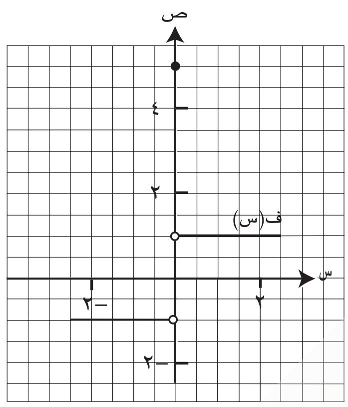
$\underset{س \to -٤^-}{\text{نهـــا}}$ ت (س) = صفرًا

$\underset{س \to -٤}{\text{نهـــا}}$ ت (س) = صفرًا

السؤال الرابع



أ) $\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \frac{١}{٢}$

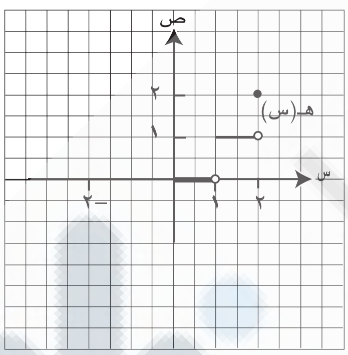


ب) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ف}(س) = \begin{cases} ١ & ،\ س > ٠ \\ -١ & ،\ س < ٠ \\ ٥ & ،\ س = ٠ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ف}(س) = ١$ ، $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ف}(س) = -١$

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ف}(س)$ غير موجودة



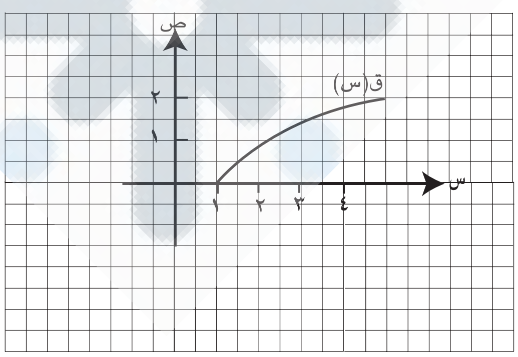
جـ) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٠ & ،\ ٠ \le س < ١ \\ ١ & ،\ ١ \le س < ٢ \\ ٢ & ،\ س = ٢ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = ١$ ، $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = $ صفرًا

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)$ غير موجودة

السؤال الخامس



أ) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ١$

ب) $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ١$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ١$

د) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة لأن $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة

السؤال الأول

أ) $\underset{\text{س}\to-١}{\text{نهـا}}\left(\text{ق(س)} - \frac{١}{\text{هـ(س)}}\right) = \underset{\text{س}\to-١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} - \underset{\text{س}\to-١}{\text{نهـا}}\ \frac{١}{\text{هـ(س)}} = \frac{١}{٢} - \left(-\frac{١}{٢}\right) = ١$

ب) $\underset{\text{س}\to-١}{\text{نهـا}}\sqrt[٣]{\text{ق(س)} - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\underset{\text{س}\to-١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} - \frac{١}{٢}}$

$= \sqrt[٣]{\underset{\text{س}\to-١}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} - \frac{١}{٢}} = \sqrt[٣]{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}} = \text{صفرًا}$

السؤال الثاني

وزّع النهاية على حدود الطرف الأيمن لتحصل على:

$\underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}}\ \text{س}^٢ - \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}}\ ٢\text{أس} + \underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}}\ ٥ = -٤$

$٩ - ٦\text{أ} + ٥ = -٤$ ومنه $\text{أ} = ٣$

السؤال الثالث

وزّع النهاية على الحدود لتحصل على:

$\underset{\text{س}\to-٣}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^٣ - ٢}{\text{س} - ١} + \underset{\text{س}\to-٣}{\text{نهـا}}\ \text{س}^٢ + \underset{\text{س}\to-٣}{\text{نهـا}}\ ١ = \frac{٢٩}{٤} + ٩ + ١ = ١٧{,}٢٥$

السؤال الرابع

أ) $\underset{\text{س}\to٣^-}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to٣^-}{\text{نهـا}}\ ٥ = ٥$

ب) $\underset{\text{س}\to٣^+}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to٣^+}{\text{نهـا}}\ (٢\text{س}^٢ - ١٥) = ١٨ - ١٥ = ٣$

$\underset{\text{س}\to٣}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ غير موجودة

جـ) $\underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to٠}{\text{نهـا}}\ ٥ = ٥$

د) $\underset{\text{س}\to٤}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)} = \underset{\text{س}\to٤}{\text{نهـا}}\ (٢\text{س}^٢ - ١٥) = ٣٢ - ١٥ = ١٧$

السؤال الخامس

أ) $\underset{\text{س}\to١^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق(س)} = \sqrt{\underset{\text{س}\to١^+}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}} = \text{صفرًا}$

لاحظ أن ق (س) غير معرف على يسار العدد ١ وعليه فإن $\underset{\text{س}\to١}{\text{نهـا}}$ ق (س) غير موجودة.

ب) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ [١ + ٢ س] = ٢

$\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{-}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{-}}{\text{نهـا}}$ [١ + ٢ س] = ١

$\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) غير موجودة

عندما س ← $\frac{١}{٣}$

$\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}^{+}}{\text{نهـا}}$ [١ + ٢ س] = ١

$\underset{س \leftarrow \frac{١}{٣}^{-}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٣}^{-}}{\text{نهـا}}$ [١ + ٢ س] = ١

$\underset{س \leftarrow \frac{١}{٣}}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ١

جـ) نعيد تعريف الاقتران دون استخدام القيمة المطلقة

$$\text{م(س)} = \begin{cases} ١ - س^{٢} ، & -١ \leq س \leq ١ \\ س^{٢} - ١ ، & ١ < س ، س < -١ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهـا}}$ م (س) = $\underset{س \leftarrow -١^{+}}{\text{نهـا}}$ (١ − س^{٢}) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نهـا}}$ م (س) = $\underset{س \leftarrow -١^{-}}{\text{نهـا}}$ (س^{٢} − ١) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ م (س) = صفرًا

السؤال الأول

أ) $\underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+١)^{٢}-٨١}{٨-\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+١-٩)(\text{س}+١+٩)}{٨-\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-٨)(\text{س}+١٠)}{٨-\text{س}} = \text{نهـا} -(\text{س}+١٠) = -١٨$

ب) $\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٨\text{س}^{٣}-١}{\text{س}-\frac{١}{٢}} = \text{نهـا} \frac{(٢\text{س}-١)(٤\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١)}{\text{س}-\frac{١}{٢}} = ٢\underset{\text{س}\to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}(٤\text{س}^{٢}+٢\text{س}+١) = ٦$

جـ) $\underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢\text{س}+٩}-٤}{٢\text{س}-٧} = \underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢\text{س}+٩}-٤}{٢\text{س}-٧} \times \frac{\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤}{\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}+٩-١٦}{(٢\text{س}-٧)(\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤)} = \underset{\text{س}\to \frac{٧}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}-٧}{(٢\text{س}-٧)(\sqrt{٢\text{س}+٩}+٤)}$

$= \frac{١}{\sqrt{١٦}+٤} = \frac{١}{٨}$

د) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{٢\text{س}+٢٥}-٣}{\text{س}-٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+٢٥}-٣}{\text{س}-٢} \times \frac{(\text{س}+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(\text{س}+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩}{(\text{س}+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(\text{س}+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+٢٥-٢٧}{(\text{س}-٢)\left((\text{س}+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(\text{س}+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩\right)}$

$= ٢\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س}+٢٥)^{\frac{٢}{٣}}+٣(\text{س}+٢٥)^{\frac{١}{٣}}+٩} = \frac{١}{٩+٩+٩} = \frac{١}{٢٧}$

هـ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{\text{س}}\left(\frac{١}{٥+\text{س}}-\frac{١}{٥-\text{س}}\right)\right) = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \times \frac{٥-\text{س}-(٥+\text{س})}{(٥+\text{س})(٥-\text{س})}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} \times \frac{-٢\text{س}}{(٥+\text{س})(٥-\text{س})} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢}{(٥+\text{س})(٥-\text{س})} = \frac{-٢}{٢٥}$

و) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}+٣\text{س}-٤}{\text{س}^{٢}-١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+٤)}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢}+\text{س}+٤}{\text{س}+١} = ٣$

ز) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} - ٥} + ٢}{\text{س}^٣ + ٢٧} = \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} - ٥} + ٢}{\text{س}^٣ + ٢٧} \times \dfrac{(\text{س} - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢\,(\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤}{(\text{س} - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢\,(\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤}$

$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} + ٣}{(\text{س} + ٣)\,(\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٩)\left((\text{س} - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢\,(\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤\right)}$

$= \underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{س} + ٣}{(\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٩)\left((\text{س} - ٥)^{\frac{٢}{٣}} - ٢\,(\text{س} - ٥)^{\frac{١}{٣}} + ٤\right)}$

$= \dfrac{١}{(٩ + ٩ + ٩)\,(٤ + ٤ + ٤)} = \dfrac{١}{٤٣٢}$

السؤال الثاني

بما أن $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهــا}}$ ل (س) موجودة، إذن $\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهــا}}$ ل (س) = $\underset{\text{س}\to ١^-}{\text{نهــا}}$ ل (س)

$\underset{\text{س}\to ١^+}{\text{نهــا}} \dfrac{(\text{س} - ١)\,(٣\,\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)\,(٢\,\text{س} - ١)} = \text{ب} \Leftarrow \text{ب} = ١$

السؤال الثالث

أ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{|\text{س} - ٣| - ١}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٣ - \text{س} - ١}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٢ - \text{س}}{\text{س} - ٢} = -١$

ب) $\underset{\text{س}\to \frac{٥}{٢}^+}{\text{نهــا}} \dfrac{٢\,\text{س} - [٢\text{س}]}{٤\,\text{س}^٢ - ٢٥} = \underset{\text{س}\to \frac{٥}{٢}^+}{\text{نهــا}} \dfrac{٢\,\text{س} - ٥}{٤\,\text{س}^٢ - ٢٥} = \underset{\text{س}\to \frac{٥}{٢}^+}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{٢\,\text{س} + ٥} = \dfrac{١}{١٠}$

$\underset{\text{س}\to \frac{٥}{٢}^-}{\text{نهــا}} \dfrac{٢\,\text{س} - [٢\text{س}]}{٤\,\text{س}^٢ - ٢٥} = \underset{\text{س}\to \frac{٥}{٢}^-}{\text{نهــا}} \dfrac{٢\,\text{س} - ٤}{٢\,\text{س} + ٥} = \dfrac{١}{١٠}$

إذن $\underset{\text{س}\to \frac{٥}{٢}}{\text{نهــا}} \dfrac{٢\,\text{س} - [٢\text{س}]}{٤\,\text{س}^٢ - ٢٥} = \dfrac{١}{١٠}$

جـ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{٤ - ٤\,\text{س} + \text{س}^٢}}{٢ - \text{س}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{(\text{س} - ٢)^٢}}{٢ - \text{س}} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}} \dfrac{|\text{س} - ٢|}{٢ - \text{س}}$

نعيد تعريف $\dfrac{|\text{س} - ٢|}{٢ - \text{س}}$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$\dfrac{|\text{س} - ٢|}{٢ - \text{س}} = \begin{cases} -١ \text{ ، } & \text{س} > ٢ \\ ١ \text{ ، } & \text{س} < ٢ \end{cases}$

$$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{٢ - س} = \underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهــا}} (-١) = -١$$

$$\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{٢ - س} = \underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهــا}} ١ = ١$$

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\sqrt{٤ - ٤س + س^٢}}{٢ - س} \text{ غير موجودة}$$

د) بما أن كلاً من البسط والمقام غير معرفين على يسار العدد ٧ فإن النهاية غير موجودة.

هـ) $$\underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{ص - ٤\sqrt{ص} + ٣}{ص^٢ - ١} = \underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(ص + ٣) - ٤\sqrt{ص}}{ص^٢ - ١} \times \frac{(ص + ٣) + ٤\sqrt{ص}}{(ص + ٣) + ٤\sqrt{ص}}$$

$$= \underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(ص + ٣)^٢ - ١٦ص}{(ص^٢ - ١)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})} = \underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{ص^٢ + ٦ص - ١٦ص + ٩}{(ص^٢ - ١)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})}$$

$$= \underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(ص + ١)(ص - ٩)}{(ص - ١)(ص + ١)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})} = \underset{ص \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{ص - ٩}{(ص + ١)(ص + ٣)(ص + ٣ + ٤\sqrt{ص})}$$

$$= -\frac{-٨}{١٦} = -\frac{١}{٢}$$

السؤال الرابع

$$\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{س\sqrt[٣]{س} - ١٦}{س - ٨} = \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{س^{\frac{٤}{٣}} - ١٦}{س - ٨} \times \frac{س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦}{س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦} = \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{س^٤ - ٦٤^٢}{(س - ٨)(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{(س^٢ - ٦٤)(س^٢ - ٦٤)}{(س - ٨)(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)} = \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{(س - ٨)(س + ٨)(س^٢ + ٦٤)}{(س - ٨)(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \frac{(س + ٨)(س^٢ + ٦٤)}{(س^{\frac{٨}{٣}} + ١٦س^{\frac{٤}{٣}} + ٢٥٦)} = \frac{١٦ \times ١٢٨}{٢٥٦ \times ٣} = \frac{٨}{٣}$$

السؤال الخامس

$$[٢س] = \begin{cases} ٢ \text{ ، } & ١ \le س < \frac{٣}{٢} \\ ٣ \text{ ، } & \frac{٣}{٢} \le س < ٢ \\ ٤ \text{ ، } & ٢ \le س < \frac{٥}{٢} \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهــا}} [٢س] = ٣$، عندما $\frac{٣}{٢} < أ < ٢$

السؤال السادس

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{+}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{+}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{\text{س} + ٢} = \text{ك} - ٢$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{-}}{\text{نهـا}}\ ٣\text{س} = ٣\text{ك}$$

تكون $\underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$ موجودة إذا كان $\underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow\text{ك}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{د}(\text{س})$

أي أن $\text{ك} - ٢ = ٣\text{ك}$ ومنه $\text{ك} = -١$

السؤال السابع

$$\underset{\text{س}\leftarrow٣}{\text{نهـا}}\left(\frac{\text{س}}{٩ - \text{س}^{٢}} + \frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٣} - ٩\text{س}}\right) = \underset{\text{س}\leftarrow٣}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}(\text{س}^{٢} - ٩)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow٣}{\text{نهـا}}\ \frac{-\text{س}(\text{س} - ٣)}{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} = \underset{\text{س}\leftarrow٣}{\text{نهـا}}\ \frac{-١}{\text{س} + ٣} = -\frac{١}{٦}$$

السؤال الثامن

$$\underset{\text{س}\leftarrow٠}{\text{نهـا}}\ \frac{٤٩^{\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١ - ٧^{\text{س}}} = \underset{\text{س}\leftarrow٠}{\text{نهـا}}\ \frac{٧^{٢\text{س}} - ٧^{\text{س}}}{١ - ٧^{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow٠}{\text{نهـا}}\ \frac{٧^{\text{س}}(٧^{\text{س}} - ١)}{١ - ٧^{\text{س}}} = \underset{\text{س}\leftarrow٠}{\text{نهـا}}\ -٧^{\text{س}} = -١$$

السؤال التاسع

بما أن $\underset{\text{س}\leftarrow١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$ موجودة، إذن $\underset{\text{س}\leftarrow١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$

إذن يجب أن يكون $(\text{س} - ١)$ عاملاً من عوامل البسط $\text{س}^{٣} - \text{أ}\,\text{س} + ٣$

أي أن $\text{ق}(١) = ١ - \text{أ} + ٣ = \text{صفر}$ ومنه $\text{أ} = ٤$

$$\underset{\text{س}\leftarrow١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\leftarrow١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س})$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow١^{-}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ٣}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\leftarrow١^{-}}{\text{نهـا}}\ (\text{ب}\,\text{س} - ٥)$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow١^{+}}{\text{نهـا}}\ \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} - ٣)}{\text{س} - ١} = \text{نهـا}\ (\text{ب}\,\text{س} - ٥)$$

$-١ = \text{ب} - ٥$ ومنه $\text{ب} = ٤$

السؤال العاشر

نفرض أن ق (س) = أ س^٢ − ب س − ٦

بما أن النهاية موجودة، إذن س − ٢ عامل من عوامل البسط، أي أن ق (٢) = صفرًا (نظرية العوامل)

إذن ق (٢)= ٤ أ − ٢ ب − ٦ = صفر ومنه ب = ٢ أ − ٣

$$\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{أ س^٢ - ب س - ٦}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{أ س^٢ - (٢ أ - ٣) س - ٦}{س - ٢}$$

$$= \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{(س - ٢)(أ س + ٣)}{س - ٢} = \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} (أ س + ٣) = ٢ أ + ٣$$

اذن ٢ أ + ٣ = ٥ ومنه أ = ١

ب = ٢ × ١ − ٣ = −١

السؤال الحادي عشر

بما أن $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا} \frac{ق (س) + ٥}{س + ٢}$ موجودة وناتج تعويض − ٢ في المقام يساوي صفرًا فإن ناتج تعويض − ٢ في البسط يساوي صفرًا .

أي أن ق (−٢) + ٥ = ٠ ومنه ق (−٢) = −٥

وبما أن ق كثير حدود فإن $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ق (س) = ق (−٢)

إذن $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ق (س) = −٥

أ) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ (ق (س) + ٢ س) = $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ق (س) + $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ٢ س = −٥ − ٤ = −٩

ب) $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ (ق^٢ (س) + ٢ س) = $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ق^٢ (س) + $\underset{س \leftarrow -٢}{نهـا}$ ٢ س = ٢٥ − ٤ = ٢١

السؤال الأول

$$\underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا س}}{\text{س}} = \frac{\text{حا}\frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٤}} = \frac{٤}{\pi}\times\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{\pi}$$

السؤال الثاني

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ (\text{قاس} + \text{ظا ٤ س}) = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{قاس} + \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \text{ظا ٤ س} = ١ + ٠ = ١$$

السؤال الثالث

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا ٥ س}}{\text{٨ س}} = \frac{٥}{٨}$$

السؤال الرابع

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا}^{٢}\text{٣س}}{\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\left(\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}}\right)^{٢} = \left(\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}}\right)^{٢} = ٣^{٢} = ٩$$

السؤال الخامس

نفرض أن ٢ $\text{س}^{٢}$ = هـ ، عندما س ← ٠ فان هـ ← ٠ .

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{ظا ٢ س}^{٢}}{\text{٤ س}^{٢}} = \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{ظا هـ}}{\text{٢ هـ}} = \frac{١}{٢}$$

السؤال السادس

نفرض أن س + ٥ = هـ .

عندما س ← – ٥ فإن هـ ← ٠ .

$$\underset{\text{س}\leftarrow -٥}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا}(\text{س}+٥)}{٢٥-\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\leftarrow -٥}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا}(\text{س}+٥)}{(٥-\text{س})(٥+\text{س})} = \underset{\text{س}\leftarrow -٥}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حا}(\text{س}+٥)}{\text{س}+٥}\times\underset{\text{س}\leftarrow -٥}{\text{نهـــا}}\ \frac{١}{٥-\text{س}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{حاهـ}}{\text{هـ}}\times\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{١}{١٠-\text{هـ}} = ١\times\frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠}$$

السؤال السابع

$$\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\text{س} - \text{حا ٣ س} + \text{ظا ٥ س}}{\text{٢ س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\ \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{س}}}{\frac{\text{٢ س}}{\text{س}} - \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{س}}}$$

$$= \frac{\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}} - \frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}} + \frac{\text{ظا ٥ س}}{\text{س}}\right)}{\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}\left(\frac{\text{٢ س}}{\text{س}} - \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}\times\text{ظا س}\right)} = \frac{١-٣+٥}{٢-٠} = \frac{٣}{٢}$$

السؤال الثامن

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا } ٢\text{س}}{٢\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - (١ - ٢\text{حا}^{٢}\text{س})}{٢\text{س}^{٢}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{حا}^{٢}\text{س}}{٢\text{س}^{٢}}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{حا س}}{\text{س}}\right)^{٢} = \left(\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\text{س}}\right)^{٢} = ١$$

السؤال التاسع

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا س}}{\frac{\pi}{٢} - \text{س}} = \frac{\text{جتا } ٠}{\frac{\pi}{٢} - ٠} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$$

السؤال العاشر

نفرض أن $\frac{\text{س}}{٣} - \pi = \text{هـ}$ ، ومنه س $= ٣$ هـ $+ ٣\pi$ ، عندما س $\to ٣\pi$ فإن هـ $\to ٠$

$$\underset{\text{س}\to ٣\pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}(٣\text{هـ} + ٣\pi)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣\text{هـ جتا } ٣\pi + ٣\text{جتا هـ جا } ٣\pi}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{حا } ٣\text{هـ}}{\text{هـ}} = -٣$$

السؤال الحادي عشر

$$\frac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{١ - (١ - ٢\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢})}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{٢}\sqrt{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}}{\text{س}} = \sqrt{٢} \times \frac{\left|\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\right|}{\text{س}}$$

$$\frac{\left|\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\right|}{\text{س}} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} \quad ، & \text{س} > ٠ \\ \dfrac{-\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} \quad ، & \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}\left|\text{حا}\frac{\text{س}}{٢}\right|}{\text{س}} = \sqrt{٢} \underset{\text{س}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} = \sqrt{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{٢}\left|\text{حا}\frac{\text{س}}{٢}\right|}{\text{س}} = \sqrt{٢} \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{س}} = -\sqrt{٢} \times \frac{١}{٢} = -\frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١ - \text{جتا س}}}{\text{س}}$ غير موجودة

السؤال الثاني عشر

نفرض أن $\text{س}^{٢} - ٦٤ = \text{هـ}$ ومنه $\text{س}^{٢} = \text{هـ} + ٦٤$

عندما $\text{س} \to ٨$ فان $\text{هـ} \to ٠$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٨} \frac{\text{جا}(\text{س}^{٢} - ٦٤)}{\text{س} - ٨} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٨} \frac{(\text{س} + ٨)\ \text{جا}(\text{س}^{٢} - ٦٤)}{\text{س}^{٢} - ٦٤}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\left(\sqrt{\text{هـ} + ٦٤} + ٨\right) \text{جا هـ}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \left(\sqrt{\text{هـ} + ٦٤} + ٨\right) \times \text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{حا هـ}}{\text{هـ}} = ١٦$$

السؤال الثالث عشر

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{١ + \text{جا } ٤ \text{ س} - \text{جتا}^{٢}\ ٢ \text{ س}}{\text{س}} = \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}^{٢}\ ٢ \text{ س} + \text{جتا}^{٢}\ ٢ \text{ س} + ٢ \text{ جا } ٢ \text{ س جتا } ٢ \text{ س} - \text{جتا}^{٢}\ ٢ \text{ س}}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{حا } ٢ \text{ س } (\text{جا}٢ \text{ س} + ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س})}{\text{س}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{جا } ٢ \text{ س}}{\text{س}} \times \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} (\text{حا } ٢ \text{ س} + ٢ \text{ جتا } ٢ \text{ س}) = ٢ + ٢ = ٤$$

السؤال الرابع عشر

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{جا س} - \text{حا أ}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{٢ \text{ جتا } \frac{\text{س} + \text{أ}}{٢} \text{ جا } \frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}}{\text{س} - \text{أ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}} \frac{\text{جا} \frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}}{\frac{\text{س} - \text{أ}}{٢}} \times \text{نهـا}_{\text{س} \to \text{أ}} \text{جتا} \left(\frac{\text{س} + \text{أ}}{٢}\right) = ١ \times \text{جتا أ} = \text{جتا أ}$$

السؤال الخامس عشر

$$\text{نهـا}_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{حا أس}}{٦ \text{ س}} = ٢ \Leftarrow \frac{\text{أ}}{٦} = ٢ \text{ ومنه أ} = ١٢$$

$$\text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا } ٥ \text{ س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٢ \Leftarrow \text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\frac{\text{ظا } ٥\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{ب س}}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{س}}} = ٢$$

$$\frac{\text{نهـا}_{\text{س} \to ٠} \frac{\text{ظا } ٥ \text{ س}}{\text{س}}}{\text{ب} - ١} = ٢ \Leftarrow \frac{٥}{\text{ب} - ١} = ٢ \text{ ومنه ب} = \frac{٧}{٢}$$

السؤال الأول

أ) $\lim\limits_{س \to \infty} ق(س) = \text{صفرًا}$ ب) $\lim\limits_{س \to -\infty} ق(س) = ٢$

السؤال الثاني

أ) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٣س - س^{٢}}{٦ + س^{٣}} = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{-س^{٢}}{س^{٣}} = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{-١}{س} = \text{صفر}$

ب) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٢س - ٩س^{٤} - س^{٣}}{١ - ٥س^{٤}} = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{-٩س^{٤}}{-٥س^{٤}} = \dfrac{٩}{٥}$

جـ) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{(١ + ٢س^{٢})^{٢} + س^{٣}}{١ - س^{٣}} = \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٤س^{٤}}{-س^{٣}} = -٤ \lim\limits_{س \to -\infty} س = \infty$

د) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^{٥} - ٦س + ٧}{(٦ - س)^{٣} + ٣س^{٥}} = \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^{٥}}{٣س^{٥}} = \dfrac{١}{٣}$

هـ) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س(٥ + ٢س^{٣}) - ٧س^{٤}}{٣ - \frac{١}{٢}س^{٤}} = \lim \dfrac{-٥س^{٤}}{-\frac{١}{٢}س^{٤}} = ١٠$

و) $\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{|س^{٣}| - ٣س^{٣}}{٨س^{٣}} = \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{-س^{٣} - ٣س^{٣}}{٨س^{٣}} = \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{-٤س^{٣}}{٨س^{٣}} = -\dfrac{١}{٢}$

ز) $\lim\limits_{س \to -\infty} \left(\dfrac{س^{٢} - ٢س}{٣ + س^{٢}} - \dfrac{٧س^{٤}}{٣ + س^{٦}} \right) = \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^{٢} - ٢س}{٣ + س^{٢}} - \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٧س^{٤}}{٣ + س^{٦}}$

$= \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{س^{٢}}{س^{٢}} - \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٧س^{٤}}{س^{٦}} = ١ - \lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{٧}{س^{٢}} = ١$

ح) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س^{٢}}{٢ + س} - \dfrac{٢س^{٢}}{س + ٣} \right) = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{٢}(س + ٣) - ٢س^{٢}(٢ + س)}{(٢ + س)(س + ٣)}$

$= \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{٣} + ٣س^{٢} - ٤س^{٢} - ٢س^{٣}}{س^{٢} + ٥س + ٦} = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{-س^{٣}}{س^{٢}} = \lim\limits_{س \to \infty} س = -\infty$

ط) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{س + ٣}{١ - ٣س} \right)^{-٢} = \lim\limits_{س \to \infty} \left(\dfrac{١ - ٣س}{س + ٣} \right)^{٢} = \lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{٩س^{٢}}{س^{٢}} = ٩$

السؤال الثالث

بما أن النهاية موجودة ولا تساوي صفرًا.

فإن درجة البسط = درجة المقام أي أن ن = ٦

$\lim\limits_{س \to -\infty} \dfrac{-أس^{٦}}{-٢س^{٦}} = ٢$ ومنه $\dfrac{أ}{٢} = ٢$ إذن أ = ٤

(١ – ٦) الاتصال عند النقطة

السؤال الأول

قيم س التي عندها ق غير متصل هي س = ٠، س = ٢

السؤال الثاني

أولا: عندما س = −٢

$\lim_{س \to -٢^+}$ د (س) = $\lim_{س \to -٢^+}$ (٣ س^٢ − ٥) = ١٢ − ٥ = ٧

$\lim_{س \to -٢^-}$ د (س) = $\lim_{س \to -٢^-}$ (١ − ٤س) = ١ + ٨ = ٩

$\lim_{س \to -٢}$ د (س) غير موجودة وعليه فإن د غير متصل عند س = − ٢

ثانيًا: عندما س = ٠

$\lim_{س \to ٠}$ د (س) = $\lim_{س \to ٠}$ (٣س^٢ − ٥) = − ٥

د (٠) = − ٥

بما أن $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = د (٠)، فإن د (س) متصل عند س = ٠

السؤال الثالث

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$ق(س) = \begin{cases} -\dfrac{ظاس}{س} & ، س < ٠ \\ ١ - ٢ \, جتا س & ، س \geq ٠ \end{cases}$$

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٠^+}$ (١ − ٢ جتا س) = − ١

$\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س) = $\lim_{س \to ٠^-}$ $-\dfrac{ظاس}{س}$ = −١

$\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = − ١ ، ق (٠) = − ١

بما أن $\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = −١ = ق (٠) ، إذن ق متصل عند س = ٠

السؤال الرابع

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$ك(س) = \begin{cases} \sqrt{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ٢ س - س^٢ & ، ٠ \leq س \leq ٢ \\ س^٢ - ٢ س & ، س < ٠ \end{cases}$$

أولا: عندما س = ٠

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ (٢ س – س^٢) = صفر

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ (س^٢ – ٢ س) = صفر، ك (٠) = ٠

بما أن $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ك (س) = ك (٠) فإن ك متصل عند س = ٠

ثانيًا: عندما س = ٢

$\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}$ $\sqrt{س - ٢}$ = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ (٢س – س^٢) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ك (س) = صفرًا، ك (٢) = صفرًا

بما أن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ك (س) = ك (٢) فإن ك متصل عند س = ٢

السؤال الخامس

أولا: عندما س = ١

$\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفر، $\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا، ق (١) = صفرًا،

إذن ق متصل عند س = ١ لأن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ق (١)

ثانيًا: عند س = ٣

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ١، $\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ١

إذن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ١ ، ق (٣) = ١

ق متصل عند س = ٣ لأن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ق (٣)

السؤال السادس

نعيد تعريف الاقتران ك . لاحظ أن $\sqrt{س^٢} = |س|$

$$ك (س) = \begin{cases} \dfrac{\text{حا س}}{س} &، س > ٠ \\ -\dfrac{\text{حا س}}{س} &، س < ٠ \\ ١ &، س = ٠ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{\text{حا س}}{س}$ = ١

$\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ ك (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^-}{\text{نهـا}}$ $\dfrac{\text{حا س}}{س}$ = – ١

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ك (س) غير موجودة وبناء عليه ك غير متصل عند س = ٠

السؤال السابع

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}\ \text{د (س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}\ \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١} \times \frac{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}\ \frac{\text{س}^{٣} - ١}{(\text{س} - ١)\,(\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١)} = \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}\ \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} + ١}{\text{س}\sqrt{\text{س}} + ١} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{-}}\ \text{د (س)} = ٢\,\text{أ}$$

بما أن د (س) متصل عند س = ١ فإن $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١}$ د (س) موجودة

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{+}}\ \text{د (س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١^{-}}\ \text{د (س)}$$

$\frac{٣}{٢} = ٢$ أ ومنه أ $= \frac{٣}{٤}$

د (١) = $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow ١}$ د (س) لأن د متصل عند س = ١ ومنه ب $= \frac{٣}{٢}$

السؤال الثامن

أولا: نبحث في اتصال م (س) عند س = − ٢

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢^{+}}\ \text{م (س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢^{+}}\ \frac{\frac{١}{٨}\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ٢} = \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢^{+}}\ \frac{(\frac{١}{٢}\text{س} + ١)(\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س} + ١)}{(\text{س} + ٢)}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢^{+}}\ \frac{١}{٢}\,(\frac{١}{٤}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٢}\text{س} + ١) = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢^{-}}\ \text{م (س)} = \frac{٣}{٢}$$

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢}\ \text{م (س)} = \frac{٣}{٢}\ ،\ \text{م}\,(-٢) = \frac{٣}{٢}$$

م (س) متصل عند س = − ٢ لأن $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢}$ م (س) = م (− ٢)

ثانياً: نبحث اتصال هـ (س) عند س = − ٢

$$\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢}\ \text{هـ (س)} = \text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢}\ \frac{\text{جتا}\,\frac{\pi\,\text{س}}{٤}}{\text{س}} = \text{صفرًا}$$

هـ (− ٢) = صفرًا

هـ (س) متصل عند س = − ٢ لأن $\text{نهـا}_{\text{س}\leftarrow -٢}$ هـ (س) = هـ (− ٢)

بما أن م ، هـ متصلان عند س = − ٢ فإن م + هـ متصل عند س = − ٢

السؤال التاسع

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ،\ \text{س} \geq ٣ \\ ٤ + ٢\,\text{س} & ،\ \text{س} < ٣ \end{cases} \qquad ، \qquad \text{د (س)} = \begin{cases} ٢\,\text{س} & ،\ \text{س} \geq ٣ \\ ٥ & ،\ \text{س} < ٣ \end{cases}$$

ق، د غير متصلين عند س = ٣ بينما ق + هـ متصل عند س = ٣

السؤال الأول

أولاً: عندما س > ١

د (س) = $\frac{١}{س}$ + ٥ = $\frac{٥ س + ١}{س}$ اقتران نسبي متصل على مجاله.

ثانيًا: عندما س < ١

د (س) = ٢ س^٢ + ٤ كثير حدود متصل على مجاله.

ثالثًا: نبحث اتصال د عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ د (س) = $\lim_{س \to ١^+}$ ($\frac{١}{س}$ + ٥) = ٦، $\lim_{س \to ١^-}$ د (س) = $\lim_{س \to ١^-}$ (٢ س^٢ + ٤) = ٦

إذن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٦ ، د (١) = ٦

د متصل عند س = ١ لأن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = د (١)

مما سبق د متصل على ح

السؤال الثاني

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$ف (س) = \begin{cases} -(٢ س + ٧) \quad ، \quad -٥ \leq س < -\frac{٧}{٢} \\ ٢ س + ٧ \quad ، \quad -\frac{٧}{٢} \leq س \leq ٠ \end{cases}$$

أولاً: ف (س) على صورة كثير حدود في الفترة [– ٥، – $\frac{٧}{٢}$) وفي الفترة (– $\frac{٧}{٢}$ ، ٠] فهو متصل في هاتين الفترتين.

ثانيًا: نبحث اتصال عندما س = – $\frac{٧}{٢}$

$\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^+}$ ف (س) = $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^+}$ (٢ س + ٧) = صفرًا

$\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^-}$ ف (س) = $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}^-}$ – (٢ س + ٧) = صفرًا

إذن $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}}$ ف (س) = صفرًا ، ف (– $\frac{٧}{٢}$) = صفرًا

ف (س) متصل عند س = – $\frac{٧}{٢}$ لأن $\lim_{س \to -\frac{٧}{٢}}$ ف (س) = ف (– $\frac{٧}{٢}$)

مما سبق ف متصل على [–٥ ، ٠]

السؤال الثالث

اولاً: في الفترة (– ٣، ∞) يكون ٢ س + ٦ > صفر، وكذلك $\lim_{س \to أ}$ ك (س) = ك (أ)، وعليه يكون ك متصلاً على (–٣، ∞).

ثانيًا: نبحث اتصال ك عندما س = – ٣

$\lim_{س \to -٣^+}$ ك (س) = صفر، ك (– ٣) = صفرًا

إذن ك متصل عند س = – ٣ من اليمين

مما سبق يكون ك (س) متصلاً على [– ٣ ، ∞)

السؤال الرابع:

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح

$$ق(س) = \begin{cases} -٢ &، -١ \le س < -\frac{١}{٢} \\ -١ &، -\frac{١}{٢} \le س < ٠ \\ ٠ &، س = ٠ \\ ٢س - ١ &، ٠ < س \le ٢ \end{cases}$$

أولاً: ق على شكل كثير حدود في الفترات [– ١، – $\frac{١}{٢}$) ، (– $\frac{١}{٢}$ ، ٠)، [٠ ، ٢] فهو متصل على هذه الفترات.

ثانيًا: نبحث اتصال ق عند س = – $\frac{١}{٢}$.

$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^+}$ ق (س) = – ١، $\lim_{س \to -\frac{١}{٢}^-}$ ق (س) = – ٢

$\lim_{س \to -\frac{١}{٢}}$ ق (س) غير موجودة، وعليه فإن ق غير متصل عند س = – $\frac{١}{٢}$

ثالثاً: نبحث اتصال ق عند س = ٠

$\lim_{س \to ٠^+}$ ق (س) = – ١ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ ق (س) = – ١

$\lim_{س \to ٠}$ ق (س) = – ١ ، ق (٠) = ٠

ق غير متصل عند س = ٠ لأن $\lim_{س \to ٠}$ ق (س) ≠ ق (٠)

مما سبق ق متصل على [– ١ ، ٢] / {- $\frac{١}{٢}$ ، ٠ }.

السؤال الخامس:

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$د(س) = \begin{cases} -١ &، س < ٠ \\ ١ &، ٠ < س < ١ \\ \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢} &، س \ge ١ \end{cases}$$

اولاً: د (س) على شكل كثير حدود في الفترات (− ∞، ٠)، (٠ ، ١)، (١ ، ∞) فهو متصل على هذه الفترات .

ثانيًا: وغير معرف عند س = ٠ فهو غير متصل عند هذه النقطة.

نهـــــا ك (س) = صفر، ك (− ٣) = صفرًا

ثالثاً: نبحث اتصال وعند س = ١

$\underset{س \leftarrow ١^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١، $\underset{س \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ١، د (١) = ١

د متصل عند س = ١ لأن د (١) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ د (س)

مما سبق د متصل على ح / {٠}

السؤال السادس

∵ بما أن د متصل على ح، فهو متصل عند س = ٦

$$\underset{س \leftarrow ٦^+}{\text{نهـــا}} \text{ د (س)} = \underset{س \leftarrow ٦^+}{\text{نهـــا}} \frac{\text{(س − ٦) (س + ٥)}}{\text{أ (س − ٦)}} = \frac{١١}{\text{أ}}$$

$\underset{س \leftarrow ٦^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = ٦ ب

∵ بما أن د متصل على ح، فإن $\underset{س \leftarrow ٦^+}{\text{نهـــا}}$ د (س) = $\underset{س \leftarrow ٦^-}{\text{نهـــا}}$ د (س) = د (١) ومنه

$$\frac{١١}{\text{أ}} = \text{٦ ب = ١ ومنه أ = ١١ ، ب} = \frac{١}{٦}$$

السؤال السابع

ق متصل على ح فهو متصل عند س = ٣ ∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ق (٣) = ١١

$$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^٢ \text{ − (٣ − ٢ جـ) س − ٦ جـ}}{\text{س − ٣}} = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \frac{\text{(س − ٣) (س + ٢ جـ)}}{\text{س − ٣}} = ١١$$

إذن ٣ + ٢ جـ = ١١ ومنه جـ = ٤

السؤال الثامن

∵ بما أن ق متصل على ح فهو معرف عند جميع قيم س ∈ ح

∵ بما أن المقام ليس له جذور (المميز سالب)، إذن:

أ^٢ − ١٢ < ٠ ومنه أ^٢ < ١٢

$\sqrt{\text{أ}^٢} < \sqrt{١٢}$ ومنه |أ| < $\sqrt{١٢}$ أي أن − $\sqrt{١٢}$ < أ < $\sqrt{١٢}$

السؤال الأول

أ) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{صفر}$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ٣$

$\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow -\infty}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١$

ب) $\{\text{س}: ٢ < \text{س} < ٣\}$ جـ) $\{-١ ، ٢ ، ٣\}$ د) $\{-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣\}$

السؤال الثاني

أ) $$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{٤٨ - ٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ٦٤} = \underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{-٣(\text{س}-٤)(\text{س}+٤)}{(\text{س}-٤)(\text{س}^٢+٤\text{س}+١٦)}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{-٣(\text{س}+٤)}{\text{س}^٢+٤\text{س}+١٦} = \frac{-٣\times٨}{٤٨} = -\frac{١}{٢}$$

ب) $$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}-١}\left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} - ١\right) = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\sqrt{\text{س}}-١)(\sqrt{\text{س}}+١)} \times \frac{١-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{-١}{\sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}}+١)} = -\frac{١}{٢}$$

جـ) $$\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}}-١}{\text{س}-١} \ \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}}-١}{\text{س}-١} \times \frac{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}}+١}{\text{س}^٢\sqrt{\text{س}}+١}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٥-١}{(\text{س}-١)(\text{س}٢\sqrt{\text{س}}+١)} = \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^٤+\text{س}^٣+\text{س}^٢+\text{س}+١)}{(\text{س}-١)(\text{س}\sqrt{\text{س}}+١)} = \frac{٥}{٢}$$

د) $$\frac{\sqrt{١+٤\text{س}^٢+٤\text{س}^٢}}{٢\text{س}+١} = \frac{\sqrt{(٢\text{س}+١)^٢}}{٢\text{س}+١} = \frac{|٢\text{س}+١|}{٢\text{س}+١} = \begin{cases} ١ & ، \text{س} > -\frac{١}{٢} \\ -١ & ، \text{س} < -\frac{١}{٢} \end{cases}$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow -\frac{١}{٢}^+}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١+٤\text{س}+٤\text{س}^٢}}{٢\text{س}+١} = \underset{\text{س}\leftarrow -\frac{١}{٢}^+}{\text{نهـا}} (١) = ١$$

$$\underset{\text{س}\leftarrow -\frac{١}{٢}^-}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١+٤\text{س}+٤\text{س}^٢}}{٢\text{س}+١} = \underset{\text{س}\leftarrow -\frac{١}{٢}^-}{\text{نهـا}} (١) = ١$$

إذن $\underset{\text{س}\leftarrow -\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{١+٤\text{س}+٤\text{س}^٢}}{٢\text{س}+١}$ غير موجودة

هـ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{|\text{س}-٣| - |٢\,\text{س}+٣|}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-(\text{س}-٣)+(٢\,\text{س}+٣)}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{س}} = ١$

و) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتاس} - \text{جتا}\,٥\,\text{س}}{\text{س جا}\,٢\,\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢\,\text{جا}\,٣\,\text{س جا}(-٢\,\text{س})}{\text{س جا}\,٢\,\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\,\text{حا}\,٣\,\text{س حا}\,٢\,\text{س}}{\text{س حا}\,٢\,\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{حا}\,٣\,\text{س}}{\text{س}} = ٢ \times ٣ = ٦$

ز) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-١}{\text{حا}(\text{س}^{٣}-١)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}{(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)\,\text{حا}(\text{س}^{٣}-١)}$

$= \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-١}{(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)\,\text{جا}(\text{س}^{٣}-١)}$

نفرض أن س٣ − ١ = هـ ، عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

$\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-١}{\text{حا}(\text{س}^{٣}-١)} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}^{٢}+\text{س}+١} \times \underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣}-١}{\text{حا}(\text{س}^{٣}-١)}$

$= \frac{١}{٣} \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}}{\text{جاهـ}} = \frac{١}{٣} \times ١ = \frac{١}{٣}$

ح) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{قاس}}{\text{ظا}^{٢}\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{قاس}}{\text{قا}^{٢}\text{س}-١} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١-\text{قاس}}{(\text{قاس}-١)(\text{قاس}+١)}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-١}{\text{قاس}+١} = -\frac{١}{٢}$

ط) $\underset{\text{س}\to ١٢٤}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}+١}-٥}{\text{س}-١٢٤} = \underset{\text{س}\to ١٢٤}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س}+١)^{\frac{١}{٣}}-٥}{\text{س}-١٢٤} \times \frac{(\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}+٥(\text{س}+١)^{\frac{١}{٣}}+٢٥}{(\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}+٥(\text{س}+١)^{\frac{١}{٣}}+٢٥}$

$= \underset{\text{س}\to ١٢٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}+١-١٢٥}{\text{س}-١٢٤} \times \frac{١}{(\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}+٥(\text{س}+١)^{\frac{١}{٣}}+٢٥}$

$= \underset{\text{س}\to ١٢٤}{\text{نهـا}} \frac{١}{(\text{س}+١)^{\frac{٢}{٣}}+٥(\text{س}+١)^{\frac{١}{٣}}+٢٥} = \frac{١}{٧٥}$

ي) $\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-[\text{س}]}{\text{س}^{٢}-٤} = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}-٢}{\text{س}^{٢}-٤} = \frac{١}{٢}$

السؤال الثالث

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٢س-٣}{ق(س)-٦} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{س^{٢}+٢س-٣}{س-١}}{\frac{ق(س)-٦}{س-١}} = \frac{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}+٢س-٣}{س-١}}{\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{ق(س)-٦}{س-١}}$$

$$= \frac{١}{٨} \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س٢+٢س-٣}{س-١} = \frac{١}{٨} \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س-١)(س+٣)}{س-١} = \frac{١}{٨} \times ٤ = \frac{١}{٢}$$

السؤال الرابع

أ) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٩-٢س^{٣}-(٣+س)^{٣}}{س^{٢}+س^{٣}+١} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-٣س^{٣}}{س^{٣}} = -٣$

ب) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{٦+س-س^{٤}}{(١-س^{٢})^{٣}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{-س^{٤}}{-س^{٦}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٢}} = \text{صفر}$

جـ) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{٩-٢س^{٥}}{٧+س^{٤}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{-٢س^{٥}}{س^{٤}} = \underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} (-٢س) = \infty$

د) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{-س^{٢}}{س+٢} + \frac{٢س^{٢}}{٣س+١} \right)$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-س^{٢}(٣س+١)+٢س^{٢}(س+٢)}{(س+٢)(٣س+١)} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-س^{٣}+٣س^{٢}}{(س+٢)(٣س+١)}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{-س^{٣}}{٣س^{٢}} = -\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س}{٣} = -\infty$$

السؤال الخامس

$$\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(١+٢س^{٢})^{٢}}{أس^{٢}(١+س)^{ن}} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٤}}{(أس^{٢})(س^{ن})} = \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٤}}{أس^{ن+٢}} = -٢$$

بما أن النهاية موجودة ولا تساوي صفرًا فإن درجة البسط = درجة المقام.

إذن (ن + ٢) = ٤ ومنه ن = ٢

كذلك $\frac{٤}{أ} = -٢$ ومنه أ = −٢

السؤال السادس

بما أن د متصل عند س = ٠ فإن $\lim_{س \to ٠}$ د (س) = د (٠) = ٢

ومنه $\lim_{س \to ٠^+}$ د (س) = ٢

$$\lim_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + (١ - أ) س}{أ س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س (س + ١ - أ)}{أ س} = \frac{١ - أ}{أ}$$

$\frac{١ - أ}{أ}$ = ٢ ومنه أ = $\frac{١}{٣}$

$\lim_{س \to ٠^-}$ د (س) = ٢

$$\lim_{س \to ٠^-} \frac{جا^٢ (ب س) - س^٢}{س جا ٢ س} = \lim_{س \to ٠^-} \left(\frac{جا ب س}{س} \times \frac{جا ب س}{جا ٢ س} - \frac{س^٢}{س جا ٢ س} \right)$$

$$= ب \times \frac{ب}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{ب - ١}{٢}$$

$\frac{ب^٢ - ١}{٢}$ = ٢ ومنه ب = ± $\sqrt{٥}$

السؤال السابع

أولاً: عندما س > ٥، ل (س) اقتران نسبي معرف على مجاله فهو متصل على هذه الفترة

ثانيًا: عندما س < ٥، ٥ − س > ٠

كذلك $\lim_{س \to أ} \sqrt{٥ - س}$ = ق (أ) لجميع قيم س في هذه الفترة، وعليه فإن ل (س) متصل على هذه الفترة،

وعليه فإن ل (س) متصل على هذه الفترة.

ثالثًا: نبحث اتصال ل عند س = ٥

$\lim_{س \to ٥^-}$ ل (س) = $\lim_{س \to ٥^-} \sqrt{٥ - س}$ = صفرًا

$$\lim_{س \to ٥^+} ل (س) = \lim_{س \to ٥^+} \left(\frac{س^٢ - ٢ س - ١٥}{٥ س - س^٢} + \frac{٨}{٥} \right)$$

$$= \lim_{س \to ٥^+} \left(\frac{(س - ٥)(س + ٣)}{س (٥ - س)} + \frac{٨}{٥} \right) = - \frac{٨}{٥} + \frac{٨}{٥} = \text{صفرًا}$$

$\lim_{س \to ٥}$ ل (س) = ل (٥) وعليه فإن ل متصل عند س = ٥ وبالتالي ل متصل على ح .

مما سبق ل (س) متصل على ح / {٥}.

السؤال الثامن

نعيد تعريف الاقتران ع دون استخدام رمزي القيمة المطلقة والصحيح.

$$\text{ع}(\text{س}) = \begin{cases} ١ - ٢\text{س} & ، \; -١ \le \text{س} < \frac{١}{٢} \\ ٢\text{س} - ١ & ، \; \frac{١}{٢} \le \text{س} \le ١ \\ ٢ & ، \; ١ < \text{س} < ٢ \\ ٣ & ، \; ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

أولاً: ع (س) على شكل كثير حدود في الفترات [− ١، $\frac{١}{٢}$)، [$\frac{١}{٢}$ ، ١)، (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣] فهو متصل على هذه الفترات.

ثانيًا: نبحث اتصال ع عند س = $\frac{١}{٢}$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}^{+}} \text{ع}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}^{+}} (٢\text{س} - ١) = \text{صفرًا}$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}^{-}} \text{ع}(\text{س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}^{-}} (١ - ٢\text{س}) = \text{صفرًا}$$

$$\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}} \text{ع}(\text{س}) = \text{صفرًا، } \text{ع}\left(\frac{١}{٢}\right) = \text{صفرًا}$$

بما أن $\lim_{\text{س} \to \frac{١}{٢}} \text{ع}(\text{س}) = \text{ع}\left(\frac{١}{٢}\right)$ فإن ع (س) متصل عند س = $\frac{١}{٢}$.

ثالثاً: نبحث اتصال ع عند س = ١

$$\lim_{\text{س} \to ١^{+}} \text{ع}(\text{س}) = ٢، \quad \lim_{\text{س} \to ١^{-}} (\text{س}) = ١$$

$\lim_{\text{س} \to ١} \text{ع}(\text{س})$ غير موجودة، وعليه فإن ع غير متصل عند س = ١

رابعاً: نبحث اتصال ع عند س = ٢

$$\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ع}(\text{س}) = ٣ \quad ، \quad \lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ع}(\text{س}) = ٢$$

$\therefore$ $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ع}(\text{س})$ غير موجودة، وعليه فإن ع غير متصل عند س = ٢

مما سبق الاقتران ع متصل على [− ١، ٣] / {١ ، ٢}.

الاختبار الذاتي

السؤال الأول

أ) − ٢ ب) صفر٢ جـ) ٢ د) ∞ هـ) {− ٢، − ١، ٢} و) {٠، ٢، − ٤}

السؤال الثاني

(١) جـ (١,٥) (٤) جـ $(-\frac{٢}{٣})$

(٢) أ (− ١٠) (٥) د $(-\frac{١}{٢})$

(٣) ب (٥٠) (٦) ب (٠ ، ٤)

السؤال الثالث

أ) $$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{ظتا س}}{\text{قتا س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}}{\frac{١}{\text{جا س}}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س}}}{\frac{١}{\text{جا س}}}$$

$$= \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (\text{حا س} - \text{جتا س}) = - ١$$

ب) $$\underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{\left|\frac{١}{\text{س} + ٣}\right| - \frac{١}{٤}}{|\text{س} - ١|} = \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س} + ٣} - \frac{١}{٤}}{١ - \text{س}} = \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٤ - (\text{س} + ٣)}{٤(\text{س} + ٣)}}{١ - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{س} \to ١^-}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{س}}{٤(١ - \text{س})(\text{س} + ٣)} = \frac{١}{١٦}$$

جـ) $$\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \left(\left(\frac{١ + ٢\text{س}}{\text{س} + ٣}\right)^{-٣} - \frac{٩ + \text{س}^٢}{\text{س}^٢ - \text{س}^٣} \right) = \underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{(\text{س} + ٣)^٣}{(١ + ٢\text{س})^٣} - \frac{٩ + \text{س}^٢}{\text{س}^٢ - \text{س}^٣} \right)$$

$$= \underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٣}{٨\text{س}^٣} - \underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^٢}{-\text{س}^٣} = \frac{١}{٨} - \text{صفر} = \frac{١}{٨}$$

السؤال الرابع

نعيد كتابة ق دون استخدام رمز الصحيح

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} -٢ &، \quad -١ \le \text{س} < -\frac{٢}{٣} \\ -١ &، \quad -\frac{٢}{٣} \le \text{س} < -\frac{١}{٣} \\ ٠ &، \quad -\frac{١}{٣} \le \text{س} < ٠ \\ ١ &، \quad \text{س} = ٠ \\ ٣\text{س}^٢ + \text{س} &، \quad ٠ < \text{س} \le ٤ \end{cases}$$

أولًا: عندما س = $-\frac{1}{3}$

$\underset{\text{س} \to -\frac{1}{3}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا ، $\underset{\text{س} \to -\frac{1}{3}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = − ١

$\underset{\text{س} \to -\frac{1}{3}}{\text{نهـا}}$ ق (س) غير موجودة، وبناءً عليه ق غير **متصل عند س** = $-\frac{1}{3}$

ثانيًا: عندما س = ٠

$\underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ ق (س) = $\underset{\text{س} \to ٠^{+}}{\text{نهـا}}$ (٣ س^{٢} + س) = صفرًا، $\underset{\text{س} \to ٠^{-}}{\text{نهـا}}$ **ق (س) = صفرًا**

إذن $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا، ق (٠) = ١

ق غير متصل عند س = ٠ لأن $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ ق (س) ≠ ق (٠)

السؤال الخامس

أولًا: الاقتران د اقتران نسبي ومعرف في الفترتين (− ∞ ، ٢)، (٢ ، ∞) فهو متصل عليهما.

ثانيًا: نبحث اتصال الاقتران د (س) عند س = ٢

$$\underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \text{د (س)} = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \to ٢^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}\text{س}(\text{س} - ٢)}{\text{س} - ٢} = ١$$

$$= \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \text{د (س)} = \underset{\text{س} \to ٢^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٥\text{س} - ٨}{\text{س}} = \frac{١٠ - ٨}{٢} = ١$$

$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = ١ ، د (٢) = ١

د (س) متصل عند س = ٢ لأن $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د (س) = د (٢)

مما سبق د (س) متصل على ح.

السؤال الأول

$$٤ = \frac{\text{ق}(\text{س}_١ + ١) - \text{ق}(\text{س}_١)}{(\text{س}_١ + ١) - \text{س}_١} = \frac{[٢(\text{س}_١ + ١)^٢ + (\text{س}_١ + ١) - ١] - (٢\text{س}_١^٢ + \text{س}_١ - ١)}{١}$$

$$٤ = [٢(\text{س}_١^٢ + ٢\text{س}_١ + ١) + \text{س}_١ + ١ - ١] - ٢\text{س}_١^٢ - \text{س}_١ + ١$$

$$٤ = ٢\text{س}_١^٢ + ٤\text{س}_١ + ٢ + \text{س}_١ - ٢\text{س}_١^٢ - \text{س}_١ + ١$$

$$٤ = ٤\text{س}_١ + ٣ \Leftarrow \text{س}_١ = \frac{١}{٤}$$

السؤال الثاني

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{(٣ + \text{هـ}) - ٣} = \frac{[(٣ + \text{هـ})^٢ - ٢] - [٩ - ٢]}{\text{هـ}}$$

$$= \frac{٩ + ٦\text{هـ} + \text{هـ}^٢ - ٢ - ٧}{\text{هـ}} = \frac{\text{هـ}^٢ + ٦\text{هـ}}{\text{هـ}} = \text{هـ} + ٦$$

السؤال الثالث

$$\text{متوسط التغير} = \frac{\text{م}(٣) - \text{م}(١)}{٣ - ١} \Leftarrow$$

$$٣ = \frac{(٩\text{أ} - ٩ + ٤) - (\text{أ} - ٣ + ٤)}{٢} = \frac{(٩\text{أ} - ٥ - \text{أ} - ١)}{٢}$$

$$٣ = \frac{٨\text{أ} - ٦}{٢} \Leftarrow ٦ = ٨\text{أ} - ٦ \Leftarrow ١٢ = ٨\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{١٢}{٨} = \frac{٣}{٢}$$

السؤال الرابع

$$\Delta\text{س} = ٠,١ = \text{س}_٢ - \text{س}_١ = ٣ - \text{س}_١ \Leftarrow \text{س}_١ = ٢,٩$$

$$\Delta\text{ص} = ٠,٨ = \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ = ٥ - \text{ص}_١ \Leftarrow \text{ص}_١ = ٤,٢$$

∴ إحداثيا أ هي (٢,٩ ، ٤,٢).

السؤال الخامس

$$\text{متوسط التغير في هـ} = \frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(-١)}{٣ - (-١)} = \frac{[٢\text{ق}(٣) - ٢٧] - [٢\text{ق}(-١) - ٣]}{٤}$$

$$= \frac{٢\text{ق}(٣) - ٢٧ - ٢\text{ق}(-١) + ٣}{٤} = \frac{٢\text{ق}(٣) - ٢\text{ق}(-١) - ٢٤}{٤}$$

$$= \frac{٢[\text{ق}(٣) - \text{ق}(-١)]}{٤} - \frac{٢٤}{٤} = ٢ \times (-٤) - ٦ = -٨ - ٦ = -١٤$$

السؤال السادس

نفرض أن طول الضلع = س ، المساحة م

م (س) = س^{٢} مقدار التغير في المساحة Δم = م$_{٢}$ – م$_{١}$ = م (٥,٢) – م (٥)

= (٥,٢)^{٢} – (٥)^{٢} = ٢٧,٠٤ – ٢٥ = ٢,٠٤ سم^{٢}

السؤال السابع

أ) السرعة المتوسطة = $\frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ = $\frac{ف(٤) - ف(١)}{٣}$

= $\frac{(١٦٠ - ٨٠) - (٤٠ - ٥)}{٣}$ = $\frac{(٨٠ - ٣٥)}{٣}$ = $\frac{٤٥}{٣}$ = ١٥ م/ث

ب) $\frac{ف(\Delta ن) - ف(٠)}{\Delta ن}$ = $\frac{٤٠(\Delta ن) - ٥(\Delta ن)^{٢} - صفر}{\Delta ن}$ = ٤٠ – ٥ (Δن)

السؤال الأول

أ) ق (س) = $\text{س}^{٣}$ + ٢س − ١ ، عند س = ٥

$$\text{ق}'(٥) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(٥+\text{هـ}) - \text{ق}(٥)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١٢٥ + \text{هـ}^{٣} + ١٥\,\text{هـ}^{٢} + ٧٥\,\text{هـ} + ١٠ + ٢\,\text{هـ} - ١ - ١٣٤}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}^{٣} + ١٥\,\text{هـ}^{٢} + ٧٧\,\text{هـ}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}\,[\text{هـ}^{٢} + ١٥\,\text{هـ} + ٧٧]}{\text{هـ}} = ٠ + ٠ + ٧٧ = ٧٧$$

ب) هـ (س) = $\frac{١}{٤\text{س} - ٣}$ عند س = −٢

$$\text{هـ}'(-٢) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{هـ}(-٢+\text{هـ}) - \text{هـ}(-٢)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٤(\text{هـ}-٢)-٣} + \frac{١}{١١}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٤\,\text{هـ} - ١١} + \frac{١}{١١}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{١١ + ٤\,\text{هـ} - ١١}{\text{هـ} \times ١١\,(٤\,\text{هـ} - ١١)}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{٤\,\text{هـ}}{\text{هـ} \times ١١\,(٤\,\text{هـ} - ١١)} = \frac{٤}{-١٢١} = -\frac{٤}{١٢١}$$

جـ) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{س} & ، \quad ٠ \le \text{س} \le ١ \\ ٣\text{س} - ١ & ، \quad ١ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$ ، س = ٠، س = ١، س = ٥

دَ (٠) غير موجودة لأن $\text{د}'_{-}(٠)$ غير موجودة (د غير معروف على يسار س = ٠) .

دَ (٥) غير موجودة لأن $\text{د}'_{+}(٥)$ غير موجودة (د غيرمعرف على يمين س = ٥).

لايجاد دَ (١)

$$\text{د}'_{+}(١) = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(١)}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{(٣\text{س} - ١) - ٢}{(\text{س} - ١)} = \underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}} \frac{(٣\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ١)} = ٣$$

$$\text{د}'_{-}(١) = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{د}(\text{س}) - \text{د}(١)}{(\text{س} - ١)} = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{(\text{س} - ١)} = \underset{\text{س}\to ١^{-}}{\text{نها}} \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)} = ٣$$

إذن دَ (١) = ٣

د) $\text{ل}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,|\text{س}^{٣} - ٢|$ ، عند $\text{س} = ٣$، $\text{س} = \sqrt[٣]{٢}$

$$\text{ل}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}(\text{س}^{٣} - ٢) & ، \quad \text{س} \geq \sqrt[٣]{٢} \\ \text{س}^{٢}(٢ - \text{س}^{٣}) & ، \quad \text{س} < \sqrt[٣]{٢} \end{cases}$$

$$\text{ل}'(٣) = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(٣)}{\text{س} - ٣} = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٢} - ٢٢٥}{(\text{س} - ٣)}$$

$$\text{ل}'(٣) = \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{(\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٣} + ٩\text{س}^{٢} + ٢٥\text{س} + ٧٥)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)}$$

$$= (٣)^{٤} + ٣(٣)^{٣} + ٩(٣)^{٢} + ٢٥(٣) + ٧٥$$

$$= ٨١ + ٨١ + ٨١ + ٧٥ + ٧٥ = ٢٤٦ + ١٥٠ = ٣٩٣$$

لإيجاد $\text{ل}'(\sqrt[٣]{٢})$

$$\text{ل}'_{+}(\sqrt[٣]{٢}) = \lim_{\text{س} \to \sqrt[٣]{٢}^{+}} \frac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(\sqrt[٣]{٢})}{(\text{س} - \sqrt[٣]{٢})}$$

$$= \lim_{\text{س} \to \sqrt[٣]{٢}^{+}} \frac{\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٢}}{\sqrt[٣]{٢} + \text{س} - \sqrt[٣]{٢}} = \lim_{\text{س} \to \sqrt[٣]{٢}^{+}} \frac{(\text{س}^{٤} + \sqrt[٣]{٢}\,\text{س}^{٣} + (\sqrt[٣]{٢})^{٢}\,\text{س}^{٢})(\text{س} - \sqrt[٣]{٢})}{\text{س} - \sqrt[٣]{٢}}$$

$$\text{ل}'_{+}(\sqrt[٣]{٢}) = ٦\sqrt[٣]{٢}$$

لإيجاد $\text{ل}'_{-}(\sqrt[٣]{٢}) = \lim_{\text{س} \to \sqrt[٣]{٢}^{-}} \dfrac{\text{ل}(\text{س}) - \text{ل}(\sqrt[٣]{٢})}{\sqrt[٣]{٢} + \text{س} - \sqrt[٣]{٢}}$

$$= \lim_{\text{س} \to \sqrt[٣]{٢}^{-}} \frac{٢\text{س}^{٢} - \text{س}^{٥} - \text{صفر}}{\text{س} - \sqrt[٣]{٢}} = - \lim_{\text{س} \to \sqrt[٣]{٢}^{-}} \frac{(\text{س}^{٥} - ٢\text{س}^{٢})}{\text{س} - \sqrt[٣]{٢}} = -٦\sqrt[٣]{٢}$$

$$\text{ل}'_{-}(\sqrt[٣]{٢}) = -٦\sqrt[٣]{٢}$$

$\text{ل}'_{-}(\sqrt[٣]{٢}) \neq \text{ل}'_{+}\sqrt[٣]{٢} \quad \Leftarrow \quad \text{ل}'(\sqrt[٣]{٢})$ غير موجودة.

السؤال الثاني

أ) $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ٢}$ ، $\text{س} > -٢$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} = \frac{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}+٢} - \sqrt{\text{س}+٢}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{\text{س}+\text{هـ}+٢} - \sqrt{\text{س}+٢})}{\text{هـ}} \times \frac{(\sqrt{\text{س}+\text{هـ}+٢} - \sqrt{\text{س}+٢})}{\sqrt{\text{س}+\text{هـ}+٢} - \sqrt{\text{س}+٢}}$$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}+\text{هـ}+٢-\text{س}-٢}{\text{هـ}\,(\sqrt{\text{س}+\text{هـ}+٢} + \sqrt{\text{س}+٢})} = \frac{١}{(\sqrt{\text{س}+\text{هـ}+٢} + \sqrt{\text{س}+٢})} = \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}+٢}}$$

ب) $\text{ص} = ٥\,\text{س}^{٢} - \frac{٤}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \frac{٥\,\text{ع}^{٢} - \frac{٤}{\text{ع}} - [\,٥\text{س}^{٢} - \frac{٤}{\text{س}}\,]}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{٥\text{ع}^{٢} - ٥\text{س}^{٢} - \frac{٤}{\text{ع}} + \frac{٤}{\text{س}}}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{(٥\text{ع}^{٢} - \text{س}^{٢}) + \frac{٤}{\text{س}} - \frac{\text{ع}}{\text{ع}}}{(\text{ع} - \text{س})} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{٥(\text{ع}-\text{س})(\text{ع}+\text{س}) + \frac{٤\text{ع} - ٤\text{س}}{\text{س ع}}}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{٥(\text{ع}-\text{س})\ [٥\ (\text{ع}+\text{س}) + \frac{٤}{\text{س ع}}]}{(\text{ع} - \text{س})} = ١٠\,\text{س} + \frac{٤}{\text{س}^{٢}}$$

السؤال الثالث

أ) $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٢\,\text{قَ}(\text{س})$

$$= \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}} = \text{قَ}(\text{س}) + \underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}}$$

إفترض أن $\text{س} - \text{هـ} = \text{م}$ ، عندما $\text{هـ} \leftarrow ٠$ فإن $\text{م} \leftarrow \text{س}$

$$\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{س} - \text{م}} = \underset{\text{م} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{م})}{\text{س} - \text{م}} = \underset{\text{م} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{م} - \text{س}} = \text{قَ}(\text{س})$$

إذن، $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س}-\text{هـ})}{\text{هـ}} = \text{قَ}(\text{س}) + \text{قَ}(\text{س}) = ٢\,\text{قَ}(\text{س})$.

ب) $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(س)} - \text{س ق(ع)}}{(\text{ع} - \text{س})} = \text{ق(س)} - \text{س ق}'\text{(س)}$

البرهـــان

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(س)} - \text{س ق(ع)}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(س)} - \text{س ق(ع)} + \text{ع ق(ع)} - \text{ع ق(ع)}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{[\text{ع ق(س)} - \text{ع ق(ع)}] + [\text{ع ق(ع)} - \text{س ق(ع)}]}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{-\text{ع}[\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}]}{(\text{ع} - \text{س})} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(ع)}[\text{ع} - \text{س}]}{(\text{ع} - \text{س})} = -\text{س ق}'\text{(س)} + \text{ق(س)} = \text{ق(س)} - \text{س ق}'\text{(س)}$$

جـ) $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٣ ع ق(ع)} - \text{٣ س ق(س)}}{(\text{ع} - \text{س})} = \text{٣ ق(س)} + \text{٣ س ق}'\text{(س)}$

$$\text{النهاية} = \text{٣} \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع ق(ع)} - \text{س ق(س)} + \text{ع ق(س)} - \text{ع ق(س)}}{(\text{ع} - \text{س})}$$ بإضافة وطرح ع ق(س)

$$= \text{٣} \left[\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ع}[\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}]}{(\text{ع} - \text{س})} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(س)}(\text{ع} - \text{س})}{(\text{ع} - \text{س})} \right] = \text{٣ ق(س)} + \text{٣ س ق}'\text{(س)}$$ وهو المطلوب.

السؤال الرابع

$$\underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(٤ – ٢هـ)} - \text{ق(٤ + ٥ هـ)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{[\text{ق(٤ – ٢هـ)} - \text{ق(٤)}] + [\text{ق(٤)} - \text{ق(٤ + ٥هـ)}]}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(٤ – ٢هـ)} - \text{ق(٤)}}{\text{هـ}} - \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(٤ + ٥ هـ)} - \text{ق(٤)}}{\text{٣ هـ}}$$

افرض –٢ هـ = م

$\text{هـ} = -\dfrac{\text{م}}{\text{٢}}$

هـ ← ٠

م ← ٠

٥ هـ = ي

$\text{هـ} = \dfrac{\text{ي}}{\text{٥}}$

هـ ← ٠

ي ← ٠

$$\underset{\text{م}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(٤ + م)} - \text{ق(٤)}}{-\dfrac{\text{م}}{\text{٢}}} - \underset{\text{ي}\to\text{٠}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ق(٤ + ي)} - \text{ق(٤)}}{\dfrac{\text{ي}}{\text{٥}}}$$

$= -\text{٢ ق}'\text{(٤)} - \text{٥ ق}'\text{(٤)} = -\text{٧ ق}'\text{(٤)} = -\text{٧} \times \text{٦} = -\text{٤٢}$.

السؤال الخامس

ق (س) = (س − أ) ل (س)، حيث ل (س) اقتران متصل عند س = أ

بين أن قَ (أ) = ل (أ)، أ ثابت

الحل

$$\text{قَ}(\text{أ}) = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{س} - \text{أ}} = \underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نها}} \frac{(\text{س}-\text{أ})\ \text{ل}(\text{س}) - ٠}{(\text{س} - \text{أ})} = \text{ل}(\text{أ})$$ **وهو المطلوب.**

السؤال السادس

نفرض أن ارتفاع المخروط = س سم، فيكون نصف قطره = $\frac{\text{س}}{٣}$ سم

حجم المخروط (ح) = $\frac{١}{٣} \left(\frac{\text{س}}{٣}\right)^{٢} \pi \times \text{س}$

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{\text{س}^{٢}}{٩} \times \text{س} \times \pi$$

$$= \frac{\pi}{٢٧}\ \text{س}^{٣}$$ عندما يكون نصف القطر $\frac{\text{س}}{٣} = ١٠ \Leftarrow \text{س} = ٣٠$ سم

$$\text{حَ}(٣٠) = \underset{\text{س}\to ٣٠}{\text{نها}} \frac{\text{ح}(\text{س}) - \text{ح}(٣٠)}{\text{س} - ٣٠} = \underset{\text{س}\to ٣٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\pi}{٢٧}\text{س}^{٣} - \frac{\pi}{٢٧} \times (٣٠)^{٣}}{(\text{س} - ٣٠)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٣٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\pi}{٢٧}\ (\text{س}^{٣} - (٣٠)^{٣})}{(\text{س} - ٣٠)} = \underset{\text{س}\to ٣٠}{\text{نها}} \frac{\pi}{٢٧}\ \frac{(\text{س} - ٣٠)\ (\text{س}^{٢} + ٣٠\,\text{س} + ٩٠٠)}{(\text{س} - ٣٠)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٣٠}{\text{نها}} \frac{\pi}{٢٧}\ (\text{س}^{٢} + ٣٠\text{س} + ٩٠٠) = \frac{\pi}{٢٧} \times (٩٠٠ + ٩٠٠ + ٩٠٠)$$

$$= \frac{\pi}{٢٧} \times ٣ \times ٩٠٠ = ١٠٠\,\pi \ \text{سم}^{٣}$$

السؤال الأول

أ) ق (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س}-٢}$ عند س = ٢ ،

ق غير متصل عند س = ٢ لأنه غير معروف عندها وعليه فإن ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

ب) هـ (س) = [٢ − ٣س] عند س = −٢ ، س = $\frac{١}{٢}$

$$\text{هـ (س)} = \begin{cases} ٨ \quad ، & -٢\frac{١}{٣} < \text{س} \le -٢ \\ ٧ \quad ، & -٢ < \text{س} \le -١\frac{٢}{٣} \end{cases}$$

$\lim\limits_{\text{س} \to -٢^{-}}$ هو (س) = ٨ ، $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^{+}}$ هـ (س) = ٧ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ هـ (س) غير مودجودة

هـ (س) غير متصل عند س = −٢

إذن هـَ(−٢) غير موجودة

عندما س = $\frac{١}{٢}$ ، هـ (س) = صفرًا ، $\frac{١}{٣} < \text{س} \le \frac{٢}{٣}$

هـَ$\left(\frac{١}{٢}\right)$ = صفرًا

جـ) ل (س) = |س^{٢}| [س] عند س = صفرًا.

$$\text{ل (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢}(-١) = -\text{س}^{٢} & -١ \le \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} \times ٠ = \text{صفرًا} & ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$$

$\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}}$ ل (س) = ٠ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}}$ ل (س) = صفرًا، ل (٠) = ٠

∴ ل (س) متصل عند س = ٠

$$\text{لَ}_{+}(٠) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{+}} \frac{\text{ل}(٠+\text{هـ}) - \text{ل}(٠)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{٠}{\text{هـ}} = \text{صفرًا.}$$

$$\text{لَ}_{-}(٠) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} \frac{\text{ل}(٠+\text{هـ}) - \text{ل}(٠)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{-\text{هـ}^{٢}}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠^{-}} -\text{هـ} = \text{صفرًا.}$$

لَ (٠) قابل للاشتقاق عند س = − ⇐ لَ (٠) = صفرًا.

د) $\text{ل (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٣} & \text{، س} \geq ١ \\ ٣\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥ & \text{، س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \text{ د (س)} = ٣ - ٣ + ٥ = ٥$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \text{ د (س)} =$ وعليه $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \text{ د (س)}$ غير موجودة

إذن د (س) غير قابل للاشتقاق عند س = ١ لأنه غير متصل عند س = ١

هـ) $\text{و(س)} = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & \text{، س} \geq ١ \\ -\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} & \text{، س} < ١ \end{cases}$ عند س = ١

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \text{ و (س)} = ١$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \text{ و (س)} = -\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٢} = ١$ ، و (١) = ١

إذن و (س) متصل عند س = ١

$\text{وَ}_{+}(١) = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{و (س)} - \text{و (١)}}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{س}}{\text{س}} \times \frac{١}{(\text{س} - ١)} = -١$

$\text{وَ}_{-}(١) = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{و (س)} - \text{و (١)}}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{٣}{٢} - ١}{(\text{س} - ١)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}}{(\text{س} - ١)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}(١ + \text{س}^{٢})}{(\text{س} - ١)} = \underset{\text{س} \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}(١ - \text{س}^{٢})(١ + \text{س})}{(\text{س} - ١)} = -\frac{١}{٢} \times ٢ = -١$

$\therefore \text{وَ}(١) = -١$

عند س = −١

و (س) متصل عند س = −١ لأنه كثير حدود

$\text{وَ}(-١) = \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{و (س)} - \text{و (}-١\text{)}}{\text{س} + ١}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{١}{٢}}{(\text{س} + ١)}$

$= \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{٢}(١ - \text{س})(١ + \text{س})}{(\text{س} - ١)}$

$= \frac{١}{٢}(١ + ١) = ١$

السؤال الثاني

$\text{ق (س)} = \begin{cases} \text{أس}^{٢} - \text{ب س} & \text{، س} \geq ٢ \\ ٤ - \text{ب س}^{٣} + \text{أس} & \text{، س} < ٢ \end{cases}$

جد كلاً من الثابتين أ، ب واللذين يجعلان قَ (٢) موجودة

أ) ق متصل

$$\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س} \leftarrow ١^-}{\text{نهـا}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٢)$$

$$٤ - ٨\text{ب} + ٢\text{أ} = ٤\text{أ} - ٢\text{ب}$$

$$-٢\text{أ} - ٦\text{ب} = -٤$$

$$\text{أ} + ٣\text{ب} = ٢ \ \ldots\ldots (١)$$

$$\text{قَ}_+(٢) = \text{قَ}_-(٢)$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{(٤ - \text{ب س}^٣ + \text{أ س}) - (٤ - ٨\text{ب} + ٢\text{أ})}{(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{[(\text{أ س}^٢ - \text{ب س}) - (٤\text{أ} - ٢\text{ب})]}{(\text{س} - ٢)}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{٤ - \text{ب س}^٣ + \text{أ س} - ٤ + ٨\text{ب} - ٢\text{أ}}{(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{(\text{أ س}^٢ - \text{ب س} - ٤\text{أ} - ٢\text{ب})}{(\text{س} - ٢)}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{-\text{ب}(\text{س}^٣ - ٨) + \text{أ}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}(\text{س}^٢ - ٤) - \text{ب}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{-\text{ب}(\text{س} - ٢)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤) + \text{أ}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢) - \text{ب}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)}$$

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٢^+}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)(-\text{ب س}^٢ + ٢\text{ب س} - ٤\text{ب} - \text{أ})}{(\text{س} - ٢)} = \underset{\text{س} \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}} \frac{(\text{س} - ٢)[\text{أ س} + ٢\text{أ} - \text{ب}]}{(\text{س} - ٢)}$$

$$-٤\text{ب} - ٤\text{ب} - ٤\text{ب} + \text{أ} = ٢\text{أ} + ٢\text{أ} - \text{ب}$$

$$-١١\text{ب} = ٣\text{أ} \ \ldots\ldots (٢)$$

بحل المعادلتين

$$\text{أ} + ٣\text{ب} = ٢ \ \ldots \quad (١)$$

$$-١١\text{ب} = ٣\text{أ} \ \ldots \quad (٢)$$

$$\text{أ} = \frac{١١}{٣}\text{ب}$$

$$-\frac{١١}{٣}\text{ب} + ٣\text{ب} = ٢$$

$$-\frac{١١}{٣}\text{ب} + \frac{٩}{٣}\text{ب} = ٢ \Leftarrow \frac{-٢}{٣}\text{ب} = ٢$$

$$\Leftarrow -٢\text{ب} = ٦ \Leftarrow \text{ب} = -٣$$

$$\text{أ} = \frac{-١١}{٣} \times (-٣) = ١١$$

إذن $\text{أ} = ١١$

$\text{ب} = -٣$

السؤال الثالث

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} [س] &،\ ١ \le س < ٢ \\ |س^٣ - ٣| &،\ ٢ \le س < ٢ \end{cases}$ جد $قَ(س)$ في مجال ق

$$ق(س) = \begin{cases} ١ &،\ ١ \le س < ٢ \\ -س + ٣ &،\ ٢ \le س < ٣ \\ س - ٣ &،\ ٣ \le س < ٣ \end{cases}$$

$$قَ(س) = \begin{cases} ٠ &،\ ١ < س < ٢ \\ -١ &،\ ٢ < س < ٣ \\ س - ٣ &،\ ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} &،\ س = ١،\ ٢،\ ٣ \end{cases}$$

السؤال الرابع

$$ل(س) = \frac{[\frac{س}{٥}] - س}{س + ١} \quad \text{عند } س = -٢$$

$$[\frac{س}{٥}] = \begin{cases} -١ &،\ -٥ \le س < ٠ \\ ٠ &،\ ٠ \le س < ٥ \end{cases}$$

$$ل(س) = \begin{cases} -١ &،\ -٥ \le س < ٠ \\ \frac{-س}{س + ١} &،\ ٠ \le س < ٥ \\ \frac{١ - س}{س + ١} &،\ ٥ \le س < ١٠ \end{cases}$$

$$لَ(-٢) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ل(-٢ + هـ) - ل(-٢)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{-١ - (-١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١ - ١}{هـ} = \text{صفراً}$$

∴ ل (س) قابل للاشتقاق عند س = −٢ ، حيث لَ (−٢) = صفرًا.

عند س = ٥

$$\lim_{س \to ٥^-} ل(س) = \frac{-٥}{٦} \text{ ، } \lim_{س \to ٥^+} ل(س) = -\frac{-٤}{٦} = \frac{-٢}{٣}$$

إذن $\lim_{س \to ٥} ل(س)$ غير موجودة وعليه ل (س) غير متصل عند س = ٥

إذن ل (س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٥.

السؤال الأول

أ) قَ (س) = صفرًا   ب) قَ (س) = صفرًا

جـ) صَ = −٣٦ س^{١١} د) لَ (س) = $\frac{١}{٢}$ هـَ (س)

السؤال الثاني

أ) $\frac{د ص}{د س}$ = −٦س   ب) $\frac{د ص}{د س}$ = ١٨س^{٢} − ١٠س + ١

جـ) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٢}{٥}$ س   د) $\frac{د ص}{د س}$ = س^{٣} − س^{٢} + س − ١

السؤال الثالث

أ) $\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=-٢}$ = ٢س$^{٣}\Big|_{س=-٢}$ (−٢)^{٣} = −١٦

ب) ص = س^{٢} + (٣س −١٢)   ، س > ٤

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=٥}$ = (٢س + ٣) $\Big|_{س=٥}$ = ١٠ + ٣ = ١٣

جـ) ص = ٨س^{٢} − [$\frac{١}{٢}$ س + ٣]   ، س = ١,٢

∴ ص = ٨س^{٢} − ٣   ، س ∈ [٠ ، ٢)

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=١,٢}$ = ١٦ س $\Big|_{س=١,٢}$ = ١٦ × ١,٢ = ١٩,٢

د) ص = س + [س + ٠,٢] − |س| ، س = −١

[س + ٠,٢] = −١   ، س ∈ [−١,٢ ، −٠,٢[

|س| = { س ، س ≥ ٠
        −س ، س < ٠

∴ عندما س = −١

ص = س + (−١) − (−س) = ٢ س − ١

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{س=-١}$ = ٢

السؤال الرابع

أ) قَ (س)$\Big|_{س=٢}$ = (٥ لَ (س) + ٢ هـَ (س)) $\Big|_{س=٢}$ = ٥ لَ (٢) +٢ هـَ (٢) = (٥ × ٤) + (٢ × (−٥) = ٢٠ − ١٠ = ١٠.

ب) قَ (س)$\Big|_{س=٢}$ = (لَ (س) − ٣ هـَ (س))$\Big|_{س=٢}$ = لَ (٢) − ٣هـَ (٢) = ٤ − (٣ × −٥) = ٤ + ١٥ = ١٩.

السؤال الأول

أ) صَ = س^{٢} (−٣س^{٢}) + (١ − س^{٣}) (٢س)

= −٣س^{٤} + ٢س − ٢س^{٤} = ٢س − ٥س^{٤}

ب) صَ = −٤٠ س$^{-٦}$ = $-\frac{٤٠}{\text{س}^{٦}}$

جـ) صَ = (٢س^{٢} − ٤س + ١) (٦) + (٦س − ٥) (٤س − ٤)

= ١٢س^{٢} − ٢٤س + ٦ + ٢٤س^{٢} − ٢٤س − ٢٠س + ٢٠

= ٣٦س^{٢} − ٦٨س + ٢٦

د) $$\text{صَ} = \frac{(\text{١ − س})(\text{٢س}) - \text{س}^{٢}(-١)}{(\text{١ − س})^{٢}} = \frac{\text{٢س} - \text{٢س}^{٢} + \text{س}^{٢}}{(\text{١ − س})^{٢}} = \frac{\text{٢س} - \text{س}^{٢}}{(\text{١ − س})^{٢}}$$

هـ) $$\text{صَ} = \frac{(\text{٣س + ٢})(٤) - (\text{٤س − ٥})(٣)}{(\text{٣س + ٢})^{٢}} = \frac{\text{١٢س + ٨ − ١٢س + ١٥}}{(\text{٣س + ٢})^{٢}} = \frac{٢٣}{(\text{٣س + ٢})^{٢}}$$

السؤال الثاني

أ) ص = س (س^{٢} + ٢) (١ − ٢س^{٢}) = (س^{٣} + ٢س) (١ − ٢س^{٢})

صَ = (س^{٣} + ٢س) (−٤س) + (١ − ٢س^{٢}) (٣س^{٢} + ٢)

= −٤س^{٤} − ٨س^{٢} + ٣س^{٢} + ٢ − ٦س^{٤} − ٤س^{٢} = −١٠س^{٤} − ٩س^{٢} + ٢

ب) ص = |س − ١| (س^{٢} + س + ١)

$$\text{ق (س) = ص} = \begin{cases} (\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١) & \text{، س} \geq ١ \\ (١ - \text{س})(\text{س}^{٢} + \text{س} + ١) & \text{، س} < ١ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\text{س}^{٣} - ١) & \text{، س} \geq ١ \\ ١ - \text{س}^{٣} & \text{، س} < ١ \end{cases}$$

ق (س) متصل عند س = ١ ، قَ (١) = ٣ ، ق (١) = −٣

$$\text{قَ (١) = صَ} = \begin{cases} \text{٣س}^{٢} & \text{، س} > ١ \\ -\text{٣س}^{٢} & \text{، س} < ١ \\ \text{غير موجودة} & \text{، س} = ١ \end{cases}$$

جـ) $$\text{ص} = \frac{\text{٨ − س + ٣س}^{٢}}{(\text{٢ − ٩س})} \text{ ، صَ} = \frac{(\text{٢ − ٩س})(\text{−١ + ٦س}) - (\text{٨ − س + ٣س}^{٢})(-٩)}{(\text{٢ − ٩س})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{−٢ + ١٢س + ٩س − ٥٤س}^{٢} \text{ + ٧٢ − ٩س + ٢٧س}^{٢}}{(\text{٢ − ٩س})^{٢}} = \frac{\text{−٢٧س}^{٢} \text{ + ١٢س + ٧٠}}{(\text{٢ − ٩س})^{٢}}$$

د) ص = $\frac{|س^٢-٤س+٣|}{س(س-١)}$ ، س ∋ (١ ، ٤]

$= \begin{cases} \frac{-(س-٣)(س-١)}{س(س-١)} = \frac{-(س-٣)}{س} & ، ١ < س \leq ٣ \\ \frac{(س-٣)(س-١)}{س(س-١)} = \frac{س-٣}{س} & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

ق (س) = ص = $\begin{cases} -١ + \frac{٣}{س} & ، ١ < س \leq ٣ \\ ١ - \frac{٣}{س} & ، ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

ص متصل عند س = ٣ ، لأن $\lim_{س \leftarrow ٣^-}$ ق (س) = صفرًا = $\lim_{س \leftarrow ٣^+}$ ق (س) = ق (٣)

صَ = $\begin{cases} \frac{-٣}{س^٢} & ، ١ < س < ٣ \\ \frac{٣}{س^٢} & ، ٣ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ ، ٤ \end{cases}$

قَ$_-$(٣) = $\frac{-٣}{٩} = -\frac{١}{٣}$ ، قَ$_+$(٣) = $\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٩}$

السؤال الثالث

أ) قَ (س) = ٦س – ٥ (س) لَ (س)،

قَ (٣) = ١٨ – ٥ لَ (٣) = ١٨ – (٥ × ٤) = ١٨ – ٢٠ = –٢

ب) ق (س) = $\frac{٢س + ١}{ل (س)}$ ، قَ (س) = $\frac{ل (س) × ٢ - (٢س + ١) لَ (س)}{[ل (س)]^٢}$

قَ (٣) = $\frac{٢ل (٣) - ٧ لَ (٣)}{[ل (٣)]^٢} = \frac{-٤ - ٧ (٤)}{(-٢)^٢} = \frac{-٤ - ٢٨}{٤} = \frac{-٣٢}{٤} = -٨$

جـ) ق (س) = $\frac{٦}{ل (س)}$ ، قَ (س) = $\frac{-٦ لَ (س)}{[ل (س)]^٢}$

قَ (٣) = $\frac{-٦ لَ (٣)}{[ل (٣)]^٢} = \frac{-٦ × ٤}{(-٢)^٢} = \frac{٢٤}{٤} = -٦$

د) ق (س) = $س^٣$ ل (س) ، قَ (س) = $س^٣$ لَ (س) + ل (س) × $٣س^٢$

قَ (٣) = ٢٧ لَ (٣) + ٢٧ ل (٣) = ٢٧ × (٤) + ٢٧ × (–٢) = ٢٧ × (٢) = ٥٤.

السؤال الرابع

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{٢ ل}(\text{س})\ \text{هـ}(\text{س})$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \text{٢}\left[\text{ل}(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س})\ \text{ل}'(\text{س})\right]$$

$$\text{ق}'(\text{–٣}) = \text{٢}\left[\text{ل}(\text{–٣}) \times \text{هـ}'(\text{–٣}) + \text{هـ}(\text{–٣})\ \text{ل}'(\text{–٣})\right]$$

$$= \text{٢}\left[(\text{١٠} \times \text{٢}) + (\text{–٣} \times \text{–١})\right]$$

$$= \text{٢}\left[\text{٢٠} + \text{٣}\right] = \text{٢} \times \text{٢٣} = \text{٤٦}$$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{ل}(\text{س})}{\text{٤} + \text{هـ}(\text{س})}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{[\text{٤} + \text{هـ}(\text{س})]\ \text{ل}'(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})\ \text{هـ}'(\text{س})}{[\text{٤} + \text{هـ}(\text{س})]^{\text{٢}}}$

$$\text{ق}'(\text{–٣}) = \frac{\left[(\text{٤} + \text{هـ}(\text{–٣}))\ \text{ل}'(\text{–٣}) - \text{ل}(\text{–٣})\ \text{هـ}'(\text{–٣})\right]}{[\text{٤} + \text{هـ}(\text{–٣})]^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{(\text{٤} + (\text{–٣})) \times \text{–١} - (\text{١٠} \times \text{٢})}{[\text{٤} + (\text{–٣})]^{\text{٢}}} = \frac{\text{–١} - \text{٢٠}}{\text{١}} = \text{–٢١}$$

السؤال الخامس

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{٣}}{\text{س}} - [\text{٢س}]$ ، $\text{س} = \text{١,٢}$

$[\text{٢س}] = \text{٢}$ ، $\text{١} \le \text{س} < \text{١,٥}$

$\therefore\ \text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{٣}}{\text{س}} - \text{٢} \Leftarrow \text{ق}'(\text{س}) = \dfrac{\text{–٣}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، $\text{ق}'(\text{١,٢}) = \dfrac{\text{–٣}}{(\text{١,٢})^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{–٣}}{\text{١,٤٤}} = \dfrac{\text{–٣٠٠}}{\text{١٤٤}}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{\text{١} - \text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢}}$ ، $\text{س} = \text{٣}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢})(\text{–٣}) - (\text{١} - \text{٣س})(\text{٢س})}{(\text{س}^{\text{٢}} - \text{٢})^{\text{٢}}}$$

$$\text{ق}'(\text{٣}) = \frac{(\text{٧})(\text{–٣}) - (\text{–٨})(\text{٦})}{(\text{٩} - \text{٢})^{\text{٢}}} = \frac{\text{–٢١} + \text{٤٨}}{\text{٤٩}} = \frac{\text{٢٧}}{\text{٤٩}}$$

جـ) عندما $\text{س} \leftarrow \text{–٢} \Leftarrow \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} - \text{١}$

$\therefore\ \text{ق}(\text{س}) = \text{٢س} \Leftarrow \text{ق}'(\text{–٢}) = \text{–٤}$

السؤال السادس

$\frac{د}{دس}$ [ل (س) م (س) هـ (س)]

= $\frac{د}{دس}$ [(ل (س))(م (س) هـ (س))] **بتطبيق القاعدة**

= ل (س) [م (س) هـَ (س) + هـ (س) مَ (س)] + [م (س) هـ (س)] × لَ (س)

= ل (س) م (س) هـَ (س) + ل (س) هـ (س) مَ (س) + م (س) هـ (س) لَ (س) **وهو المطلوب**

السؤال السابع

إذا كان م (س) = ل (س) = هـ (س)

الحل

$(\text{ل (س)})^{٣}$ = ل (س) × ل (س) × ل (س)

باستخدام القاعدة السابقة ينتج:

$\frac{د}{دس}$ $(\text{ل (س)})^{٣}$ = لَ (س) [ل (س) × ل (س)] + لَ (س) [ل (س) × ل (س)] + لَ (س) [ل (س) × ل (س)]

= ٣ لَ (س) × $[\text{ل (س)}]^{٢}$

السؤال الثامن

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} ٣س^{٢} & ،\ س \geq ١ \\ ٢س^{٣} + ١ & ،\ س > ١ \end{cases}$$

الحل

$\lim_{س \to ١^{+}}$ ق (س) = ٣ ، $\lim_{س \to ١^{-}}$ ق (س) = ٣ ، ق (١) = ٣

اذن ق (س) متصل عند س = ١

$$\text{قَ (س)} = \begin{cases} ٦س & ،\ س > ١ \\ ٦س^{٢} & ،\ س < ١ \end{cases}$$

$قَ_{+}(١) = ٦$ ، $قَ_{-}(١) = ٦$

$$\therefore \text{ق (س)} = \begin{cases} ٦س & ،\ س \geq ١ \\ ٦س^{٢} & ،\ س < ١ \end{cases}$$

السؤال التاسع

ق (س) = (س^٢ + ٣س) | س | ، جد قَ (س)

ق (س) = { س (س^٢ + ٣س) ، س ≥ ٠ ؛ – س^٢ (س^٢ + ٣س) ، س < ٠ }

ق (س) = { س^٣ + ٣س^٢ ، س ≥ ٠ ؛ – س^٣ – ٣س^٢ ، س < ٠ }

ق (س) متصل عند س = ٠ ، لأن

نهـا (س ← ٠^+) ق (س) = نهـا (س ← ٠^+) ق (س) = ق (٠) = ٠

قَ (س) = { ٣س^٢ + ٦س ، س > ٠ ؛ – ٣س^٢ – ٦س ، س < ٠ }

قَ₊ (٠) = صفرًا ، قَ₋ = صفرًا ، أي أن قَ (٠) = صفرًا

اذن قَ (س) = { ٣س^٢ + ٦س ، س ≥ ٠ ؛ – ٣س^٢ – ٦س ، س < ٠ }

السؤال العاشر

ق (س) = { ٣س^٢ ، س ≤ ١ ؛ أ س + ب ، س > ١ }

قابلاً للاشتقاق عند س = ١ ، جد كلاً من أ ، ب.

الحل

ق قابل للاشتقاق ⇐ ق متصل عند س = ١

نهـا (س ← ١^+) ق (س) = نهـا (س ← ١^-) ق (س) ⇐ أ + ب = ٣ .... (١)

كذلك قَ₊ (١) = قَ₋ (١)

أي ٦ س | س = ١ = أ ومنها أ = ٦

∴ ب = ٣ – أ = ٣ – ٦ = –٣ ب = ٣

السؤال الأول

أ) $\text{صَ} = ٢١\,\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١$ ، $\text{صً} = ٤٢\text{س} - ٥$

ب) $\text{صَ} = \dfrac{\text{س}\,(١) - (\text{س} + ١)}{\text{س}^{٢}} = \dfrac{\text{س} - \text{س} - ١}{\text{س}^{٢}} = \dfrac{-١}{\text{س}^{٢}}$

$\text{صً} = \dfrac{-١\,(-٢\text{س})}{(\text{س}^{٢})^{٢}} = \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٤}} = \dfrac{٢}{\text{س}^{٣}} = ٢\text{س}^{-٣}$

جـ) $\text{ص} = (\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\,|\text{س}|$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص} = \begin{cases} \text{س}\,(\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}\,(\text{س}^{٢} + ٣\text{س}) & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \text{ص} = \begin{cases} (\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢}) & ، \text{س} \geq ٠ \\ -\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$$ ، ص متصل عند س = ٠

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{صَ} = \begin{cases} ٣\text{س}^{٢} + ٦\text{س} & ، \text{س} > ٠ \\ -٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} & ، \text{س} < ٠ \\ \text{صفر} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$$

صَ متصل عند س = ٠ لأن $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^{+}} \text{صَ} = \text{صفر} = \lim\limits_{\text{س} \to ٠^{-}} \text{صَ} = \text{صَ}\,(٠)$

$$\text{صً} = \begin{cases} ٦\text{س} + ٦ & ، \text{س} > ٠ \\ -٦\text{س} - ٦ & ، \text{س} < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ، \text{س} = ٠ \end{cases}$$

صً (٠) غير موجودة ، $\text{صً}_{-}(٠) = -٦$ ، $\text{صً}_{+}(٠) = ٦$

السؤال الثاني

$\text{ق}(\text{س}) = (٣\,\text{س}^{٢} + ٢)\,(\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١)$ ، أثبت أن $\text{قَ}(١) \times \text{قً}(١) = ٢١٠$

$\text{قَ}(\text{س}) = (٣\,\text{س}^{٢} + ٢)\,(٣\text{س}^{٢} - ٢) + (\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١)\,(٦\text{س})$

$\text{قَ}(١) = (٥ \times ١) + \text{صفر} = ٥$

$\text{قً}(\text{س}) = (٣\,\text{س}^{٢} + ٢)\,(٦\text{س}) + (٣\text{س}^{٢} - ٢)\,(٦\text{س}) + (\text{س}^{٣} - ٢\text{س} + ١)\,(٦) + ٦\text{س}\,(٣\text{س}^{٢} - ٢)$

$\text{قً}(١) = (٥ \times ٦) + (١ \times ٦) + ٠ + ٦ = ٣٠ + ١٢ = ٤٢$ وعليه فإن $\text{قَ}(١) \times \text{قً}(١) = ٥ \times ٤٢ = ٢١٠$.

السؤال الثالث

ق (س) $\frac{٢}{\text{س}}$ ، قَ (س) = $\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$ $\Leftarrow$ قَ (١) = −٢

قً (س) = $\frac{-(-٢)(٢\text{س})}{\text{س}^{٤}}$ = $\frac{٤}{\text{س}^{٣}}$ $\Leftarrow$ قً (٢) $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

− ٢ = − ٤ × $\frac{١}{٢}$ أي أن قَ (١) = −٤ قً (٢)

السؤال الرابع

أ) ص = س^{٥} + س$^{-٥}$ $\Leftarrow$ صَ = ٥ س^{٤} − ٥س$^{-٦}$

صً = ٢٠ س^{٣} + ٣٠ س$^{-٧}$ ، صً = ٦٠ س^{٢} − ٢١٠ س$^{-٨}$

ب) ص = أ س^{٣} + ب س + جـ ، صَ = ٣أ س^{٢} + ب ، صً = ٦أ س ، صً = ٦أ.

السؤال الخامس

أ) ق (س) = ٣ س^{٢} − ٢ ، قَ (س) = ٦س ، قً (س) = ٦

قً (س) = صفرًا $\Leftarrow$ قً (٢) = صفرًا

ب) ق (س) = ٦س^{٥} − ٤س^{٢} ، قَ (س) = ٣٠س^{٤} − ٨س

قً (س) = ١٢٠ س^{٣} − ٨ ، قً (س) = ٣٦٠س^{٢} ، قً (١) = ٣٦٠

جـ) ق (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٣}}$ ، ق (س) = س$^{-٣}$

قَ (س) = −٣س$^{-٤}$ ، قً (س) = ١٢ س$^{-٥}$ ، قً (س) = −٦٠ س$^{-٦}$

ق$^{(٤)}$ (س) = ٣٦٠ س$^{-٧}$ = $\frac{٣٦٠}{\text{س}^{٧}}$ ، ق$^{(٤)}$ (١) = ٣٦٠.

السؤال السادس

ق (س) = س ل (س)

قَ (س) = س لَ (س) + ل (س)

قً (س) = س لً (س) + لَ (س) + لَ (س) = س لً (س) + ٢لَ (س)

قً (س) = س لً (س) + لً (س) + ٢ لً (س)

قً (س) = س لً (س) + ٣لً (س)

السؤال الأول

أ) ص = ٢جتا س − ٣ جاس ، صَ = −٢جا س − ٣ جتا س

ب) ص = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ ، صَ = $\frac{\text{س جتا س} - \text{جا س}}{\text{س}^{٢}}$

جـ) ص = قاس − $\sqrt{٢}$ س ، صَ = قاس ظاس − $\sqrt{٢}$

د) ص = س^{٢} جتا س ، صَ = س^{٢} (−جاس) + ٢ س جتاس = − س^{٢} جا س + ٢س جتاس

هـ) ص = جا^{٢} س + جتا^{٢} س ، ص = ١ ⇐ صَ = صفرًا

و) ص = س − ٤ قتاس + ٢ ظتا س ، صَ = ١ + ٤ قتا س ظتا س −٢ قتا^{٢} س

السؤال الثاني

أ) ق (س) = جتا س جاس ، س = $\frac{\pi}{٤}$

قَ (س) جتا س × جتاس − جا^{٢} س = جتا^{٢} س − جا^{٢} س

قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)^{٢} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢}$ = صفرًا

ب) ق (س) = جا (− س) ، س = $\frac{\pi}{٣}$

ق (س) = −جاس ⇐ قَ (س) = − جتا س، قَ ($\frac{\pi}{٣}$) = $-\frac{١}{٢}$

جـ) ق (س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{١ + جتا س}}$ ، س = $\frac{\pi}{٢}$

قَ (س) = $\frac{\text{(١ + جتا س) (جتا س) + جا}^{٢}\text{ س}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}} = \frac{\text{جتا س + جتا}^{٢}\text{س + جا}^{٢}\text{ س}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}}$

= $\frac{\text{جتا س + ١}}{\text{(١ + جتا س)}^{٢}} = \frac{١}{\text{١ + جتاس}}$ ⇐ قَ ($\frac{\pi}{٢}$) = $\frac{١}{١ + ٠}$ = ١

د) ق (س) = س جتا س ، قَ (س) = − س جاس + جتا س

قَ (π) = − π × صفر + (−١) = −١.

السؤال الثالث

ص = جتا س ، ص = جا س حلول للمعادلة ص + صً = صفرًا

ص = جتا س ⇐ صَ = −جا س ، صً = − جتا س

ص + صً = جتا س + (−جتا س) = صفرًا **وهو المطلوب**

كذلك ص = جا س ⇐ صَ = جتا س ، صً = − جا س

∴ ص + صً = جا س + (− جا س) = صفرًا **وهو المطلوب**

السؤال الرابع

أ) ق (س) = س + جتا س ، قَ (س) = ١ − جا س ، قَ (س) = ٠

⇐ ١ − جا س = صفر ⇐ جا س = ١

س ∈ [−٢π ، ٢ π] ، س = $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{-٣\pi}{٢}$

ب) ق (س) = قا س

قَ (س) = قا س ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{١}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^٢ \text{ س}}$

قَ (س) = صفر ⇐ جا س = صفرًا

س = ٠ ، π ، − π

السؤال الخامس

ص = أ جا س + ب جتا س ، أ ، ب ثوابت ، اثبت (صَ)^٢ + ص^٢ = أ^٢ + ب^٢

صَ = أ جتا س − ب جا س

(صَ)^٢ + ص^٢ = (أ جتا س − ب جا س)^٢ + (أ جا س + ب جتا س)^٢

= أ^٢ جتا^٢ س − ٢ أ ب جا س جتا س + ب^٢ جا^٢ س + أ^{٢}جا^{٢}س + ٢ أ ب جا س جتا س + ب^٢ جتا^٢ س

= أ^٢ (جتا^٢ س + جا^٢ س) + ب^٢ (جا^٢ س + جتا^٢ س) = أ^٢ + ب^٢ (لأن جا^٢ س + جتا^٢ س = ١)

السؤال السادس

أ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = − قتا س ظتا س

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}$ = − [قتا س (− قتا^٢ س) + ظتا س (− قتا س ظتا س)] = قتا^٣ س + قتا س ظتا^٢ س

ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = س جتا س + جا س + ٣ جا س = س جتا س + ٤ جا س

$\frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢}$ = س (− جا س) + جتا س + ٤ جتا س = −س جا س + ٥ جتا س

السؤال الأول

أ) صَ = ١٥(س^{٣} + ٢س + ١)^{١٤} (٣س^{٢} + ٢)

ب) صَ = −٦(٨س − ٧)$^{-٧}$ (٨) = −٤٨ (٨س − ٧)$^{-٧}$

جـ) ص = $\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}\right)^{٤}$

صَ = ٤ $\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}\right)^{٣}\left(\frac{(\text{س}^{٢}-١)-\text{س}(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢}-١)^{٢}}\right)$ = ٤ $\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢}-١}\right)^{٣}\left(\frac{-١-\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}-١)^{٢}}\right)$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا (س^{٢} − س) × (٢س − ١)

هـ) صَ = $\frac{(\text{س}^{٣}+١)(-\text{قتا ٣س ظتا ٣س})(٣)-(\text{قتا ٣س})(٣\text{س}^{٢})}{(\text{س}^{٣}+١)^{٢}}$ = $\frac{-٣(\text{س}^{٣}+١)\text{ قتا ٣س ظتا ٣س}-٣\text{س}^{٢}\text{ قتا ٣س}}{(\text{س}^{٣}+١)^{٢}}$

السؤال الثاني

ق (س) = س^{٢} + ٣س ، هـ (س) = س^{٣} − ٤، جد (ق $\circ$ هـ)َ (٢)

(ق $\circ$ هـ)َ (س) = قَ (هـ (س)) . هـَ (س) = قَ (س^{٣} − ٤) × ٣س^{٢}

قَ (س) = ٢س + ٣

قَ (س^{٣} − ٤) = ٢ (س^{٣} − ٤) + ٣ = ٢س^{٣} − ٥

∴ (ق $\circ$ هـ)َ (س) = (٢س^{٣} − ٥) (٣س^{٢}) $\Big|_{\text{س}=٢}$ = ١١ × ١٢ = ١٣٢

السؤال الثالث

ق (١٠) = −٢ ، قَ (١٠) = ٢ ، هـَ (−٢) = $\frac{١}{٢}$

(هـ $\circ$ ق)َ (١٠) = هـَ (ق (١٠)) . قَ (١٠) = هـَ (−٢) × قَ (١٠) = $\frac{١}{٢}$ × ٢ = ١

السؤال الرابع

ص = جا$^{\text{ن}}$ (هـ (س)) ، ن عدد صحيح

أثبت أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ن هـَ (س) جا$^{\text{ن}-١}$ (هـ (س)) جتا (هـ (س))

ص = جا$^{\text{ن}}$ (هـ (س)) = [جا هـ (س)]$^{\text{ن}}$ افرض ع = جا (هـ (س))

ص = ع$^{\text{ن}}$ $\Leftarrow$ $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = جتا (هـ (س)) × هـَ (س) ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ = ن ع$^{\text{ن}-١}$

إذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د ع}}$ × $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$ = ن ع$^{\text{ن}-١}$ × جتا (هـ (س)) × هـَ (س) = ن [جا (هـ (س))]$^{\text{ن}-١}$ جتا هـ (س) هـَ (س)

السؤال الخامس

ل (س) = ق (هـ (س)) ، هـ (٤) = ٤، لَ (٤) = ٢ ، قَ (٤) = −٥ جد هـَ (٤)

الحل

لَ (س) = قَ (هـ (س)) . هـَ (س)

لَ(٤) = قَ(هـ(٤)) . هـَ(٤)

٢ = قَ(٤) . هـَ(٤) ⟸ ٢ = −٥ × هـَ(٤) ⟸ هـَ(٤) = $-\frac{٢}{٥}$

السؤال السادس

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

أ) ص = ظا ع ، ع = ٤ س^{٣} + س

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ = قا^{٢}ع × (١٢س^{٢} + ١) = قا^{٢} (٤س^{٣} + س) × (١٢ س^{٢} + ١)

ب) ص = م^{٢} + ٣ م ، م = س^{٣} − ٤

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دم} \times \frac{دم}{دس}$ = (٢م + ٣) (٣س^{٢}) = [٢(س^{٣} − ٤) + ٣] × ٣س^{٢}

= [٢س^{٣} − ٨ + ٣] ٣س^{٢} = (٢س^{٣} − ٥) (٣س^{٢}) = ٦س^{٥} − ١٥ س^{٢}

السؤال السابع

ص = جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) اثبت أن ص + صً = ٠

صَ = −جا (س + $\frac{\pi}{٢}$) ، صً = − جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$)

∴ ص + صً = جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) − جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) = صفرًا وهو المطلوب.

السؤال الثامن

ص = ظا س + $\frac{١}{٣}$ ظا^{٣}س برهن $\frac{دص}{دس}$ = قا^{٤}س

$\frac{دص}{دس}$ = قا^{٢} س + ظا^{٢}س × قا^{٢}س = قا^{٢} س (١ + ظا^{٢} س) = قا^{٢} س × قا^{٢}س = قا^{٤}س (ملاحظة ١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س)

السؤال التاسع

أ) ص = جتا^{٢} ٣ س ، س = $\frac{\pi}{٦}$

$\frac{دص}{دس}$ = − ٢ × جتا ٣س × (−جا ٣س) × ٣ = −٦ جتا ٣س جا ٣س

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٦}}$ = −٦ جتا $\frac{\pi}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٢}$ = −٦ × صفر × ١ = صفرًا

ب) ص = (س − $\frac{١}{س}$)^{٣} ، س = ٢

$\frac{دص}{دس}$ = ٣ (س − $\frac{١}{س}$)^{٢} (١ + $\frac{١}{س^{٢}}$)

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = ٣ (٢ − $\frac{١}{٢}$)^{٢} (١ + $\frac{١}{٤}$) = ٣ × $\frac{٩}{٤}$ × $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{١٣٥}{١٦}$

جـ) ص = س هـ (س)، س = ٩ علماً بأن هـَ (٩) = –٥، هـ (٩) = –٣

صَ = س هـَ (س) + هـ (س)

$\text{صَ}\Big|_{\text{س}=٩}$ = ٩ هـَ (٩) + هـ (٩) = ٩ (–٥) + (–٣) = –٤٥ – ٣ = –٤٨

السؤال العاشر

أ) ص = جا (٣ س^٢) ، صَ = ٦س جتا ٣ س^٢

صً = ٦ [س × ٦س × – جا٣ س^٢ + جتا ٣س^٢]

= ٦ [– ٦س^٢ × جا٣س^٢ + جتا ٣س^٢] = –٣٦ س^٢ جا ٣ س^٢ + ٦ جتا ٣ س^٢.

ب) ص = س ظا $\left(\frac{١}{\text{س}}\right)$

صَ = س × – $\frac{١}{\text{س}^٢}$ قا^{٢}س + ظا $\frac{١}{\text{س}}$

صَ = – $\frac{١}{\text{س}}$ قا^{٢}س + ظا $\frac{١}{\text{س}}$

صً = (– $\frac{١}{\text{س}}$ × ٢ قا $\frac{١}{\text{س}}$ قا $\frac{١}{\text{س}}$ ظا $\frac{١}{\text{س}}$ × – $\frac{١}{\text{س}^٢}$) + قا^٢ $\frac{١}{\text{س}}$ × $\frac{١}{\text{س}^٢}$ + قا^٢ $\frac{١}{\text{س}}$ × – $\frac{١}{\text{س}^٢}$

= $\frac{٢}{\text{س}^٣}$ قا^٢ $\frac{١}{\text{س}}$ ظا $\frac{١}{\text{س}}$

جـ) صَ = $\frac{(\text{س}^٣ + ١)\ (–\ \text{قتا ٣س ظتا ٣س}) \times ٣ – (\text{قتا ٣س})\ (٣\text{س}^٢)}{(\text{س}^٣ + ١)^٢}$ ⇐ صً = ... أكمل الحل

د) ق (س) = $\frac{\text{جتا س} – ١}{\text{جتا س} + ١}$

قَ (س) = $\frac{(\text{جتا س} + ١)\ (–\ \text{جا س}) – (\text{جتا س} – ١)\ (–\ \text{جا س})}{(\text{جتا س} + ١)^٢}$ = $\frac{–٢\ \text{جا س}}{(\text{جتا س} + ١)^٢}$

قً (س) = $\frac{(\text{جتا س} + ١)^٢\ (–٢\ \text{جتا س}) – \big(٢\ (\text{جتا س} + ١)\ (–\text{جا س}\big)}{(\text{جتا س} + ١)^٤}$ = $\frac{–٢\ \text{جتا س}\ (\text{جتا س} + ١) – ٤\ \text{جا}^٢\ \text{س}}{(\text{جتا س} + ١)^٣}$

السؤال الحادي عشر

ق (حا٢ س) = قتا ٢ س ⇐

قَ (جا ٢س) × جتا٢س × ٢ = −٢ قتا٢س ظتا٢س

جا٢س = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ٢س = $\frac{\pi}{٦}$ ⇐ س = $\frac{\pi}{١٢}$

∴ قَ ($\frac{١}{٢}$) جتا $\frac{\pi}{٦}$ = − قتا $\frac{\pi}{٦}$ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$

قَ ($\frac{١}{٢}$) × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = −٢ × $\sqrt{٣}$

∴ قَ ($\frac{١}{٢}$) = −٤

السؤال الثاني عشر

ص = ق (س^{٢} + ٢س) ، قَ (٣) = ٥، جد $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١}$

افرض أن هـ (س) = (س^{٢} + ٢)، ص = ق (هـ (س)) ⇐ $\frac{دص}{دس}$ = قَ (هـ (س)) × هـَ (س)

$\frac{دص}{دس}$ = قَ (س^{٢} + ٢س) × (٢س + ٢)

بما أن قَ (٣) = ٥ ⇐ س^{٢} + ٢س = ٣ ⇐ س^{٢} + ٢س − ٣ = ٠ ، (س + ٣) (س − ١) = ٠ ⇐ س = −٣ ، ١ ⇐ $\boxed{س = ١}$

∴ $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=١}$ = قَ (٣) × ٤ = ٥ × ٤ = ٢٠.

السؤال الأول

جد $\frac{دص}{دس}$ لكل مما يأتي:

أ) $٨س^٢ + ص^٢ = ١٠ \Leftarrow ١٦س + ٢ص \frac{دص}{دس} = ٠ \Leftarrow$

$٢ص \frac{دص}{دس} = -١٦س \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{-١٦س}{٢ص} = \frac{-٨س}{ص}$

ب) $ص = \sqrt{س^٣ + ٥س^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^٢ + ١٠س}{٢\sqrt{س^٣ + ٥س^٢}}$

جـ) $س^٣ - ص^٣ = ٦ س ص \Leftarrow ٣س^٢ - ٣ص^٢ \frac{دص}{دس} = ٦س \frac{دص}{دس} + ٦ص$

$\frac{دص}{دس} [-٣ص^٢ - ٦س] = ٦ص - ٣س^٢$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٦ص - ٣س^٢}{-٣ص^٢ - ٦س} = \frac{٢ص - س^٢}{ص^٢ - ٢س}$

د) $حا (س^٢ ص^٢) = س \Leftarrow$

$(جتا س^٢ ص^٢) \times [س^٢ \times ٢ص \frac{دص}{دس} + ص^٢ \times ٢س] = ١$

$٢س^٢ص \frac{دص}{دس} + ٢س ص^٢ = \frac{١}{(جتا س^٢ ص^٢)}$

$٢س^٢ص \frac{دص}{دس} = \frac{١}{جتا س^٢ ص^٢} - \frac{٢س ص^٢}{١} = \frac{١ - ٢س ص^٢ جتا س^٢ ص^٢}{(جتا س^٢ ص^٢)}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١ - ٢ ص^٢س جتا س^٢ ص^٢}{٢ س^٢ ص (جتا س^٢ ص^٢)}$

هـ) $ص^٢ = \frac{س}{س + ١} \Leftarrow ٢ ص \frac{دص}{دس} = \frac{(س + ١) - س}{(س + ١)^٢}$

$٢ص \frac{دص}{دس} = \frac{١}{(س + ١)^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢ص (س + ١)^٢}$

السؤال الثاني

أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٣ س}}{\text{٤ ص}}$ ، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{\text{١٢ص}^{٢} - \text{٩س}^{٢}}{\text{١٦ ص}^{٣}}$

ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{\text{٢ ص}}{\text{س}^{٢}}$

جـ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{جتا ص}}{\text{س جا ص} + ١}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{-\text{٢جا ص جتا ص (س جا ص} + ١) - \text{س جتا}^{٣}\text{ ص}}{(\text{س جا ص} + ١)^{٣}}$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جتا س}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ ص}}{\text{د س}^{٢}} = \text{٢ جتا}^{٢}\text{ س} - ٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{جا س}$

السؤال الثالث

أ) $-\frac{\pi}{٢}$

ب) $\frac{-٣٦}{٢٣}$

جـ) -٣

السؤال الرابع

جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٣$ والتي تحقق المعادلة $\text{صَ} = -٢$

$\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٢\sqrt{\text{ص}}}{٢\sqrt{\text{س}}} = \frac{-\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{س}}} = -٢ \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = ٢\sqrt{\text{س}}$ بالتعويض في المعادلة $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = ٣$

$\sqrt{\text{س}} + ٢\sqrt{\text{س}} = ٣ \Leftarrow ٣\sqrt{\text{س}} = ٣ \Leftarrow \sqrt{\text{س}} = ١$

$\therefore$ $\text{س} = ١ \Leftarrow \sqrt{\text{ص}} = ٢\sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \text{٤س} = ٤$

$\therefore$ النقطة المطلوبة هي (١ ، ٤).

السؤال الخامس

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{٢س} - ٥}$ ، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٣}(\text{٢س} - ٥)^{-\frac{٢}{٣}}(٢) = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(\text{٢س} - ٥)^{٢}}}$.

السؤال السادس

س = جا ص ، اثبت أن صً = ظا ص قا^{٢} ص

$$١ = \text{جتا ص}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{\text{جتا ص}} = \text{قا ص}$$

$$\text{صً} = \text{قاص ظا ص} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{قا ص ظا ص} \times \text{قا ص} = \text{قا}^{٢}\ \text{ص ظا ص}$$ **وهو المطلوب**

السؤال السابع

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ للعلاقة س جا ٢ ص = ص جتا ٢ س عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢})$

$$٢\text{س} \times \text{جتا ٢ ص}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{جا ٢ ص} = \text{ص} \times (-٢\ \text{جا ٢س}) + \text{جتا ٢ س} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢})$

$$\frac{\pi}{٢}\ \text{جتا}\ \pi\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{جا}\ \pi = -٢ \times \frac{\pi}{٢}\ \text{جا}\ \frac{\pi}{٢} + \text{جتا}\ \frac{\pi}{٢} \times \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٢\pi}{-\pi} = ٢.$$

السؤال الثامن

إذا كان ص س = جا س فاثبت أن س صً + ٢صَ + س ص = ٠

$$\text{ص} + \text{س}\ \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} \Leftarrow \text{س صَ} = \text{جتا س} - \text{ص} \Leftarrow \text{س} \times \text{صً} + \text{صَ} = -\ \text{جا س} - \text{صَ}$$

س صً + ٢صَ = – جا س

س صً + ٢صَ = – (س ص)   **من المعادلة الاساسية**

∴ س صً + ٢صَ + س ص = صفرًا.

السؤال التاسع

إذا كان ص = ن^{٣} + ٢ ن ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤\text{ن}$ ، فجد $\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}\right|_{\text{ن}=١}$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤\ \text{ن} ، \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{١}{٤\text{ن}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (٣\text{ن}^{٢} + ٢) \times \frac{١}{٤\ \text{ن}} = \frac{٣\text{ن}^{٢}}{٤\ \text{ن}} + \frac{٢}{٤\ \text{ن}} = \frac{٣}{٤}\ \text{ن} + \frac{١}{٢\ \text{ن}}$$

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = (\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٢\text{ن}^{٢}}) \times \frac{١}{٤\ \text{ن}} = \frac{٣}{١٦\ \text{ن}} - \frac{١}{٨\text{ن}^{٣}}$$

$$\left.\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}\right|_{\text{ن}=١} = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$$

السؤال الأول

إذا كان ق (س) = ظا س ، اثبت أن متوسط التغير للاقتران ق = $\dfrac{\text{قا}^{٢}\text{ ظا هـ}}{\text{هـ }(١-\text{ظا س ظا هـ})}$

إذا تغيرت س من س إلى س + هـ

الحل متوسط التغير = $\dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \dfrac{\text{ظا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ظا س}}{\text{هـ}} = \dfrac{\dfrac{\text{ظا س}+\text{ظا هـ}}{١-\text{ظا س ظا هـ}}-\dfrac{\text{ظا س}}{١}}{\text{هـ}}$

$= \dfrac{\cancel{\text{ظا س}}+\text{ظا هـ}-\cancel{\text{ظا س}}+\text{ظا}^{٢}\text{س ظا هـ}}{\text{هـ }(١-\text{ظا س ظا هـ})} = \dfrac{\text{ظا هـ }[١+\text{ظا}^{٢}\text{س}]}{\text{هـ }[١-\text{ظا س ظا هـ}]} = \dfrac{\text{ظا هـ قا}^{٢}\text{س}}{\text{هـ }[١-\text{ظا س ظا هـ}]}$

السؤال الثاني

ق (س) = جا ٣ س ، جد قَ $\left(\dfrac{\pi}{٣}\right)$ باستخدام تعريف المشتقة .

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ})-\text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا }٣(\text{س}+\text{هـ})-\text{جا }٣\text{ س}}{\text{هـ}}$

أ) (يمكن استخدام المتطابقة جا ع − جا س = ٢ جتا $\dfrac{\text{ع}+\text{س}}{٢}$ جا $\dfrac{\text{ع}-\text{س}}{٢}$)

$\text{قَ}(\text{س})\Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٣}} = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا }٣\left(\frac{\pi}{٣}+\text{هـ}\right)-\text{جا }\cancel{٣}\times\frac{\pi}{\cancel{٣}}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جتا}(\pi+٣\text{هـ})-\text{جا}\pi}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{٢\text{ جتا }\frac{(٣\text{هـ}+٢\pi)}{٢}\text{ جا }\frac{٣\text{هـ}}{٢}}{\text{هـ}}$

$= ٢\text{ جتا }\pi \times \underset{\text{هـ}\to٠}{\text{نها}} \dfrac{\text{جا }\frac{٣\text{ هـ}}{٢}}{\text{هـ}} = -٢\times\dfrac{٣}{٢} = -٣$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}-٢\text{س}+٢ & ، \quad ٠ \le \text{س} \le ١ \\ [\text{س}]+٣\text{س} & ، \quad ١ < \text{س} \le ٣ \end{cases}$ ، ق منفصل عند س = ١ ، ٢

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢}-٢\text{س}+٢ & ، \quad ٠ \le \text{س} < ١ \\ ١+٣\text{س} & ، \quad ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٢+٣\text{س} & ، \quad ٢ \le \text{س} < ٣ \\ ١٢ & ، \quad \text{س} = ٣ \end{cases}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}-٢ & ، \quad ٠ < \text{س} < ١ \\ ٣ & ، \quad ١ < \text{س} < ٢ \\ ٣ & ، \quad ٢ < \text{س} < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad \text{عندما س} = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ \end{cases}$

السؤال الثالث

(أ)

ص = س ظا س اثبت أن ص″ − ٢ص قا^{٢} س = ٢ قا^{٢} س

ص′ = س قا^{٢} س + ظا س

ص″ = س × ٢ قا س قا س ظا س + قا^{٢} س + قا^{٢} س

ص″ = ٢س قا^{٢} س ظا س + ٢ قا^{٢} س ، لكن ص = س ظا س ⟸

ص″ = ٢ ص قا^{٢} س + ٢ قا^{٢} س

∴ ص″ − ٢ ص قا^{٢} س = ٢ قا^{٢} س

(ب) إذا كان جتا ص = س ، | س | < ١ اثبت أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$

− جا ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١ ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-١}{\text{جا ص}}$

$= \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \quad \frac{-١}{\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}}$

السؤال الرابع

ص = ن^{٢} − $\frac{١}{٣}$ ن ، س = $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} − ٢ ن ، جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}\Big|_{\text{ن} = ٦}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} =$ $\qquad$ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ن − ٢

$= \frac{(٢\text{ن} - \frac{١}{٣})}{(\text{ن} - ٢)}$ $\qquad$ $\frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{١}{\text{ن} - ٢}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = \frac{\text{د ص}'}{\text{د س}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{(\text{ن} - ٢)(٢) - (٢\text{ن} - \frac{١}{٣})}{(\text{ن} - ٢)^{٢}} \times \frac{١}{\text{ن} - ٢}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}\Big|_{\text{ن}=٦} = \frac{٨ - (١٢ - \frac{١}{٣})}{١٦ \times ٤} = \frac{٨ - ١٢ + \frac{١}{٣}}{٦٤}$

$= \frac{-٤ + \frac{١}{٣}}{٦٤} = \frac{-٣\frac{٢}{٣}}{٦٤} = -\frac{١١}{٣} \times \frac{١}{٦٤}$

$= -\frac{١١}{١٩٢}$

السؤال الخامس

ص = ق (س) ، ص^{٣} = ق (٢ س^{٢} − س) ، قَ (٦) = ٤ ، ق (٦) = −٤

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\Big|_{\text{س} = ٢}$

الحل

ص^{٣} = ق (٢س^{٢} − س) ، هـ (س) = ٢س^{٢} − س

ص^{٣} = ق (هـ (س)) هـَ (س) = ٤س − ١

٣ص^{٢} $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ (٢س^{٢} − س) × (٤س − ١)

عندما س = ٢ فإن:

ص^{٣} = ق (٦) = −٤

ص = (−٤)$^{\frac{١}{٣}}$

ص^{٢} = (−٤)$^{\frac{٢}{٣}}$

لكن قَ (٦) = ٤ ⇐ ٢س^{٢} − س = ٦ ⇐ ٢س^{٢} − س − ٦ = ٠

(٢س + ٣) (س − ٢) = ٠ ⇐ س = ٢

∴ ٣ (−٤)$^{\frac{٢}{٣}}$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ (٦) × (٤ × ٢ − ١) | س = ٢

٣ × (−٤)$^{\frac{٢}{٣}}$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٤ × ٧

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{٢٨}{٣\sqrt[٣]{١٦}}$ = $\frac{١٤}{٣\sqrt[٣]{٢}}$

السؤال السادس

أ) ق (س) = $\sqrt{\text{س} + ٦}$ هـ (س) ⇐

قَ (س) = $\sqrt{\text{س} + ٦}$ هـَ (س) + هـ (س) × $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س} + ٦}}$

قَ (−٢) = $\sqrt{٤}$ هـَ (−٢) + $\frac{\text{هـ} (−٢)}{٤}$ = ٢ هـَ (−٢) + $\frac{\text{هـ} (−٢)}{٤}$

= (٢ × ٢) + $\frac{١}{٤}$ = ٤ $\frac{١}{٤}$

ب) ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} − \text{س}}{\text{هـ}^{٢} (\text{س})}$ ⇐ قَ (س) = $\frac{\text{هـ}^{٢}(\text{س}) [٢\text{س} − ١] − [\text{س}٢ − \text{س}] × ٢ \text{هـ} (\text{س}) \text{هـَ} (\text{س})}{\text{هـ}^{٤} (\text{س})}$

⇐ قَ (−٢) = $\frac{−٥ − ١٢ \text{هـ} (−٢) \text{هـَ} (−٢)}{\text{هـ}^{٤} (\text{س})}$ = $\frac{−٥ − ٢٤}{١}$ = −٢٩

جـ) ق (س) = هـ (س) − $\frac{\text{هـ (س)}}{\text{س}}$

قَ (س) = هـَ (س) − [$\frac{\text{س هـَ (س) − هـ (س)}}{\text{س}^{٢}}$]

قَ (−٢) = هـَ (−٢) − [$\frac{\text{−٢ هـَ (−٢) − هـ (−٢)}}{٤}$]

= −٢ − [$\frac{\text{−٤ − ١}}{٤}$] = −٢ − [$\frac{\text{−٥}}{٤}$] = −٢ + $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$ ٣

د) ق (س) = ظا (π هـ (س))

قَ (س) = قا^{٢} (π هـ (س)) × π هـَ (س)

قَ (−٢) = قا^{٢} (π هـ (−٢)) × π هـَ (−٢)

قَ (−٢) = (قا^{٢} π) × ٢π = ٢π قا^{٢} π = ٢π × ١ = ٢π

السؤال السابع

ق (ص) = جا هـ (ص) ، هـ (١) = $\frac{\pi}{٣}$ ، هـَ (١) = ٠ ، هـً (١) = ٣

جد قً (١) ، علماً بأن ق ، قَ قابلان للاشتقاق

قَ (ص) = جتا هـ (ص) × هـَ (ص)

قً (ص) = [جتا هـ (ص)] × هـً (ص) + هـَ (ص) [−جا هـ (ص) × هـَ (ص)]

قً (١) = [جتا هـ (١)] × هـً (١) + هـَ (١) [−جا هـ (١) × هـَ (١)]

= ٣ جتا $\frac{\pi}{٣}$ + صفر = ٣ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

السؤال الثامن

ق (س) = س^{٣} + ٢س ، هـ (س) = ٣س^{٢} ، فجد (قَ ٥ هـ)َ (١).

الحل:

أ) (قَ ٥ هـ)َ (١) = قً (هـ (١)) هـَ (١)

ق (س) = س^{٣} + ٢س ⇐ قَ (س) = ٣س^{٢} + ٢

قً (س) = ٦ س ، هـَ (س) = ٦ س ، هـ (١) = ٣ ، هـَ (١) = ٦ ، قً (٣) = ١٨

∴ (قَ ٥ هـ)َ (١) = قً (هـ (١)) × هـَ (١) = قً (٣) × ٦ = ١٨ × ٦ = ١٠٨

ب) (قَ ٥ هـ)ً (١) = [قً (هـ (١)) × هـَ (١)]َ = قً (هـ (١)) × هـً (١) + هـَ (١) × قً (هـ (١)) × هـَ (١)

= قً (٣) × هـً (١) + هـَ (١) × قً (٣) × هـَ (١)

= ١٨ × ٦ + ٦ × ٦ × ٦ = ١٠٨ + ٢١٦ = ٣٢٤

السؤال الأول

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
رمز الإجابة الصحيحة	جـ	أ	جـ	د	د	جـ	أ	د	ب	جـ

السؤال الثاني

ليكن ق (س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٣} + \text{ب س} & ،\ \text{س} < ٢ \\ \text{أ س}^{٢} + ٩\text{ب س} - ١٢ & ،\ \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ جد أ ، ب التي تجعل قَ (٢) موجودة.

الحل

قَ (٢) موجودة ⇐ ق (س) متصل عند س = ٢

٨أ + ٢ب = ٤أ + ١٨ب − ١٢ .... (١)

١٢ = ١٦ب − ٤أ .... (١)

كذلك $\text{قَ}_{+}(٢) = \text{قَ}_{-}(٢)$

$٣\text{أ س}^{٢} + \text{ب} = ٢\text{أ س} + ٩\text{ب} \Big|_{\text{س}=٢}$

١٢أ + ب = ٤أ + ٩ب .... (٢)

٨أ = ٨ب ⇐ أ = ب

بالتعويض في المعادلة .... (١)

١٢ = ١٦ب − ٤ب = ١٢ب ⇐ ب = ١ ، أ = ١

السؤال الثالث

جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في الحالات الآتية:

أ) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} - \frac{\text{س}}{١ - \text{س}} = (\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{\frac{١}{٣}} - \frac{\text{س}}{١ - \text{س}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٣}(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{\frac{-٢}{٣}} (٢\text{س} - ٣) - \frac{(١ - \text{س})(١) - (\text{س}) \times (-١)}{(١ - \text{س})^{٢}}$$

$$= \frac{(٢\text{س} - ٣)}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^{٢} - ٣\text{س})^{٢}}} - \frac{\text{س}}{(١ - \text{س})^{٢}}$$

ب) ص = قا³ (ظا س) + ١ = (قا (ظا س))³ + ١

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\,(\text{قا}(\text{ظا س}))^{٢}\,(\text{قا}(\text{ظا س}))\,(\text{ظا}(\text{ظا س})) \times \text{قا}^{٢}\text{س}$$

= ٣ (قا (ظا س))³ ظا (ظا س) × قا² س.

السؤال الرابع

إذا كان ص = ٣م^{٢} − ٢م + ١ ، م = ٢س + ٣ فجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٠}$.

الحل

أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د م}} \times \frac{\text{د م}}{\text{د س}} = (\text{٦م} - ٢) \times ٢$

لكن س = ٠ ⟸ م = ٣

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = (١٨ - ٢) \times ٢ = ١٦ \times ٢ = ٣٢$

ب) إذا كان ص = $\sqrt{٤ + ٣\ \text{جا س}}$ أثبت أن:

٢ ص صً + ٢ (صَ)^{٢} + ص^{٢} = ٤

صَ = $\frac{٣\ \text{جتا س}}{٢\sqrt{٤ + ٣\ \text{جا س}}} = \frac{٣\ \text{جتا س}}{٢\ \text{ص}}$

٢ص صَ = ٣ جتا س

٢ ص صً + ٢ (صَ)^{٢} = − ٣ جا س

٢ ص صً + ٢ (صَ)^{٢} = −(ص^{٢} − ٤)

٢ ص صً + ٢ (صَ)^{٢} + ص^{٢} = ٤

لكن ص = $\sqrt{٤ + ٣\ \text{جا س}}$

ص^{٢} = ٤ + ٣ جا س

ص^{٢} − ٤ = ٣ جا س

جـ) إذا كان ص = جا (س ص)، فجد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(\frac{\pi}{٢}،\ ١)}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا (س ص) × [س × $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ص]

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = جتا $\frac{\pi}{٢}$ [$\frac{\pi}{٢}\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ + ١]

لكن جتا $\frac{\pi}{٢}$ = صفرًا ، إذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = صفرًا

د) إذا كان ص = ق^{٢} (س^{٣})، فجد قَ (٨) علماً بأن ق (٨) = ١، $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=٢}$ = ١٠٠

الحل

ص = ق^{٢} (س^{٣}) = (ق (س^{٣}))^{٢}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ ((ق (س^{٣})) قَ (س^{٣}) × ٣س^{٢}

١٠٠ = ٦ × ٤ ق (٨) قَ (٨) = ٢٤ × ١ × قَ (٨) ⟸ قَ (٨) = $\frac{١٠٠}{٢٤} = \frac{٢٥}{٦}$.

السؤال الأول

الجواب م = −٢

السؤال الثاني

معادلة المماس ص = ١٢٠ − ١٥

معادلة العمودي ص = $\frac{-١}{١٢}$ س + $\frac{٥٥}{٦}$.

السؤال الثالث

النقطة (−٤ ، ٠) لا تحقق العلاقةَ $\text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢} = -٨$

افرض نقطة التماس ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) ، ولإيجاد ميل المماس :

$٢\text{س} - ٢\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفرًا}$

ومنه $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} \Leftarrow \left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(\text{س}_{١}،\text{ص}_{١})} = \frac{\text{س}_{١}}{\text{ص}_{١}}$

أيضا ميل المماس المار بالنقطتين ($\text{س}_{١}$، $\text{ص}_{١}$) (−٤ ، ٠) هو: $\frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}+٤}$

وبمساواة الميلين $\frac{\text{س}_{١}}{\text{ص}_{١}} = \frac{\text{ص}_{١}}{\text{س}_{١}+٤}$ نجد أن :

$\text{ص}_{١}^{٢} = \text{س}_{١}^{٢} + ٤\text{س}_{١}$

لكن $\text{س}_{١}^{٢} - \text{ص}_{١}^{٢} = -٨ \Leftarrow \text{ص}_{١}^{٢} = \text{س}_{١}^{٢} + ٨$ بالتعويض في (١)

$\text{س}_{١}^{٢} + ٨ = \text{س}_{١}^{٢} + ٤\text{س}_{١} \Leftarrow$ ومنه $\text{س}_{١} = ٢$

$\therefore$ ص = ٤ + ٨ = ١٢ $\Leftarrow$ ص = $\sqrt{١٢}$ ، ص = $\sqrt{١٢}$

$\therefore$ نقط التماس هي (٢ ، ٢$\sqrt{٣}$) (٢ ، −٢$\sqrt{٣}$) .

١) عند النقطةَ (٢ ، ٢$\sqrt{٣}$) ، الميل = $\frac{٢}{٢\sqrt{٣}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

معادلة المماس ص − ٢$\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (س − ٢)

$\therefore$ ص = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ س + $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$

٢) عند النقطة (٢ ، −٢$\sqrt{٣}$) ، الميل = $\frac{٢}{-٢\sqrt{٣}}$

معادلة المماس ص + ٢$\sqrt{٣}$ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ (س − ٢)

$\therefore$ ص = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ س − $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$.

السؤال الرابع

نقطة التماس هي نقطة تقاطع منحنى ق مع المستقيم ص = ٣س – ١

س^{٢} – ٦س + ٧ = ٣س – ١

س^{٢} – ٩س + ٨ = ٠ ⇐ (س – ٨)(س – ١) = ٠

ومنه س = ٨ ، س = ١

∴ المستقيم يقطع منحنى ق عند (٨ ، ٢٣)(١ ، ٢)

قَ (س) = ٢س – ٦

١) عند النقطة (٨ ، ٢٣) ، ميل المماس قَ (٨) = ١٠

معادلة المماس

ص – ٢٣ = ١٠ (س – ٨) ⇐ ص = ١٠س – ٥٧

٢) عند النقطة (١ ، ٢) ، ميل المماس قَ (١) = –٤

معادلة المماس

ص – ٢ = –٤ (س – ١) ⇐ ص = –٤ س + ٦

السؤال الخامس

(ق . ل)َ (٣) = ق (٣) . لَ(٣) + ل (٣) × قَ (٣)

ق (٣) = ٢

ل (٣) = –١

قَ (٣) = ميل المماس لمنحنى ق ويساوي ميل المستقيم ٤س – ٢ص – ٨ = صفرًا

أي أن قَ (٣) = ٢

لَ (٣) = ميل المماس لمنحنى ل

المستقيم ٩ص + ٣س = صفرًا عمودي على المماس لمنحنى ل

ميل العمودي = $\frac{-٣}{٩}$ = $\frac{-١}{٣}$

ميل المماس لمنحنى ل (س) = $\frac{-١}{لَ(٣)}$ = $\frac{١}{٣}$

ومنه لَ (٣) = ٣

∴(ق . ل)َ (٣) = ٢ × ٣ + –١ × ٢ = ٤

السؤال السادس

نقطة التماس هي نقطةَ تقاطع س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ مع المستقيم

س + ص = ١

نجد نقط التقاطع

ص = ١ − س .... تحقق العلاقة

س^{٢} + (١ − س)^{٢} = ٢٥

س^{٢} + ١ − ٢س + س^{٢} = ٢٥

٢ س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠

٢ (س + ٣) (س − ٤) = ٠ ⇐ ومنه س = ٤ ، س = −٣

عندما س = ٤ ، ص = ١ − ٤ = −٣ ⇐ النقطة هي (٤ ، −٣)

عندما س = −٣ ، ص = ١ − ⁻٣ = ٤ ⇐ النقطة هي (−٣ ، ٤)

نجد ميل المماس ⇐ ٢س + ٢ص $\frac{د ص}{د س}$ = صفر ⇐ $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-س}{ص}$

١) عند النقطةَ (٤ ، −٣) ميل المماس $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(٤ ، -٣)}$ = $\frac{٤}{٣}$

معادلة المماس ص + ٣ = $\frac{٤}{٣}$ (س − ٤)

ص = $\frac{٤}{٣}$ س − $\frac{٢٥}{٣}$ ..... وهي معادلةَ المماس الأولى

٢) عند النقطةَ (−٣ ، ٤) ميل المماس $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(-٣ ، ٤)}$ = $\frac{٣}{٤}$.

معادلة المماس ص − ٤ = $\frac{٣}{٤}$ (س + ٣)

ص = $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٢٥}{٤}$ .... وهي معادلة المماس الثانية

السؤال السابع

عند نقطةَ التماس (١ ، ق (١)) ميل المماس = ميل المستقيم ، أي أن:

$\frac{-أ}{٣}$ = ٨ + أ ⇐ $\frac{-٤}{٣}$ أ = ٨ ⇐ أ = −٦

نجد قيمة ق (١) ⇐ −٦ + ٣ص = ١ ⇐ ٣ص = ٧ ⇐ ص = $\frac{٧}{٣}$ ⇐ ق (١) = $\frac{٧}{٣}$

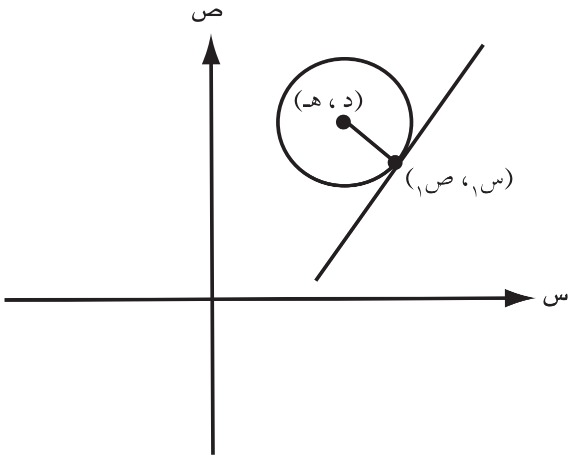
وبالتعويض في ق نجد أن : $\frac{٧}{٣}$ = ٤ + (−٦) + ب ⇐ ب = $\frac{١}{٣}$

السؤال الثامن

معادلة الدائرةَ التي مركزها (د ، هـ) ونصف قطرها ر

$(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{ر}^{٢}$

– افرض نقطة التماس ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$)



لإيجاد ميل المماس نشتق معادلة الدائرة

$٢(\text{س} - \text{د}) + ٢(\text{ص} - \text{هـ}) \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفرًا}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٢(\text{س} - \text{د})}{٢(\text{ص} - \text{هـ})} = \frac{\text{د} - \text{س}}{\text{ص} - \text{هـ}}$

∴ ميل المماس عند النقطةَ ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) هو $\frac{\text{د} - \text{س}_{١}}{\text{ص}_{١} - \text{هـ}}$.

ميل نصف القطر المار بالنقطتين (د ، هـ) ، ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$)

هي $\frac{\text{ص}_{١} - \text{هـ}}{\text{س}_{١} - \text{د}}$

ميل المماس × ميل نصف القطر $= \frac{\text{د} - \text{س}_{١}}{\text{ص}_{١} - \text{هـ}} \times \frac{\text{ص}_{١} - \text{هـ}}{\text{س}_{١} - \text{د}} = \frac{\text{د} - \text{س}_{١}}{\text{س}_{١} - \text{د}} = -١$

∴ المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس.

السؤال التاسع

ق (س) = س – جا ٢س

بما ان العمودي يوازي محور الصادات ⇐ إذن المماس يوازي محور السينات

ومنه ميل المماس = صفرًا

قَ (س) = ٠ ⇐ ١ – ٢جتا ٢س = ٠

∴ جتا ٢س $= \frac{١}{٢}$

$٢\text{س} = \frac{\pi}{٣} \Leftarrow \text{س} = \frac{\pi}{٦}$

$٢\text{س} = ٢\pi - \frac{\pi}{٣} = \frac{٥\pi}{٣} \Leftarrow \text{س} = \frac{٥\pi}{٦}$

∴ قيم س هي

$\frac{\pi}{٦} + ٢\text{ن}\pi$ ، $\frac{٥\pi}{٦} + ٢\text{ن}\pi$

السؤال العاشر

– النقطة $(٠ ، \frac{٩}{٢})$ لا تقع على منحنى ق

افرض (س ، ص) نقطة التماس

ميل المماس = قَ (س) = ٢س

ميل العمود = $\frac{-١}{قَ(س)} = \frac{-١}{٢س}$

العمودي يمر بالنقطتين (س ، ص) ، $(٠ ، \frac{٩}{٢})$ ⇐ ميل العمودي = $\frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س}$

∴ $\frac{-١}{٢س} = \frac{ص - \frac{٩}{٢}}{س}$ ، لكن ص = ق (س) = $س^٢$

∴ $\frac{-١}{٢س} = \frac{س^٢ - \frac{٩}{٢}}{س}$ ومنه $٢س^٣ - ٩س = -س$ ⇐ $٢س^٣ - ٨س = ٠$

$٢س (س^٢ - ٤) = ٠$ ⇐ س = ٠ ، س = ٢ ، س = −٢

∴ توجد ثلاث نقط تماس هي (٠ ، ٠) (٢ ، ٤) (−٢ ، ٤)

١) عند (٠ ، ٠) ميل العمودي = $\frac{-١}{قَ(٠)} = \frac{-١}{٠}$

∴ العمودي يكون عموديًا على محور السينات (موازي لمحور الصادات)

∴ معادلة العمودي س = ٠

٢) عند النقطة (٢ ، ٤) ميل العمودي = $\frac{-١}{قَ(٢)} = \frac{-١}{٤}$

معادلة العمودي ص − ٤ = $\frac{-١}{٤}$ (س − ٢) ومنه ص = $\frac{-١}{٤}$ س + $\frac{٩}{٢}$

٣) عند النقطة (−٢ ، ٤) ميل العمودي = $\frac{-١}{قَ(٢)} = \frac{١}{٤}$

معادلة العمودي ص − ٤ = $\frac{١}{٤}$ (س + ٢) ومنه ص = $\frac{١}{٤}$ س + $\frac{٩}{٢}$

السؤال الحادي عشر

$٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٤٥$ ⇐ $٩ص^٢ = ٤٥ - ٤س^٢$ ⇐ $ص^٢ = ٥ - \frac{٤س^٢}{٩}$ .... (١)

$س^٢ - ٤ص^٢ = ٥$ ⇐ $٤ص^٢ = س^٢ - ٥$ ⇐ $ص^٢ = \frac{س^٢}{٤} - \frac{٥}{٤}$ .... (٢)

بمساواة (١) ، (٢)

$٥ - \frac{٤س^٢}{٩} = \frac{س^٢}{٤} - \frac{٥}{٤}$ ⇐ $\frac{س^٢}{٤} + \frac{٤س^٢}{٩} = ٥ + \frac{٥}{٤}$

اي أن $\frac{٩س^٢ + ١٦س^٢}{٣٦} = \frac{٢٥}{٤}$ ⇐ $\frac{٢٥س^٢}{٦} = \frac{٢٥}{٤}$

$٤س^{٢} = ٣٦ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = ٣$ ، $س = -٣$

في الربع الأول $س = ٣ \Leftarrow ص^{٢} = ٥ - ٤ \Leftarrow ص^{٢} = ١ \Leftarrow ص = ١$ ، $ص = -١$

∴ نقطةَ التقاطع في الربع الاول هي (٣ ، ١)

$م_{١}$ = ميل المماس لمنحنى العلاقة $٤س^{٢} + ٩ص^{٢} = ٤٥$ عند النقطة (٣ ، ١)

$$٨س + ١٨ص \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-٨س}{١٨ص}$$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(٣،١)} = \frac{-٢٤}{١٨} = \frac{-٤}{٣}$$

$م_{٢}$ = ميل المماس عند النقطة (٣ ، ١) لمنحنى العلاقة $س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٥$

$$٢س - ٨ص \cdot \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{٢س}{٨ص}$$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{(٣،١)} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$$

$$م_{١} \times م_{٢} = \frac{-٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} = \frac{-١٢}{١٢} = -١$$

∴ المماسان متعامدان

السؤال الثاني عشر

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{-٦-٢}{٠ - ٢} = \frac{-٨}{-٢} = ٤$$

$قَ(س) = ٢أس + ٢$

افرض ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) نقطة تماس

ميل المماس = $قَ(س_{١}) = ٢أس_{١} + ٢ = ٤ \Leftarrow ٢أس_{١} = ٢ \Leftarrow أ = \frac{١}{س_{١}}$

المستقيم يمس منحنى ق عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$)

معادلة المستقيم

$ص + ٢ = ٤(س - ٠)$

$ص = ٤س - ٢$

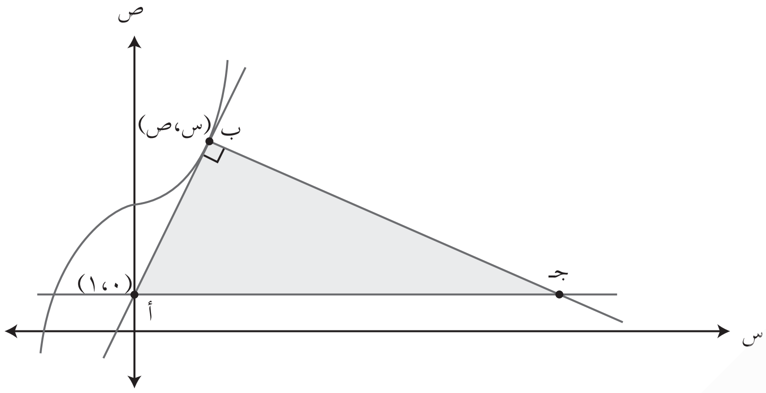
إذن $٤س_{١} - ٢ = أس_{١}^{٢} + ٢س_{١} - ١$ ، ولكن $أ = \frac{١}{س_{١}}$

∴ $٤س_{١} - ٢ = \frac{١}{س_{١}} \times س_{١}^{٢} + ٢س_{١} - ١$

$٤س_{١} - ٢ = ٣س_{١} - ١$

∴ $س_{١} = ١ \Leftarrow أ = \frac{١}{١} = ١$

السؤال الثالث عشر



افرض نقطة التماس (س ، ص)

ميل المماس = $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

أيضاً المماس يمر بالنقطتين (س ، ص) ، (٠ ، ١)

ميل المماس = $\dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س}}$

$\dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س}} = ٣\text{س}^{٢}$ ..... لكن $\text{ص} = \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٣$

$\dfrac{\text{س}^{٣} + ٢}{\text{س}} = ٣\text{س}^{٢} \Leftarrow ٣\text{س}^{٣} = \text{س}^{٣} + ٢$

$٢\text{س}^{٣} - ٢ = ٠ \Leftarrow ٢(\text{س}^{٣} - ١) = ٠ \Leftarrow \text{س} = ١$

∴ نقطة التماس هي (١ ، ق (١)) = (١ ، ٤)

١) معادلة المماس $\Leftarrow$ م = $\text{ق}'(١) = ٣$ ، نقطة التماس (١ ، ٤)

$\text{ص} - ٤ = ٣(\text{س} - ١) \Leftarrow \text{ص} = ٣\text{س} + ١$

٢) معادلة العمودي $\Leftarrow$ $\text{م} = \dfrac{-١}{\text{ق}'(١)} = \dfrac{-١}{٣}$

$\text{ص} - ٤ = \dfrac{-١}{٣}(\text{س} - ١) \Leftarrow \text{ص} = \dfrac{-١}{٣}\text{س} + \dfrac{١٣}{٣}$

لإيجاد نقطةَ تقاطع العمودي مع المستقيم ص = ١

$١ = \dfrac{-١}{٣}\text{س} + \dfrac{١٣}{٣} \Leftarrow \text{س} = ١٠$

∴ نقطةَ التقاطع (١٠ ، ١)

وبذلك تكون إحداثيات رؤوس المثلث معلومةَ

مساحة المثلث = $\dfrac{١}{٢} \times$ أ جـ $\times$ ع

$= \dfrac{١}{٢} \times (١٠ - ٠) \times (٤ - ١)$

$= \dfrac{١}{٢} \times ١٠ \times ٣ = ١٥$ وحدة مساحة

السؤال الأول

أ) ع (٠) = ٢ م / ث

ب) ع = ٠ ⇐ (ن – ٢) (ن – ١) = ٠ ⇐ عندما ن = ١ ، ن = ٢

ت (ن) = ٢ن – ٣ ⇐ ت (١) = –١ م / ث^{٢} ، ت (٢) = ١ م / ث^{٢}

السؤال الثاني

ف (ن) = أن^{٢} + ب ن

ع (ن) = ٢أ + ب ⇐ ع (٠) = ٢ ⇐ ب = ٢

ت (ن) = ٢ أ ⇐ ت (٣) = ٨ ⇐ أ = ٤

∴ ف (ن) = ٤ ن^{٢} + ٢ ن

ف (٣) = ٤ (٩) + ٢ (٣) = ٤٢ م

السؤال الثالث

ف (ن) = جا ن + جتا ن

ع (ن) = جتا ن – جا ن

ت (ن) = – جا ن – جتا ن = – (جا ن + جتا ن)

في حالة السكون اللحظي ع (ن) = ٠ ⇐ جتا ن – جا ن = ٠ ⇐ جتا ن = جا ن

∴ ن = $\frac{\pi}{٤}$ ، ن = $\frac{٥\pi}{٤}$

١) ف ($\frac{\pi}{٤}$) = جا $\frac{\pi}{٤}$ + جتا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ م / ث ، ت ($\frac{\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ م / ث^{٢}

٢) ف ($\frac{٥\pi}{٤}$) = جا $\frac{٥\pi}{٤}$ + جا $\frac{٥\pi}{٤}$ = – $\sqrt{٢}$ م / ث ، ت ($\frac{٥\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$ م / ث^{٢}

السؤال الرابع

$\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}}$ = $\frac{\text{أ}^{٣} - ٠}{\text{أ}}$

فَ (٢) = ٣ ن^{٢} $_{\text{ن}=٢}$ = ١٢

$\frac{\text{أ}^{٣}}{\text{أ}}$ = ١٢ ⇐ أ^{٣} – ١٢أ = ٠ ⇐ أ (أ^{٢} – ١٢) = ٠

أ = ٠ مرفوضةَ ، أ^{٢} = $\sqrt{١٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

السؤال الخامس

٢ ع $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = – ٣ ف^{٢} $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ ، عندما ع ← ٠ ⇐ ١ – ف^{٣} = ٠ ⇐ ف = ١

٢ ع ت = –٣ (١) ع

٢ ع ت + ٣ ع = صفرًا ⇐ ع (٢ت + ٣) = ٠ ⇐ ، ت = $\frac{-٣}{٢}$

السؤال السادس

ف (ن) = $\frac{١}{٤}$ (ن + ٢)^{٤} – ٦ ن^{٢}

ع = فَ (ن) = (ن + ٢)^{٣} – ١٢ = ٨٩ ⇐ بالتجريب ن = ٣

ت = فً (ن) = ٣ (ن + ٢)^{٢} – ١٢ = صفرًا

ت (٣) = ٣ (٥)^{٢} – ١٢ = ٧٥ – ١٢ = ٦٣ م / ث

السؤال السابع

ع = فَ (ن) = ٦٤ – ٣٢ ن

– السرعة الابتدائية ع (٠) = ٦٤ – ٣٢ (٠) = ٦٤ م / ث

يكون الزمن عند ارتفاع ٤٨م:

٤٨ = ٦٤ ن – ١٦ ن^{٢} ⇐ ١٦ (ن^{٢} – ٤ن + ٣) = ٠

١٦ (ن – ٣) (ن – ١) = ٠ ⇐ ن = ١ ، ن = ٣

ع (١) = ٦٤ – ٣٢ (١) = ٣٢ م / ث وهي نصف سرعته الابتدائية (وهو صاعد)

السؤال الثامن

ف (ن) = جا^{٤} ن

ع = فَ (ن) = ٤ جا^{٣} ن جتا ن

ت = فً (ن) = ٤ [جا^{٣}ن (– جا ن) + جتا ن (٣ جا^{٢}ن (جتا ن))]

= ٤ (–جا^{٤} ن + ٣ جا^{٢} ن جتا^{٢} ن)

عندما ينعدم التسارع أي ت (ن) = صفرًا ينتج :

–جا^{٤} ن + ٣جا^{٢} ن جتا^{٢} ن = ٠

جا^{٢} ن (٣ جتا^{٢} ن – جا^{٢} ن) = صفرًا

جا^{٢} ن = صفر ⇐ ن = π

٣ جتا^{٢} ن – جا^{٢} ن = صفرًا ⇐ ٣ جتا^{٢} ن – (١ – جتا^{٢} ن) = ٠ ⇐ ٤ جتا^{٢} ن = ١

جتا^{٢} ن = $\frac{١}{٤}$ ⇐ جتا ن = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ن = $\frac{\pi}{٣}$ ، لاول مرة ($\frac{\pi}{٣}$ > π)

ع ($\frac{\pi}{٣}$) = ٤ جا^{٣} $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٣}$ = ٤ × ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)^{٣} ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$

السؤال التاسع

١) يبدأ الجسم بالعودة عندما ع < ٠

ف (ن) = ٢٧ $\sqrt{ن}$ – ن$^{\frac{٣}{٢}}$

ع = فَ (ن) = $\frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}}$ – $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{ن}$ < صفر ⇐ $\frac{٢٧}{٢\sqrt{ن}}$ < $\frac{٣\sqrt{ن}}{٢}$

٥٤ < ٦ ن ومنه ن > ٩

السؤال العاشر

أ) ع = فَ (ن) = ٦٤ – ٣٢ ن

عند أقصى ارتفاع ⇐ ع = صفر

٦٤ = ٣٢ن ، ومنه ن = ٢

ف (٢) = ٦٤ (٢) – ١٦ (٢)^{٢} = ١٢٨ – ٦٤ = ٦٤ م ...... أقصى ارتفاع

ب) الزمن الذي يعود بعده الجسيم إلى نقطة القذف

زمن الصعود = زمن الهبوط ومنه ٢ × ٢ = ٤ ثوان

جـ) الزمن الذي يعود بعده لسطح الأرض

– ٨٠ = ٦٤ن – ١٦ن^{٢} ⇐ ١٦ن^{٢} – ٦٤ن – ٨٠ = ٠

⇐ ن^{٢} – ٤ن – ٥ = ٠ ⇐ (ن – ٥) (ن + ١) = ٠ ⇐ ن = ٥

∴ بعد (٥) ثوانٍ يعود الجسم لسطح الأرض

د) ع = ٦٤ – ٣٢ ن = ٤٠

⇐ ٣٢ ن = ٢٤ ⇐ ن = $\frac{٢٤}{٣٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ ثانية

هـ) {ن : ت (ن) ≤ صفر ، ع (ن) > ٠}

ع (ن) > صفر ⇐ ٤٦ – ٢٣ ن > ٠ ⇐ ٢٣ ن < ٤٦ ⇐ ن < ٢ ومنه ن ∈ [٠ ، ٢)

السؤال الحادي عشر

افرض أن الجسم الثاني يحتاج إلى ن ثانيةَ للوصول الى الأرض

وبذلك يحتاج الجسم الأول (ن + $\frac{١}{٢}$) ثانية للوصول إلى الأرض

ف$_{١}$ (ن + $\frac{١}{٢}$)^{٢} = ف$_{٢}$ (ن) لأنهما يقطعان المسافة نفسها

١٦ (ن + $\frac{١}{٢}$)^{٢} = ٢٠ ن + ١٦ ن^{٢} ومنه ١٦ ن + ٤ = ٢٠ ن

٤ ن = ٤ ⇐ ن = ١ ثانية يحتاج الجسم الثاني للوصول إلى الأرض

وعليه فإن الجسم الأول يحتاج الى ١،٥ ثانيةَ للوصول إلى الأرض

١) ع$_{١}$ (ن) = ٣٢ ن ⇐ ع$_{١}$ (١،٥) = ٣٢ × ١،٥ = ٤٨ م / ث

ع$_{٢}$ (ن) = ٢٠ + ن ⇐ ع$_{٢}$ (١) = ٢٠ + ٣٢ = ٥٢ م / ث

٢) ارتفاع البناية ف$_{١}$ (١،٥) = ١٦ (١،٥)^{٢} = ١٦ × ٢،٢٥ = ٣٦ م

او ف$_{٢}$ (١) = ٢٠ + ١٦ = ٣٦ م

السؤال الأول

المعطيات : $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٠,٠٠١$ سم/ث

المطلوب : $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}}$ عندما س = ١٠

$\text{ح} = \text{س}^٣ \Leftarrow \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٣\text{س}^٢ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \Leftarrow \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = -٠,٣$ سم^٣/ث .

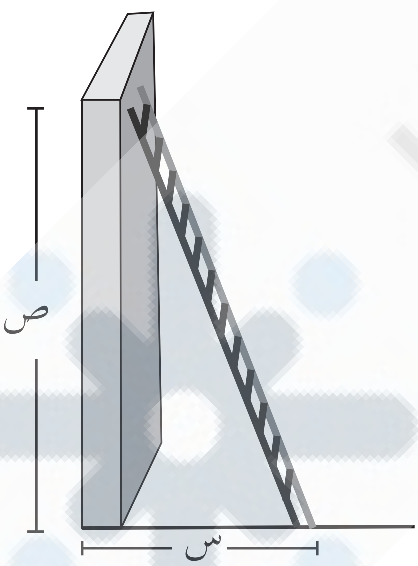
السؤال الثاني

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ٥\text{م}^٣/\text{د}$ ، المطلوب $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$. حيث س ارتفاع الماء في الحوض في أي لحظة.

ح = ١٦٠ س

$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = ١٦٠ . \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \Leftarrow \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٥}{١٦٠} = \frac{١}{٣٢}$ م/د .

السؤال الثالث



أ) $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٩٠$سم/ث ، والمطلوب $\left.\frac{\text{دص}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=١٨٠}$

$\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = (٣٦٠)$

$٢\text{س} . \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص} . \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = $ صفرًا

عندما س = ١٨٠ سم $\Leftarrow (١٨٠)^٢ + \text{ص}^٢ = (٣٦٠)^٢ \Leftarrow$ ص = ٣١٢ سم

$٢ \times ١٨٠ \times ٩٠ + ٢ \times ٣١٢ \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠ \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = -\frac{٣٢٤٠٠}{٦٢٤}$ ٥١,٩ – سم/ث .

ب) $\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \text{ص} \Leftarrow \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢} (\text{س} . \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} + \text{ص} . \frac{\text{د س}}{\text{د ن}})$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = (١٨٠ \times ٥١,٩ + ٣١٢ \times ٩٠) = ٩٣٦٩$ سم^٢/ث .

جـ) $\text{جتا هـ} = \frac{\text{س}}{٣٦٠} \Leftarrow \text{حا هـ} . \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٣٦٠} . \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

عندما س = ١٨٠ سم $\Leftarrow \text{جتا هـ} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{٣}$ ، اذن $\text{حا هـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$\Leftarrow \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{٩٠}{٣٦٠} \Leftarrow \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{-١}{٤} \times \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$ راديان/ث .

السؤال الرابع

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times \text{س} \times \frac{١}{٢}\text{س} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}\text{س} \cdot \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$٠,٠٥ = \frac{١}{٢} \times ١٠ \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} \Leftarrow \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{٠,٠٥}{٥} = ٠,٠١ \text{سم/ث}$

السؤال الخامس

افرض سمك الجليد س ، $\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = -١٠$ سم٣/د .

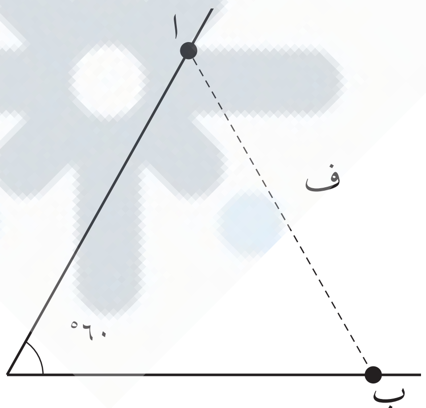
أ) $\text{ح} = \frac{٤\pi}{٣}(\text{س} + ٤)^{٣} \Leftarrow \frac{\text{د ج}}{\text{د ن}} = ٤\pi(\text{س} + ٤)^{٢} \cdot \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \frac{-١٠}{١٤٤\pi^{٢}} \text{سم}^{٣}/\text{د}$

ب) $\text{م} = ٤\pi(\text{س} + ٤)^{٢} \Leftarrow \frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = ٨\pi(\text{س} + ٤) \cdot \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \frac{٤٨\pi \times -١٠}{١٤٤\pi} = -\frac{٤٨٠}{١٤٤} \text{سم}^{٢}/\text{د}.$

السؤال السادس



$\frac{\text{دص}}{\text{د ن}} = -٨٠ \text{كم/س}$ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٥٠ \text{كم/س}$

$\text{ف}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\text{س ص جتا}\frac{\pi}{٣}$

$\text{ف}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - \text{س ص}.$

$٢\text{ف} \cdot \frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = ٢\text{س} \cdot \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{د ن}} - (\text{س} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{د ن}} + \text{ص} \cdot \frac{\text{د س}}{\text{د ن}})$

نجد س ، ص ، ف

ص عند الساعة الحادية عشرة صباحًا = ٢١٠ − ٢ × ٨٠ = ٥٠ كم .

س عند الساعة الحادية عشرة صباحًا = ١٨٠ − ٢ × ٥٠ = ٨٠ كم .

$\text{ف}^{٢} = (٨٠)^{٢} + (٥٠)^{٢} - ٥٠ \times ٨٠ = ٤٩٠٠ \Leftarrow \text{ف} = ٧٠ \text{كم}.$

$٢ \times ٧٠ \times \frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = ٢ \times ٨٠ \times (-٥٠) + ٢ \times ٥٠ \times -٨٠ - (٨٠ \times -٥٠ + ٥٠ \times -٨٠)$

$\frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = \frac{٧١٠٠}{١٤٠} - ٥٠,٧ \text{كم/س}$

السؤال السابع

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٤ وحدات /ث ، $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ بعد ٢ ثانية .

م = $\frac{١}{٢}$ × س × ق ($\frac{١}{٢}$ س) ، ق ($\frac{١}{٢}$ س) = $\frac{١}{٤}$ س^{٢}

م = $\frac{١}{٨}$ س^{٣}

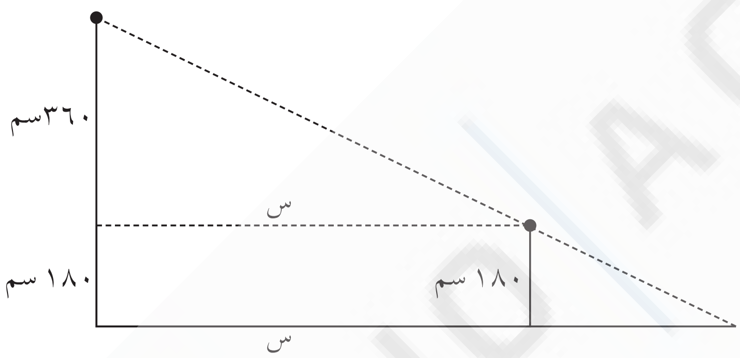
$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٣}{٨}$ س^{٢} $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ ، س بعد ثانيتين = ٤ × ٢ = ٨ وحدات

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٣}{٨}$ × ٦٤ × ٤ = ٩٦ وحدة/ث .

السؤال الثامن

ح = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٤}{٣}$ × ٣ × π × نق^{٢} = ٤ π نق^{٢} = مساحة سطح الكرة .



السؤال التاسع

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٣٠٠ سم/ث

ظا هـ = $\frac{\text{س}}{٣٦٠}$

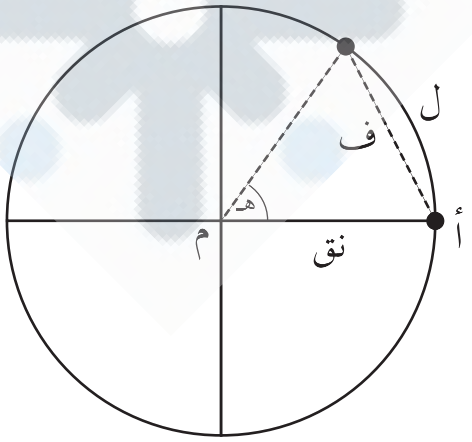
قا^{٢} هـ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٣٦٠}$ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

عندما يكون الرجل على بعد ١٨٠ سم ⇐ ظا هـ = $\frac{١٨٠}{٣٦٠}$ = $\frac{١}{٢}$

ظا^{٢} هـ + ١ = قا^{٢} هـ ومنه $\frac{١}{٤}$ + = قا^{٢} هـ = $\frac{٥}{٤}$

$\frac{٥}{٤}$. $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٣٦٠}$ × ٣٠٠ ⇐ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٤}{٥}$ × $\frac{٣٠}{٣٦}$ = $\frac{٢}{٣}$ راديان/ث .

السؤال العاشر



افرض طول القوس ل .

ف^{٢} = نق^{٢} + نق^{٢} − ٢ × نق × نق × جتا هـ

ف = $\sqrt{\text{٢ نق}^{٢} - \text{٢ نق}^{٢}\ \text{جتا هـ}}$

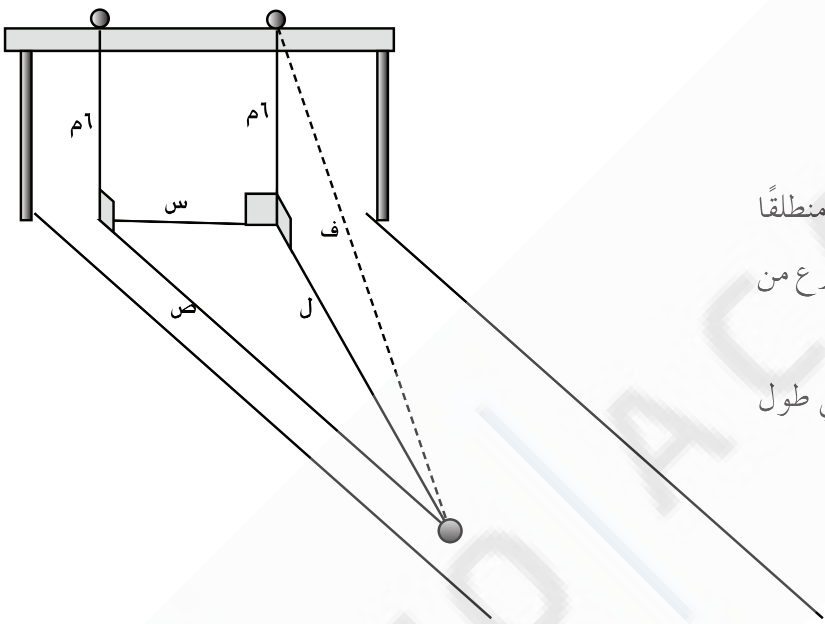
$\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = $\frac{\text{٢ نق}^{٢}\ \text{حا هـ}\ \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{٢ نق}^{٢} - \text{٢ نق}^{٢}\text{جتا هـ}}}$

لكن ل = نق هـ ⇐ $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}$ = نق . $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ ⇐ ٨ = نق . $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ ⇐ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{٨}{\text{نق}}$

عندما هـ $= \frac{\pi}{٣} \Leftarrow$ جا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، جتا هـ $= \frac{١}{٢}$

$$\frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = \frac{٢\ \text{نق}^{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٨}{\text{نق}}}{\sqrt{٢\ \text{نق}\ \ ٢ - ٢ \times \frac{١}{٢}}} = ٤\sqrt{٣}\ \text{سم/ث} .$$

السؤال الحادي عشر



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٣$ كم/ س .

$\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٦٠$ كم/ س .

نفرض أنه بعد (ن) ساعة وصل الرجل إلى النقطة أ على الجسر منطلقًا من (م) قاطعًا (س كم) ووصلت السيارة النقطة (ب) على الشارع من (هـ) قاطعة (ص كم).

إفرض أن المسافةَ بين الرجل والسيارة بعد (ن) ساعةَ = ل وهي طول (أ ب).

المطلوب: إيجاد $\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}}$ بعد دقيقة واحدة (١/٦٠ من الساعة)

المثلث أ ب ق قائم الزاوية في ق .

المثلث ق هـ ب قائم الزاوية في هـ .

ل^{٢} = (ب ق)^{٢} + (أ ق)^{٢} $\Leftarrow$ ل^{٢} = (ب ق)^{٢} + ٣٦

ل^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} + ٣٦ .

ل = $\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٣٦}$.

$$\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{٢\text{س} \cdot \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٣٦}} .$$

لكن بعد دقيقة واحدة س = ٣ × $\frac{١}{٦٠} = \frac{٣}{٦٠} = \frac{١}{٢٠}$ كم .

ص = ٦٠ × $\frac{١}{٦٠} = \frac{٦٠}{٦٠} =$ ١كم .

$$\frac{\text{د ل}}{\text{د ن}} = \frac{٢ \times \frac{١}{٢٠} \times ٣ + ٢ \times ١ \times ٦٠}{٢\sqrt{(\frac{١}{٢٠})^{٢} + ١ + ٣٦}} = \frac{\frac{٣}{٢٠} + ٦٠}{\sqrt{\frac{١}{٤٠٠} + ٣٧}} = \frac{١٢٠٣}{\sqrt{١٤٨٠١}}\ \text{كم/ س} .$$

السؤال الثاني عشر

افرض س المسافة التي قطعها الحصان باتجاه المركز، ف المسافة التي قطعها الظل في المضمار.

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = -٤$ كم/س.

المطلوب. إيجاد $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ عندما س $= \frac{١}{٢}$ نق.

$\frac{١}{٤}$ المحيط = ف + ل

$\frac{١}{٤}$ المحيط = ف + ٢ نق هـ.

صفر $= \frac{\text{دف}}{\text{د ن}} + ٢\,\text{نق}\,\frac{\text{دهـ}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = -٢\,\text{نق}\,\frac{\text{دهـ}}{\text{د ن}}$

لكن ظا هـ $= \frac{\text{نق} - \text{س}}{\text{نق}}$ $\Leftarrow$ ظا هـ $= ١ - \frac{١}{\text{نق}}$ س

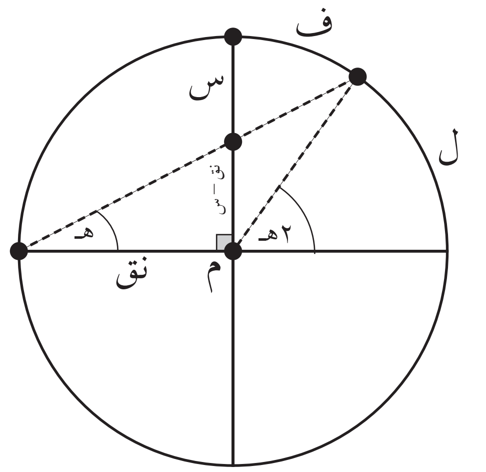
قا^{٢} هـ . $\frac{\text{دهـ}}{\text{د ن}} = \frac{-١}{\text{نق}} . \frac{\text{دس}}{\text{د ن}}$

عندما س $= \frac{١}{٢}$ نق $\Leftarrow$ ظا هـ $= ١ - \frac{١}{\text{نق}} \times \frac{\text{نق}}{٢} = \frac{١}{٢}$

لكن ظا^{٢} هـ + ١ = قا^{٢} هـ $\Leftarrow \frac{١}{٤} + ١ =$ قا^{٢} هـ $\Leftarrow$ قا^{٢} هـ $= \frac{٥}{٤}$.

$\frac{٥}{٤} . \frac{\text{دهـ}}{\text{د ن}} = \frac{-١}{\text{نق}} \times -٤ \Leftarrow \frac{\text{دهـ}}{\text{د ن}} = \frac{-٤}{\text{نق}} \times \frac{٤}{٥} = \frac{-١٦}{٥\text{نق}}$

$\frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = -٢\,\text{نق} \times \frac{-١٦}{٥\text{نق}} = \frac{٣٢}{٥}$ كم/د.



قياس الزاوية المحيطة = $\frac{١}{٢}$ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس نفسه.

السؤال الثالث عشر

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤$ سم / د ، المطلوب $\left.\frac{\text{د م}}{\text{د ن}}\right|_{\text{س}=٢٠}$

م = مساحة المربع − مساحة الدائرة = س^{٢} − $(\frac{١}{٢}\text{س})^{٢}\,\pi$ = س^{٢} − $\frac{١}{٤}$ س$^{٢}\,\pi$

∴ م $= (١ - \frac{\pi}{٤})$ س^{٢}

$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = (١ - \frac{\pi}{٤}) \times ٢\,\text{س} \times \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = (١ - \frac{\pi}{٤}) \times ٢ \times ٢٠ \times ٤$

∴ $\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = (١٦٠ - ٤٠\,\pi)$ سم^{٢}/ د

السؤال الأول

أ) ق متناقص على الفترة (–∞ ، –٣] ، ومتزايد على [–٣ ، ∞) .

ب) ق (س) = { ٢ س – ٣ ، –٢ ≤ س ≤ ٣
{ ٣ ، ٣ < س ≤ ٦

ق (س) متصل لكل س ∈ [–٢، ٦] .

قَ(س) = { ٢ ، –٢ < س < ٣
{ صفر ، ٣ < س < ٦

قَ غير موجودة عندما س = –٢، ٣، ٦

قَ (س) = صفر لكل س ∈ (٣، ٦) .

ق متزايد لكل س ∈ [–٢، ٣] ، ثابت لكل س ∈ [٣، ٦] .

س	٦		٣		–٢
قَ (س)		صفر		+ + + +	
ق (س)		→		↗	

جـ) قَ (س) = ٢ جا س جتا س = جا ٢س .

قَ (س) = ٠ ⟸ جا٢س = ٠ ⟸ ٢س = π ⟸ س = $\frac{\pi}{2}$ أو ٢ س = ٢ π ⟸ س = π أو ٢س = ٣π ⟸ س = $\frac{3\pi}{2}$

قَ (س) غير موجودة عند أطراف الفترة ⟸ س = ٠ ، س = ٢ π

س	٢π		$\frac{3\pi}{2}$		π		$\frac{\pi}{2}$		٠
قَ (س)		– – – – –		+ + +		– – – –		+ + +	
ق (س)		↘		↗		↘		↗	

د) ق (س) = ٣(س–١)^٢

قَ (س) = ٠ ⟸ س–١ = ٠ ⟸ س=١

ق متزايد لكل س ∈ ح .

س	∞		١		–∞
قَ (س)		+ + + +		+ + + + + +	
ق (س)		↗		↗	

هـ) ق متصل لكل س ∈ [–٢، ٢] = مجال ق.

قَ (س) = $\frac{-2س}{2\sqrt{4-س^2}}$

قَ (س) = ٠ ⟸ –٢ س = ٠

ق متزايد على [–٢ ، ٠]

ق متناقص على [٠ ، ٢]

¢S	٢		٠		–٢
(¢S)¥		– – – – – –		+ + + + +	
(¢S)¥		↘		↗	

و) $ق'(س) = \frac{٣}{٥} س^{\frac{-٢}{٥}}$

$= \frac{٣}{٥\sqrt[٥]{س^٢}}$

ق'(س) ≠ صفرًا ، ق'(س) غير موجودة عندما س = ٠

ق'(س) متزايد على ح .

∞–	٠	∞	¢S
+ + + + +		+ + + + +	(¢S)¥
↗		↗	(¢S)¥

ز) ق'(س) = ١+ جتا س .

ق'(س) = ٠ ⟸ جتا س = −١ ومنه س = π ∉ $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$

ق (س) متزايد لكل س ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$.

٠	$\frac{\pi}{٢}$	¢S
+ + + + + + + + + + +		(¢S)¥
↗		(¢S)¥

ح) ق (س) غير متصل عند س = ٢

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س \le ٠ \\ صفر & ، ٠ < س < ٢ \\ \frac{١}{٢\sqrt{س - ٢}} & ، س > ٢ \end{cases}$$

ق'(س) غير موجودة عند س = ٢

ق'(س) = صفرًا عندما ٢ س = صفرًا ومنها س = صفرًا

ق (س) ثابت لكل س ∈ [٠ ، ٢) .

ط) $ق'(س) = \frac{(س^٢ + ٩)(١) - (س - ٣)(٢ س)}{(س^٢ + ٩)^٢}$

$= \frac{س^٢ + ٩ - ٢ س^٢ + ٦ س}{(س^٢ + ٩)^٢} = \frac{-س^٢ + ٦ س + ٩}{(س^٢ + ٩)^٢}$

∞–	$٣(١-\sqrt{٢})$		$٣(١+\sqrt{٢})$	∞	¢S
– – –		+ + + +		– – –	(¢S)¥
↘		↗		↘	(¢S)¥

ق'(س) = ٠ ⟸ $-س^٢ + ٦س + ٩ = ٠$.

⟸ س = ٣ $(١ - \sqrt{٢})$ ، ٣ $(١ + \sqrt{٢})$ استخدام القانون العام

ق متزايد على [٣ $(١ - \sqrt{٢})$ ، ٣ $(١ + \sqrt{٢})$]

متناقص على $(-\infty$ ، ٣ $(١ - \sqrt{٢})]$ ، $[٣(١ + \sqrt{٢})$ ، $\infty)$.

ي)

ق (س) = {
١ – ٢س ، −٢ ≥ س > ١
٤ – ٢س ، ١ ≥ س > ٢
٢س – ٤ ، ٢ ≥ س ≥ ٤

ق غير متصل عند س = ١

قَ (س) = {
−٢ ، −٢ > س > ١
−٢ ، ١ > س > ٢
٢ ، ٢ > س > ٤

قَ (س) غير موجودة عند س = −٢ ، ١ ، ٢ ، ٤

قَ (س) ≠ صفر

قَ (س) < صفر ، لكل س ∋ (−٢ ، ١) ، (١ ، ٢)

∴ ق (س) متناقص على [−٢ ، ١) ، [١ ، ٢)

قَ (س) > ٠ ، لكل س ∋ (٢ ، ٤)

∴ ق (س) متزايد على الفترة [٢ ، ٤]

س	٤ ... ٢	٢ ... ١	١ ... −٢
قَ (س)	+ + +	− − − −	− − − − − − −
ق (س)	↗	↘	↘

السؤال الثاني

ق متزايد في الفترة [−٢ ،٢] ومتناقص في الفترة (− ∞ ،−٢] ، [٢، ∞).

السؤال الثالث

إفرض ل (س) = ق (س) – هـ (س).

لَ (س) = قَ (س) – هـَ (س) = صفر ، س ∋ ح .

ل (س) = ثابت .

ق (س) – هـ (س) = ثابت .

السؤال الرابع

ق (س) متزايد في [أ،ب] ⇐ قَ (س) > صفر لكل س ∋ (أ،ب) .

هـ (س) متزايد في [أ،ب] ⇐ هـَ (س) > صفر لكل ∋ (أ ،ب) .

ل (س) = ق (س) + هـ (س) .

لَ (س) = قَ (س) + هـَ(س) ⇐ موجب + موجب = موجب في (أ،ب) .

ل (س) متزايد في [أ،ب] .

السؤال الأول

أ) قَ(س) = ٢ س – ٦

قَ(س) = ٠ ⇐ ٢س–٦ = ٠ ⇐ س = ٣ ∉ مجال ق

قَ(س) غير موجودة عند س = –٣، ١ (أطراف الفترة)

– للاقتران قيم عظمى مطلقة عند س = –٣ وهي ق (–٣) = ٣٢

– للاقتران قيم صغرى مطلقة عند س = ١ وهي ق (١) = صفرًا.

س	١	–٣
قَ(س)	– – – – – – – – – – – – – – –	
ق(س)	↘	

ب) قَ(س) = ١٢ – ٣س^٢

قَ(س) = صفر ⇐ ١٢ – ٣س^٢ = ٠ ⇐ س = ٢،–٢

قَ(س) غير موجودة عند س = ٣، –٣ (أطراف الفترة) .

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٢ وهي ق (٢) = ١٦ وهي مطلقة .

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = –٢ وهي ق (–٢) = –١٦ وهي مطلقة .

س	٣	٢	–٢	–٣
قَ(س)	– – –	+ + +	– – – – – –	
ق(س)	↘	↗	↘	

جـ) للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = –٢ وهي ق (–٢) = –٩ .

د) ق (س) غير متصل عند س = ٣ (غير معرف)

قَ(س) = { ٢س ، –٢ < س < ٣
{ –٢ ، ٣ < س < ٧

قَ(س) = ٠ ⇐ ٢ س ⇐ س = ٠

قَ(س) غير موجودة عند س = –٢، ٣، ٧

للاقتران قيمة عظمى عند س = –٢ هي ق (–٢) = ٩ وهي مطلقةَ .

للاقتران قيمة صغرى عند س = ٠ هي ق (٠) = ٥

للاقتران قيمة صغرى عند س = ٧ هي ق (٧) = –٤ وهي مطلقة .

س	٧	٣	صفر	–٢
قَ(س)	– – –	+ + +	– – – – – –	
ق(س)	↘	↗	↘	

هـ) ق (س) = { ٢س^٢ – س^٣ ، س ≥ ٢
{ س^٣ – ٢س^٢ ، س > ٢

قَ(س) = { ٤ س – ٣ س^٢ ، س < ٢
{ ٣ س^٢ – ٤ س ، س > ٢

قَ(س) غير موجودة عند س = ٢

قَ(س) = صفر عندما ٤س – ٣س^٢ = ٠ ⇐ س (٤ – ٣ س) = ٠

س = ٠ ، س = $\frac{٤}{٣}$

للاقتران قيم صغرى محلية عند س = ٠ وهي ق (٠) = ٠ وهي مطلقة .

للاقتران قيم صغرى محلية عند س = ٢ وهي ق (٢) = ٠ وهي مطلقة .

للاقتران قيم عظمى محلية عند س = $\frac{٤}{٣}$ وهي ق ($\frac{٤}{٣}$) = $\frac{٣٢}{٢٧}$.

و) قَ(س) = ٣س^{٢}–س^{٣} ، س ∈ (–١، ٤)

قَ(س) = صفر ⇐ س^{٢} (٣ – س) = ٠ ⇐ س = ٠ ، س = ٣

قَ(س) غير موجودة عندما س = –١، ٤ (اطراف الفترة).

س	٤		٣		صفر		ـ١
قَ(س)		− − −		+ + +		+ + +	
ق(س)		↘		↗		↗	

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = –١ وهي ق (–١) = $\frac{-٥}{٤}$

للاقتران قيمة عظمى محلية مطلقة عند س = ٣ وهي ق (٣) = $\frac{٢٧}{٤}$

ز) قَ(س) = $\frac{\text{جتا س}}{٢\sqrt{\text{جاس}}}$.

قَ(س) = صفرًا ⇐ جتا س = ٠ ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$

قَ(س) غير موجودة عندما جا س = ٠ ⇐ س = ٠ ، π

س	π		$\frac{\pi}{٢}$		٠
قَ(س)		− − − − −		+ + + + +	
ق(س)		↘		↗	

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = ٠ هي ق (٠) = صفرًا

للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = π هي ق (π) = صفرًا

للاقتران قيمة عظمى محليةَ ومطلقة عند س = $\frac{\pi}{٢}$ هي ق ($\frac{\pi}{٢}$) = ١

ح) ق (س) = $\frac{٢ (٢س – ٤)}{٣\sqrt[٣]{س^{٢} – ٤س}}$

قَ(س) = صفر ⇐ ٢س – ٤ = ٠ ⇐ س = ٢

قَ(س) غير موجودة ⇐ س^{٢} – ٤س = ٠ ⇐ س (س–٤) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ٤

للاقتران قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = ٠ هي ق (٠) = ٠ وهي مطلقة .

للاقتران قيمة صغرى محليةَ ومطلقة عند س = ٤ هي ق (٤)

= ٠ وهي مطلقةَ .

للاقتران قيمة عظمى محليةَ ومطلقة عند س = ٢ وهي ق (٢)

= $\sqrt[٣]{١٦}$ وهي مطلقةَ .

س	∞		٤		٢		صفر		ـ∞
قَ(س)		+ + +		− − −		+ + +		− − −	
ق(س)		↗		↘		↗		↘	

ط) لا يوجد قيم قصوى.

السؤال الثاني

قَ(س) = ٣ س^{٢} + ٢ أ س + ب

قَ(–١) = صفر ⟸ ٣ – ٢أ + ب = ٠ ⟸ ٢ أ + ب = –٣

قَ(٢) = صفر ⟸ ١٢ + ٤أ + ب = ٠ ⟸ ٤ أ + ب = –١٢

أ = $\frac{-٣}{٢}$ ، ب = –٦

السؤال الثالث

أ) للاقتران نقط حرجة عند س = {–٣ ، –٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣}

ب) للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = –٢ هي ق(–٢) = –٢.

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ٢ هي ق(٢) = –٧ وهي مطلقة.

للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٠ هي ق(٠) = ٢ وهي مطلقة.

جـ) ق(س) متزايد على الفترات [–٢ ، ٠] ، [٢ ، ٣].

ق(س) متناقص على الفترات: [–٣ ، –٢] ، [٠ ، ٢].

السؤال الأول

أ) قَ(س) = ١ - $\frac{١}{س^٢}$

قً(س) = $\frac{٢}{س^٣}$

قً (س) > ٠ لكل س (٠ ، ∞)

قً (س) < صفر س ∋ (- ∞ ، ٠) (لاحظ أن س = ٠ ∌ مجال ق)

ق مقعر للأعلى في (٠ ، ∞)

ق مقعر للأسفل في (- ∞ ، ٠)

ب) قً (س) = $\frac{-٩}{\sqrt{(٩ - س^٢)^٣}}$

لاحظ أن مجال ق ٩ - س^٢ ≥ ٠ ⇐ س^٢ ≤ ٩ ⇐ |س| ≤ ٣ ⇐ -٣ ≤ س ≤ ٣

قً(س) < صفر ، لكل س ∋ (-٣، ٣).

ق (س) مقعر للأسفل في الفترة [-٣، ٣]

جـ) قً(س) = $\begin{cases} ٢ & ، س > ٢ \\ ٤ & ، س < ٢ \end{cases}$

قً (س) > ٠ ، لكل س ∋ (- ∞ ، ٢) ، (٢ ، ∞) .

ق (س) مقعر للأعلىفي (- ∞، ∞) .

د) لً(س) = ٣س -٦

لً(س) < صفر لكل س ∋ (- ∞ ، ٢)

لً(س) > صفر لكل س ∋ (٢، ∞) .

∴ ل (س) مقعر للأسفل في (- ∞ ، ٢] .

ل (س) مقعر للأعلى في [٢ ، ∞) .

السؤال الثاني

أ) (١، ٣) نقطةَ انعطاف

ظا هـ = قَ (١) = -٨ ⇐ هـ هي زاوية الانعطاف التي ظلها يساوي -٨

ب) ($\frac{\pi}{٢}$، ٠) نقطة انعطاف

ظا هـ = قَ ($\frac{\pi}{٢}$) = -٢ ⇐ هـ هي زاوية الانعطاف التي ظلها يساوي -٢

جـ) لا يوجد نقط انعطاف ، وزوايا انعطاف .

السؤال الثالث

أ) قَ(س) = جتا س + $\sqrt{٣}$ جا س = ٠

جتا س = − $\sqrt{٣}$ جا س ⇐ ظتا س = − $\sqrt{٣}$

ظتا س = − $\sqrt{٣}$ ⇐ س = $\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{١١\pi}{٦}$.

قً(س) = − جا س + $\sqrt{٣}$ جتا س .

قً($\frac{٥\pi}{٦}$) = − $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٣}$ × − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = −٢ < صفر، ⇐ للاقتران قيمة عظمى محلية عند ($\frac{٥\pi}{٦}$، ق($\frac{٥\pi}{٦}$))

قً($\frac{١١\pi}{٦}$) = − − $\frac{١}{٢}$ + ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١ > صفر، ⇐ للاقتران قيمة صغرى محلية عند ($\frac{١١\pi}{٦}$ ، ق($\frac{١١\pi}{٦}$))

ب) ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^٢ - \text{س} + ٣ & ، \quad \text{س} < -١ \\ \text{س}^٢ - ٣\text{س} + ١ & ، \quad -١ \leq \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^٢ + \text{س} - ٣ & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$

قَ(س) = $\begin{cases} ٢\text{س} - ١ & ، \quad \text{س} < -١ \\ ٢\text{س} - ٣ & ، \quad -١ < \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} + ١ & ، \quad \text{س} > ١ \end{cases}$

قَ(س) = ٠ ⇐

القاعدة الثانية ٢س − ٣ = ٠ ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$ ∉ (−١، ١)

قَ(س) غير موجودة عند س = ١، −١

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ١، هي ق(١) = −١

السؤال الرابع

ق يمر بالنقطة (٠، ٢) ⇐ ق(٠) = ٢

ومنه د = ٢

النقطةَ (١، ٢) نقطة انعطاف ⇐ قً(١) = صفر ، ق(١) = ٢

قً(س) = ٦ أ س + ٢ ب

قً(١) = ٦ أ + ٢ب = ٠ .... (١)

ق(١) = أ + ب + جـ + ٢ = ٢

ومنه أ + ب + جـ = ٠ ....(٢)

ميل العمودي = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{١}{٢}$ ⇐ ميل المماس = -٢

∴ قَ (١) = -٢

قَ (١) = ٣ أ + ٢ ب + جـ = -٢ ..... (٣)

وبحل المعادلات (١)،(٢)،(٣) تجد أن :

أ = ٢ ، ب = -٦ ، جـ = ٤

∴ ق (س) = ٢س^{٣} - ٦س^{٢} + ٤س + ٢

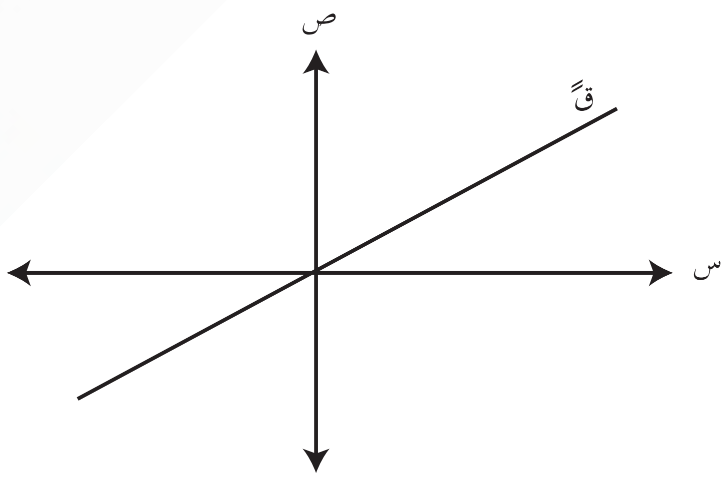
السؤال الخامس

١) ق مقعر لأعلى في [٠، ∞)

ق مقعر لأسفل في (-∞، ٠]

٢) (٠،ق(٠)) نقطة انعطاف

٣)



السؤال الأول

$\text{م} = \text{س ص}$

$٢\text{س} + ٢\text{ص} = ٦٠٠ \Leftarrow \text{ص} = ٣٠٠ - \text{س}$

$\text{م} = \text{س}(٣٠٠ - \text{س}) = ٣٠٠\text{س} - \text{س}^٢$

$\text{م}' = ٣٠٠ - ٢\text{س}$

$\text{م}' = \text{صفر} \Leftarrow ٣٠٠ - ٢\text{س} = \text{صفرًا} \Leftarrow \text{س} = ١٥٠$

$\text{م}''(\text{س}) = -٢ \Leftarrow \text{م}''(١٥٠) = -٢ < \text{صفر}$، إذن عظمى

تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما س = ١٥٠م

$\text{ص} = ٣٠٠ - ١٥٠ = ١٥٠\text{م}$

السؤال الثاني

$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٧ \times \text{جا هـ} = \frac{٣٥}{٢}\text{جا هـ}$

$\text{م}' = \frac{٣٥}{٢}\text{جتا هـ}$

$\text{م}' = \text{صفرًا ومنها جتا هـ} = ٠ \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\pi}{٢}$

$\text{م}'' = \frac{-٣٥}{٢}\text{جا هـ}$

$\text{م}''(\frac{\pi}{٢}) = \frac{-٣٥}{٢} < ٠$ عظمى

تكون المساحة أكبر ما يمكن عندما $\text{هـ} = \frac{\pi}{٢}$ (المثلث قائم الزاوية).

السؤال الثالث

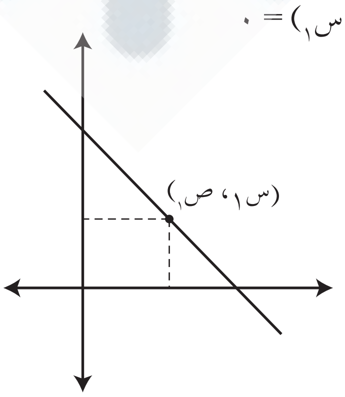
$\text{م} = \frac{١}{٢}\text{س ص}$

$\text{س}_١ ، \text{ص}_١$ ثابتان ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١}$ ومنه $\text{ص} = \frac{\text{س ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١}$

$\text{م} = \frac{١}{٢}\text{س}\left(\frac{\text{س ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١}\right) = \frac{١}{٢}\text{ص}_١ \times \frac{\text{س}^٢}{\text{س} - \text{س}_١}$

$\text{م}' = \frac{١}{٢}\text{ص}_١ \times \frac{(\text{س} - \text{س}_١)(٢\text{س}) - \text{س}^٢ \times ١}{(\text{س} - \text{س}_١)}$

$\text{م}' = \text{صفرًا} \Leftarrow (\text{س} - \text{س}_١)(٢\text{س} - \text{س}^٢) = ٠ \Leftarrow \text{س}(\text{س} - \text{س}_١)(٢ - \text{س}) = ٠ \Leftarrow \text{س}(\text{س} - ٢\text{س}_١) = ٠$



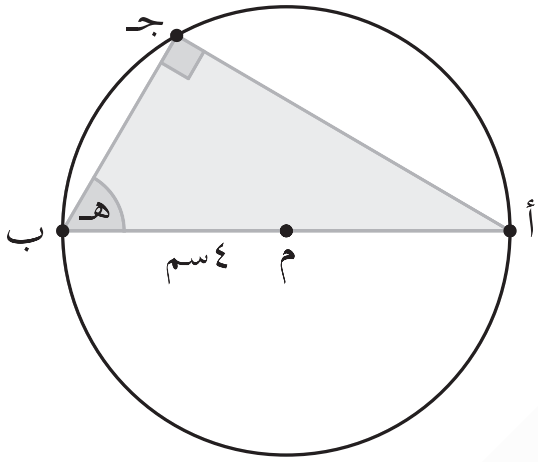
$\therefore$ $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٢\text{س}_١$

$\therefore$ صغرى عندما $\text{س} = ٢\text{س}_١$

$\text{ص} = \frac{(٢\text{س}_١\text{ص}_١)}{٢\text{س}_١ - \text{س}_١} = ٢\text{ص}_١$

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطتين $(٢\text{س}_١، ١)$ $(٠، ٢\text{ص}_١)$ $\Leftarrow$ الميل $= \frac{-\text{ص}_١}{-\text{س}_١}$

$\text{ص} = \frac{\text{ص}_١}{\text{س}_١}(\text{س} - ٢\text{س}_١)$



السؤال الرابع

م = $\frac{١}{٢}$ × أب × ب جـ × جا هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ب جـ جا هـ

∴ م = ٢ب جـ جا هـ

لكن $\frac{\text{ب جـ}}{٤}$ = جتا هـ ⇐ ب جـ = ٤ جتا هـ

∴ م = ٢ × ٤ جتا هـ جا هـ

م = ٤ جا ٢ هـ

$\frac{\text{د م}}{\text{د هـ}}$ = ٨ جتا ٢ هـ = ٠

٢ هـ = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٤}$

م″ (هـ) = −١٦ جا٢هـ

م″ ($\frac{\pi}{٤}$) = −١٦ < صفر ، إذن عظمى

∴ تكون مساحة المثلث أكبر ما يمكن عندما هـ = $\frac{\pi}{٤}$

السؤال الخامس :

افرض أن نصف قطر الأسطوانةَ نق وارتفاعها ع

ح = π نق^{٢} ع

لكن $(٣\sqrt{٣})^{٢}$ = نق^{٢} − $(\frac{ع}{٢})^{٢}$

ومنه نق^{٢} = ٢٧ − $\frac{ع^{٢}}{٤}$

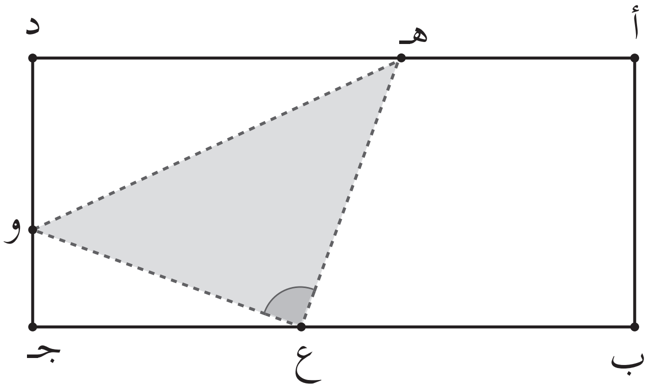
∴ ح = π (٢٧ − $\frac{ع^{٢}}{٤}$) × ع = π (٢٧ ع − $\frac{ع^{٣}}{٤}$)

$\frac{\text{دح}}{\text{دع}}$ = π (٢٧ − $\frac{٣ع^{٢}}{٤}$) = ٠ ⇐ $\frac{٣ع^{٢}}{٤}$ = ٢٧ ⇐ ع^{٢} = $\frac{٢٧ \times ٤}{٣}$ = ٣٦ ⇐ ع = ٦ سم .

ح″ (ع) = π ($\frac{-٦}{٤}$ ع)

ح″ (٦) = −٩ π < صفر ، إذن عظمى

∴ يكون حجم الأسطوانة أكبر ما يمكن عندما يكون ارتفاعها ٦ سم .



السؤال السادس

افرض ع جـ = س ، جـ و = ص

د و = ٣ – ص

ايضاً د و = ع و = ٣ – ص

م = $\frac{١}{٢}$ س ص لكن س^{٢} + ص^{٢} = (٣ – ص)^{٢}

س^{٢} + ص^{٢} = ٩ – ٦ص + ص^{٢} ⇐ ص = $\frac{٩ - س^{٢}}{٦}$

∴ م = $\frac{١}{١٢}$ (٩س – ٣س^{٢})

مَ = (س) = $\frac{١}{١٢}$ (٩ – ٣س^{٢}) = ٠

⇐ ٩ – ٣س^{٢} = ٠ ⇐ س^{٢} = ٣ ⇐ س = $\sqrt{٣}$

مً (س) = $\frac{١}{١٢}$(–٦س) ⇐ مً ($\sqrt{٣}$) < صفر ، قيمة عظمى

∴ م = $\frac{١}{١٢}$(٩ $\sqrt{٣}$ – ٣ $\sqrt{٣}$) = $\frac{٦\sqrt{٣}}{١٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مساحة

السؤال السابع

م = مساحة المثلث د جـ ب + مساحة المثلث م د ب

إفرض د جـ = ص

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + $\frac{١}{٢}$ × ١ × ٢ × جا س

م = $\frac{١}{٢}$ ص^{٢} + جا س

لكن (ب د)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (د جـ)^{٢} ⇐ (ب د)^{٢} = ص^{٢} + ص^{٢} ⇐ (ب د)^{٢} = ٢ ص^{٢}

ايضاً (ب د)^{٢} = (م د)^{٢} + (م ب)^{٢} – ٢ (م د) (م ب) جتا س = ١ + ٤ – ٤ جتا س

٢ص^{٢} = ١ + ٤ – ٤ جتا س ⇐ ص^{٢} = $\frac{٥}{٢}$ –٢ جتا س

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{٥}{٢}$ – ٢ جتا س) + جا س

م = $\frac{٥}{٤}$ – جتا س + جا س

مَ (س) = جا س + جتا س = ٠

جا س = – جتا س ⇐ ظاس = –١ ⇐ ومنه س = $\frac{٣\pi}{٤}$

مً (س) = جتا س – جا س

مً ($\frac{٣\pi}{٤}$) = جتا ($\frac{٣\pi}{٤}$) – جا ($\frac{٣\pi}{٤}$) = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ – $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$ < صفر ، عظمى

∴ تكون مساحة الشكل الرباعي أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{٣\pi}{٤}$.

السؤال الثامن

افرض أن عدد الأشخاص الجدد = س

يصبح عدد المشتركين في الرحلة ١٠٠ + س

بذلك يكون السعر الجديد للتذكرة = ٦٥ – $\frac{١}{٢}$ س

الإيراد = عدد الأشخاص المشاركين × سعر التذكرة

د س = (١٠٠ + س) (٦٥ – $\frac{١}{٢}$ س)

د (س) = ٦٥٠٠ + ١٥ س – $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

دَ(س) = ١٥ – س = ٠

س = ١٥

دً(س) = ١٥ > صفر ، عظمى

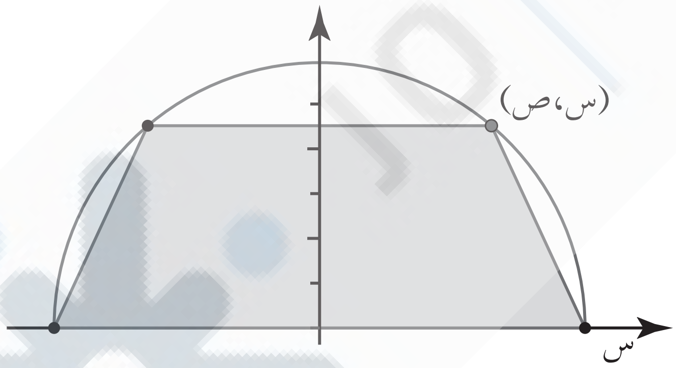
∴ يكون الإيراد أكبر ما يمكن عندما تكون الزيادة ١٥ شخصًا

أي أن عدد الأشخاص المشاركين = ١١٥ شخصًا

السؤال التاسع

تقاطع ق (س) مع محور السينات

٩ – س^{٢} = ٠ ⟸ س^{٢} = ٩ ⟸ س = ± ٣



م = $\frac{١}{٢}$ (مجموع القاعدتين) × الارتفاع

م = $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٦) × ص

م = $\frac{١}{٢}$ (٢س + ٦) (٩ – س^{٢})

م = (س + ٣) (٩ – س^{٢})

مَ (س) = (س + ٣) (–٢س) + (٩ – س^{٢}) (١)

= –٣س^{٢} – ٦س + ٩ = ٠

–٣ (س+٣) (س –١) = ٠ ⟸ س = –٣ ، س = ١

مً (س) = –٦س – ٦

مً (–٣) = ١٢ > صفر قيمة صغرى

مً (١) = –١٢ < صفر قيمة عظمى

تكون مساحة شبه المنحرف أكبر ما يمكن عندما س = ١

وقيمة م = (١ + ٣) (٩ – ١) = ٣٢ قيمة المساحة.

السؤال العاشر

لᵈ(س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٨٠س + ٥٠٠

الإيراد الكلي الناتج عن بيع س من الغرف = س × ٢٨٠٠ = ٢٨٠٠س

الربح = الإيراد الكلي − التكلفة الكلية

ر(س) = ٢٨٠٠ س − (س^{٣} − ٣ س^{٢} − ٨٠س + ٥٠٠)

٢٨٨٠ س − س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٥٠٠

رَ(س) = ٢٨٨٠ − ٣ س^{٣} + ٣ س

− ٣ (س^{٢} − ٢س − ٩٦٠) = ٠

− ٣ (س − ٣٢) (س + ٣٠) = ٠ ، ومنه ⇐ س = ٣٢

رً(س) = −٦س + ٦

رً(٣٢) = −٦ (٣٢) + ٦ < صفر   قيمة عظمى

∴ يكون ربح المصنع أكبر ما يمكن عند إنتاج ٣٢ غرفة نوم

السؤال الحادي عشر

− افرض أبعاد الجزء المستطيل س ، ص

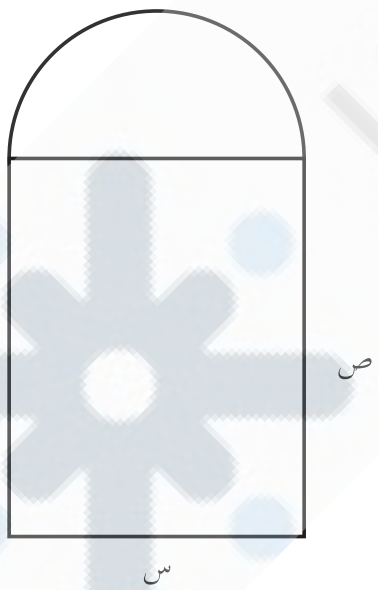
نفاذية الجزء السفلي أ ، الجزي العلوي $\frac{أ}{٢}$

محيط النافذه = محيط المستطيل + محيط $\frac{١}{٢}$ الدائرة

٦ = س + ٢ ص + $\frac{\pi}{٢}$ س

٢ص = ٦ − س − $\frac{\pi}{٢}$ س

ص = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{\pi}{٤}$ س



مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

= س ص + $\frac{١}{٢}$ π ($\frac{س}{٢}$)^{٢}

= س (٣ − $\frac{١}{٢}$ س − $\frac{\pi}{٤}$ س) + $\frac{١}{٨}$ π س^{٢}

مقدار النفاذ ن = ٣س − $\frac{١}{٢}$س^{٢} − $\frac{\pi}{٤}$س^{٢} + $\frac{\pi}{١٦}$ س^{٢}

ن = ٣س − ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣\pi}{١٦}$) س^{٢}

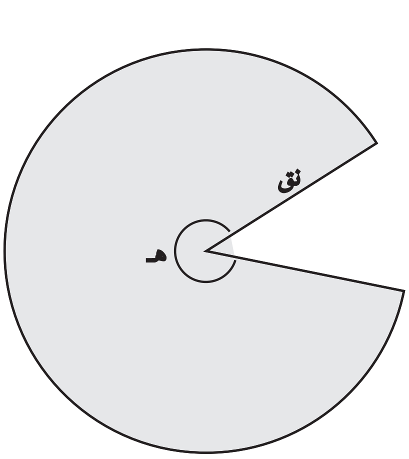
نَ = ٣ − (١ + $\frac{٣\pi}{٨}$) س = ٠

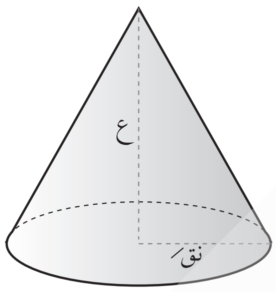
(١ + $\frac{٣\pi}{٨}$) س = ٣ ⇐ س = $\frac{٣}{١ + \frac{٣\pi}{٨}}$ = $\frac{٢٤}{٨ + ٣\pi}$

نً(س) = −(١ + $\frac{٣\pi}{٨}$) < صفر   قيمة عظمى

عندما س = $\frac{٢٤}{٨ + ٣\pi}$ فإن ص = $\frac{١٢ + ٣\pi}{٨ + ٣\pi}$

السؤال الثاني عشر





طول قوس القطاع = محيط دائرة المخروط

$\therefore$ $\text{نق هـ} = ٢ \, \text{نقَ} \, \pi \Leftarrow \text{نقَ} = \dfrac{\text{نق هـ}}{٢\pi}$

إفرض أن حجم المخروط ح

$\text{ح} = \dfrac{\pi}{٣} \text{نقَ}^٢ \, \text{ع}$

لكن $\text{ع}^٢ = \text{نق}^٢ - \text{نقَ}^٢$

$\text{ع} = \sqrt{\text{نق}^٢ - \text{نقَ}^٢}$

$= \sqrt{\text{نق}^٢ - \dfrac{\text{نق}^٢ \text{هـ}^٢}{٤\pi^٢}}$

$= \dfrac{\text{نق}}{٢\pi} \sqrt{٤\pi^٢ - \text{هـ}^٢}$

$\text{ح (هـ)} = \dfrac{\pi}{٣} \times \dfrac{\text{نق}^٢ \text{هـ}^٢}{٤\pi^٢} \times \dfrac{\text{نق}}{٢\pi} \sqrt{٤\pi^٢ - \text{هـ}^٢}$

$\text{ح (هـ)} = \dfrac{\text{نق}^٣}{٢٤\pi^٢} \times \sqrt{٤\pi^٢ \text{هـ}^٤ - \text{هـ}^٦}$

$\text{حَ (هـ)} = \dfrac{\text{نق}^٣}{٢٤\pi^٢} \times \dfrac{١٦\pi^٢ \text{هـ}^٣ - ٦\text{هـ}^٥}{٢\sqrt{٤\pi^٢ \text{هـ}^٤ - \text{هـ}^٦}} = \text{صفرًا}$

$١٦\pi^٢ \text{هـ}^٣ - ٦ \, \text{هـ}^٥ = ٠ \Leftarrow ٢\text{هـ}^٣ (٨\pi^٢ - ٣\text{هـ}^٢) = \text{صفرًا}$

$\Leftarrow ٣\text{هـ}^٢ = ٨\pi^٢$

$\Leftarrow \text{هـ}^٢ = \dfrac{٨\pi^٢}{٣} \Leftarrow \text{هـ} = \sqrt{\dfrac{٨}{٣}} \, \pi$

وللتحقق جد $\text{حً} \left(\sqrt{\dfrac{٨}{٣}} \right)$ تجد أنها < صفر

ومنه يكون للاقتران قيمة عظمى عندما $\text{هـ} = \sqrt{\dfrac{٨}{٣}} \, \pi$ راديان .

السؤال الأول

المستقيم ٣س − ص − جـ = ٠ ⇐ ص = ٣س − جـ ⇐ ميل المستقيم صَ = ٣

ميل المماس قَ(س) = $\frac{٣}{(\text{س} + ١)^{٢}}$

ميل المماس = ميل المستقيم ومنه $\frac{٣}{(\text{س} + ١)^{٢}}$ = ٣ ⇐ $(\text{س} + ١)^{٢} = ١$

∴ س + ١ = ± ١

أ) س + ١ = ١ ⇐ س = ٠ ، ق (٠) = −٣ ⇐ نقطة المماس (٠ ، −٣)

وبالتعويض في معادلة المستقيم ٣ (٠) − −٣ − جـ = ٠ ⇐ جـ = ٣

ب) س + ١ = −١ ⇐ س = −٢ ، ق (−٢) = ٣ ⇐ نقطة التماس (−٢ ، ٣)

وبالتعويض في معادلة المستقيم ٣ (−٢) − ٣ − جـ = ٠ ⇐ جـ = −٩

السؤال الثاني

ف (ن) = ن + جتا ن

ع (ن) = ١ − جا ن

ت (ن) = − جتا ن

عندما تنعدم السرعة ع (ن) = ٠ ⇐ ١ − جا ن ⇐ جا ن = ١ ⇐ ن = $\frac{\pi}{٢}$

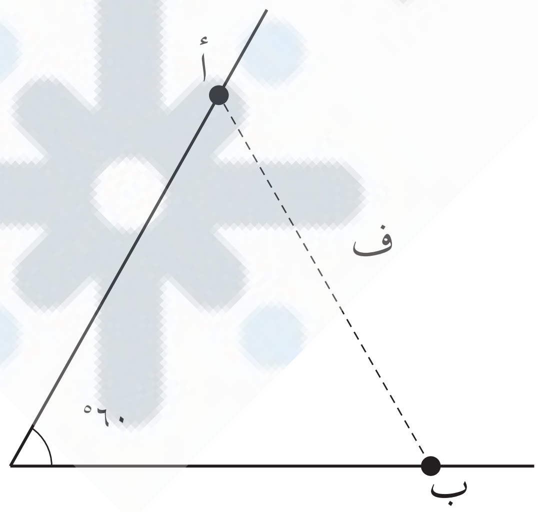
ت $(\frac{\pi}{٢})$ = −جتا $\frac{\pi}{٢}$ = صفرًا

السؤال الثالث

افرض س بعد النقطة أ عن م ⇐ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = −٦٠ كم / س

ص بعد النقطة ب عن م ⇐ $\frac{\text{دص}}{\text{د ن}}$ = −٨٠ كم / س

ف المسافة بين القطارين



المطلوب: $\frac{\text{دف}}{\text{د ن}}\Big|$ عند الساعة الحادية عشرة صباحاً.

$\text{ف}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\ \text{س ص جتا}\ \frac{\pi}{٣}$

$\text{ف}^{٢} = \text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\ \text{س ص}$

$٢\ \text{ف}\ \frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = ٢\text{س}\ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}} + ٢\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{د ن}} - (\text{س}\ \frac{\text{دص}}{\text{د ن}} + \text{ص}\ \frac{\text{د س}}{\text{د ن}})$

نجد س ، ص ، ف عند الساعة الحادية عشرة

س = ١٠٠ − ٦٠ × ١ = ٤٠ ، ص = ١٢٠ − ٨٠ × ١ = ٤٠

$\text{ف}^{٢} = (٤٠)^{٢} + (٤٠)^{٢} - (٤٠ \times ٤٠)$ ⇐ ف = ٤٠

∴ $٢ \times ٤٠ \times \frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = ٢ \times ٤٠ \times -٦٠ + ٢ \times ٤٠ \times -٨٠ + (٤٠ \times -٨٠ + ٤٠ \times -٦٠)$

$٨٠\ \frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = -٥٦٠٠$ ⇐ $\frac{\text{دف}}{\text{د ن}} = \frac{-٥٦٠٠}{٨٠} = -٧٠$ كم / س

السؤال الرابع

$$\text{قَ (س)} = \frac{٣\text{س}^٢ - ٩}{٣\sqrt[٣]{(\text{س}^٣ - ٩\text{س})^٢}}$$

قَ (س) = ٠ ⟸ ٣ س^{٢} − ٩ = ٠ ⟸ س^{٢} = ٣ ⟸ س = $\sqrt{٣}$ ، −$\sqrt{٣}$

قَ (س) غير موجودة ⟸ س^{٣} − ٩ س = ٠ ⟸ س (س^{٢} − ٩) = ٠ ⟸ س = ٠ ، ٣ ، −٣

أ) مجموعة النقط الحرجية هي : {٠ ، ٣ ، −٣ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{-٣}$}

ب) ق (س) متزايد [−٣ ، $\sqrt{٣}$] [٠ ، $\sqrt{٣}$] [٣ ، ∞)

متناقص (−∞ ، − ٣] [− $\sqrt{٣}$ ، ٠] [$\sqrt{٣}$ ، ٣]

جـ) قيمة صغري محلية عند س = − ٣ هي ق (− ٣) = صفر وهي مطلقة

قيمة صغرى محلية عند س = ٠ هي ق (٠) = صفر وهي مطلقة

قيمة صغرى محلية عند س = ٣ هي ق (٣) = صفر وهي مطلقة

قيمة عظمى محلية عند س = ٣ هي ق (− ٣) = ٦ وهي مطلقة

قيمة عظمى محلية عند س = ٣ هي ق (٣) = −٦ وهي مطلقة .

السؤال الخامس

ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

قَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ

قً (س) = ٦ أ س + ٢ ب

يمر منحناه بالنقطة (١ ، ٥) ⟸ ق (١) = ٥

⟸ أ + ب + جـ + د = ٥ .... (١)

النقطة (٢ ، ١) نقطة انعطاف ⟸ قً (٢) = ٠ ، ق (٢) = ١

قً (٢) = ١٢ أ + ٢ ب = ٠ .... (٢)

ق (٢) = ٨ أ + ٤ ب + ٢ جـ + د = ١ .... (٣)

معادلةَ المماس عند النقطة (٢ ، ١) هي ٣س + ص = ٧ ⟸ ص = ٧ − ٣س

م = قَ (٢) = −٣

١٢ أ + ٤ ب + جـ = −٣ .... (٤)

وبحل المعادلات ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ نجد أن :

أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = $^{-}$١٥ ، د = ١٥

السؤال السادس

أ) متزايد في الفترة [−٥ ، ١]

متناقص في الفترة (−∞ ، −٥] ، [١ ، ∞)

ب) للاقتران قيمة صغرى محلية (−٥ ، ق (−٥))

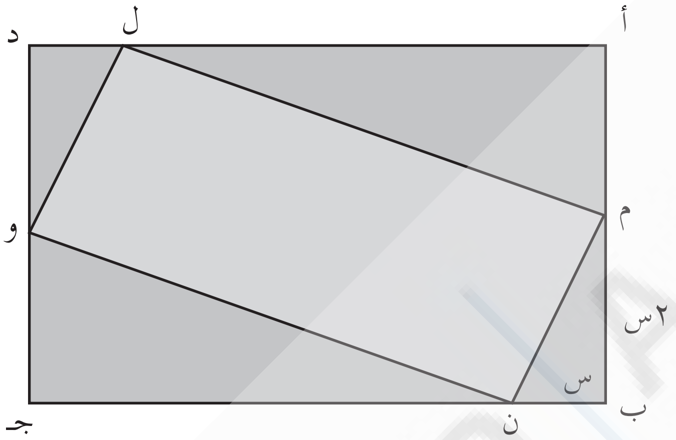
قيمة عظمى محلية عند (١ ، ق (١))

جـ) مقعر لأعلى (−∞ ، −٢]

مقعر لأسفل [−٢ ، ∞)

د) للاقتران نقطة انعطاف هي (−٢ ، ق (−٢))

ميل زاوية الانعطاف ظا هـ = قَ (−٢) = ٣



السؤال السابع

افرض أن ب ن = س

∴ م ب = ٢س

مساحة متوازي المستطيلات م و ل ن = مساحة المستطيل − مساحة المثلثات الأربعة

م = (٦٠ × ٨٠) − [٢ × $\frac{١}{٢}$ × س × ٢س + ٢ × $\frac{١}{٢}$ × (٦٠ − ٢س) (٨٠ − س)

م = ٤٨٠٠ − (٢س^{٢} + ٤٨٠٠ − ٦٠س − ١٦٠س + ٢س^{٢})

م = ٤٨٠٠ − ٢س^{٢} − ٤٨٠٠ + ٦٠س + ١٦٠س − ٢س^{٢}

م = −٤س^{٢} + ٢٢٠س

مَ = −٨س + ٢٢٠ = ٠

−٨س = −٢٢٠ ⇐ س = ٢٧,٥

مً (س) = −٨

مً (٢٧,٥) = −٨ < صفر ∴ عظمى

∴ تكون مساحة المتوازي أكبر ما يمكن عندما س ٢٧,٥ سم .

الاختبار الذاتي

السؤال الأول

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
الإجابة	د	جـ	ب	ب	ب	جـ	جـ	أ	جـ	ب	جـ	د	أ	جـ	ب

السؤال الثاني

أ) قَ (س) = ٢ (س − ٣)

(٠ ، ٠) نقطة خارجية

افرض (س ، ص) نقطة تماس ∴ م = قَ (س) = ٢س − ٦

أيضاً م = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

٢ س − ٦ = $\frac{(\text{س} - ٣)^{٢}}{\text{س}}$ ⇐ ٢س (س − ٣) = (س − ٣)^{٢}

∴ ٢س = س − ٣ ⇐ س = ٣

∴ نقطة التماس هي (٣ ، ٠) ⇐ م = ٠

معادلة المماس : ص = ٠

معادلةَ العمودي س = ٠

ب)

١) تصل الكرة أقصى ارتفاع عندما ع = ٠

ع = ٦٠ − ١٠ ن = ٠ ⇐ ن = ١٠ ثوان

٢) افرض ل (ن) = − ٥ ن^{٢} + ٦٠ ن + ٢٢٥

ترتطم الكرة بالأرض عندما ل (ن) = صفرًا

− ٥ ن^{٢} + ٦٠ ن + ٢٢٥ = ٠

− ٥ (ن^{٢} − ١٢ ن − ٤٥) = ٠

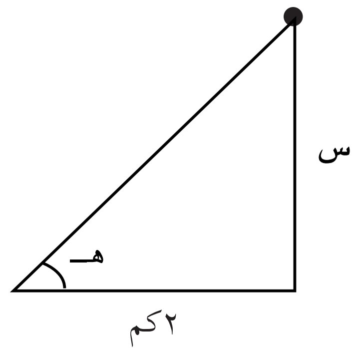
− ٥ (ن − ١٥) (ن + ٣) = ٠

∴ ن = ١٥ بعد ١٥ ثانية يصل الجسم سطح الأرض

ع (١٥) = ٦٠ − ١٠ (١٥)

= ٦٠ − ١٥٠ = ٩٠ م / ث

السؤال الثالث



افرض أن ارتفاع الصاروخ عن الأرض س متر

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٥٤٠ م / د ، المطلوب $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ عندما س = ١٢٠٠ م

ظا هـ = $\frac{١}{٢}$ س $\Leftarrow$ قا^{٢}هـ × $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

عندما س = ١٢٠٠ م ظا هـ = ٠,٦ $\Leftarrow$ قا^{٢} هـ = ظا^{٢} هـ + ١ = ٠,٣٦ + ١ = ١,٣٦

١,٣٦ × $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٥٤٠ $\Leftarrow$ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$ = ١٩٨,٥ راديان / ث

السؤال الرابع

أ) مقعر لأعلى في (−∞ ، −١] ، [١ ، ∞)

مقعر لأسفل في [−١ ، ١]

ب) للاقتران نقطة انعطاف عند (−١ ، ق(−١)) ، (١ ، ق(١))

جـ) متزايد في [−٢ ، ٠] ، [٢ ، ∞)

السؤال الخامس

ف = $\sqrt{(٨ - \text{س})^{٢} + (١٠ + \text{ص})^{٢}}$

س = ٤ ن ، ص = ٢ ن (المسافة = السرعة × الزمن)

ف = $\sqrt{(٨ - ٤\text{ن})^{٢} + (١٠ + ٢\text{ن})^{٢}}$

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{٢ \times -٤ (٨ - ٤\text{ن}) + ٤ \times ٢ (١٠ + ٢\text{ن})}{٢ \sqrt{(٨ - ٤\text{ن})^{٢} + (١٠ + ٢\text{ن})^{٢}}}$ = صفرًا

−٨ (٨ − ٤ ن) + ٢ (١٠ + ٢ ن) = صفرًا

−٦٤ + ٣٢ ن + ٢٠ + ٨ ن = صفرًا

٤٠ ن − ٢٤ = ٠ $\Leftarrow$ ن = $\frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ صغرى عندما ن = $\frac{٣}{٥}$ ثانيةَ

∴ تكون المسافة أقل ما يمكن بعد ٠,٦ ثانية من حركة النقطتين.

السؤال الأول

$$مَ(س) = ٢ \times \frac{٢س + ٦}{٢\sqrt{٢س^٢ + ٦س}} = \frac{س + ٣}{\sqrt{س^٢ + ٦س}} = ق(س)$$

إذن م اقتران بدائي للاقتران ق

السؤال الثاني

$$مَ(س) = \square \frac{-١}{س^٢} \, د س = \frac{١}{س} + جـ$$

لكن $م(٣) = ١ \Leftarrow \frac{١}{٣} + جـ = ١ \Leftarrow جـ = \frac{٢}{٣}$

إذن $م(س) = \frac{١}{س} + \frac{٢}{٣}$

السؤال الثالث

أ) $\square \, (جا^٢ س + جتا^٢ س) \, د س = \square \, ١ \, . \, د س = س + جـ$

ب) $\square \, قا س \, (ظا س + جتا س) \, د س = \square \, (قا س \, ظا س + ١) \, د س = قا س + س + جـ$

جـ) $\square \, (١ + ٤ ص)(ص + ٢) \, د ص = \square \, (٤ ص^٢ + ٩ ص + ٢) \, د ص = \frac{٤}{٣} ص^٣ + \frac{٩}{٢} ص^٢ + ٢ ص + جـ$

د) $\square \, \frac{د ل}{جا^٢ ل} = \square \, قتا^٢ ل \, د ل = - ظتا ل + جـ$

السؤال الرابع

$\square \, قَ(س) \, د س = \square \, (٢ س - جتا س) \, د س$

$ق(س) = س^٢ - جا س + جـ$

$ق\left(\frac{\pi}{٢}\right) = \frac{\pi^٢}{٤} - ١ + جـ = ٤ \Leftarrow جـ = ٥ - \frac{\pi^٢}{٤}$

إذن $ق(س) = س^٢ - جا س + ٥ - \frac{\pi^٢}{٤}$

السؤال الخامس

$$\frac{د ص}{د س} = \sqrt[٣]{س^٢ + ٣ س + ١} \Leftarrow \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س = -١} = -١$$

السؤال السادس

ق (س) = ٣ س^{٢} − ٢ س + ٢

قَ (س) = ٦ س − ٢

قَ (−٣) = ٦ × −٣ − ٢ = −٢٠

السؤال السابع

قَ (س) = جتا س − جا س ⇐ قَ $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = −١

⇐ ق $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ − قَ $\left(\frac{\pi}{٢}\right)$ = ١ − −١ = ٢

السؤال الثامن

ق (س) = □ (٥ س^{٤} + ٢ س + ٣) د س

ق (س) = س^{٥} + س^{٢} + ٣ س + جـ

ق (٢) = ٣٢ + ٤ + ٦ + جـ = ٣

⇐ جـ = −٣٩

ق (س) = س٥ + س٢ + ٣س −٣٩

السؤال الأول

أ) $\square\,(\text{س}^{٦}+\frac{١}{\text{س}^{٣}}-\sqrt[٥]{\text{س}^{٢}})\,\text{د س} = \square\,(\text{س}^{٦}+\text{س}^{-٣}-\text{س}^{\frac{٢}{٥}})\,\text{د س} = \frac{١}{٧}\,\text{س}^{٧}-\frac{١}{٢}\,\text{س}^{-٢}-\frac{٥}{٧}\,\text{س}^{\frac{٧}{٥}}+\text{جـ}$

ب) $\square\,(٢+٣\text{ع})^{٢}\,\text{د ع} = \square\,(٤+١٢\,\text{ع}+٩\text{ع}^{٢})\,\text{د ع} = ٤\,\text{ع}+٦\text{ع}^{٢}+٣\text{ع}^{٣}+\text{جـ}$

جـ) $\square\,\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}-٥}{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \square\,\frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}-٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س} = \square\,\text{جتا س د س}-٥\,\square\,\text{قا}^{٢}\text{س د س} = \text{جا س}-٥\,\text{ظا س}+\text{جـ}$

د) $\square\,(٣-\pi\,\text{س}^{٢}+\text{س}^{٢})\,\text{د س} = ٣\,\text{س}-\frac{\pi}{٣}\,\text{س}^{٣}+\frac{١}{٣}\,\text{س}^{٣}+\text{جـ} = ٣\,\text{س}-\frac{\pi-١}{٣}\,\text{س}^{٣}+\text{جـ}$

هـ) $\square\,\frac{١}{١+\text{جتا}\,٢\,\text{س}}\,\text{دس} = \square\,\frac{١}{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{د س} = \frac{١}{٢}\,\square\,\text{قا}^{٢}\text{س د س} = \frac{١}{٢}\,\text{ظا س}+\text{جـ}$

و) $\square\,(\text{س}+٥-٤\,\text{س}^{-٢})\,\text{د س} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}+٥\,\text{س}+٤\,\text{س}^{-١}+\text{جـ}$

ز) $\square\,\frac{٥\,\text{د س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = ٥\,\square\,\text{قتا}^{٢}\text{س د س} = -٥\,\text{ظتا س}+\text{جـ}$

ح) $\square\,\frac{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}\,\text{د س} = \square\,\frac{١-\text{جا}^{٢}\text{س}}{(\frac{١}{٢}\,\text{جا س})^{٢}}\,\text{دس} = ٤\,\square\,\frac{٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,.\,\text{د س} = ٤\,\square\,\text{ظتا}^{٢}\text{س د س}$

$= ٤\,\square\,(\text{قتا}^{٢}\text{س}-١)\,\text{د س} = -٤\,\text{ظتا س}-٤\,\text{س}+\text{جـ}$

السؤال الثاني

$\text{ق}(\text{س}) = \square\,(٣\,\text{س}^{٢}-٢)\,\text{د س} = \text{س}^{٣}-٢\,\text{س}+\text{جـ}$

لكن $\text{ق}(٠)=١ \Leftarrow \text{جـ}=١ \Leftarrow \text{ق}(\text{س})=\text{س}^{٣}-٢\,\text{س}+١$

السؤال الثالث

$\text{ق}(\text{س}) = \square\,(\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}+١)\,\text{د س} = \text{س}^{٣}-\frac{\text{س}^{٣}}{٣}+\text{س}+\text{جـ}$

$\text{ق}(٣)-\text{ق}(١) = \frac{٨١}{٤}-\frac{٢٧}{٣}+٣+\text{جـ}-\frac{١}{٤}+\frac{١}{٣}-١-\text{جـ} = \frac{٨٠}{٤}-\frac{٢٦}{٣}+٢ = \frac{٤٠}{٣}$

السؤال الأول

أ) $\int_{١}^{٢}$ (س^{٢} – س^{٣}) د س = $\left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{س^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٢}$

= $\left(\frac{٨}{٣} - \frac{١٦}{٤}\right) - \left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤}\right) = \frac{٧}{٣} - \frac{١٥}{٤} = \frac{-١٧}{١٢}$

ب) $\int_{١}^{٣}$ [٢ – س] د س = $\int_{٠}^{١}$ ١ . د س + $\int_{١}^{٢}$ صفر . د س + $\int_{٢}^{٣}$ –١ . د س

= ١ + صفر + –١ = صفر

جـ) $\int_{١}^{٨}$ |س – ٦| د س = $\int_{٠}^{٦}$ (٦ – س) د س + $\int_{٦}^{٨}$ (س – ٦) د س

= ٦ (٦ – ٠) – $\left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{٦}$ + $\left[س^{٢}\right]_{٦}^{٨}$ – ٦ (٨ – ٦)

= ٣٦ – ١٨ + ٦٤ – ٣٦ – ١٢ = ٣٤

د) $\int_{١}^{١٦}$ $\sqrt{س}$ د س = $\frac{٢}{٣}\left[س^{\frac{٣}{٢}}\right]_{١}^{١٦}$

= $\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{١٦^{٣}} - \sqrt{١^{٣}}\right)$

= $\frac{٢}{٣}$ [٦٤ – ١] = ٤٢

هـ) $\int_{٢}^{٢}$ (س – ٣)^{٢} د س = صفرًا

و) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ (جتا س – جا س) د س = $\left[\text{جا س + جتا س}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

= ١ – ١ = صفرًا

السؤال الثاني

٢ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س + $\int_{١}^{٣}$ س$^{-٢}$ د س – ٦ (٣ – ١) = ١٢

٢ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س + $\left[\frac{-١}{س}\right]_{١}^{٣}$ = ٢٤

٢ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س = ٢٤ – $\frac{٢}{٣}$ $\Leftarrow$ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س = $\frac{٣٥}{٣}$

اذن $\int_{١}^{٣}\left(\frac{ق (س)}{٢} - ٣ س^{٢}\right)$ د س = $\frac{١}{٢}$ $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س – $\left[س^{٣}\right]_{١}^{٣}$ = $\frac{١}{٢} \times \frac{٣٥}{٣}$ – ٢٦

= $\frac{٣٥}{٦}$ – ٢٦ = $\frac{-١٢١}{٦}$

السؤال الثالث

$\int_{١}^{جـ}$ (٢ س^{٢} + ٦ س) د س = صفرًا

[$\frac{٢}{٣}$ س^{٣} + ٣ س^{٢}]$_{١}^{جـ}$ = صفرًا

$\frac{٢}{٣}$ جـ^{٣} + ٣ جـ^{٢} – $\frac{١١}{٣}$ = ∴

٢ جـ^{٣} + ٩ جـ^{٢} – ١١ = صفرًا

من $\int_{١}^{جـ}$(٢ س^{٢} + ٦ س) د س = صفرًا ⟸ جـ = ١

وباستخدام القسمة التركيبية نحصل على (جـ – ١) (٢ جـ^{٢} + ١١ جـ + ١١) = صفرًا

أي أن ٢ جـ^{٢} + ١١ جـ + ١١ = ∴

جـ = $\frac{-١١ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$

قيم جـ هي $\left\{ ١ ، \frac{-١١ + \sqrt{٣٣}}{٤} ، \frac{-١١ - \sqrt{٣٣}}{٤} \right\}$

السؤال الرابع

$\int_{أ}^{٢}$ ٢ أ د س = –٣٠

٢ أ (٢ – أ) = –٣٠

أ^{٢} – ٢ أ – ١٥ = ∴

أ = ٥ ، –٣

السؤال الخامس

جتا $\sqrt{س}$ ≤ ٠ لكل س ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٤}$] ⟸ $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}}$ جتا $\sqrt{س}$ د س ≤ ٠

السؤال السادس

$\int_{١}^{٣}$ ١ د س + $\int_{٣}^{٦}$ ٢ د س + $\int_{٦}^{جـ}$ ٣ د س = ١٢

١ (٣ – ١) + ٢ (٦ – ٣) + ٣ (جـ – ٦) = ١٢ ⟸ جـ = $٧\frac{١}{٣}$

السؤال السابع

$\int_{٢}^{٤}$ ق (س) د س = $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) د س + $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) ٤ س

لكن $\int_{-١}^{٢}$ (٣ ق (س) – ٤) د س = ٤

$\int_{-١}^{٢}$ ٣ ق (س) د س – ١٢ = ٤ ⟸ $\int_{-١}^{٢}$ ق (س) د س = $\frac{١٦}{٣}$

إذن $\int_{-١}^{٤}$ ق (س) د س = $\frac{١٦}{٣}$ + –٦ = $\frac{-٢}{٣}$.

السؤال الأول

أ) $\text{د ص} = \frac{١}{٢}\,(\text{٢ س} + ١)(١ - \text{س})\,\text{د س}$

$\square\,\text{د ص} = \frac{١}{٢}\,\square\,(-\text{٢ س}^{٢} + \text{س} + ١)\,\text{د س}$

$\text{ص} = \frac{١}{٢}\,\left(\frac{-٢}{٣}\,\text{س}^{٣} + \frac{١}{٢}\,\text{س}^{٢} + \text{س}\right) + \text{جـ}$

ب) $\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{د ص} = \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{د س}$

$\text{د ص} = \dfrac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}}{\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}}\,\text{د س}$

$\text{د ص} = \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٤}\,\text{د س}$

$\text{دص} = \frac{١}{٤}\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{د س}$

$\square\,\text{د ص} = \frac{١}{٤}\,\square\,\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \frac{١}{٤}\,\square\,\frac{١ - \text{جتا س}}{٢}\,\text{د س} = \frac{١}{٨}\,(\text{س} - \text{جا س}) + \text{جـ}$

جـ) $\square\,\frac{\text{د ص}}{\text{ص}^{٢}} = \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}}$

$\frac{-١}{\text{ص}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ} \Leftarrow \frac{-١}{\text{ص}} = \frac{-١}{\text{س}^{٢}} - \text{جـ}$

$\text{ص} = \dfrac{١}{\frac{١}{\text{س}^{٢}} - \text{جـ}}$

د) $\text{د س} + \text{٣ د ص} = \text{جتا س د س}$

$\text{٣ د ص} = \text{جتا س د س} - \text{د س}$

$\square\,\text{٣ د ص} = \square\,(\text{جتا س} - ١)\,\text{د س}$

$\text{٣ ص} = \text{جا س} - \text{س} + \text{جـ}$

$\text{ص}\ \frac{١}{٣}\,\text{جا س} - \frac{١}{٣}\,\text{س} + \text{جـ} \quad \text{حيث جـ} = \frac{\text{جـ}_{١}}{٣}$

السؤال الثاني

$\frac{\text{د ت}}{\text{د ن}}$ = ٥ ن^{٤} + ٢٠ ن ، ت (١) = ٣٠

□ د ت = □ ٥ ن^{٤} + ٢٠ ن) د ن

ت = ن^{٥} + ١٠ ن^{٢} + جـ

ت (١) = (١)^{٥} + ١٠ (١)^{٢} + جـ = ٣٠ ⟸ جـ = ١٩

إذن ت (ن) = ن^{٥} + ١٠ ن^{٢} + ١٩

ت (٣) = ٣^{٥} + ١٠ (٣)^{٢} + ١٩ = ٣٤٣ + ٢٩٠ + ١٩ = ٤٥٢

السؤال الثالث

ت = ٦ ن + ٤ ، ع (٠) = ٢ م / ث ، ف (٢) = ٢١ م

$\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$ = ٦ ن + ٤

□ د ع = □ (٦ ن + ٤) د ن

ع = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + جـ$_{١}$

لكن ع (٠) = ٢ ⟸ جـ$_{١}$ = ٢

ع = $\frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$ = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٢

□ د ف = □ (٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٢) د ن

ف = ن^{٣} + ٢ ن^{٢} + ٢ ن + جـ$_{٢}$

لكن ف (٢) = ٢١ ⟸ جـ$_{٢}$ = ١

إذن ف (ن) = ن^{٣} + ٢ ن^{٢} + ٢ن + ١ ⟸ ف (٣) = ٢٣ + ١٨ + ٦ + ١ = ٥٢م

السؤال الرابع

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{جا س – قا}^{٢}\text{ س}}{\text{٣ ص}^{٢}}$ ٣ ص^{٢} د ص + (جا س – قا^{٢} س) د س

□ ٣ ص^{٢} د ص = □ (جا س – قا^{٢} س) = س

ص^{٣} = – جتا س – ظا س + جـ

ص = $\sqrt[٣]{\text{– جتا س – ظا س + جـ}}$

إذن ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{– جتا س – ظا س + جـ}}$ لكن ق $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ = ٤

$\sqrt[٣]{– \frac{١}{٢} – \frac{١}{\sqrt{٢}} + \text{جـ}}$ = ٤

$\frac{– \sqrt{٢} – ٢}{٢\sqrt{٢}}$ + جـ = ٦٤

جـ = ٦٤ + $\frac{\sqrt{٢} – ٢}{٢\sqrt{٢}}$ إذن ق (س) = $\sqrt[٣]{\text{١ – جتا س – ظا س + ٦٤ +} \frac{\sqrt{٢} – ٢}{٢\sqrt{٢}}}$

السؤال الأول

أ) $\int_{٠}^{٣} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}}\ \text{د س}$

افرض ص = س^{٢} + ٢ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٤}$ د ص = س د س ، عندما س = ٠ $\Leftarrow$ ص = ٢ ، س = ٣ $\Leftarrow$ ص = ١١

$$\int_{٠}^{٣} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+٢}}\ \text{د س} = \frac{١}{٢}\int_{٢}^{١١} \frac{\text{د ص}}{\sqrt{\text{ص}}} = \sqrt{١١} - \sqrt{٢}$$

ب) $\int \text{جا}^{٣}\text{س د س} = \int \text{جا س (جا}^{٢}\text{س) د س} = \int \text{جا س (١ – جتا}^{٢}\text{س) د س}$

$= \int \text{(جا س – جا س جتا}^{٢}\text{س) د س}$

$= \int \text{جا س} - \int \text{جا س جتا}^{٢}\text{س}$ ، افرض ص = جتا س $\Leftarrow$ – د ص = جا س د س

$= -\text{جتا س} + \int \text{ص}^{٢}\text{د ص} = -\text{جتا س} + \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{١}{(\text{س}+٣)^{٢}}\ \text{د س} = \int (\text{س}+٣)^{-٢}\ \text{د س} = \frac{-١}{\text{س}+٢} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{\text{س} - ١}{(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{٣}}\ \text{د س}$، افرض ص = س^{٢} – ٢ س + ١ $\Leftarrow$ $\frac{١}{٢}$ د ص = (س – ١) د س

$= \frac{١}{٢}\int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}^{٣}} = \frac{-١}{٤\text{ص}^{٢}} + \text{جـ} = \frac{-١}{٤(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١)^{٢}} + \text{جـ}$

هـ) $\int_{١}^{٠} \sqrt{\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + \text{ص د س}} = \int_{١}^{٠} \sqrt{(\text{س} - ٥)^{٢}}\ \text{ص د س} = \int_{-}^{٠} |\text{س} - ٥|\ \text{د س} = \int_{١}^{٠} (٥ - \text{س}) - \text{د س} = \frac{-٩}{٢}$

و) $\int \frac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س} =$

افرض ص = $\sqrt{\text{س}}$ $\Leftarrow$ ص^{٢} = س $\Leftarrow$ ٢ ص د ص = د س

$$\int \frac{\text{قتا}^{٢}\sqrt{\text{س}}}{\text{س}}\ \text{د س} = \int \frac{\text{قتا}^{٢}\text{ص}}{\text{ص}}\ ٢\ \text{ص د ص} = -٢\text{ظتا ص} + \text{جـ} = -٢\ \text{ظتا}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

ز) $\int س^{٢}\sqrt[٣]{س-١}\;س\,د ص$

نفرض ص = س − ١ ⇐ س = ص + ١ ⇐ $س^{٢} = (ص+١)^{٢}$ ⇐ د ص = د س

$\int س^{٢}\sqrt[٣]{س-١}\,د س = \int (ص+١)^{٢}\sqrt[٣]{ص}\,د ص = \int (ص^{\frac{٧}{٣}} + ٢ص^{\frac{٤}{٣}} + ص^{\frac{١}{٣}})\,د ص$

$= \frac{٣}{١٠}ص^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٦}{٧}ص^{\frac{٧}{٣}} + \frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{٣}{١٠}(س-١)^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٦}{٧}(س-١)^{\frac{٧}{٣}} + \frac{٣}{٤}(س-١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

ح) $\int جا^{٣}س\,جتا^{٢}س\,د س = \int جا س\,جا^{٢}س\,جتا^{٢}س\,د ص$

افرض ص = جتا س ⇐ − د ص = جا س د س

$= \int جا س\,(١ - جتا^{٢}س)\,جتا^{٢}س\,د س$

$= \int (ص^{٢} - ١)\,ص^{٢}\,د ص$

$= \int (ص^{٤} - ص^{٢})\,د ص = \frac{ص^{٥}}{٥} - \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ = \frac{جتا^{٥}س}{٥} - \frac{جتا^{٣}س}{٣} + جـ$

السؤال الثاني

افرض م = ظا س ⇐ $م^{٢} + ١ = قا^{٢}س$
$د م = قا^{٢}س\,د س$

$\int ص\,د ص = \int قا^{٤}س\,ظا^{٢}س\,د ص$

$\frac{ص^{٢}}{٢} = \int قا^{٢}س\;قا^{٢}س\;ظا^{٢}س\,د ص$

$= \int (م^{٢}+١)\,م^{٢}\,د م = \frac{م^{٥}}{٥} + \frac{م^{٣}}{٣} + جـ = \frac{ظا^{٥}س}{٥} + \frac{ظا^{٣}س}{٣} + جـ_{١}$

اذن $ص^{٢} = \frac{٢}{٥}ظا^{٥}س + \frac{٢}{٣}ظا^{٣}س + جـ$ حيث $جـ = ٢\,جـ_{١}$

السؤال الثالث

أ) $\int \frac{(١+س)^{٧}}{س^{٩}}\,د س = \int \frac{(١+س)^{٧}}{س^{٧}} \times \frac{١}{س^{٢}}\,د س = \int \frac{(١+س)^{٧}}{س^{٧}} \times \frac{١}{س^{٢}}\,د س$

افرض ص = $١ + \frac{١}{س}$
$د ص = \frac{-١}{س^{٢}}\,د س$

$= \int (١+\frac{١}{س})^{٧} \times \frac{١}{س^{٢}}\,د س = -\int ص^{٧} \times د ص = \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ = \frac{-(١+\frac{١}{س})^{٨}}{٨} + جـ$

افرض ص = $س^{٤} - ١$ ⇐ $\frac{١}{٤}\,د ص = س^{٣}\,د س$

ب) $\int س^{٣}\sqrt[٣]{س^{٧} - س^{٣}} = \int س\sqrt[٣]{س^{٤} - ١}\,د س$

افرض ص $\int \frac{١}{٤}\sqrt[٣]{ص}\,د ص = د س = \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} \times ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{٣}{١٦}(س^{٤} - ١)^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

السؤال الأول

أ) $\int$ ٥ س $\sqrt{س + ٣}$ د س = ٥ س × $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{(س + ٣)^{٣}}$ − $\int$ ٥ (س + ٣)$^{\frac{٣}{٢}}$ د س

= $\frac{١٠}{٣}$ س $\sqrt{(س + ٣)^{٣}}$ − $\frac{٤}{٥}$ (س + ٣)$^{\frac{٥}{٢}}$ + جـ

افرض ق = ٥ س
د هـ = $\sqrt{س + ٣}$ د س

ب) $\int \frac{س\ جا\ س}{قا\ س}$ د س = $\int$ س جا س جتا س د س

= $\frac{١}{٢}\int$ س جا٢ س د س = $\frac{١}{٢}$ [− $\frac{س}{٢}$ جتا ٢ س + $\frac{١}{٢}\int$ جتا ٢ س د س]

= $\frac{-١}{٤}$ س جتا ٢ س + $\frac{١}{٨}$ جا٢ س + جـ

جـ) $\int$ س^{٣} جتا س^{٢} د س

افرض ص = س^{٢}

د ص = ٢ س د س

$\frac{١}{٢}$ س^{٢} د س = س^{٣} د س

$\frac{١}{٢}$ ص د ص = س^{٣} د س

إذن $\int$ س^{٣} جتا س^{٢} د س = $\frac{١}{٢}\int$ ص جتا ص دص

= $\frac{١}{٢}$ [ص جا ص + جتا ص] + جـ

= $\frac{١}{٢}$ [س^{٢} جا س^{٢} + جتا س^{٢}] + جـ

افرض ق = ص
د هـ = جتاص د ص

د) $\int \frac{س\ جا\ س}{جتا^{٣}\ س}$ د س = $\int$ س $\frac{جا\ س}{جتا\ س}$ × $\frac{١}{جتا^{٢}\ س}$ د س

= $\int$ س ظا س قا^{٢} س د س

= س . $\frac{ظا^{٢}\ س}{٢}$ − $\int \frac{ظا^{٢}\ س}{٢}$ د س = $\frac{١}{٢}$ س ظا^{٢} س − $\int$ (قا^{٢} س − ١) د س

= $\frac{١}{٢}$ س ظا^{٢} س − $\frac{١}{٢}$ ظا س + $\frac{١}{٢}$ س + جـ

افرض ق = س
د هـ = ظا س قا س دس

هـ) $\int \frac{٣س}{\sqrt[٣]{١+س}}$ دس = $\int$ ٣س $\sqrt[٣]{٢س+١}$ دس

افرض ق = ٣س
دهـ = $\sqrt[٣]{٢س+١}$ دس

$= ٣س \times \frac{٣}{٨} (٢س+١)^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٩}{٨}\int (٢س+١)^{\frac{٤}{٣}}$ دس

$= \frac{٩}{٨}$ س$(٢س+١)^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٩}{٨} \times \frac{٣}{٢\times٧}(٢س+١)^{\frac{٧}{٣}}$ + جـ

$= \frac{٩}{٨}$ س$(٢س+١)^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٢٧}{١١٢}(٢س+١)^{\frac{٧}{٣}}$ + جـ

و) $\int$ جا$\sqrt{س}$ جتا$^{٣}\sqrt{س}$ دس

افرض ص = $\sqrt{س}$ ⇐ ص^{٢} = س ⇐ ٢ ص د ص = د س

$\int$ جا$\sqrt{س}$ جتا$^{٣}\sqrt{س}$ د س = $\int$ جا ص جتا^{٣} ص × ٢ ص د ص ،

أفرض ق = ص، د هـ = جاص جتا^{٣}ص دص

= ٢ $\int$ ص جا ص جتا^{٣} ص د ص

هـ = $\int$ جا ص جتا^{٣} ص د ص يحل بالتعويض

بفرض م = جتا ص ⇐ هـ = $\frac{جتا^{٤}ص}{٤}$

= ٢ $\left[-\frac{ص}{٤}\right.$ جتا^{٤} ص $- \int - \left.\frac{جتا^{٤}ص}{٤} . دص\right]$ + جـ

$- \frac{ص}{٢}$ جتا^{٤} ص + $\frac{١}{٣٢}$ جا ٤ ص + $\frac{٣}{٨}$ ص + $\frac{جا ٢ ص}{٤}$ + جـ

$= - \frac{\sqrt{س}\ جتا^{٤}\sqrt{س}}{٢} + \frac{١}{٣٢}$ جا ٤$\sqrt{س}$ + $\frac{٣}{٨}\sqrt{س}$ + $\frac{س\ جا ٢\sqrt{س}}{٤}$ + جـ

ز) $\int$ س$^{٢}\sqrt{١-س}$ د س = س^{٢} $\frac{٢}{٣}$ $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$ + $\int \frac{٤}{٣}$ س $(١-س)^{\frac{٣}{٢}}$

افرض ص = س^{٢}
دهـ = $\sqrt{١-س}$ دس

$= \frac{٢}{٣}$ س^{٢} $(١-س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{-٤}{٣}$ س × $\frac{٢}{٥}$ $(١-س)^{\frac{٥}{٢}} - \int \frac{٨}{١٥} (١-س)^{\frac{٥}{٢}}$ د س

$= \frac{٢}{٣}$ س^{٢} $(١-س)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٨}{١٥}$ س $(١-س)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{٨}{١٥} \times \frac{٢}{٧} (١-س)^{\frac{٧}{٢}}$ + جـ

ح) $\int$ س^{٥} $\sqrt[٣]{س^{٣}+١}$ د س

افرض ص = س^{٣} + ١ ⇐ س^{٣} = ص − ١

د ص = ٣ س^{٢} د س

$\int$ س^{٥} $\sqrt[٣]{س^{٣}+١}$ د س = $\int$ (ص − ١) ص$^{\frac{١}{٣}}$ دص = $\int \frac{١}{٣}$ (ص$^{\frac{٤}{٣}}$ − ص$^{\frac{١}{٣}}$) دص

$= \frac{٣}{٧}$ (س^{٣} + ١)$^{\frac{٧}{٣}}$ − $\frac{٣}{٤}$ (س^{٣} + ١)$^{\frac{٤}{٣}}$ + جـ

ط) $\int س^{٥} \sqrt[٣]{س^{٣} + ١}\, دس = \frac{١}{٣} \int ص^{\frac{١}{٣}} (ص - ١)^{٣}\, دص$

$= \int (ص - ١)^{٣} ص^{\frac{١}{٣}}\, دص$

افرض ق $= (ص - ١)^{٣}$
د هـ $= ص^{\frac{١}{٣}}$ دص

$= \frac{١}{٣} [(ص - ١)^{٣} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} - \int ٣ (ص - ١)^{٢} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}}\, دص]$

$= \frac{١}{٣} [\frac{٣}{٤} (ص - ١)^{٣} ص^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٩}{٤} \int (ص - ١)^{٢} ص^{\frac{٤}{٣}}\, دص]$

$= \frac{١}{٤} (ص - ١)^{٣} ص^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{٤} \int (ص^{٢} - ٢ص + ١) \times ص^{\frac{٤}{٣}}\, دص$

$= \frac{١}{٤} (ص - ١)^{٣} ص^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{٤} \int (ص^{\frac{١٠}{٣}} - ٢ ص^{\frac{٧}{٣}} - ص) \; ص^{\frac{٤}{٣}} - دص$

$= \frac{١}{٤} (ص - ١)^{٣} ص^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{٤} [\frac{٣}{١٣} ص^{\frac{١٣}{٣}} - \frac{٦}{١٠} ص^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٣}{٧} ص^{\frac{٧}{٣}}] + جـ$

$= \frac{١}{٤} (س^{٣} (س^{٣} + ١)^{\frac{٤}{٣}} - \frac{٣}{٤} [\frac{٣}{١٣} (س^{٣} (س^{٣} + ١)^{\frac{١٣}{٣}} - (\frac{٦}{١٠} ١ س^{٣} + ١)^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٣}{٧} (س^{٣} + ١)^{\frac{٧}{٣}}] + جـ$

٢) $\int_{٢}^{-١} س\, قَ(٣ - ٢س)\, دس$

افرض ص $= ٣ - ٢$ س $\Leftarrow$ س $= \frac{٣ - ص}{٢}$
$- \frac{١}{٢}$ دص = دس
$- \frac{١}{٤}$ (٣ − ص) دص = س دس
س = ٢ $\Leftarrow$ ص = −١
س = −١ $\Leftarrow$ ص = ٥

$\int_{-١}^{٥} قَ(ص) \times - \frac{١}{٤} (٣ - ص)\, دص$

$= \frac{-١}{٤} \int_{١}^{٥} (٣ - ص)\, قَ(ص)\, دص$

$= - \frac{١}{٤} \left[(٣ - ص)\, ق(ص) + \int_{-١}^{٥} ق(ص)\, دص\right]$

$= - \frac{١}{٤} \left[-٢\, ق(٥) - ٤\, ق(-١) + \int_{-١}^{٥} ق(ص)\right]$

$= - \frac{١}{٤} \left[-٢ \times ٣ - ٤ \times ٤ + ٤\right]$

$= \frac{-١}{٤} \times -١٨ = \frac{٩}{٢}$

السؤال الأول

أ) الشكل (٤ – ١٣)

$م = \int_{-١}^{٢} (س^{٢} + ١ - س)\, د\, س = \left[\frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + س\right]_{-١}^{٢} = \frac{١}{٣}(٨ - ١) - \frac{١}{٢}(٤ - ١) + ٣ = \frac{٢٣}{٦}$ وحدة مساحة

ب) الشكل (٤ – ١٤)

$م = \int_{٠}^{٤} (\sqrt{س} + \frac{١}{٢} س)\, د\, س = \left[\frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{١}{٤} س^{٢}\right]_{٠}^{٤} = \frac{٢}{٣}(٨ - ٠) + \frac{١}{٤}(١٦ - ٠) = \frac{٢٨}{٣}$ وحدة مساحة

جـ) الشكل (٤ – ١٥)

$م = \int_{-٢}^{٠} (\sqrt{٢ - س} + س)\, د\, س + \int_{٠}^{٢} \sqrt{٢ - س}\, د\, س$

$= \frac{-٢}{٣} (٢ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{٠} + \left[\frac{-٢}{٣} (٢ - س)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٠}^{٢} = \frac{٢٢ + \sqrt{٨}}{٣}$ وحدة مساحة

د) الشكل (٤ – ١٦)

$م = \int_{\frac{١}{٢}}^{١} (٢ - \frac{١}{س^{٢}})\, د\, س + \int_{١}^{٢} (٢ - س)\, د\, س$ وبحساب قيمة التكاملين تكون قد اوجدت مساحة المنطقة المظللة

هـ) الشكل (٤ – ١٧)

$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (جتا\, س - جا\, س)\, د\, س + \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} (جا\, س - جتا\, س)\, د\, س$

$= \left[(جا\, س + جتا\, س)\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} + \left[(-جتا\, س - جا\, س)\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} - ١ + (٠ - ١ + \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}) = \frac{٤ - ٢\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

و) الشكل (٤ – ١٨)

$م = \int_{٠}^{١} (٣\, س - س)\, د\, س + \int_{١}^{٢} (٤\, س - س)\, د\, س = ٢$ وحدة مساحة .

السؤال الثاني

أ) $م = \int_{٠}^{٢} (٢\, س + ٤)\, د\, س = ١٢$ وحدة مساحة .

ب) $م = \int_{-٢}^{٠} -س^{٣}\, د\, س + \int_{٠}^{٢} س^{٣}\, د\, س = \frac{-١}{٤}(٠ - ١٦) + \frac{١}{٤}(١٦ - ٠) = ٨$ وحدات .

جـ) $\int_{-١}^{٣} (س^{٢} + ١)\, د\, س = \frac{١}{٣}(٢٧ - ١) + ٤ = \frac{٢٨}{٣}$ وحدة مساحة .

د) $م = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} -جتا\, ٢\, س\, د\, س = \frac{-١}{٢} \left[جا\, ٢\, س\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{٢}$ وحدة .

السؤال الثالث

أ) ق (س) = هـ (س) ⟸ س = ٠

م = $\int_{٠}^{٢}$ (س + ١ + ٢ س – ١) د س = $\frac{٣}{٢}$ س٢ $]_{٠}^{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ وحدة مساحة

ب) ق (س) = هـ (س) ⟸ س٢ = ٤س ⟸ س = ٠ ، ٤

م = $\int_{٠}^{٤}$ (٤ س – س٢) د س = ٢ س٢ – $\frac{١}{٣}$ س٣ $]_{٠}^{٤}$ = ٣٢ – $\frac{٦٤}{٣}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة

جـ) ق (س) = هـ (س) ⟸ $\sqrt{س}$ = – س ⟸ س٢ = س ⟸ س = ٠، ١ لكن ١ ليس نقطة تقاطع لأن ق (١) ≠ هـ (١)

م = $\int_{١}^{٤}$ ($\sqrt{س}$ + س) د س = $\frac{٧٣}{٦}$ وحدة مساحة

السؤال الرابع

أ) م = $\int_{-٢}^{٢}$ (٩ – س٢ – ٥) د س

اكمل الحل

ب) م = $\int_{-١}^{١}$ ((س٣ + ١) – (س٣ + س٢)) د س

= $\int_{-١}^{١}$ (١ – س٢) د س = $\frac{٤}{٣}$ وحدة مساحة

السؤال الخامس

أ) م = $\int_{٠}^{٧}$ ق (س) د س = $\frac{١}{٢}$ + – ٤ + ٤ + $\frac{٣}{٢}$ = – ٢

ب) $\int_{٠}^{٧}$ |ق (س)| د س = $\frac{١}{٢}$ + ٤ + ٤ + $\frac{٣}{٢}$ = ٦

جـ) |$\int_{٠}^{٧}$ ق (س) د س| = ٢

السؤال السادس

أ) $\int_{٠}^{٥}$ ق (س) د س = ٦ + – ٤ = ٢

ب) $\int_{٠}^{٥}$ |ق (س)| س = ٦ + ٤ = ١٠ وحدات

السؤال الأول

أ) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}}$

ب) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

جـ) $\text{ق}'(\text{س}) = ٢\,\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{س}$

د) $\text{ق}'(\text{س}) = -\,\text{ظا}\,\text{س}$

هـ) $\text{ق}'(\text{س}) = ٦\,\text{ظتا}\,٢\text{س}$

و) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣}{٣\text{س} - ٤}$ ، $\forall\ \text{س} \in \text{ح} - \{\frac{٤}{٣}\}$

ز) $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ظتا}\,\text{س}$

ح) $\text{ق}'(\text{س}) = ٣\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣\,(\text{لو}\,\text{س})^{٢}}{\text{س}}$

ط) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} - \frac{٢\text{س}}{١ + \text{س}^{٢}}$

ي) $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١ + \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^{٢} - ١}}$

السؤال الثاني

أ) $\square\ \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٥}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^{٢} + ٥| + \text{جـ}$

ب) $\square\ \frac{٦}{\text{س}}\,\text{د س} = ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

جـ) $\square\ \frac{\text{س} + ١}{\text{س}}\,\text{د س} = \square\ (١ + \frac{١}{\text{س}})\,\text{د س} = \text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

د) $\square\ \frac{\text{د س}}{\text{س}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \square\ \frac{\frac{١}{\text{س}}\,\text{د س}}{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \text{جـ}$

هـ) $\int \text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} \times \text{د س}$

$\text{ق} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}$ ، $\text{د م} = \text{س}$

$\text{د ق} = ٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\,\frac{١}{\text{س}}\,\text{د س}$ ، $\text{م} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$$\int \text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{د س} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س د س}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - [\text{س لو س} - \text{س}] + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٣}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \text{س لو س} + \text{س} + \text{جـ}$$

و) $\int_{٠}^{\text{هـ}} \frac{\text{د س}}{\text{س}+\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{هـ}|\,]_{٠}^{\text{هـ}} = \text{لو}_{\text{هـ}}٢\text{هـ} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{هـ} = \text{لو}_{\text{هـ}}٢$

ز) $\int \frac{١+\text{ظا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا س}}\,\text{د س} = \int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{ظا س}}\,\text{د س} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظا س}| + \text{جـ}$

ح) $\int \text{ظا س د س} = \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}\,\text{د س} = -\int \frac{-\text{جا س}}{\text{جتا س}}\,\text{د س} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا س}| + \text{جـ}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قا س}| + \text{جـ}$

ط) $\int \frac{\text{جا ٣ س}}{١+\text{جتا ٣ س}}\,\text{د س} = \frac{-١}{٣}\int \frac{-٣\,\text{جا ٣ س}}{١+\text{جتا ٣ س}}\,\text{د س} = \frac{-١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|١+\text{جتا ٣ س}| + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٢+\sqrt{\text{س}})}\,\text{د س}$

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = \text{س} \Leftarrow ٢\,\text{ص د ص} = \text{د س}$

$$= \int \frac{٢\,\text{ص د ص}}{\text{ص}\,(٢+\text{ص})} = \int \frac{٢}{٢+\text{ص}}\,\text{دص}$$

$$٢\,\text{لو}\,|\text{ص}| + \text{جـ} = ٢\,\text{لو}\,\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

السؤال الأول

أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ + ٥\,\text{هـ}^{٥\text{س}}$

ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}} + ٢\,\text{س}^{٤}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

جـ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جا}(\text{هـ}^{\text{س}})$

د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\,(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} \times \text{هـ}^{\text{س}} = ٣\,\text{هـ}^{٢\text{س}} \times \text{هـ}^{\text{س}} = ٣\,\text{هـ}^{٣\text{س}}$

هـ) $\text{ص} = ١ + \text{هـ}^{-\text{س}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = -\text{هـ}^{-\text{س}} = \frac{-١}{\text{هـ}^{\text{س}}}$

و) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}^{٣}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٣\,\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٣}}$

ز) $\text{ص} = (\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\,\text{س})^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٢}\,(\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\,\text{س})^{-\frac{١}{٢}}\,(٢\,\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢) = \frac{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}{\sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ٢\,\text{س}}}$

ح) $\text{ص} = \text{جا}^{٢}\,\text{س} + ١ \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\,\text{جا س جتا س} = \text{جا } ٢\,\text{س}$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س} = \frac{\pi}{٣}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

السؤال الثاني

$\text{ص}' = \text{جتا س هـ}^{\text{س}} + \text{جا س هـ}^{\text{س}}$

$\text{ص}'' = -\text{جا س هـ}^{\text{س}} + \text{جتا س هـ}^{\text{س}} + \text{جتا س هـ}^{\text{س}} + \text{جا س هـ}^{\text{س}} = ٢\,\text{جتا س هـ}^{\text{س}}$

$\text{ص}'' - ٢\,\text{ص}' + ٢\,\text{ص} = \text{جتا هـ}^{\text{س}}\,\text{س} - ٢\,\text{س هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{جا س هـ}^{\text{س}} + ٢\,\text{جا س هـ}^{\text{س}} = \text{صفرًا}$

السؤال الثالث

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{هـ}^{\text{س}} + (\text{س} - ١)\,\text{هـ}^{\text{س}} + \frac{٣}{\text{س}}$

$\text{م} = \left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=١} = \text{هـ} + ٣$

معادلة المماس هي: $\text{ص} - ٢ = (\text{هـ} + ٣)(\text{س} - ١)$

$\text{ص} - ٢ = (\text{هـ} + ٣)\,\text{س} - \text{هـ} - ٣$

$\text{ص} = (\text{هـ} + ٣)\,\text{س} - \text{هـ} - ١$

السؤال الرابع

أ) $\int$ هـ$^{٢س+١}$ دس = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢س+١}$ + جـ

ب) $\int$ س هـ$^{س^٢}$ ٢ س = $\frac{١}{٢}$ $\int$ هـ^{ص} دص = $\frac{١}{٢}$ هـ^{ص} + جـ = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{س^٢}$ + جـ

افرض ص = س^{٢}
$\frac{١}{٢}$ دص = س دس

جـ) $\int_{١}^{٣}$ هـ^{٢} دس = ٢ هـ^{٢}

د) $\int$ جا ٢ س هـ$^{جا^٢س}$ دس = $\int$ هـ^{ص} دص = هـ^{ص} + جـ = هـ$^{جا^٢س}$ + جـ

افرض ص = جا^{٢} س
دص = ٢ جاس جتاس دس
دص = جا ٢ س دس

هـ) $\int_{-١}^{٢}$ س^{٢} هـ^{س} دس

افرض ق = س^{٢} ، دم = هـ^{س} دس
دق = ٢ س دس ، م = هـ^{س}

$\int_{-١}^{٢}$ س^{٢} هـ^{س} = س^{٢} هـ^{س} –]$_{-١}^{٢}$ – $\int_{-١}^{٢}$ ٢س هـ^{س} دس = س^{٢} هـ^{س} – ٢ س هـ^{س}]$_{-١}^{٢}$ = هـ^{٢}

و) $\int \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^٢}$ دس

افرض ص = $\frac{٣}{س}$ ⇐ دص = $\frac{-٣}{س^٢}$ دس ⇐ – $\frac{١}{٣}$ دص = $\frac{١}{س^٢}$ دس

اذن $\int \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^٢}$ = $\frac{-١}{٣}$ $\int$ هـ^{ص} دص = – $\frac{١}{٣}$ هـ^{ص} + جـ = – $\frac{١}{٣}$ هـ$^{\frac{٣}{س}}$ + جـ

السؤال الخامس

أ) $\square_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٤ + \text{هـ}^{\text{س}}} = \text{لو}_{\text{هـ}} \left[٤ + \text{هـ}^{\text{س}}\right]_{٠}^{\text{لو}_{\text{هـ}}٣} = ٢$

السؤال السادس

صَ = أ $\text{هـ}^{\text{أس}}$ ، صً = أ $\text{هـ}^{\text{أس}}$

صً − ٥ صَ + ٦ ص = ∴ ⇐ $\text{أ}^{٢}$ $\text{هـ}^{\text{أس}}$ − ٥ أ $\text{هـ}^{\text{أس}}$ + ٦ $\text{هـ}^{\text{أس}}$ = صفر وبالقسمة على $\text{هـ}^{\text{أس}}$ ينتج

$\text{أ}^{٢}$ − ٥ أ + ٦ = ∴ ⇐ (أ − ٣) (أ − ٢) = ٠ ⇐ أ = ٣ ، أ = ٢

السؤال السابع

$\text{هـ}^{\text{س ص}}$ = س + ص

(ص + س صَ) $\text{هـ}^{\text{س ص}}$ = ١ + صَ

ص $\text{هـ}^{\text{س ص}}$ + س $\text{هـ}^{\text{س ص}}$ صَ = ١ + صَ

صَ (١ − س $\text{هـ}^{\text{س ص}}$) = ص $\text{هـ}^{\text{س ص}}$ − ١ ⇐ صَ = $\frac{\text{ص هـ}^{\text{س ص}} - ١}{١ - \text{س هـ}^{\text{س ص}}} = \frac{\text{ص س} + \text{ص}^{٢} - ١}{١ - \text{س ص} - \text{س}^{٢}}$

إذن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١ - \text{س ص} - \text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢} + \text{س ص} - ١}$

السؤال الاول

$$\int \frac{\text{د س}}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)} = \int \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٤}\,\text{د س} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س} + ١}\,\text{د س}$$

حيث أ (س + ١) + ب (س − ٤) = ١

$\text{أ} = \frac{١}{٥}$ ، $\text{ب} = \frac{-١}{٥}$

$$\int \frac{\text{د س}}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)} = \frac{١}{٥}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ٤| - \frac{١}{٥}\,\text{لو}|\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

السؤال الثاني

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٤\text{س} - ١}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢} = \int_{٢}^{٤} \frac{\text{أ}}{\text{س} + ٢}\,٢\,\text{س} + \int_{٢}^{٤} \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١}\,\text{د س}$$

جد أ ، ب باستخدام المتطابقة أ (ب − ١) + ب (س + ٢) = ٤ س − ١ ثم أكمل الحل

السؤال الثالث

$$\int \frac{٢\text{س}^٢ + ٣}{\text{س}^٢ - \text{س}}\,\text{د س} = \int ٢\,\text{د س} + \int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}(\text{س} - ١)}\,\text{د س}$$

استخدام الكسور الجزئية لحساب $\int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}(\text{س} - ١)}\,\text{د س}$

حيث $\int \frac{٢\text{س} + ٣}{\text{س}(\text{س} - ١)}\,\text{د س} = \int \frac{\text{أ}}{\text{س}}\,\text{د س} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س} - ١}\,\text{د س}$

السؤال الرابع

$$\int \frac{\text{س}^٣ + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^٢ - ٩}\,\text{د س} = \int \text{س}\,\text{د س} + \int \frac{١٣\text{س} - ٨}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}\,\text{د س}$$

$$\int \frac{١٣\text{س} - ٨}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}\,\text{د س} = \int \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٣}\,\text{د س} + \int \frac{\text{ب}}{\text{س} + ٣}\,\text{د س}$$

جد أ ، ب باستخدام المتطابقة أ (س + ٣) + ب (س − ٣) = ١٣ س − ٨ ثم أكمل الحل:

$$\begin{array}{r|l} & \text{س} \\ \hline \text{س}^٢ - ٩ & \text{س}^٣ + ٤\text{س} - ٨ \\ & \text{س}^٣ - ٩\text{س} \\ \hline & ١٣\text{س} - ٨ \end{array}$$

السؤال الخامس

$$\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ٢}\,\text{د س}$$

افرض ص = $\sqrt{\text{س} - ٢}$ $\Leftarrow$ ص^٢ = س − ٢

٢ ص د ص = د س

$$\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٢} - ٢}\,\text{د س} = \int \frac{\text{ص} + ١}{\text{ص} - ١}\,٢\,\text{ص د ص}$$

$$\begin{array}{r|l} & ٢\text{ص} + ٤ \\ \hline \text{ص} - ١ & ٢\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} \\ & ٢\text{ص}^٢ - ٢\text{ص} \\ \hline & ٤\text{ص} \\ & ٤\text{ص} - ٤ \\ \hline & ٤ \end{array}$$

$$= \square \frac{\text{٢ ص}^{٢} + \text{٢ ص}}{\text{ص} - \text{١}} \text{ د ص}$$

$$= \square (\text{٢ ص} + \text{٤}) \text{ د ص} + \square \frac{\text{٤}}{\text{ص} - \text{١}} \text{ د ص} = \text{ص}^{٢} + \text{٤ ص} + \text{٤ لو}_{\text{هـ}} |\text{ص} - \text{١}| + \text{جـ}$$

$$= \text{س} - \text{٢} + \text{٤}\sqrt{\text{س} - \text{٢}} + \text{٤ لو}_{\text{هـ}} \left|\sqrt{\text{س} - \text{٢}} - \text{١}\right| + \text{جـ}$$

السؤال السادس

$$\square \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \text{٤}} \text{ د س} \quad \text{افرض ص} = \sqrt{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = \text{س}$$

$$\text{٢ ص د ص} = \text{د س}$$

$$\square \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - \text{٤}} \text{ د س} = \square \frac{\text{ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{٢}} \times \text{٢ ص د ص} = \square \frac{\text{٢ ص}^{٢} + \text{٢ ص}}{\text{ص} - \text{١}} \text{ د ص} = \square \frac{\text{٢ ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - \text{٤}} \text{ د ص}$$

٢
ص² − ٤) ٢ ص²
٢ ص² − ٨
٨

$$= \square \text{٢ د ص} + \square \frac{\text{٨}}{(\text{ص} - \text{٢})(\text{ص} + \text{٢})} \text{ د ص}$$

استخدم الكسور الجزئية لحساب $\square \frac{\text{٨}}{(\text{ص} - \text{٢})(\text{ص} + \text{٢})} \text{ د ص}$

السؤال السابع

$$\square \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}} \text{ د س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤}} = \square \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤}} \text{ د س}$$

افرض $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{\text{٢س}}$ ، $\text{د ص} = \text{هـ}^{\text{س}} \text{ د س}$

$\text{هـ}^{\text{٢س}} \text{ د ص} = \text{هـ}^{\text{٣س}}$

$\text{ص}^{٢} \text{ د ص} = \text{هـ}^{\text{٣س}} \text{ د س}$

$$\therefore \square \frac{\text{هـ}^{\text{٣س}} \text{ د س}}{\text{هـ}^{\text{٢س}} - \text{٣هـ}^{\text{س}} - \text{٤}} = \square \frac{\text{ص}^{٢} \text{ د س}}{\text{ص}^{٢} - \text{٣ ص} - \text{٤}} = \square \text{١ . د ص} + \square \frac{\text{٣ ص} - \text{٤}}{(\text{ص} - \text{٤})(\text{ص} + \text{١})} \text{ د ص}$$

استخدم الكسور الجزئية لإيجاد $\square \frac{\text{٣ ص} - \text{٤}}{(\text{ص} - \text{٤})(\text{ص} + \text{١})}$

السؤال الثامن

$$\square \frac{\text{س د س}}{\text{س}^{٢}(\text{س}^{٢} + \text{١})} \text{ ، افرض ص} = \text{س}^{٢} \Leftarrow \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ د ص} = \text{س د س}$$

$\square \frac{\text{س د س}}{\text{س}^{٢}(\text{ص}^{٢} + \text{١})} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \square \frac{\text{د ص}}{\text{ص}(\text{ص} + \text{١})}$ وهذا التكامل يحل باستخدام الكسور الجزئية.

السؤال الأول

أ) $\int_{2}^{3} \sqrt{4\text{س}+1}\ \text{دس} = \int_{2}^{3} (4\text{س}+1)^{\frac{1}{2}}\ \text{دس} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \left[(4\text{س}+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{2}^{3}$

$= \frac{1}{6}\left[(13)^{\frac{3}{2}} - (9)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{6}\left[\sqrt{(13)^{3}} - 27\right]$

ب) $\int_{1}^{3} \frac{(\text{س}+1)^{7}}{\text{س}^{9}}\ \text{دس} = \int_{1}^{3} \frac{(\text{س}+1)^{7}}{\text{س}^{7}} \times \frac{1}{\text{س}^{2}}\ \text{دس} = \int_{1}^{3} \left(1 + \frac{1}{\text{س}}\right)^{7} \frac{1}{\text{س}^{2}}\ \text{دس}$

افرض $\text{ص} = \frac{\text{س}+1}{\text{س}} \Leftarrow \text{دص} = \frac{-1}{\text{س}^{2}}\ \text{دس}$ ، $\text{س} = 1 \Leftarrow \text{ص} = 2$ ، $\text{س} = 3 \Leftarrow \text{ص} = \frac{4}{3}$

إذن $\int_{1}^{3} \frac{(\text{س}+1)^{7}}{\text{س}^{9}}\ \text{دس} = \int_{2}^{\frac{4}{3}} \text{ص}^{7}\ \text{دص} = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{8} - (2)^{8}\right]$

جـ) $\int_{1}^{4} |\text{س}^{2} - 9|\ \text{دس} = \int_{1}^{3} (9 - \text{س}^{2})\ \text{دس} + \int_{3}^{4} (\text{س}^{2} - 9)\ \text{دس} = 9(3-1) - \left[\frac{\text{س}^{3}}{3}\right]_{1}^{3} + \left[\frac{\text{س}^{3}}{3}\right]_{3}^{4} - 9(4-3) = \frac{38}{3}$

د) $\int_{1}^{7} \left[\frac{1}{3}\text{س} - 2\right] = \int_{1}^{3} -2\ \text{دس} + \int_{3}^{6} -1\ \text{دس} + \int_{6}^{7} \text{صفر}\ \text{دس} = -7$

هـ) $\int \sqrt{\text{هـ}^{3\text{س}}}\ \text{دس} = \int \text{هـ}^{\frac{3}{2}\text{س}}\ \text{دس} = \frac{2}{3}\text{هـ}^{\frac{3}{2}\text{س}} + \text{جـ}$

و) $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{\text{س}}}\ \text{دس}$ ، افرض $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^{3} = \text{س} \Leftarrow 3\text{ص}^{2}\ \text{دص} = \text{دس}$

$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{\text{س}}} = \int \frac{3\text{ص}^{2}}{1+\text{ص}}\ \text{دص} = \int (3\text{ص} - 3)\ \text{دص} + \int \frac{1}{1+\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \frac{3}{2}\text{ص}^{2} - 3\text{ص} + \frac{1}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |1+\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\text{س}^{2}} - 3\sqrt[3]{\text{س}} + \frac{1}{3}\ \text{لو}_{\text{هـ}} |1+\sqrt[3]{\text{س}}| + \text{جـ}$

ز) $\int \text{جاس هـ}^{\text{س}}\ \text{دس} = \text{جاس هـ}^{\text{س}} - \int \text{جتاس هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

افرض ق = جاس ، د م = هـ^س د س

$= \text{جاس هـ}^{\text{س}} - \left[\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتاس} + \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس دس}\right]$

$= \text{جاس هـ}^{\text{س}} - \text{جتاس هـ}^{\text{س}} - \int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس دس} + \text{جـ}$

□ جا س هـ^س د س = جا س هـ^س − هـ^س جتا س + جـ

□ جا س هـ^س د س = $\frac{\text{جا س هـ}^{\text{س}} - \text{جتا س هـ}^{\text{س}}}{٢}$ + جـ

ح) □ قا^٢س لوهـ ظا^٢ دس

افرض ص = ظا س ⇐ دص = قا^٢ س دس

□ قا^٢س لوهـ ظاس دس = □ لوهـ ص دص = ص لوهـ − ص + جـ

= ظاس لوهـ س − ظا س + جـ

ط) □ $\frac{\text{لو}\sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} + ٢}$ دس =

افرض ص = √(س + ٢) ⇐ ص^٢ = س + ٢ ⇐ ٢ص دص = دس

□ $\frac{\text{٢ ص لو ص}}{\text{ص}^٢}$ دص = ٢ □ لو ص $\frac{١}{\text{ص}}$ د ص

افرض ع = لوهـ ص ⇐ دع = $\frac{١}{\text{ص}}$ دص

= ٢ □ ع دع = ع^٢ + جـ = (لوهـ √(س + ٢))^٢ + جـ

ي) □ $\frac{\text{د س}}{\text{س}^{١٠} + \text{س}}$ = □ $\frac{\text{د س}}{\text{س}^{١٠}(١ + \frac{١}{\text{س}^٩})}$ = □ $\frac{\text{س}^{-١٠}\text{دس}}{١ + \text{س}^{-٩}}$ $\frac{-١}{٩}$ دس □ $\frac{-٩ \text{ س}^{-١٠}}{١ + \text{س}^{-٩}}$ دس

= − $\frac{١}{٩}$ لوهـ | ١ + س^-٩ | + جـ

= − $\frac{١}{٩}$ لوهـ | ١ + $\frac{١}{\text{س}^٩}$ | + جـ

ك) □ $\frac{\sqrt{\text{س}^٢ - \text{س}^٤}}{\text{س}^٥}$ دس = □ $\frac{\text{س}^٢\sqrt{\frac{١}{\text{س}^٢} - ١}}{\text{س}^٥}$ دس

= □ $\sqrt{\frac{١}{\text{س}^٢} - ١}$ × $\frac{١}{\text{س}^٣}$ دس

افرض ص = $\frac{١}{\text{س}^٢}$ − ١ ⇐ $\frac{-١}{٢}$ دص = $\frac{١}{\text{س}^٣}$ دس

إذن □ $\frac{\sqrt{\text{س}^٢ - \text{س}^٤}}{\text{س}^٥}$ دس $\frac{١}{٢}$ □ √ص دص = $\frac{١}{٣}$ $\sqrt{(\frac{١}{\text{س}^٢} - ١)^٣}$ + جـ

السؤال الثاني

أ) ق (س) = ٢س −٢

قَ (س) = ٢

ب) $\int_{٣}^{١}$ (هـ (س) − ٢ ق (س) + ٢س − ٤) دس = $\int_{٣}^{١}$ (هـ (س) − ٢ $\int_{٣}^{١}$ ق (س) دس + [س^{٢} − ٤س]$_{٣}^{١}$

= − ٥ − ٢ × − ٦ + (١ − ٤) − (٩ − ١٢) = ٧

السؤال الثالث

افرض كثير الحدود ق (س) = أ س + ب

$\int_{-١}^{١}$ (أ س + ب) دب = ٤

أ $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$]$_{-١}^{١}$ + ٢ب = ٤

$\frac{\text{أ}}{٢}$ (١ − ١) + ٢ب = ٤ ⇐ ب = ٢

$\int_{١}^{٣}$ (أ س + ٢) دس = ٢ س^{٢}]$_{١}^{٣}$ + ٢ (٣ −١) = ٢ ⇐ $\frac{\text{أ}}{٢}$ (٩ − ١) + ٤ = ٢ ⇐ أ = $\frac{-١}{٢}$

إذن ق (س) = − $\frac{١}{٢}$ س + ٢

السؤال الرابع

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ⇐ $\frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$ = $\frac{\text{د س}}{\text{س}}$

$\int \frac{\text{د ص}}{\text{ص}}$ = $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}}$

لو$_{\text{هـ}}$ | ص | = لو$_{\text{هـ}}$ | س | + جـ

ص = هـ$^{\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}| + \text{جـ}}$

ص = هـ$^{\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}|}$ × هـ$^{\text{جـ}}$

ص = حـ$_{١}$ |س| حيث جـ$_{١}$ = هـ$^{\text{جـ}}$

السؤال الخامس

أ) ص^{٢} = لو$_{هـ}$ س ص − هـ$^{س^{٢}}$

٢ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{١ × ص + س } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}}{\text{س ص}}$ − ٢ س هـ$^{س^{٢}}$

٢س ص^{٢} $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ص + س $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ − ٢س^{٢} ص هـ$^{س^{٢}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ (٢س ص^{٢} − س) = ص − ٢س^{٢} ص هـ$^{س^{٢}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{ص − ٢س}^{٢}\text{ص هـ}^{س^{٢}}}{\text{٢س ص}^{٢}\text{ − س}}$

ب) ص = أ$^{ق(س)}$

لو$_{هـ}$ ص = ق (س) لو$_{هـ}$ أ

$\frac{١}{\text{ص}}$ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ (س) × لو$_{هـ}$ أ

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قَ (س) × لو$_{هـ}$ أ × ص = لو$_{هـ}$أ × قَ (س) ص

السؤال السادس

أ) ق (س) = ص

هـ^{س} = ٢

س = لو$_{هـ}$ ٢

م = $\square_{٠}$ (٢ − هـ^{س}) دس = ٢ (لو$_{هـ}$٢ − ٠) − هـ^{س}]$_{٠}^{لو_{هـ}٢}$

= (لو$_{هـ}$٤ − ٢) وحدة مساحة

السؤال الأول

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الإجابة	جـ	د	أ	د	ب	أ	ب	أ	جـ	ب

السؤال الثاني

أ) $\int س^{ن} لو_{هـ} س^{٣} \, دس$

افرض ق = $لو_{هـ} س^{٣}$ ، دم = $س^{ن}$

دق = $\frac{٣}{س}$ دس ، م = $\frac{س^{ن+١}}{ن+١}$

إذن $\int س^{ن} لو_{هـ} س^{٣} \, دس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} لو_{هـ} س^{٣} \, دس - \int \frac{س^{ن}}{ن+١} \, دس$

$= \frac{١}{ن+١} [\, س^{ن+١} لو_{هـ} س^{٣} - \frac{٣س^{٣}}{ن+١} س^{ن+١} \,] + جـ$

ب) $\int \frac{دس}{\sqrt{١ - \sqrt{س}}}$

افرض ص = $١ - \sqrt{س}$ ⟸ $- \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ دس = دص ـ دس = − ٢ (١−ص) دص

إذن $\int \frac{دس}{\sqrt{١ - \sqrt{س}}} = \int \frac{٢(ص-١) دص}{\sqrt{ص}}$

$= ٢ \int (\sqrt{ص} - ص^{\frac{١}{٢}}) \, دص$

$= ٢ \left(\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٤}} - ٢ ص^{\frac{١}{٢}}\right) + جـ = ٢ \left(\frac{٢}{٣}\right)(١ - \sqrt{س})^{\frac{٣}{٢}} - ٢ (٢)(١ - \sqrt{س})^{\frac{١}{٢}} + جـ$

جـ) $\int \frac{قا^{٤}س}{ظا^{٢}س - ظاس - ٢} \, دس$

افرض ص = ظاس ⟸ دص = $قا^{٢}س$ دس

$قا^{٢}س$ دس = $قا^{٤}س$ دس

إذن $\int \frac{قا^{٤}س}{ظا^{٢}س - ظاس - ٢} \, دس = \int \frac{١ + ص^{٢}}{ص^{٢} - ص - ٢} \, دص$

$= \int ١ \, دص + \int \frac{ص + ٣}{ص^{٢} - ص - ٢} \, دص$

= ص + $\frac{٥}{٣}$ ∫ $\frac{١}{ص-٢}$ دص − $\frac{٢}{٣}$ ∫ $\frac{١}{ص+١}$ دس

= ص + $\frac{٥}{٣}$ لوهـ | ص−١ | − $\frac{٢}{٣}$ لوهـ | ص+١ | + جـ

= ظاس + $\frac{٥}{٣}$ لوهـ | ظاس−١ | − $\frac{٢}{٣}$ لوهـ | ظاس+١ | + جـ

افرض ق = (لوهـس)٢ د م = د س

د) ∫ (لوهـس)^٢ = س (لوهـس)^٢ − ∫ س × ٢ لوهـس $\frac{١}{س}$ دس

= س (لوهـس)^٢ − ٢ ∫ لوهـس دس

= س (لوهـس)^٢ − ٢(س لوهـس − س) + جـ

السؤال الثالث

$\int_{-٢}^{٣}$ ق (س) دس = $\int_{-٤}^{٠}$ −س دس + $\int_{٠}^{٣}$ (٣س^٢ + ١) دس

= $[\frac{-س^٢}{٢}]_{-٢}^{٠}$ + $[س^٣ + س]_{٠}^{٣}$ = ٢٨

السؤال الرابع

ق (س) = ٢س هـ$^{س^٢}$ + $\frac{جتا س}{جا س}$ = ٢س هـ$^{س^٢}$ + ظتا س

قَ (س) = ٢ هـ$^{س^٢}$ + ٤س^٢ هـ$^{س^٢}$ − قتا^{٢}س

السؤال الخامس

| س − ٢ | = { س − ٢ ، س ≥ ٢ ؛ ٢ − س ، س < ٢ }

س − ٢ = ١٠ − س^٢

س٢ + س − ١٢ = صفر

بعد تمثيل المنطقة المطلوبة فإن

م = $\int_{٠}^{٢}$ [(١٠ − س^٢)−(٢ − س)] دس + $\int_{٢}^{٣}$ [١٠ − س^٢) − س −٢)] دس

= $\int_{٠}^{٢}$ (٨ + س − س^٢) دس + $\int_{٢}^{٣}$ (١٢ − س − س^٢) دس

والآن يمكنك حساب التكاملين، وبذلك تكون قد حسبت المساحة المطلوبة.

السؤال الأول

$(س + ١)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

السؤال الثاني

$(س - ٢)^٢ + (ص - ٠)^٢ = (س + ٢)^٢ + (ص - ٠)^٢$

$س^٢ - ٤س + ٤ + ص^٢ = س^٢ + ٤س + ٤ + ص^٢$

$٨س = ٠ \Leftarrow س = ٠ \leftarrow$ محور الصادات

السؤال الثالث

$ص = س$ ، $ص = -س$

السؤال الرابع

$\frac{(س - ٩)}{\sqrt{١ + ٠}} = ٣\sqrt{(س - ١)^٢ + ص^٢}$ وبتربيع الطرفين

$(س - ٩)^٢ = ٩ (س^٢ - ٢س + ١ + ص^٢)$

$س^٢ - ١٨س + ٨١ = ٩س^٢ - ١٨س + ٩ + ٩ص^٢$

$٨س^٢ + ٩ص^٢ = ٧٢ \Leftarrow \frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٨} = ١$

السؤال الخامس

$\sqrt{(س + ١)^٢ + (ص - ١)^٢} = \frac{|س - ٢|}{\sqrt{١ + ٠}}$

$\cancel{س^٢} + ٢س + ١ + ص^٢ - ٢ص + ١ = \cancel{س^٢} - ٤س + ٤$

$(ص - ١) ٢ = -٦س + ٣ \Leftarrow (ص - ١)^٢ = -٦ (س - \frac{١}{٢})$

السؤال السادس

$|ن ب_١ - ن ب_٢| = ٨$

$|\sqrt{س^٢ + (ص - ٥)^٢} - \sqrt{س^٢ + (ص + ٥)^٢}| = ٨$

$\sqrt{س^٢ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥} \pm ٨ \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥}$ بتربيع الطرفين

$\cancel{س^٢} + \cancel{ص^٢} - \cancel{١٠}ص + ٢٥ = \cancel{٦٤} \pm ١٦ \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥} + س^٢ + \cancel{ص^٢} + ١٠ص + ٢٥$

$-٢٠ص - ٦٤ = \pm ١٦ \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥}$

$٥ص + ١٦ = \pm ١٦ \sqrt{س^٢ + ص^٢ - ١٠ص + ٢٥}$

$٢٥ص^٢ + \cancel{١٦٠ص} + ٢٥٦ = ١٦س^٢ + ١٦ص^٢ + \cancel{١٦٠ص} + ٤٠٠$

$٩ص^٢ - ١٦س^٢ = ١٤٤ \quad \frac{ص^٢}{١٦} - \frac{س^٢}{٩} = ١$ وهي معادلة المحل الهندسي.

السؤال الأول

أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

ب) (س – ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٣٦

جـ) (س – ٥)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٣٤

د) (س – ٥)^{٢} + (ص + ١) = ٥

السؤال الثاني

أ) المركز (–٣ ، ١) ، نق = ٢ $\sqrt{٣}$

ب) المركز (٠ ، ٧) ، نق = ٩

جـ) المركز (٣ ، ٢) ، نق = $\sqrt{٢٢}$

السؤال الثالث

نصف قطرها يساوي المسافة بين النقطة (٤ ، ٤) والمستقيم ٢س – ص – ٣ = ٠

وبتطبيق قانون المسافة بين نقطة ومستقيم تجد أن نق = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

(س – ٤)^{٢} + (ص – ٤)^{٢} = $\frac{١}{٥}$

السؤال الرابع

الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفرًا

تمر الدائرة بالنقطة (٣ ، –١) ، إذن النقطة (٣ ، –١) تحقق الدائرة أي أن:

٩ + ١ + ٦ل – ٢ك + جـ = صفرًا

ومنه تجد أن: ٦ ل – ٢ك + جـ = –١٠ .... (١)

وكذلك النقطة (١ ، ٥) تحقق معادلة الدائرة أي أن:

١ + ٢٥ + ٢ل + ١٠ك + جـ = صفرًا

ومنه تجد أن ٢ل + ١٠ك + جـ = –٢٦ .... (٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) تجد أن:

ل = ٤ ، جـ = – ٣٤

∴ معادلة الدائرة هي:

س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س – ٣٤ = صفرًا

السوال الخامس

بما أن الدائرة تمس محوري السينات والصادات وتقع في الربع الثالث

ونصف قطرها ٣ وحدات فإن مركزها هو (-٣ ، -٣) ومنه فإن معادلتها

$(س + ٣)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٩$

السوال السادس

مركزها يقع على المستقيم ٢س - ص + ٤ = صفرًا وتمس محور السينات

عند النقطة (١ ، ٠)

مركز الدائرة (- ل ، - ك) = (١ ، - ك)

وهذه تحقق المعادلة

ص = ٢س + ٤

- ك = ٢ + ٤ ⟸ ك = -٦

∴ مركز الدائرةَ (١ ، ٦)

نق = ٦

∴ المعادلة $(س - ١)^٢ + (ص - ٦)^٢ = ٣٦$.

السوال السابع

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي:

$س^٢ + ص^٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفرًا$

النقطة (١ ، ٠) ⟸ ١ + ٢ل + جـ = صفرًا

⟸ ٢ل + جـ = -١.......... (١)

النقطة (٧ ، ٠) ⟸ ٤٩ + ١٤ل + جـ = صفرًا

⟸ ١٤ل + جـ = -٤٩ .... (٢)

النقطة (٥ ، -٣) ⟸ ٢٥ + ٩ + ١٠ل - ٦ك + جـ = ٠

⟸ ١٠ل - ٦ك + جـ = -٣٤ ...... (٣)

وبحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) تجد أن:

ل = -٤ ، ك = $\frac{١}{٦}$ ، جـ = ٧

∴ معادلة الدائرةَ هي $س^٢ + ص^٢ - ٨س + \frac{١}{٣} ص + ٧ = صفرًا$

السوال الثامن

س = ٥ + ٣ جا هـ .... (١)

ص = ٢ + ٣ جتا هـ .... (٢)

من المعادلة (١) : س − ٥ = ٣ جا هـ

$$\frac{\text{س} - ٥}{٣} = ٣\ \text{جا هـ}$$

من المعادلة (٢) : ص − ٢ = ٣ جتا هـ

$$\frac{\text{ص} - ٢}{٣} = \text{جتا هـ}$$

لكن جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١ أي ان

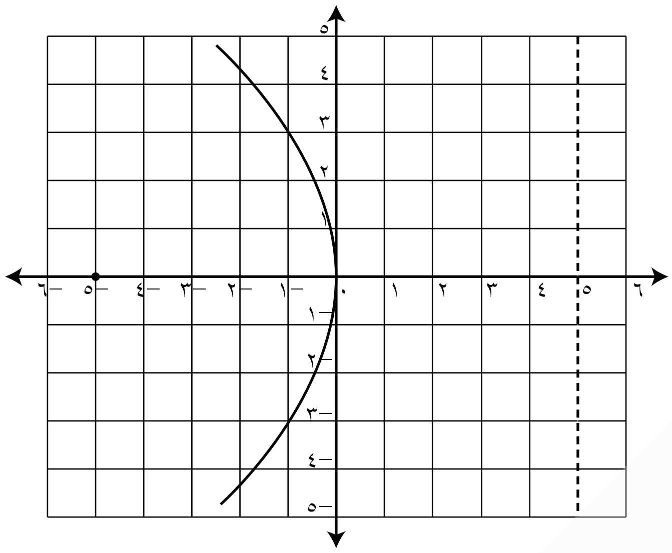
$$\frac{(-٥)^{٢}}{٩} + \frac{(\text{ص} - ٢)^{٢}}{٩} = \text{جتا هـ}$$

ومنه (س − ٥)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩ وهي معادلة المحل الهندسي

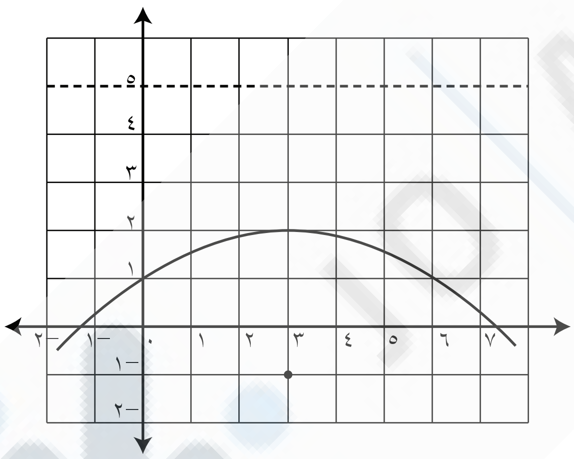
المحل الهندسي عبارة عن دائرة مركزها (٥ ، ٢) ونصف قطرها ٣ وحدات.

السؤال الأول

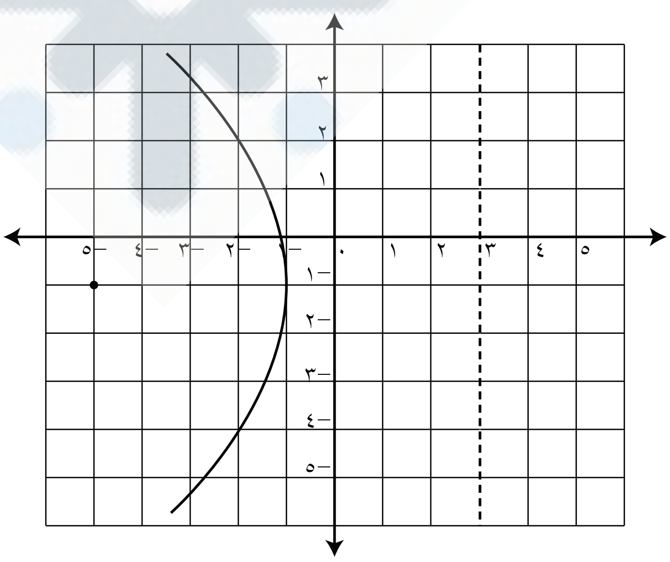
أ) $ص^{٢} = -٢٠س$



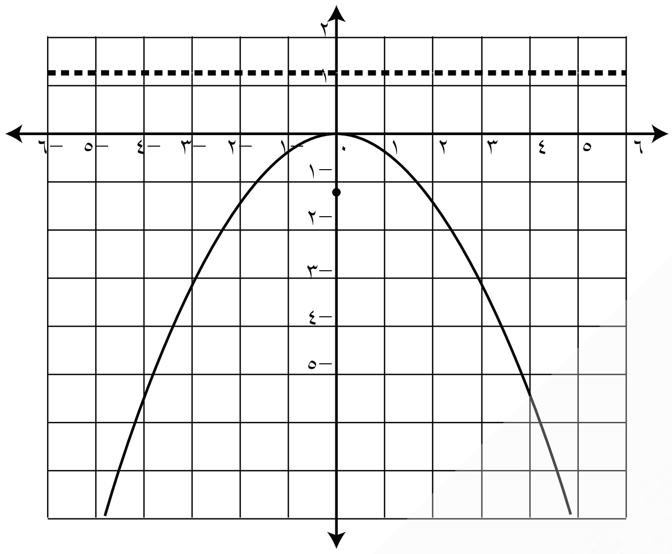
ب) $(س - ٣)^{٢} = -١٢ (ص - ٢)$



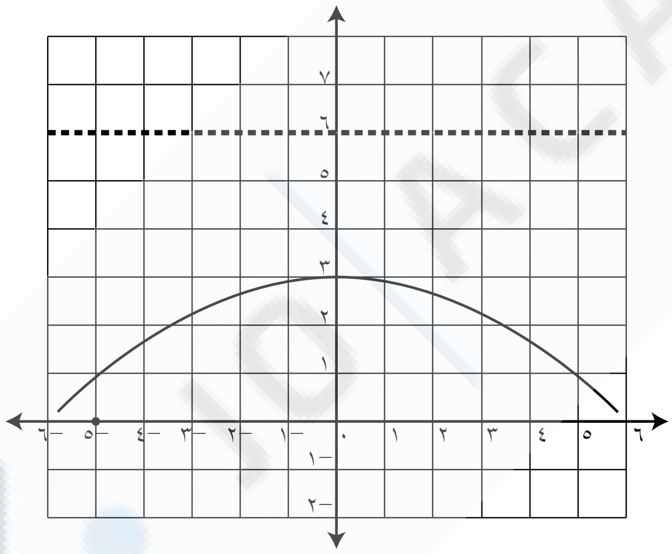
جـ) $(ص + ١)^{٢} = -٦ (س + ١)$



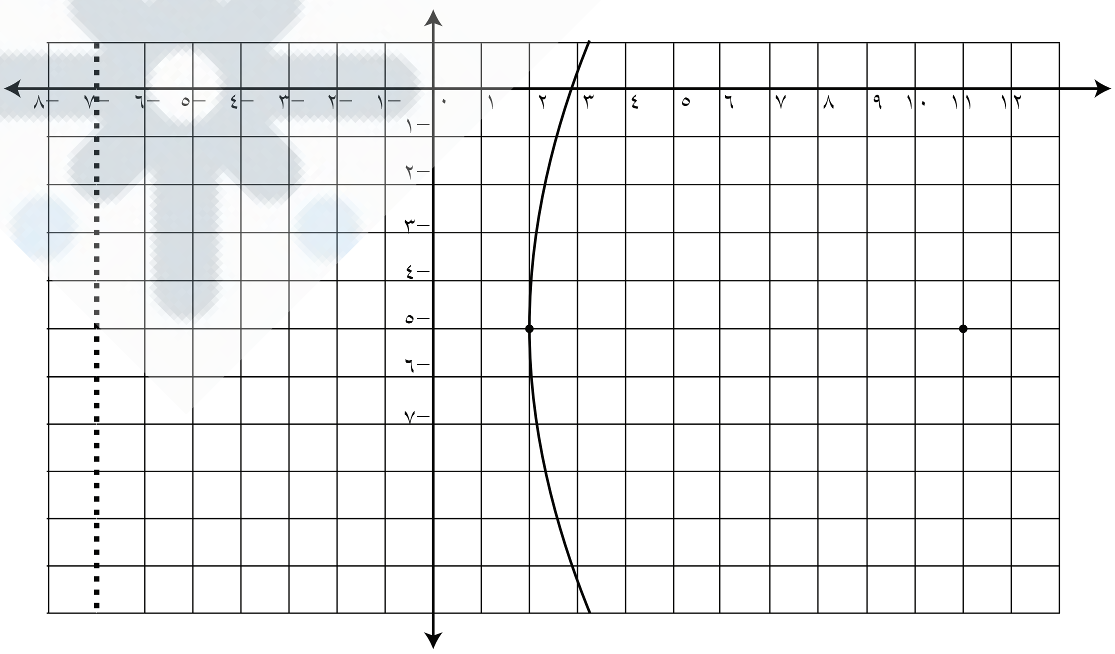
د) س^{٢} = –٥ص

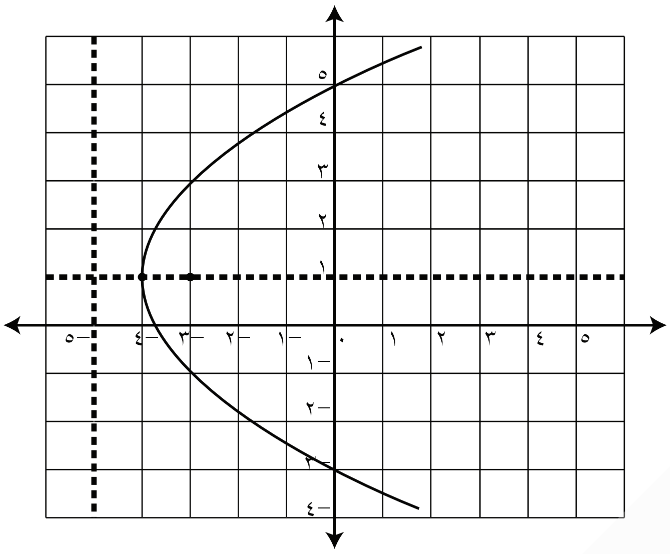


هـ) (ص + ٥)^{٢} = ٣٦ (س – ٢)



و) س^{٢} = –١٢ (ص – ٣)





ز) $(ص - ١)^{٢} = ٤ (س + ٤)$

السؤال الثاني

أ) الرأس (١ ، −٢)، البؤرة (١,٢٥ ، −٢)

معادلة الدليل س = ٠,٧٥

معادلة المحور ص = −٢

ب) الرأس (٢ ، ٠)، البؤرة (٠ ، ٠)

معادلة الدليل س = ٤

معادلة المحور ص = ٠

جـ) الرأس (−٢ ، ٢)، البؤرة (−٢ ، ٥)

معادلةَ الدليل ص = −١

معادلة المحور س = −٢

د) الرأس (٠ ، ٢)، البؤرة (٠ ، ٥)

معادلةَ الدليل ص = −١

معادلة المحور س = ٠

هـ) الرأس (− ٥,٢٥ ، ١)، البؤرة ($-\frac{٣١٤}{٧٢}$ ، ١)

معادلة الدليل س = $\frac{-٤٤٢}{٧}$

معادلة المحور ص = ١

السؤال الثالث

ف = ٢٠ن – ٥ن^{٢}

٥ن^{٢} – ٢٠ن = – ف

٥ (ن^{٢} – ٤ن + ٤ – ٤) = – ف

(ن – ٢)^{٢} = $\frac{-١}{٥}$ (ف – ٢٠)

بعد ثانيتين يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع وهو ٢٠ م

السؤال الرابع

الرأس يقع على المستقيم ص = س

∴ الرأس (د ، د) لأن د = هـ

(س – د)^{٢} = ٤ جـ (ص – د)

(٤ ، ٣) ← (٤ – د)^{٢} = ٤جـ (٣ – د) ١

(٠ ، ٣) ← (٠ – د)^{٢} = ٤جـ (٣ – د) ٢

بحل المعادلتين (١) ، (٢) تجد أن:

(٤ – د)^{٢} = د^{٢}

١٦ – ٨د + د^{٢} = د^{٢} ⇐ ومنه د = ٢

وبالتعويض في إحدى المعادلتين جـ = ١

∴ المعادلة هي (س – ٢)^{٢} = ٤ (ص – ٢)

السؤال الخامس

الرأس (٣ + جـ ، ١)

∴ المعادلة (ص – ١)^{٢} = – ٤ جـ (س – ٣ – جـ)

النقطةَ (٠ ، ٥) تحقق المنحنى

(٥ – ١)^{٢} = – ٤ جـ (٠ – ٣ – جـ)

١٦ = ١٢ جـ + ٤ جـ^{٢} ⇐ جـ^{٢} + ٣ جـ – ٤ = ٠

⇐ (جـ – ١) (جـ + ٤) = ٠ ⇐ جـ = ١ ، جـ = –٤

∴ يوجد معادلتين:

١) جـ = ١ ⇐ (ص – ١)^{٢} = –٤ (س – ٤)

٢) جـ = –٤ ⇐ (ص – ١)^{٢} = ١٦ (س + ١)

السؤال السادس

٣س^{٢} – ٩س = ٥ص + ٢

٣ (س^{٢} – ٣س) = ٥ص + ٢

٣ (س^{٢} – ٣س + $\frac{٩}{٤}$ – $\frac{٩}{٤}$) = ٥ص + ٢

٣ (س – $\frac{٣}{٢}$)^{٢} = ٥ص + $\frac{٣٥}{٤}$

٣ (س – $\frac{٣}{٢}$)^{٢} = ٥ (ص + $\frac{٧}{٤}$)

(س – $\frac{٣}{٢}$)^{٢} = $\frac{٥}{٣}$ (ص + $\frac{٧}{٤}$)

الراس ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{-٧}{٤}$) ، جـ = $\frac{٥}{١٢}$

السؤال السابع

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ

(٣ ، ٢) ⇐ ٢ = ٩ أ + ٣ ب + جـ .... (١)

(٦ ، ١) ⇐ ١ = ٣٦ أ + ٦ ب + جـ .... (٢)

(٠ ، ١) ⇐ ١ = ٠ + ٠ + جـ ⇐ جـ = ١

وبحل المعادلات (١) ، (٢) تجد أن أ = ٣ ، ب = –٨

∴ معادلة القطع ص = ٣ س^{٢} – ٨ س + ١

السؤال الثامن

ص = أ س^{٢} + ب س + جـ

محوره محور السينات ، أي أن بؤرته (د ، ٠)

معادلته ص^{٢} = ٤ جـ (س – د)

(٨ ، ١٠) تحقق المعادلة ⇐ ١٠٠ = ٤ جـ (٨ – د) .... (١)

(٤ ، ٤) تحقق المعادلة ⇐ ١٦ = ٤ جـ (٤ – د) .... (٢)

وبقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) تجد أن:

$\frac{٤}{٢٥}$ = $\frac{٤ - د}{٨ - د}$ ⇐ ومنه تجد أن ٢١ د = ٦٨ ⇐ د = $\frac{٦٨}{٢١}$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين عن قيمة د تجد أن جـ = $\frac{٢١}{٤}$

∴ المعادلة هي ص^٢ = ٢١ (س – $\frac{٦٨}{٢١}$)

السؤال التاسع

معادلة القطع

(س – د)^٢ = ٤ جـ (ص – هـ)

الراس (٢ ، ١ + جـ) من المحور والدليل

∴ معادلة القطع هي:

(س – ٢)^٢ = ٤ جـ (ص – ١ – جـ)

النقطه (٦ ، ٦) تحقق المعادلة

(٦ – ٢)^٢ = ٤ جـ (٦ – ١ – جـ)

١٦ = ٢٠ جـ^٢ – ٤ جـ^٢

٤ جـ^٢ – ٢٠ جـ + ١٦ = صفرًا

٤ (جـ – ١) (جـ – ٤) = صفرًا ومنه جـ = ١ ، جـ = ٤

١) عندما جـ = ١ ⇐ (س – ٢)^٢ = ٤ (ص – ٢)

٢) عندما جـ = ٤ ⇐ (س – ٢)^٢ = ١٦ (ص – ٥)

السؤال العاشر

س = جتا ن – جا ن

ص = جا ٢ ن

س^٢ = جتا^٢ – ٢جا ن جتا ن + جا^٢ ن

س^٢ = ١ جا ٢ ن

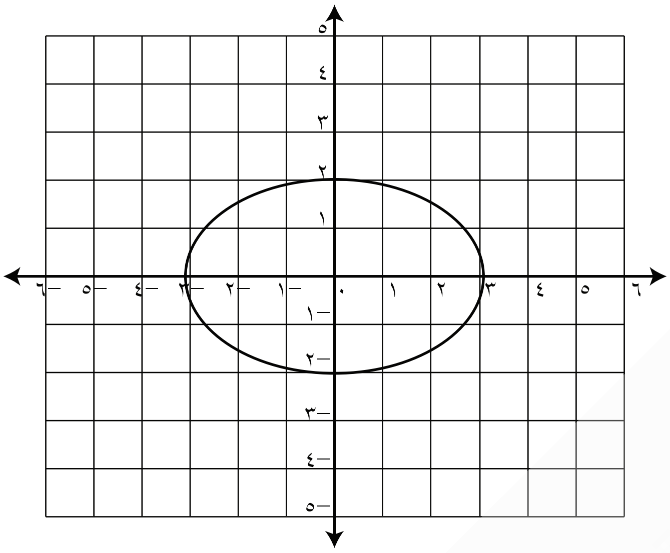
س^٢ = ١ – ص

ومنه س^٢ = – (ص – ١) وهي معادلة المسار

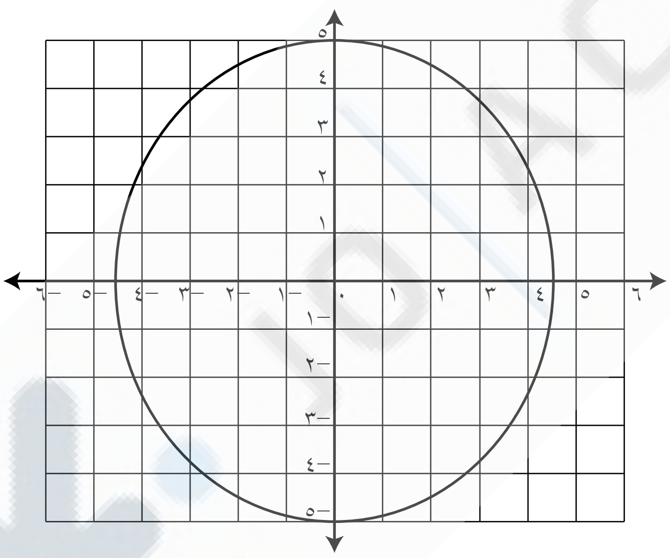
المسار عبارة عن قطع مكافيء.

السؤال الأول

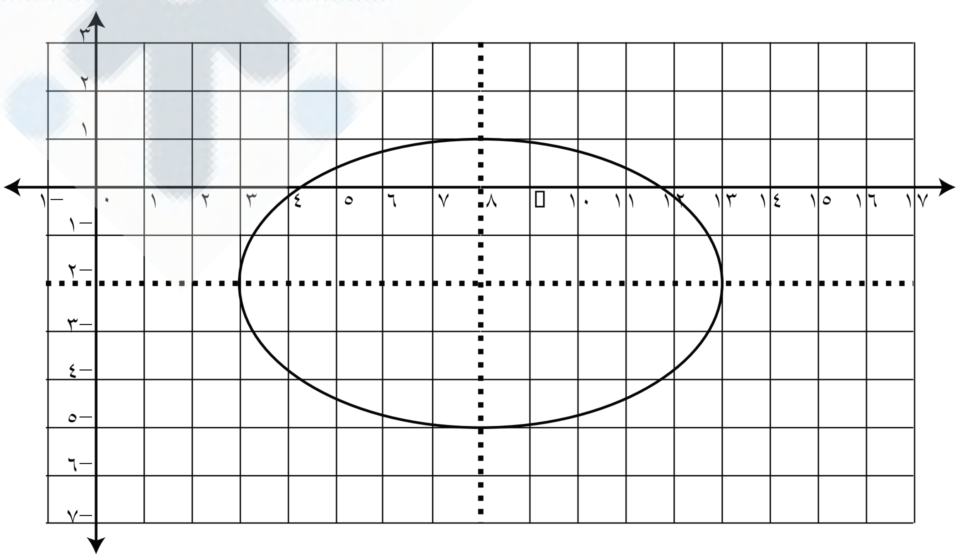
أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$



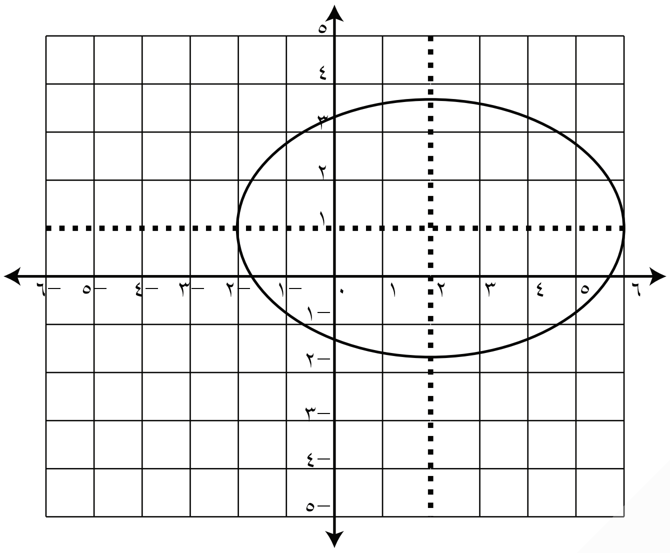
ب) $\frac{\text{س}^{٢}}{٢١} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$



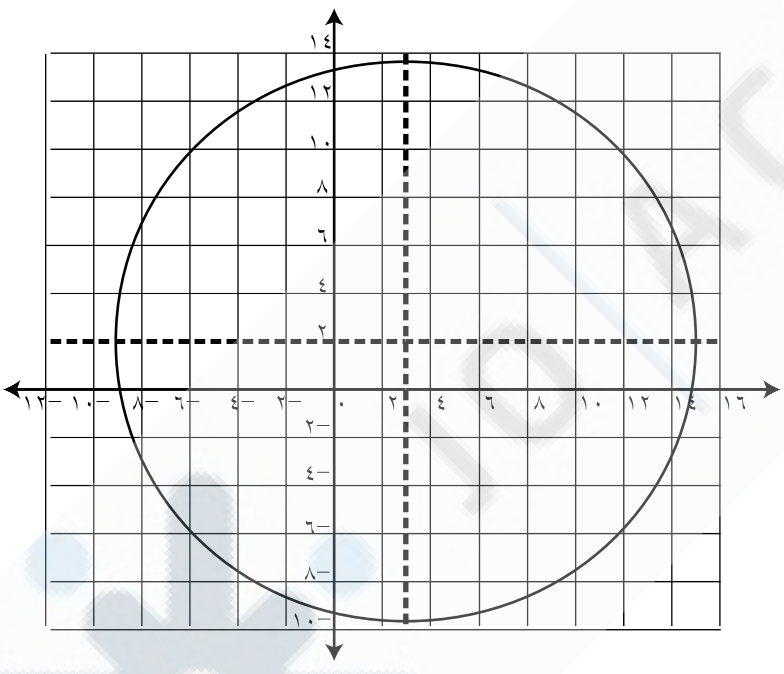
جـ) $\frac{(\text{س} - ٨)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص} + ٢)^{٢}}{٩} = ١$



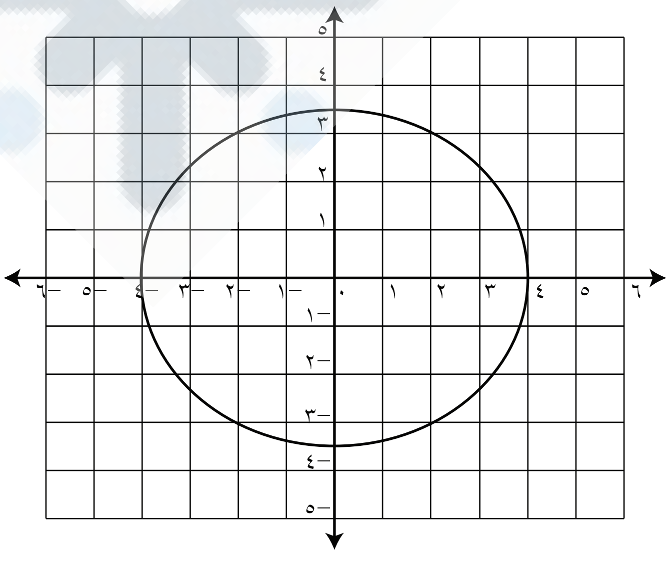
د) $\frac{(س - ٢)^{٢}}{١٦} + \frac{(ص - ٢)^{٢}}{٧} = ١$



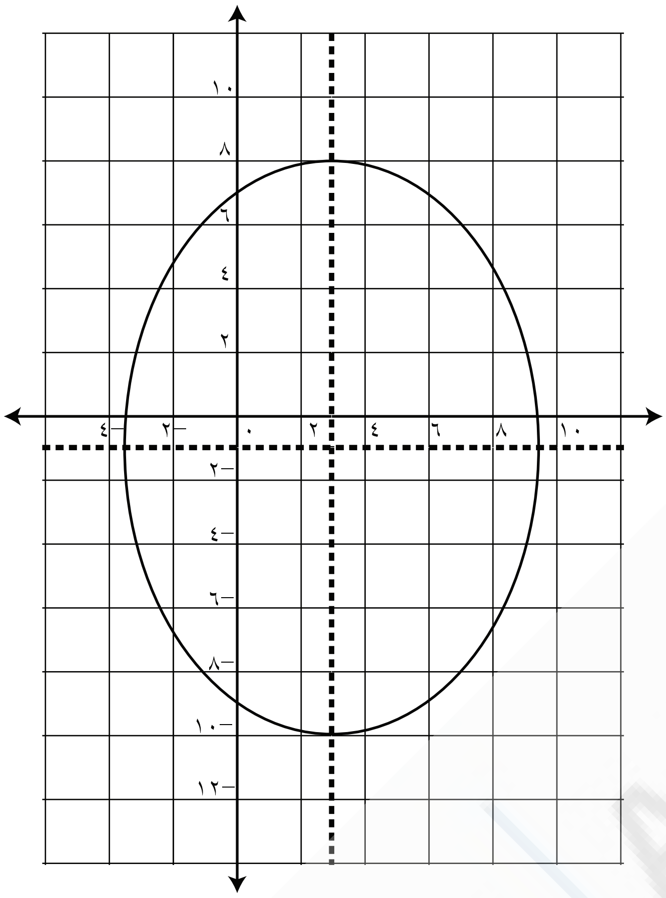
هـ) $\frac{(س - ٣)^{٢}}{١٤٤} + \frac{(ص - ٢)^{٢}}{١٤٠} = ١$



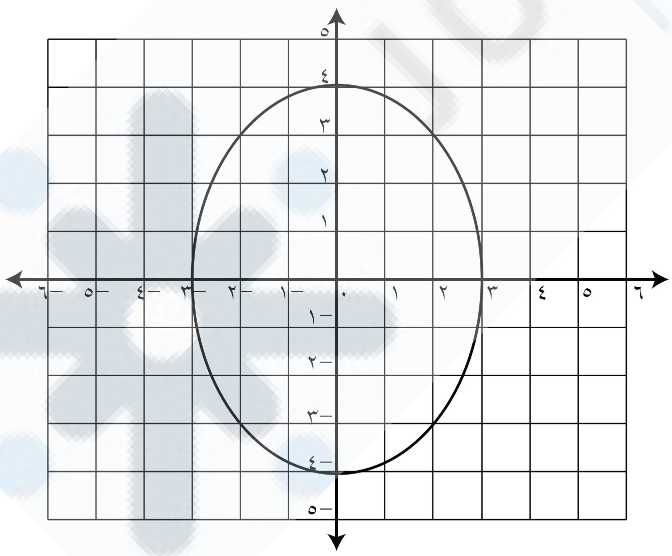
و) $\frac{س^{٢}}{١٦} + \frac{ص^{٢}}{١٢} = ١$



ز) $\frac{(س - ٣)^٢}{٤٥} + \frac{(ص + ١)^٢}{٨١} = ١$



ح) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{٥ص^٢}{٨١} = ١$



ط) $\frac{(س - ١)^٢}{٤٥} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٢٠} = ١$

السؤال الثاني

أ) المركز (٠ ، ٠) ، البؤرتان (± √٦٥ ، ٠) ، الرأسان (± ٩ ، ٠)

المحور الأكبر:

معادلته ص = ٠ ، طوله = ١٨

المحور الأصغر:

معادلته س = ٠ ، طوله = ٨

البعد البؤري = ٢ √٦٥ ، الاختلاف المركزي هـ = √٦٥ / ٩

ب) المركز (٠ ، ٠) ، البؤرتان (٠ ، ± √١١٩)، الرأسان (٠ ، ± ١٢)

المحور الاكبر:

معادلته س = ٠ ، طوله = ٢٤

المحور الأصغر:

معادلته ص = ٠ ، طوله = ١٠

البعد البؤري = ٢ √١١٩ ، الاختلاف المركزي هـ = √١١٩ / ١٢

جـ) المركز (−٢ ، ١)

البؤرتان (−٢ ، ١ + ٢ √٥) (−٢ ، ١ − ٢ √٥) ، الرأسان (-٢ ، ٧) (−٢ ، −٥)

المحور الأكبر:

معادلته س = −٢ ، طوله = ١٢

المحور الأصغر:

معادلته ص = ١ ، طوله = ٨

البعد البؤري = ٤ √٥ ، الاختلاف المركزي هـ = ٢√٥ / ٦

د) المركز (٤ ، −١)

البؤرتان (٤ + √٥٦ ، −١) ، (٤ − √٥٦ ، −١) ، الرأسان (١٣ ، −١) (−٥ ، −١)

المحور الأكبر:

معادلته ص = −١ ، طوله = ١٨

المحور الأصغر:

معادلته س = ٤ ، طوله = ١٠

البعد البؤري = ٢ √٥٦ ، الاختلاف المركزي هـ = √٥٦ / ٩

هـ) المركز (٠ ، ٠)

البؤرتان (± ٥ √٣ ، ٠) ، الرأسان (± ١٠ ، ٠)

المحور الأكبر:

معادلته ص = ٠ ، طوله = ٢٠

المحور الأصغر:

معادلته س = ٠ ، طوله = ١٠

البعد البؤري = ١٠ $\sqrt{٥}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{٥\sqrt{٣}}{١٠}$

و) المركز (–١ ، ١)

البؤرتان (–١ ، ١ +$\sqrt{٥}$) ، (–١ ، ١ –$\sqrt{٥}$) ، الرأسان (–١ ، ٤) (–١ ، –٢)

المحور الأكبر:

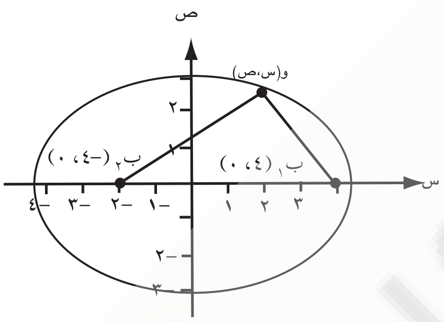
معادلته س = –١ ، طوله = ٦

المحور الأصغر:

معادلته ص = ١ ، طوله = ٤

البعد البؤري = ٢ $\sqrt{٥}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

السؤال الثالث



بما أن بؤرتيه هما (٤ ، ٠) ، (–٤ ، ٠) فإن

$|$ب$_١$ ب$_٢|$ = ٨

محيط المثلث و ب$_١$ ب$_٢$ = ٢ أ + $|$ب$_١$ ب$_٢|$

٢٤ = ٢ أ + ٨ ⇐ ٢ أ = ١٦ ⇐ أ = ٨

جـ^٢ = أ^٢ – ب^٢

١٦ = ٦٤ – ب^٢ ⇐ ب^٢ = ٤٨

بؤرتاه (٤ ، ٠) ، (–٤ ، ٠) ⇐ مركز القطع (٠ ، ٠) معادلته $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٤٨} = ١$

السؤال الرابع

س = ٥ + ٣ جا هـ ⇐ جا هـ = $\frac{س - ٥}{٣}$

ص = ٢ + ٢ جتا هـ ⇐ جتا هـ = $\frac{ص - ٢}{٢}$

جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ ⇐ $\frac{(س - ٥)^٢}{٩} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٤} = ١$

∴ النقطة (س ، ص) تتحرك على منحنى قطع ناقص مركزه (٥ ، ٢)

بؤرتاه (٥ ± $\sqrt{٥}$ ، ٢) راساه (٨ ، ٢) ، (٢ ، ٢)

معادلة محوره الأكبر ص = ٢ وطوله = ٦

معادلة محوره الأصغر س = ٥ وطوله = ٤

بعده البؤري = ٢ $\sqrt{٥}$ واختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

السؤال الخامس

أ = ٩ ، ب = ٤

مساحة القطع = ٩ × ٤ × π = ٣٦ π وحدة مربعة

مساحة الدائرة = π نق^٢ = ٣٦ π وحدة مربعة

∴ نق^٢ = ٣٦

نق = ٦ وحدات

السؤال السادس

رأساه (–٥ ، ٠) (٥ ، ٠) ⇐ أ = ٥ ، مركزه (٠ ، ٠)

٢٠π = أب ⇐ ٢٠ = ٥ ب ⇐ ب = ٤

معادلته $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

السؤال السابع

بما أن مركزه يقع على المستقيم س = ٢

وبؤرتيه على المستقيم ص = ٣

∴ مركز المحور يقع في نقطةَ تقاطع س = ٢ مع ص = ٣

∴ المركز (٢ ، ٣)

وبما أن بؤرتيه تقعان على المستقيم ص = ٣

∴ معادلة محوره الأكبر هي ص = ٣

∴ معادلة القطع هي $\frac{(س - ٢)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - ٣)^٢}{ب^٢} = ١$

النقطة (–٨ ، ٣) تقع على منحناه وهي تحقق معادلة القطع

∴ $\frac{(-٨ - ٢)^٢}{أ^٢} + \frac{(٣ - ٣)^٢}{ب^٢} = ١$

∴ $\frac{١٠٠}{أ^٢} = ١$ ⇐ أ^٢ = ١٠٠ ⇐ أ = ١٠

اختلافه المركزي هـ = $\frac{٦}{١٠}$

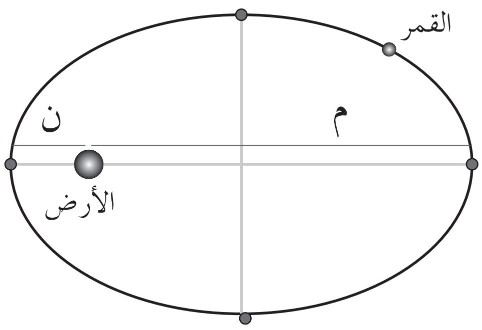
∴ $\frac{جـ}{١٠} = \frac{٦}{١٠}$ ⇐ جـ = ٦

جـ^٢ = أ^٢ – ب^٢

٣٦ = ١٠٠ – ب^٢ ⇐ ب^٢ = ٦٤

∴ معادلة القطع هي $\frac{(س - ٢)^٢}{١٠٠} + \frac{(ص - ٣)^٢}{٦٤} = ١$

السؤال الثامن



٢م = م + ن ← أ = $\frac{م + ن}{٢}$

٢جـ = م – ن ← أ = $\frac{م - ن}{٢}$

هـ = $\frac{\frac{م - ن}{٢}}{\frac{م + ن}{٢}}$ = $\frac{م - ن}{م + ن}$

السؤال التاسع

طول محوره الأكبر يساوي ضعف طول محوره الأصغر

٢ أ = ٤ ب

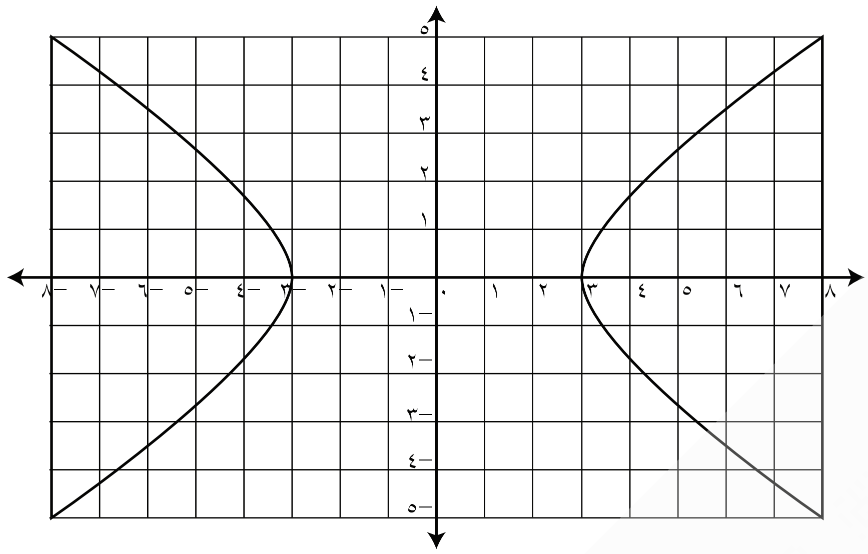
∴ أ = ٢ ب ⇐ ب = $\frac{١}{٢}$أ

جـ^٢ = أ^٢ – ب^٢ = أ^٢ – $\frac{١}{٤}$ أ^٢ = $\frac{٣}{٤}$ أ^٢

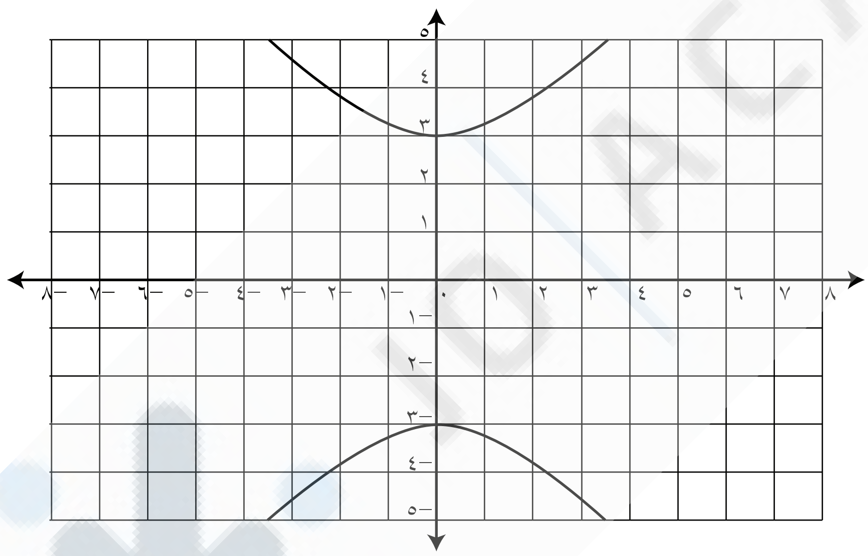
$\frac{جـ^٢}{أ^٢}$ = $\frac{\frac{٣}{٤}أ^٢}{أ^٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

السؤال الأول

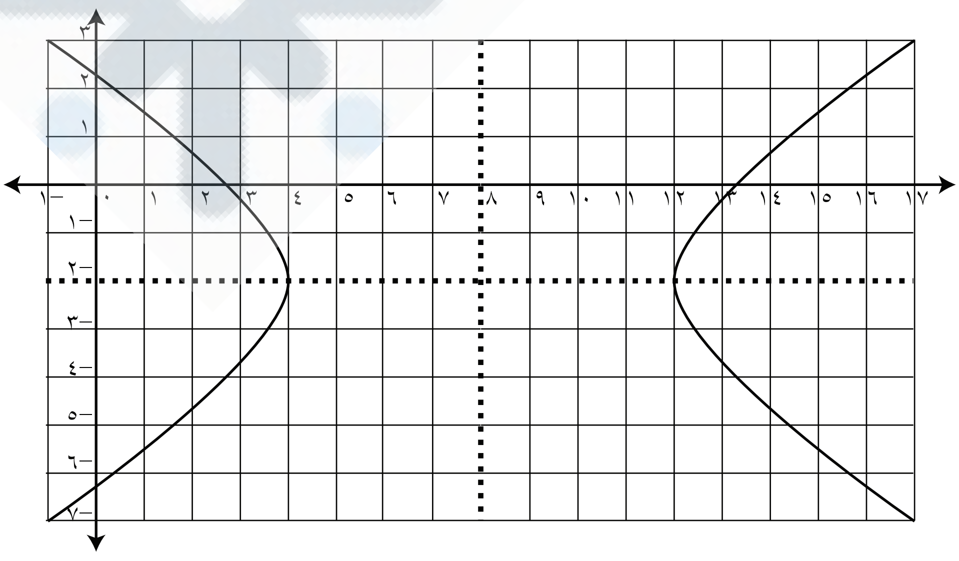
أ) $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{٤} = ١$



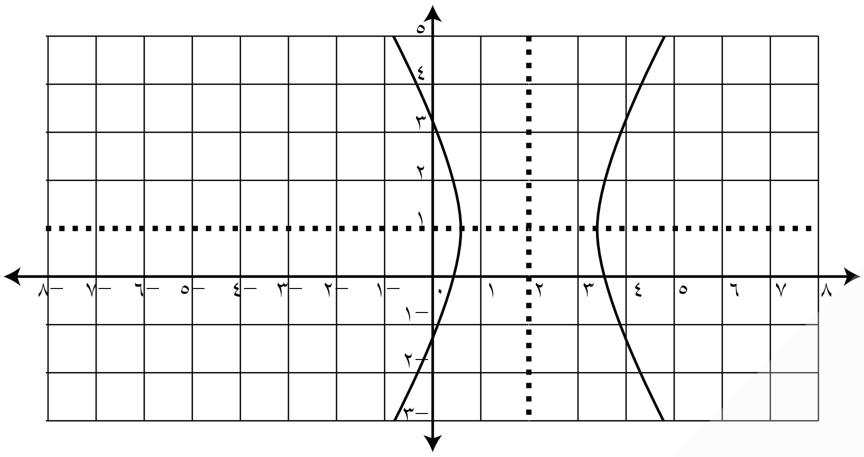
ب) $\frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٧} = ١$



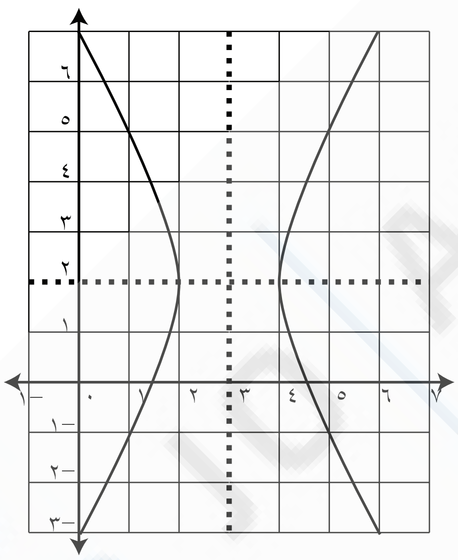
جـ) $\frac{(س-٨)^٢}{١٦} - \frac{(ص+٢)^٢}{٩} = ١$



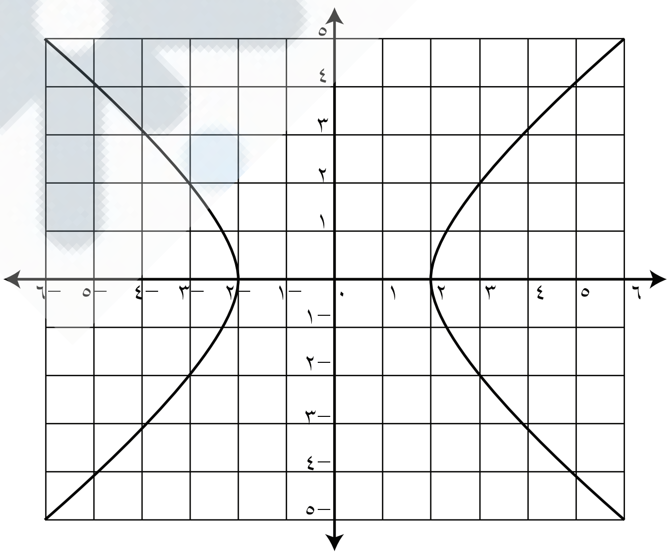
د) $\frac{٤(س - ٢)^٢}{٩} - \frac{٤(ص - ٢)^٢}{٢٧} = ١$



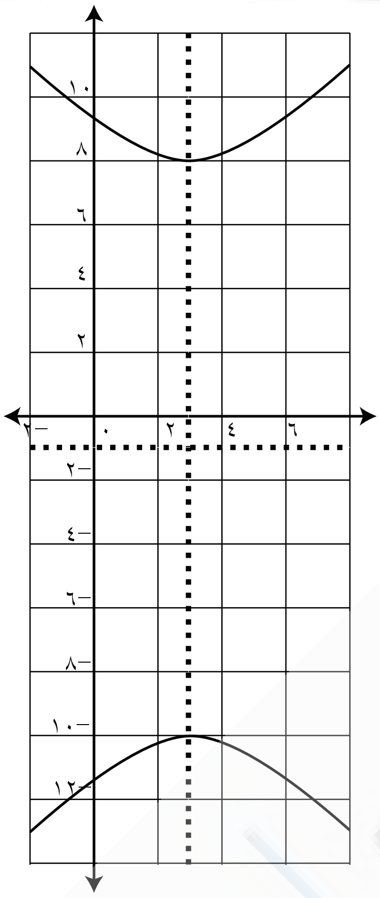
هـ) $\frac{(س - ٣)^٢}{١} - \frac{(ص - ٢)^٢}{٣} = ١$



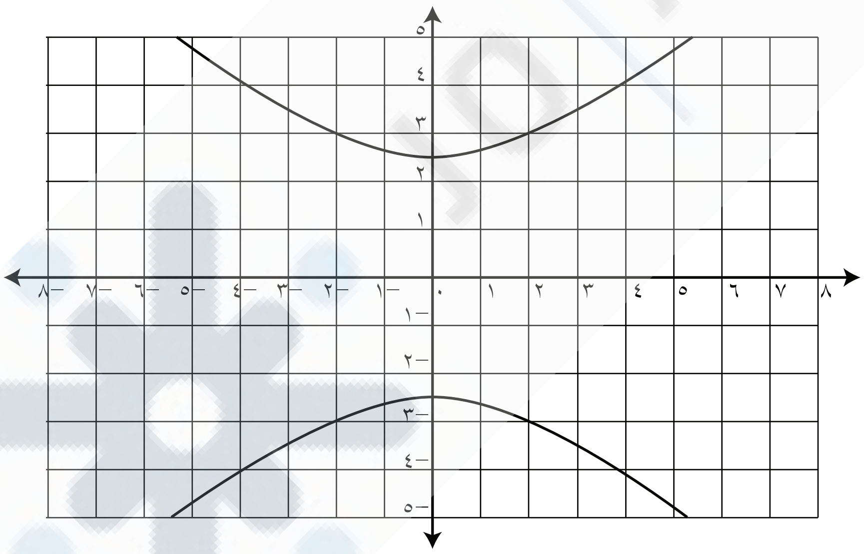
و) $\frac{س^٢}{٤} - \frac{٥ص^٢}{١٦} = ١$



ز) $\frac{(\text{ص} - ٣)^{٢}}{٨١} - \frac{(\text{س} + ١)^{٢}}{٦٣} = ١$



ح) $\frac{٣\text{ص}^{٢}}{٨١} - \frac{٥\text{س}^{٢}}{٩} = ١$



السؤال الثاني

أ) المركز (٠ ، ٠) ، البؤرتان (± ٥ ، ٠) ، الرأسان (± ٤ ، ٠)

المحور القاطع:

معادلته ص = ٠ ، طوله = ٨

المحور المرافق:

معادلته س = ٠ ، طوله = ٦

البعد البؤري = ١٠ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{٥}{٤}$

ب) المركز (٠ ، ٠) ، البؤرتان (٠ ، ± ١٣)، الرأسان (٠ ، ± ٥)

المحور القاطع:

معادلته س = ٠ ، طوله = ١٠

المحور المرافق:

معادلته ص = ٠ ، طوله = ٢٤

البعد البؤري = ٢٦ ، الاختلاف المركزي هـ = ١ ، ٣

جـ) المركز (٢ ، ١) ، البؤرتان (٢ ± $\sqrt{٥٢}$ ، ١) ، الرأسان (-٢ ، ١) ، (٦ ، ١)

المحور القاطع:

معادلته ص = ١ ، طوله = ٨

المحور المرافق:

معادلته س = ٢ ، طوله = ١٢

البعد البؤري = ٢ $\sqrt{٥٢}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥٢}}{٤}$

د) المركز (-٤ ، ١)، البؤرتان، (-٤ ± $\sqrt{١٠٦}$ ، ١) ، الرأسان (-١٣ ، ١)، (٥ ، ١)

المحور القاطع:

معادلته ص = ١ ، طوله = ١٨

المحور المرافق:

معادلته س = -٤ ، طوله = ١٠

البعد البؤري = ٢ $\sqrt{١٠٦}$ ، اختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{١٠٦}}{٩}$

هـ) المركز (٠ ، ٠)، البؤرتان (± ٢ $\sqrt{٥}$ ، ٠) ، الرأسان (± ٤ ، ٠)

المحور القاطع:

معادلته ص = ٠ ، طوله = ٨

المحور المرافق:

معادلته س = ٠ ، طوله = ٤

البعد البؤري = ٤ $\sqrt{٥}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

و) المركز (١ ، -١) ، البؤرتان (١ ± $\sqrt{١٣}$ ، -١) ، الرأسان (-١ ، -١) (٣ ، -١)

المحور القاطع:

معادلته س = -١ ، طوله = ٤

المحور المرافق:

معادلته س = ١ ، طوله = ٦

البعد البؤري = ٢ $\sqrt{١٣}$ ، الاختلاف المركزي هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٢}$

السؤال الثالث

بما أن بؤرتيه تقعان على محور السينات **فإن معادلته** $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

النقطه ($٢\sqrt{٣}$ ، ٤) تحقق المعادلة $\Leftarrow \frac{١٢}{\text{أ}^{٢}} - \frac{١٦}{\text{ب}^{٢}} = ١$ .... (١)

$\frac{٢\text{س}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{٢\text{ص}}{\text{ب}^{٢}} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{صفرًا} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ب}^{٢}\text{س}}{\text{أ}^{٢}\text{ص}}$.

ميل المماس = المشتقة عند ($٢\sqrt{٣}$ ، ٤) $\Leftarrow \sqrt{٣} = \frac{\sqrt{٣}\,\text{ب}^{٢}}{٢\,\text{أ}^{٢}} \Leftarrow ٢\,\text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢}$ .... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) تجد أن:

$\text{أ}^{٢} = ٤$ ، $\text{ب}^{٢} = ٨$، المعادلة هي: $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٨} = ١$

السؤال الرابع

$\text{س} = \text{جاهـ} + \text{جتاهـ} \Leftarrow \text{س}^{٢} = \text{جا}^{٢}\text{هـ} + ٢\,\text{جاهـ جتاهـ} + \text{جتا}^{٢}\text{هـ}$

$\text{س}^{٢} = ١ + ٢\,\text{جاهـ جتاهـ}$ .... (١)

$\text{ص} = ٢\sqrt{\text{جاهـ جتاهـ}} \Leftarrow \text{ص}^{٢} = ٤\,\text{جاهـ جتاهـ}$

$\frac{١}{٢}\,\text{ص}^{٢} = ٢\,\text{جاهـ جتاهـ}$ .... (٢)

وبتعويض معادلة (٢) في (١) تجد أن:

$\text{س}^{٢} = ١ + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢}$ ومنه $\text{س}^{٢} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٢} = ١$

وهي معادلة قطع زائد

السؤال الخامس

مركز القطع يقع على المستقيم س = ٢ ، وبؤرتاه على المستقيم ص = ٣

∴ المركز في تقاطع المستقيمن وهو (٢ ، ٣)

معادلته $\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{ص} - ٣)^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

اختلافه المركزي $\text{هـ} = \frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٣} \Leftarrow \frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}} = \frac{٢١}{٩}$

$٩\,\text{جـ}^{٢} = ٢١\,\text{أ}^{٢} \Leftarrow \text{جـ}^{٢} = \frac{٧}{٣}\,\text{أ}^{٢}$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \Leftarrow \frac{٧}{٣}\,\text{أ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} \Leftarrow \text{ب}^{٢} = \frac{٤}{٣}\,\text{أ}^{٢}$

$\therefore$ المعادلة $\frac{(س - ٢)^٢}{أ^٢} - \frac{٣(ص - ٣)^٢}{٤أ^٢} = ١$

النقطة (-٤ ، -٣) تحقق المعادلة $\Leftarrow \frac{٣٦}{أ^٢} - \frac{١٠٨}{٤أ^٢} = ١$.

$١٤٤أ^٢ - ١٠٨أ^٢ = ٤أ^٤ \Leftarrow ٣٦أ^٢ = ٤أ^٤ \Leftarrow أ^٢ = ٩$

$ب^٢ = \frac{٤}{٣}أ^٢ \Leftarrow ب^٢ = \frac{٤}{٣} \times ٩ = ١٢$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد $\frac{(س - ٢)^٢}{٩} - \frac{(ص - ٣)^٢}{١٢} = ١$

السؤال السادس

معادلة القطع الناقص $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

$أ = ٣$ ، $ب = ٢$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٩ - ٤ = ٥ \Leftarrow جـ = \sqrt{٥}$

رأسا القطع الناقص هما (٠ ، ٣) ، (٠ ، -٣)

بؤرتا القطع الناقص هما $(٠ ، \sqrt{٥})$ ، $(٠ ، -\sqrt{٥})$

بؤرتا القطع الزائد هما رأسا القطع الناقص (٠ ، ٣) ، (٠ ، -٣)

رأسا القطع الزائد هما بؤرتا القطع الناقص $(٠ ، \sqrt{٥})$ ، $(٠ ، -\sqrt{٥})$

$\therefore أ = \sqrt{٥}$ ، $جـ = ٣$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow ٩ = ٥ + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٤$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي $\frac{ص^٢}{٥} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

السؤال السابع

طول المحور القاطع = ٣ أمثال طول المحور المرافق.

$٢أ = ٦ب \Leftarrow ب = \frac{١}{٣}أ$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ^٢ = أ^٢ + \frac{١}{٩}أ^٢$

$جـ^٢ = \frac{١٠}{٩}أ^٢ \Leftarrow \frac{جـ^٢}{أ^٢} = \frac{١٠}{٩}$

$\therefore \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٠}}{٩}$

السؤال الأول

أ) دائرة مركزها (−٢ ، ٧) ونصف قطرها = ١٠

ب) قطع ناقص مركزه (١ ، ٠)

رأساه (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) وبؤرتاه $(١ + \sqrt{٥} ، ٠)$ ، $(١ − \sqrt{٥} ، ٠)$

معادلة محوره الأكبر ص = ٠ ، وطوله = ٦

معادلة محوره الأصغر س = ١ ، وطوله = ٤

بعده البؤري = $٢\sqrt{٥}$ واختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

جـ) قطع مكافئ رأسه (−٥ ، ٤)، بؤرته $(\frac{-١١}{٣} ، ٤)$

معادلة دليله س = $\frac{-٧}{٣}$

معادلة محوره ص = ٤

د) قطع زائد مركزه (٣ ، −٢)

رأساه (٥ ، −٢) ، (١ ، −٢)، وبؤرتاه $(٣ + \sqrt{١٣} ، −٢)$ ، $(٣ − \sqrt{١٣} ، −٢)$

معادلة محور القاطع ص = −٢ وطوله = ٤

معادلة محوره المرافق س = ٣ وطوله = ٦

بعده البؤري = $٢\sqrt{١٣}$ اختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{١٣}}{٣}$

السؤال الثاني

بما أن بؤرته (−٣ ، ٣)، ورأسه يقع إلى يمين بؤرته، ومحوره يوازي محور السينات فإن رأسه = (د ، ٣)

ومنه د + ٣ = جـ ⇐ د = جـ − ٣

∴ المعادلة هي $(ص − ٣)^٢ = −٤$ جـ (س − جـ + ٣)

يمر بالنقطة (٠ ، −١)

$(−١ − ٣)^٢ = −٤$ جـ (٠ − جـ + ٣)

١٦ = ٤ $جـ^٢$ − ١٢ جـ

٤ = $جـ^٢$ − ٣ جـ

$جـ^٢$ − ٣ جـ − ٤ = ٠ ⇐ (جـ + ١) (جـ − ٤) = ٠

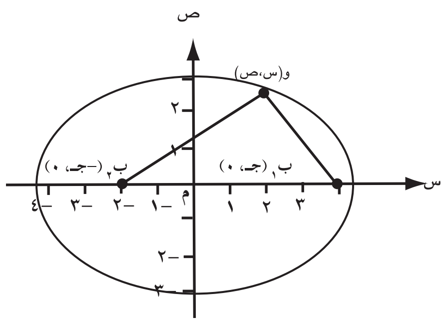
ومنه جـ = ٤ ، جـ = − ١ (مرفوضة)

جـ = ٤

∴ معادلة القطع هي:

$(ص − ٣)^٢ = −١٦$ (س − ١)

السؤال الثالث



من تعريف القطع الناقص

و ب$_{١}$ + و ب$_{٢}$ = ٢أ

عندما تكون و (س ، ص) على المحور الأصغر

و ب$_{١}$ = و ب$_{٢}$ = أ

م ب$_{١}$ = م ب$_{٢}$ = جـ

م و = ب

و م ب$_{٢}$ مثلث قائم الزاوية ومنه وحسب نظرية فيثاغورس

أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} $\Leftarrow$ جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} وهو المطلوب

السؤال الرابع

طول المحور الأكبر = ٢ أ = ١٠ $\Leftarrow$ أ = ٥

الاختلاف المركزي $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} = \frac{٣}{١٠} \Leftarrow \frac{\text{جـ}}{٥} = \frac{٣}{١٠} \Leftarrow$ جـ = ١,٥

أ) أقصر مسافه = أ − جـ = ٥ − ١,٥ = ٣,٥

ب) أطول مسافه = أ + جـ = ٥ + ١,٥ = ٦,٥

السؤال الخامس

بما أن البؤرتين (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٨) $\Leftarrow$ المركز (٢ ، ٥) ، جـ = ٣

افرض أن القطع ناقص

$\therefore$ معادلته $\frac{(\text{ص} - ٥)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} + \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

− بعد الرأس عن البؤرة = ١ $\Leftarrow$ أ = ٣ + ١ = ٤ $\Leftarrow$ أ^{٢} = ١٦

جـ^{٢} = أ^{٢} − ب^{٢} $\Leftarrow$ ٩ = ١٦ − ب^{٢} $\Leftarrow$ ب^{٢} = ٧

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{(\text{ص} - ٥)^{٢}}{١٦} + \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٧} = ١$

افرض أن القطع زائد:

$\therefore$ معادلته $\frac{(\text{ص} - ٥)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

− بعد الرأس عن البؤرة = ١ $\Leftarrow$ أ = ٣ − ١ = ٢ $\Leftarrow$ أ^{٢} = ٤

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} $\Leftarrow$ ٩ = ٤ + ب^{٢} $\Leftarrow$ ب^{٢} = ٥

$\therefore$ معادلته $\frac{(\text{ص} - ٥)^{٢}}{٤} - \frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{٥} = ١$

السؤال السادس

بعد النقطة و (س ، ص) عن النقطة (٠ ، ٤) = $\frac{٤}{٣}$ بعد و(س ، ص) عن المستقيم ٤ ص − ٩ =

$$\sqrt{(س - ٠)^٢ + (ص - ٤)^٢} = \frac{٤}{٣} \; \frac{|٤ ص - ٩|}{\sqrt{٠ + ١٦}}$$

$$س^٢ + ص^٢ - ٨ص + ١٦ = \frac{١}{٩} \; (٤ص - ٩)^٢$$

$$٩ س^٢ + ٩ ص^٢ - ٧٢ص + ١٤٤ = ١٦ ص^٢ - ٧٢ ص + ٨١$$

$$٩ س^٢ - ٧ ص^٢ = -٦٣$$

$\Leftarrow \frac{ص^٢}{٩} - \frac{س^٢}{٧} = ١$ ....قطع زائد

السؤال السابع

٢ جـ > ٢ أ $\Leftarrow$ جـ > أ $\Leftarrow$ $\frac{جـ}{أ}$ > ١ .... القطع ناقص

القطع ناقص مركزه (١ ، ٢) وإحدى بؤرتيه (٦ ، ٢)

$\therefore$ معادلته $\frac{(س - ١)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - ٢)^٢}{ب^٢} = ١$

جـ = ٥ $\Leftarrow$ المركز (١ ، ٢) وإحدى بؤرتيه (٦ ، ٢)

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ٢٥ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥ + ب^٢$ .... (١)

النقطة (٤ ، ٦) تحقق المعادلة ومنها:

$$\frac{٩}{أ^٢} + \frac{١٦}{ب^٢} = ١$$

$٩ ب^٢ + ١٦ أ^٢ = أ^٢ ب^٢$ .... (٢)

وبتعويض (١) في (٢)

$$٩ ب^٢ + ١٦ (٢٥ + ب^٢) = (٢٥ + ب^٢) ب^٢$$

$$٩ ب^٢ + ٤٠٠ + ١٦ ب^٢ = ٢٥ ب^٢ + ب^٤$$

$$ب^٤ = ٤٠٠ \Leftarrow ب^٢ = ٢٠$$

$$أ^٢ = ٢٥ + ب^٢ = ٢٥ + ٢٠ = ٤٥$$

$\therefore$ المعادلة هي $\frac{(س - ١)^٢}{٤٥} + \frac{(ص - ٢)^٢}{٢٠} = ١$

السؤال الثامن

محوره يوازي محور السينات

∴ س = أ ص^{٢} + ب ص + جـ

(٣ ، ١) ⇐ ٣ = أ + ب + جـ .... (١)

(٦ ، ٣) ⇐ ٦ = ٩أ + ٣ب + جـ .... (٢)

(٣ ، −٣) ⇐ ٣ = ٩أ − ٣ب + جـ .... (٣)

وبحل المعادلتين (٢) ، (٣) تجد أن ٣ = ٦ ب

∴ ب = $\frac{١}{٢}$

وبالتعويض في (١) ⇐ ٣ = أ + $\frac{١}{٢}$ + جـ

∴ $\frac{٥}{٢}$ = أ + جـ .... (٤)

وبالتعويض في (٢) ⇐ ٦ = ٩ أ + $\frac{٣}{٢}$ + جـ

∴ $\frac{٩}{٢}$ = ٩أ + جـ .... (٥)

وبحل المعادلتين (٤)، (٥) تجد أن ٢ = ٨ أ

∴ أ = $\frac{١}{٤}$

وبالتعويض في (٤) تجد أن جـ = $\frac{٩}{٤}$

∴ المعادلة س = $\frac{١}{٤}$ ص^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ص + $\frac{٩}{٤}$

اختبار ذاتي

السؤال الأول

رقم السؤال	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
الإجابة	أ	جـ	جـ	ب	جـ	أ	جـ	أ	د	جـ	جـ	د	أ	جـ	د

السؤال الثاني

بما أنها تمس المستقيم ص = −١ ، س = ٣ ونصف قطرها ٣ فإن:

الإحداثي الصادي لمركزها −١ + ٣ = ٢

الإحداثي السيني لمركزها ٣ + ٣ = ٦ او ٣ − ٣ = ٠

∴ مركز الدائرة (٦ ، ٢) او (٠ ، ٢)

∴ معادلتها $(\text{س} - ٦)^{٢} + (\text{ص} - ٢)^{٢} = ٩$

او $(\text{س} - ٠) + (\text{ص} - ٢) = ٩$

السؤال الثالث

بعد ن (س ، ص) عن (−١ ، −٣) = بعد ن (س ، ص) عن المستقيم ص − ١ = ٠

$$\sqrt{(\text{س} + ١)^{٢} + (\text{ص} + ٣)^{٢}} = \frac{|\text{ص} - ١|}{١} \quad \text{بتربيع الطرفين}$$

$$\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١ + \cancel{\text{ص}^{٢}} + ٦\text{ص} + ٩ = \cancel{\text{ص}^{٢}} - ٢\text{ص} + ١$$

$$(\text{س} + ١)^{٢} = -٨\,\text{ص} - ٨$$

$(\text{س} + ١)^{٢} = -٨\,(\text{ص} - ٢)$ ..... وهي عبارة عن قطع مطافيء.

السؤال الرابع

$\text{ك س}^{٢} + ٥\,\text{ص}^{٢} = ١٧$ بالقسمة على ١٧

$$\frac{\text{ك س}^{٢}}{١٧} + \frac{٥\,\text{س}^{٢}}{١٧} = ١$$

$$\therefore \text{أ}^{٢} = \frac{١٧}{\text{ك}} \Leftarrow \text{ك} = \frac{١٧}{\text{أ}^{٢}}$$

$$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢} \Leftarrow \text{أ}^{٢} = \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}$$

$$\therefore \text{ك} = \frac{١٧}{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}$$

السؤال الخامس

بما أن هـ < ١ ∴ القطع ناقص

من البؤرتين المركز (٠ ، ١)

∴ المعادلة $\frac{(\text{س}-٠)^{٢}}{\text{أ}^{٢}}+\frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١$

يمر بالنقطة (٠ ، ٠) $\Leftarrow$ $\frac{٠}{\text{أ}^{٢}}+\frac{١}{\text{ب}^{٢}}=١$ ومنه $\text{ب}^{٢}=١$

لكن جـ = ١ ← من البؤرتين

$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢} \Leftarrow ١=\text{أ}^{٢}-١ \Leftarrow \text{أ}^{٢}=٢$

∴ المعادلة $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}+\frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{١}=١$

الاختلاف المركزي $\text{هـ}=\frac{١}{\sqrt{٢}}$

السؤال السادس

في القطع $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ل}^{٢}}-\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}^{٢}}=١$

$\text{هـ}_{١}=\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{هـ}_{١}^{٢}=\frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}=\frac{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}} \Leftarrow \frac{١}{\text{هـ}_{١}^{٢}}=\frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}$

في القطع $\frac{\text{ص}^{٢}}{\text{ك}^{٢}}-\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ل}^{٢}}=١$

$\text{هـ}_{٢}=\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} \Leftarrow \text{هـ}_{٢}^{٢}=\frac{\text{جـ}^{٢}}{\text{أ}^{٢}}=\frac{\text{ك}^{٢}+\text{ل}^{٢}}{\text{ك}^{٢}} \Leftarrow \frac{١}{\text{هـ}_{٢}^{٢}}=\frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}$

∴ $\frac{١}{\text{هـ}_{١}^{٢}}+\frac{١}{\text{هـ}_{٢}^{٢}}=\frac{\text{ل}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}+\frac{\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}=\frac{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}{\text{ل}^{٢}+\text{ك}^{٢}}=١$

السؤال السابع

المركز $\left(\frac{١٣+٣}{٢} ، \frac{-١+٧}{٢}\right)=(٨ ، ٣)$

$٢\text{أ}=١٣-٣=١٠ \Leftarrow \text{أ}=٥$

$٢\text{ب}=٧-{}^{-}١=٨ \Leftarrow \text{ب}=٤$

∴ المعادلة $\frac{(\text{س}-٨)^{٢}}{٢٥}+\frac{(\text{ص}-٣)^{٢}}{١٦}=١$

السؤال الثامن

المركز $\left(\frac{٧+٧}{٢} ، \frac{٢+-٤}{٢}\right) = (٧ ، -١)$

$\therefore$ المعادلة $\frac{(ص+١)^٢}{أ^٢} - \frac{(س-٧)^٢}{ب^٢} = ١$

لكن جـ = ٣

$هـ = \frac{٥}{٣} \Leftarrow \frac{٣}{أ} = \frac{٥}{٣} \Leftarrow ٥أ = ٩ \Leftarrow أ = \frac{٩}{٥}$

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ٩ = \frac{٨١}{٢٥} + ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = ٩ - \frac{٨١}{٢٥} = \frac{١٤٤}{٢٥}$

$$\frac{٢٥ (ص+١)^٢}{٨١} - \frac{٢٥ (س-٧)^٢}{١٤٤} = ١$$

السؤال الأول

أ) ب ، و ، جـ

ب) ب ، جـ ، د

جـ) ب ، و ، جـ ، د ، هـ

د) ب ، جـ ، د ، أ

هـ) أ ، ز ، د

و) د

السؤال الثاني

أ) عدد لا نهائي

ب) مستوى واحد

جـ) صفر

د) أربعة مستويات

السؤال الثالث

أ) خطأ

ب) صحيحة

جـ) خطأ

د) صحيحة

السؤال الرابع

أ) أ ح ط ، ح ط ي ، أ ط ي ، ب جـ د

ب) أ ح ي ، ح ي ط

السؤال الأول

ضع إشارة (✓) أمام الإجابة الصحيحة وإشارة (×) أمام العبارة الخطأ مع ذكر السبب:

أ) ✓ (تعريف توازي مستقيم ومستوى)

ب) × (يتقاطع مستويات بمستقيم)

جـ) × (لأنه يمكن رسم عدد لا نهائي من المستقيمات المارة بنقطة خارج مستوى وتوازي المستوى)

د) ✓ (لأن أي مستقيمين متوازيين يقعان في مستوى واحدفأي قاطع لأحدهما يقطع الآخر)

السؤال الثاني

أ) $\overline{\text{ط ح}}$ ، $\overline{\text{ح و}}$ ب) $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{ح و}}$ جـ) $\overline{\text{د و}}$ ، $\overline{\text{و ح}}$

د) $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{و هـ}}$ هـ) $\overline{\text{د و}}$ ، $\overline{\text{هـ ط}}$ و) أ ب جـ ، هـ ط ح

ز) أ هـ و ، هـ ط ح ح) $\overline{\text{د جـ}}$ // هـ ط ح ط) $\overline{\text{أ هـ}}$ يقطع هـ ط ح

السؤال الثالث

أ) $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ز و}}$ ب) $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ جـ) $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$

د) أ جـ د ، ب جـ د هـ هـ) $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ يقطع المستوى د هـ و

السؤال الرابع

أ) تصور غرفة على شكل متوازي مستطيلات ذات باب وشبابيك يمكنك من خلال هذا النموذج إعطاء أمثلة متنوعة على ما هو مطلوب في هذا السؤال.

السؤال الخامس

البرهان:

أ ∈ س ، أ ∈ ص

إذن أ ∈ س ∩ ص

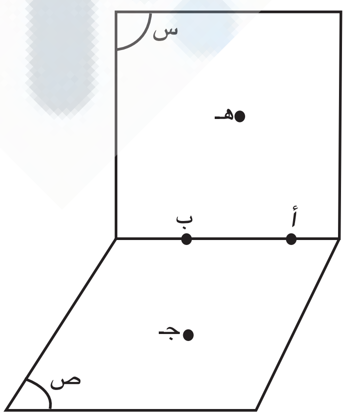
كذلك ب ∈ س ، ب ∈ ص

إذن ب ∈ س ∩ ص

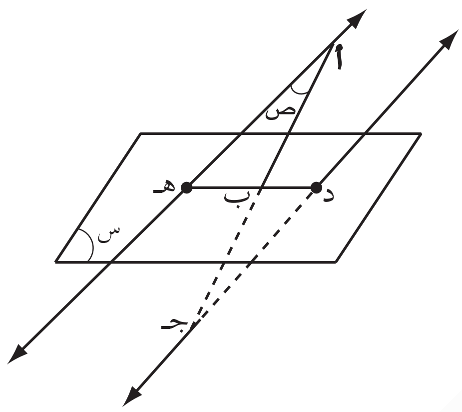
إذن المستقيم الذي يحوي النقطتين أ ، ب يقع بأكمله في كل

من المستويين س ، ص (مسلمة ٥)

إذن المستويان س ، ص يتقاطعان في المستقيم أ ب



السؤال السادس



البرهان:

يوجد مستوى وحيد (أ هـ جـ د)

يحوي المستقيمين المتوازيين

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (لنسمِّ هذا المستوى ص)

أ ، جـ ∈ ص

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ يقع في المستوى ص

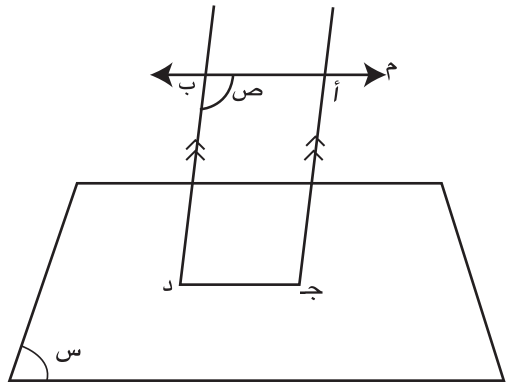
لكن ب ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ فرضاً

إذن هـ ، ب ، د ∈ ص ، ولكن هـ ، ب ، د ∈ س فرضاً

إذن هـ ، ب ، د ∈ س ∩ ص ، لكن س ∩ ص هو مستقيم

إذن هـ ، ب ، د تقع على استقامة واحدة.

السؤال الأول



المطلوب : إثبات أن

أ جـ = ب د ، أ ب = جـ د

البرهان

أ جـ // ب د بالفرض

إذن أ ب د جـ يحدد مستوى وليكن (ص)

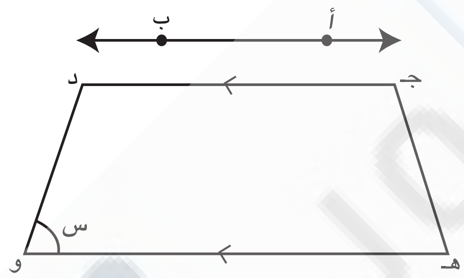
وبما أن أ ب // المستوى س ، المستوى ص يقطع المستوى س في حـ د

إذن أ ب // جـ د (نظرية ٣)

إذن أ ب د حـ متوازي أضلاع (شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازين)

إذن أ جـ = ب د ، أ ب = جـ د (خصائص متوازي الأضلاع)

السؤال الثاني



المعطيات:

أ ب // جـ د // هـ د

(أ ب ، جـ د ، هـ د) ليست في مستوى واحد

المطلوب : إثبات أن

أ ب // المستوى جـ د و هـ (أي المستوى س)

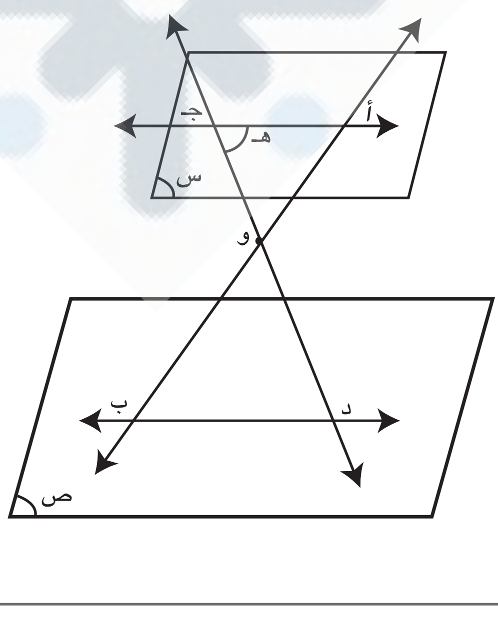
البرهان

جـ د // هـ و ، ∴ جـ د و هـ تشكل مستوى (س)

لكن أ ب // جـ د ، أ ب خارج المستوى س (حيث جـ د ∋ س)

إذن أ ب // المستوى س (نظرية)

السؤال الثالث



المعطيات

س // ص ، أ ب ، جـ د متقاطعان

في و ويقطعان س في أ ، جـ

والمستوى ص في د ، ب

المطلوب : إثبات أن :

$$\frac{\text{أ و}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د ب}}$$

البرهان :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيمان متقاطعان في و

∴ أ جـ ب د تحدد مستوى وليكن (المستوى هـ)

المستوى س // المستوى ص ، المستوى هـ قاطع لهما

في $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$ (نظرية)

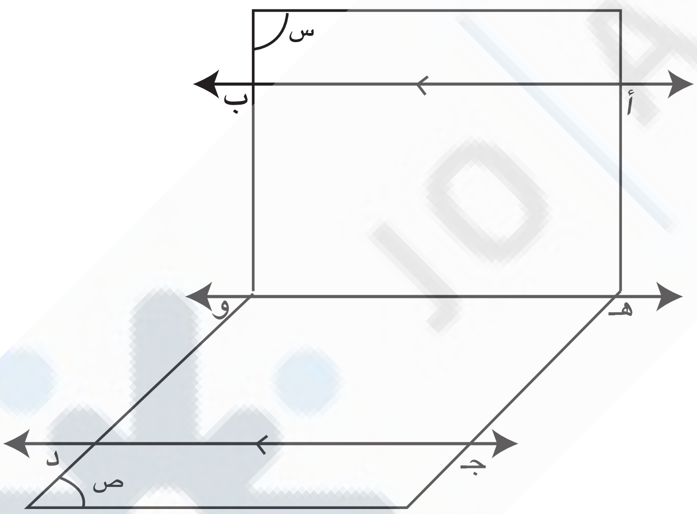
إذن ق (و $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق (و $\hat{\text{ب}}$ د) ، ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ و) = ق (و $\hat{\text{د}}$ ب) بالتبادل

إذن المثلث أ و جـ يشابه المثلث ب و د

إذن $\frac{\text{أ و}}{\text{و ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د ب}}$ (من خصائص التشابه تناسب الأضلاع المتناظرة) وهو المطلوب.

السؤال الرابع

المعطيات



المستويان س ، ص يتقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \subset$ س ، $\overleftrightarrow{\text{حـ د}} \subset$ ص ،

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$

المطلوب إثبات أن:

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

البرهان:

بما أن المستويين س ، ص متقاطعان في $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \in$ س

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ خارج المستوى ص ويوازي $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (حيث $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \subset$ ص)

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى ص (نظرية) ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ لا يلاقي $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ وهما في مستوى واحد (س)

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ (خط التقاطع)

كذلك بالطريقة نفسها نبرهن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

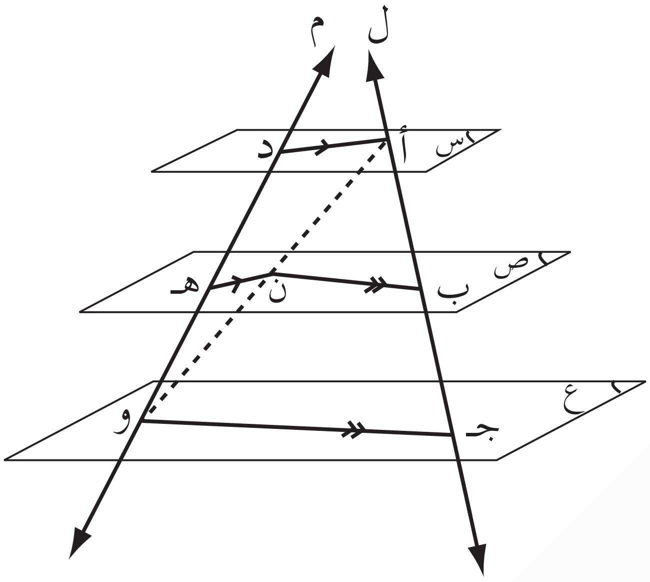
السؤال الخامس

المعطيات

س // ص // ع

ل ، م قاطعان للمستويات الثلاثة

المطلوب إثبات أن $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$



البرهان

المستوى أ جـ و يقطع المستويين المتوازيين ص ، ع

إذن خطّا تقاطعه معهما متوازيان

إذن $\overleftrightarrow{\text{ب ن}} \parallel \overleftrightarrow{\text{جـ و}}$

كذلك بالطريقة نفسها تبين أن $\overleftrightarrow{\text{ن هـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ د}}$

المثلث أ ب ن يشابه المثلث أ حـ و $\Leftarrow$ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{أ و}}$ ومنه

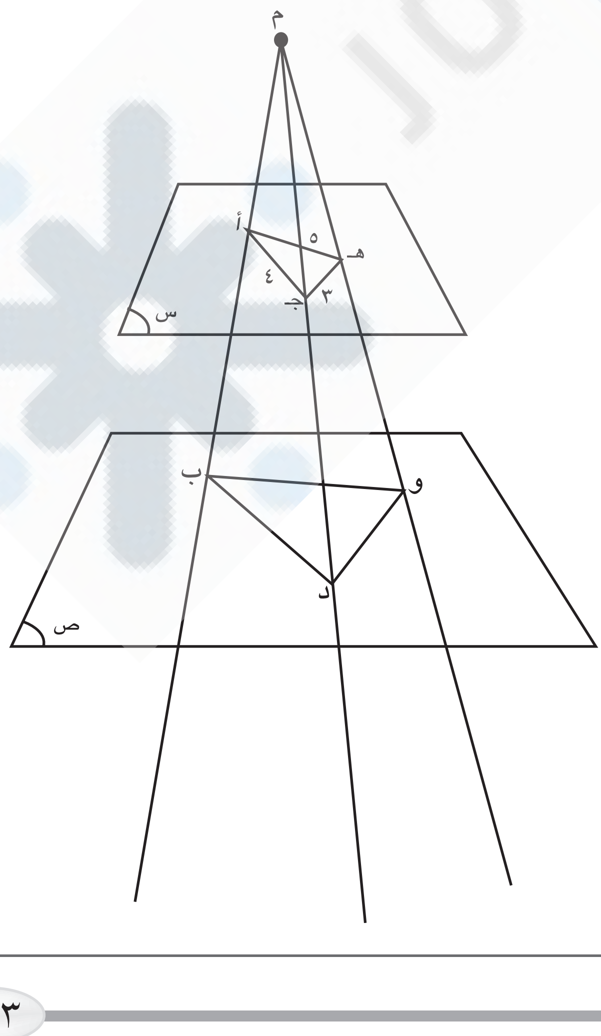
$\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ن}}{\text{ن و}}$ ..... (١) (خصائص التشابه والتناسب)

كذلك المثلث و ن هـ يشابه المثلث و أ د $\Leftarrow$ $\frac{\text{و ن}}{\text{و أ}} = \frac{\text{و هـ}}{\text{و د}}$ ، ومنه :

$\frac{\text{ن و}}{\text{أ ن}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{د هـ}}$ (ومنه) $\frac{\text{أ ن}}{\text{ن و}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$ ...... (٢)

من (١) ، (٢) $\Leftarrow$ $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د هـ}}{\text{هـ و}}$ وهو المطلوب.

السؤال السادس



أ) $\frac{\text{م أ}}{\text{أ ب}} = \frac{٢}{٣}$

إذن $\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{٢}{٥}$ (خصائص التناسب)

بما أن س // ص

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{و د}}$

$\overleftrightarrow{\text{هـ أ}} \parallel \overleftrightarrow{\text{و ب}}$ (وضح للطلبة المبررات)

من تشابه المثلثات $\Leftarrow$

في المثلثين : م د ب ، م جـ أ

$\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب د}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م د}} \Leftarrow \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{\text{ب د}} = \frac{\text{م جـ}}{\text{م د}}$

إذن ب د = ١٠ سم ، كذلك في المثلثين م د و ، م حـ هـ

$\frac{\text{م ج}}{\text{م د}} = \frac{٢}{٥} = \frac{\text{هـ جـ}}{\text{و د}} \Leftarrow \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{\text{و د}}$

إذن و د = $\frac{١٥}{٢}$سم ، في المثلثين م ب و ، م أ هـ

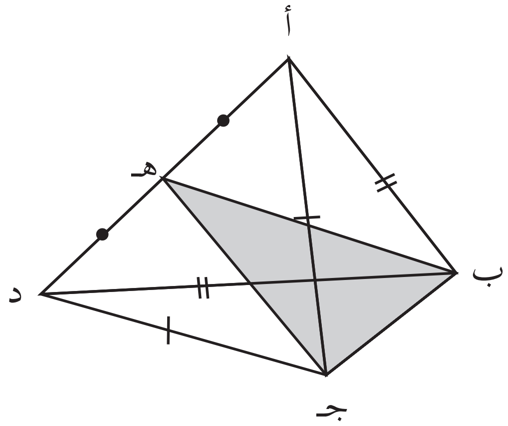
$\frac{\text{م أ}}{\text{م ب}} = \frac{٢}{٥} = \frac{٥}{\text{و ب}} \Leftarrow$ و ب = $\frac{٢٥}{٢}$سم

بما أن أضلاع المثلث هـ جـ م هي ٣ ، ٤ ، ٥

إذن المثلث قائم الزاوية في جـ (عكس نظرية فيثاغورس)

إذن المثلث و د حـ قائم الزاوية في د (لتشابه المثلثين)

ب) مساحة المثلث و د ب = $\frac{١}{٢}$ و د × د ب = $\frac{١}{٢} \times \frac{١٥}{٢} \times ١٠ = \frac{٧٥}{٢} = ٣٧{,}٥$سم^٢



السؤال الأول

البرهان

المثلث أ ب د المتساوي الساقان ب هـ متوسط ⇐ ب هـ ⊥ أ د

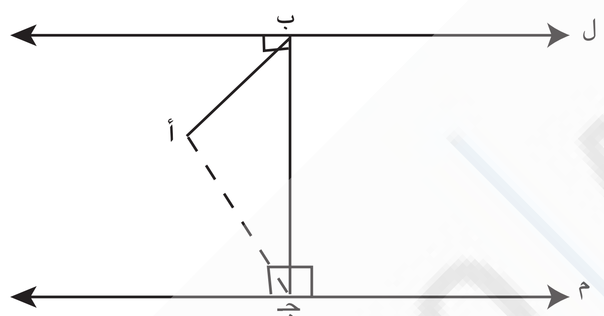
أ) كذلك في المثلث أ حـ د المتساوي الساقين جـ هـ متوسط ⇐ جـ هـ ⊥ أ د

إذن أ د ⊥ على كل من هـ ب ، هـ جـ

إذن أ د ⊥ المستوى هـ ب حـ (نظرية)

ب) بما أن أ د ⊥ المستوى هـ ب حـ ، ب جـ ∋ المستوى هـ ب حـ

إذن أ د ⊥ ب جـ (تعريف تعامد مستقيم ومستوى)



السؤال الثاني

المطلوب إثبات أن : أ جـ ⊥ م

البرهان

ل ⊥ أ ب (بالفرض) ....(١)

ب جـ ⊥ م ، م // ل ⇐ ل ⊥ ب جـ ....(٢)

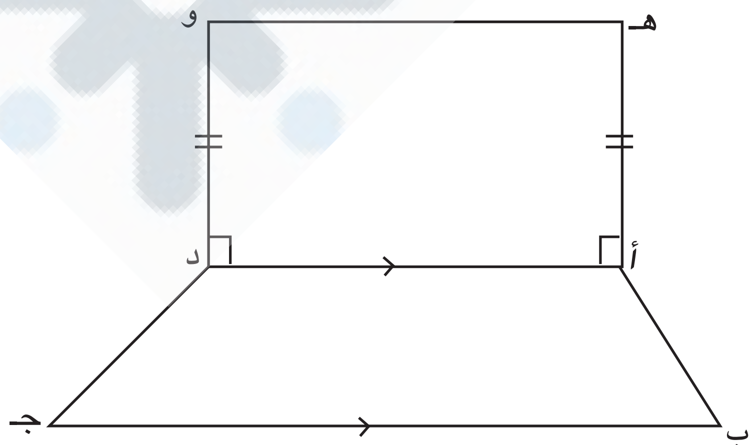
إذن ل ⊥ عمودي على كل من أ ب ، ب جـ

إذن ل ⊥ المستوى المكونة منها أي المستوى أ ب جـ

لكن م // ل

إذن م ⊥ المستوى ب أ جـ (نتيجة سابقة)

إذن م ⊥ أ جـ (لأن أ جـ يقع في المستوى أ ب جـ)



السؤال الثالث

المطلوب إثبات أن هـ و // المستوى أ ب جـ د

البرهان

الشكل هـ أ د و مستطيل (هـ أ ⊥ أ د ، و د ⊥ أ د)

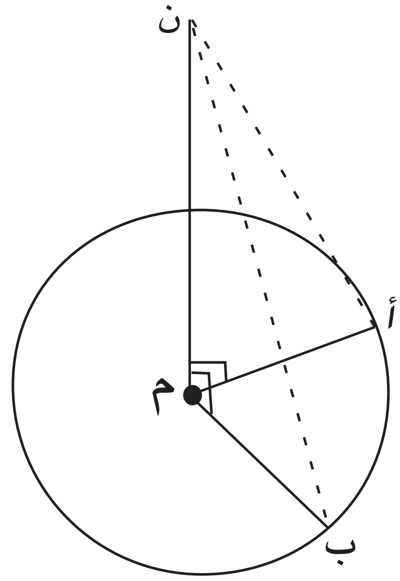
إذن : هـ و // أ د

وبما أن هـ و مستقيم خارج المستوى أ ب حـ د

ويوازي مستقيمًا في المستوى هو (أ د)

إذن هـ و // المستوى أ ب جـ د (نظرية)

السؤال الرابع



المطلوب إثبات أن ن أ = ن ب

البرهان

$\overline{\text{ن م}}$ ⊥ مستوى الدائرة

∴ ق (أ م̂ ن) = ق (ب م̂ ن) = ٩٠°

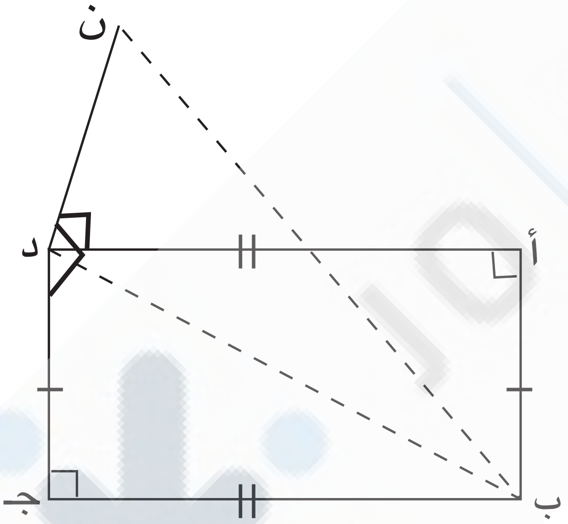
المثلثان القائمان أ م ن ، ب م ن متطابقان فيهما

أ م = م ب (أنصاف أقطار)

$\overline{\text{م ن}}$ مشترك ، ق (أ م̂ ن) = ق (ب م̂ ن) = ٩٠°

ينطبق المثلثان وينتج ان أ ن = ب ن وهو المطلوب

السؤال الخامس



المطلوب إثبات أن: (ب ن)^{٢} = (ن د)^{٢} + (د أ)^{٢} + (د جـ)^{٢}

البرهان

ق (ب د̂ ن) = ٩٠° (لأن $\overline{\text{ن د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب د}}$)

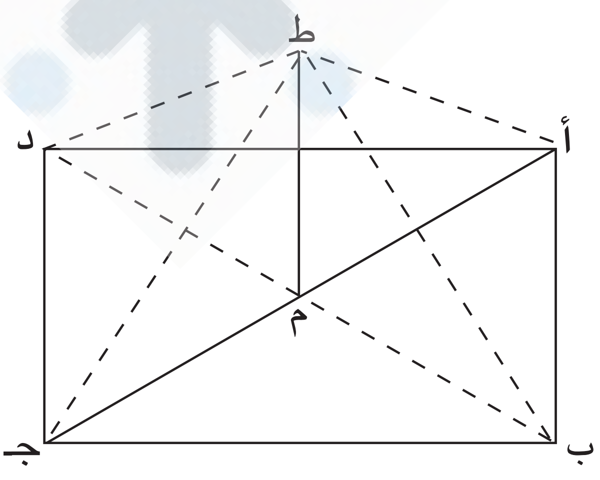
(ب ن)^{٢} = (ب د)^{٢} + (ن د)^{٢}

= (ن د)^{٢} + (أ د)^{٢} + (أ ب)^{٢} (لأن ق (ب أ̂ د) = ٩٠°)

لكن أ ب = د جـ

إذن ∴ (ب ن)^{٢} = (ن د)^{٢} + (أ د)^{٢} + (د جـ)^{٢} وهو المطلوب

السؤال السادس



المطلوب إثبات أن : ط أ = ط ب = ط جـ = ط د

البرهان

$\overline{\text{م ط}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د

∴ أ م̂ ط = ب م̂ ط = جـ م̂ ط = د م̂ ط = ٩٠°

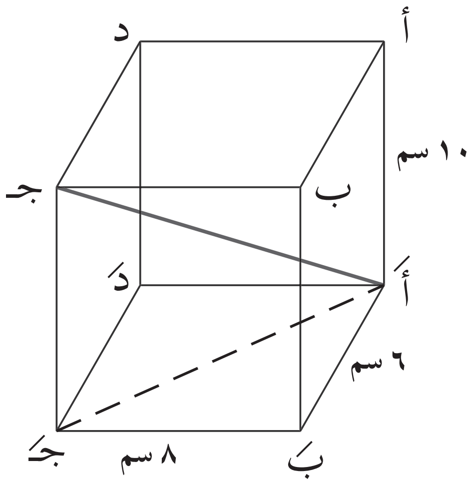
(قطرا المستطيل متساويان وينصف كل منهما الآخر)

إذن: أ م = ب م = جـ م = م د

المثلثات أ م ط ، ب م ط ، جـ م ط ، د م ط

القائمة الزاوية متطابقة ينتج من التطابق أن: ط أ = ط ب = ط جـ = ط د

وهو المطلوب.



السؤال السابع

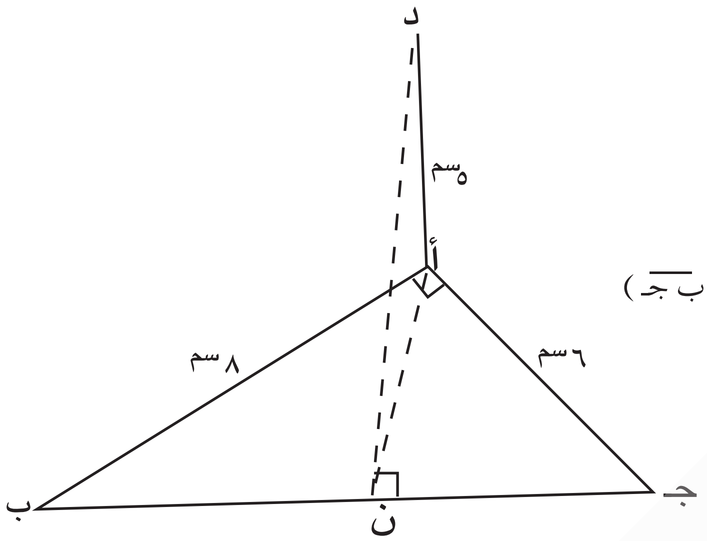
في المثلث أَ جَ جـ (القائم الزاوية)

(أَ جـ)^{٢} = (أَ جَ)^{٢} + (جـ جَ)^{٢}

= (أَ بَ)^{٢} + (بَ جَ)^{٢} + (جـ جَ)^{٢}

= ٣٦ + ٦٤ + ١٠٠ = ٢٠٠

إذن (أَ جـ) = $\sqrt{٢٠٠}$ = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم



السؤال الأول

جـ ب = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

إذن $\frac{٦ \times ٨}{٢} = \frac{١٠ \times \text{أن}}{٢}$ (كل منها تساوي مساحة المثلث)

إذن أن = $\frac{٤٨}{١٠} = \frac{٢٤}{٥} = ٤\frac{٤}{٥}$ سم . (لاحظ أن المسقط $\overline{\text{أن}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$)

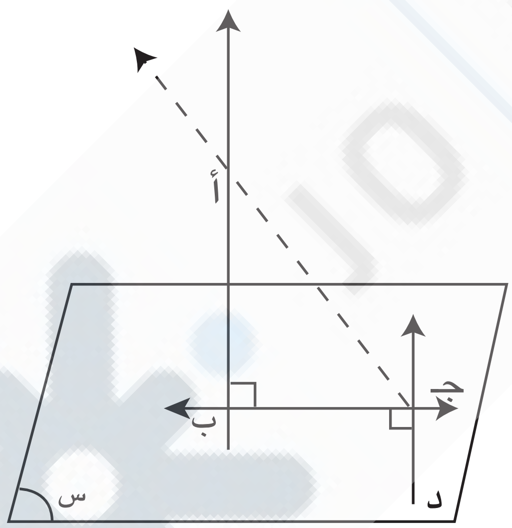
$\overline{\text{د أ}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

إذن ق (د $\hat{\text{أ}}$ ن) = ٩٠° ⟸ المثلث د أ ن قائم الزاوية

إذن (د ن)^{٢} = (أ د)^{٢} + (أ ن)^{٢}

$= ٢٥ + (\frac{٢٤}{٥})^{٢} = \frac{٢٥}{١} + \frac{٥٧٦}{٢٥} = \frac{٦٢٥ + ٥٧٦}{٢٥} = \frac{١٢٠١}{٢٥}$

دن = $\sqrt{\frac{١٢٠١}{٢٥}} = \frac{\sqrt{١٢٠١}}{٥}$ سم ≈ ٦،٩ سم



السؤال الثاني

المطلوب إثبات أن: $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

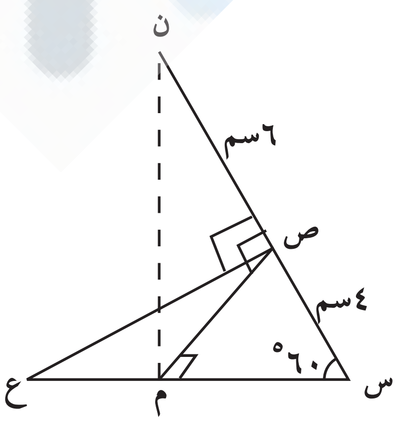
البرهان

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى س

$\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مائل ، $\overline{\text{ب جـ}}$ مسقط مائل

بما ان $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاثة)



السؤال الثالث

أ) المطلوب إثبات أن: $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$

البرهان

$\overleftrightarrow{\text{ن ص}}$ ⊥ المستوى س ص ع

$\overline{\text{ص م}}$ مسقط المائل $\overline{\text{ن م}}$

$\overline{\text{ص م}}$ ⊥ $\overline{\text{س ع}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ (عكس نظرية الأعمدة الثلاثة).

ب) لإيجاد قياس الزاوية الزوجية (ص ، $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ، ن)

وقياسها يساوي قياس الزاوية ص م ن

جا ٦٠° = $\frac{\text{ص م}}{\text{ص س}}$ ⇐ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{\text{ص م}}{4}$

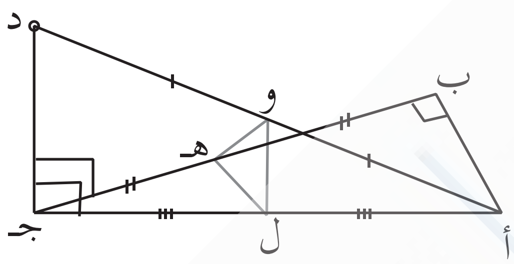
إذن ص م = $\frac{4\sqrt{3}}{2}$ = $2\sqrt{3}$ سم

ظا (ص $\hat{\text{م}}$ ن) = $\frac{\text{ن ص}}{\text{ص م}}$ = $\frac{6}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{3}{\sqrt{3}}$ = $\sqrt{3}$

إذن قياس (ص ، $\overleftrightarrow{\text{س ع}}$ ، ن) = ٦٠°

السؤال الرابع

المطلوب إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$



العمل: نصف $\overline{\text{أ جـ}}$ في ل ، صل و ل ، هـ ل

البرهان

ل منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ⇐ $\overline{\text{هـ ل}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

إذن ق (ل $\hat{\text{هـ}}$ جـ) = ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٩٠° (بالتناظر)

و منتصف $\overline{\text{أ د}}$ ، ل منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ⇐ $\overline{\text{و ل}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$

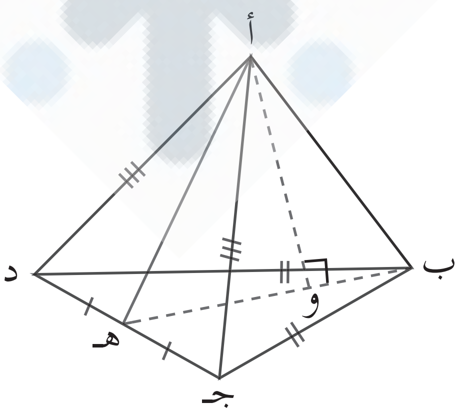
لكن $\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ ⇐ $\overleftrightarrow{\text{و ل}}$ ⊥ أ ب جـ

كذلك $\overline{\text{ل هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (حيث $\overline{\text{ل هـ}}$ مسقط $\overline{\text{و ل}}$ على مستوى أ ب جـ)

إذن المائل $\overleftrightarrow{\text{و هـ}}$ ⊥ على $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ وهو المطلوب

السؤال الخامس

أ) المطلوب إثبات أن: $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى أ ب هـ



البرهان:

$\overline{\text{أ هـ}}$ متوسط في المثلث أ جـ د المتساوي الساقان

إذن $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

كذلك في المثلث ب جـ د المتساوي الساقان

$\overline{\text{ب هـ}}$ متوسط ⇐ $\overline{\text{ب هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ على كل من $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ أ}}$

إذن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى أ ب هـ

ب) المطلوب إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ $\perp$ المستوى ب جـ د

البرهان

$\overline{\text{أ و}} \perp \overline{\text{ب هـ}}$ (بالفرض) ، $\overline{\text{د جـ}} \perp$ المستوى أ ب هـ (بالبرهان اولاً)

إذن $\overline{\text{أ و}} \perp \overline{\text{د جـ}}$

إذن $\overline{\text{أ و}} \perp$ على كل من $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ المتقاطعين في هـ

إذن $\overline{\text{أ و}} \perp$ على المستوى المكون من $\overline{\text{ب هـ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$

إذن $\overline{\text{أ و}} \perp$ المستوى ب جـ د

جـ) جد ق (ب ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، أ) في المثلث أ جـ هـ القائمة الزاوية في هـ

$(\text{أ هـ})^{٢} = (\text{أ جـ}) - (\text{جـ هـ})^{٢} = (١٥)^{٢} - (٩)^{٢} = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

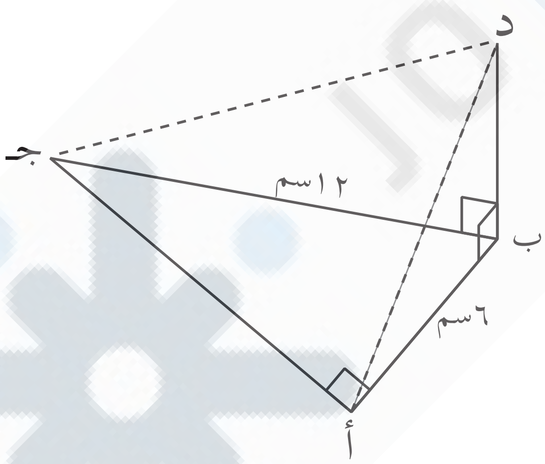
أ هـ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم ، الزاوية الزوجية هي أ هـ و

إذن جا (ب ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، أ) = $\frac{٦\sqrt{٣}}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

إذن ق (ب ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، أ) = ٦٠°

السؤال السادس

أ) المطلوب إثبات أن: المستوى د أ ب $\perp$ المستوى د أ جـ



البرهان

$\overline{\text{جـ أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (جـ ب أ قائم الزاوية في أ)

$\overline{\text{د ب}} \perp$ مستوى المثلث أ ب جـ ، مسقط المائل $\overline{\text{د أ}}$ عمودي على $\overline{\text{أ جـ}}$

أي أن $\overline{\text{ب أ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

إذن المائل $\overline{\text{د أ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

بما أن $\overline{\text{جـ أ}} \perp \overline{\text{د أ}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

إذن $\overline{\text{جـ أ}} \perp$ المستوى د أ ب

لكن $\overline{\text{جـ أ}}$ يقع في المستوى د أ جـ ، إذن المستوى جـ أ د $\perp$ المستوى د أ ب (نظرية) وهو المطلوب

ب) جد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب د ، جـ ب د (أي أ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ ، جـ) وفي هذه الحالة تكون الزاوية أ ب جـ

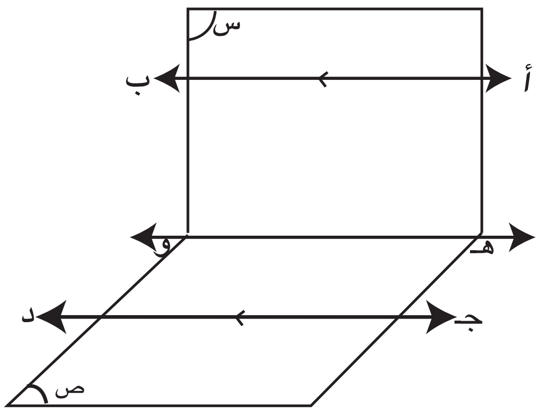
في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في أ

جتا أ ب جـ = $\frac{\text{ب أ}}{\text{ب جـ}} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$

إذن ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٦٠°

السؤال الأول

المطلوب إثبات أن أ ب // جـ د



البرهان:

أ ب // المستوى ص بالفرض

إذن أ ب // هـ و (خط تقاطع المستويين) .... (١) (نتيجة سابقة)

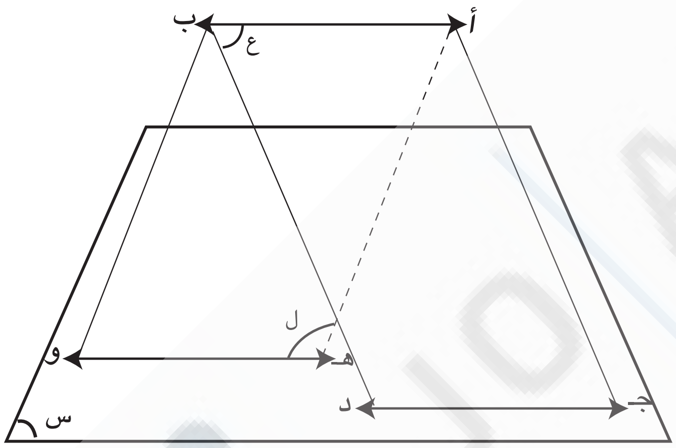
كذلك جـ د // المستوى س بالفرض

إذن جـ د // هـ و (نتيجة سابقة) .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ ب // جـ د (حسب النتيجة ، المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان)

السؤال الثاني

المطلوب إثبات أن جـ د // هـ و



البرهان

أ ب // المستوى س

المستوى ع يحوي أ ب

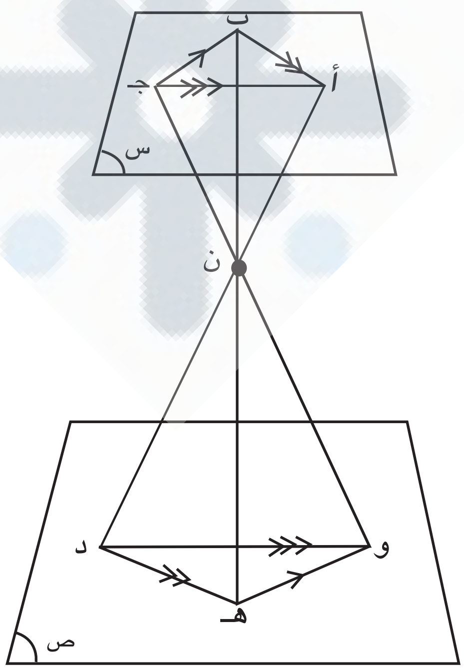
ويقطع المستوى س في جـ د

إذن أ ب // جـ د (نتيجة سابقة) .... (١)

بالطريقة نفسها نبرهن أن أ ب // هـ و .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن جـ د // هـ و (المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان)

السؤال الثالث



المطلوب إثبات أن: المثلثين أ ب جـ ، د هـ و متشابهان

البرهان

– لاحظ أن كل مستقيمين متقاطعين

في (ن) يقعان في مستوى واحد

– كذلك لاحظ أن:

أ ب // هـ د ، ب جـ // و هـ ، أ جـ // و د

(لأنه إذا قطع مستوى مستويين متوازيين فإن خطي التقاطع متوازيان).

– المثلث ن أ ب يشابه المثلث ن د هـ $\Leftarrow \frac{\text{ن أ}}{\text{ن د}} = \frac{\text{ن ب}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}$ .... (١)

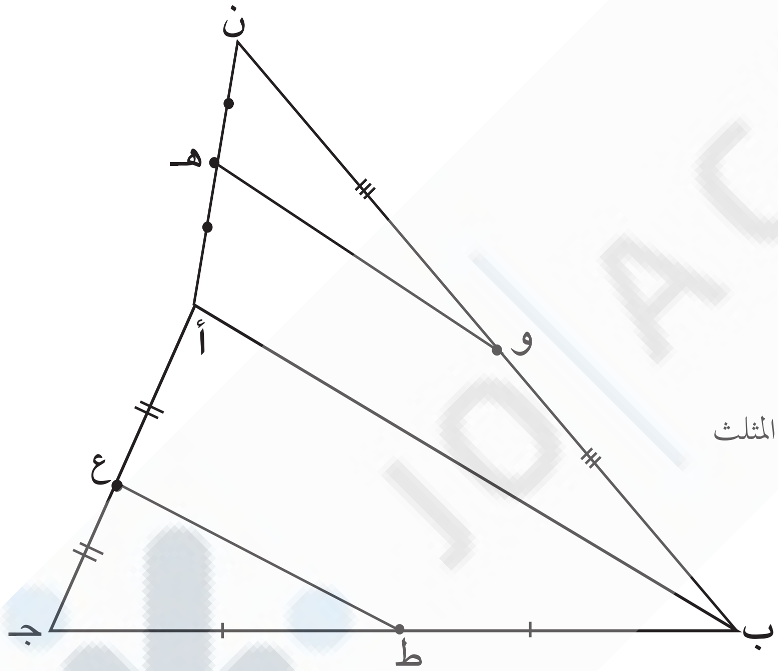
– كذلك المثلث ن ب جـ يشابه المثلث ن هـ و $\Leftarrow \frac{\text{ن ب}}{\text{ن هـ}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{ن و}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}}$ .... (٢)

– كذلك المثلث ن أ جـ يشابه المثلث ن د و $\Leftarrow \frac{\text{ن أ}}{\text{ن د}} = \frac{\text{ن جـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$ .... (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) $\Leftarrow \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}}$

أي أن الأضلاع المتناظرة في المثلثين أ ب جـ ، د هـ و متناسبة

إذن: المثلثان أ ب جـ ، د هـ و متشابهان وهو المطلوب.



السؤال الرابع

المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{و هـ}} \parallel \overline{\text{ح ط}}$

البرهان : في المثلث ن ب أ

$\overline{\text{هـ و}}$ تصل بين منتصف ضلعين في المثلث

إذن $\overline{\text{هـ و}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ .... (١)

كذلك في المثلث أ ب جـ ، $\overline{\text{ح ط}}$ تصل بين منتصف ضلعين في المثلث

إذن $\overline{\text{ح ط}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ .... (٢)

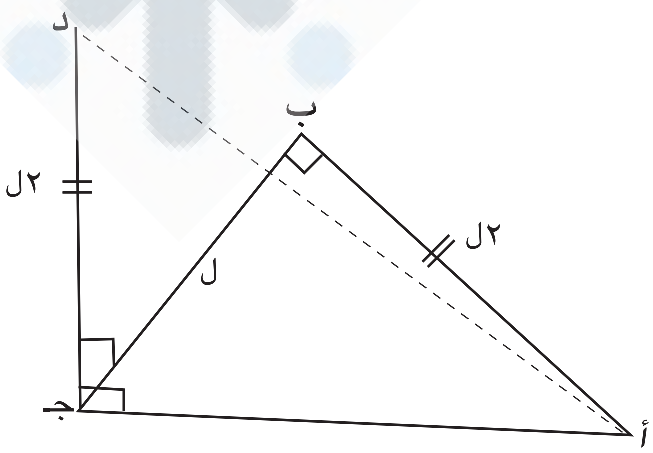
من (١) ، (٢)، $\overline{\text{و هـ}} \parallel \overline{\text{ح ط}}$

(المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان)

السؤال الخامس

المطلوب : إثبات أن: أ د = ٣ ب جـ

البرهان



نفرض أن طول ب جـ = ل

فيكون طول أ ب = جـ د = ٢ ل

$\overline{\text{د جـ}} \perp$ مستوى المثلث أ ب جـ

إذن $\overline{\text{د جـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ في المثلث أ ب جـ

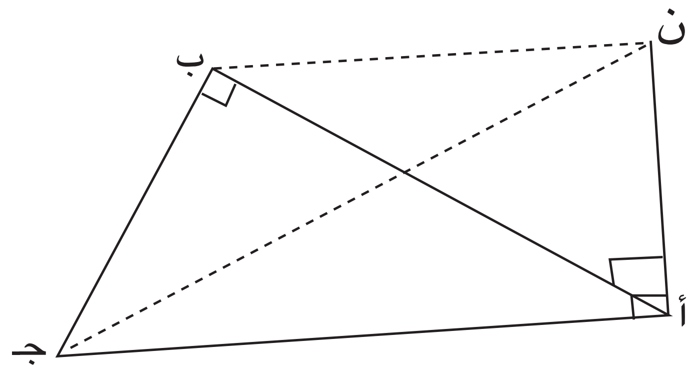
(أ د)^2 = (د جـ)^2 + (أ جـ)^2 = (د جـ)^2 + (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

= (٢ ل)^2 + (٢ ل)^2 + (ل)^2 = ٩ ل^2

إذن أ د = ٣ ل أي أن أ د = ٣ ب جـ

السؤال السادس

المطلوب إثبات أن : ق (ن بٓ جـ) = ٩٠°



البرهان

ن أ ⊥ مستوى أ ب جـ

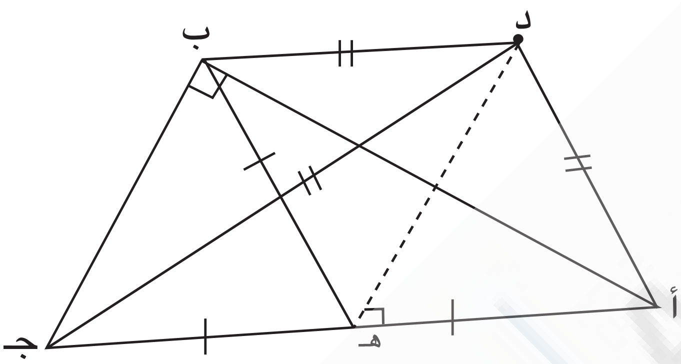
أ ب ⊥ ب جـ

أ ب مسقط المائل ن ب

إذن ن ب ⊥ ب جـ (عكس نظرية الأعمدة الثلاثة)

أي أن ق (ن بٓ جـ) = ٩٠°

السؤال السابع



المطلوب : إثبات أن: د هـ ⊥ المستوى أ ب جـ

البرهان : صل ب هـ، في المثلث أ د جـ المتساوي الساقان د هـ متوسط

إذن د هـ ⊥ أ جـ .... (١)

في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب

ب هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ ⇐ أي أن أ هـ = هـ جـ = ب هـ

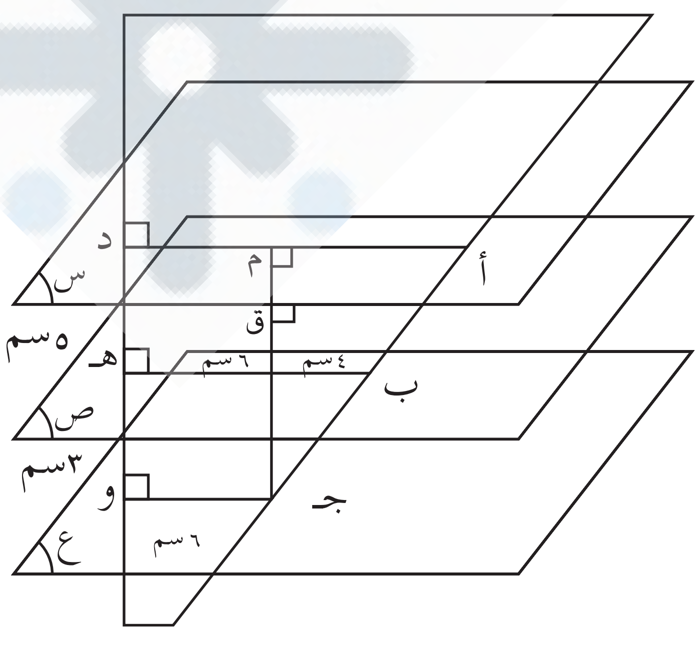
في المثلث أ د هـ القائم : (د هـ)^{٢} = (أ د)^{٢} − (أ هـ)^{٢} [لكن أ د = د ب، أ هـ = ب هـ]

إذن (د هـ)^{٢} = (د ب)^{٢} − (ب هـ)^{٢} ⇐ (د ب)^{٢} = (د هـ)^{٢} + (ب هـ)^{٢} أي أن ق (د هٓـ ب) = قائمة (عكس نظرية فيثاغورس)

إذن (د هـ) ⊥ هـ ب .... (٢)

من (١) ، (٢) د هـ ⊥ كل من أ جـ ، ب هـ ⇐ د هـ ⊥ مستوى أ ب جـ

السؤال الثامن



المطلوب : إيجاد أطوال أ د ، أ ب ، ب جـ

الحل : أ جـ ، د و في مستوى واحد

س // ص // ع ⇐ أ د // ب هـ // جـ و

في Δ جـ ق ب

(ب جـ)^{٢} = (جـ ق)^{٢} + (ق ب)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

إذن ب جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

المثلث جـ ب ق يشابه المثلث جـ أ م

إذن $\frac{\text{جـ ق}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{جـ أ}} \Rightarrow \frac{٣}{٨} = \frac{٥}{\text{جـ أ}}$

إذن جـ أ $= \frac{٤٠}{٣} = ١٣ \frac{١}{٣}$ سم

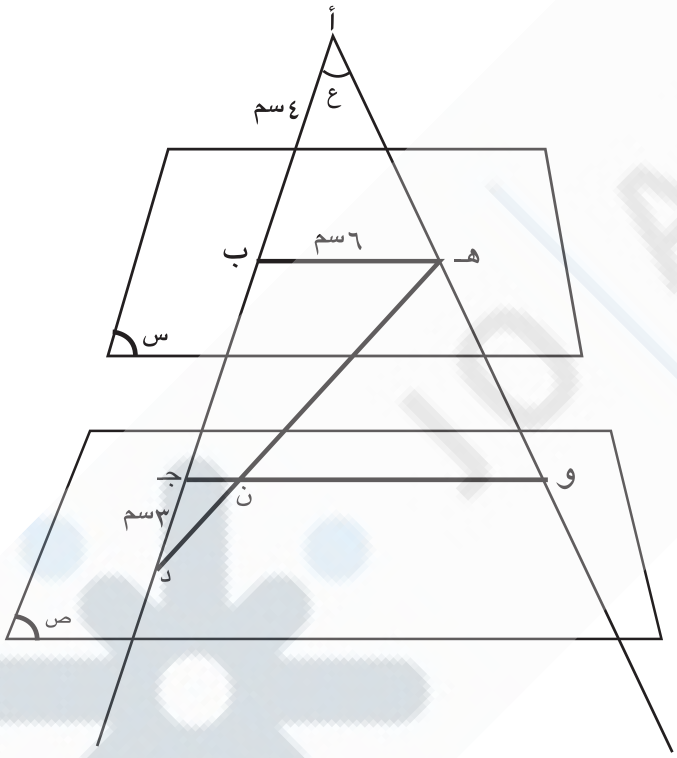
إذن أ ب $= ١٣ \frac{١}{٣} - ٥ = ٨ \frac{١}{٣}$ سم

كذلك $\frac{\text{جـ ق}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{ق ب}}{\text{أ م}} \Rightarrow \frac{٣}{٨} = \frac{٤}{\text{أ م}} \Rightarrow$

أ م $= \frac{٣٢}{٣} = ١٠ \frac{٢}{٣}$ سم

إذن أ د $= ١٠ \frac{٢}{٣} + ٦ = ١٦ \frac{٢}{٣}$ سم

السؤال التاسع



المطلوب إثبات :

أ) و ، ن ، جـ على استقامة واحدة

البرهان : $\overleftrightarrow{\text{أو}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$

مستقيمان متقاطعان فيحددان مستوى (ع)

تقاطع المستوى ع مع المستوى ص $= \overleftrightarrow{\text{وجـ}}$

$\overline{\text{هـ د}} \subset$ ع (لانه هـ $\in \overleftrightarrow{\text{أو}}$ ، د $\in \overleftrightarrow{\text{أد}}$ ، ن $\in \overline{\text{هـ د}}$)

$\overline{\text{هـ د}}$ تقطع المستوى ص في ن ، إذن ن تنتمي إلى ص وتنتمي إلى ع

إذن ن تقع على خط تقاطع المستويين ع ، ص

(لاحظ أن المثلث أ هـ د ينطبق على المستوى ع)

إذن ن $\in \overline{\text{وجـ}}$ ، وبما أنه يتقاطع مستويان في مستقيم

إذن و ، ن ، جـ على استقامة واحدة

ب) جد طول $\overline{\text{و ن}}$

$\overline{\text{هـ ب}} \parallel \overline{\text{و جـ}}$ (نظرية)

المثلث أ هـ ب يشابه المثلث أ و جـ

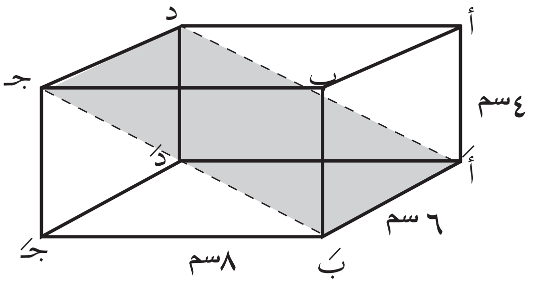
$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{هـ ب}}{\text{و جـ}} \Rightarrow \frac{٤}{١٠} = \frac{٦}{\text{و جـ}} \Rightarrow$ و جـ $= \frac{٦٠}{٤} = ١٥$ سم

كذلك المثلث د جـ ن يشابه المثلث د ب هـ $\Rightarrow \frac{\text{د جـ}}{\text{د ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{هـ ب}} \Rightarrow \frac{٣}{٩} = \frac{\text{جـ ن}}{٦} \Rightarrow$ جـ ن $= \frac{١٨}{٩} = ٢$ سم

إذن و ن $= ١٥ - ٢ = ١٣$ سم

السؤال العاشر

المطلوب إيجاد ظل الزاوية الزوجية بين المستويين أَ بَ جـَ دَ، أَبَ جـ د



الحل: حرف الزاوية الزوجية هو $\overline{\text{أَ بَ}}$

$\overline{\text{جـ جـَ}}$ ⊥ مستوى أَ بَ جـَ دَ

$\overline{\text{جـ جـَ}}$ ⊥ $\overline{\text{أَ بَ}}$ ، $\overline{\text{جـَ بَ}}$ هو مسقط المائل $\overline{\text{جـ بَ}}$

إذن $\overline{\text{جـ بَ}}$ ⊥ $\overline{\text{أَ بَ}}$

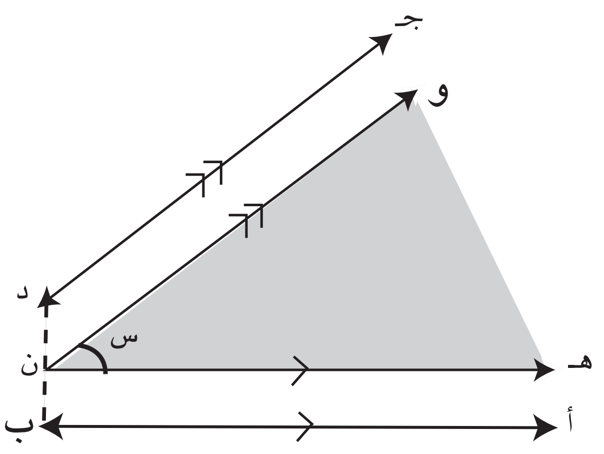
إذن الزاوية الزوجية هي جـ $\hat{\text{بَ}}$ جـَ

$$\text{ظا (جـ}\hat{\text{بَ}}\text{جـَ)} = \frac{\text{جـ جـَ}}{\text{جـَ بَ}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$$

السؤال الأول

المطلوب إثبات أن : المستوى ن هـ و // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

كذلك المستوى ن هـ و // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$



البرهان

$\overleftrightarrow{\text{ن هـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{ن و}}$ مستقيمان متقاطعان

إذن يحددان مستوى واحد وليكن المستوى (س)

لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم خارج المستوى (س) ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ ن}}$ (حيث $\overleftrightarrow{\text{هـ ن}}$ ∋ س)

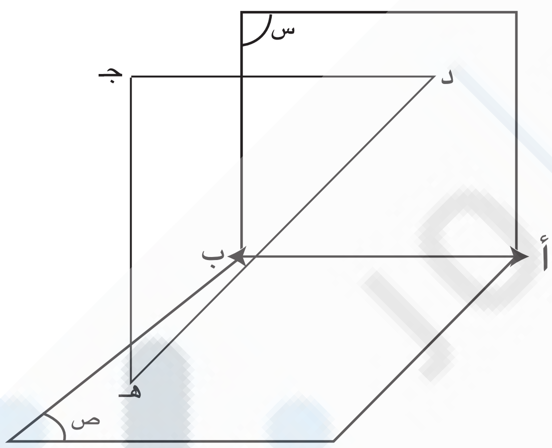
إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // المستوى (س) (نظرية)

كذلك $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيم خارج المستوى (س) ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // $\overleftrightarrow{\text{و ن}}$ (حيث $\overleftrightarrow{\text{و ن}}$ ∋ س)

إذن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ // المستوى (س) (نظرية) وهو المطلوب

السؤال الثاني

المطلوب إثبات أن : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{د هـ}}$



البرهان

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ المستوى س ⇐ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (نظرية)

(لأن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∋ س) .... (١)

كذلك $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ⊥ المستوى ص ، ⇐ $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

(نظرية) (لان $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∋ ص) ....(٢)

من (١) ، (٢) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ على كل من $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ هـ}}$

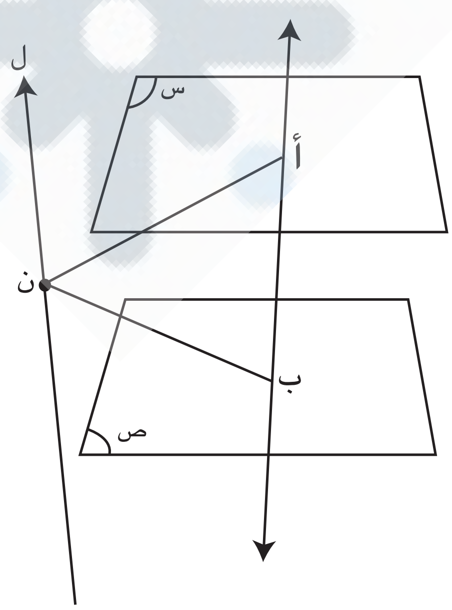
إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى د جـ هـ

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ (لان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ ∋ المستوى جـ د هـ)

أي أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{د هـ}}$ وهو المطلوب

السؤال الثالث

برهن أن المستويين العموديين على مستقيم واحد متوازيان.



المعطيات س ، ص مستويان عموديان على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

المطلوب إثبات أن المستوى س // المستوى ص

البرهان

ان لم يتوازَ المستويان فنفرض أنهما يتقاطعان في مستقيم مثل (ل)

إفرض أن: ن ∋ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$

إذن ن ∋ إلى كل من المستويين س ، ص (لأنها على خط التقاطع).

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ∋ المستوى س ⇐ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ....(١) (لأن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى س)

كذلك $\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ ∋ المستوى ص ⇐ $\overleftrightarrow{\text{أ ن}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ ....(٢) (لأن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ⊥ المستوى ص)

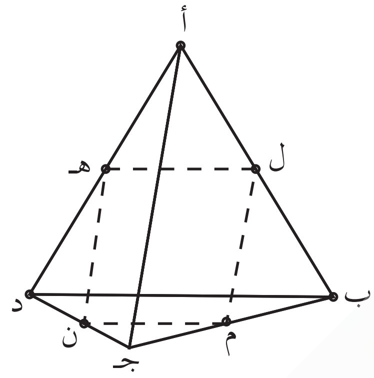
ولكن هذا لا يمكن أن يحدث

(إنزال عمودين مختلفين من نقطة (ن) على مستقيم واحد ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$)

إذن الفرض غير صحيح

أي أنه لا يمكن أن يتقاطع المستويان س ، ص

إذن المستوى س // المستوى ص



السؤال الرابع

(المطلوب إثبات أن : $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$

البرهان

المستوى ل م ن هـ // $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$

وكذلك المستوى أ جـ ب يمر بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ويقطع المستوى ل م ن هـ في $\overline{\text{ل م}}$

∴ $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ (نظرية)

كذلك $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ (بالطريقة نفسها)

بالطريقة نفسها نبرهن أن $\overline{\text{ل هـ}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ // $\overline{\text{ب د}}$ من ذلك ينتج أن في المثلث أ ب جـ

$\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \boxed{\frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}}}$ ....(١)

في المثلث ب جـ د (من خصائص تشابه المثلثات والتناسب)

$\boxed{\frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}}$ ....(٢)

في المثلث أ د جـ

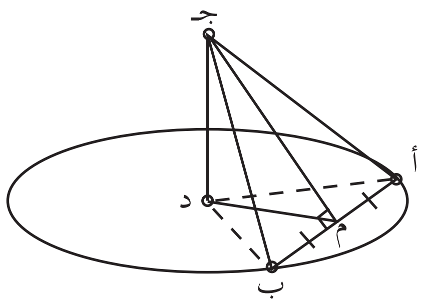
$\frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$ ....(٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

ينتج أن $\frac{\text{أ ل}}{\text{ل ب}} = \frac{\text{جـ م}}{\text{م ب}} = \frac{\text{جـ ن}}{\text{ن د}} = \frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ د}}$ وهو المطلوب.

السؤال الخامس

المطلوب إيجاد ظل قياس الزاوية الزوجيةبين المستويين أ ب جـ ، مستوى الدائرة



الحل

ليكن $\overline{\text{د م}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ⇐ أ م = م ب = ٦ سم

$\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp$ مستوى الدائرة ، $\overline{\text{جـ م}}$ مائل على مستوى الدائرة

وبما أن $\overline{\text{د م}}$ (مسقط المائل) $\perp \overline{\text{أ ب}}$

إذن المائل $\overline{\text{جـ م}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

إذن الزاوية بين المستويين المطلوبين هي : (جـ $\hat{\text{م}}$ د)

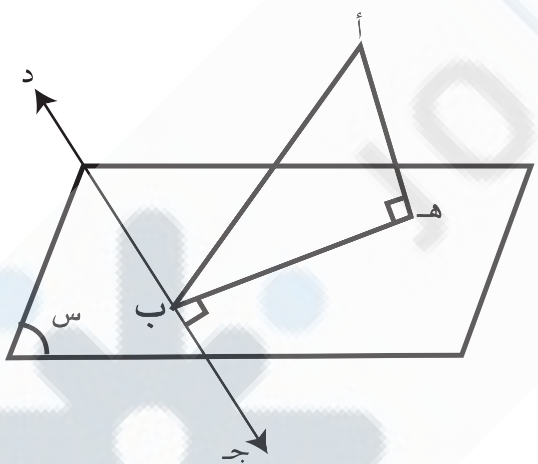
لكن (م د)^{٢} = (أ د)^{٢} − (أ م)^{٢} = (١٠)^{٢} − (٦)^{٢} = ١٠٠ − ٣٦ = ٦٤ ⇐ م د = ٨ سم

ظا (جـ $\hat{\text{م}}$ د) = $\frac{\text{جـ د}}{\text{م د}} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

السؤال السادس

نص عكس نظرية الأعمدة الثلاثة :إذا مُدَّ مائل من نقطة خارج مستوى ليلاقي مستقيمًا معلومًا في المستوى، وكان مسقط المائل عموديًا على المستقيم ، فإن المائل يكون عموديًا أيضًا على هذا المستقيم.

المعطيات



$\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ مستقيم في المستوى س

أ نقطة خارج المستوى س

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}} \perp$ المستوى س

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مائل ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ مسقط المائل على س

$\overleftrightarrow{\text{هـ ب}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

المطلوب إثبات : $\overleftrightarrow{\text{أ ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

البرهان

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}} \perp$ المستوى س

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

لكن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ فرضًا

إذن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ عمودي على كل من المستقيمين المتقاطعين

$\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ب}}$ اللذان ينتميان إلى المستوى أ هـ ب

إذن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ عمودي على المستوى أ هـ ب

إذن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وهو المطلوب

ملحق ١

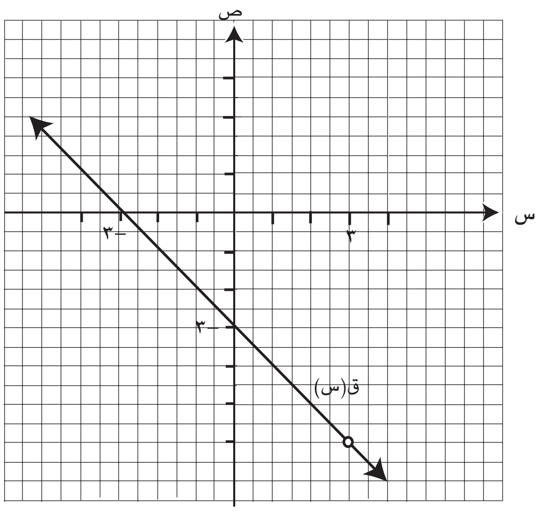
إجابات الأسئلة (التدريبات)

تدريب (١)

$\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{٩ - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٣}$ ، $\text{س} \neq ٣$

$= \dfrac{(٣ - \text{س})(٣ + \text{س})}{\text{س} - ٣}$ ، $\text{س} \neq ٣$

$= -(٣ + \text{س})$ ، $\text{س} \neq ٣$



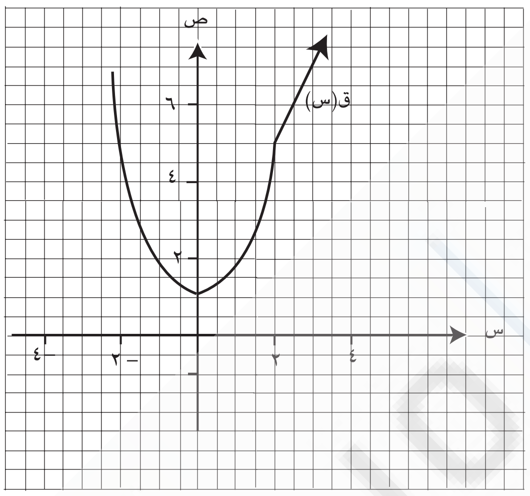
١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{+}} \text{ق}(\text{س}) = -٦$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣^{-}} \text{ق}(\text{س}) = -٦$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٣} \text{ق}(\text{س}) = -٦$

تدريب (٢)

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ &، \text{س} \leq ٢ \\ ٢\text{س} + ١ &، \text{س} > ٢ \end{cases}$



١) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق}(\text{س}) = ٥$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق}(\text{س}) = ٥$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق}(\text{س}) = ٥$

تدريب (٣)

١) $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{م}(\text{س})$ غير موجودة لأن م غير معرف عند س = ١ من اليمين

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{-}} \text{م}(\text{س})$ = صفرًا

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \text{م}(\text{س})$ غير موجودة لأن $\lim\limits_{\text{س} \to ١^{+}} \text{م}(\text{س})$ غير موجودة.

تدريب (١)

١) $\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \sqrt[3]{٢\,\text{ق}(س)} = \sqrt[3]{٢\,\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)}$

$= \sqrt[3]{٢\,\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)} = \sqrt[3]{٢ \times ٤} = ٢$

٢) $\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(س^{٢}\,\text{ق}(س) - \left(\text{ق}(س)\right)^{٢} + ٢\,س\right)$

$= \underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ س^{٢} \times \underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) - \left(\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)\right)^{٢} - ٢\,\underset{س\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ س$

$= \text{صفر} - ٤^{٢} + \text{صفر} = -١٦$

تدريب (٢)

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز القيمة المطلقة

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٦ - ٢\,س &،\ س \leq ٣ \\ ٢\,س - ٦ &،\ س > ٣ \end{cases}$$

١) $\underset{س\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س\leftarrow ٣^{+}}{\text{نهـا}}\ (٢\,س - ٦) = \text{صفر}$

$\underset{س\leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س\leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}\ (٦ - ٢\,س) = \text{صفر}$

$\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \text{صفر}$

٢) $\underset{س\leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = \underset{س\leftarrow -٣}{\text{نهـا}}\ (٦ - ٢\,س) = ٦ + ٦ = ١٢$

تدريب (٣)

أعد تعريف ق (س)، هـ (س) دون استخدام رمز الصحيح:

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٥ &،\ ٠ \leq س < ١ \\ ٦ &،\ ١ \leq س < ٢ \end{cases} \quad ،\quad \text{هـ}(س) = \begin{cases} ٤ &،\ س = ٠ \\ ٣ &،\ ٠ < س \leq ١ \\ ٢ &،\ ١ < س \leq ٢ \end{cases}$$

١) $\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ٦$ ، $\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س) = ٥$

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة

٢) $\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = ٢$ ، $\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س) = ٣$

$\underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)$ غير موجودة

٣) $$\text{ق}(س) + \text{هـ}(س) = \begin{cases} ٩ &،\ س = ٠ \\ ٨ &،\ ٠ < س < ١ \\ ٩ &،\ س = ١ \\ ٨ &،\ ١ < س < ٢ \end{cases}$$

$\underset{س\leftarrow ١^{+}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right) = ٨$، $\underset{س\leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}\ \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right) = ٨ \Leftarrow \underset{س\leftarrow ١}{\text{نهـا}}\ \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right) = ٨$

نستنتج أنه إذا كانت $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(س)$ غير موجودة،وكانت $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \text{هـ}(س)$ غير موجودة، فليس من الضروري أن تكون $\underset{س\leftarrow أ}{\text{نهـا}}\ \left(\text{ق}(س) + \text{هـ}(س)\right)$ غير موجودة.

تدريب (١)

١) $\underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤ س + ٣}{س - ٣} = \underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)(س - ١)}{س - ٣} = ٢$

٢) $\underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س^{٢} - ٢٥}\right) = \underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{١٠ - ٢ س}{٥ س} \times \frac{١}{س^{٢} - ٢٥}\right)$

$= \underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{٢(٥ - س)}{٥ س (س - ٥)(س + ٥)} = \underset{س\leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{-٢}{٥ س (س + ٥)} = \frac{-١}{١٢٥}$

تدريب (٢)

$\underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٣ س - ٢}{س^{٣} - ٨} = \underset{س\leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢ س + ١)}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢ س + ٤)} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

تدريب (٣)

$غ(٣) = \underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} = \underset{س\leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)(س^{٢} + ٣ س + ٩)}{س - ٣} = ٢٧$

تدريب (٤)

$\underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ٧} = \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ٧} \times \frac{\sqrt[٣]{(س + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤}{\sqrt[٣]{(س + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤}$

$= \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١) - ٨}{(س - ٧)\left(\sqrt[٣]{(س + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤\right)}$

$= \underset{س\leftarrow ٧}{\text{نهـا}} \frac{١}{\sqrt[٣]{(س + ١)^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤} \times \frac{س - ٧}{س - ٧} = \frac{١}{١٢}$

تدريب (١)

نفرض أن ٢ س = ص ومنه س = $\frac{\text{ص}}{\text{٢}}$

عندما س ← ٠ فإن ص ← ٠

١) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٩ س}}{\text{حا ٢ س}} = \underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٩} \times \frac{\text{ص}}{\text{٢}}}{\text{حا ص}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}} \underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١}}{\frac{\text{حا ص}}{\text{ص}}} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}} \times \text{١} = \frac{\text{٩}}{\text{٢}}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا ٢ س}}{\text{٧ س}} = \underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا ص}}{\text{٧} \times \frac{\text{ص}}{\text{٢}}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}} \underset{\text{ص}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ظا ص}}{\text{ص}} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}} \times \text{١} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}$

تدريب (٢)

$$\underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{قا (٢ س)} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\frac{\text{١}}{\text{جتا٢س}} - \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١} - \text{جتا ٢ س}}{\text{س}^{\text{٢}}\ \text{جتا ٢ س}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{١} - (\text{١} - \text{٢ حا}^{\text{٢}}\text{ س})}{\text{س}^{\text{٢}}\ \text{جتا ٢ س}} = \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٢ حا}^{\text{٢}}\text{ س}}{\text{س}^{\text{٢}}\ \text{جتا ٢ س}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{٢}}{\text{جتا ٢ س}} \times \underset{\text{س}\leftarrow\text{٠}}{\text{نهـــا}} \left(\frac{\text{حا س}}{\text{س}}\right)^{\text{٢}} = \text{٢} \times \text{١} = \text{٢}$$

تدريب (٣)

$$\underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{حا س} - \text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}} = \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا}(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٢}}) - \text{جتا س}}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$$

$$= \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{٢ جا}(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}})\ \text{جا}(-\frac{\pi}{\text{٤}})}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$$

$$= -\text{٢}\ \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نهـــا}} \text{جا}(-\frac{\pi}{\text{٤}}) \times \underset{\text{س}\leftarrow\frac{\pi}{\text{٤}}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{حا}(\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}})}{\text{س} - \frac{\pi}{\text{٤}}}$$

$$= -\text{٢} \times \frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} \times \text{١} = \sqrt{\text{٢}}$$

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
(١ – ٥) النهاية في المالانهاية

تدريب (١)

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٥}{\text{س}^{٤}} =$ صفرًا

تدريب (٢)

$\lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{\text{س}^{٤} - (\text{س} - ٥)^{٣}}{(٢ - \text{س})^{٤} - ٢\,\text{س}^{٤}} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{٤}} = \lim_{\text{س}\to-\infty} \frac{\text{س}^{٤}}{-\text{س}^{٤}} = -١$

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
(١ – ٦) الاتصال عند نقطة

تدريب (١)

نعيد تعريف الاقتران دون استخدام رمز الصحيح.

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} & ،\ ٠ \le \text{س} < ١ \\ ٢\,\text{س} & ،\ ١ \le \text{س} < ٢ \end{cases}$$

$\lim_{\text{س}\to ١^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ١^{+}} ٢\,\text{س} = ٢$، $\lim_{\text{س}\to ١^{-}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ١^{-}} \text{س} = ١ \Rightarrow \lim_{\text{س}\to ١} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة

ق غير متصل عند س = ١ لأن $\lim_{\text{س}\to ١} \text{ق}(\text{س})$ غير موجودة.

تدريب (٢)

بما أن ق متصل عند س = ١ فإن: $\lim_{\text{س}\to ١^{-}} \text{ق}(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ١^{+}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١)$

أي أن:

$\lim_{\text{س}\to ١^{-}} (\text{أ}\,\text{س}^{٣} - \text{ب}\,\text{س} + ١) = ٥$ ومنه أ – ب = ٤ .... (١)

$\lim_{\text{س}\to ١^{+}} (\text{س}^{٢} - (\text{أ} + \text{ب})\,\text{س} + ٢) = ٥$ ومنه أ + ب = – ٢ .... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نجد أن أ = ١، ب = – ٣

تدريب (٣)

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & ،\ ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣ & ،\ ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases} \qquad \text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\,(\text{س} - ٢)^{٣} & ،\ ١ \le \text{س} < ٢ \\ ٣\,(\text{س} - ٢)^{٣} & ،\ ٢ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

$\lim_{\text{س}\to ٢^{+}} (\text{ق} \times \text{هـ})(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ٢^{+}} ٣\,(\text{س} - ٢)^{٣} =$ صفرًا

$\lim_{\text{س}\to ٢^{-}} (\text{ق} \times \text{هـ})(\text{س}) = \lim_{\text{س}\to ٢^{-}} ٢\,(\text{س} - ٢)^{٣} =$ صفرًا

$\lim_{\text{س}\to ٢} (\text{ق} \times \text{هـ})(\text{س}) =$ صفر ، ق (٢) = صفرًا

مما سبق ق × هـ متصل عند س = ٢

تدريب (١)

$$ق(س) = \begin{cases} س + ٢ & ، \quad -٢ \le س \le ٢ \\ س^{٢} & ، \quad س < -٢ \text{ ، } س > ٢ \end{cases}$$

أولًا: ق متصل على الفترات (– ٢ ، ٢) ، (– ∞ ، – ٢) ، (٢ ، ∞) لأنه كثير حدود في هذه الفترات

ثانيًا: نبحث اتصال ق عند س = – ٢

$\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow -٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ (س + ٢) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow -٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ $س^{٢}$ = ٤

$\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) غير موجودة ، وعليه فإن ق غير متصل عند س = – ٢ .

ثالثاً: نبحث اتصال ق عند س = ٢

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ٤ ، $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ٤

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ٤ ، $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (٢) = ٤

بما أن $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ق (٢) فإن ق متصل عند س = ٢

مما سبق ق متصل على ح / {– ٢}

تدريب (٢)

$$ل(س) = \frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥} \text{ ، } س \ne ٥$$

أولاً: ل غير متصل عند س = ٥ لأنه غير معروف عندها

ثانياً: إذا كانت س ≠ ٥ فإن $ل(س) = \frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥} = س + ٥$

ل (س) كثير حدود فهو متصل على مجاله

مما سبق ل (س) متصل على ح / {٥}

تدريب (١)

١) $\Delta \text{س} = \text{س}_{٢} - \text{س}_{١} = ٣,٧ - ٣ = ٠,٧$

٢) $\Delta \text{س} = \text{ل} - (\text{ل} + ١) = -١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(\text{س}_{٢}) - \text{ق}(\text{س}_{١})}{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}} = \frac{\text{ق}(٢,٣) - \text{ق}(٢,٤)}{٢,٣ - ٢,٤}$$

$$= \frac{\left((٢,٣)^{٣} - \left[\frac{٢,٣}{٢}\right]\right) - \left((٢,٤)^{٣} - \left[\frac{٢,٤}{٢}\right]\right)}{-٠,١}$$

$$= \frac{(١٢,١٦٧ - ١) - (١٣,٨٢٤ - ١)}{-٠,١} = \frac{١٢,١٦٧ - ١ - ١٣,٨٢٤ + ١}{-٠,١} = \frac{-١,٦٥٧}{-٠,١} = ١٦,٥٧$$

تدريب (٣)

ميل القاطع $= \text{ظا } ١٢٠^{\circ} = -\text{ظا } ٦٠^{\circ} = -\sqrt{٣}$

تدريب (٤)

$$\frac{\Delta \text{ف}}{\Delta \text{ن}} = \frac{\text{ف}(٦) - \text{ق}(٢)}{٤} = \frac{(٧٢ - ١٢ + ٢٠) - (٨ - ٤ + ٢٠)}{٤}$$

$$= \frac{٨٠ - ٢٤}{٤} = \frac{٥٦}{٤} = ١٤ \text{ م/ث}$$

تدريب (١)

$\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س}^{٣} + \text{س}$ ، جد $\text{ق}(-٣)$

١) $$\text{قَ}(-٣) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(-٣+\text{هـ}) - \text{ق}(-٣)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{[٢(-٣+\text{هـ})^{٣} + (-٣+\text{هـ}))] - (-٥٧)}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٥٤ + ٢\text{هـ}^{٣} + ٥٤\text{هـ} - ١٨\text{هـ}^{٢} - ٣ + \text{هـ} + ٥٧}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} (٢\text{هـ}^{٢} + ٥٥ - ١٨\text{هـ}) = ٥٥$$

٢) افرض $٥\text{هـ} = \text{م}$

عندما $\text{هـ} \to ٠$ فإن $\text{م} \to ٠$

$$\underset{\text{م}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{صفر}) - \text{ق}(\text{م})}{٢ \times \frac{\text{م}}{٥}} = \frac{-٥}{٢} \underset{\text{م}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{م}) - \text{ق}(٠)}{\text{م}} = -\frac{٥}{٢} \times \text{قَ}(٠) = -\frac{٥}{٢} \times -٦ = ١٥$$

تدريب (٢)

$$\text{قَ}(٤) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٤+\text{هـ}) - \text{ق}(٤)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(٤+\text{هـ}) + \sqrt{٤+\text{هـ}} - ٦}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{هـ}-٢) + \sqrt{٤+\text{هـ}}}{\text{هـ}} \times \frac{(\text{هـ}-٢) - \sqrt{٤+\text{هـ}}}{(\text{هـ}-٢) - \sqrt{٤+\text{هـ}}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(\text{هـ}-٢)^{٢} - (٤+\text{هـ})}{\text{هـ}[(\text{هـ}-٢) - \sqrt{٤+\text{هـ}}]}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{٢} - ٤\text{هـ} + ٤ - ٤ - \text{هـ}}{\text{هـ}[(\text{هـ}-٢) - \sqrt{٤+\text{هـ}}]} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}^{٢} - ٥\text{هـ}}{\text{هـ}[\text{هـ} - ٢ - \sqrt{٤+\text{هـ}}]}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{هـ}[\text{هـ}-٥]}{\text{هـ}[\text{هـ} - ٢ - \sqrt{٤+\text{هـ}}]} = \frac{-٥}{-٢-٢} = \frac{-٥}{-٤} = \frac{٥}{٤}$$

تدريب (٣)

$\text{ل}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+٢}$ ، جد $\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=-١}$

$$\left.\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right|_{\text{س}=-١} = \text{لَ}(-١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ل}(-١+\text{هـ}) - \text{ل}(-١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{-١+\text{هـ}}{-١+\text{هـ}+٢} + ١}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{-١+\text{هـ}}{\text{هـ}+١} + ١}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{-١+\text{هـ}+\text{هـ}+١}{\text{هـ}+١}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{هـ}}{\text{هـ}+١} \times \frac{١}{\text{هـ}} = \frac{٢}{١} = ٢$$

تدريب (٤)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} - ١ & ، \ ٠ \le \text{س} \le ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥ & ، \ ٢ < \text{س} \le ٥ \end{cases}$$

$$\text{قَ}(٤) = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٤} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٤} \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥ - ٢٧}{\text{س} - ٤} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٤} \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٣٢}{\text{س} - ٤}$$

$$\text{قَ}(٤) = \text{نها}_{\text{هـ}\leftarrow ٤} \frac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٨)}{(\text{س} - ٤)} = ١٢$$

$$\text{قَ}(١) = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(١)}{(\text{س} - ١)} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{\text{س}^{٣} - ١}{(\text{س} - ١)} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}٢ + \text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)} = ٣$$

يوجد نقطة تشعب عند س = ٢

$$\text{قَ}_{+}(٢) = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{+}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{+}} \frac{(\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٥) - ٧}{(\text{س} - ٢)}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{+}} \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ١٢}{\text{س} - ٢} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{+}} \frac{(\text{س} + ٦)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)} = ٨$$

$$\text{قَ}_{-}(٢) = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{-}} \frac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{(\text{س} - ٢)} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{-}} \frac{(\text{س}^{٣} - ١) - ٧}{(\text{س} - ٢)} = \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{-}} \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\leftarrow ٢^{-}} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٢)} = ٤ + ٤ + ٤ = ١٢$$

بما أن $\text{قَ}_{+}(٢) \ne \text{قَ}_{-}(٢) \Leftarrow \text{قَ}(٢)$ غير موجودة

تدريب (٥)

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{١ - \text{س}}$ ، س ≠ ١ جد قَ(س) باستخدام التعريف

$$\text{قَ}(\text{س}) = \text{نها}_{\text{ع}\leftarrow\text{س}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \text{نها}_{\text{ع}\leftarrow\text{س}} \frac{\frac{\text{ع}^{٢}}{(١ - \text{ع})} - \frac{\text{س}^{٢}}{(١ - \text{س})}}{(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\leftarrow\text{س}} \frac{\frac{\text{ع}^{٢}(١ - \text{س}) - \text{س}^{٢}(١ - \text{ع})}{(١ - \text{ع})(١ - \text{س})}}{\frac{(\text{ع} - \text{ص})}{١}} = \text{نها}_{\text{ع}\leftarrow\text{س}} \frac{\text{ع}^{٢} - \text{ع}^{٢}\text{س} - \text{س}^{٢} - \text{س}^{٢}\text{ع}}{(١ - \text{ع})(١ - \text{س})(\text{ع} - \text{س})}$$

$$= \text{نها}_{\text{ع}\leftarrow\text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})(\text{ع} + \text{س}) - \text{ع}\,\text{س}(\text{ع} - \text{س})}{(١ - \text{ع})(١ - \text{س})(\text{ع} - \text{س})} = \text{نها}_{\text{ع}\leftarrow\text{س}} \frac{(\text{ع} - \text{س})\left[(\text{ع} + \text{س}) - \text{ع}\,\text{س}\right]}{(١ - \text{ع})(١ - \text{س})(\text{ع} - \text{س})} = \frac{٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{(١ - \text{س})^{٢}}$$

تدريب (١)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \quad \text{س} \le ٤ \\ ٣\,\text{س} - ١ & ، \quad \text{س} > ٤ \end{cases}$$

أولًا: $\underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١١$ ، $\underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١٧$ ، $\text{ق}(٤) = ١٧$

∴ ق (س) غير متصل عند س = ٤

ثانياً: $\text{قَ}_{+}(٤) = \underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\,\text{س} - ١ - ١١}{(\text{س} - ٤)}$

$$= \underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣\,\text{س} - ١٢}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٣(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)} = ٣$$

$$\text{قَ}_{-}(٤) = \underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ١ - ١٧}{(\text{س} - ٤)} = \underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١٦}{(\text{س} - ٤)}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٤^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}{(\text{س} - ٤)} = ٨$$

بما أن $\text{قَ}_{+}(٤) \ne \text{قَ}_{-}(٤) \Leftarrow$ قَ (٤) غير موجودة.

تدريب (٢)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + \text{س} & ، \quad ٠ < \text{س} < ٢ \\ ٢\,\text{س}^{٢} + ٢ & ، \quad ٢ \le \text{س} < ٥ \end{cases} \qquad \text{عند س} = ٢$$

$\underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١٠$ ، $\underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـــا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١٠$ ، $\text{ق}(٢) = ١٠$

إذن ق متصل عند س = ٢

$$\text{قَ}_{+}(٢) = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} + ٢ - ١٠}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢\,\text{س}^{٢} - ٨}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{+}}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٢)} = ٨$$

$$\text{قَ}_{-}(٢) = \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٢)}{\text{س} - ٢} = \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٣} + \text{س} - ١٠}{\text{س} - ٢}$$

$$= \underset{\text{س}\to ٢^{-}}{\text{نهـــا}} \dfrac{(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٥)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)} = ٤ + ٤ + ٥ = ١٣$$

اذن ق (س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

لأن $\text{قَ}_{-}(٢) \ne \text{ق}_{+}(٢)$

تدريب (١)

١) قَ(س) = صفرًا

٢) قَ(س) = − ٨ س

٣) قَ(س) = $\frac{1}{\pi}$

تدريب (٢)

١) قَ(س) = $\frac{1}{2}$ (٤ س^{3}) = ٢ س^{3}

٢) قَ(س) = ٣ أ س^{2} + ٢ ب س + جـ

تدريب (١)

١) $\text{ق}(\text{س}) = (٤\text{س}^٢ - ١)(٧\text{س}^٣ + \text{س})$

$= ٢٨\text{س}^٥ + ٤\text{س}^٣ - ٧\text{س}^٣ - \text{س} = ٢٨\text{س}^٥ - ٣\text{س}^٣ - \text{س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = ١٤٠\text{س}^٤ - ٩\text{س}^٢ - ١$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = (٣\text{س}^٢ + ٦)(٢\text{س} - \frac{١}{٤})$

$\text{قَ}(\text{س}) = (٣\text{س}^٢ + ٦)(٢) + (٢\text{س} - \frac{١}{٤})(٦\text{س}) = ٦\text{س}^٢ + ١٢ + ١٢\text{س}^٢ - \frac{٣}{٢}\text{س} = ١٨\text{س}^٢ - \frac{٣}{٢}\text{س} + ١٢$

تدريب (٢)

$$\text{ص} = \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^٢ - ٥} \quad ، \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{(\text{س}^٢ - ٥)(٤) - (٤\text{س} + ١)(٢\text{س})}{(\text{س}^٢ - ٥)^٢}$$

$$= \frac{٤\text{س}^٢ - ٢٠ - ٨\text{س}^٢ - ٢\text{س}}{(\text{س}^٢ - ٥)^٢} = \frac{-٤\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٢٠}{(\text{س}^٢ - ٥)^٢}$$

تدريب (٣)

١) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٥}{\text{س}^٣} \quad ، \quad \text{قَ}(\text{س}) = \frac{٥ \times (-٣\text{س}^٢)}{(\text{س}^٣)^٢} = \frac{-١٥\text{س}^٢}{\text{س}^٦} = \frac{-١٥}{\text{س}^٤}$

٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\sqrt{٢} - \text{س}^٢}{\text{س}^٣} \quad ، \quad \text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣(-٢\text{س}) - (\sqrt{٢} - \text{س}^٢)(٣\text{س}^٢)}{(\text{س}^٣)^٢} = \frac{-٢\text{س}^٤ - ٣\sqrt{٢}\,\text{س}^٢ + ٣\text{س}^٤}{\text{س}^٦}$

$$= \frac{\text{س}^٤ - ٣\sqrt{٢}\,\text{س}^٢}{\text{س}^٦} = \frac{\text{س}^٢ - ٣\sqrt{٢}}{\text{س}^٤}$$

تدريب (٤)

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{٢}{\text{س}} & ، \ \text{س} \leq ١ \\ \text{س}^٢ + ١ & ، \ \text{س} > ١ \end{cases}$$

$\therefore$ ق متصل عند س = ١ لأن $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(١) = ٢$

$\text{قَ}_{+}(١) = -٢$، $\text{قَ}_{-} = ٢$ باستخدام التعريف $\text{قَ}(١)$ غير موجودة

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{-٢}{\text{س}^٢} & ، \ \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} & ، \ \text{س} > ١ \\ \text{غير موجودة عند} & ، \ \text{س} = ١ \end{cases}$$

تدريب (١)

قً (س) = ٤٢ س – ١٠ ⇐ قً (– ٢) = – ٩٤

تدريب (٢)

ق$^{(٤)}$ (س) = ٣ ن (ن – ١) (ن – ٢) (ن – ٣) س$^{ن-٤}$

ن – ٤ = ٣ ومنه ن = ٧

أ = ٣ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٢٥٢٠

تدريب (١)

ل (س) = ٦ حا س – ٢ س ، لَ (س) = ٦ جتا س – ٢

لَ (π) = ٦ (–١) – ٢ = –٦ – ٢ = –٨

تدريب (٢)

ق (س) = س جتا س

قَ (س) = س (– حا س) + جتا س = – س حا س + جتا س

تدريب (٣)

ق (س) = قا س = $\frac{١}{\text{جتا س}}$

قَ (س) = $\frac{-(-\text{حا س})}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}} = \frac{\text{حا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$ = قا س ظا س

ق (س) = قتا س = $\frac{١}{\text{حا س}}$

قَ (س) = $\frac{-\text{جتا س}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}} = - \frac{\text{جتا س}}{\text{حا س}} \times \frac{١}{\text{حا س}}$ = – قتا س ظتا س

ق (س) = ظتا س = $\frac{\text{جتا س}}{\text{حا س}}$

قَ (س) = $\frac{\text{حا س}(-\text{حا س}) - \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{(\text{حا س})^{٢}} = \frac{-\text{حا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{ س}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$

= $\frac{-(\text{حا}^{٢}\text{ س} - \text{جتا}^{٢}\text{ س})}{(\text{حا س})^{٢}} = \frac{-١}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$ = – قتا^{٢} س

تدريب (٤)

ق (س) = $\frac{\text{ظا س + س}}{\text{جا س}}$ ، فجد قَ $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$

قَ (س) = $\frac{\text{جا س (قا}^{٢}\text{ س + ١) – (ظا س + س) (جتا س)}}{(\text{حا س})^{٢}}$

قَ $\left(\frac{\pi}{٣}\right)$ = $\dfrac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}(٤ + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{\frac{٣}{٤}}$ = $\left(\frac{٥}{٢}\sqrt{٣} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{\pi}{٦}\right) \times \frac{٤}{٣}$

= $\frac{١٠}{\sqrt{٣}} - \frac{٢\sqrt{٣}}{٣} - \frac{٢\pi}{٩} = \frac{٨}{\sqrt{٣}} - \frac{٢\pi}{٩}$

تدريب (١)

١) $ص = (س^{٣} - ٢\,س)^{٤}$

الجواب:

$\frac{د\,ص}{د\,س} = ٤\,(س^{٣} - ٢\,س)^{٣}\,(٣\,س^{٢} - ٢)$ (إفرض أن: س٣ – ٢ س = ع)

٢) $ق(س) = س^{٢} + ٥$ ، $هـ(س) = \frac{١}{س}$ جد $(ق \circ هـ)'$ (د س)

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س))\,هـ'(س)$

$ق'(س) = ٢\,س$ ، $ق'(هـ(س)) = ق'\left(\frac{١}{س}\right) = ٢ \times \frac{١}{س} = \frac{٢}{س}$

$هـ'(س) = \frac{-١}{س^{٢}}$

$\therefore (ق \circ هـ)'(س) = \frac{٢}{س} \times \frac{-١}{س^{٢}} = \frac{-٢}{س^{٣}}$

تدريب (٢)

١) $ق(س) = حا\,٢\,س$ ، $ق'(س) = ٢\,جتا\,٢\,س$

٢) $ق(س) = (س^{٣} - ٣\,س^{٢} + ٧)^{٨}$ ، $ق'(س) = ٨\,(س^{٣} - ٣\,س^{٢} + ٧)^{٧}\,(٣\,س^{٢} - ٦\,س)$

٣) $ق(س) = جا^{٣}\,٥\,س$ ، $ق'(س) = (٣\,جا^{٢}\,٥\,س) \times ٥ \times جتا\,٥\,س$

$= ١٥\,جا^{٢}\,٥\,س\,جتا\,٥\,س$

تدريب (٣)

$ق(س^{٣}) = \frac{١}{س}$ ، فجد $ق'(٨)$

$ق'(س^{٣}) \times ٣\,س^{٢} = \frac{-١}{س^{٢}}$

$ق'(س^{٣}) = \frac{-١}{٣\,س^{٤}}$ ، $س^{٣} = ٨ \Leftarrow س = ٢$

$ق'(٨) = \frac{-١}{٣\,(٢)^{٤}} = \frac{-١}{٤٨}$

تدريب (١)

١) $\text{٤ س}^{٢} - \text{٢ ص}^{٢} = ٩ \Leftarrow \text{٨ س} - \text{٤ ص} \; \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{صفر}$

$\text{٨ س} = \text{٤ ص} \; \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٨ س}}{\text{٤ ص}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{ص}}$

٢) $\text{س}^{٣} + \text{ص}^{٣} = \text{٣ س ص}$

$\text{٣ س}^{٢} + \text{٣ ص}^{٢} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٣ س} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{٣ ص}$

$\text{٣ ص}^{٢} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{٣ س} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} + \text{٣ ص} - \text{٣ س}^{٢}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} (\text{٣ ص}^{٢} - \text{٣ س}) = \text{٣ ص} - \text{٣ س}^{٢}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٣ ص} - \text{٣ س}^{٢}}{\text{٣ ص}^{٢} - \text{٣ س}} = \frac{\text{ص} - \text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - \text{س}}$

٣) $\text{س}^{٢} = \text{حا ص} \Leftarrow$

$\text{٢ س} = \text{جتا ص} \; \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \Leftarrow$

$= \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{جتا ص}} = \text{٢ س قا ص}$

تدريب (٢)

١) $\sqrt{\text{ص}} - \text{حا س} = ٢ \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - \text{جتا س} = \text{صفر}$

$\frac{١}{٢\sqrt{\text{ص}}} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢\sqrt{\text{ص}} \; \text{جتا س}$

٢) $\text{ص} = \text{ص}^{٣} \sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ص}^{٣} \times \frac{\text{١٠ س}}{٢\sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١}} + \sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١} \times \text{٣ ص}^{٢} \frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} [١ - \text{٣ ص}^{٢} \sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١}] = \frac{\text{٥ س ص}^{٣}}{\sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١}}$

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{٥ س ص}^{٣}}{[١ - \text{٣ ص}^{٢} \sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١}] [\sqrt{\text{٥ س}^{٢} + ١}]}$

تدريب (٣)

إذا كان س = جاص ، ص $\in$ $\left(\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right)$

اثبت أن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}}$

البرهان

س = حا ص $\Leftarrow$ ١ = جتا ص $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{١}}{\text{جتا ص}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}}$$

تدريب (٤)

إذا كان س = حا ٢ ن ، ص = جتا ٢ ن فجد $\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}}$ عندما ن = $\frac{\pi}{\text{٢}}$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}}$$

$$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٢ جتا ٢ ن}$$

$$\frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{\text{١}}{\text{٢ جتا ٢ ن}}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{-\text{٢ حا ٢ ن}}{\text{٢ جتا ٢ ن}} = -\text{ظا ٢ ن}$$

$$\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}} = -\text{٢ قا}^{\text{٢}}\text{ ٢ ن} \times \frac{\text{د ن}}{\text{د س}} = \frac{-\text{٢ قا}^{\text{٢}}\text{ ٢ ن}}{\text{٢ جتا ٢ ن}} = -\text{قا}^{\text{٣}}\text{ ٢ ن}$$

$$\left.\frac{\text{د}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{د س}^{\text{٢}}}\right|_{\text{ن}=\frac{\pi}{\text{٢}}} = \left.-\text{قا}^{\text{٣}}\text{ ٢ ن}\right|_{\text{ن}=\frac{\pi}{\text{٢}}} = -(\text{قا}\,\pi)^{\text{٣}} = -(-\text{١})^{\text{٣}} = \text{١}$$

تدريب (١)

قَ (س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

الميل = قَ (٢) = $\frac{-١}{٤}$ ، نقطة التماس (٢ ، ق (٢)) = (٢ ، $\frac{١}{٢}$)

معادلة المماس ص − ص$_{١}$ = م (س − س$_{١}$)

ص − $\frac{١}{٢}$ = $\frac{-١}{٤}$ (س − ٢)

ص = $\frac{-١}{٤}$ س + ١

ميل العمودي = $\frac{-١}{قَ\ (٢)}$ = ٤

معادلة العمودي ص − $\frac{١}{٢}$ = ٤ (س − ٢)

ص = ٤س − $\frac{١٥}{٢}$

تدريب (٢)

قَ (س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$ ، هـَ (س) = ٠

نجد نقطة تقاطع ق مع هـ

ق = هـ

$\frac{١}{س}$ = س ⟸ س^{٢} = ١ ⟸ س = ١ ، س = −١

∴ ق (س) يقطع هـ (س) عند س = ١ ، س = −١

أولاً عند س = ١

قَ (١) × هـَ (١) = −١ × ١ = −١

∴ ق (س) عمودي على هـ (س) عند س = ١

ثانيًا عند س = −١

قَ (−١) × هـَ (−١) = −١ × ١ = −١

∴ ق (س) عمودي على هـ (س) عند س = −١

تدريب (٣)

ميل المماس عند س = ١ يساوي ظا ٤٥° = ١

أيضًا ميل المماس عند س = ١ يساوي قَ (١) = ٢ جـ

ومنه ٢ جـ = ١ ⇐ جـ = $\frac{١}{٢}$

تدريب (٤)

النقطة (٦ ، ٠) لا تقع على الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ١٨$

إفرض نقطة التماس ($س_١$ ، $ص_١$) ، لإيجاد ميل المماس نشتق العلاقة $س^٢ + ص^٢ = ١٨$

$٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} =$ صفرًا

ومنه $\frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{ص} \Leftarrow \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{(س_١ ، ص_١)} = \frac{-س_١}{ص_١}$

ايضاً ميل المماس الذي يصل بين النقطتين (٦ ، ٠) ، ($س_١$ ، $ص_١$) هو : $\frac{ص_١}{س_١ - ٦}$

ومنه $\frac{ص_١}{س_١ - ٦} = \frac{-س_١}{ص_١} \Leftarrow ص_١^٢ = ٦س_١ - س_١^٢$ .... (١)

لكن $س_١^٢ + ص_١^٢ = ١٨ \Leftarrow ص_١^٢ = ١٨ - س_١^٢$ .... بالتعويض في (١)

$١٨ - س_١^٢ = ٦ س_١ - س_١^٢ \Leftarrow س_١ = ٣$

∴ $ص_١^٢ = ١٨ - (٣)^٢ = ٩ \Leftarrow ص_١ = ٣$ ، $ص_١ = -٣$

∴ نقط التماس هي (٣ ، ٣) ، (٣ ، –٣)

أولًا : معادلة المماس بين (٦ ، ٠) ، (٣ ، ٣) هي:

ص – ٠ = –١ (س – ٦)

ص = ٦ – س .... معادلة المماس الاولى

ثانيًا : معادلة المماس بين (٦ ، ٠) ، (٣ ، –٣) هي:

ص – ٠ = ١ (س – ٦)

ص = س – ٦ .... معادلة المماس الثانية

تدريب (٥)

افرض ($س_١$ ، $ص_١$) نقطة التماس

ميل المماس المار بالنقطتين (١ ، ٥) ($س_١$ ، $ص_١$)

$$م = \frac{ص_١ - ٥}{س_١ - ١}$$

أيضًا ميل المماس يساوي $قَ(س_١) = ٢س_١$

وبمساواة الميلين $\frac{ص_١ - ٥}{س_١ - ١} = ٢س_١$

ومنه نجد (أن $٢س_١^٢ - ٢س_١ = ص_١ - ٥$ .... (١)

لكن $ص_١ = ق(س_١) = س_١^٢ + ٨$ بالتعويض في (١) نجد أن :

$٢س_١^٢ - ٢س_١ = س_١^٢ + ٨ - ٥$

$س_١^٢ - ٢س_١ - ٣ = ٠ \Leftarrow (س_١ - ٣)(س_١ + ١)$

ومنه $س_١ = ٣$ ، $س_١ = -١$

$\therefore ص_١ = ق(٣) = ١٧$

$ص_١ = ق(-١) = ٩$

$\therefore$ نقط التماس هي (٣ ، ١٧) ، (-١ ، ٩)

بما أنه يوجد نقطتان للتماس

$\therefore$ يوجد مماسان مرسومان من النقطة (١ ، ٥) لمنحنى ق .

تدريب (١)

ف $(\frac{\pi}{٨})$ = ٣ م ، ع $(\frac{\pi}{٨})$ = ٢٠ م / ث ، ت $(\frac{\pi}{٨})$ = –٤٨ م / ث

تدريب (٢)

ف (ن) = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} – ٣ ن^{٢} + ٥ ن

ع = فَ (ن) = ن^{٢} – ٦ ن + ٥

ت = فً (ن) = ٢ ن – ٦

عندما تنعدم السرعة ع = صفرًا

ن^{٢} – ٦ ن + ٥ = ٠ ⇐ (ن – ١) (ن – ٥) = ٠

ن = ١ ، ن = ٥

تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة للمرة الأولى ت (١) = ٢ (١) – ٦ = –٤ م / ث^{٢}

تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة للمرة الثانية ت (٥) = ٢ (٥) – ٦ = ٤ م / ث

تدريب (٣)

افرض ارتفاع البناية أ

∴ ل (ن) = ف (ن) + أ

ل (ن) = ٣٠ ن – ٥ ن^{٢} + أ

ع (ن) = لَ (ن) = ٣٠ – ١٠ ن

لكن ع (ن) = –٦٠ م / ث

٣٠ – ١٠ ن = –٦٠

–١٠ ن = –٩٠ ⇐ ن = ٩

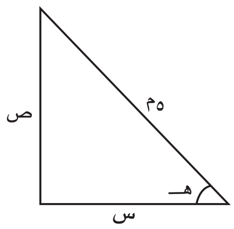
∴ يصل الجسم سطح الأرض بعد ٩ ثوان

ل (٩) = صفرًا

٣٠ (٩) – ٥ (٩)^{٢} + أ = ٠ ⇐ ٢٧٠ – ٤٠٥ + أ = صفرًا

∴ أ = ١٣٥ ⇐ ارتفاع البناية ١٣٥ م

تدريب (١)



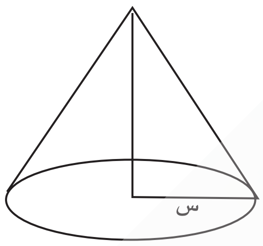
$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٢ م / ث}$

$\text{جتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{٥}} \Leftarrow \text{س} = \text{٥ جتا هـ}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{–٥ جا هـ} \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} \Leftarrow \text{٢} = \frac{\text{–٥} \times \sqrt{\text{١٨,٧٥}}}{\text{٥}} \frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}}$

$\frac{\text{د هـ}}{\text{د ن}} = \frac{\text{–٢}}{\sqrt{\text{١٨,٧٥}}} \text{ راديان / ث}$

تدريب (٢)



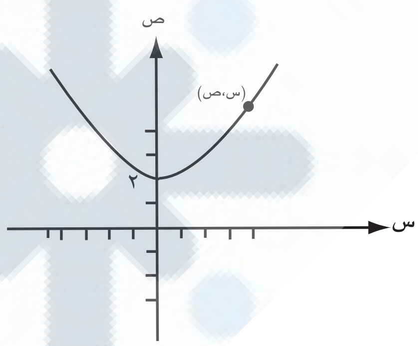
$\frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٠,٤٣٢ م}^{\text{٣}}\text{/ث}$ ، $\text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} \text{ القطر} = \frac{\text{١}}{\text{٤}} \times \text{٢ س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ س}$

$\text{ح} = \frac{\pi}{\text{٣}} \text{ س}^{\text{٢}} \text{ ع} \Leftarrow \text{ح} = \frac{\pi}{\text{٣}} (\text{٢ ع})^{\text{٢}} \times \text{ع}$

$\text{ح} = \frac{\text{٤}\pi}{\text{٣}} \text{ ع}^{\text{٣}} \Leftarrow \frac{\text{د ح}}{\text{د ن}} = \text{٤}\pi \text{ ع}^{\text{٢}} \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}$

$\therefore \text{٠,٤٣٢} = \text{٤}\pi (\text{١,٢})^{\text{٢}}$ إذن $\frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \frac{\text{٠,٤٣٢}}{\pi \times \text{١,٤٤}} \text{ م / ث}$

تدريب (٣)



$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = \text{٠,٢٥}$ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{٠,٤٣}$

$\text{ص} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢} \Leftarrow \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = \text{٢ س} \frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$

$\text{٠,٤٣} = \text{٢} \times \text{س} \times \text{٠,٢٥} \Leftarrow \text{س} = \frac{\text{٤٣}}{\text{٥٠}} = \text{٠,٨٦}$

$\therefore \text{ص} = (\text{٠,٨٦})^{\text{٢}} + \text{٢} = \text{٢,٧٤}$

ثم جد البعد بين النقطتين (٠ ، ٢) ، (٠,٨٦ ، ٢,٧٤)

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل
(٣ – ٣) المعدلات المرتبطة بالزمن

تدريب (٤)

$\frac{د س}{د ن}$ = ٤٢ م / ث

ظا هـ = $\frac{س}{١٥٠}$ ⇐ قا^{٢}هـ $\frac{د هـ}{د ن}$ = $\frac{١}{١٥٠}$ $\frac{د س}{د ن}$

عندما س = ١٥٠ ⇐ ظا هـ = ١ ⇐ هـ = $\frac{\pi}{٤}$ ⇐ قا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٢}$

∴ ٢ × $\frac{د هـ}{د ن}$ = $\frac{٤٢}{١٥٠}$ ⇐ $\frac{د هـ}{د ن}$ = $\frac{٤٢}{٣٠٠}$ راديان / د.

إجابات الأسئلة (التدريبات)

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل
(٣ – ٤) التزايد والتناقص

تدريب (١)

ق متناقص [٠ ، ٢] ، متزايد في الفترتين [٢ ، ∞) ، (–∞ ، ٠]

س	٢π		$\frac{٣\pi}{٢}$		π		$\frac{\pi}{٢}$		صفر
قَ (س)		+ + +		– – – –		+ + +		– – – –	
ق (س)		↗		↘		↗		↘	

تدريب (٢)

قَ (س) = –٢جا ٢س

قَ (س) = ٠ ⇐ جا ٢س = ٠

٢س = π ⇐ س = $\frac{\pi}{٢}$ ، ٢س = ٢ π ⇐ س = π ، ٢س = ٣ π ⇐ س = $\frac{٣}{٢}$ π

قَ (س) غير موجودة عندما س = ٠ ، س = ٢ π

تدريب (١)

قَ (س) = ٣ س^{٢} – ١٢س + ٩

قَ (س) = ٠ ⇐ ٣ (س – ٣) (س – ١) = ٠ ، ومنه س = ٣ ، س = ١

قَ (س) غير موجودة عند أطراف الفترة ⇐ عند س = –١ ، س = ٥

– النقط الحرجة هي : { –١ ، ١ ، ٣ ، ٥ }

س	٥	٣	١	–١
قَ (س)	+ + + +	– – –	+ + + +	
ق (س)	↗	↘	↗	

قيمه صغرى عند س = –١ وهي ق (–١) = –١٦ وهي مطلقة .

قيمه عظمى محلية عند س = ١ وهي ق (١) = ٤

قيمه صغرى محلية عند س = ٣ وهي ق (٣) = ٠

قيمه عظمى عند س = ٥ وهي ق (٥) = ٢٠ وهي مطلقة .

تدريب (٢)

قَ (س) = – جا س + جتا س = ٠ ، س ∋ (٠ ، ٢ π)

جا س = جتا س ⇐ ظا س = ١ ⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٥\pi}{٤}$

قَ (س) غير موجودة عند س = ٠ ، ٢ π

س	٢π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٤}$	صفر
قَ (س)	+ + + +	– – – – –	+ + + +	
ق (س)	↗	↘	↗	

قيمه عظمى محلية عند س = $\frac{\pi}{٤}$ وهي ق ($\frac{\pi}{٤}$) = $\sqrt{٢}$

قيمه صغرى محلية عند س = $\frac{٥\pi}{٤}$ وهي ق ($\frac{٥\pi}{٤}$)

تدريب (٣)

١) س ∋ { –٢ ، –١ ، ٢ ، ٣ }

٢) قيمه صغرى محلية عند (–١ ، ق (–١))

قيمه عظمى محلية عند (٢ ، ق (٢))

٣) ق متزايد [–٢ ، –١] ، [٢ ، ٣]

ق متناقص [–١ ، ٢]

تدريب (١)

مقعر للأعلى في [–٥ ، ٠] ، [٢ ، ٥]

مقعر للأسفل في [٠ ، ٢]

تدريب (٢)

قً (س) = $\frac{١٠}{٩\sqrt[٣]{(س + ٤)^{٨}}}$ ، س ≠ –٤ ، –٤ ∌ مجال ق

قً (س) ≤ صفر دائمًا لذلك ق (س) مقعر لأعلى (–∞ ، –٤) (٤ ، ∞)

تدريب (٣)

قً (س) = – جتا س + جا س = ٠

قً (س) = ٠ ⇐ جا س = جتا س ⇐ س = $\frac{\pi}{٤}$

نقاط الانعطاف ($\frac{\pi}{٤}$ ، ٠)

زاوية الانعطاف ظا هـ = قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = –$\sqrt{٢}$ ⇐ هـ = ظا$^{-١}$ $\sqrt{٢}$

س	π	$\frac{\pi}{٤}$	صفر
قً (س)	+ + + + ++		– – – – – – –
ق (س)	∪		∩

تدريب (٤)

ق (س) = س^{٣} – ٢٧س + ١

قَ (س) = ٣ س^{٢} – ٢٧

قَ (س) = ٠

٣ س^{٢} – ٢٧ = ٠ ⇐ ٣ (س٢ – ٩) = ٠

ومنه س = ٣ ، س = –٣

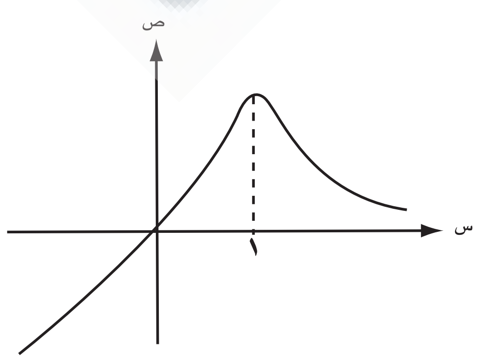
قً (س) = ٦ س

قً (٣) = ١٨ > صفر ... وهي قيمة صغرى محلية .

قً (–٣) = –١٨ < صفر ... وهي قيمة صغرى محلية .

تدريب (٥)

انظر الرسم المجاور.



تدريب (١)

افرض أن العدد الأول س ، العدد الثاني ص

س + ٣ ص = ٦٠ ⇐ س = ٦٠ – ٣ ص

م = س × ٣ ص = (٦٠ – ٣ ص) (٣ ص)

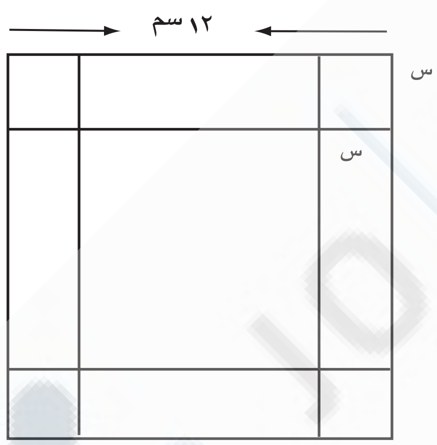
م = ١٨٠ ص – ٩ ص^{٢}

مَ = ١٨٠ – ١٨ ص = ٠ ⇐ ١٨٠ = ١٨ ص وفيه ص = ١٠

مً = –١٨ ⇐ مً (١٠) = –١٨ > صفر ⇐ م (١٠) قيمة عظمى

س = ٦٠ – ٣٠ = ٣٠ ، العددان هما ١٠ ، ٣٠

تدريب (٢)



ح = س (١٢ – ٢ س) (١٢ – ٢ س)

ح = ٤ س^{٣} – ٤٨ س^{٢} + ١٤٤ س

حَ = ١٢ س^{٢} – ٩٦ س + ١٤٤ = ٠

١٢ (س – ٦) (س – ٢) = ٠

س = ٦ ، س = ٢

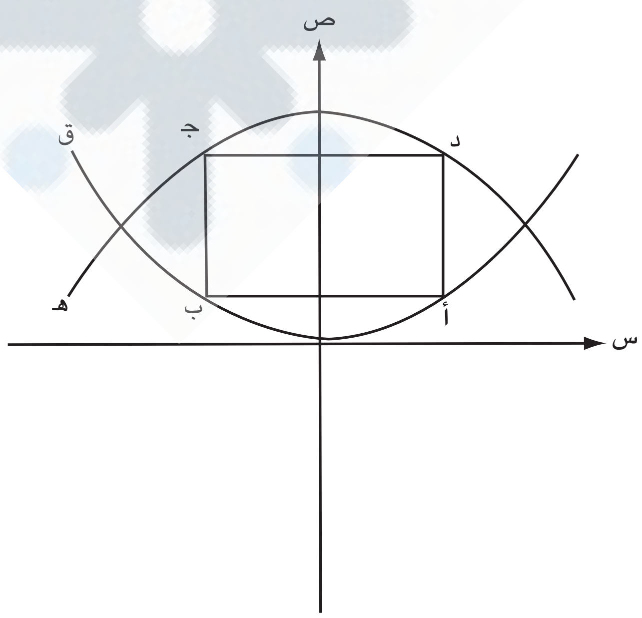
حً (س) = ٢٤ س – ٩٦

حً (٦) = ٤٨ < ٠ قيمة صغرى عند س = ٦

حً (٢) = –٤٨ > ٠ قيمة عظمى عند س = ٢

∴ يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن عندما س = ٢

تدريب (٣)



م = ٢ س (ص$_{٢}$ – ص$_{١}$)

م = ٢ س (٣٦ – س^{٢} – ٢ س^{٢})

م = ٧٢ س – ٦ س^{٣}

مَ = ٧٢ – ١٨ س^{٢} = ٠

٧٢ = ١٨ س^{٢} ⇐ س^{٢} = ٤ ⇐ س = ٢ ، –٢

$\text{م}''(\text{س}) = -٣٦\ \text{س}$

$\text{م}''(٢) = -٧٢ < \text{صفر}$ عظمى

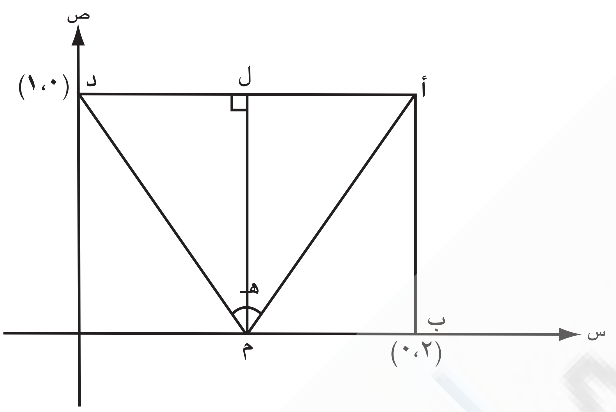
$\text{م}''(-٢) = -٧٢ > \text{صفر}$ صغرى

∴ تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما س = ٢

∴ بعد المستطيل ⇐ ٢ س = ٢ × ٢ = ٤

⇐ $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١ = (٣٦ - ٤) - ٨ = ٢٤$

تدريب (٤)



نرسم العمود م ل حيث :

ل د = م جـ = س

أ ل = ب م = ٢ س

م ل = ١

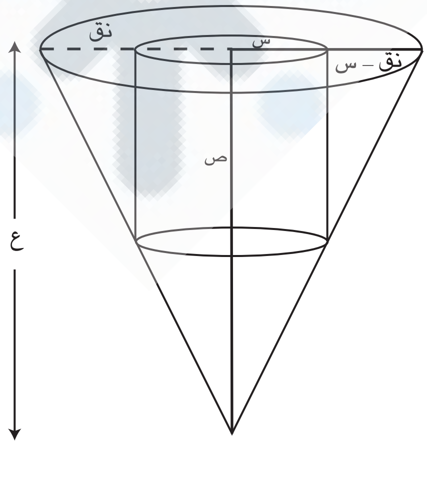
$\text{ظا هـ} = \text{ظا هـ}_١ = ٢ - \text{س}$ ، $\text{ظا هـ}_٢ = \text{س}$

$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_١ + \text{هـ}_٢) = \frac{\text{ظا هـ}_١ + \text{ظا هـ}_٢}{١ - \text{ظا هـ}_١\ \text{ظا هـ}_٢} = \frac{(٢ - \text{س}) + (\text{س})}{١ - (٢ - \text{س})(\text{س})} = \frac{٢}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١} = \frac{٢}{(\text{س} - ١)^٢}$$

$$\text{قا}^٢\text{هـ}\ \frac{\text{د هـ}}{\text{د س}} = \frac{-٢ \times ٢(\text{س} - ١)}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ١} = \frac{-٤}{(\text{س} - ١)^٣} \Leftarrow \frac{\text{د هـ}}{\text{د س}} = \frac{-٤}{\text{قا}^٢\text{هـ}\ (\text{س} - ١)^٣}$$

∴ $\frac{\text{د هـ}}{\text{د س}}$ غير موجودة عند س = ١ ، ومنه للاقتران قيمة عظمى عندما س = ١

تدريب (٥)



حجم المخروط = $\frac{\pi}{٣}$ نق ع

حجم الإسطوانة = $\pi\ \text{س}^٢\ \text{ص}$

من التشابه

ص نق = ع نق – ع س

∴ $\text{ص} = \frac{\text{ع نق} - \text{ع س}}{\text{نق}}$

$$\text{ح}(\text{س}) = \pi\ \text{س}^٢\ \text{ص}\ \left(\frac{\text{ع نق} - \text{ع س}}{\text{نق}}\right) = \pi\ \text{ع}\ \text{س}^٢ - \frac{\pi\ \text{ع}}{\text{نق}}\ \text{س}^٣$$

$$\text{ح}'(\text{س}) = ٢\pi\ \text{ع س} - ٣\ \frac{\pi\ \text{ع}}{\text{نق}}\ \text{س}^٢$$

π ع س $\left(٢ - \frac{٣}{\text{نق}}\text{س}\right) = ٠ \Leftarrow$ س $= ٠$ ، س $= \frac{٢}{٣}$ نق

$\text{حً}(\text{س}) = ٢\pi\text{ع} - \frac{٦\pi\text{ع}}{\text{نق}}\text{س}$

$\text{حً}(٠) = ٢\pi\text{ع} >$ صفر ....صغرى

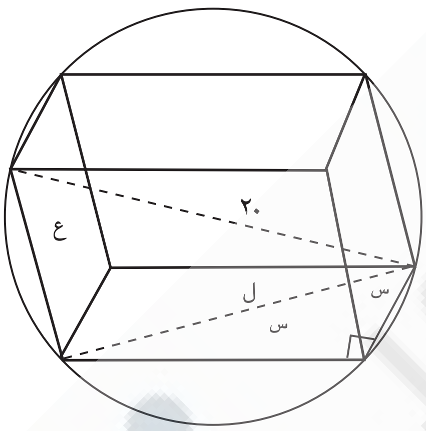
$\text{حً}\left(\frac{٢}{١}\right) = {}^{-}٢\pi\text{ع} <$ صفر ....عظمى

$\therefore$ س $= \frac{٢}{٣}$ نق $\Leftarrow$ ص $= \frac{\text{ع نق} - \frac{٢}{٣}\text{نق ع}}{\text{نق}} = \frac{١}{٣}$ع

ح $= \pi$ س^٢ ص $= \pi \times \frac{٤}{٩}$ نق$^٢ \times \frac{١}{٣}$ع

$= \frac{٤}{٩} \times \left(\frac{١}{٣}\right) \pi$ نق^٢ ع$) = \frac{٤}{٩}$ حجم المخروط

تدريب (٦)



– رؤوس المتوازي جميعها تقع على سطح الكرة

افرض أن ارتفاع متوازي المستطيلات ع

طول قاعدة المتوازي = س

ل^٢ = س^٢ + س^٢ = ٢س^٢

(٢٠)^٢ = ل^٢ + ع^٢

٤٠٠ = ٢س^٢ + ع^٢

٤٠٠ – ع^٢ = ٢س^٢ $\Leftarrow$ س^٢ = ٢٠٠ – $\frac{١}{٢}$ع^٢

ح = س × س × ع = س^{٢}ع

ح = (٢٠٠ – $\frac{١}{٢}$ع^٢) × ع

حَ = ٢٠٠ – $\frac{٣}{٢}$ع^٢ = ٠ $\Leftarrow$ ع = $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

عظمى عندما ع = $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ $\Leftarrow$ س = $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$

تدريب (١)

م (س) = س^{٤} + ظا س + ٥

تدريب (٢)

١) ☐ (٦س – ٣) دس = ٣س^{٢} – ٣س + جـ

٢) ☐ ظتا^{٢}س دس = ☐ (قتا^{٢}س – ١) دس

= – ظتا س – س + جـ

تدريب (٣)

ق (س) = ٤ جا ٢س جتا ٢س + قا^{٢}س

= ٢ جا ٤س + قا^{٢} س

قَ (س) = ٨ جتا ٤س + ٢ قا س × قاس ظا س

= ٨ جتا ٤س + ٢ قا^{٢}س ظاس

قَ ($\frac{\pi}{٤}$) = ٨ جتا π + ٢ قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ ظا $\frac{\pi}{٤}$

= –٨ + ٢ × ٢ × ١ = –٤

تدريب (٤)

١) قَ (س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢أ س (باشتقاق الطرفين)

قَ (١) = ٥ ⇐ ٥ + ٢ = ٣ + ٢ أ

⇐ أ = ٢

٢) ق (س) + س^{٢} + جـ = س^{٣} + أ س^{٢} + ١

ق (٢) = ٧ ⇐ ٧ + ٤ + جـ = ٨ + ٤أ + ١

١١ + جـ = ٨ + ٤ × ٢ + ١

جـ = ٨

ق (س) = س^{٣} + س^{٢} – ٧

ق (٠) = –٧

ق (س) + س^{٢} + ٨ = س^{٣} + ٢س^{٢} + ١

ق (س) = س^{٣} + س^{٢} – ٧

٣) قَ (س) = ٣س^{٢} + ٢س

قَ (٤) = ٣ (٤)^{٢} + ٢ (٤) = ٥٦

تدريب (١)

□ دس = س + جـ

٢) □ $\frac{دس}{٤}$ دس = $\frac{١}{٤}$ س + جـ

تدريب (٢)

١) □ $\frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$ د س = □ $س^{\frac{-١}{٣}}$ دس $\frac{٣}{٢}$ $س^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ

٢) □ $\frac{س^{٣}\sqrt{س}}{\sqrt[٣]{س}}$ د س = □ $\frac{\sqrt{س^{٧}}}{\sqrt[٣]{س}}$ دس = □ $س^{\frac{١٩}{٦}}$ دس $\frac{٦}{٢٥}$ $س^{\frac{٢٥}{٦}}$ + جـ

تدريب (٣)

١) □ (٤ $س^{٣}$ − ٢س + ٦) دس = $س^{٤}$ − $س^{٢}$ + ٦س + جـ

٢) □ $\frac{٢س^{٢} - ٣س}{\sqrt{س}}$ د س = □ (٢$س^{\frac{٣}{٢}}$ − ٣$س^{\frac{١}{٢}}$) دس

= ٢ × $\frac{٢}{٥}$ $س^{\frac{٥}{٢}}$ − ٣ × $\frac{٢}{٣}$ $س^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ

= $\frac{٤}{٥}$ $\sqrt{س^{٥}}$ − ٢ $\sqrt{س^{٣}}$ + جـ

تدريب (٤)

١) □ $\frac{جتا ٢س}{جا^{٢}س جتا^{٢}س}$ د س = □ $\frac{جتا^{٢}س - جا^{٢}س}{جا^{٢}س جتا^{٢}س}$ دس

= □ ($\frac{١}{جا^{٢}س}$ $\frac{١}{جتا^{٢}س}$) دس

= □ قتا^{٢}س − قا^{٢}س) دس

= − ظتاس − ظاس + جـ

٢) □ (قا^{٢}س − ظا^{٢}س) دس = □ ١ . دس = س + جـ

تدريب (١)

١) $\int_{-3}^{6} \left(\frac{1}{2}\text{س} - 6\right) \text{دس} = \frac{1}{4}\text{س}^{2} \Big]_{-3}^{6} - 6\,(6+3)$

$= \frac{1}{4}\,(36 - 9) - 54 = \frac{-191}{4}$

تدريب (١)

$\int_{1+\text{أ}}^{2+3\text{أ}} 5\ \text{دس} = 40 \Leftarrow 5\,[(2 + 3\text{أ}) - (1 + \text{أ})] = 40$

$5\,(2\text{أ} + 1) = 40 \Leftarrow \text{أ} = \frac{7}{2}$

تدريب (٣)

$\int_{\text{ب}}^{2} 3\text{ق}(\text{س})\ 2\text{س} = 3 \int_{\text{ب}}^{2} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = 3 \times 16 = 48$

تدريب (٤)

$\int_{1}^{4} [\text{س} + 1]\ \text{دس} = \int_{1}^{2} 2\,.\ \text{دس} + \int_{2}^{3} 3\,.\ \text{دس} + \int_{3}^{4} 4\,.\ \text{دس} = 2 + 3 + 4 = 9$

تدريب (٥)

$\int_{7}^{4} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \int_{7}^{1} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} + \int_{1}^{4} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = 12 + \frac{-6}{3} = 10$

تدريب (٦)

١) $\int_{-1}^{\text{جـ}} \text{س}\ \text{دس} = \text{صفرًا}$

$\frac{\text{س}^{2}}{2} \Big]_{-1}^{\text{جـ}} = \text{صفرًا}$

$\text{جـ}^{2} - 1 = 0$

$\text{جـ} = \pm 1$

٢) $\int_{2}^{3} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = \int_{2}^{1} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} + \int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\ \text{دس} = -5 + 4 = -1$

تدريب (١)

$$\frac{د ص}{د س} = \sqrt{\frac{ص}{س}}$$

$$\int \frac{د ص}{\sqrt{ص}} = \int \frac{د س}{\sqrt{س}}$$

$$\int ص^{\frac{1}{2}} \; دص = \int س^{-\frac{1}{2}} \; دس$$

$$٢ص^{\frac{1}{2}} = ٢س^{\frac{1}{2}} + جـ_١$$

$$\sqrt{ص} = \sqrt{س} + جـ \text{ حيث، } جـ = \frac{جـ_١}{٢}$$

$$ص = (\sqrt{س} + جـ)^{٢}$$

تدريب (٢)

ع(٠) = ٤٠م/ث ، ف(١) = ٨٠م

$$ت = \frac{د ع}{د ن} = -١٠$$

د ع = −١٠ دن

$$\int د ع = \int -١٠ \; دن$$

$ع = -١٠ن + جـ_١$

$ع(٠) = ٤ \Leftarrow جـ_١ = ٤٠$

إذن $ع = -١٠ن + ٤٠$

$$\frac{د ف}{د ن} = -١٠ن + ٤٠$$

$$\int د ف = \int (-١٠ن + ٤٠) \; دن$$

$ف = -٥ن^{٢} + ٤ن + جـ_٢$

$ف(١) = ٨٠ \Leftarrow جـ_٢ = ٤٥$

إذن $ف = -٥ن^{٢} + ٤٠ن + ٤٥$

لكن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عندما ع = ٠

$-١٠ن + ٤٠ = ٠$

ن = ٤ ثانية

وعليه فإن أقصى ارتفاع هو $ف(٤) = -٥(٤)^{٢} + ٤٠ \times ٤ + ٤٥$

$= -٨٠ + ١٦٠ + ٤٥$

$= ١٢٥$م

تدريب (١)

□ س (س^{٢} − ٣)^{٣} دس

افرض ص = س^{٢} − ٣

دص = ٢ س دس

$\frac{١}{٢}$ دص = س دس

إذن □ س (س^{٢} − ٣)^{٣} دس = $\frac{١}{٢}$ □ ص^{٣} دص = $\frac{١}{٨}$ ص^{٤} + جـ = $\frac{١}{٨}$ (س^{٢} − ٣)^{٤} + جـ

تدريب (٢)

□ س^{٥} $\sqrt{س^{٣} + ٢}$ دس

افرض ص = س^{٣} + ٢ ⟸ س^{٣} = ص − ٢ ⟸ دص = ٣س^{٢} دس

$\frac{١}{٣}$ دص = س^{٢} دس

$\frac{١}{٣}$ س^{٣} دص = س^{٥} دس

$\frac{١}{٣}$ (ص − ٢) دص = س^{٥} دس

□ س^{٥} $\sqrt{س^{٣} + ٢}$ دس = $\frac{١}{٣}$ □ (ص − ٢) ص$^{\frac{١}{٢}}$ دص = $\frac{١}{٣}$ □ (ص$^{\frac{٣}{٢}}$ − ٢ص$^{\frac{١}{٢}}$) دص

= $\frac{١}{٣}$ [$\frac{٢}{٥}$ ص$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٤}{٣}$ ص$^{\frac{٣}{٢}}$] + جـ = $\frac{١}{٣}$ [$\frac{٢}{٥}$ (س^{٣} + ٢)$^{\frac{٥}{٢}}$ − $\frac{٤}{٣}$ (س^{٣} + ٢)$^{\frac{٣}{٢}}$] + جـ

تدريب (٣)

١) □ قا^{٢} (أ س + ١) دس = $\frac{١}{أ}$ ظا (أس + ١) + جـ (افرض ص = أ س + ١)

٢) □ جتا (١ − ٢س) دس = $-\frac{١}{٢}$ جا (١ − ٢س) + جـ (افرض ص = ١ − ٢س)

تدريب (٤)

١) $\int$ جا ٦س جا٤س دس = $\frac{١}{٢}$ $\int$ (جتا٢س − جا١٠س) دس = $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{٢}$ جا٢س − $\frac{١}{١٠}$ جتا ١٠س] + جـ

٢) $\int$ جتا ٢س جتا٧س دس = $\frac{١}{٢}$ $\int$ (جتا ١٠س + جتا ٤س) دس = $\frac{١}{٢}$ [$\frac{١}{١٠}$ جا ١٠س + $\frac{١}{٤}$ جا٤س] + جـ

تدريب (٥)

$\int$ جتا^{٤} س دس = $\int$ (جتا^{٢} س)^{٢} دس = دس

= $\int$ $\left(\frac{١ + جتا٢س}{٢}\right)^{٢}$ دس = $\frac{١}{٤}$ $\int$ (جتا^{٢} ٢س + ٢جتا ٢س + ١) دس

= $\frac{١}{٤}$ $\int$ $\int$ $\frac{جتا٤س + ١}{٢}$ دس + $\frac{١}{٤}$ $\int$ (٢جتا ٢س + ١) دس = $\frac{١}{٨}$ [$\frac{١}{٤}$ جا٤س + س] + $\frac{١}{٤}$ [جا٢س + س] + جـ

= $\frac{١}{٣٢}$ جا٤س + $\frac{٣}{٨}$ س + $\frac{١}{٤}$ جا٢س + جـ

تدريب (٦)

١) $\int$ ظا^{٤}س قا^{٢} دس

افرض ص = ظاس ⇐ د ص = قا^{٢}س دس

$\int$ ظا^{٤}س قا^{٢} س دس = $\int$ ص^{٤} دص = $\frac{١}{٥}$ ص^{٥} + جـ = $\frac{١}{٥}$ ظا^{٥}س + جـ

٢) $\int$ س قا (١ − ٢ س^{٢}) ظا (١ − ٢س^{٢}) س

افرض ص = ١ − ٢ س^{٢} ⇐ دص = −٤ س دس ⇐ − $\frac{١}{٤}$ دص = س دس

$\int$ س قا (١ − ٢ س^{٢}) ظا (١ − ٢س^{٢}) دس = $\frac{١}{٤}$ $\int$ قاص ظاص دص = $\frac{١}{٤}$ قاص + جـ = $\frac{١}{٤}$ قا (١ − ٢س^{٢}) + جـ

تدريب (٧)

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ $\frac{جا س جتا س}{\sqrt{١ + جا^{٢} س}}$

افرض ص = ١ + جا^{٢}س ⇐ دص = ٢ جا س جتا س ⇐ $\frac{١}{٢}$ دص = جاس جتاس دس

س = ٠ ⇐ ص = ١

س = $\frac{\pi}{٢}$ ⇐ ص = ٢

إذن $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ $\frac{جا س جتا س}{\sqrt{١ + جا^{٢} س}}$ دس = $\frac{١}{٢}$ $\int$ $\frac{دص}{\sqrt{ص}}$ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × [$\sqrt{ص}$]$_{١}^{٢}$ = $\sqrt{٢}$ − ١

تدريب (٨)

$\int_{١}^{٢}$ $\sqrt[٣]{٢س − ٣}$ دس = دس = $\int_{١}^{٢}$ (٢س − ٣)$^{\frac{١}{٣}}$ دس = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٣}{٤}$ [(٢س − ٣)$^{\frac{٤}{٣}}$]$_{١}^{٢}$ = $\frac{٣}{٨}$ ($\sqrt[٣]{١}$ − $\sqrt[٣]{١}$) = صفرًا

تدريب (١)

□ (٢س − ١) جتا ٢س دس = (٢س − ١) × $\frac{\text{جا ٣س}}{٣}$ − $\frac{١}{٣}$ □ جا ٣س × ٢دس

افرض ق = ٢ س − ١
د هـ = جتا ٢ س د س

= $\frac{١}{٣}$ (٢س − ١) جا ٣س + $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{\text{جتا ٣س}}{٣}$ + جـ

= $\frac{١}{٣}$ (٢س − ١) جا ٣س + $\frac{٢}{٩}$ جتا ٣س + جـ

تدريب (٢)

□ (س − ٢)^{٢} جتا ٢س دس = (س − ٢)^{٢} جا (س + ٢) − ٢ □ (س − ٢) × جا (س + ٢) دس

= (س − ٢)^{٢} جا (س + ٢) − ٢ [(٢ − س) جتا (س + ٢) + □ جتا (س+٢) دس]

= (س − ٢)^{٢} جا (س + ٢) + (٢س − ٤) جتا (س + ٢) − ٢ جا (س + ٢) + جـ

تدريب (٣)

□ جتا $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ دس

افرض ص = $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ ⇐ ص^{٢} = ٢س + ١

٢ص دص = ٢دس

ص دص = دس

إذن □ جتا $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ دس = □ جتا ص × ص دص

= □ ص × جتا ص دص

= ص جا ص + جتا ص + جـ

= $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ جا $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ + جتا $\sqrt{\text{٢س + ١}}$ + جـ

تدريب (١)

م = $\int_{-2}^{1}$ (٢ – ٢س) دس + $\int_{1}^{2}$ (٢س – ٢) دس

= ٢ (١ + ٢) – [س٢]$_{-2}^{1}$ + [س٢]$_{1}^{2}$ – ٢ (٢–١) = ٤ وحدات مساحة

= ٦ – (١ – ٤) + (٤ – ١) = ٤ وحدات مساحة

$\int_{-2}^{2}$ | ق (س) | د س = $\int_{-2}^{1}$ (٢ – ٢س) دس + $\int_{1}^{2}$ (٢س – ٢) دس = ٤

تدريب (٢)

م $\int_{1}^{3}$ (١٦ – س٢) دس = $\frac{1}{3}$ ٢٣ وحدة مسافة

تدريب (٣)

م $\int_{-2}^{2}$ | س٣ – ١ | دس

= $\int_{-2}^{1}$ (١ – س٣) دس + $\int_{1}^{2}$ (س٣ – ١) دس

= $\frac{1}{2}$ ٩ وحدة مساحة

تدريب (٤)

ق (س) = س٢ ، ل (س) = ٤س + ٥ نجد نقط تقاطع المنحنيين

س٢ = ٤س + ٥

س٢ – ٤س –٥ = ٠

س = –١ ، ٥

م = $\int_{-1}^{5}$ [ل (س) – ق (س)] دس، لأن ل (س) ≤ ق (س) لكل س ∈ [–١، ٥]

= $\int_{-1}^{5}$ [٤س + ٥ – س٢) دس = ٣٦ وحده مساحة.

(٤ – ٧) حساب المساحة باستخدام التكامل

تدريب (٥)

ق(س) = س^{٢} ، هـ(س) = ٢ − س ، ل(س) = ٤ نجد نقط التقاطع بين المنحنيات

ق(س) = هـ(س) ، ق(س) = ل(س) ، هـ(س) = ل(س)

س^{٢} = ٢ − س ، س^{٢} = ٤ ، ٢ − س = ٤

س^{٢} + س − ٢ = ٠ ، س = −٢ ، ٢ ، س = −٢

س = −٢ ، ١

وعند تمثيل المنحنيات الثلاث نجد أن هناك منطقتين م$_{١}$ ، م$_{٢}$

م$_{١}$ = $\int_{-٢}^{١}$ [ل(س) − هـ(س)] دس ، م$_{٢}$ = $\int_{١}^{٢}$ [ل(س) − ق(س)] دس

م$_{١}$ = $\int_{-٢}^{١}$ (٤ − ٢ + س) دس = ٤ $\frac{١}{٢}$ وحدة مساحة

م$_{٢}$ = $\int_{١}^{٢}$ (٤ − س^{٢}) دس = ١ $\frac{٢}{٣}$ وحدة مساحة

م = م$_{١}$ + م$_{٢}$ = ٤ $\frac{١}{٢}$ + ١ $\frac{٢}{٣}$ = ٦ $\frac{٥}{٦}$ وحدة مساحة

إجابات الأسئلة (التدريبات)
الوحدة الرابعة: التكامل وتطبيقاته

(٤–٨) اقتران اللوغاريتم الطبيعي (مشتقته وتكامله)

تدريب (١)

١) قَ(س) = $\frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}\text{س}}$ = $\frac{١}{\text{س}}$

٢) قَ(س) = $\frac{٣\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٣} + ١}$

٣) ق(س) = ٢لو$_{هـ}$ جاس

قَ(س) = $\frac{٢\,\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = ٢ ظتا س

تدريب (٢)

١) $\int \frac{٦\text{س}}{٣\text{س}^{٢} - ٥}$ دس = لو$_{هـ}$ |٣س^{٢} −٥| + جـ

٢) افرض ص = س^{٣} − ٢س + ١ ⇐ دص = (٣س^{٢} −٢) دس

إذن $\int \frac{٣\text{س}^{٢} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٢ + ١}$ دس = $\int \frac{\text{دص}}{\text{ص}}$ = لو$_{هـ}$ |ص| + جـ

= لو$_{هـ}$ | س^{٣} − ٢س + ١ | + جـ

تدريب (٣)

□$_{٢}^{٤}$ $\frac{١}{٩ - ٢س}$ دس $= \frac{-١}{٢}$ □ $\frac{-٢}{٩ - ٢س}$ دس $= \frac{-١}{٢}$ لوهـ | ٩ − ٢س |]$_{٢}^{٤}$ $= \frac{١}{٢}$ لوهـ ٥

تدريب (٤)

□ س^{٥} لوهـ س^{٣} دس

ق = لوهـ س^{٣} ، دم = س^{٥} دس

ق = $\frac{٣}{س}$ دس ، م = $\frac{س^{٦}}{٦}$

□ س^{٥} لوهـ س^{٣} دس $= \frac{١}{٦}$ س^{٦} لوهـ س^{٣} − $\frac{١}{٦}$ □ س^{٦} × $\frac{٣}{س}$ دس

$= \frac{١}{٦}$ س^{٦} لوهـ س^{٣} − $\frac{١}{١٢}$ س^{٦} + جـ

تدريب (٥)

١) □ قا^{٤}س لوهـ ظاس دس

افرض ص = ظاس ⇐ ص^{٢} + ١ = ظا^{٢}س + ١ = قا^{٤}س

دص = قا^{٢}س دس

قا^{٢} س دص = قا^{٤}س دس

(ص^{٢} + ١) دص = قا^{٤}س دس

إذن □ قا^{٤}س لوهـ ظاس دس = □ (ص^{٢} + ١) لوهـ ص دص

= □ لوهـ ص × (ص^{٢} + ١) دص = ($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) لوهـ ص − $\frac{١}{٣}$ □ ص^{٢}دص

= ($\frac{ص^{٣}}{٣}$ + ص) لوهـ ص − $\frac{١}{٩}$ ص^{٣} − ص + جـ = ($\frac{ظا^{٣}س}{٣}$ + ظاس) لوهـ ظاس − $\frac{١}{٩}$ ظا^{٣}س − ظاس + جـ

٢) □ $\frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ - س\sqrt[٣]{س}}$ دس

افرض ص = $\sqrt[٣]{س}$ ⇐ ص^{٣} = س ⇐ ٣ ص^{٢} دص = دس

إذن □ $\frac{\sqrt[٣]{س}}{٥ - س\sqrt[٣]{س}}$ دس = □ $\frac{ص}{٥ - ص^{٤}}$ × ٣ص^{٢} دص = □ $\frac{٣ص^{٣}}{٥ - ص^{٤}}$ دص

$= \frac{٣}{-٤}$ □ $\frac{-٤ ص^{٣}}{٥ - ص^{٤}}$ دص $= \frac{-٣}{٤}$ لوهـ | ٥ − ص^{٤} | + جـ

$= \frac{-٣}{٤}$ لوهـ | ٥ − $\sqrt[٣]{س^{٤}}$ | + جـ

تدريب (١)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{جاس} \times \text{هـ}^{\text{جتاس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{٢}} = -\text{جا}\frac{\pi}{٢}\ \text{هـ}^{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}} = -١ \times \text{هـ}^{٠} = -١$

تدريب (٢)

$\text{ص} = \text{س} \times \text{س}^{٢} = \text{س}^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٣\text{س}^{٢}$

تدريب (٣)

$□_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١}\ \text{دس}$

افرض $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ١$

$\frac{١}{٣}\ \text{دص} = \text{س}^{٢}\ \text{دس}$

$\text{س} = ٠ \Leftarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = ١ \Leftarrow \text{ص} = ٢$

$□_{٠}^{١} \text{س}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{س}^{٣}+١}\ \text{دس} = \frac{١}{٣}□_{١}^{٢}\ \text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{دص} = \frac{١}{٣}\left[\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}^{١}\right] = \frac{\text{هـ}^{٢} - \text{هـ}^{١}}{٣}$

تدريب (٤)

١) $□\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{دس}$

افرض $\text{ص} = \text{ظا س} \Leftarrow \text{د ص} = \text{قا}^{٢}\text{س د س}$ إذن $□\ \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}}\ \text{دس} = □\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{دص}$

افرض $\text{م} = \sqrt{\text{ص}} \Leftarrow \text{م}^{٢} = \text{ص}$

$٢\text{م دم} = \text{دص}$

إذن $□\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{دس} = □\ ٢\text{م}\ \text{هـ}^{\text{م}}\ \text{دم}$

$= ٢\text{م} \times \text{هـ}^{\text{م}} - ٢\ □\ \text{هـ}^{\text{م}}\ \text{دم}$

$= ٢\text{م} \times \text{هـ}^{\text{م}} - ٢\ \text{هـ}^{\text{م}} + \text{جـ}$

$= ٢\sqrt{\text{ص}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}} - ٢\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ص}}} + \text{جـ}$

$= ٢\sqrt{\text{ظاس}}\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} - ٢\ \text{هـ}^{\sqrt{\text{ظاس}}} + \text{جـ}$

٢) $□\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}}\ \text{دس} = \frac{١}{\text{أ}}\ \text{هـ}^{\text{أس}+\text{ب}} + \text{جـ}$ (نفرض $\text{ص} = \text{أ س} + \text{ب}$)

تدريب (١)

$$\int_{٤}^{٥} \frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}\, \text{دس}$$

$$\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{أ}(\text{س} - ١) + \text{ب}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)}$$

أ(س − ١) + ب(س − ٣) = ١

س = ١ ⇐ −٢ب = ١ ⇐ ب = $-\frac{١}{٢}$

س = ٣ ⇐ −٢أ = ١ ⇐ أ = $\frac{١}{٢}$

إذن $\int_{٤}^{٥} \frac{١}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}\, \text{دس} = \int_{٤}^{٥} \frac{١}{\text{س} - ٣}\, \text{دس} \quad \frac{١}{٢}\int_{٤}^{٥} \frac{}{\text{س} - ١}\, \text{دس}$

$$= \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢| \Big]_{٤}^{٥} - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ١| \Big]_{٤}^{٥}$$

$$= \frac{١}{٤} [\text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} ١] - \frac{١}{٢} [\text{لو}_{\text{هـ}} ٤ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٣]$$

$$= \frac{١}{٤} \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{٤}{٣}$$

تدريب (٢)

$$\int \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\, \text{دس}$$

$$\frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ١} = \frac{\text{أ}(\text{س} + ١) + \text{ب}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$$

٤س + ١ = أ(س + ١) + ب(س − ٢)

س = −١ ⇐ −٢ = −٣ب ⇐ ب = ١

س = ٢ ⇐ ٩ = ٣أ ⇐ أ = ١

$$\int \frac{٤\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}\, \text{دس} = \int \frac{٣}{\text{س} - ٢}\, \text{دس} + \int \frac{١}{\text{س} + ١}\, \text{دس} = ٣\, \text{لو}\, |\text{س} - ٢| + \text{لو}\, |\text{س} + ١| + \text{جـ}$$

تدريب (٣)

$$\int \frac{\text{س}^2-\text{س}}{\text{س}+1}\,\text{دس}$$

$$= \int(\text{س}-2)\,\text{دس} + \int \frac{2}{\text{س}+1}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^2}{2} - 2\text{س} + 2\,\text{لو}\,|\text{س}+1| + \text{جـ}$$

تدريب (٤)

$$\int \frac{2\text{س}^3-\text{س}^2+3\text{س}}{\text{س}^2-3\text{س}-4}\,\text{دس}$$

$$= \int(2\text{س}+5)\,\text{دس} + \int \frac{26\text{س}+20}{(\text{س}-4)(\text{س}+1)}\,\text{دس}$$

$$= \text{س}^2 + 5\text{س} + \frac{124}{5}\int \frac{1}{\text{س}-4}\,\text{دس} + \frac{6}{5}\int \frac{1}{\text{س}+1}\,\text{دس}$$

$$= \text{س}^2 + 5\text{س} + \frac{124}{5}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{س}-4| + \frac{6}{5}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{س}-1| + \text{جـ}$$

القسمة المطولة:

$$\begin{array}{r|l} 2\text{س}+5 & \\ \hline 2\text{س}^3-\text{س}^2+3\text{س} & \text{س}^2-3\text{س}-4 \\ 2\text{س}^3-6\text{س}^2+8\text{س} & \\ \hline 5\text{س}^2+11\text{س} & \\ 5\text{س}^2-15\text{س}-20 & \\ \hline 26\text{س}+20 & \end{array}$$

تدريب (٥)

١) $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-1}{\sqrt[3]{\text{س}^2}-4}\,\text{دس}$

افرض $\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^3 = \text{س} \Leftarrow 3\text{ص}^2\,\text{دص} = \text{دس}$

إذن $\int \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-1}{\sqrt[3]{\text{س}^2}-4}\,\text{دس} = \int \frac{\text{ص}-1}{\text{ص}^2-4} \times 3\text{ص}^2\,\text{دص}$

$$= \int \frac{3\text{ص}^3-3\text{ص}^2}{\text{ص}^2-4}\,\text{دص}$$

$$= \int(\text{ص}-1)\,\text{دص} + \int \frac{1}{\text{ص}-2}\,\text{دص} + \int \frac{3}{\text{ص}+2}\,\text{دص}$$

$$= \frac{\text{ص}^2}{2} - \text{ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}-2) + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+2) + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{2}{3}}}{2} - \sqrt[3]{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,|\sqrt[3]{\text{س}}-2| + 3\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\sqrt[3]{\text{س}}+2| + \text{جـ}$$

٢) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}}{5\text{ظا}^2\text{س}-3\,\text{ظاس}-2} = \int \frac{\text{دص}}{5\text{ص}^2-3\,\text{ص}-2}$ ، بفرض ص = ظاس $\Leftarrow$ دص = قا²س دس

$$= \frac{-1}{3}\int \frac{1}{5\text{ص}+2}\,\text{دص} + \frac{1}{7}\int \frac{1}{\text{ص}-1}\,\text{دص}$$

$$= \frac{-1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|5\text{ص}+2| + \frac{1}{7}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ص}-1| + \text{جـ}$$

$$= -\frac{1}{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|5\text{ظاس}+2| + \frac{1}{7}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,|\text{ظاس}-1| + \text{جـ}$$

تدريب (١)

بتطبيق قانون المسافة بين النقطتين م ، ن ومساراته بالعدد ٤ تجد أن :

(س + ٥)^{٢} + (ص – ٢)^{٢} = ١٦ .... وهي معادلة المحل الهندسي.

تدريب (٢)

المحل الهندسي للنقطة المتحركة أ (س ، ص) هو مستقيم يوازي ص = –١

وبتطبيق قانون البعد بين النقطة أ ، المستقيم ص = –١

| ص + ١ | = ٣ ⇐ ص = ٢ او ص = –٤

وبما أنه يمر بالنقطة (٠ ، –٤) ....معادلة المحل الهندسي هي ص = –٤

تدريب (٣)

$\sqrt{(\text{س} + ٢)^{٢} + (\text{ص} - ٨)^{٢}} = \dfrac{\text{ص} - ٢}{\sqrt{٠ + ١}}$ وبتربيع الطرفين

س^{٢} + ٤س + ٤ + ص^{٢} – ١٦ص + ٦٤ = ص^{٢} – ٤ص + ٤

س^{٢} + ٤س + ٤ – ١٢ص + ٦٤ – ٤ = ٠

س^{٢} + ٤س – ١٢ص + ٦٤ = صفر

(س^{٢} + ٤س + ٤ – ٤) – ١٢ص + ٦٤ = صفرًا

(س + ٢)^{٢} = ١٢ (ص – ٥) وهي معادلة المحل الهندسي.

تدريب (١)

المركز (١ ، –٣) نصف القطر ٤

تدريب (٢)

بما ان مركزها النقطة (–٢ ، –٣) وتمس محور الصادات فإن نصف قطرها و = ٣

فتكون معادلتها (س + ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩

تدريب (٣)

س^{٢} + ص^{٢} + ٢س + ١٦ص = صفرًا

تدريب (٤)

تمر بالنقطة (١ ، –٢) ← تحقق معادلة الدائرة ومنه

١ + ٤ + ٢ل – ٤ل + جـ = صفرًا ..... (١)

تمر بالنقطة (٤ ، –٣) ← تحقق الدائرة

١٦ + ٩ + ٨ل – ٦ل + جـ = صفرًا ..... (٢)

مركز الدائرة (–ل ، –ك) يقع على الخط ٣س + ٤ص = ٧ .... أي أنه يحققه

–٣ ل – ٤ك = ٧ ..... (٣)

وبحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن معادلة الدائرة هي :

٩ س^{٢} + ٩ ص٢ + ٦س – ٥ص – ١٧ = صفرًا

تدريب (١)

-٤ جـ = -١٨ ⇐ جـ = ٤٫٥

البؤرة ($-٤٫٥$ ، ٠) ومعادلة الدليل س = $\frac{٩}{٢}$

تدريب (٢)

٤ جـ = ١٦ ⇐ جـ = ٤

البؤرة (٠ ، ٤) ومعادلة الدليل ص = -٤

تدريب (٣)

$س^٢ = ٢٠ ص$

تدريب (٤)

الرأس (٢ ، ٣) ⇐ ٤ جـ = ١٢ ⇐ جـ = ٣

البؤرة (٢ ، ٦)

معادلة المحور س = ٢ ، معادلة الدليل ص = ٢

تدريب (٥)

الرأس (د، هـ) = (١، -١) ، جـ = ٢

معادلة القطع (س $-$د) = ٤ جـ (ص $-$ هـ)

$(س - ١)^٢ = ٨ (ص + ١)$

تدريب (٦)

$(س - ٢)^٢ = ص - ١$

تدريب (٧)

الرأس ($\frac{-٧}{٤}$ ، ١) ، البؤرة ($\frac{-٣}{٢}$ ، ١)

معادلة المحور ص = ١ ، معادلة الدليل س = -٢

تدريب (١)

بؤرتاه (٠ ، ٣) (٠ ، –٣) ، ورأساه (٠ ، ٥) (٠ ، –٥)

محوره الأكبر (س = ٠) وطوله ٢ أ = ٢ × ٥ = ١٠ وحدات

محوره الأصغر (ص = ٠) وطوله ٢ ب = ٢ × ٤ = ٨ وحدات

بعده البؤري ٢ جـ = ٢ × ٣ = ٦ وحدات

الاختلاف المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ}$ = $\frac{٣}{٥}$ = ٠,٦

تدريب (٢)

طول محوره الأصغر ٢ ب = ٤ ⇐ ب = ٢

بعده البؤري ٢ جـ = ٢$\sqrt{٥}$ ⇐ جـ = $\sqrt{٥}$

جـ^٢ = أ^٢ – ب^٢ ⇐ ٥ = أ^٢ – ٤ ⇐ أ^٢ = ٩ ⇐ أ = ٣

محوره الأكبر على محور الصادات ⇐ معادلته $\frac{س^٢}{٤} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

تدريب (٣)

مركزه (٢ ، ١)

بؤرتاه (٢ ، ٥)، (٢ ، –٣) ، ورأساه (٢ ، ٦)، (٢ ، –٤)

محوره الأكبر (س = ٢) ، وطوله ٢ أ = ١٠

محوره الأصغر (ص = ١) ، وطوله ٢ ب = ٦

اختلافه المركزي هـ = $\frac{٤}{٥}$ = ٠,٨

تدريب (٤)

$$\frac{(س - ١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص - ٢)}{٩} = ١$$

تدريب (٥)

طول محوره الأكبر ٢ أ = ١٠ ⇐ طول محوره الأصغر ٢ ب = ٨ ⇐ ب = ٤

مركزه (٨ ، ٣) ومنه معادلته $\frac{(س - ٨)^٢}{٢٥} + \frac{(ص - ٣)^٢}{١٦} = ١$

تدريب (٦)

مركزه (–٣ ، ١)

بورتاه (–٣ + $\sqrt{٣}$ ، ١) (–٣ – $\sqrt{٣}$ ، ١) ، ورأساه (–١ ، ١)، (–٥ ، ١)

محوره الأكبر (ص = ١) ، وطوله ٢ أ = ٤

محوره الأصغر (س = –٣) وطوله ٢ ب = ٢ ، واختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

تدريب (١)

أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = $\sqrt{٥}$ ، مركزه (٠ ، ٠)

بؤرتاه (٠ ، $\sqrt{٥}$)، (٠ ، $\sqrt{٥}$) ، ورأساه (٠ ، ٢)، (٠ ، −٢)

محوره القاطع س = ٠ وطوله ٢ أ = ٤ ، محوره المرافق ص = ٠ وطوله ٢ ب = ٢

بعده البؤري ٢ جـ = ٢ $\sqrt{٥}$ ، ،اختلافه المركزي هـ = $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$

تدريب (٢)

$$ص^٢ - \frac{س^٢}{٤} = ١$$

تدريب (٣)

أ = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٥ مركزه (٢ ، ١)

بؤرتاه: (٧ ، ١)، (−٣ ، ١) ، ورأساه: (٥ ، ١)، (−١ ، ١)

محوره القاطع ص = ١ وطوله ٢ أ = ٦ ، محوره المرافق س = ٢ وطوله ٢ ب = ٨

بعده البؤري ٢ جـ = ١٠ ⟸ اختلافه المركزي هـ = $\frac{٥}{٣}$

تدريب (٤)

$$\frac{(س - ١)^٢}{١٦} - \frac{(ص - ٢)}{٢٠} = ١$$

تدريب (٥)

أ = $\sqrt{٢}$ ، ب = ٢ $\sqrt{٢}$ ، جـ = $\sqrt{١٠}$ ، مركزه (−٢ ، ٥)

رأساه: (−٢ + $\sqrt{٢}$ ، ٥)، (−٢ − $\sqrt{٢}$ ، ٥) ، بؤرتاه: (−٢ + $\sqrt{١٠}$ ، ٥)، (−٢ − $\sqrt{١٠}$ ، ٥)

محوره القاطع ص = ٥ وطوله ٢ أ = ٢ $\sqrt{٢}$

محوره المرافق س = −٢ وطوله ٢ ب = ٤ $\sqrt{٤}$

بعده البؤري ٢ جـ = ٢ $\sqrt{١٠}$

اختلافه المركزي هـ = $\frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٥}$

الوحدة السادسة: الهندسة الفضائية
(٦–١) البناء الرياضي للهندسة الفضائية

تدريب (١)

١) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

٢) أ ب جـ ، أ ب د ، ب جـ د

٣) $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$

٤) $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، يقع في المستويين ب جـ د ، ب جـ أ

تدريب (٢)

١) $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$

٢) $\overleftrightarrow{\text{د دَ}}$

٣) و ز بَ جـَ

الوحدة السادسة : الهندسة الفضائية
(٦ – ٢) أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

تدريب (١)

١) $\overleftrightarrow{\text{و ز}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ل}}$

٢) ($\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{ل هـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل ز}}$)

٣) ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ل}}$) ، ($\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{و ز}}$)

تدريب (٢)

١) س ي أ ص ، ك ط م ل   ٢) ل ر ح ط

٣) $\overleftrightarrow{\text{ك ط}}$ ٤) $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$

تدريب (٣)

افرض أن أ ، ب ، جـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

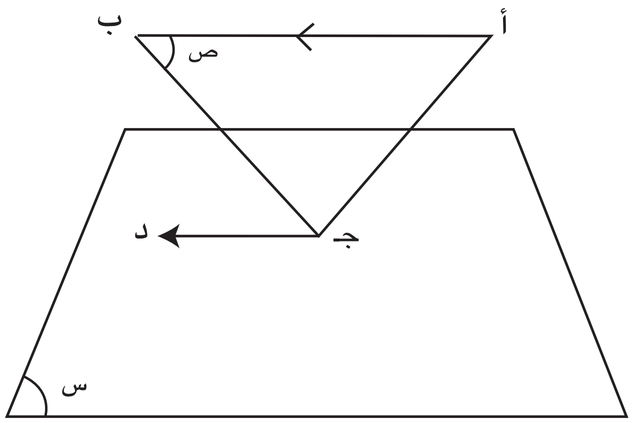
∴ يوجد مستوى واحد فقط يحويها معًا وليكن المستوى (س) (مسلمة ٣)

لكن لأي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بها مستقيم واحد (مسلمة ١)

∴ هنالك ثلاثة مستقيمات مختلفة على الأقل هي :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ تقع في المستوى س وهو المطلوب.

تدريب (١)



المطلوب إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يقع بتمامه في المستوى س

البرهان

النقطة جـ ، و المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يعينان مستوى ليكن (ص)

إذن س $\cap$ ص = {جـ }

لكن إذا اشترك مستويان في نقطة فإنهما يشتركان في نقطة أخرى

ولتكن د (أي يشتركان في مستقيم) وليكن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

حيث أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // للمستوى (س) ، فإن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ (خط تقاطع المستويين س ، ص) **(نتيجة)**

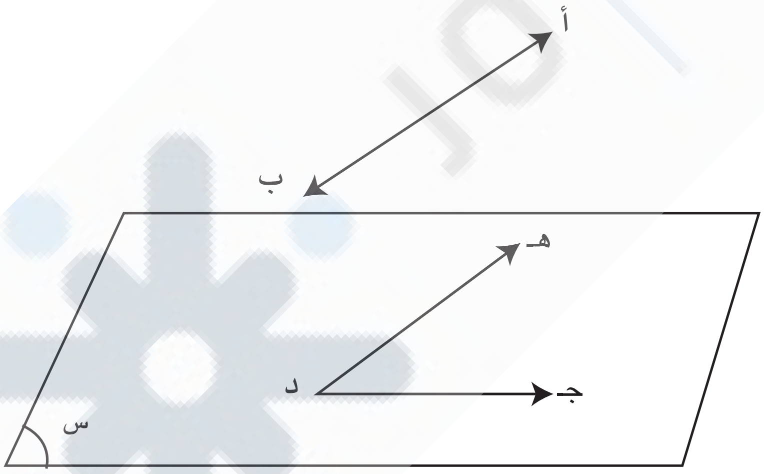
لكن $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ يقع بتمامه في (س)

وحيث إنه يمكن رسم مستقيم وحيد من جـ يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ هو المستقيم المرسوم من جـ والموازي لِ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

والواقع بتمامه في المستوى (س)

تدريب (٢)



المطلوب إثبات أن :

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي المستوى د جـ هـ

البرهان

$\overleftrightarrow{\text{د جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مستقيمان متقاطعان

إذن يحددان مستوى وليكن المستوى (س)

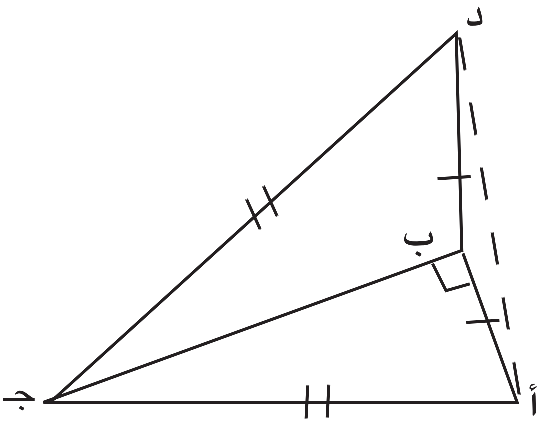
لكن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ $\ni$ س

إذن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يوازي المستوى (س)

(حسب النظرية : إذا وازى مستقيم خارج مستوى مستقيمًا في المستوى ، فإن المستقيم يوازي المستوى).

تدريب (١)

البرهان



في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

لكن أ جـ = د جـ

∴ (د جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

لكن أ ب = د ب

∴ (د جـ)^{٢} = (د ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

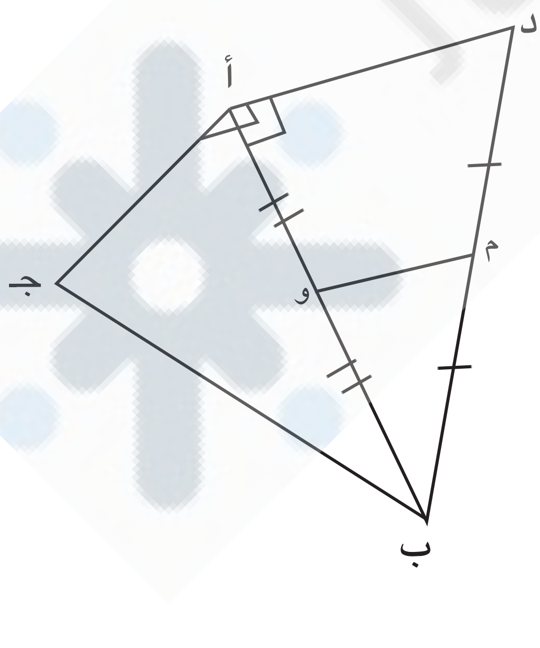
أي أن ق (د $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٩٠° أي ان $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$

∴ يصبح $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ عمودي على مستوييهما (أي $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$)

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ⊥ المستوى أ ب د وهو المطلوب

تدريب (٢)



المطلوب : إثبات أن $\overline{\text{و م}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

البرهان

$\overline{\text{هـ أ}}$ عمودي على كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$

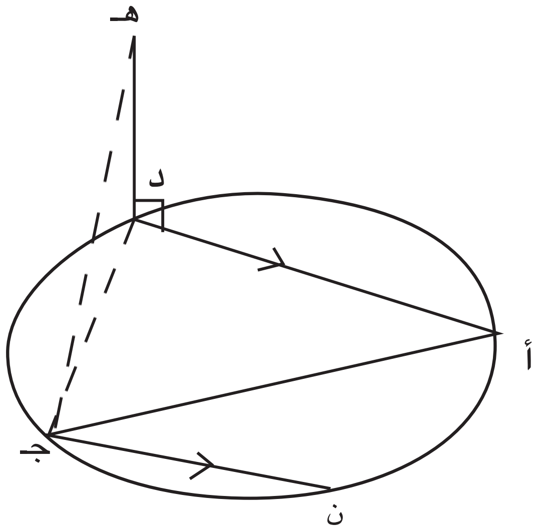
∴ $\overline{\text{هـ أ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ (نظرية)

$\overline{\text{م هـ}}$ تصل بين منتصفي ضلعين في المثلث ب هـ أ

∴ $\overline{\text{م و}}$ // $\overline{\text{هـ أ}}$

∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ (نتيجة سابقة)

تدريب (٣)



المطلوب إثبات أن:

$\overleftrightarrow{\text{جـ ن}}$ ⊥ المستوى هـ د جـ

البرهان

ق (أ $\hat{\text{د}}$ جـ) = ٩٠° (زاوية محيطية تقابل القطر $\overline{\text{أ جـ}}$)

∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{د جـ}}$

كذلك $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{د هـ}}$ (بالفرض)

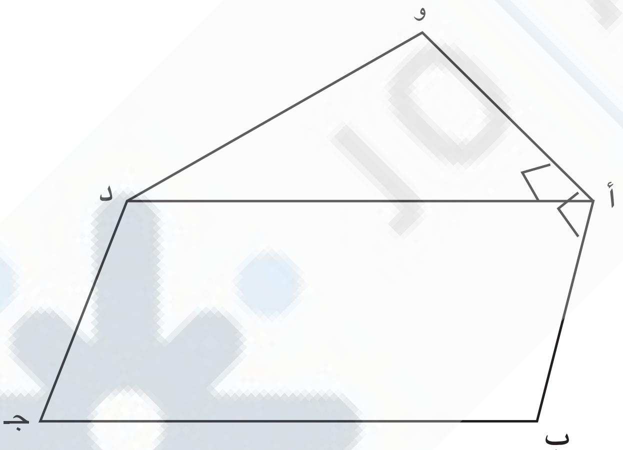
∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ على كل من $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ د}}$ ⊥ المستوى د هـ جـ (نظرية)

لكن $\overline{\text{ن جـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$ بالفرض

∴ $\overleftrightarrow{\text{ن جـ}}$ ⊥ المستوى هـ د جـ (نتيجة سابقة)

تدريب (٤)



المعطيات : $\overline{\text{أ و}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د

المطلوب : إثبات أن : المستوى أ و د ⊥ المستوى أ ب جـ د

البرهان

$\overline{\text{أ و}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ د (بالفرض)

المستوى أ و د يحوي $\overline{\text{أ و}}$ العمودي على أ ب جـ د

∴ المستوى أ و د ⊥ المستوى أ ب جـ د (نظرية ٤)

تدريب (١)

١) لا　　　٢) إذا كانت القطعة موازية للمستوى

٣) نعم　　　٤) ليس بالضرورة　　　٥) نعم

تدريب (٢)

١) المطلوب إثبات أن:

ب د ⊥ المستوى أ هـ م

البرهان :

أ هـ ⊥ المستوى أ ب جـ د

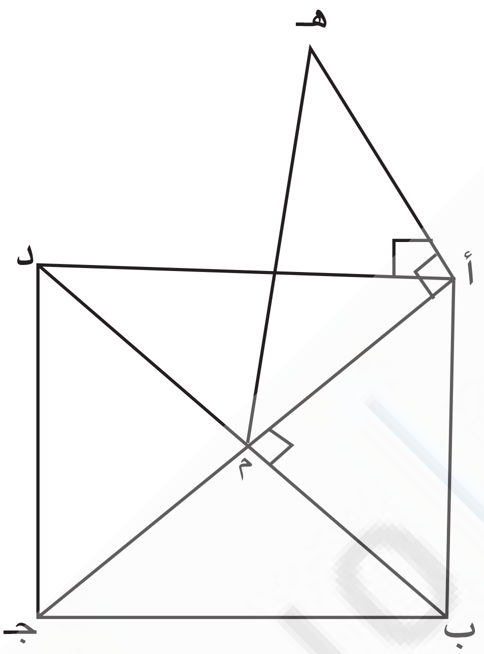
وبما أن قطرا المربع متعامدان

∴ ب د ⊥ أ م

أ م مسقط المائل هـ م على مستوى المربع،

أ م ⊥ ب د ، إذن هـ م ⊥ ب د (نظرية)

∴ ب د ⊥ المستوى م أ هـ



٢)

∴ الزاوية الزوجية هي أ م̂ هـ

ظا أ م̂ هـ = أ هـ / أ م

قطر المربع = √(١٦ + ١٦) = √٣٢ = ٤√٢ سم

∴ نصف القطر = ٢√٢ سم

∴ ظا أ م̂ هـ = ٢√٢ / ٢√٢ = ١

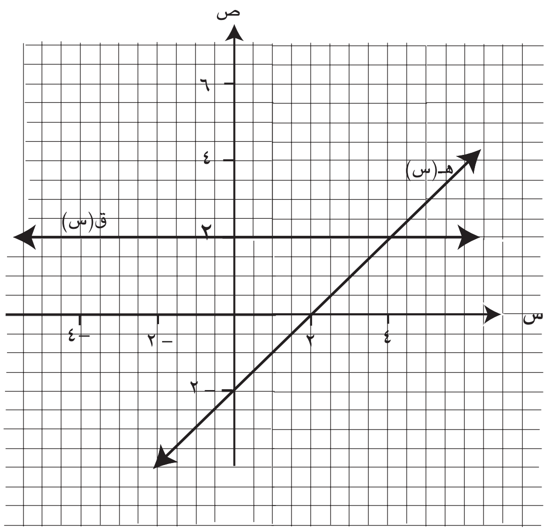
∴ ق (أ م̂ هـ) = ٤٥°

ملحق
١

إجابات الأسئلة العلاج والإثراء

علاج

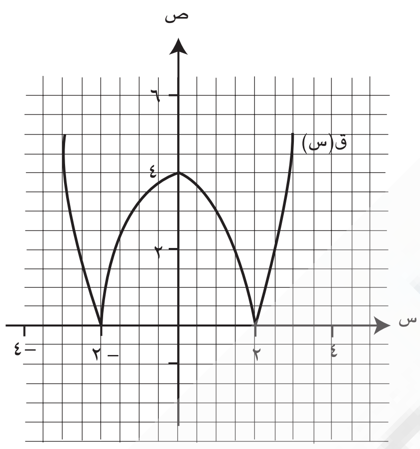
أ) الرسم البياني



ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ٢

$\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ هـ (س) = ١

إثراء



$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا

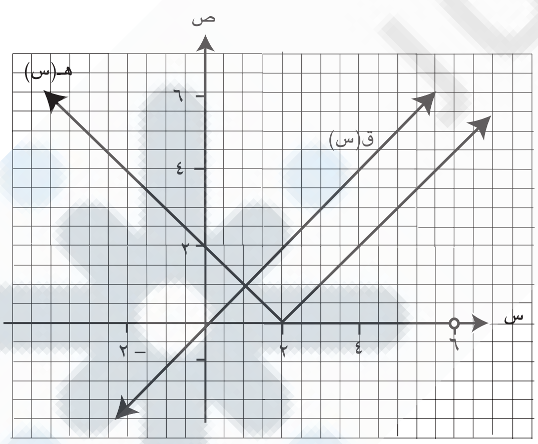
$\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ٤

(١ – ١) نهاية اقتران عند نقطة .

علاج

أ) الرسم البياني

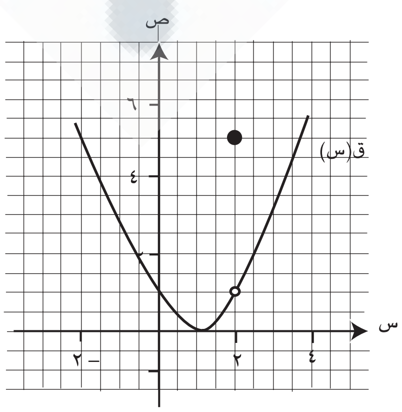


ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ٣

$\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ ق (س) = صفرًا

إثراء

الرسم البياني



علاج

أ) ق (س) + ل (س) = (٥ − ٢ س) + (٣ + ٤ س) = ٢س + ٨

٢ ق (س) = ٢ (٥ − ٢ س) = ١٠ − ٤ س

ق (س) × ل (س) = (٥ − ٢ س) (٣ + ٤ س) = ١٥ + ١٤ − ٨ $س^{٢}$

ب) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ (٥ − ٢ س) = ٥ + ٢ = ٧

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ (ق (س) + ل (س)) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ (٢ س + ٨) = ٦

$\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ق (س) × ل (س) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ (١٥ + ١٤ س − ٨ $س^{٢}$)

= ١٥ − ١٤ − ٨ = −٧

إثراء

السؤال الأول

أ) نعيد تعريف ق (س) دون استخدام رمز الصحيح

$$ق (س) = \begin{cases} -٢ س^{٣} & ، \; -١ \le س < ٠ \\ -س^{٣} & ، \; ٠ \le س < ١ \\ \text{صفر} & ، \; ١ \le س < ٢ \\ س^{٣} & ، \; ٢ \le س < ٣ \end{cases}$$

$\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ (−٢ $س^{٣}$) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ (− $س^{٣}$) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ ق (س) = صفر

ب) $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نهــا}}$ $س^{٣}$ = ٨

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق (س) = صفرًا

$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهــا}}$ ق (س) غير موجودة

السؤال الثاني

$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \left(٢\,\text{ق}(\text{س}) + ٣\,\text{هـ}(\text{س}) \right) = -٩$

$٢ \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{ق}(\text{س}) + ٣ \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{هـ}(\text{س}) = -٩$

$٢ \times \frac{٣}{٢} + ٣ \underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{هـ}(\text{س}) = -٩$ ومنه $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \text{هـ}(\text{س}) = -٤$

$\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \left(\text{هـ}(\text{س}) \right)^٢ = \left(\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـــا}} \left(\text{هـ}(\text{س}) \right) \right)^٢ = (-٤)^٢ = ١٦$

علاج

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \text{ق}(\text{س}) + \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \text{هـ}(\text{س})$

$= ٥ - ١ = ٤$

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(\text{س}^٢ - ٢\,\text{ق}(\text{س}) \right) = \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \text{س}^٢ - ٢ \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \text{ق}(\text{س})$

$= ٤ - ٢ \times ٥ = -٦$

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \left(٣\,\text{ق}(\text{س}) \times \text{هـ}(\text{س}) \right) = ٣ \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \text{ق}(\text{س}) \times \underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \text{هـ}(\text{س})$

$= ٣ \times ٥ \times -١ = -١٥$

إثراء

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}} \frac{|\text{س} - ٢|}{\sqrt{\text{س} - ٢}}$

بما أن المقام غير معرف على يسار العدد ٢ فإن النهاية غير موجودة.

علاج

أ) $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{٥ س}{س + ٢} = \frac{١٥}{٥} = ٣$

ب) $\underset{س\leftarrow ١}{نهـــا} \frac{س - ١}{س^٣ + ٢} = \frac{صفر}{٣} =$ صفرًا

جـ) $\underset{س\leftarrow -٣}{نهـــا} \frac{س^٢ - ٩}{٢س + ٦} = \underset{س\leftarrow -٣}{نهـــا} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{٢(س + ٣)} =$ صفرًا

إثراء

ليس بالضرورة، فمثلاً إذا كان ق (س) = $س^٢ - ٤$ ، هـ (س) = ٢س + ٤

فإن $\underset{س\leftarrow -٢}{نهـــا} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = -٢$ بينما $\underset{س\leftarrow -٢}{نهـــا}$ ق (س) = صفر ، $\underset{س\leftarrow -٢}{نهـــا}$ هـ (س) = صفرًا

علاج

أ) $\underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{(س - ٣)} = \underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{(س - ٣)} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢}$

$= \underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{س + ١ - ٤}{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)} = \underset{س\leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{س - ٣}{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)} = \frac{١}{٤}$

ب) $\underset{س\leftarrow ١}{نهـــا} \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١} = \underset{س\leftarrow ١}{نهـــا} \frac{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ١)}{\sqrt{س} - ١} = ٢$

إثراء

١) بما أن البسط غير معروف على يسار العدد ١ فإن النهاية غير موجودة.

٢) $\underset{س\leftarrow ٧}{نهـــا} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س - ٧} = \underset{س\leftarrow ٧}{نهـــا} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{س + ١ - ٨}$

$= \underset{س\leftarrow ٧}{نهـــا} \frac{\sqrt[٣]{س + ١} - ٢}{(\sqrt[٣]{س + ١} - ٢)(\sqrt[٣]{(س + ١)^٢} + ٢\sqrt[٣]{س + ١} + ٤)} = \frac{١}{٤ + ٤ + ٤} = \frac{١}{١٢}$

علاج

١) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٦}}{\text{نها}}\ \text{جتا}\ ٢\text{س} = \text{جتا}\ \frac{\pi}{٣} = \frac{١}{٢}$

٢) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{ظا}\ ٣\text{س}}{٢\text{س}} = \frac{٣}{٢}$

إثراء

١) بالتعويض المباشر

$\frac{\pi}{٤}\ \text{جتا}\ \frac{\pi}{٤}\text{أ} = ٠$ ومنه $\text{جتا}\ \frac{\pi}{٤}\text{أ} = ٠$ ، إذن $\frac{\pi}{٤}\text{أ} = \frac{\pi}{٢}$ ومنه أ = ٢ أو $\frac{\pi}{٤}\text{أ} = \frac{٣\pi}{٢}$ ومنه أ = ٦

٢) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س جا}\ \frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س جا}\left(\pi - \frac{\pi}{\text{س}}\right)}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{س جا}\ \pi\left(١ - \frac{١}{\text{س}}\right)}{\text{س} - ١} = \underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ \pi\left(\frac{\text{س} - ١}{\text{س}}\right)}{\frac{\text{س} - ١}{\text{س}}} = \pi$

علاج

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢ - \text{جا}\ ٢\text{س}}{٣\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢ - ٢\text{جاس جتاس}}{٣\text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{٣} - \frac{٢}{٣}\ \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{س}}\right)\text{جتاس} = -\frac{٢}{٣} \times ١ \times ١ = -\frac{٢}{٣}$

طريقة أخرى

$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}^٢ - \text{جا}\ ٢\text{س}}{٣\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{س}}{٣} - \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\ ٢\text{س}}{٣\text{س}} = ٠ - \frac{٢}{٣} = -\frac{٢}{٣}$

إثراء

١) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جتاس}}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \text{س}\right)}{\text{س} - \frac{\pi}{٢}} = -١$

٢) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ (\text{ظاس} - \text{قاس}) = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{١}{\text{جتاس}}\right) = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس} - ١}{\text{جتاس}}$

$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جاس} - ١}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس} + ١}{\text{جاس} + ١} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{\text{جا}^٢\text{س} - ١}{\text{جتاس}\ (\text{جاس} + ١)}$

$= \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{-\text{جتا}^٢\text{س}}{\text{جتاس}\ (\text{جاس} + ١)} = \underset{\text{س}\to\frac{\pi}{٢}}{\text{نها}}\ \frac{-\text{جتاس}}{\text{جاس} + ١} = \text{صفرًا}$

علاج

١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{٢ ق (س)} + \text{٣ هـ (س)}) = \text{٢} \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{ق (س)} + \text{٣} \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{هـ (س)} = \text{٢} \times \text{٣} + \text{٣} \times \text{٥-} = \text{٩-}$

٢) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{ق (س)})^{\text{٢}} = (\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{ق (س)})^{\text{٢}} = \text{٣}^{\text{٢}} = \text{٩}$

٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{ق (س)} \times \text{هـ (س)}) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{ق (س)} \times \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{هـ (س)} = \text{٣} \times \text{٥-} = \text{١٥-}$

إثراء

ليس من الضروري

مثال (١) ليكن $\text{ق (س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}$ ، $\text{هـ (س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٣}}}{\text{١} + \text{س}^{\text{٢}}}$

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{ق (س)} = -\infty$ (غير موجودة) ، $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{هـ (س)} = \infty$ (غير موجودة)

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{ق (س)} + \text{هـ (س)}) = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢س}^{\text{٣}}}{\text{١} - \text{س}^{\text{٤}}} = \text{صفرًا}$

مثال (٢) ليكن $\text{ق (س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{١} - \text{س}}$ ، $\text{هـ (س)} = \dfrac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{١} + \text{س}}$ يمكن التأكد من أن $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{ق (س)}$ غير موجودة

$\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{هـ (س)}$ غير موجودة ، بينما $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} (\text{ق (س)} + \text{هـ (س)})$ موجودة

علاج

١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}} = \infty$ ٢) $\underset{\text{س}\to-\infty}{\text{نهـا}} (\text{٥} - \dfrac{\text{١}}{\text{س}}) = \text{٥} - \text{صفر} = \text{صفرًا}$

إثراء

١) $\underset{\text{نق}\to\infty}{\text{نهـا}} \text{م (نق)} = \underset{\text{نق}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{أ ل}}{\text{نق}^{\text{٤}}} = \text{صفر}$

يعني أن مقاومة الشريان لتدفق الدم فيه تصبح معدومة إذا أصبح طول نصف قطره يؤول إلى ∞ .

٢) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ س}} - \text{س} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ س}} - \text{س} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ س}} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ س}} + \text{س}}$

$= \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ س} - \text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}} + \text{جـ س}} + \text{س}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جـ س}}{\text{س}}}{\sqrt{\frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}}} + \frac{\text{جـ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}} + \frac{\text{س}}{\text{س}}} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جـ}}{\sqrt{\text{١} + \text{صفر}} + \text{١}} = \dfrac{\text{جـ}}{\text{٢}}$

علاج

بما أن ق متصل عند س = $\frac{\pi}{٢}$ فإن

$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}^{+}}{\text{نها}}$ ق (س) = $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}^{-}}{\text{نها}}$ ق (س) = ق ($\frac{\pi}{٢}$)

أ ($\frac{\pi}{٢}$)^{٢} + $\pi^{٢}$ = ٢ جتا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ ومنه $\frac{أ\,\pi^{٢}}{٤}$ + $\pi^{٢}$ = صفرًا ومنه أ = –٤

إثراء

ليكن م (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢س &، س \leq ٢ \\ س^{٣} - ٢ &، س > ٢ \end{cases}$

لاحظ أن م (س) متصل عند س = ٢

إذا كان ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} &، س \leq ٢ \\ س^{٣} &، س > ٢ \end{cases}$ ، هـ (س) = $\begin{cases} ٢س &، س \leq ٢ \\ -٢ &، س > ٢ \end{cases}$

فإن كلًا من ق ، هـ غير متصل عند س = ٢ بينما م (س) = ق (س) + هـ (س) متصل عند س = ٢

علاج

ق (س) = $\begin{cases} \frac{س - ٢}{س - ٢} &، س \geq ٠ ، س \neq ٢ \\ \frac{س - ٢}{-(س + ٢)} &، س < ٠ ، س \neq -٢ \end{cases}$

= $\begin{cases} ١ &، س \geq ٠ ، س \neq ٢ \\ \frac{س - ٢}{-(س + ٢)} &، س < ٠ ، س \neq -٢ \end{cases}$

الاقتران ق غير متصل عند س = ٢ ، س = –٢ لأنه غير معرف عند هاتين النقطتين .

إثراء

ليكن م (س) = (س – ٢) [س + ١] لاحظ أن م (س) متصل عند س = ٢

إذا كان ق (س) = س – ٢ ، هـ (س) = [س + ١] فإن ق (س) متصل عند س = ٢ ، هـ (س) غير متصل عند س = ٢ بينما م (س) = ق (س) × هـ (س) متصل عند س = ٢ .

علاج

الاقتران ق متصل على [٠ ، ٥] / {٣} لأنه كثير حدود

$\lim_{س \leftarrow ٣}$ ق (س) = $\lim_{س \leftarrow ٣}$ (س^{٢} – ٢س + ١) = ٤

حتى يكون الاقتران ق متصلاً عند س = ٣ يجب أن تكون ل = ٤ ، وفي

هذه الحالة يكون ق متصلاً على الفترة [٠ ، ٥]

إثراء

نحدد مجال الاقتران

مجال المقام ح ، ليكون البسط معرفًا يجب أن يكون ٩ – س٢ ≥ ٠

أي أن –٣ ≤ س ≤ ٣ وعليه فإن مجال الاقتران ق هو [–٣ ، ٣]

أولاً : لأي جـ ∈ (–٣ ، ٣)

$\lim_{س \leftarrow جـ}$ ق (س) = $\lim_{س \leftarrow جـ} \frac{\sqrt{٩ - س^{٢}}}{س^{٢} + ١} = \frac{\sqrt{٩ - جـ^{٢}}}{جـ^{٢} + ١}$ = ق (جـ)

ثانيًا : نبحث اتصال ق عند س = ٣ من اليسار

$\lim_{س \leftarrow ٣^{-}}$ ق (س) = $\lim_{س \leftarrow ٣^{-}} \frac{\sqrt{٩ - س^{٢}}}{س^{٢} + ١}$ = صفر = ق (٣)

إذن ق متصل عند س = ٣ من اليسار

ثالثًا : نبحث اتصال ق عند س = –٣ من اليمين

$\lim_{س \leftarrow -٣^{+}}$ ق (س) = $\lim_{س \leftarrow -٣^{+}} \frac{\sqrt{٩ - س^{٢}}}{س^{٢} + ١}$ = صفر = ق (٣)

إذن ق متصل عند س = –٣ من اليمين

مما سبق ق (س) متصل على مجاله وهو [–٣ ، ٣]

علاج

الإجابة (٢ ، ∞)

إثراء

ق (س) = $\frac{١}{س}$ متصل على (– ∞ ، ٠) ومتصل على (٠ ، ∞)

لكنه غير متصل على (– ∞ ، ∞) لأنه غير معرف عند س = ٠

علاج

١) Δ س = ٤,١ – ٠,٨ = ٣,٣

٢) Δ ص = ق (٥) – ق (٢) = ٤٠ – ١٠ = ٣٠

٣) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - (-١)}{٣ - (-١)} = \frac{١٨ - (-٢)}{٤} = ٥$

إثراء

النقطة ب تقع على يسار النقطة أ

علاج

١) أ) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٣)}{٤ - ٣} = ٨ - ٤,٥ = ٣,٥$

ب) $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(-٢)}{٣ + ٢} = \frac{\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}}{٥} = \frac{٥}{٣٠} = \frac{١}{٦}$

٢) ميل القاطع $= \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(٠,٠١)}{٤ - ٠,٠١} = \frac{٢ - ٠,١}{٣,٩٩} = \frac{١,٩}{٣,٩٩} = ٠,٤٨$

إثراء

Δ س = س – ١ ، Δ ص = ص – ١

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ١} = \frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١} = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{\text{س} - ١} = \text{س} + ١$

علاج

١) $\acute{\text{ق}}(٣) = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٣)}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^٢ - ٩}{\text{س} - ٣} = \underset{\text{س}\to ٣}{\text{نها}} \dfrac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{\text{س}-٣} = ٦$

٢) $\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{ع}} - \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ع} - \text{س}}{(\text{ع} - \text{س})(\sqrt{\text{ع}} + \sqrt{\text{س}})} = \dfrac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$

إثراء

معدل التغير $= \acute{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{٢٠ + ٨\text{ع} - ٠{،}٢\text{ع}^٢ - (٢٠ + ٨\text{س} - ٠{،}٢\text{س}^٢)}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{٨(\text{ع}-\text{س}) - ٠{،}٢(\text{ع}^٢ - \text{س}^٢)}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ع}-\text{س})(٨ - ٠{،}٢\text{ع} - ٠{،}٢\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} (٨ - ٠{،}٢\text{ع} - ٠{،}٢\text{س}) = ٨ - ٠{،}٤\text{س}$

١) $\acute{\text{ق}}(٥) = ٨ - ٢ = ٦$ ، $\acute{\text{ق}}(٢٠) =$ صفرًا ، $\acute{\text{ق}}(٢٥) = -٢$

٢) بدراسة معدل التغير عند قيم أخرى للمتغير س نجد أن الإيراد الأسبوعي بدأ يتزايد خلال فترة الدعاية ٠ ≤ س ≤ ٢٠، ثم بدأ يتناقص في الفترة ٢٠ ≤ س ≤ ٣٠

علاج

١) $\acute{\text{ق}}(٨) = \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٨)}{\text{س} - ٨} = \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} - \sqrt{٩}}{(\text{س}-٨)(\sqrt{\text{س}} + ١ + ٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} - ٣}{\text{س} - ٨} \times \dfrac{\sqrt{\text{س}+١} + ٣}{\sqrt{\text{س}+١} + ٣} = \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} + ١ - ٩}{(\text{س}-٨)(\sqrt{\text{س}+١} + ٣)}$

$= \underset{\text{س}\to ٨}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - ٨}{(\text{س}-٨)(\sqrt{\text{س}+١} + ٣)} = \dfrac{١}{٦}$

٢) $\acute{\text{ق}}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{٤\text{ع}^٢ + \text{ع} - (٤\text{س}^٢ + \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{٤(\text{ع}^٢ - \text{س}^٢) + \text{ع} - \text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to \text{س}}{\text{نها}} \dfrac{(\text{ع}-\text{س})(٤(\text{ع}+\text{س}) + ١)}{\text{ع} - \text{س}} = ٨\text{س} + ١$

إثراء

بإضافة ق (س) وطرحها في البسط ينتج:

$$\text{نهـا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \frac{\text{ق (س + ن هـ) – ق (س) + ق (س) – ق (س – ن هـ)}}{\text{هـ}}$$

$$= \text{نهـا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \frac{\text{ق (س + ن هـ) – ق (س)}}{\text{هـ}} + \text{نهـا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \frac{\text{ق (س) – ق (س – ن هـ)}}{\text{هـ}}$$

نفرض أن ن هـ = ل ومنه هـ = $\frac{\text{ل}}{\text{ن}}$

عندما هـ ← ٠ فإن ل ← ٠

$$\text{النهاية المطلوبة} = \text{نهـا}_{\text{ل} \leftarrow ٠} \frac{\text{ق (س + ل) – ق (س)}}{\frac{\text{ل}}{\text{ن}}} + \text{نهـا}_{\text{ل} \leftarrow ٠} \frac{\text{ق (س) – ق (س – ل)}}{\frac{\text{ل}}{\text{ن}}}$$

$$= \text{ن نهـا}_{\text{ل} \leftarrow ٠} \frac{\text{ق (س + ل) – ق (س)}}{\text{ل}} + \text{ن نهـا}_{\text{ل} \leftarrow ٠} \frac{\text{ق (س) – ق (س – ل)}}{\text{ل}}$$

$$= \text{ن قَ (س) + ن نهـا}_{\text{ل} \leftarrow ٠} \frac{\text{ق (س) – ق (س – ل)}}{\text{ل}}$$

نفرض أن س – ل = ع ومنه ل = س – ع

عندما ل ← ٠ فإن س ← ع

$$\text{النهاية المطلوبة} = \text{ن قَ (س) + ن نهـا}_{\text{س} \leftarrow \text{ع}} \frac{\text{ق (س) – ق (ع)}}{\text{س – ع}}$$

= ن قَ (س) + ن قَ (ع) = ٢ ن قَ (س)

علاج

أ) $\underset{\text{س}\to ٤^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٤^+}{\text{نهـا}}\ \text{س}^٢ = ١٦$ ، $\underset{\text{س}\to ٤^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٤^-}{\text{نهـا}}\ ٤\text{س} = ١٦$

$\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = ١٦$ ، $\text{ق}(٤) = ١٦ \Leftarrow$ ق متصل عند س $= ٤$

ب) $\text{ق}'_+(٤) = \underset{\text{س}\to ٤^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^٢ - ١٦}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ٤)}{\text{س} - ٤} = ٨$

$\text{ق}'_-(٤) = \underset{\text{س}\to ٤^-}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٤)}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^-}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٤\text{س} - ١٦}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٤^-}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٤(\text{س} - ٤)}{\text{س} - ٤} = ٨$

بما أن $\text{ق}'_+(٤) \neq \text{ق}'_-(٤)$ فإن $\text{ق}'(٤)$ غير موجودة.

إثراء

$\text{ق}'(٠) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(٠ + \text{هـ}) - \text{ق}(٠)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣\,\text{ق}(٠)\,\text{ق}(\text{هـ}) - \text{ق}(٠)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣\,\text{ق}(\text{هـ}) - ١}{\text{هـ}}$

إذن $١ = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣\,\text{ق}(\text{هـ}) - ١}{\text{هـ}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ق}(\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س})\,(٣\,\text{ق}(\text{هـ}) - ١)}{\text{هـ}} = \text{ق}(\text{س})\ \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{٣\,\text{ق}(\text{هـ}) - ١}{\text{هـ}} = \text{ق}(\text{س})$

علاج

$\underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \underset{\text{س}\to ٠^-}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{صفرًا} \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٠) = \text{صفرًا}$ ، إذن ق متصل عند س $= ٠$

$\text{ق}'_+(٠) = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(٠)}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠^+}{\text{نهـا}}\ \dfrac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}^٢}}$ غير موجودة.

بما أن $\text{ق}'_+(٠)$ غير موجودة فإن $\text{ق}'(٠)$ غير موجودة.

إثراء

$\text{ق}(١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(١ + \text{هـ}) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(١ + \text{هـ})}{\text{هـ}} \times \text{هـ} = ٥ \times \text{صفر} = \text{صفر}$

$\text{ق}'(١) = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(١ + \text{هـ}) - \text{ق}(١)}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(١ + \text{هـ})}{\text{هـ}} = ٥$

علاج

السؤال الأول

أ) قَ (س) = صفرًا ب) قَ (س) = ٥ س^٤ + ٣ س^٢ – ٢

السؤال الثاني

لَ (س) = قَ (س) + ٣ هـَ (س)

لَ (٢) = قَ (٢) + ٣ هـَ (٢) = ٤ + ٣ × –٥ = –١١

اثراء

١) حجم الكرة (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π نق^٣ ⟸ حَ (نق) = ٤ π نق^٢ ⟸ حَ (١٠) = ٤٠٠ π

٢) لاحظ أن قَ (٢) = نهـا (هـ ← ٠) $\frac{\text{ق (٢ + هـ) – ق (٢)}}{\text{هـ}}$ = –٩

قَ (س) = ٢ جـ س + ٣، قَ (٢) = ٤ جـ + ٣ = –٩ ومنه جـ = –٣

علاج

١) قَ (س) = – $\frac{١}{٣}$ (٧ س^٦ + ٢)

٢) لَ (س) = ٦ قَ (س) – ٥ هـَ (س)

لَ (π) = ٦ قَ (π) – ٥ هـَ (π)

٥٠ = ٦٠ – ٥ هـَ (π) ومنه هـَ (π) = ٢

إثراء

السؤال الإول

ق (س) = س^٢ $\sqrt{\text{س}^٢ – ٦\text{س} + ٩}$ = س^٢ $\sqrt{(\text{س} – ٣)^٢}$ = س^٢ | س – ٣ | ، نعيد تعريف ق (س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة

ق (س) = { س^٢ (س – ٣) ، س ≥ ٣
  – س^٢ (س – ٣) ، س < ٣

قَ₊ (٣) = نهـا (س ← ٣⁺) $\frac{\text{ق (س) – ق (٣)}}{\text{س – ٣}}$ = نهـا (س ← ٣⁺) $\frac{\text{س}^٢ \text{(س – ٣)}}{\text{س – ٣}}$ = ٩

قَ₋ (٣) = نهـا (س ← ٣⁻) $\frac{\text{ق (س) – ق (٣)}}{\text{س – ٣}}$ = نهـا (س ← ٣⁻) $\frac{– \text{س}^٢ \text{(س – ٣)}}{\text{س – ٣}}$ = –٩

بما أن قَ₊ (٣) ≠ قَ₋ (٣) فإن ق (س) غير قابل للاشتقاق عند س = ٣.

السؤال الثاني

ق (س) = س^٣ – ٢ في جوار للعدد ٢، قَ (س) = ٣ س^٢ ومنه قَ (٢) = ١٢ .

علاج

١) $ق'(س) = (٣س^٢ + ٦)(٢) + (٢س - ١)(٦س)$

$= ١٨س^٢ - ٦س + ١٢$

٢) $ق(س) = \frac{س^٢ + ١}{٢س} = \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢س}$

$ق'(س) = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢س^٢} = \frac{١}{٢}(١ - \frac{١}{س^٢})$

إثراء

$ل(س) = \frac{أ}{هـ(س)}$

$ل'(س) = \frac{-أهـ'(س)}{(هـ(س))^٢}$ ومنه $ل'(٢) = \frac{-أهـ'(٢)}{(هـ(٢))^٢} = \frac{-أ × ٣}{٤أ} = -\frac{٣}{٤}$

علاج

١) $ق'(س) = ل(س) × هـ'(س) + هـ(س) × ل'(س)$

$ق'(٢) = ل(٢) × هـ'(٢) + هـ(٢) × ل'(٢)$

$= -١ × -٥ + ١ × ٤ = ٩$

$ق'(س) = \frac{هـ(س)ل'(س) - ل(س)هـ'(س)}{(هـ(س))^٢}$

$ق'(٢) = \frac{هـ(٢)ل'(٢) - ل(٢)هـ'(٢)}{(هـ(٢))^٢} = ١ × ٤ - (-١ × -٥) = ٩$

إثراء

أ) $\frac{١}{ص} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{س} = \frac{س - ٢}{٢س}$

إذن $ص = \frac{٢س}{س - ٢}$

$ص' = \frac{(س - ٢)(٢) - (٢س)(١)}{(س - ٢)^٢} = \frac{-٤}{(س - ٢)^٢}$

ب) $ص' |_{س=١٢} = \frac{-٤}{(١٢ - ٢)^٢} = -٠،٠٤$

أسئلة العلاج

١) قَ (١) = – ١ ، قً (– ١) = – ٦

٢) قَ (س) = $\begin{cases} ١ & ،\ س > ٠ \\ –١ & ،\ س < ٠ \\ \text{غير موجودة} & ،\ س = ٠ \end{cases}$

٣) قَ $\left(\frac{٣}{٤}\right)$ = صفرًا ، قَ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ غير موجودة

أسئلة الإثراء

١) ق (س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ..... (١)

قَ (س) = ٣ أ س^{٢} + ٢ ب س + جـ ..... (٢)

قً (س) = ٦ أ س + ٢ ب ..... (٣)

قًَ (س) = ٦ أ ..... (٤)

عوض عن ق (– ١) = ٠ ، قَ (– ١) = ٣ ، قً (– ١) = – ٢ ، قًَ (– ١) = ٦

في المعادلات ١ – ٤

لتجد أن:

أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = ٤ ، د = ٣

فيكون ق (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٤ س + ٣

علاج

١) قَ(س) = – جتا س ، هـَ (س) = – جا س

٢) ق (س) = س ظتا س

قَ(س) = س (– قتا^{٢} س) + ظتا س = – س قتا^{٢} س + ظتا س

قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = – $\frac{\pi}{٤}$ $(\sqrt{٢})^{٢}$ + ١ = – $\frac{\pi}{٤}$ × ٢ + ١ = – $\frac{\pi}{٢}$ + ١

= ١ – $\frac{\pi}{٢}$

إثراء

١) ق (س) = جا^{٢} س = حا س × جا س

قَ(س) = حا س (جتا س) + حا س (جتا س)

= ٢ حا س جتا س

٢) ق (س) = $\begin{cases} \text{حا س} ، & ٠ \leq \text{س} \leq \frac{٢\pi}{٣} \\ \text{أ س + ب} ، & \frac{٢\pi}{٣} \leq \text{س} < ٢\pi \end{cases}$

ق متصل ⇐ جا$\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = أ$\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)$ + ب

$\frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٢}{٣}\pi$ أ + ب ..... (١)

كذلك قَ$_{+}\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = قَ$_{-}\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)$

جتا$\left(\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = أ ⇐ أ = – $\frac{١}{٢}$

ب = $\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{٢}{٣}\pi \times \left(-\frac{١}{٢}\right) = \frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{\pi}{٣}$

علاج

١) قَ(س) = ٩٩ (س^{٢} – ٣ س + ٥)^{٩٨} (٢ س – ٣)

٢) قَ(س) = (٦ جتاس^{٣})(٣س^{٢}) = ١٨س^{٢} جتا س^{٣}

إثراء

١) صَ = قَ $\left(\frac{\text{٢ س} - \text{١}}{\text{س} + \text{١}}\right) \times \frac{\text{٢ (س + ١)} - \text{(٢ س - ١)}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$

$= \text{حا} \left(\frac{\text{٢ س} - \text{١}}{\text{س} + \text{١}}\right)^{٢} \times \frac{\text{٢ س + ٢ - ٢ س + ١}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$

$= \text{حا} \left(\frac{\text{٢ س} - \text{١}}{\text{س} + \text{١}}\right)^{٢} \times \frac{\text{٣}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$

٢) (ع ٥ ق)َ(س) = عَ(ق (س)) . قَ(س)

(ع ٥ ق)َ (٣) = عَ(ق (٣)) . قَ(٣) = عَ(٢) قَ(٣)

لكن قَ (س) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{س} + \text{١}}}$ ⇐ قَ(٣) = $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$

عَ (س) = ٣ أ س^{٢} ⇐ عَ(٢) = ١٢ أ

∴ $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ × ١٢ أ = ١٢ ⇐ أ = $\frac{\text{١٢}}{\text{٣}}$ = ٤

علاج

أ) $\frac{د}{د س}$ [ق (س^{٢} + ١)] = قَ(س^{٢} + ١) × ٢ س

ب) $\frac{د}{د س}$ [(ق (س))^{٢} + ٣] = ٢ ق (س) قَ (س)

إثراء

١) ص = ظا س

صَ = قا^{٢} س

صً = ٢ قا س (قا س ظا س) = ٢ قا^{٢} س ظا س

ص$^{(٣)}$ = ٢ [قا^{٢} س × قا^{٢} س + ظا س (٢ قا س) (قا س ظا س)]

= ٢ [قا^{٤} س + ٢ ظا^{٢} س قا^{٢} س]

= ٢ [قا^{٤} س + ٢ قا^{٢} س (قا^{٢} س − ١)]

= ٢ [قا^{٤} س + ٢ قا^{٤} س − ٢ قا^{٢} س]

= ٢ [٣ قا^{٤} س − ٢ قا^{٢} س]

= ٦ قا^{٤} س − ٤ قا^{٢} س

٢) $\frac{د ص}{د ل} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} \times \frac{د س}{د ل}$

= (٢ ع) × ٣ × ٢ = ١٢ ع = ١٢ (٣ س + ٥)

= ٣٦ س + ٦٠ = ٣٦ (٢ ل + ٧) + ٦٠

$\frac{د ص}{د ل}\Big|_{ل = ١}$ = (٧٢ ل + ٢٥٢ + ٦٠)$\Big|_{ل = ١}$ = ٧٢ + ٢٥٢ + ٦٠ = ٣٨٤

علاج

أ) صريحة   ب) ضمنية   جـ) صريحة   د) ضمنية

إثراء

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{أ}^{٢}$

$٢\text{س} + ٢\text{ص}\,\text{صَ} = \text{صفر}$ ، $\text{صَ} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$ ، اشتق وعوض عن صَ (لاحظ أن : $(\text{صَ})^{٢} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$)

$٢ + ٢\,[\,\text{ص}\,\text{صً} + \text{صَ} \times \text{صَ}\,] = \text{صفرًا}$

$٢ + ٢\,\text{ص}\,\text{صً} = -٢\,(\text{صَ})^{٢}$

$٢\,\text{ص}\,\text{صً} = -٢\,(\text{صَ})^{٢} - ٢$

$\text{ص}\,\text{صً} = -(\text{صَ})^{٢} - ١$

$\text{صً} = \frac{-(\text{صَ})^{٢} - ١}{\text{ص}} = -\frac{[\,(\text{صَ})^{٢} + ١\,]}{\text{ص}}$

بقسمة طرفي المعادلة على $[١ + (\text{صَ})^{٢}]^{\frac{٣}{٢}}$ $\Leftarrow$

$$\frac{\text{صً}}{[١ + (\text{صَ})^{٢}]^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{\dfrac{-\left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}} + ١\right)}{\text{ص}}}{\left(١ + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{\dfrac{-(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٣})}{\text{ص}^{٣}}}{\left(١ + \frac{\text{س}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{\dfrac{-(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})}{\text{ص}^{٣}}}{\left(\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}} = \frac{-(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})}{\text{ص}^{٣}} \times \frac{\text{ص}^{٣}}{(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}$$

$$= \frac{-١}{(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\therefore \left|\frac{\text{صً}}{[١ + (\text{صَ})^{٢}]^{\frac{٣}{٢}}}\right| = \left|-\frac{١}{(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢})^{\frac{١}{٢}}}\right| = \frac{١}{\text{أ}}$$

(لأن $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{أ}^{٢}$)

علاج

١) $ق(س) = س^{\frac{٤}{٣}}$ ، $قَ(س) = \frac{٤}{٣} س^{\frac{١}{٣}}$

$قً(س) = \frac{٤}{٩} س^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{٤}{٩ س^{\frac{٢}{٣}}}$

$قً(س) = -\frac{٨}{٢٧} س^{-\frac{٥}{٣}} = \frac{-٨}{٢٧ س^{\frac{٥}{٣}}}$

قَ (٠) = ٠ ، قً (٠) غير موجودة ، قً (٠) غير موجودة ....

∴ قَ (٠) = ٠ ، $ق^{(ن)}$ (٠) غير موجودة عندما ن > ١

إثراء

١) حا (س + ص) = س ص فجد صَ

$جتا(س + ص) [١ + \frac{د ص}{د س}] = س × \frac{د ص}{د س} + ص$

$جتا(س + ص) + \frac{د ص}{د س} جتا(س + ص) = س \frac{د ص}{د س} + ص$

$\frac{د ص}{د س} [جتا(س + ص) - س] = ص - جتا(س + ص)$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{ص - جتا(س + ص)}{جتا(س + ص) - س}$

٢) $ص = \sqrt{س + \sqrt{١ + س^٢}} \Leftarrow$

$ص^٢ = س + \sqrt{١ + س^٢}$ ، $\Leftarrow ٢ ص صَ = ١ + \frac{٢ س}{٢ \sqrt{١ + س^٢}}$

$= ١ + \frac{س}{\sqrt{١ + س^٢}}$

$٢ ص صَ = \frac{\sqrt{١ + س^٢} + س}{\sqrt{١ + س^٢}} \Leftarrow$

$٢ صَ \sqrt{١ + س^٢} = \frac{\sqrt{١ + س^٢} + س}{ص} = \frac{ص^٢}{ص} = ص$

∴ $٢ \sqrt{١ + س^٢} صَ = ص$ وهو المطلوب

(٣-١) تطبيقات هندسية

علاج

١) قَ(٢) = ١١

٢) معادلة المماس ص = ٣ ، العمودي على المماس س = ٠

إثراء

١) جـ = ٣ ، ب = ٢

٢) معادلة المماس ص = ٢ أ س − أ^{٢}

٢ أ س − أ^{٢} = ٠ ومنه س = $\frac{أ}{٢}$

(٣-٢) تطبيقات فيزيائية

علاج ع (١) = ٤

إثراء أ = $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$

(٣-٣) المعدلات المرتبطة بالزمن

علاج

أ) ع = ٣ س

ح = س^{٢} × ع ⇐ ح = ٣ س^{٣}

$\frac{د ح}{د ن}$ = ٩ س^{٢} $\frac{د س}{د ن}$ ⇐ $\frac{د ح}{د ن}$ = ١٤٤ سم^{٣}/ ث .

ب) م = ٢ س^{٢} + ٤ س ع ومنه م = ١٤ س^{٢}

$\frac{د م}{د ن}$ = ٢٨ س $\frac{د س}{د ن}$ ⇐ $\frac{د م}{د ن}$ = ٥٤ سم^{٢}/ ث .

جـ) نق = ٤

إثراء

افرض أن نقطة التقاطع مع محور السينات (أ ، ٠) ، نقطة التماس (س ، ص)

من خلا ل الرسم المماس عمودي على نصف القطر عند نقطة التماس (نظرية)

(م ب)^{٢} = (جـ م)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

أ^{٢} = (س − أ)^{٢} + ص^{٢} + ١

أ^{٢} = س^{٢} − ٢ أ س + أ^{٢} + ص^{٢} + ١ لكن س^{٢} + ص^{٢} = ١

أ^{٢} = −٢ أ س^{٢} + أ^{٢} + ٢

٢ أ س = ٢ ⇐ س = $\frac{١}{أ}$

∴ $\frac{د س}{د ن}$ = $\frac{-١}{أ^{٢}}$ $\frac{د أ}{د ن}$

٣ = $\frac{-١}{٤}$ $\frac{د أ}{د ن}$ ⇐ $\frac{د أ}{د ن}$ = $\frac{-١}{١٢}$ سم/ث .

(٣ – ٤) التزايد والتناقص

علاج

١) متناقص في الفترة [–٣ ، ٠) ومتزايد في الفترة [٠ ، ٢]

إثراء

ارشاد : ق متزايد نعني قَ (س) > صفر ، متناقص قَ (س) < صفر

(٣ – ٥) القيم القصوى

علاج

أ) (٢ ، ٠) ، ب) (–٢ ، ٠)

إثراء

١) ق (س) = س^{٢} – ٤ س + ٧

٢) صغرى محلية لكل س ∋ (١ ، ٣) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٨)

عظمى محلية لكل س ∋ (١ ، ٣) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٨)

عظمى مطلقة لكل س ∋ [٦ ، ٨]

صغرى مطلقة لكل س ∋ [١ ، ٣]

(٣ – ٦) التقعر

علاج

أ) مقعر للاعلى في الفترتين (–∞ ، –٣] ،[$\frac{-١}{٣}$ ، ∞) وللاسفل [–٣ ، $\frac{-١}{٣}$]

للاقتران نقط انعطاف عند (–٣ ، ق (–٣)) ، ($\frac{-١}{٣}$ ، ق ($\frac{-١}{٣}$))

ب) مقعر للاسفل في الفترتين (–∞ ، –٦] ، [٦ ، ∞)

لا يوجد نقط انعطاف

إثراء

أ) مقعر للاعلى في الفترة (٠ ، ∞) وللاسفل في الفترة (–∞ ، ٠)

ب) لا يوجد نقط انعطاف

(٣ – ٧) تطبيقات القيم القصوى

علاج

١) س = ٢٠ ، ص = ٢٠

٢) المساحة = الطول × العرض

م = س × ص

لكن ل = ٢س + ٢ص   ومنه ص = $\frac{\text{ل}}{٢}$ – س   ∴ م = $\frac{\text{ل}}{٢}$ س – س^{٢}

مَ = $\frac{١}{٢}$ ل – ٢س

مَ = ٠ ⇐ س = $\frac{١}{٤}$ ل

مً (س) = –٢ ⇐ مً ($\frac{١}{٤}$ ل) < صفر ∴ عظمى

∴ تكون المساحة اكبر ما يمكن عندما س = $\frac{١}{٤}$ ل ، ص = $\frac{١}{٢}$ ل – $\frac{١}{٤}$ ل = $\frac{١}{٤}$ ل

بما ان س = ص ⇐ الشكل مربع

اثراء

افرض أن نصف قطر الكرة = ر ، نصف قطر المخروط نق . وارتفاعه ع

ح = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

لكن ر^{٢} = نق^{٢} + (ع – ر)^{٢} ومنه نق^{٢} = ٢ رع – ع^{٢}

∴ ح = $\frac{١}{٣}$ π (٢ رع^{٢} – ع^{٣})

حَ = $\frac{١}{٣}$ π (٤ رع – ٣ ع^{٢})

حَ = صفر ⇐ ٤ رع – ع^{٢} = ٠ ومنه ع = ٠ او ع = $\frac{٤}{٣}$ ر

حً (ع) = $\frac{١}{٣}$ π (٤ر – ٦ ع)

حً ($\frac{٤}{٣}$ ر) = $\frac{١}{٣}$ π (٤ ر – ٨ ر) < صفر ∴ عظمى عند ع = $\frac{٤}{٣}$ ر

ح = $\frac{١}{٣}$ π [٢ر × ($\frac{٤}{٣}$ ر)^{٢} – ($\frac{٤}{٣}$ ر)^{٣}]

= $\frac{١}{٣}$ π ($\frac{٣٢}{٩}$ ر^{٣} – $\frac{٦٤}{٢٧}$ ر^{٣})

= $\frac{١}{٣}$ π × $\frac{٣٢}{٢٧}$ ر^{٣} = $\frac{٨}{٢٧}$ × ($\frac{٤}{٣}$ π ر^{٣}) = $\frac{٨}{٢٧}$ حجم الكرة

(٤ – ١): الاقتران البدائي

إثراء

$\text{ف} = \int (٣\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن} + ٢)\ \text{دن}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢} + ٢\text{ن} + \text{جـ}$

$\text{ف}(١) = ١٠ \Leftarrow \text{جـ} = ٦ \Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \text{ن}^{٣} + \text{ن}^{٢} + ٢\text{ن} + ٦$

$\text{ف}(٣) = (٣)^{٣} + (٣)^{٢} + ٢ \times ٣ + ٦ = ٤٨\text{م}$

٢) انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال الثامن)

(٤ – ٢): قواعد التكامل غير المحدود

إثراء

أ) ١) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س} - \text{ظا}^{٢}\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\ \text{دس} = \int \text{س}^{-\frac{١}{٢}}\ \text{دس} = ٢ \times \text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ} = ٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

ب) ١) $\int (\text{جا}\frac{\text{س}}{٣} + \text{جتا}\frac{\text{س}}{٣})^{٢}\ \text{دس} = \int (\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢} + ٢\,\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢} + \text{جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢})\ \text{دس}$

$= \int (١ + \text{جاس})\ \text{دس} = \text{س} - \text{جتاس} + \text{جـ}$

(٤ – ٣): التكامل المحدود

إثراء

$$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{قاس} - \text{ظتاس})^{٢}\ \text{دس} = \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{قا}^{٢}\text{س} - ٢\ \text{قاس ظاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س})\ \text{دس}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} (٢\text{قا}^{٢}\text{س} - ٢\ \text{قاس ظاس} - ١)\ \text{دس}$$

$$= ٢\ \text{ظاس} - ٢\text{قاس} - \text{س}\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= (٢ - ٢\sqrt{٢} - \frac{\pi}{٤}) - (\frac{٢}{\sqrt{٢}} - \frac{٢}{\sqrt{٣}} - \frac{\pi}{٦}) = \frac{\pi}{١٢}$$

(٤ – ٤): المعادلات التفاضلية

إثراء

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = \text{٢ن}$

□ دع = □ ٢ن دن

ع = ن^{٢} + جـ$_{١}$

ع (٠) = ٦ ⇐ جـ$_{١}$ = ٦ إذن ع (ن) = ن^{٢} + ٦

□ دف = □ (ن^{٢} + ٦) دن

ف = $\frac{١}{٣}$ ن^{٣} + ٦ن + $\frac{١٧}{٢}$

ف (١) = ١٢ ⇐ جـ$_{٢}$ + $\frac{١٧}{٣}$

ف (ن) = $\frac{١}{٣}$ + ٦ ن + $\frac{١٧}{٣}$ ومنه ف (٣) = $\frac{٦٨}{٣}$ م

(٤ – ٥): التكامل بالتعويض

إثراء

١) انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال الثالث) .

٢) انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال الرابع) .

(٤ – ٦): التكامل بالاجزاء

إثراء

١) □ جا $\sqrt{\text{س} + ١}$ جتا^{٣} $\sqrt{\text{س}+١}$ دس = □ جا ص جتا^{٣}ص × ٢ص د ص (بفرض ص = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ⇐ ص^{٢} = س + ١ ⇐ ٢ ص د ص = د س)

والآن بأمكانك حل السؤال بالرجوع إلى ملحق إجابات الأسئلة (السؤال الأول فرع (و)).

٢) انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال الأول فرع (د)) .

(٤ – ٧): حساب المساحة باستخدام التكامل

إثراء

١) انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال السادس) .

٢) انظر ملحق إجابات الأسئلة (الاختبار الذاتي (السؤال الخامس) .

٣): انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال الخامس) .

(٤ – ٨): اقتران اللوغاريتم الطبيعي

إثراء

١) □ قا هـ × $\frac{\text{قاهـ + ظاهـ}}{\text{قاهـ + ظاهـ}}$ دهـ = □ $\frac{\text{قا}^{٢}\text{هـ + قاهـ ظاهـ}}{\text{قاهـ + ظاهـ}}$ دهـ

= لو | قاهـ + ظاهـ | + جـ

٢) انظر ملحق إجابات الأسئلة (مراجعة للسؤال الأول (ط)) .

(٤ – ٩): الاقتران الأسي الطبيعي

١) انظر ملحق إجابات الأسئلة (مراجعة للسؤال الأول (ل) .

٢) انظر ملحق إجابات الأسئلة (السؤال السابع).

(٤ – ١٠)

إثراء

١) انظر ملحق إجابات الأسئلة (مراجعة السؤال (الثامن))

٢) $\int \frac{\text{١}}{\text{س}(\sqrt[3]{\text{س}}-\text{١})}\,\text{دس}$ افرض $\text{ص}=\sqrt[3]{\text{س}} \Leftarrow \text{ص}^3=\text{س} \Leftarrow \text{٣ ص}^2\,\text{د ص}=\text{دس}$

$$\int \frac{\text{١}}{\text{س}(\sqrt[3]{\text{س}}-\text{١})}\,\text{دس} = \int \frac{\text{٣ ص}^2\,\text{دص}}{\text{ص}^3(\text{ص}-\text{١})} = \int \frac{\text{٣}}{\text{ص}(\text{ص}-\text{١})}\,\text{دص}$$

$$\frac{\text{٣}}{\text{ص}(\text{ص}-\text{١})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}-\text{١}} = \frac{\text{أ}(\text{ص}-\text{١})+\text{ب}}{\text{ص}(\text{ص}-\text{١})}$$

$\text{٢} = \text{أ}(\text{ص}-\text{١}) + \text{ب ص} \Leftarrow \text{أ}=-\text{٢}،\ \text{ب}=\text{٢}$

إذن $\int \frac{\text{٣}}{\text{ص}(\text{ص}-\text{١})}\,\text{دص} = -\text{٣}\int \frac{\text{١}}{\text{ص}}\,\text{دص} + \text{٣}\int \frac{\text{١}}{\text{ص}-\text{١}}\,\text{دص} = -\text{٣ لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{٣ لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-\text{١}| + \text{جـ}$

$$= -\text{٣ لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[3]{\text{س}}| + \text{٣ لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[3]{\text{س}}-\text{١}| + \text{جـ}$$

٣) $\int \frac{\sqrt{\text{س}+\text{٢}}}{\text{س}+\text{١}}\,\text{د س}$

افرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+\text{٢}} \Leftarrow \text{ص}^2 = \text{س}+\text{٢} \Leftarrow \text{ص}^2-\text{١} = \text{س}+\text{١}$ ، $\text{٢ص دص} = \text{دس}$

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}+\text{٢}}}{\text{س}+\text{١}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{٢ص}^2}{\text{ص}^2-\text{١}}\,\text{دص} = \int \text{٢دص} + \int \frac{\text{٢}}{\text{ص}^2-\text{١}}\,\text{دص}$$

$$\begin{array}{r|l} \text{٢} & \text{ص}^2-\text{١} \\ \hline \text{٢ص}^2 & \\ -\ \text{٢ص}^2-\text{٢} & \\ \hline \text{٢} & \end{array}$$

$$= \text{٢ص} + \int \frac{\text{٢}}{(\text{ص}-\text{١})(\text{ص}+\text{١})}\,\text{دص}$$

$$\frac{\text{٢}}{(\text{ص}-\text{١})(\text{ص}+\text{١})} = \frac{\text{أ}}{\text{ص}-\text{١}} + \frac{\text{ب}}{\text{ص}+\text{١}}$$

$\text{٢} = \text{أ}(\text{ص}+\text{١}) + \text{ب}(\text{ص}-\text{١}) \Leftarrow \text{أ}=\text{١}\ ،\ \text{ب}=-\text{١}$

إذن $\int \frac{\text{٢ ص}^2}{\text{ص}^2-\text{١}}\,\text{د ص} = \text{٢ص} + \int \frac{\text{١}}{\text{ص}-\text{١}}\,\text{دص} - \int \frac{\text{١}}{\text{ص}+\text{١}}\,\text{دص}$

$$= \text{٢ص} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-\text{١}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+\text{١}| + \text{جـ}$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{س}+\text{٢}} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}+\text{٢}}-\text{١}| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt{\text{س}+\text{٢}}+\text{١}| + \text{جـ}$$

(٥-٢) المحل الهندسي

علاج $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ٩$ وهو عبارة عن دائرة

إثراء $\frac{س^٢}{١٠٠} + \frac{ص^٢}{٧٥} = ١$

(٥-٣) الدائرة

علاج أ) $س^٢ + ص^٢ = ٩$

ب) $(س + ٣)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٩$

إثراء

$(س - ٤)^٢ + ص^٢ = ١$

(٥-٤) القطع المكافيء

علاج

١) أ) البؤرة (٦ ، ٠) ، الرأس (٠ ، ٠) ، معادلة الدليل س = -٦ ، معادلة المحور ص = ٠

ب) البؤرة (-٥ ، ٠) ، الرأس (٠ ، ٠) ، معادلة الدليل س = ٥ ، معادلة المحور ص = ٠

جـ) البؤرة (٠ ، ٤) ، الرأس (٠ ، ٠) ، معادلة الدليل ص = -٤ ، معادلة المحور س = ٠

د) البؤرة (٠ ، -١) ، الرأس (٠ ، ٠) ، معادلة الدليل ص = ١ ، معدالة المحور س = ٠

٢) أ) جـ) $ص^٢ = ١٢$ س ب) $ص^٢ = -١٢$س

٣) أ) البؤرة (١ ، ٥) ، الرأس (-٣ ، ٥) ، معادلة الدليل س = -٧ ، المحور ص = ٥

ب) البؤرة (-٢ ، -٢) ، الرأس (٢ ، -٢) ، معادلة الدليل ص = ٢ ، المحور س = -٢

(٥-٥) القطع الناقص

علاج

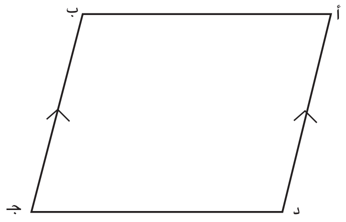
١) أ) المركز (٠ ، ٠) ، البؤرتان (±٣ ، ٠) ، الراسان (±٥ ، ٠) طول المحور الاكبر ٢ أ = ١٠ ، طول المحور الاصغر ٢ ب = ٨

ب) المركز (٠ ، ٠) ، البؤرتان (٠ ، ± ٨) ، الرأسان (٠ ، ± ١٠) طول المحور الاكبر ٢ أ = ٢٠ ، طول المحور الاصغر ٢ ب = ١٢

٢) $\frac{س^٢}{١٠٠} + \frac{ص^٢}{٩١} = ١$ ، $\frac{ص^٢}{٢٠} + \frac{س^٢}{٣٦} = ١$

أ) المركز (٢ ، ٤)، الراسين (٢ ± ٩ ، ٤) البؤرتان ($٢ \pm ٣\sqrt{٥}$ ، ٤) طول المحور الاكبر ٢ أ = ٨ ، طول المحور الاصغر ٢ ب = ١٢

ب) المركز (١ ، ٢) ، الراسين (١ ± ٦ ، ٢) البؤرتان ($١ \pm \sqrt{٥}$ ، ٢) طول المحور الاكبر ٢ أ = ٢ ، طول المحور الاصغر ٢ ب = ٨



(٦ – ١) البناء الرياضي للهندسة الفضائية

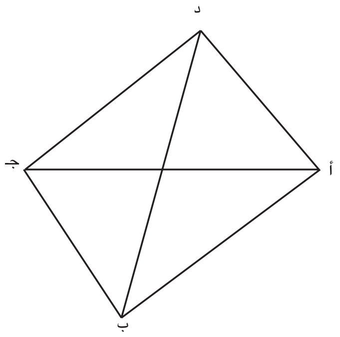
البرهان:

إثراء : أ ب// جـ د، ∴ فهما يعنيان مستوى وليكن س. (نتائج مسلمة ٣)

∴ النقط الأربع أ، ب، جـ، د تقع في المستوى

∴ أ د ، ب جـ، يقعان في المستوى (س)

∴ أضلاع متوازي الأضلاع الأربعة تقع في المستوى س



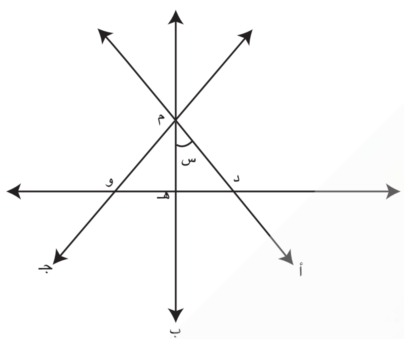
(٦–٢) أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء

إثراء : القطع هي

(أ د ، ب جـ)، (أ ب ، د جـ) ، (أ جـ ، ب د)

أوضاع المستقيمات والمستويات (٦–٢)

إثراء



البرهان: (انظر الشكل المجاور)

بما أن م أ ، م ب مستقيمات متقاطعان

∴ يعينان مستوى وليكن س (نتائج مسلمة ٣) وبما أن د ∈ م أ

∴ د ∈ المستوى س

بما أن هـ ∈ م ب ∴ هـ ∈ المستوى س ، إذن د هـ ممتدّ من كلتا جهتيه واقع في المستوى س .... ①

وبما أن (و) تقع على امتداد د هـ ∴ نقطة (و) واقعة في المستوى س

وبما أن (م) واقعة في المستوى س ∴ م و وممتدّ من كلتا جهتيه، واقع في المستوى س

∴ أ جـ واقع في المستوى (س).... ②

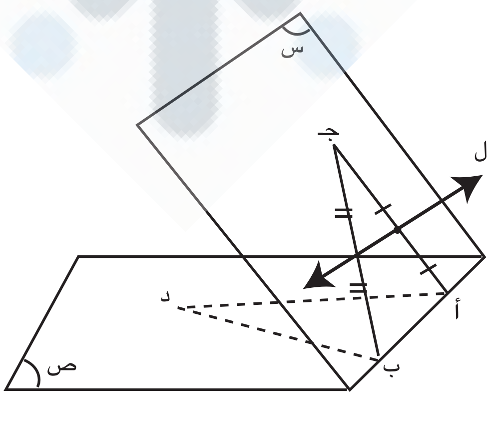
من ① ،② ينتج أن المستقيمات الأربعة تقع في مستوى واحد.

(٦–٣) نظريات في التوازي

علاج : (أ) خطأ

(ب) خطأ

إثراء

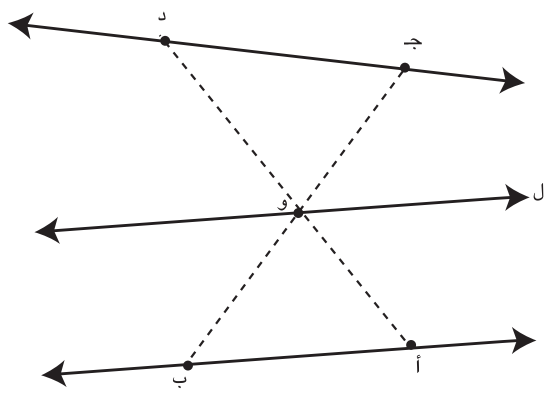


البرهان:

نفرض أن مستوى أ ب جـ هو س، مستوى أ ب د هو ص

بما أن أ ب ضلع مشترك، ∴ أ ب يقع على خط تقاطع المستويين س ، ص

بما أن المستقيم ل ينصف كلاً من أ جـ ، ب جـ



∴ ل // $\overleftrightarrow{أب}$ وبما أن $\overline{أب}$ ∋ المستوى س ، $\overline{أب}$ ∋ المستوى ص

∴ ل // المستوى ص (**نظرية**)

(٦ – ٣) نظريات في التوازي:

علاج (أ) صحيحة (ب) خطأ

إثراء : البرهان:

المستويان و أ ب، و جـ د يشتركان في النقطة و،

∴ هما يتقاطعان في مستقيم (مسلمة ٦) وليكن هذا المستقيم هو $\overleftrightarrow{ل}$ بما أن $\overleftrightarrow{أب}$ // المستوى و حـ د ، $\overleftrightarrow{أب}$ يقع في المستوى أ ب و

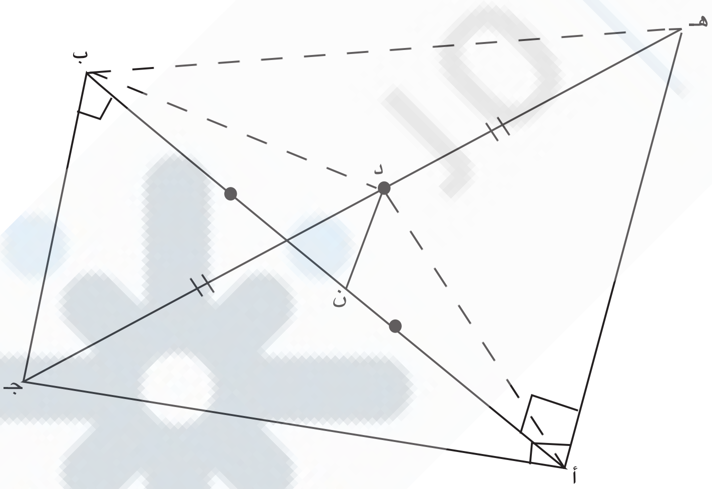
∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // خط تقاطع المستويين (**نظرية ٣**)

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{ل}$ ... (١)

وكذلك بالطريقة نفسها $\overleftrightarrow{جـ د}$ // $\overleftrightarrow{ل}$ ... (٢) (**نظرية ٣**) من (١) ، (٢) $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$

(٦–٤) التعامد

إثراء : المطلوب إثبات أن: $\overleftrightarrow{د ن}$ ⊥ $\overleftrightarrow{أ ب}$



العمل : صل : أ د ، د ب ، هـ ب

البرهان : بما أن $\overleftrightarrow{أ هـ}$ ⊥ مستوى المثلث أ ب جـ

∴ $\overline{هـ أ}$ ⊥ $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{هـ أ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{هـ أ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ،

المثلث هـ أ جـ قائم الزاوية في أ

$\overline{أ د}$ تصل بين رأس القائمة (أ) ومنصف الوتر $\overline{هـ جـ}$

∴ أ د = هـ د = د جـ ... (١)

كذلك $\overline{جـ ب}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ ب}$ ⊥ $\overline{أ هـ}$

∴ $\overline{جـ ب}$ ⊥ المستوى أ هـ ب

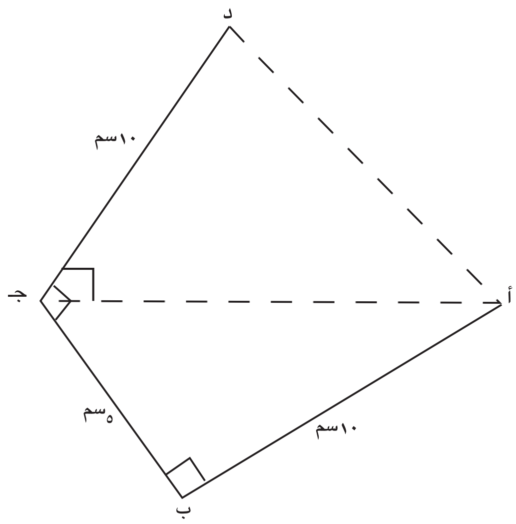
∴ قياس الزاوية جـ ب هـ = قائمة

∴ $\overline{ب د}$ تصل من رأس القائمة ب إلى منتصف الوتر $\overline{هـ حـ}$

∴ ب د = هـ د = د جـ ... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن أ د = د ب .

(٦ – ٤) التعامد



∴ المثلث أ د ب متساوي الساقين

$\overline{\text{د ن}}$ تصل بين رأس المثلث أ د ب ، ومنتصف القاعدة $\overline{\text{أ ب}}$

∴ $\overline{\text{د ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ أي أن $\overleftrightarrow{\text{د ن}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وهو المطلوب .

علاج :

البرهان: $\overline{\text{د جـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

∴ ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ د) = ٩٠°

في المثلث أ ب جـ : (أجـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2 = (١٠)^2 + (٥)^2 = ١٢٥

∴ أ جـ = $\sqrt{١٢٥}$ = ٥$\sqrt{٥}$سم

كذلك (أ د)^2 = (أ جـ)^2 + (د جـ)^2 = $(٥\sqrt{٥})^2$ + (١٠)^2

= ١٢٥ + ١٠٠ = ٢٢٥

∴ أ د = $\sqrt{٢٢٥}$ = ١٥ سم

(٦–٤) التعامد

إثراء

بما أن الزاوية أ $\hat{\text{هـ}}$ د هي الزاوية الزوجية بين المستويين أ ب جـ، د ب جـ

إذن $\overline{\text{ب جـ}}$ هو حرف الزاوية

إذن $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$، كذلك $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

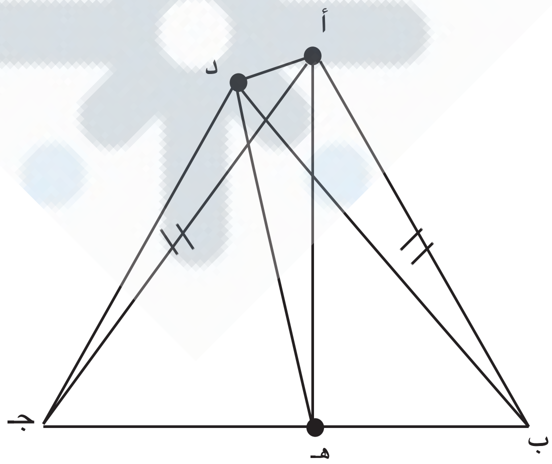
في المثلث أ ب جـ المتساوي الساقان (أ ب = أ جـ فرضًا) $\overline{\text{أ هـ}}$ عمود على القاعدة $\overline{\text{ب جـ}}$

إذن ب هـ = هـ جـ

∴ ينطبق المثلثان د ب هـ ، د هـ جـ القائما الزاوية بضلعين وزاوية

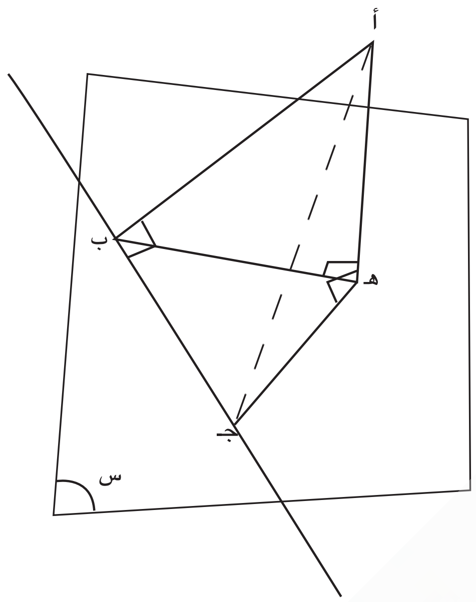
(ب هـ = هـ جـ ، زاوية د هـ ب = زاوية د هـ جـ ، كل منهما قائمة، $\overline{\text{د هـ}}$ مشترك)

ينتج من الانطباق د ب = د جـ وهو المطلوب .



(٦-٥) الإسقاط العمودي

علاج



البرهان : $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ المستوى س

∴ $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ جـ}}$، $\overline{\text{أهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ ب}}$

في المثلث أ هـ جـ القائم الزاوية في هـ

(هـ جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ − (أ هـ)^٢ ... ①

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، لأن $\overline{\text{أ هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ (أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ... ②

من ① ، ②

(هـ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ − (أ هـ)^٢

= [(أ ب)^٢ − (أ هـ)^٢] + (ب جـ)^٢

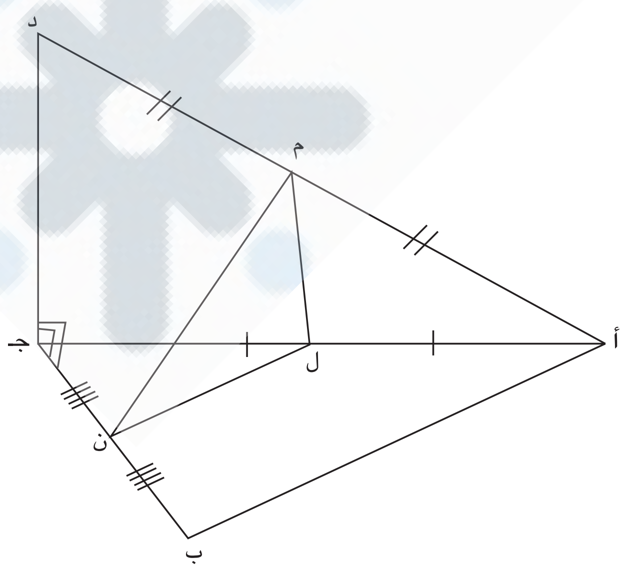
= (هـ ب)^٢ + (ب جـ)^٢، لأن المثلث أ هـ ب قائم الزاوية في هـ

∴ المثلث هـ ب جـ قائم الزاوية في ب (عكس نظرية فيثاغورس)

∴ المسقط $\overline{\text{هـ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ وهو المطلوب

(٦-٥) الإسقاط العمودي

إثراء



المطلوب: أثبات أن الزاوية أ ب جـ = قائمة

البرهان :

$\overline{\text{م ل}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ ($\overline{\text{م ل}}$ تصل بين منتصفي ضلعين في المثلث أ جـ د)

∴ زاوية أ ل م = قائمة وبما أن $\overline{\text{دجـ}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ

∴ $\overline{\text{م ل}}$ ⊥ المستوى أ ب جـ (نتيجة سابقة)

$\overline{\text{م ن}}$ مائل ، $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ (بالفرض)

∴ المسقط $\overline{\text{ل ن}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

أي أن زاوية ل ن جـ = قائمة

وبما أن $\overline{\text{ل ن}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ($\overline{\text{ل ن}}$ يصل بين منتصفي ضلعين في مثلث)

∴ زاوية أ ب جـ = قائمة **وهو المطلوب**
(بالتناظر)

ملحق

٢

أدوات التقويم

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
قائمة الشطب (٢ – ١)

تقويم امتلاك الطالب للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	التقدير: نعم	التقدير: لا
١	**نهاية اقتران عند نقطة** • يمثّل اقترانًا بيانيًّا. • يبدي فهمًا لنهاية اقتران عند نقطة. • يستعمل الرموز للتعبير عن النهاية. • يظهر فهمًا للنهاية من اليمين ومن اليسار. • يعيّن قيمة اقتران عند نقطة بيانياً. • يميّز بين نهاية اقتران عند نقطة، وقيمة الاقتران عند تلك النقطة إن وجدت.		
٢	**نظريات النهايات** • يعبرّ عن نظريات النهايات بعبارات مكافئة (وصف بالكلام). • يعيّن قيمة النهاية بتطبيق النظريات. • يطبّق النظريات المناسبة لحساب النهايات. • يتأكّد من توفر شروط النظرية لتطبيقها.		
٣	**نظريات اقترانات كسرية** • يبدأ بالتعويض المباشر عند حساب نهاية اقتران نسبي عند نقطة. • يجد نهاية اقتران نسبي عند نقطة مثل أ حيث أ صفر لمقام الاقتران. • يجد نهاية اقتران متشعب عند نقطة. • يجد نهاية اقتران يشمل الجذور بتوظيف الضرب بالمرافق.		
٤	**نهاية الاقترانات الدائرية** • يعيّن قيمة النهاية عند نقطة بيانيًّا للاقترانات جاس ، جتاس ، ظاس. • يتوصل للحقيقة $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ من منحنى $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$. • يوظّف النظرية $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ والنتائج المتعلقة بها في تعيين نهاية اقتران عند نقطة. • يجد قيمة النهاية عند نقطة لاقترانات دائرية بتوظيف المتطابقات المثلثية المناسبة.		
٥	**النهاية في ما لا نهاية** • يفسّر مفهوم نهاية اقتران عند م س ← ∞ أو س ← -∞ . • يوظّف النظرية $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}} = ١$ بدراسة قيم الاقتران ق (س) $= \frac{١}{\text{س}}$. • يستنتج أن $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}} = ١$ بدراسة قيم الاقتران ق (س) $= \frac{١}{\text{س}}$. • يوظف $\underset{س \leftarrow \pm\infty}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{س}} = ١$ لحساب نهاية اقتران في المالانهاية لاقتران نسبي. • يجد النهاية في المالانهاية لاقتران نسبي.		

٦	**الاتصال عند نقطة** • يفسّر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا. • يحدّد فيما إذا كان اقتران متصلاً عند نقطة من خلال منحنى الاقتران. • يحدّد فيما إذا كان اقتران متصلاً عند نقطة بتطبيق تعريف الاتصال عند نقطة. • يبرهن نظريات الاتصال.			
٧	**الاتصال على فترة** • يفسّر مفهوم اتصال اقتران على فترة. • يفسّر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليمين. • يفسّر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليسار. • يكتب الصيغة الرمزية للاتصال عند نقطة من اليمين إلى اليسار. • يحدّد فيما إذا كان اقتران معلوم متصل على فترة.			
٨	**مهارات التعلم الأساسية** • يجري العمليات الروتينية. • يستخدم النمذجة والرموز الرياضية. • يفكّر تفكيرًا منطقيًّا. • يحل المشكلات.			
٩	**الكفايات العامة** • يحترم النظام ويتقيد بالتعليمات. • يحافظ على البيئة الصفية والممتلكات العامة. • يتقبل الآخرين. • يراعي قيود السلامة العامة. • يظهر المبادرة ويتعاون مع الآخرين. • يحرص على التعلم الذاتي والمستمر.			

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال
سلّم تقدير (٢ – ١)

تقويم امتلاك الطالب للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	التقدير		
		ممتاز	جيد	مقبول
١	**نهاية اقتران عند نقطة** • أمثل اقترانًا بيانيًّا. • أبدي فهمًا لنهاية اقتران عند نقطة. • أستعمل الرموز للتعبير عن النهاية. • أظهر فهمًا للنهاية من اليمين ومن اليسار. • أعيّن قيمة اقتران عند نقطة بيانياً. • أميزّ بين نهاية اقتران عند نقطة، وقيمة الاقتران عند تلك النقطة إن وجدت.			
٢	**نظريات النهايات** • أعبرّ عن نظريات النهايات بعبارات مكافئة (وصف بالكلام). • أعيّن قيمة النهاية بتطبيق النظريات. • أطبّق النظريات المناسبة لحساب النهايات. • أتأكّد من توفر شروط النظرية لتطبيقها.			
٣	**نظريات اقترانات كسرية** • أبدأ بالتعويض المباشر عند حساب نهاية اقتران نسبي عند نقطة. • أجد نهاية اقتران نسبي عند نقطة مثل أ حيث أ صفر لمقام الاقتران. • أجد نهاية اقتران متشعب عند نقطة. • أجد نهاية اقتران يشمل الجذور بتوظيف الضرب بالمرافق.			
٤	**نهاية الاقترانات الدائرية** • أعيّن قيمة النهاية عند نقطة بيانيًّا للاقترانات جاس ، جتاس ، ظاس. • أتوصل للحقيقة $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ من منحنى $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$. • أوظّف النظرية $\underset{س\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$ والنتائج المتعلقة بها في تعيين نهاية اقتران عند نقطة. • أجد قيمة النهاية عند نقطة لاقترانات دائرية بتوظيف المتطابقات المثلثية.			
٥	**النهاية في ما لا نهاية** • أفسّر مفهوم نهاية اقتران عند م س $\leftarrow \infty$ أو س $\leftarrow -\infty$. • أوظّف النظرية $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} = ١$ بدراسة قيم الاقتران ق (س) $= \frac{١}{\text{س}}$. • أستنتج أن $\underset{س\to\infty}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} = ١$ بدراسة قيم الاقتران ق (س) $= \frac{١}{\text{س}}$. • أوظّف $\underset{س\to\pm\infty}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}} = ١$ لحساب نهاية اقتران في المالانهاية لاقتران نسبي. • أجد النهاية في المالانهاية لاقتران نسبي.			

سلّم تقدير (٢ – ١)

٦	**الاتصال عند نقطة** • أفسّر مفهوم الاتصال عند نقطة هندسيًّا. • أحدّد فيما إذا كان اقتران متصلاً عند نقطة من خلال منحنى الاقتران. • أحدّد فيما إذا كان اقتران متصلاً عند نقطة بتطبيق تعريف الاتصال عند نقطة. • أبرهن نظريات الاتصال.				
٧	**الاتصال على فترة** • أفسّر مفهوم اتصال اقتران على فترة. • أفسّر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليمين. • أفسّر مفهوم اتصال اقتران عند نقطة من اليسار. • أحدّد فيما إذا كان اقتران معلوم متصلاً على فترة.				
٨	**مهارات التعلم الأساسية** • أجري العمليات الروتينية. • أستخدم النمذجة والرموز الرياضية. • أفكّر تفكيرًا منطقيًّا. • أحل المشكلات.				
٩	**الكفايات العامة** • أحترم النظام وأتقيد بالتعليمات. • أحافظ على البيئة الصفية والممتلكات العامة. • أتقبل الآخرين. • أراعي قيود السلامة العامة. • أظهر المبادرة وأتعاون مع الآخرين. • أحرص على التعلم الذاتي والمستمر.				

الوحدة الثانية: التفاضل
قائمة الشطب (٢ – ٢)

تقويم امتلاك الطالب للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	نعم	لا
١	**متوسط التغير** • يفسّر مفهوم التغير. • يميّز بين التغير الموجب والتغير السالب. • يعرّف متوسط التغير في فترة. • يفسّر مفهوم متوسط التغير هندسيًّا . • يجد متوسط التغير جبريًّا. • يجد متوسط التغير من خلال منحنى الاقتران . • يفسّر المدلول الفيزيائي لمتوسط التغير. • يحلّ مسائل تطبيقية هندسية وفيزيائية على متوسط التغير.		
٢	**المشتقة الأولى** • يفسّر المشتقة الأولى كمعدل للتغير. • يعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة. • يفسّر المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًّا وفيزيائيًّا. • يجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف. • يبحث قابلية اشتقاق اقتران على فترة مغلقة. • يحلّ مسائل تطبيقيّة هندسية وفيزيائية على المشتقة الأولى.		
٣	**الاتصال والاشتقاق** • يفسّر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية الاشتقاق عند هذه النقطة. • يفسّر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة. • يدرس قابلية الاشتقاق لاقتران عند نقطة تشعب باستخدام تعريف المشتقة من اليمين ومن اليسار. • يحدّد مجال المشتقة من خلال بحث قابلية الاشتقاق على مجال الاقتران. •يبرهن النظرية الخاصة بالعلاقة بين الاشتقاق والاتصال عند نقطة.		
٤	**قواعد الاشتقاق (١)** • يثبت أن مشتقة اقتران ثابت تساوي صفرًا باستخدام تعريف المشتقة. • يثبت أن المشتقة ق (س) = س^{ن} هي قَ (س) = ن س$^{ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب. • يثبت أن مشتقة ثابت مضروب في اقتران تساوي الثابت مضروبًا في مشتقة الاقتران. • يثبت قاعدة مشتقة حاصل جمع (طرح) اقترانين. • يجد مشتقة اقتران باستخدام قواعد الاشتقاق.		

الوحدة الثانية: التفاضل
قائمة الشطب (٢ – ٢)

٥	**قواعد الاشتقاق (٢)** • يثبت قاعدة اشتقاق حاصل ضرب اقترانين. • يثبت قاعدة اشتقاق خارج قسمة اقترانين. • يثبت أن مشتقة $\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{أ}}{\text{م}(\text{س})}$ حيث $\text{م}(\text{س}) \neq ٠$ هي $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-\text{أ}\,\text{م}'(\text{س})}{(\text{م}(\text{س}))^{٢}}$. • يثبت أن مشتقة $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، $\text{س} \neq ٠$ ، ن عدد سالب هي: $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ • يجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين باستخدام قاعدة الضرب. • يجد مشتقة خارج قسمة اقترانين باستخدام قاعدة القسمة. • يجد مشتقة اقترانات متشعبة.		
٦	**المشتقات العليا** • يجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الرابعة.		
٧	**مشتقة الاقترانات الدائرية** • يتعرّف مشتقات الاقترانات الدائرية. • يجد مشتقات الاقترانات الدائرية.		
٨	**قاعدة السلسلة** • يتعرّف قاعدة مشتقة تركيب اقترانين. • يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين. • يستخدم قاعدة السلسلة بصيغها المختلفة في حل تمارين ومسائل متنوعة.		
٩	**الاشتقاق الضمني** • يتعرّف العلاقة الضمنية. •يحسب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية. • يجد المشتقات العليا لعلاقة ضمنية حتى المشتقة الرابعة.		
١٠	**مهارات التعلم الأساسية** • يجري العمليات الروتينية. • يستخدم النمذجة والرموز الرياضية. • يفكر تفكيرًا منطقيًّا. • يحل المشكلات.		
١١	**الكفايات العامة** • يحترم النظام ويتقيد بالتعليمات. •يحافظ على البيئة الصفية والممتلكات العامة. • يتقبل الآخرين. • يراعي قواعد السلامة العامة. • يظهر المبادرة ويتعاون مع الآخرين. • يحرص على التعلم الذاتي والمستمر.		

الوحدة الثانية: التفاضل
سلّم تقدير (٢ – ٢)

التقويم الذاتي للطالب حول مدى امتلاكه للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	التقدير: ممتاز	جيد	مقبول
١	**متوسط التغير** • أفسّر مفهوم التغير. • أميّز بين التغير الموجب والتغير السالب. • أعرّف متوسط التغير في فترة. • أفسّر مفهوم متوسط التغير هندسيًا. • أجد متوسط التغير جبريًّا. • أجد متوسط التغير من خلال منحنى الاقتران. • أفسّر المدلول الفيزيائي لمتوسط التغير. • أحلّ مسائل تطبيقية هندسية وفيزيائية على متوسط التغير.			
٢	**المشتقة الأولى** • أفسّر المشتقة الأولى كمعدل للتغير. • أعرّف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة. • أفسّر المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة هندسيًّا وفيزيائيًّا. • أجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام تعريف. • أبحث قابلية اشتقاق اقتران على فترة مغلقة. • أحل مسائل تطبيقية هندسية وفيزيائية على المشتقة الأولى.			
٣	**الاتصال والاشتقاق** • أفسّر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية الاشتقاق عند هذه النقطة. • أفسّر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة. • أدرس قابلية الاشتقاق لاقتران عند نقطة معينة مستعينًا بالاتصال. • أبحث قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة تشعب باستخدام تعريف المشتقة من اليمين ومن اليسار. • أحدّد مجال المشتقة من خلال بحث قابلية الاشتقاق على مجال الاقتران. • أبرهن النظرية الخاصة بالعلاقة بين الاشتقاق والاتصال عند نقطة.			
٤	**قواعد الاشتقاق (١)** • أثبت أن مشتقة اقتران ثابت تساوي صفرًا باستخدام تعريف المشتقة. • أثبت أن مشتقة ق (س) = $س^{ن}$ هي قَ (س) = ن $س^{ن-١}$ حيث ن عدد صحيح موجب. • أثبت أن مشتقة ثابت مضروب في اقتران تساوي الثابت مضروبًا في مشتقة الاقتران. • أثبت قاعدة مشتقة حاصل جمع (طرح) اقترانين. • أجد مشتقة اقتران باستخدام قواعد الاشتقاق.			

سلّم تقدير (٢ – ٢)

٥	**قواعد الاشتقاق (٢)** • أثبت قاعدة اشتقاق حاصل ضرب اقترانين. • أثبت قاعدة اشتقاق خارج قسمة اقترانين. • أثبت أن مشتقة ق (س) = $\frac{أ}{م(س)}$ حيث م (س) ≠ ٠ هي: $ق̄(س) = \frac{-أ\, م̄(س)}{(م(س))^{٢}}$ • أثبت أن مشتقة ق (س) = $س^{ن}$ ، س≠٠ ، ن عدد سالب هي: $ق̄(س) = ن\, س^{ن-١}$ • أجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين باستخدام قاعدة الضرب. • أجد مشتقة خارج قسمة اقترانين باستخدام قاعدة القسمة. • أجد مشتقة اقترانات متشبعة.				
٦	**المشتقات العليا** • أجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الرابعة.				
٧	**مشتقة الاقترانات الدائرية** • أتعرّف مشتقات الاقترانات الدائرية. • أجد مشتقات الاقترانات الدائرية.				
٨	**قاعدة السلسلة** • أتعرّف قاعدة مشتقة تركيب اقترانين. • أستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة تركيب اقترانين. • أستخدم قاعدة السلسلة بصيغها المختلفة في حل تمارين ومسائل متنوعة.				
٩	• الاشتقاق الضمني. • أتعرّف العلاقة الضمنية. • أحسب المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية. • أجد المشتقات العليا لعلاقة ضمنية حتى المشتقة الرابعة.				
١٠	**مهارات التعلم الأساسية** • أجري العمليات الروتينية. • أستخدم النمذجة والرموز الرياضية. • أفكر تفكيرًا منطقيًا. • أحل المشكلات.				
١١	**الكفايات العامة** • أحترم النظام وأتقيد بالتعليمات. • أحافظ على البيئة الصفية والممتلكات العامة. • أتقبل الآخرين. • أراعي قواعد السلامة العامة. • أظهر المبادرة وأتعاون مع الآخرين. • أحرص على التعلم الذاتي والمستمر.				

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل

قائمة الشطب (٢ – ٣)

تقويم امتلاك الطالب للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	نعم	لا
١	**تطبيقات هندسية:** • يعرّف المعنى الهندسي للمشتقة الأولى. • يميّز بين ميل المماس وميل العمود على المماس. • يجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى إذا علمت نقطةالتماس. • يجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى إذاعلمت نقطة خارجه. • يثبت تعامد منحنيين عند نقطة. • يثبت توازي منحنين عند نقطة.		
٢	**تطبيقات فيزيائية** • يعرّف المعدل الزمني، ومعدل التغير. • يجد المسافة والسرعة والتسارع لجسيم يتحرك بعد ن ثانية وفق العلاقة ف (ن). • يجد أقصى ارتفاع يصل إليه جسم بعد ن ثانية.		
٣	**المعدلات المرتبطة بالزمن** • يعرّف المعدل الزمني، ومعدل التغير. • يستطيع تحديد المعطيات والمطلوب في مسألة المعدلات المرتبطة بالزمن. • يستطيع تحديد المتغيرات والثوابت في مسألة المعدلات المرتبطة بالزمن. • يستطيع تكوين العلاقات التي تؤول إليها المسألة تكوينًا صحيحًا. • يستطيع اشتقاق العلاقة ضمنيًّا بالنسبة للزمن. • يستطيع تنفيذ الحل والتحقق من معقوليته. • يستطيع تطبيق الحل على مواقف مشابهة.		
٤	**التزايد والتناقص** • يعرّف مجالات التزايد والتناقص. • يعرّف اختبار المشتقة الأولى. • يجد فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق باستخدام اختبار المشتقة الأولى. • يستطيع تحديد فترات التزايد والتناقص من خلال منحنى ق (س).		
٥	**القيم القصوى** • يحدّد النقاط الحرجة لاقتران معطى. • يميّز بين القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية. • يميّز بين القيم القصوى المحلية والمطلقة. • يجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لاقتران معطى أو من خلال منحنى ق (س).		

قائمة الشطب (٢ – ٣)

٦	**التقعر** • يعرّف مجالات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل. • يحدّد نقط انعطاف لمنحنى ق (إن وجدت). • يحدّد زوايا الانعطاف لمنحنى ق (إن وجدت). • يعرّف اختبار المشتقة الثانية. • يجد فترات مجالات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل لمنحنى ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية. • يستطيع تحديد فترات التزايد والتناقص من خلال منحنى ق (س) باستخدام اختبار المشتقة الثانية. • يستطيع تمثيل منحنى المشتقة الأولى من خلال منحنى ق. • يستطيع تمثيل منحنى المشتقة الثانية من خلال منحنى ق.			
٧	**تطبيقات القيم القصوى** • يعرّف قوانين المساحات والحجوم والعلاقات الجبرية المهمة. • يستطيع تحديد المعطيات والمطلوب في مسألة. • يستطيع تكوين العلاقات التي تؤول إليها المسألة تكوينًا صحيحًا. • يستطيع تنفيذ الحل ، والتحقق من معقوليته. • يستطيع تطبيق الحل على مواقف مشابهة.			
٨	**مهارات التعلم الأساسية** • يجري العمليات الروتينية. • يستخدم الرموز الرياضية. • يفكّر تفكيرًا منطقيًّا. • يحل المشكلات.			
٩	**الكفايات العامة** • يحترم النظام ويتقيد بالتعليمات. • يحافظ على البيئة الصفية والممتلكات العامة. • يراعي قواعد السلامة العامة. • يحرص على التعلم الذاتي والمستمر.			

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل
سلّم تقدير (٢ – ٣)

التقويم الذاتي للطالب حول مدى امتلاكه للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	التقدير		
		ممتاز	جيد	مقبول
١	تطبيقات هندسية: • أعرّف المعنى الهندسي للمشتقة الأولى. • أميّز بين ميل المماس وميل العمود على المماس. • أجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى، إذا علمت نقطةالتماس. • أجد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى،إذاعلمت نقطة خارجه. • أثبت تعامد منحنيين عند نقطة. • أثبت توازي منحنيين عند نقطة.			
٢	تطبيقات فيزيائية • أعرّف المعدل الزمني، ومعدل التغير. • أجد المسافة والسرعة والتسارع لجسيم يتحرك بعد ن ثانية وفق العلاقة ف (ن). • أجد أقصى ارتفاع يصل إليه جسم بعد ن ثانية.			
٣	المعدلات المرتبطة بالزمن • أعرّف المعدل الزمني، ومعدل التغير. • أستطيع تحديد المعطيات والمطلوب في مسألة المعدلات المرتبطة بالزمن. • أستطيع تحديد المتغيرات والثوابت في مسألة المعدلات المرتبطة بالزمن. • أستطيع تكوين العلاقات التي تؤول إليها المسألة تكوينًا صحيحًا. • أستطيع اشتقاق العلاقة ضمنيًّا بالنسبة للزمن. • أستطيع تنفيذ الحل والتحقق من معقوليته. • أستطيع تطبيق الحل على مواقف مشابهة.			
٤	التزايد والتناقص • أعرّف مجالات التزايد والتناقص. • أعرّف اختبار المشتقة الأولى. • أجد فترات التزايد والتناقص لمنحنى ق باستخدام اختبار المشتقة الأولى. • أستطيع تحديد فترات التزايد والتناقص من خلال منحنى ق (س).			
٥	القيم القصوى • أحدّد النقاط الحرجة لاقتران معطى. • أميّز بين القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية. • أميّز بين القيم القصوى المحلية والمطلقة. • أجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لاقتران معطى أو من خلال منحنى ق (س).			

سلّم تقدير (٢ – ٣)

٦	**التقعر** • أعرّف مجالات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل. • أحدّد نقط انعطاف لمنحنى ق (إن وجدت). • أحدّد زوايا الانعطاف لمنحنى ق (إن وجدت). • أعرّف اختبار المشتقة الثانية. • أجد فترات مجالات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل لمنحنى ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية. • أستطيع تحديد فترات التزايد والتناقص من خلال منحنى ق (س) باستخدام اختبار المشتقة الثانية. • أستطيع تمثيل منحنى المشتقة الأولى من خلال منحنى ق. • أستطيع تمثيل منحنى المشتقة الثانية من خلال منحنى ق.			
٧	**تطبيقات القيم القصوى** • أعرّف قوانين المساحات والحجوم والعلاقات الجبرية المهمة. • أستطيع تحديد المعطيات والمطلوب في مسألة. • أستطيع تكوين العلاقات التي تؤول إليها المسألة تكوينًا صحيحًا. • أستطيع تنفيذ الحل ، والتحقق من معقوليته. • أستطيع تطبيق الحل على مواقف مشابهة.			
٨	**مهارات التعلم الأساسية** • أجري العمليات الرويتنية. • أستخدم الرموز الرياضية. • أفكّر تفكيرًا منطقيًا. • أحل المشكلات.			
٩	**الكفايات العامة** • أحترم النظام وأتقيد بالتعليمات. • أحافظ على البيئة الصفية والممتلكات العامة. • أراعى قواعد السلامة العامة. • أحرص على التعلم الذاتي والمستمر.			

قائمة الشطب (٢ – ٤)

قائمة شطب لتقويم أداء طالب يعمل على حل مشكلة

الرقم	الفقرة	التقدير	
		نعم	لا
١	شعر بالمشكلة.		
٢	تقبّل المشكلة بروح إيجابية.		
٣	حدّد المعطيات والشروط في المسألة بشكل صحيح.		
٤	فهم المشكلة وحدّد أبعادها بصورة صحيحة.		
٥	جمع معلومات مفيدة للوصول إلى الحل.		
٦	وضع خطة مناسبة للوصول إلى الحل.		
٧	نفذ خطة الحل وقام بالإجراءات بصورة صحيحة.		
٨	تحقّق من صحة الحل وراجع إجراءاته.		
٩	طبّق الحل على مواقف مشابهة.		

قائمة الشطب (٢ – ٥)

قائمة شطب لتقويم أداء طالب أثناء العمل في مجموعات تعاونية

الرقم	الفقرة	التقدير	
		نعم	لا
١	تقبل زملاءه في المجموعة نفسها.		
٢	قام بالمهام الموكلة إليه.		
٣	ساعد زملاءه في المجموعة عند الحاجة.		
٤	شارك في المناقشة.		
٥	عبّر عن رأيه بوضوح.		
٦	بادر إلى تحمل أعباء المهام الطارئة.		

قائمة الشطب (٢ – ٦)

تقويم امتلاك الطالب للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	التقدير: نعم	التقدير: لا
١	**المحل الهندسي** • يعرّف المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى. • يستخدم قانون المسافة بين نقطتين في إيجاد المحل الهندسي. • يستخدم قانون البعد بين نقطة ومستقيم في إيجاد المحل الهندسي. • يجد معادلة تمثل محلاً هندسيًّا معطى.		
٢	**الدائرة** • يعرّف الدائرة كقطع مخروطي. • يجد معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية. • يميّز الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة. • يمثّل معادلة الدائرة بيانيًّا.		
٣	**القطع المكافئ** • يتعرّف القطع المكافئ. • يكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية. • يمثّل معادلة القطع المكافئ بيانيًّا. • يحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته. • يميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.		
٤	**القطع الناقص** • يتعرّف القطع الناقص. • يكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية. • يمثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا. • يحدّد عناصر قطع ناقص إذا علمت معادلته. • يميّز معادلة القطع الناقص إذا علمت معادلته بالصورة العامة. • يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.		
٥	**القطع الزائد** • يتعرّف القطع الزائد. • يكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية. • يمثّل معادلة القطع الزائد بيانيًّا. • يحدّد عناصر قطع زائد إذا علمت معادلته. • يميّز معادلة القطع الزائد إذا علمت معادلته بالصورة العامة. • يتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.		

٦	**مهارات التعلم الأساسية:** • يجري العمليات الروتينية. • يستخدم الرموز الرياضية. • يفكّر تفكيرًا منطقيًا. • يحل المشكلات.			
٧	**الكفايات العامة:** • يحترم النظام ويتقيد بالتعليمات. • يحافظ على البيئية الصفية والممتلكات العامة. • يتقبل الآخرين. • يراعي قواعد السلامة العامة. • يحرص على التعلم الذاتي والمستمر.			

الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية
سلّم تقدير (٢ – ٤)

لتقويم طالب حول مدى امتلاكه للمعارف والمهارات المطلوبة

الرقم	مؤشرات الأداء	التقدير: نعم	التقدير: لا
١	**المحل الهندسي** • أعرّف المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى. • أستخدم قانون المسافة بين نقطتين في إيجاد المحل الهندسي. • أستخدم قانون البعد بين نقطة ومستقيم في إيجاد المحل الهندسي. • أجد معادلة تمثّل محلاً هندسيًّا معطى.		
٢	**الدائرة** • أعرّف الدائرة كقطع مخروطي. • أجد معادلة الدائرة إذا علمت شروط كافية. • أميزّ الدائرة إذا علمت معادلتها بالصورة العامة. • أمثّل معادلة الدائرة بيانيًّا.		
٣	**القطع المكافئ** • أتعرّف القطع المكافئ. • أكتب معادلة القطع المكافئ إذا علمت شروط كافية. • أمثّل معادلة القطع المكافئ بيانيًا. • أحدّد عناصر قطع مكافئ إذا علمت معادلته. • أميّز معادلة القطع إذا علمت معادلته بالصورة العامة.		
٤	**القطع الناقص** • أتعرّف القطع الناقص. • أكتب معادلة القطع الناقص إذا علمت شروط كافية. • أمثّل معادلة القطع الناقص بيانياً. • أحدّد عناصر قطع ناقص إذا علمت معادلته. • أميّز معادلة القطع الناقص إذا علمت معادلته بالصورة العامة. • أتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الناقص.		
٥	**القطع الزائد** • أتعرّف القطع الزائد. • أكتب معادلة القطع الزائد إذا علمت شروط كافية. • أمثّل معادلة القطع الزائد بيانيًّا. • أحدّد عناصر قطع زائد إذا علمت معادلته. • أميّز معادلة القطع الزائد إذا علمت معادلته بالصورة العامة. • أتعرّف الاختلاف المركزي للقطع الزائد.		

٦	**مهارات التعلم الأساسية** • أجري العمليات الروتينية. • أستخدم الرموز الرياضية. • أفكّر تفكيرًا منطقيًّا. • أحل المشكلات.			
٧	**الكفايات العامة** • أحترم النظام وأتقيد بالتعليمات. • أحافظ على البيئية الصفية والممتلكات العامة. • أتقبّل الآخرين. • أراعي قواعد السلامة العامة. • أحرص على التعلم الذاتي والمستمر.			

ملحق
٣

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ١)

الزمن : ٢٥ دقيقة

الأهداف : إثبات أن:

١ – نهاية عدد ثابت مضروبًا باقتران يساوي العدد الثابت مضروبًا بنهاية الاقتران.

٢ – نهاية الجذر النوني لاقتران يساوي الجذر النوني لنهاية الاقتران.

أجب عن الأسئلة الآتية :

١) إذا كان م (س) = ٣ س + ١ فمثّل بيانيًا كلاً من :

م (س) ، ٦ م (س) ، $\sqrt{\text{م (س)}}$ حيث س $\geq \frac{١}{٣}$

٢) اعتمد على الرسم في إيجاد :

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ م (س) ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (٦م (س)) ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ $\sqrt{\text{م (س)}}$

٣) إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ م (س) = د، واعتمادًا على إجابتك في الفرع (٢) اكتب قاعدة تمكنك من حساب النهايات الآتية دون الاعتماد على الرسم البياني :

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ ك م (س) ، ك $\in$ ح ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ $\sqrt[\text{ن}]{\text{م (س)}}$

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ٢)

الزمن : ٢٥ دقيقة

الأهداف : إثبات أن:

١ – نهاية حاصل ضرب اقترانين يساوي حاصل ضرب نهايتي الاقترانين.

٢ – نهاية خارج قسمة اقترانين يساوي خارج قسمة نهايتي الاقترانين ، بشرط أن نهاية المقام ≠ صفرا.

أجب عن الأسئلة الآتية :

١) مثّل الاقترانات الآتية بيانيًا :

ق (س) = س^{٣} ، هـ (س) = $|\text{س}|$ ، ق (س) × هـ (س) = س^{٣} × $|\text{س}|$ ، $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}} = \frac{\text{س}^{٣}}{|\text{س}|}$ حيث س ≠ ٠

٢) اعتمد على الرسم في إيجاد ما يأتي :

$\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ ق (س) ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ هـ (س) ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـــا}}$ (ق (س)) × هـ (س)

ماذا تلاحظ ؟

٣) إذا كان $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ ق (س) = ب ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ هـ (س) = جـ، واعتمادًا على إجابتك في فرع (٢) اكتب قاعدة تمكنك من حساب النهايات الآتية دون الاعتماد على الرسم .

$\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ $\frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ حيث جـ ≠ ٠ ، $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ (ق (س) × هـ (س))

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ٣)

الزمن : ٢٥ دقيقة

الأهداف : إثبات أن

١ – نهاية مجموع اقترانين يساوي مجموع نهايتي الاقترانين .

٢ – نهاية طرح اقترانين يساوي ناتج طرح نهايتي الاقترانين .

٣ – نهــا سن = سأ

أجب عن الأسئلة الآتية :

١) مثّل الاقترانات الآتية بيانيًّا :

ق (س) = س^{٣} ، ل (س) = ٥ ، ق (س) + ل (س) = س^{٣} + ٥ ، ق (س) – ل (س) = س^{٣} – ٥

٢) **اعتمد** على الرسم في ايجاد ما ياتي :

نهــا$_{س \leftarrow ٢}$ ق (س) ، نهــا$_{س \leftarrow ٢}$ ل (س) ، نهــا$_{س \leftarrow ٢}$ (ق (س) + ل (س)) ، نهــا$_{س \leftarrow ٢}$ (ق (س) – ل (س))

ماذا تلاحظ ؟

٣) إذا كانت نهــا$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) = ب ، نهــا$_{س \leftarrow أ}$ ل (س) = ر واعتمادا على إجابتك في الخطوة رقم (٢)

اكتب قاعدة تمكنك من حساب النهايات الآتية دون الاعتماد على الرسم .

نهــا$_{س \leftarrow أ}$ (ق (س) + ل (س)) ، نهــا$_{س \leftarrow أ}$ سن ، نهــا$_{س \leftarrow أ}$ (ق (س) – ل (س))

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ٤)

الزمن : ٢٠ دقيقة

الهدف : يجد متوسط التغير لاقتران.

ادرس الاقترانات الآتية، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها :

ص = ق (س) = ٢س – ١ ، ص = هـ (س) = ٣س^{٢} + ٢س – ١ ،

ص = ل (س) = | ٢ س – ٣ |

١) جد التغير ، ومتوسط التغير للاقتران ق (س) عندما تتغير س من :

أ) س = ٢ إلى س = ٤

ب) س = ٢ إلى س = ١

جـ) س = س$_{١}$ إلى س = س$_{١}$ + Δ س

٢) جد التغير ، ومتوسط التغير للاقتران ل (س) عندما تتغير س من س$_{١}$ = ١،٥ إلى س$_{٢}$ = ٠

٣) جد متوسط التغير للاقتران هـ (س) عندما تتغير س من س إلى س + Δ س.

ورقة عمل (٣ – ٥)

الزمن : ٢٠ دقيقة

الهدف : يستنتج قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين.

ادرس الاقترانات الآتية، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها :

ق (س) = س^{٤} (س^{٣} + س) ، ك (س) = (س^{٢} – س) (١ – ٣ س)

م (س) = (٣ س^{٢} + ٥ س – ٨) (س^{٣} – ٣ س^{٢} + س + ٧)

١) اكتب الاقترانات ق ، ك ، م على صورة كثير حدود، ثم جد قَ ، هـَ ، مَ

٢) افرض أن ل (س) = ٣ س^{٢} + ٥ س – ٨ ، هـ (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + س + ٧ . اكتب الاقتران م (س) بدلالة الاقترانين ل ، هـ

٣) هل الاقترانان ل ، هـ قابلان للاشتقاق ؟ لماذا ؟ جد لَ (س) ، هـَ (س) .

٤) جد ل (س) × هـَ (س) + هـ (س) × لَ (س) بأبسط صورة، ثم قارن هذا الناتج بمشتقة م التي حصلت عليها في (١). ماذا تلاحظ؟

٥) هل يمكن التوصل إلى قاعدة تجد من خلالها مشتقة حاصل ضرب اقترانين ؟ إن كانت الإجابة نعم اكتب القاعدة .

ورقة عمل (٣ – ٦)

الزمن : ٢٠ دقيقة

الهدف : يستنتج تعريف التزايد والتناقص لاقتران من خلال منحناه.

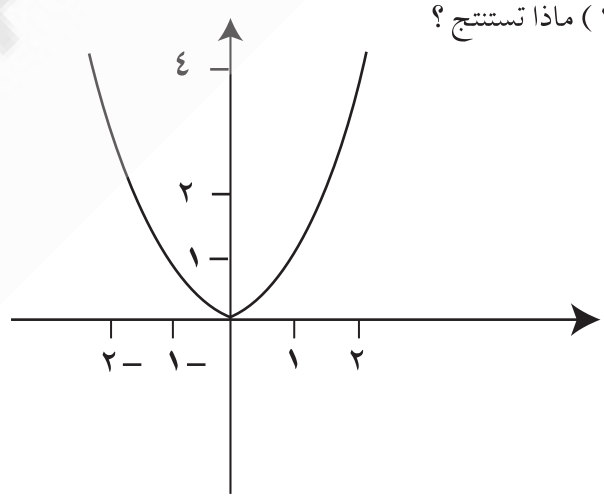
بالاعتماد على الأشكال (١) (٢) (٣)، أجب من الأسئلة الآتية:

١) قارن بين قيم الاقتران عند العددين –٢ ، –١ في كل من الأشكال (١ ، ٢ ، ٣).

٢) املأ الجدول الأتي:

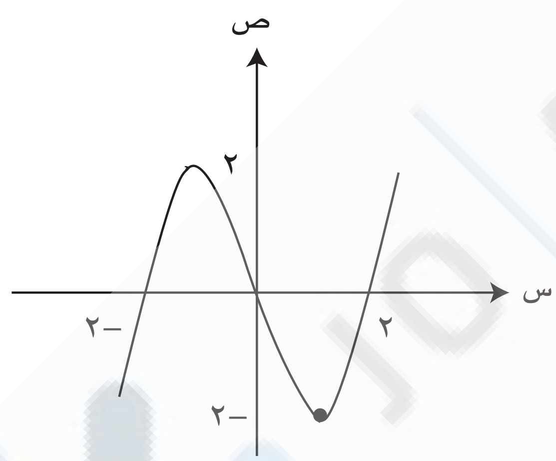
المنحنى	المقارنة بين $س_١$ ، $س_٢$	المقارنة بين ق ($س_١$) ، ق ($س_٢$)	ق (س)
ق (س) = $س^٢$	–٢ < –١		ق (س) متناقص في [–٢ ، –١]
ق (س) = $س^٣$ – ٣ س	–٢ < –١		ق (س) متزايد في [–٢ ، –١]
ق (س) = $س^٣$	–٢ < –١		ق (س) متزايد في [–٢ ، –١]

٣) ماذا تستنتج ؟



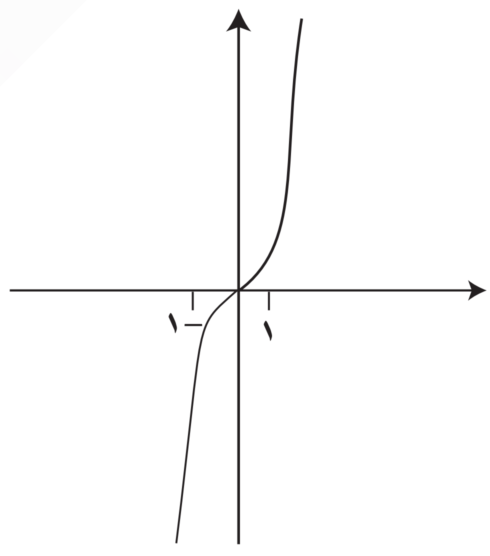
ق (س) = $س^٢$ ، س [–٢ ، ٢]

الشكل (١)



ق (س) = $س^٣$ – ٣س ، س [–٢ ، ٢]

الشكل (٢)



ق (س) = $س^٣$ ، س [–٢ ، ٢]

الشكل (٣)

تابع ورقة عمل (٣ – ٧)

الزمن : ٢٠ دقيقة

الهدف : يحدّد القيم القصوى (العظمى، والصغرى) لاقتران من خلال منحناه.

بالاعتماد على الشكل، أجب على الأسئلة الآتية :

١ – عيّن أعلى نقطة تقع على منحنى ق في الفترة [–٢ ، ٢].

٢ – ما الإحداثيان السيني والصادي لهذه النقطة ؟

٣ – علام يدل الإحداثي الصادي لها ؟

٤ – عيّن فترة مفتوحة ف تحوي العدد صفرًا .

٥ – ما العلاقة بين ق (٠) ، ق (س) لكل س تنتمي للفترة ف؟

٦ – اقترح اسماً لكل من: (٠ ، ق (٠)) ، ق (٠) ، ٠

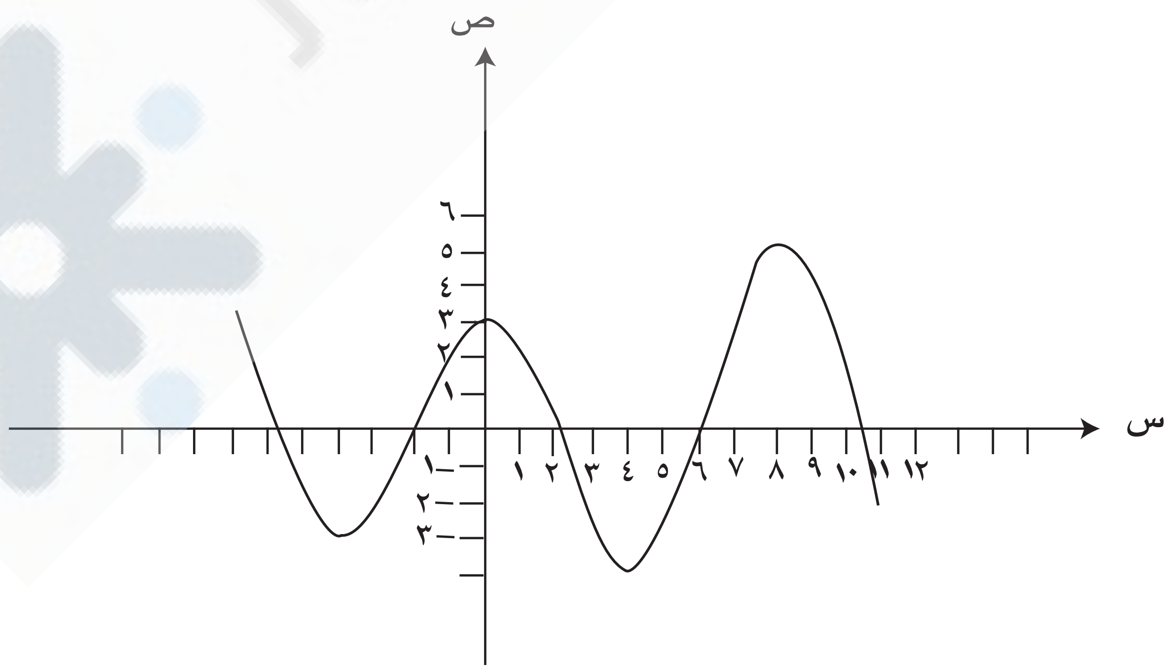
٧ – بالطريقة نفسها ، كرّر الأسئلة السابقة من أجل النقطة (٤ ، ق (٤)) في الفترة [٣ ، ٥].

٨ – بالطريقة نفسها ، كرّر الأسئلة السابقة من أجل النقطة (٩ ، ق (٩)) في الفترة [٨ ، ١٠].

٩ – بالطريقة نفسها ، كرّر الأسئلة السابقة من أجل النقطة (٩ ، ق (٩)) في الفترة [–٥ ، –٣] .

١٠ – عيّن أعلى نقطة تقع على منحنى ق في الفترة [–٦ ، ١١].

١١ – عيّن أدنى نقطة تقع على منحنى ق في الفترة [–٦ ، ١١] .



ورقة عمل (٣ – ٨)

الزمن : ٣٥ دقيقة

الهدف : يجد قيمة تكاملات منوعة باستخدام خواص التكامل المحدود.

١) إذا كان ق (س) = { س^{٢} ، ٠ ≤ س < ؛ ٤ ، ٢ ≤ س ≤ ٢ ٢ }

فجد قيمة $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س

٢) جد قيمة التكاملات الآتية :

أ) $\int_{٠}^{٣}$ [٢ – س] د س   ب) $\int_{٠}^{٨}$ [٣ – ٢س] د س

٣) إذا كان $\int_{٠}^{٣}$ (٢ ق (س) – ٣ س^{٢} – ٦س + ٢) د س = ٤

فجد $\int_{٠}^{٣}$ (٤ – ق (س)) د س

٤) شكان $\int_{١}^{٢}$ ٣ ق (س) د س = ١٢، $\int_{٠}^{٨}$ (ق (س) – ٢) د س = ٢٤

فجد $\int_{٢}^{١}$ ق (س) د س

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ٩)

الزمن : ١٠ دقائق

الهدف : يجد قيمة تكامل حاصل ضرب اقترانين باستخدام طريقة التكامل بالتعويض.

جد قيمة التكامل الآتي:

$\int$ ٢ س (س + ٢)^{٤} د س

خطة الحل :

الحل :

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ١٠)

الزمن : ١٠ دقائق

الهدف : يجد قيمة تكامل حاصل ضرب اقترانين باستخدام طريقة التكامل بالتعويض.

جد قيمة التكاملات الآتية :

١) □ جا^{٣} س د س

٢) □ جا^{٣} س جتا^{٢} س د س

٣) $\square_{\cdot}^{٣} \dfrac{١}{\sqrt[٣]{\text{٢س} + ١}}$ د س

٤) $\square_{١}^{\cdot} \sqrt{\text{س}^{٢} - \text{١٠س} + ٢٥}$ د س

٥) $\square \dfrac{\text{س}}{(\text{س}^{٤} + \text{٦ س}^{٢} + ٩)^{٥}}$ د س

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ١١)

الزمن : ١٠ دقائق

الهدف : يجد قيمة تكامل حاصل ضرب اقترانين باستخدام طريقة التكامل بالأجزاء.

جد قيمة التكامل الآتي :

□ (س – ٤) (٣ – ٢س)^{٣} د س

خطة الحل :

الحل :

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ١٢)

الزمن : ٣٥ دقائق

الهدف : يجد تكاملات لاقترانات كسرية ولاقترانات لوغريتمية طبيعية.

جد قيمة التكاملات الآتية :

١) $\int \frac{\text{د س}}{\text{س لو}_{\text{هـ}}\text{ س}} \text{ د س}$

٢) $\int \text{س (لو}_{\text{هـ}}\text{ س)}^{٢} \text{ د س}$

٣) $\int \text{س}^{٤} \text{ (لو}_{\text{هـ}}\text{ س)}^{٢} \text{ د س}$

٤) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٢ + \sqrt{\text{س}})} \text{ د س}$

أوراق العمل

ورقة عمل (٣ – ١٣)

الزمن : ٣٥ دقيقة

الهدف :

١) يجد مشتقة اقترانات أسيّة طبيعية.

٢) يجد تكامل اقترانات اسيّة طبيعية.

١) جد مشتقة الاقترانات الآتية :

أ) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}$

ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{٣\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,(١ - \text{س})}$

جـ) $\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{٢\text{س}^{٣}}}$

٢) جد التكاملات الآتية :

أ) $\int \text{جا٢س هـ}^{\text{جا}^{٢}\text{س} + ١} \text{ د س}$

ب) $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{٢ - \text{هـ}^{\text{س}}} \text{ د س}$

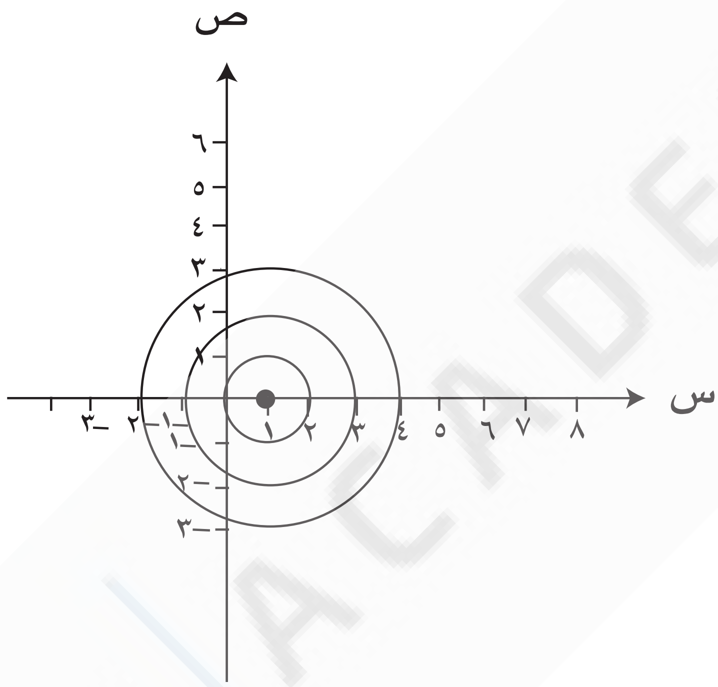
جـ) $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{٣\text{س}} \text{ د س}$

تابع ورقة عمل (٣ – ١٤)

الهدف : التوصل إلى مفهوم المحل الهندسي.

بالاعتماد على الرسم، أجب على الأسئلة الآتية:

(الإجابة على ورق الرسم البياني) :



١ – عيّن نقطتي تقاطع الدائرة التي نصف قطرها ٢ مع الخط المستقيم س = ٢ ، ونقطتي تقاطع الدائرة التي نصف قطرها ٣ مع الخط المستقيم س = ٣.

٢ – ماذا تلاحظ على تقاطع الدائرة التي نصف قطرها ١ مع الخط المستقيم س = ١ ؟

٣ – ماذا تلاحظ على بعد نقط التقاطع عن النقطة (٢ ، ٠) والمستقيم س = ٠ ؟

٤ – صل نقط التقاطع بخط منحنى متصل .

٥ – افرض أن : ن (س ، ص) نقطة ما من الخط الذي حصلت عليه من البند السابق، فما العلاقة بين بعد النقطة (س ، ص) عن النقطة (١ ، ٠) وبعدها عن المستقيم س = ٠ ؟

٦ – اكتب العلاقة الجبرية التي تحدد المسافة بين النقطة (س ، ص) والنقطة (١ ، ٠)، والمسافة بين (س ، ص) والمستقيم س = ٠ بأبسط صورة .

ورقة عمل (٣ – ١٥)

الهدف : **التوصل إلى معادلة القطع المكافىء.**

بالاعتماد على ورق الرسم البياني ، أو باستخدام الحاسوب:

النقطة	د	هـ	و	ز	ح	ط	ي	ك
س	١	١	٤	٤	٩	٩	١٦	١٦
ص	٤	–٤	٨	–٨	١٢	–١٢	١٦	–١٦

١ – عيِّن النقطة ب (٢ ، ٠) في المستوى البياني ، ثم ارسم المستقيم س = –٢

٢ – اكتب قانون المسافة بين نقطتين ، وقانون بعد نقطة عن مستقيم .

٣ – احسب بعد النقاط : د ، هـ ، و ، ز ، ح ، ط ، ي ، ك عن النقطة ب (٢ ، ٢) وبعدها عن المستقيم س = –٢،
ماذا تستنتج ؟

٤ – عيِّن النقاط الواردة في الجدول على المستوى البياني ، ثم صل بينها بخط منحنى ممهد .

٥ – افرض أن : ن (س ، ص) نقطة ما على المنحنى الذي حصلت عليه من البند السابق، تحقق من العلاقة : بين بُعد ن عن ب (ن ب) وبعدها عن المستقيم س = –٢، ماذا تستنتج؟

٦ – اكتب الصيغة الجبرية للعلاقة الواردة في (البند ٥) بدلالة س ، ص س بأبسط صورة .

٧ – بيِّن أن كل نقطة تحقّق المعادلة التي حصلت عليها في البند السابق تقع على المنحنى الذي رسمته ، وكل نقطة تقع على المنحنى الذي رسمته تحقّق المعادلة التي حصلت عليها .

ورقة عمل (٣ – ١٦)

الهدف : التوصل إلى مفهوم القطع الناقص.

بالاعتماد على الجدول، أجب على الأسئلة الآتية:

(الإجابة على ورق الرسم البياني ، أو باستخدام الحاسوب):

النقطة	د	دَ	هـ	هـَ	و	وَ	ع	عَ
س	٢	–٢	٢	–٢	٧	–٧	٧	–٧
ص	٣	٣	–٣	–٣	١٢	١٢	–١٢	–١٢

١ – ارسم محورين متعامدين ، ثم عين النقطتين ب$_{١}$ (–٢ ، ٠) ، ب$_{٢}$ (٢ ، ٠) على المستوى البياني.

٢ – استعمل قانون المسافة بين نقطتين لحساب : د ب$_{١}$ + د ب$_{٢}$ ، دَ ب$_{١}$ + دَ ب$_{٢}$ ، هـ ب$_{١}$ + هـَ ب$_{٢}$، وهكذا لبقية النقاط في الجدول.

٣ – عيّن النقاط الواردة في الجدول على المستوى البياني، ثم صل بينها بخط منحن ممهد.

٤ – افرض أن : ن (س ، ص) نقطة ما على المنحنى الذي حصلت عليه من البند السابق، فهل تتحقق العلاقة : د ب$_{١}$ + د ب$_{٢}$ = دَ ب$_{١}$ + دَ ب$_{٢}$ = هـ ب$_{١}$ + هـَ ب$_{٢}$ = ٠٠٠٠٠ ؟ ماذا تستنتج؟

٥ – اكتب الصيغة الجبرية للعلاقة الواردة في البند السابق بدلالة س ، ص بأبسط صورة.

٦ – بيّن أن كل نقطة تحقّق المعادلة التي حصلت عليها في البند السابق تقع على المنحنى الذي رسمته ، وكل نقطة تقع على المنحنى الذي رسمته تحقّق المعادلة التي حصلت عليها.

ورقة عمل (٣ – ١٧)

الهدف : التوصل إلى معادلة القطع الزائد.

بالاعتماد على الجدول، أجب على الأسئلة الآتية :

(الإجابة على ورق الرسم البياني ، أو باستخدام الحاسوب) :

النقطة	د	دَ	هـ	هـَ	و	وَ	ع	عَ
س	٢	−٢	٢	−٢	٧	−٧	٧	−٧
ص	٣	٣	−٣	−٣	١٢	١٢	−١٢	−١٢

١ – ارسم محورين متعامدين ، ثم عيّن النقطتين $ب_١$ (−٢ ، ٠) ، $ب_٢$ (٢ ، ٠) على المستوى البياني .

٢ – استعمل قانون المسافة بين نقطتين لحساب : د $ب_١$ – د $ب_٢$ ، دَ $ب_١$ – دَ $ب_٢$ ، هـ $ب_١$ – هـَ $ب_٢$، وهكذا لبقية النقاط في الجدول .

٣ – عيّن النقاط الواردة في الجدول على المستوى البياني ، ثم صل بينها بخط منحن ممهد .

٤ – افرض أن : ن (س ، ص) نقطة ما من المنحنى الذي حصلت عليه من البند السابق، فهل تتحقق العلاقة : د $ب_١$ – د $ب_٢$ = دَ $ب_١$ – دَ $ب_٢$ = هـ $ب_١$ – هـَ $ب_٢$ = ... ؟ ماذا تستنتج ؟

٥ – اكتب الصيغة الجبرية للعلاقة الواردة في البند السابق بدلالة س ، ص بأبسط صورة .

٦ – بيّن أن كل نقطة تحقّق المعادلة التي حصلت عليها في البند السابق تقع على المنحنى الذي رسمته ، وكل نقطة تقع على المنحنى الذي رسمته تحقّق المعادلة التي حصلت عليها .

ملحق

٤

إطار نظري في استراتيجيات التدريس وأدوات التقويم

استراتيجيات التدريس وأدوات التقويم

أخي المعلم، أختي المعلمة

تعرف استراتيجية التدريس بأنها خطة تصف الإجراءات التي يقوم بها المعلم والمتعلم بغية تحقيق نتاجات التعلم المرجوة. وتستند استراتيجية التدريس في أساسها إلى نماذج ونظريات تسمى نظريات التعلم، وهذه تصنف إلى ثلاث مدارس رئيسة، هي: السلوكية والمعرفية والاجتماعية.

وخلال السنوات الأخيرة زاد الاهتمام بالاستراتيجيات المعرفية والاجتماعية على حساب الاستراتيجيات السلوكية التي كانت مسيطرة على حقول التربية خلال العقود الماضية. ويعود السبب في ذلك إلى زيادة الاهتمام بتعليم الطلبة طريقة الحصول على المعرفة وتنمية أنماط التفكير المختلفة لديهم أكثر من تحصيل المعرفة نفسها.

إن التنويع في استراتيجيات التدريس التي تستخدمها مع طلبتك من شأنه أن يكسر النمط الممل الذي تفرضه طريقة التدريس التقليدية في نظر الكثير من الطلبة، فالطريقة التقليدية ترتكز على دور نشط للمعلم وتغفل دور الطالب كعنصر فاعل في عملية التعلم، في حين إن الاتجاهات التربوية الحديثة تركز على أن الطالب هو المحور الرئيس لعملية التعلم ويجب أن يكون له الدور الأكبر في هذه العملية. وعلى العموم فإن على المعلم الذي يود استخدام استراتيجية فعالة في تدريس طلبه أن يراعي الاعتبارات الآتية:

١ – التعلم هو نشاط يقوم به المتعلم وليس المعلم.

٢ – التعلم كمفهوم يرتبط بالخبرة.

٣ – يجب أن تجيب استراتيجية التدريس المستخدمة عن الأسئلة الآتية:

كيف سأعلم؟ ماذا سأعلم؟ متى سأعلم؟

٤ – يجب أن تشمل الاستراتيجية المستخدمة عناصر العملية التعليمية جميعها والعلاقات بينها.

٥ – ينبغي أن تتوافق استراتيجيات التدريس المستخدمة مع المرحلة التي يمر بها الطالب والموقف التعليمي.

٦ – لا توجد استراتيجية تدريس أفضل من غيرها في المواقف التعليمية جميعها بشكل مطلق.

وفي ما وصف للاستراتيجيات التي تبنتها خطة التطوير التربوي نحو الاقتصاد المعرفي (ERfKI).

استراتيجيات التدريس وأدوات التقويم

أولاً : استراتيجية التدريس المباشر

يقصد بالتدريس المباشر ذلك النوع من التدريس الذي يعتمد على دور المعلم بشكل أساسي في تقديم المعرفة بالأشكال جميعها جاهزة لطلبته، ويوصف تعلم الطلبة وفق هذا الأسلوب بأنه تعلم استقبالي، حيث يكون المتعلم مستقبلاً.

ولا يعني ذلك كله أن هذه الاستراتيجية غير مقبولة أو غير فعالة، وفي الواقع يجب التمييز بين التدريس المباشر الجيد والتدريس المباشر الرديء، فالتدريس المباشر الجيد يحقق نتائج جيدة، ويكون أفضل الطرق الممكنة في بعض الظروف، كأن يكون عدد الطلبة كبيراً جداً في الصف أو يكون الزمن المخصص للتدريس ضيقاً.

ومن الأمثلة على طرق التدريس المباشر:

- المحاضرة
- العرض التوضيحي.
- ضيف زائر
- أوراق العمل.
- أسئلة وإجابات
- أنشطة القراءة المباشرة
- حلقة البحث
- العمل في الكتاب المدرسي.
- البطاقات الخاطفة
- التدريبات والتمارين.

وحتى يكون التدريس المباشر جيدًا لا بد للمعلم مراعاة الأمور الآتية:

١ – التخطيط المحكم للدرس ويشمل ذلك تحديد النتاجات الخاصة والأساليب والأدوات اللازمة.

٢ – ربط التعلم الحالي للطلبة بالتعلم السابق وخبراتهم السابقة.

٣ – التكيف مع الظروف التي تطرأ بالصف، كأن يعدل المعلم في سير الحصة عند وجود سبب يقتضي ذلك.

٤ – الاهتمام بالتقويم بأنواعه المختلفة.

٥ – التركيز على التعلم ذي المعنى.

ثانيًا: استراتيجية التدريس القائمة على حل المشكلات والاستقصاء

يقصد بالاستقصاء البحث عن المعرفة والمعلومات والحقائق من خلال توجيه الأسئلة، ويمارس الإنسان الاستقصاء بشكل طبيعي بدافع الفضول وحب الاستطلاع، ويتمثل الهدف العام للاستقصاء في مساعدة الطلبة على تطوير مهارات التفكير الضرورية لإثارة الأسئلة والبحث عن حاجات تلبي حاجات الفضول وحب الاستطلاع لديهم.

والاستقصاء في مجال التربية يكتسب أهمية كبيرة، لأنه يعد الطالب إعدادًا يمكنه من مواجهة الحياة ومشكلاتها وفهم متغيراتها بصورة صحيحة، خصوصًا الانفجار المعرفي الذي نعيشه الآن.

خطوات استراتيجية التعليم القائمة على الاستقصاء

١ – يفضل أن يبدأ المعلم بعرض مشكلة تثير تساؤلات وتحتمل إجابات مختلفة بالنسبة للطلبة.

٢ – يبدأ الطلبة بتوجيه أسئلة تساعدهم في جمع معلومات حول المشكلة. وإذا لم يتمكن الطلبة من فعل ذلك بشكل صحيح، فإن على المعلم مساعدة طلبته لتطوير فرضيات تتعلق بالمشكلة.

٣ – مساعدة الطلبة في عمل إجراءات تقويمية لأسئلتهم الموجّهة.

٤ – تدريب الطلبة على تحديد الأسئلة الأكثر فائدة من بين الأسئلة التي تم توجيهها.

٥ – يطلب من الطلبة تحليل عملية الاستقصاء والسعي إلى تحسينها.

دور المعلم في استراتيجية الاستقصاء

١ – مخطط : يختار المعلم المواقف التعليمية التي تصلح للتدريب على الاستقصاء.

٢ – مسهل : يعمل على تهيئة البيئة الصفية.

٣ – مثير : يثير دافعية الطلبة نحو التعلم وإثارة التساؤلات.

٤ – محاور : يناقش الطلبة في تساؤلاتهم محاولاً توجيههم إلى مزيد من الأسئلة.

٥ – مستجيب: يساعد الطلبة في الحصول على إجابات لتساؤلاتهم بشكل مباشر أو من خلال توجيههم إلى المصادر التي تساعدهم في تحقيق ذلك.

تعتمد الكثيرمن استراتيجيات التدريس على المواقف التي تدعى مشكلات مثل استراتيجية الاستقصاء واستراتيجية التعلم البنائي، فما المشكلة؟

المشكلة: موقف جديد ومميز يواجه الفرد ولا يكون لديه حل جاهز في حينه.

وعرف آخرون المشكلة بأنها موقف يتميز بما يأتي:

١ – يحتاج الشخص الذي يقوم بأداء هذا الموقف إلى إيجاد حل.

٢ – لا يملك الشخص إجراءً جاهزًا متاحًا لإيجاد الحل.

٣ – يجري الشخص محاولة لإيجاد الحل.

وطريقة حل المشكلات هي أقرب إلى أسلوب التفكير بطريقة عملية حين تواجهه مشكلة ما، وهذا يمر بالمراحل الآتية في معظم الأحيان:

١ – إثارة المشكلة والشعور بها.

٢ – جمع المعلومات والبيانات المتصلة بالمشكلة.

٣ – تحديد المشكلة واستيعاب طبيعتها ومكوناتها.

٤ – وضع الحلول المحتملة.

٥ – وضع معايير لاختيار الحل الأنسب.

٦ – اختبار صحة الحلول المقترحة واختيار الحل الأنسب.

٧ – وضع خطة لتنفيذ الحل.

٨ – تنفيذ الحل (اتخاذ القرار).

٩ – تعميم النتائج.

دور المعلم في استراتيجية حل المشكلات

١ – أن يكون المعلم نفسه قادرًا على توظيف استراتيجية حل المشكلات ملمًّا بالمبادئ والأسس اللازمة لتوظيفها.
٢ – أن يكون المعلم قادرًا على تحديد الأهداف التعليمية لكل خطوة من خطوات استراتيجية حل المشكلات.
٣ – أن تكون المشكلة من النوع الذي يستثير الطلبة ويتحداهم، لذا ينبغي أن تكون من النوع الذي يستثني التلقين أسلوبًا لحلها.
٤ – استخدام المعلم طريقة مناسبة لتقويم تعلم الطلبة استراتيجية حل المشكلات، لأن كثيرًا من العمليات التي يجريها الطلبة في أثناء تعلم حل المشكلات غير قابلة للملاحظة والتقويم.
٥ – ضرورة تأكد المعلم من وضوح المتطلبات الأساسية لحل المشكلات قبل الشروع في تعلمها، كأن يتأكد من إتقان الطلبة للمفاهيم والمبادئ الأساسيّة التي يحتاجونها في التصدي للمشكلة المعروفة للحل.
٦ – تنظيم الوقت التعليمي لتوفير فرص التدريب المناسب.

إن استراتيجيات الاستقصاء وحل المشكلات تعد من الاستراتيجيات المميزة في التدريس التي تجاوبت مع مبدأ كيفية التعلم مقابل ماهية التعلم. وتتداخل العلاقة بين الاستقصاء وحل المشكلات، حتى أن بعضهم يستخدمها للدلالة على الشيء نفسه، إلا أنها تحمل دلالات مختلفة بين حل المشكلات والعمل الاستقصائي كنشاطين منفصلين، حيث يكمن الفرق في كون حل المشكلات تتطلب من الطلبة الوصول إلى مجموعة أهداف والحصول على حل صحيح، في حين إن العمل الاستقصائي مفتوح النهاية بشكل أكبر، ويهتم أكثر بالعمليات، ويكون اهتمامه في الحصول على الجواب الصحيح بشكل أقل.

ثالثًا : استراتيجية العمل الجماعي (التعلم التعاوني)

التعلم التعاوني هو استراتيجية يعمل الطلبة بوساطتها بشكل مجموعات تتكون كل مجموعة من أربعة إلى ستة من الطلبة من مختلف المستويات، يقومون بالعمل سويًا ويتعلمون من بعضهم لتحقيق الهدف التعليمي المشترك الذي رسمه المعلم، بحيث يتم التنافس بين المجموعات والتعاون بين أفراد المجموعة الواحدة.

العناصر الأساسية للتعلم التعاوني

١ - الاعتماد المتبادل الإيجابي

ويعني شعور كل طالب بالحاجة إلى بقية زملائه، فالنجاح والفشل يرتبطان بنجاح أو فشل أي عنصر من عناصر المجموعة، ويمكن تحقيق هذا الشعور من خلال توزيع الأدوار على أفراد المجموعة وكذلك من خلال التقييم الجماعي لأفراد المجموعة الواحدة.

٢ - المسؤولية الفردية والمسؤولية الزمرية

من الضروري أن يشعر كل فرد بمسوئلية فردية، وذلك لأن لكل فرد في المجموعة جزءًا واضحًا ومحدّدًا من العمل، وكذلك عليه أن يشعر بمسوئلية تجاه التقويم الفردي، وكذلك بمسوئلية زمرية، لأن أداء أي فرد في المجموعة يؤثّر إيجابًا أو سلبًا على بقية الأفراد، ولا يعني ذلك التطفل أو السيطرة على عمل بقية الأفراد.

٣ - التفاعل المعزّز وجهًا لوجه

إن عمل كل فرد من أفراد المجموعة يكمل عمل الآخرين، وفي النهاية فإن مجموعة أعمال أفراد المجموعة تشكل عملاً وإنجازًا مشتركًا، وهذا يقتضي بالضرورة حصول نقاشات وتفاعلات لفظية وإبداء آراء من أجل الوصول إلى صيغة نهائية لتقديم نتائج عمل المجموعة.

٤ - المهارات الشخصية والزمرية:

إضافة إلى تحقيق النتاجات التعليمية، فإن الطلبة من خلال طريقة العمل في مجموعات يتعلمون مهارات اجتماعية مختلفة، مثل الاستماع للآخرين، وطرق المناقشة والحوار، وتقبل الآخرين، واتخاذ القرارات.

دور المعلم في التعلم التعاوني

إن دور المعلم في هذه الاستراتيجية هو المخطط والناصح والمستشار، وهو ناقد حميم يقود ويعكس تجربة المجموعات ويوجهها.

ويشتمل دور المعلم في المجموعات التعليمية التعاونية الرسمية على أربعة أجزاء، هي:

١ - التخطيط

حيث يختار المعلم النتاجات التعلمية المراد تحقيقها، ويحدّد المعلم عدد المجموعات وتعيين أفراد كل مجموعة، كما يعدّ المواد التعليمية اللازمة، ويحدّد الأدوات المختلفة لعناصر المجموعة.

٢ – التأكد من أن المجموعات تعمل بشكل تعاوني

ويتم ذلك من خلال بناء المسؤولية الفردية والمسؤولية الجماعية، وملاحظة النقاشات والتفاعلات اللفظية بين أفراد المجموعة.

٣ – تفقد عمل المجموعات

يتجوّل المعلم بين المجموعات أثناء انشغالهم بالعمل على مهماتهم، ويتأكد من توافر المصادر اللازمة للتعلم، ويصحّح سير العمل في المجموعات إذا انحرفت عن تحقيق هدفها وإذا واجهتهم مشكلة تعيقهم فيمكنه تقديم بعض الأفكار المساعدة.

٤ – التقييم والمعالجة

حين تعرض المجموعة نتائج عملها، يمكن للمعلم معالجة بعض الجوانب المتعلقة بهذه النتائج، كما يعلّق على الجوانب المتعلقة بالمهارات التعاونية لدى أفراد المجموعة، كما أنه يقيّم أداء المجموعة من أجل بث روح التنافس بين المجموعات، ويمكنه استخدام أدوات تقويم مختلفة لهذه الغاية، مثل الاختبارات الفردية أو قوائم الشطب، أو سلالم التقدير، أو غيرها.

رابعًا : استراتيجية التعلم من خلال النشاطات

التعلم من خلال النشاطات هو التعلم الذي يقوم من خلال تنفيذ الطالب لنشاط مقصود وهادف ومخطط له. ويتميز التعلم بهذه الاستراتيجية بتوفير الفرص الحياتية الحقيقية للطلبة للتعلم الذاتي بالإضافة إلى تعزيز الاستقلالية والتعلم التعاوني. ويمكن لهذا النمط من التعليم أن يشجع الطلبة على تحمل مسؤولية تعلمهم.

وتمثل الأنشطة عنصرًا رئيسًا من عناصر المنهاج ويقصد بها:"الجهد العقلي أو البدني الذي يبذله المتعلم (أو المعلم) من أجل بلوغ نتاج ما"، وهذا يشير إلى أن النشاط له مضمون، وله خطة يسير عليها، وله نتاج يسعى إلى تحقيقه، وهو في حاجة إلى تقويم لمعرفة مدى نجاحه في تحقيق النتاج المراد بلوغه.

وتشجع استراتيجيات التعلم القائم على النشاطات الطلبة على التعلم من خلال العمل وتوفير فرص حياتية حقيقية لهم للمساهمة في تعلم موجه ذاتيًا. ويمكن استخدام هذه الاستراتيجية لتفحص وضع غير مألوف أو لا ستكشاف موضوع ما بشكل عميق. وتشتمل استراتيجيات التعلم القائم على النشاطات ما يأتي:

- المناظرة
- زيارة ميدانية
- الألعاب
- تقديم عروض شفوية
- المناقشة ضمن فريق
- التدريب
- الرواية
- التعلم من خلال المشاريع
- الدراسة المسحية
- التدوير carousel

دور المعلم

١ – يحدّد نتاجات التعلم

٢ – يخطّط للنشاطات والفعاليات المتنوعة.

٣ – يراقب نتائج الطلبة باستخدام استراتيجيات تقويم ومعايير تسجيل مناسبة.

٤ – يدعم ويشجّع الطلبة.

٥ – يشجّع على التعاون خلال تنفيذ النشاطات.

خامسًا : التفكير الناقد

يعرف التفكير الناقد بأنه التوقف المؤقت عند الأحكام المسبقة أو الشك الصحيح وتمحيص الآراء في ضوء المعرفة السابقة لدى الفرد وتكوين استنتاجات جديدة بناء على المعرفة.

فالأطفال لا يولدون ولديهم القدرة على التفكير الناقد، وهذه القدرة تتطور بشكل تلقائي لديهم مع نموهم الطبيعي، بل إن التفكير الناقد يتم تعليمه. ويتضمن التفكير الناقد مجموعة كبيرة من المهارات وفي ما بعضها:

١ – التمييز بين الحقائق الثابتة التي يمكن إثباتها أو التحقق من صحتها والادعاءات الذاتية والزعم.

٢ – تحديد التشابهات والاختلافات بين موقفين أو فكرتين حول قضية ما.

٣ – تحديد مصداقية مصادر المعلومات ومراجعتها.

٤ – التمييز بين الاستدلال والتبرير.

٥ – التعرف إلى الادعاءات أو البراهين والحجج الغامضة.

٦ – تطبيق مهارات حل المشكلات التي تعلمها الطالب في مواقف سابقة.

٧ – تحديد المغالطات المنطقية (الاستنتاجات الخطأ).

٨ – تعرّف أوجه التناقض أو عدم الاتساق في مسار عملية الانتقال من المقدمة أو الوقائع وتحديد درجة القوة في البرهان أو الادعاء.

أهمية التفكير النافذ

١ – يعد التفكير الناقد إحدى الضرورات التي يقتضيها العصر الذي نعيش فيه حيث تفجر المعرفة وتنوّع مصادرها.

٢ – يساعد المتعلم على انتقاء مفاهيمه ومهاراته وخبراته فلا يقبل أي معرفة دون إخضاعها لهذا المعيار.

٣ – يتعلم الطالب من خلال التفكير الناقد مهارات التفكير المنطقي، حيث الحجة والإقناع.

٤ – وسيلة لتدريب العقل على أنماط تفكيرمتعددة وصولاً إلى حل المشكلات.

دور المعلم في تعليم التفكير الناقد

١ – يختار المعلم مفاهيم وقضايا لا يوجد اتفاق بشأنها (مناسبة للتدريب على التفكير الناقد).

٢ – يعلم استراتيجيات التفكير بشكل مباشر (وهي تشمل الاستقراء والاستنتاج والتحقق والتلخيص وغيرها).

٣ – يدرب الطلبة على مهارات التفكير المختلفة من خلال التفكير بصوت مرتفعٍ أمام الطلبة.

٤ – يوفّر الوقت المناسب للتفكير خلال الحصة الدراسية ولا يستأثر بالوقت كاملاً.

٥ – يوفّر فرصًا مناسبة للطلبة لشرح أفكارهم وتقديم مسوغاتهم.

٦ – يستخدم الرسومات البيانية والخرائط والجداول البيانية والمنظمات البصرية في التعلم حتى يرى الطلبة عروضها مرئية.

٧ – يعرض أمثلة لوجهات نظر متنوعة حول قضية معينة، ويبيّن المسوغات لكل منها.

٨ – يحترم أفكار الطلبة المتنوعة في المستويات جميعها.

أدوات التقويم

أولاً: قائمة الرصد

تعريفها

قائمة الأفعال/ السلوكات التي يرصدها المعلم أو الطالب أثناء تنفيذ الطالب لمهمة أو مهارة تعليمية، وتسمى أحيانًا قائمة الشطب.

ويقوم الشخص الذي يرصد هذه الأفعال (معلمًا أو طالبًا) برصد الاستجابات على فقراتها باختيار أحد التقديرين من بين الأزواج الآتية (على سبيل المثال):

صواب أو خطا — مُرضٍ أو غير مُرضٍ — موافق أو غير موافق

نعم أو لا — غالبًا أو نادرًا — مناسب أو غير مناسب

ولا تعطي فقرات هذه الأداة تدريجًا (علامة) أثناء عملية الملاحظة، وتعد من أسهل أدوات التقويم من حيث إعدادها وتنفيذها وتصحيحها، ويمكن للطلبة أنفسهم فهمها والتعامل معها بسهولة وكفاءة عالية.

وللتأكد من فعالية هذه الأداة يمكن تطبيقها أكثر من مرة واحدة بحيث يمكن إصدار حكم صحيح على أداء المتعلم.

خطوات إعدادها

١ – تحليل المحتوى لتحديد نتاجات التعلم الجزئية.

٢ – اختيار معايير التقويم المناسبة التي تساعد الراصد في اختيار أحد التقديرين.

٣ – تخصيص علامة مناسبة لكل فقرة من فقرات الأداة حسب أهميتها، وذلك لإصدار حكم على أداء الطالب الكلي في المهمة التعلمية بعد انتهاء الطالب من إنجاز المهمة.

٤ – مناقشة فقرات القائمة مع الطلبة والاتفاق عليها.

وتعد قائمة الرصد من الأدوات المناسبة لتقويم أداء الطلبة عند قيامهم بعمل مشروع ما، فيتم من خلالها رصد الأداء في خطوات تنفيذ المشروع جميعها، أو عند تدريب الطلبة على مهارة معينة تتكون من مجموعة من المهارات الجزئية، حيث يتم من خلالها تحديد جوانب الإتقان وعدم الإتقان في المهارات الجزئية لدى كل طالب.

كما يعد استخدام هذه الأداة مناسبا أيضا في عدد من استراتيجيات التدريس، مثل التعلم التعاوني وحل المشكلات، حيث تساعد في تقويم جوانب تعلم فيها قد لا تكون متاحة باستخدام أدوات أخرى مثل الاختبار.

صفات قائمة الرصد الجيدة

١ – لا يزيد عدد فقراتها عن عشر فقرات.

٢ – فقراتها مكتوبة بلغة بسيطة وواضحة ومحددة.

٣ – الفقرات مكتوبة بشكل متسلسل منطقيًا، أي حسب توقع ظهورها في أداء الطالب.

مثال (١): قائمة رصد مقترحة لتقويم أداء طالب يعمل على حل مشكلة في محتوى أحد الموضوعات.

الرقم	الفقرة	التقدير	
		نعم	لا
١	شعر بالمشكلة.		
٢	تقبّل المشكلة بروح إيجابية.		
٣	حدّد المعطيات والشروط في المسألة بشكل صحيح.		
٤	فهم المشكلة وحدد أبعادها بصورة صحيحة.		
٥	جمع بيانات مفيدة للوصول إلى الحل.		
٦	وضع خطة مناسبة للوصول إلى الحل.		
٧	نّفذ خطة الحل وقام بالإجراءات بصورة صحيحة.		
٨	تحقّق من صحة الحل وراجع إجراءاته.		
٩	طبّق الحل على مواقف مشابهة.		

مثال (٢): قائمة رصد مقترحة لتقويم أداء المهارات الاجتماعية أثناء العمل في مجموعات تعاونية.

الرقم	السلوك	التقدير	
		نعم	لا
١	تقبّل زملاءه في المجموعة نفسها.		
٢	قام بالمهمات الموكلة إليه.		
٣	ساعد زملاءه في المجموعة نفسها عند الحاجة.		
٤	شارك في المناقشة.		
٥	عبرّ عن رأيه بوضوح.		
٦	بادر إلى تحمل أعباء المهمات الطارئة.		

ثانيًا: سلم التقدير

تعريفه

قائمة الأفعال/ السلوكات التي يقدرها المعلم، أو الطالب أثناء قيام الطالب بأداء مهمة تعلمية تتكون من مجموعة من المهارات، ويقابل كل فقرة منها تدريج يعبر عن مستوى أداء الطالب في هذه المهارة الجزئية، حيث يقوم الشخص الذي يستخدم هذه الأداة عند تقويمه لأداء طالب معين برصد الاستجابات على فقراتها من خلال اختيار أحد مستويات التدريج الذي يقابل كل فقرة فيها.

وتعبرّ مستويات التدريج عن مستوى أداء الطالب في كل مهارة جزئية، حيث يمثل أحد طرفيها انعدام المهارة أو الصفة التي يتم تقديرها في حين يمثل الطرف الثاني للتدريج اكتمال هذه المهارة أو الصفة لدى الطالب.

خطوات إعداده

١ – تجزئة المهارة أو المهمة إلى مجموعة من المهارات أو المهمات الجزئية، أو إلى مجموعة من السلوكات المكونة للمهارة المطلوبة.

٢ – اختيار السلوكات المكونة للمهارة التي يتم قياسها حسب تسلسل حدوثها.

٣ – اختيار التدريج المناسب لتقدير ا

١ ٢ ٣ ٤ ٥

دائمًا غالبًا أحيانًا نادرًا

مزاياه

١ – يمكن استعماله بصورة فعالة توفر جهد المعلم ووقته.
٢ – يتصف بدرجة من الموضوعية والثبات أعلى مما تتصف به الملاحظة العادية.
٣ – يستعمل في تقويم أداء أنواع مختلفة ومتعددة من أداء المتعلمين.
٤ – يحدّد بشكل واضح مواطن القوة والضعف في أداء المتعلم ومدى تقدمه في أداء المهمات والمهارات.

مثال (١): سلم تقدير مقترح لتقويم أداء الطالب في إجراء تجربة كيميائية في المختبر.

الرقم	السلوك	التقدير				
١	اتّبع قواعد السلامة عند التعامل مع المواد والأدوات.	١	٢	٣	٤	٥
٢	استخدم الأدوات بصورة صحيحة.	١	٢	٣	٤	٥
٣	أجرى خطوات التجربة حسب التسلسل الصحيح.	١	٢	٣	٤	٥
٤	سجل النتائج التي توصل إليها بصورة منظمة.	١	٢	٣	٤	٥
٥	توصل الى استنتاجات صحيحة.	١	٢	٣	٤	٥
٦	عرض النتائج التي توصل إليها بطريقة مناسبة.	١	٢	٣	٤	٥

ثالثًا: سلم التقدير اللفظي

سلسلة من الصفحات المختصرة التي تبين أداء الطالب في مستويات مختلفة، وهو يشبه تمامًا سلم التقدير ولكنه أكثر تفصيلاً منه، حيث يتم اختيار وصف دقيق لمستوى الطالب في أدائه، وهذا يجعله أكثر فائدة في تحديد مدى تحسن أداء الطالب وكيفيته.

خطوات تصميمه

١ – أشرك الطلبة في وصف تصور للعمل الجيد وبنائه.
٢ – حدّد المعايير (المواصفات) التي تمثل خصائص العمل الجيد وبنائه.
٣ – وصف مستويات الأداء المطلوب تقويمها (الجوانب التي سيتم تقويمها).
٤ – ناقش المعايير والمستويات مع الطلبة وعدلها في ضوء المناقشة إن لزم ذلك.
٥ – صمّم القائمة بالمعايير والمستويات.

استخداماته

يستخدم سلم التقدير اللفظي لتقويم خطوات عمل الطالب في مهمة ما، بحيث يوفّر تقويمًا تكوينيًا يمكن من خلاله تفعيل التغذية الراجعة لعملية التعلم، إضافة إلى التقويم الختامي لمهمة ما مثل المقال والمشروع. ويعد هذا السلم أكثر الأدوات موضوعية ودقة في وصف السلوك في أثناء التعلم كونه يتضمن أوصافًا لفظية واضحة ومحددة حول أداء الطالب في كل مستوى من مستويات التعلم المتنوعة.

أدوات التقويم

دور المعلم في تطوير واستخدام سلم التقدير اللفظي

١ – تطوير المعايير في سلم التقدير اللفظي بمشاركة الطلبة، وهذا يعطي للطلبة فرصة لاستيعاب معايير التقويم وتصور العمل الجيد.
٢ – تشجيع الطلبة على تقويم أدائهم بأنفسهم وتقويم أعمال زملائهم باستخدام هذه الأداة.
٣ – توفير التغذية الراجعة اعتمادًا على مجموعة المعايير في سلم التقدير اللفظي.

مثال (١): يعلم معلم الحاسوب طلبته إنشاء العروض التقديمية (Power Point)، فيناقش مع طلبته الخطوات المتبعة، ثم يناقش معهم بطريقة العصف الذهني معايير الأداء الجيد ومستوياته المتنوعة، ويطلب منهم أمثلة على عروض تقديمية، ثم يطلب من الطلبة تبادل أعمالهم؛ لتقييمها باستعمال سلم التقدير الذي تم مناقشة معاييره ومستوياتها خلال المناقشة من أجل تحسين هذه الأعمال. وفي ما يأتي سلم تقدير لفظي مقترح لتقويم العروض التقديمية:

المعايير	غير مقبول	مقبول	جيد	ممتاز
تصميم الشرائح	لا يوجد تصميم موحد للشرائح، والشرائح مكتظة، والعناصر في كل شريحة غير مرتبة بشكل منطقي.	عناصر الشريحة مرتبة منطقيًا، لكنها مكتظة ولا يوجد نمط موحد في تصميم الشرائح.	عناصر الشريحة مرتبة منطقيًا، والتصميم موحد.	العناصر مرتبة منطقيًا، والتصميم موحد وفيه جانب إبداعي يجعل التصميم مرتبطًا بالمحتوى.
التنقل بين الشرائح	الشرائح غير مرتبة بشكل منطقي.	الشرائح مرتبة منطقيًا، لكن لا يمكن التنقل بينها.	الشرائح مرتبة بشكل منطقي.	الشرائح مرتبة ويمكن التنقل بينها بشكل تسلسلي أو باستعمال الارتباطات التشعبية.
الحركة والصوت	لا يوجد حركة مخصصة أو صوت أو أنها مستخدمة بشكل غير مناسب.	استخدام حركات مخصصة لكنها غير مناسبة.	استخدام حركات مخصصة مناسبة لكن الأصوات غير مناسبة.	استخدام حركة مناسبة وملفتة مع وجود أصوات مناسبة.
دقة المحتوى	المعلومات غير ذقيقة وغير موثقة.	المعلومات دقيقة لكنها غير موثقة.	المعلومات دقيقة لكنها غير موثقة.	المعلومات دقيقة وموثقة.
سلامة اللغة	اللغة المستخدمة غير مقروءة.	اللغة المستخدمة مقروءة جزئيًا مع بعض الأخطاء اللغوية.	اللغة مقروءة مع أخطاء لغوية قليلة.	اللغة المستخدمة بليغة ومعبرة وخالية من الأخطاء اللغوية.
شمول العرض لجوانب الموضوع	لا يوجد أهداف محددة للموضوع في العرض ولا تتضح نقاط البداية والنهاية .	يوجد أهداف متداخلة لكن المحتوى لا يتناسب معها	يوجد أهداف محددة لكن لم يتم شمول بعض الأهداف بصورة كافية.	الأهداف واضحة ومحددة، والعرض يشمل الأهداف جميعها ويغطيها بشكل كامل ومتكامل.

رابعًا: سجل وصف التعلم

تعريفه

سجل منظم يكتب فيه الطالب عبارات حول أشياء قرأها، أو شاهدها، أو خبرات مر بها في حياته الخاصة، حيث يسمح له بالتعبير بحرية عن آرائه الخاصة واستجاباته حول ما تعلمه.

ويعد سجل سير التعلم تعبيرًا مكتوبًا يصف به الطالب عملية تعلمه، وبذلك يتيح للطلبة فرصة التوسع في التعبير عن انطباعاتهم الأولية بحرية وربط تلك الخبرة مع الأنواع الأخرى من التعلم، فالكتابة اليومية أو الأسبوعية تحسن من طلاقة الطلبة في الكتابة وتطور إبداعاتهم.

ويتطلب تطبيق هذه الأداة بيئة تعلم آمنة وتنظيمًا خاصًا من الإدارة بحيث يكون هذا النوع من التقويم جزءًا من عملية التعلم.

ارشادات لتطبيق هذا السجل

١ – يحتفظ الطلبة بسجل سير تعلمهم.
٢ – يجمع المعلم سجلات الطلبة دوريًا لقراءتها والتعليق عليها.
٣ – يستطيع الطالب في بعض الأوقات مراجعة ما أنجزه من أعمال بقصد تحسينها أو إكمالها.

كما يمكن للمعلم تزويد الطلبة بمجموعة من الجمل المفتاحية التي يمكن أن تساعدهم في الكتابة والتعبير من خلال هذا السجل، مثل:

- أفضّل أن ....
- أعتقد أن ....
- لو أتيحت لي الفرصة...............
- أحبّ ....
- ألاحظ ....
- من الصعب أن أصدّق ....
- تأثّرت بـ............................
- الشخصية الرئيسة في القصة، هي ......
- الفكرة الرئيسة ....

وفي ما يأتي نماذج مقترحة لبطاقات سجل سير التعلم:

أدوات التقويم

بطاقـة/ نموذج (١)

الاسم: .... الموضوع .... التاريخ: ....

انطباعات الطالب:
....
....
....
....

ملاحظات المعلم:
....
....

بطـاقـة/ نموذج (٢)

الاسم: .... الموضوع .... التاريخ: ....

الهدف من النشاط: ....
....

العمل الذي قمت به: ....
....

تعلّمت من النشاط: ....
....

حسَّنَ هذا النشاط مهارتي في ....
....

ملاحظاتي
....
....

ملاحظات المعلم:
....
....

خامسًا: السجل القصصي

تعريفه

سجل يتضمن وصفًا قصيرًا من قبل المعلم لما تعلمه الطالب، حيث يدون أكثر الملاحظات أهمية حول مهارات العمل ضمن المجموعة (العمل التعاوني).

خطوات مستخدمة

١ – ملاحظة سلوك الطالب.
٢ – تسجل الأحداث بطريقة وصفية.
٣ – تحديد الزمان والمكان.
٤ – التعرّف إلى النمط السلوكي الذي يتكرر حدوثه.
٥ – وضع فروض على سلوك المتعلم.
٦ – اختبار الفروض في ضوء الأنماط المتكررة.
٧ – توثيق اسم الملاحظ (طالبًا أو معلمًا).
٨ – إضافة بعض التفسيرات للسلوك سواء أكان إيجابًا أم سلبا.

خصائصه

١ – يعطي مؤشرات صادقة في تعرف مهارات المتعلم واهتماماته وسلوكه وشخصيته بشكل عام.
٢ – يمكن الاستفادة منه لأغراض تنبؤية، أو إرشادية، أو توجيهية، أو علاجية.
٣ – يتطلب وقتًا طويلاً للكتابة والمتابعة والتفسير.

دور المعلم في تطويره واستخدامه

١ – اختيار طريقة للرصد عند إكمال السجلات.
٢ – تحديد الملاحظات المهمة أو ذات الدلالة للمتعلم.
٣ – توثيق الملاحظة وقت حدوثها كلما كان ذلك ممكنًا.
٤ – تفسير المعلومات المسجلة، للمساعدة في تخطيط الخطوات اللاحقة للمتعلم.

مثال (١): تمثل البطاقة الآتية بطاقة افتراضية في السجل القصصي لأحد الطلاب لدى معلم اللغة العربية:

اسم الطالب	الصف	التاريخ
أظهر حماسًا عند العمل في مجموعات أكثر منه في العمل الفردي. يفضل المشاركة في المناقشة الصفية من مكان جلوسه أكثر من الخروج أمام زملائه، حين تم تشجيعه وتعزيز ثقته بنفسه في مواقف متعددة أصبح لديه الثقة الكافية للخروج أمام زملائه ومناقشة أفكاره بطلاقة ودون قيود ذاتية.		

مثال (٢): تمثل البطاقة الآتية بطاقة افتراضية في السجل القصصي لأحدى الطالبات لدى معلمة الرياضيات:

اسم الطالب	الصف	التاريخ
تشارك في المناقشات الصفية بشكل مستمر وتنفذ التدريبات الصفية بصورة جيدة جداً، لكن نتائجها في اختبارات الرياضيات ليست بالمستوى نفسه الذي تظهر به. وقد يعود هذا لعامل القلق لديها، أو إلى أن فقرات الاختبار لم تكن متناسبة مع ما تعلمته الطالبات.		

قائمة المراجع

المراجع العربية

المراجع العربية

١ – إدرة المناهج والكتب المدرسية، (٢٠٠٦)، الإطار العام للمناهج والتقويم، مطبعة الدستور.

٢ – إدارة الامتحانات والاختبارات، (٢٠٠٤)، استراتيجيات التقويم وأدواته (الإطار النظري)، مطبعة الندى.

المراجع الأجنبية

- joyce, B., Weil, m, Showers, B, (1992). Models of teaching.
  Boston: Allyn and Bacon

تم بحمد الله