



موقع منهجي  
www.mnhaji.com



وزارة التعليم  
Ministry of Education

# ملخص مادة الرياضيات 1-2

التعليم الثانوي  
نظام المسارات  
السنة الثانية



## الفصل الأول الدوال والمتباينات

1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

1-2 العلاقات والدوال

1-3 دوال خاصة

1-4 تمثيل المتباينة الخطية ومتباينة القيمة  
المطلقة بيانيا

1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا

1-6 البرمجة الخطية والحل الأمثل

## 1-1 خصائص الأعداد الحقيقية

الأعداد الحقيقية  $R$  :

تتضمن الأعداد الحقيقية مجموعات مختلفة من الأعداد منها :

المجموعة	التعريف + مثال
الأعداد غير النسبية ( $I$ )	هي أعداد لا يمكن كتابتها على صورة كسر اعتيادي أو هي أعداد تكتب بصورة كسور عشرية ليست منتهية وليست دورية مثال : الجذور التربيعية للأعداد التي ليست مربعات كاملة، $\pi$ ، $-\sqrt{7}$
الأعداد النسبية ( $Q$ )	هي جميع الكسور الاعتيادية التي تكتب على صيغة $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$ أو الكسور العشرية ( المنتهية أو الدورية) سواء كانت موجبة أو سالبة . مثال : $0.452$ ، $-\frac{3}{5}$ ، $\frac{2}{7}$ ، $-0.3$
الأعداد الصحيحة ( $Z$ )	هي جميع الأعداد التي تكون بدون فواصل عشرية ( موجبة أو سالبة ) بالإضافة الى الصفر ، مثال : $14$ ، $-\sqrt{25}$ ، $-3$
الأعداد الكلية ( $W$ )	هي الأعداد الطبيعية بالإضافة الى الصفر ، مثال $0$ ، $6$ ، $9$
الأعداد الطبيعية ( $N$ )	هي جميع الأعداد ( الموجبة ) التي تكون بدون فواصل عشرية ، مثال : $\sqrt{64}$ ، $14$

خصائص الأعداد الحقيقية  $R$  : لاي أعداد حقيقية  $a, b, c$  فإن :

الخاصية	الجمع	الضرب
التبديلية	$a + b = b + a$ $5 + 7 = 7 + 5$	$a \cdot b = b \cdot a$ $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(7 + 5) + 1 = 7 + (5 + 1)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(9 \cdot 3) \cdot 2 = 9 \cdot (3 \cdot 2)$
العنصر المحايد	$a + 0 = a$ $4 + 0 = 4$	$1 \cdot a = a$ $1 \cdot 8 = 8$
النظير	$0 + a = a$ $0 + 3 = 3$	$a + (-a) = 0$ $3 + (-3) = 0$
الانغلاق	$(a + b) \Rightarrow (2 + 6) \in R$	$(a \cdot b) \Rightarrow (8 \cdot 9) \in R$
التوزيع	من اليمين $(a + b) \cdot c = ac + bc$	من اليسار $c(a + b) = ca + cb$

النظير الجمعي والنظير الضربي

النظير الضربي ( مقلوب العدد )	النظير الجمعي ( عكس إشارة العدد )	العدد
$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$-\sqrt{17}$	$\sqrt{17}$
$-\frac{9}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{9}$

تبسيط العبارات الجذرية : فيها نستخدم خاصية التوزيع والتجميع

مثال : بسط العبارة الآتية	$5(3x + 6y) + 4(2x - 9y)$
خاصية التوزيع	$5(3x) + 5(6y) + 4(2x) + 4(-9y)$
التبسيط	$15x + 30y + 8x - 36y$
خاصية التجميع/ التبسيط	$(15 + 8)x + (30 - 36)y = 23x - 6y$

## 1-2 العلاقات والدوال

### العلاقة

هي مجموعة من الأزواج المرتبة  $(x, y)$  ولها 3 حالات هي :

الحالة	مثال
العلاقة	$\{(2,3), (2,7)\}$
الدالة	$\{(-1,5), (4,5), (0,7)\}$
الدالة المتباينة	$\{(2,5), (4,3), (1,6)\}$
ملاحظة : كل دالة هي علاقة وليس كل علاقة دالة	

مجموعة قيم  $x$   
تسمى مجال  
مجموعة قيم  $y$   
تسمى مدى

### طرق وصف العلاقة

أزواج مرتبة	جداول	المخطط السهمي	التمثيل البياني												
$\{(3, -4), (-1, 0), (5, 0)\}$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>-4</td> <td>-5</td> </tr> <tr> <td>-2</td> <td>-4</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-3</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>-1</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	-4	-5	-2	-4	0	-3	2	-2	4	-1	<p>بداية السهم تكون <math>x</math> (مجال) نهاية السهم تكون <math>y</math> (مدى)</p>	
x	y														
-4	-5														
-2	-4														
0	-3														
2	-2														
4	-1														

لاي تمثيل بياني يمكن عمل اختبار الخط الرأسي لمعرفة فيما كان التمثيل يعبر عن علاقة أو دالة .

### اختبار الخط الرأسي

دالة :	علاقة :
إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط	إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة

لتمثيل أي معادلة نكون جدول لبعض قيم  $x$  التي تحقق المعادلة .

### تمثيل العلاقة

يسمى $y$ المتغير التابع	يسمى $x$ المتغير المستقل	نستعمل الرمز $f(x)$ بدلا من $y$
----------------------------	-----------------------------	------------------------------------

### إيجاد قيمة دالة

مثال : إذا كان  $f(x) = 3x^2 + 1$  فأوجد كلا مما يلي :

$$f(7)$$

$$f(7) = 3(7^2) + 1 \Rightarrow 3(49) + 1 \Rightarrow 148$$

$$f(5a)$$

$$f(5a) = 3((5a)^2) + 1 \Rightarrow 3(5^2) \cdot (a^2) + 1$$

$$3(25) \cdot a^2 + 1 \Rightarrow 75a^2 + 1$$

### 1-3 دوال خاصة

( دالة متعددة التعريف ، دالة أكبر عدد صحيح ، دالة القيمة المطلقة )

هي دالة لها تعريفيين أو أكثر ولكل تعريف شرط خاص به

1. دالة متعددة التعريف

خطوات التمثيل :

1. نكون جدول

2. نعوض النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة عند كل تعريف فيصبح لدينا زوج مرتب

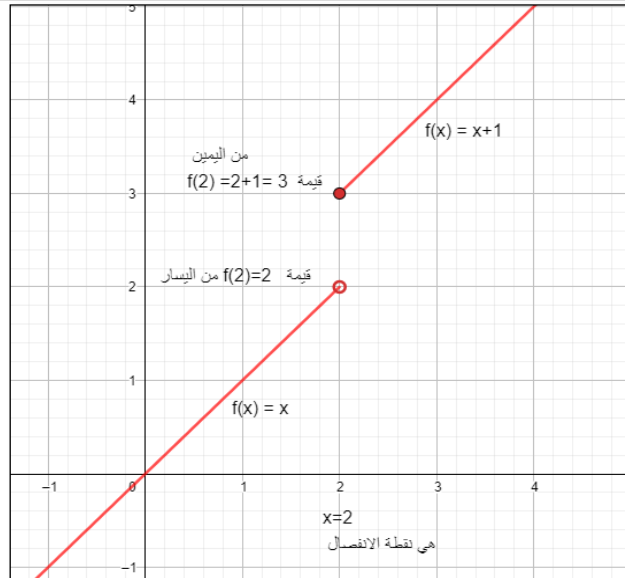
3. نختار قيمة لـ  $x$  تحقق الشرط في كل تعريف و يصبح لدينا زوج مرتب آخر

$$f(x) = \begin{cases} \text{تعريف 1} , & \text{شرط 1} \\ \text{تعريف 2} , & \text{شرط 2} \end{cases}$$

مثال : مثل بيانيا

$$f(x) = \begin{cases} x , & x < 2 \\ x + 1 , & x \geq 2 \end{cases}$$

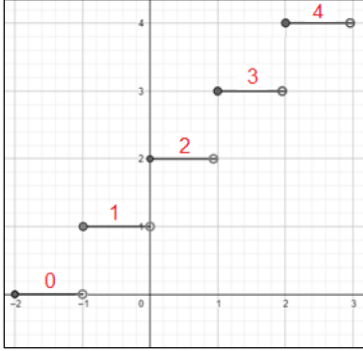
$f(x) = x$	$f(x) = x + 1$
<b>نعوض النقطة التي يتغير عندها تعريف الدالة (<math>x = 2</math>)</b>	
$f(2) = 2$ فالزوج المرتب هو (2,2)	$f(2) = 2 + 1 = 3$ فالزوج المرتب هو (2,3)
<b>نعوض قيمة لـ <math>x</math> تحقق الشرط</b>	
$f(x) = x$ $x < 2$	$f(x) = x + 1$ $x \geq 2$
نختار $x = 0$ مثلا $f(0) = 0$ فالزوج المرتب هو (0,0)	نختار $x = 3$ مثلا $f(3) = 3 + 1 = 4$ فالزوج المرتب هو (3,4)
الأزواج المرتبة التي تمثيل المستقيم 1 ، هي : (0,0) و (2,2)	الأزواج المرتبة التي تمثيل المستقيم 2 ، هي : (2,3) و (3,4)



## 2. الدالة الدرجية ومن أمثلتها دالة أكبر عدد صحيح

الدالة الرئيسية الام لها  $f(x) = [x]$  مجالها  $R$  ومداهها  $Z$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$



عند تمثيلها نعيد كتابة التعريف  
ونكتفي ب 4 قيم لـ  $f(x)$  وب 4 فترات لـ  $x$   
**ملاحظة:** شكل التمثيل البياني قطع مستقيمة  
طول الدرجة =  $\left| \frac{1}{\text{معامل } x} \right|$

**مثال:**  $f(x) = [x] + 2$   
طول الدرجة = 1

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 2 = 1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 + 2 = 2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 + 2 = 3 & 1 \leq x < 2 \\ 2 + 2 = 4 & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

تحدد على محور  $x$   
تمثل على محور  $y$   
على شكل قطعة مستقيمة

الدالة الرئيسية الام لها  $f(x) = |x|$  مجالها  $R$  ومداهها  $R^+$

## 3. دالة القيمة المطلقة

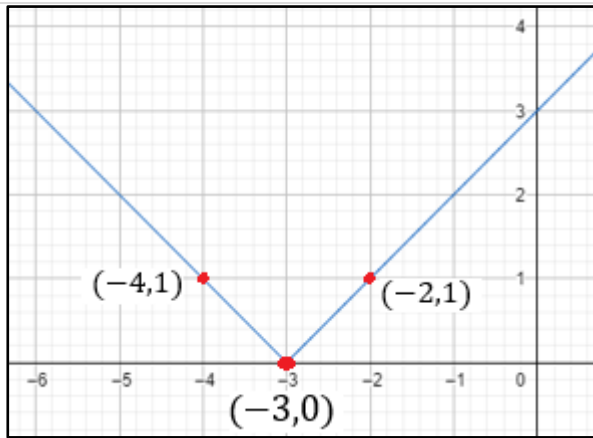
خطوات التمثيل:

- إيجاد صفر ما داخل المقياس
- نختار قيمتين لـ  $x$ :  
قيمة أكبر من صفر ما داخل المقياس  
قيمة أصغر من صفر ما داخل المقياس

عند تمثيلها نعيد كتابتها من خلال تكوين جدول

**ملاحظة:** شكل التمثيل البياني  $V$

**مثال:** مثل بيانيا :  $y = |x + 3|$



نفرض قيمتين لـ  $x$   
قيمة أكبر من صفر الدالة وقيمة  
أصغر من صفر الدالة

$x$	$y =  x + 3 $	الأزواج المرتبة
-2	$f(-2) =  -2 + 3  =  1  = 1$	$(-2, 1)$
-4	$f(-4) =  -4 + 3  =  -1  = 1$	$(-4, 1)$

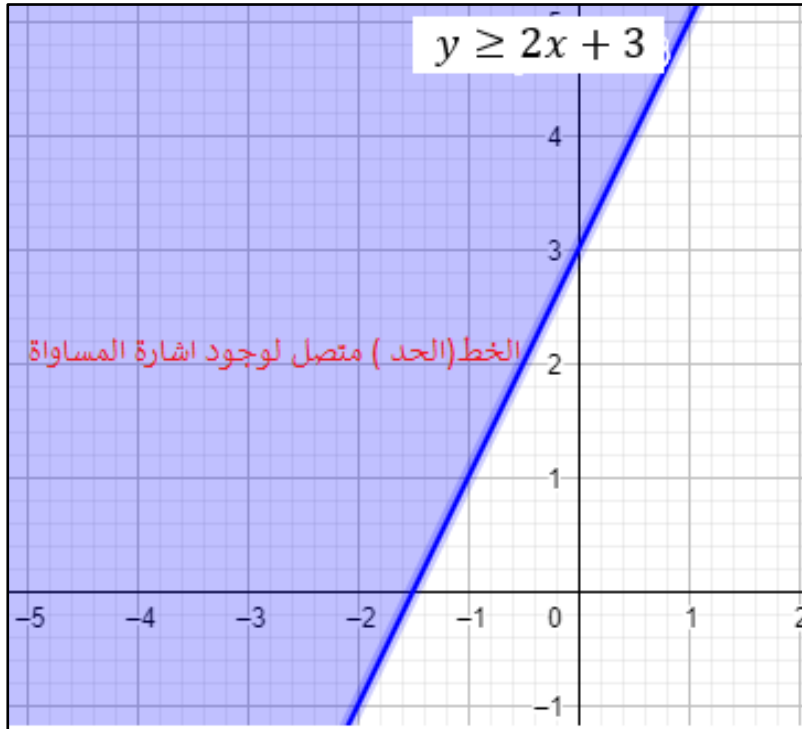
إيجاد صفر ما  
داخل المقياس

$$x + 3 = 0 \\ \Rightarrow x = -3 \\ \text{فالزوج المرتب هو} \\ (-3, 0)$$

## 1-4 تمثيل المتباينات الخطية ومتباينات القيمة المطلقة بيانياً

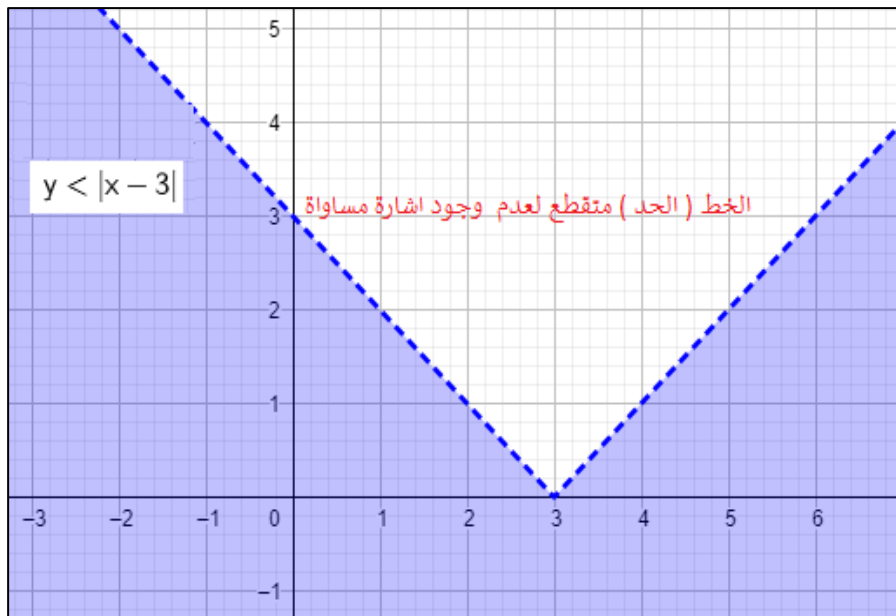
### خطوات تمثيل المتباينة بيانياً

1. تحويل المتباينة الى معادلة .		
2. نختار قيمتين لـ $x$ لإيجاد زوجين مرتبين لتمثيل حد المتباينة		
متصل إذا كان لدينا احدى العلامتين $\leq, \geq$	3. نرسم حد المتباينة	
منفصل إذا كان لدينا احدى العلامتين $>, <$		
4. نختار زوج مرتب ونعوضه في المتباينة : • إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة صحيحة نظل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب. • إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة خاطئة نظل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب.		
مثل بيانياً : $y \geq 2x + 3$		
منطقة الحل (التظليل)	نفرض قيمتين لـ $x$	نحول المتباينة الى معادلة
نختار زوج مرتب (1,1) نعوضه في المتباينه $y \geq 2x + 3$ $1 \geq 2(1) + 3$ $1 \geq 5$ خاطئة ؛ أي نظل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب (1,1)	$x$	الأزواج المرتبة
	$y = 2x + 3$	
	0	$y = 2(0) + 3 = 3$ (0,3)
	1	$y = 2(1) + 3 = 5$ (1,5)
		الحد متصل لوجود المساواة $y = 2x + 3$



## خطوات تمثيل متباينة القيمة المطلقة

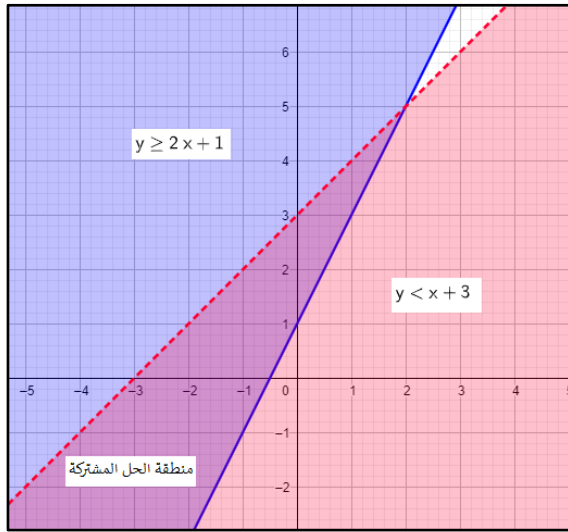
1. تحويل المتباينة الى معادلة .			
2. إيجاد صفر ما داخل المقياس نختار قيمتين لـ $x$ قيمة أكبر من صفر ما داخل المقياس وقيمة أصغر منه .			
متصل إذا كان لدينا احدي العلامتين $\leq, \geq$		3. نرسم حد المتباينة	
منفصل إذا كان لدينا احدي العلامتين $>, <$			
4. نختار زوج مرتب داخل $V$ أو خارجها ونعوضه في المتباينة : <ul style="list-style-type: none"> <li>إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة صحيحة نظل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب.</li> <li>إذا كانت النتيجة النهائية للمتباينة خاطئة نظل المنطقة التي لا تحوي الزوج المرتب.</li> </ul>			
مثل بيانيا : $y <  x - 3 $			
منطقة الحل ( التظليل)	نفرض قيمتين لـ $x$ قيمة أكبر من صفر الدالة وقيمة أصغر من صفر الدالة		نحول المتباينة الى معادلة
نختار زوج مرتب (1,1) نعوضه في المتباينه $y <  x - 3 $ $1 <  1 - 3 $ $1 \leq  -2 $ $1 < 2$ صحيحة ؛ أي نظل المنطقة التي تحوي الزوج المرتب (1,1)	$x$	$y =  x - 3 $	الأزواج المرتبة
	1	$y =  1 - 3 $ $=  -2  = 2$	(1,2)
	5	$y =  5 - 3 $ $=  2  = 2$	(5,2)
			الحد متقطع لعدم وجود المساواة $y =  x - 3 $ نجد صفر ما داخل المقياس $x - 3 = 0$ $x = 3$ فالزوج المرتب (3,0)



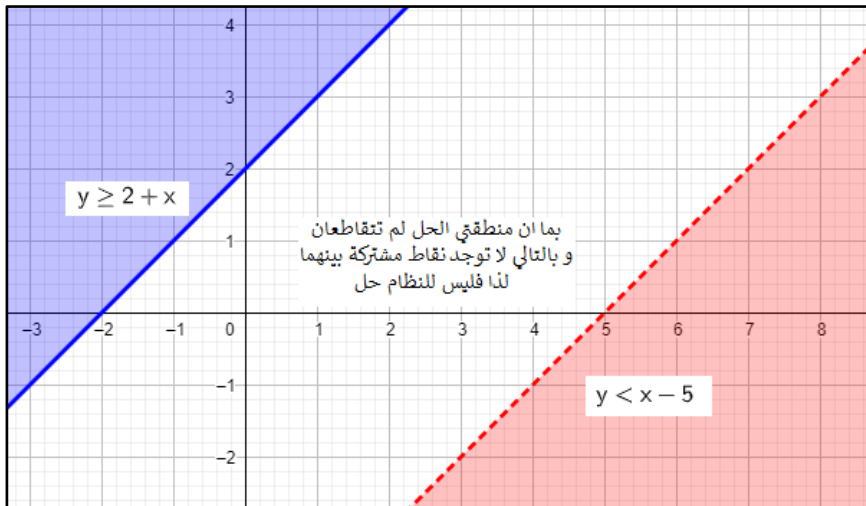


## 1-5 حل أنظمة المتباينات الخطية بيانيا

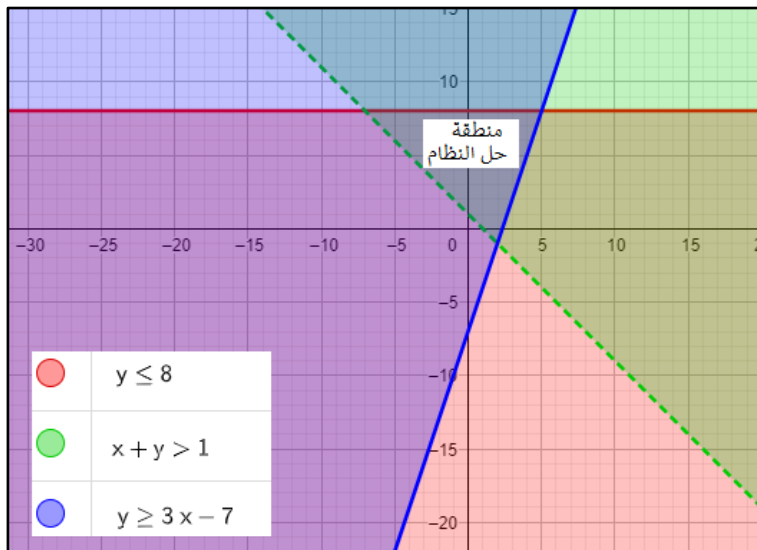
عند تمثيل نظام من متباينتين نرسم كل متباينة لوحدها في النهاية نظل منطقة الحل



مناطق الحل  
( لنظام من متباينتين )  
1. منطقة حل المشتركة  
( التي ظللت مرتين )



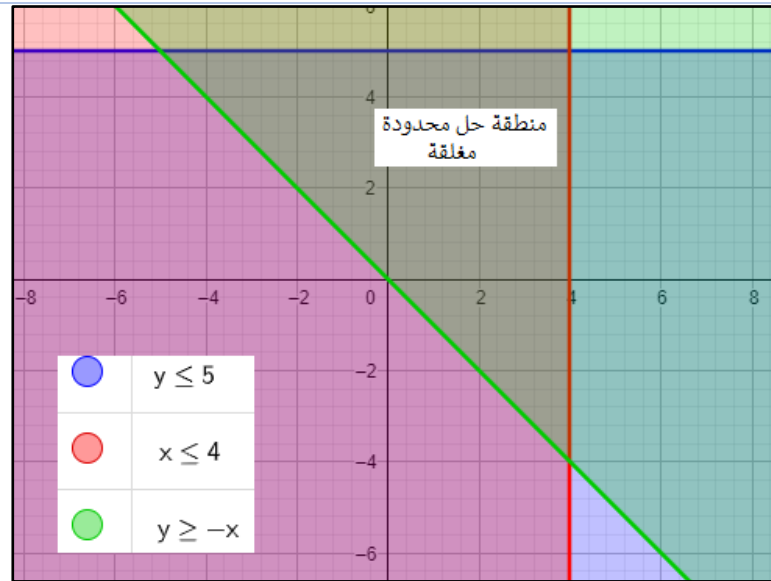
2. لا يكون هناك منطقة حل  
مشتركة أي انه لا يوجد حل  
لنظام المتباينتين



عند تمثيل 3 متباينات

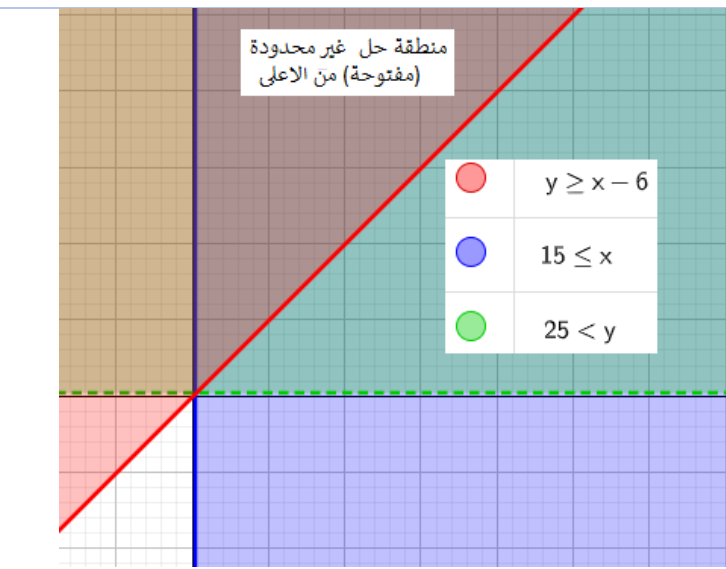
- قد يتكون لدينا مناطق حل مغلقة ( مثلث مثلا )
- وقد تكون منطقة الحل المشتركة مفتوحة

مناطق الحل



1. محدودة ( مغلقة )  
محصورة بقيود

يوجد قيمة عظمى وقيمة صغرى للدالة  
تظهر دائما عند رؤوس منطقة الحل



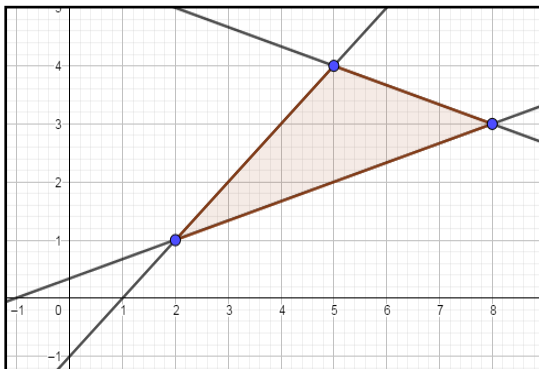
2. غير محددة

( مفتوحة و ممتدة من أحد الأطراف )

ويمكن أن تحتوي الدالة على قيمة  
عظمى أو قيمة صغرى

مثال : استعمل التمثيل المجاور لتحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحل و اوجدي القيمة العظمى والقيمة

الصغرى للدالة  $f(x, y) = x + y$  .



$(x, y)$	$f(x, y) = x + y$
$(5, 4)$	$f(5, 4) = 5 + 4 = 9$
$(2, 1)$	$f(2, 1) = 2 + 1 = 3$
$(8, 3)$	$f(8, 3) = 8 + 3 = 11$

القيمة الصغرى هي 3 ، القيمة العظمى هي 11

## الفصل الثاني المصفوفات

2-1 مقدمة في المصفوفات

2-2 العمليات على المصفوفات

2-3 ضرب المصفوفات

2-4 المحددات وقاعدة كرامر

2-5 النظرير الضربي للمصفوفة وأنظمة  
المعادلات الخطية

## 2-1 مقدمة في المصفوفات

### رتبة المصفوفة

تحدد رتبة المصفوفة بدلالة بعديها ، فمثلا المصفوفة التي تتكون من  $m$  صفا و  $n$  عموديا تكون من الرتبة  $m \times n$  .

### المصفوفة

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات او أعداد في صفوف أفقية او أعمدة راسية، محصورة بين قوسين

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{3 صفوف} \\ \text{عمودين} \end{array} \right\}$$

بما أن  $A$  فيها 3 صفوف و عمودين ، فإن رتبته  $3 \times 2$  قيمة العنصر  $a_{32}$  في المصفوفة  $A$  يساوي 2 .

يدل الرمز  $a_{32}$  على العنصر الواقع في الصف الثالث والعمود الثاني من المصفوفة  $A$

### أسماء خاصة لبعض المصفوفات

المصفوفة الصفرية

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جميع عناصرها أصفار

المصفوفة المربعة

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

عدد الصفوف = عدد الأعمدة

مصفوفة العمود

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

تحتوي عمودا واحدا

مصفوفة الصف

$$[3 \quad 5 \quad -2]$$

تحتوي صفا واحدا

### المصفوفتان المتساويتان

هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها وكل عنصر في إحدهما يساوي العنصر المناظر له في الأخرى .

$$A = B \quad \text{فإن} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{إذا كانت}$$

## 2-2 العمليات على المصفوفات

### جمع المصفوفات وطرحها

يمكن جمع مصفوفتين او طرحهما إذا فقط اذا كان لهما نفس الرتبة.

مثال 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتان من الرتبة نفسها  $m \times n$  يمكن إجراء الجمع و الطرح عليهما .

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}$$

### ضرب المصفوفة في عدد ثابت

حاصل ضرب مصفوفة  $A$  من الرتبة  $m \times n$

في عدد ثابت  $k$  هي مصفوفة من الرتبة  $m \times n$

(ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في ذلك العدد الثابت)

مثال 2 :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2C = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -12 & 0 \end{bmatrix}$$

### خصائص جمع المصفوفات

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات

$$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$$

خاصية التوزيع للضرب في عدد

$$K(\underline{A} + \underline{B}) = K\underline{A} + K\underline{B}$$

الخاصية الإبدالية لجمع المصفوفات

$$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$$

## 2-3 ضرب المصفوفات

### ضرب المصفوفات

$$A \cdot B = AB$$

$m \times r$        $r \times t$        $m \times t$   
 متساويان  
 AB

لضرب مصفوفتين لابد من تحقق شرط الضرب هو عدد اعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية، اما غير ذلك فانه غير معرف.

**مثال 1:** هل يمكن اجراء عملية الضرب على  $A_{4 \times 2} \cdot B_{2 \times 3}$

نعم يمكن الضرب لان اعمدة المصفوفة الأولى = صفوف المصفوفة الثانية

وبذلك توجد قاعدة لعملية ضرب المصفوفات وهي

اضرب عناصر الصف الاول في المصفوفة الاولى في عناصر العمود الاول في المصفوفة الثانية . ثم اجمع نواتج الضرب وضع العنصر الناتج في الصف الاول العمود الاول من مصفوفة الناتج وهكذا ....

**مثال 2:** أوجد  $AB$  :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

أعمدة المصفوفة الثانية →	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$
صفوف المصفوفة الاولى ↓		
$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$	$3(0) + 1(-1) = -1$	$3(2) + 1(4) = 10$
$\begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix}$	$2(0) + (-5)(-1) = 5$	$2(2) + (-5)(4) = -16$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & -16 \end{bmatrix}$$

### خصائص ضرب المصفوفات

خاصية التوزيع من اليسار للمصفوفات

$$\underline{C} (\underline{A} + \underline{B}) = \underline{C} \underline{A} + \underline{C} \underline{B}$$

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات

$$(\underline{A} \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} (\underline{B} \underline{C})$$

خاصية التوزيع من اليمين للمصفوفات

$$(\underline{A} + \underline{B}) \underline{C} = \underline{A} \underline{C} + \underline{B} \underline{C}$$

الخاصية التجميعية لضرب المصفوفات في عدد

$$K (\underline{A} \underline{B}) = (K \underline{A}) \underline{B} = \underline{A} (K \underline{B})$$

**ملاحظة:** عملية ضرب المصفوفات غير إبدالية

## 2-4 المحددات وقاعدة كرامر

### المحددات

كل مصفوفة مربعية لها محددة. وهو الشرط الأساس لايجاد المحدد (تكون المصفوفة مربعية)

وبالتالي يكون محدد المصفوفة من النوع  $2 \times 2$  محدد من الدرجة 2

ويرمز لمحددة المصفوفة  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  بالرمز  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  وكذلك يرمز لمحدد المصفوفة  $A$  بالرمز  $|A|$

طريقة إيجاد المحدد من النوع  $2 \times 2$  هو

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

( حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الاخر )

**مثال 1:** اوجد قيمة المحدد التالي  $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5(9) - (-4)8 = 77$

### قاعدة الأقطار

تسمى محددات المصفوفات من الرتبة  $3 \times 3$  محددات من الدرجة الثالثة وفي هذه الحالة

يمكننا حساب هذه المحددات باستعمال قاعدة الأقطار

**مثال 2:** اوجد قيمة المحدد التالي باستعمال قاعدة الأقطار  $\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

الخطوة 1 : أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

الخطوة 2: جد حاصل ضرب الأقطار و موازياتها .

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{matrix}$$

القطر الرئيسي

$$\begin{aligned} &= 8(4)(5) + 3(2)(1) + 4(2)(6) \\ &= 160 + 6 + 48 = 214 \end{aligned}$$

القطر الاخر

$$\begin{aligned} &= 4(4)(1) + 8(2)(6) + 3(2)(5) \\ &= 16 + 96 + 30 = 142 \end{aligned}$$

الخطوة 3: اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول .

$$214 - 142 = 72$$

اذن قيمة المحدد هي 72

## مساحة المثلث

تستعمل المحددات أيضا لإيجاد مساحة المثلث اذا كانت احداثيات رؤوس المثلث معلومة

**مثال 3:** استعمل المحددات لإيجاد مساحة المثلث الذي رؤوسه  $(-1, 4)$ ,  $(3, 6)$ ,  $(1, 2)$ .  
نوجد قيمة المحدد باستعمال قاعدة الأقطار

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (1(6)(1) + 2(1)(-1) + 1(3)(4)) - (1(6)(-1) + 1(1)(4) + 2(3)(1))$$

$$= (6 - 2 + 12) - (-6 + 4 + 6) = 16 - 4 = 12$$

$$|A| = \frac{1}{2} (12) = 6$$

**ملاحظة:** نستعمل القيمة المطلقة للمقدار  $A$  حتى نضمن ان المساحة موجبة وغير سالبة.

## قاعدة كرامر

$$ax + by = m$$

$$fx + gy = n$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|c|}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|c|}$$

وحيث ان  $c$  مصفوفة المعاملات

$$c = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$$

$$5x - 6y = 15$$

**مثال 4:** حل النظام الاتي باستخدام قاعدة كرامر:

$$3x + 4y = -29$$

الخطوة 1: نوجد محددة مصفوفة المعاملات

$$|c| = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(3) - (-6(3)) = 38$$

الخطوة 2: نوجد قيم  $x, y$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|c|} = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -6 \\ -29 & 4 \end{vmatrix}}{38} = \frac{60 - 174}{38} = -3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|c|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -29 \end{vmatrix}}{38} = \frac{-145 - 45}{38} = -5$$

حل النظام هو:  $(-3, -5)$

معلومة

اذا كانت قيمة محدد مصفوفة المعاملات **لا يساوي** الصفر فان له حل وحيد  
اما اذا كان قيمة المحدد **يساوي** صفرا فان له عدد لانهائي من الحلول او لا حل له



## 2-5 النظرير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيس يساوي الواحد ، والباقي اصفار ورمزها (  $I$  )

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة وحدة من النوع } 3 \times 3, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة وحدة من النوع } 2 \times 2$$

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب (  $I$  ) :

لاي مصفوفة مربعة  $A$  لها نفس رتبة مصفوفة الوحدة  $I$  فان  $A \cdot I = I \cdot A = A$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{مثال 1:}$$

النظرير الضربي للمصفوفة تسمى المصفوفة  $B$  نظير ضربي للمصفوفة  $A$  اذا فقط اذا كان :

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A} = \underline{I} \text{ ويرمز للمصفوفة } \underline{B} \text{ بالرمز } \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{I} \quad \text{يكون :}$$

خطوات ايجاد النظرير الضربي للمصفوفة من النوع  $2 \times 2$  فان يكون على النحو التالي :

1. ايجاد محددة المصفوفة واذا كانت المحددة تساوي صفر فانه لا يوجد نظير ضربي للمصفوفة واذا كانت لا تساوي الصفر فانه يوجد نظير ضربي للمصفوفة
2. نبادل بين عناصر القطر الرئيس و نغير إشارة كل من عناصر القطر الاخر
3. نضرب المصفوفة في  $\frac{1}{\text{محددة المصفوفة}}$

**مثال 2:** اوجد النظرير الضربي للمصفوفة ان وجد .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{الخطوة 1 : ايجاد محددة المصفوفة: } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-2) - (8)(0) = 2$$

$$\text{الخطوة 2 : نبادل بين عناصر القطر الرئيس و نغير إشارة كل من عناصر القطر الاخر} \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{الخطوة 3: نضرب المصفوفة في } \frac{1}{\text{محددة المصفوفة}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

## المعادلة المصفوفية

$$\begin{aligned} ax + by &= m \\ fx + gy &= n \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ fx + gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

تستخدم لحل النظام من معادلتين

حيث

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مصفوفة المتغيرات

$$B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت

وحل المعادلة المصفوفية هو:  $X = A^{-1} \cdot B$

**مثال 3:** حل نظام المعادلتين الاتيتين باستخدام المعادلة المصفوفية :

$$4x + 5y = 1$$

$$3x + 6y = 2$$

الخطوة 1 : نوجد مصفوفة المعاملات و مصفوفة الثوابت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت

الخطوة 2 : نجد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{((4 \cdot 6) - (5 \cdot 3))} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

الخطوة 3 : نضرب مصفوفة النظير الضربي بمصفوفة الثوابت

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

الخطوة 4: حل النظام هو:  $(\frac{-4}{9}, \frac{5}{9})$

## الفصل الثالث

### كثيرات الحدود ودوالها

1-3 الأعداد المركبة

2-3 القانون العام و المميز

3-3 العمليات على كثيرات الحدود

4-3 قسمة كثيرات الحدود

5-3 دوال كثيرات الحدود

6-3 حل معادلات كثيرات الحدود

7-3 نظريتنا الباقي والعوامل

8-3 الجذور والأصفار

## 3-1 الأعداد المركبة

الوحدة التخيلية هي الجذر التربيعي الموجب للعدد  $-1$  :  $\sqrt{-1} = i$

العدد التخيلي البحت هي الجذور التربيعية لأعداد حقيقية سالبة ولأي عدد حقيقي موجب مثل  $b$

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b^2} = bi \quad \text{فإن :}$$

قوى الوحدة التخيلية



العدد المركب هو عدد يمكن كتابته على الصورة  $(a + bi)$

مثال:  $(2 + 4i)$  أو  $(1 - i)$

يتساوى عدنان مركبان إذا فقط إذه تساوى الجزأين الحقيقيين والجزأين

التخيليين أي أن :  $a + bi = c + di$  إذا فقط إذا كان  $a = c, b = d$

جمع أو طرح عددين مركبين , نقوم بجمع الأجزاء الحقيقية معا الأجزاء التخيلية معا .

جمع وطرح الأعداد المركبة

$$(-1 + 2i) - (4 + 6i) = (-1 - 4) + (2 - 6)(i) = -5 - 4i$$

ضرب الأعداد المركبة لضرب الأعداد المركبة فإننا نستخدم طريقة التوزيع بالترتيب.

ضرب الأعداد المركبة

$$(2 + 4i)(9 - 3i) = 2(9) + 2(-3i) + 4i(9) + 4i(-3i) = 18 - 6i + 36i - 12i^2$$

$$= 18 + 30i - 12(-1) = 30 + 30i$$

العدنان المركبان المترافقان يسمى العدنان  $(a + bi), (a - bi)$  مركبين مترافقين وناتج ضربهما هو

العدنان المركبان المترافقان

عدد حقيقي دائما على صورة  $a^2 + b^2$  ويمكن استعمالها في قسمة عددين مركبين

قسمة الأعداد المركبة

$$\frac{5}{2+4i} = \frac{5}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{5(2)+5(-4i)}{4+16} = \frac{10-20i}{20} = \frac{5}{10} - i$$

## 3-2 القانون العام والمميز

### القانون العام

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية هي  $a x^2 + x b + c = 0$  لكي نحل هذه المعادلة نستخدم ما يسمى بالقانون العام والصيغة هي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

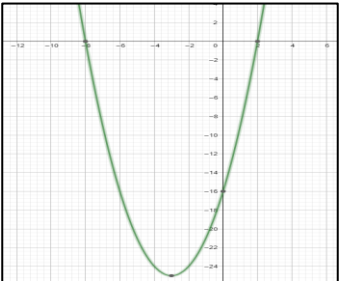
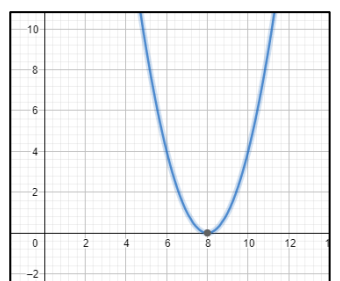
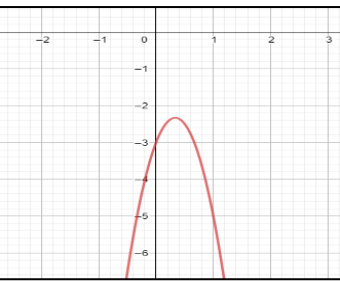
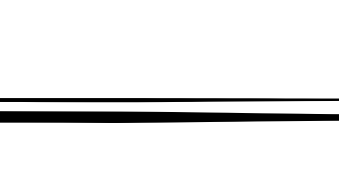
### المميز

هو قيمة ما تحت الجذر في القانون العام

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المميز

### حالات المميز

مثال على التمثيل البياني للدالة المرتبطة بالمعادلة	عدد الجذور وانواعها	قيمة المميز
	جذران حقيقيان نسبيا	$b^2 - 4ac > 0$ مربع كامل
	جذران حقيقيان غير نسبيا	ليس مربع كامل $b^2 - 4ac > 0$
	جذر حقيقي مكرر مرتين	$b^2 - 4ac = 0$
	جذران مركبان مترافقين	$b^2 - 4ac < 0$

### 3-3 العمليات على كثيرات الحدود

#### وحيدة الحد

هي عدد أو متغير أو عبارة ناتجة عن ضرب متغير أو أكثر و أسسها أعداد صحيحة غير سالبة

#### خصائص الأسس

مثال	التعريف	الخاصية	مثال	التعريف	الخاصية
$7^0 = 1$	$x^0 = 1, x \neq 0$	القوى الصفرية	$3^3 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^7$	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	ضرب القوى
$(3^3)^2 = x^{3 \cdot 2}$	$(x^a)^b = x^{ab}$	قوة القوة	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, a \neq 0$	قسمة القوى
$(\frac{x}{y})^2 = \frac{x^2}{y^2}$	$(\frac{x}{y})^a = \frac{x^a}{y^a}$	قوة ناتج القسمة	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}, x \neq 0$	الاس السالب
			$(2k)^4 = 2^4 k^4$	$(xy)^a = x^a y^a$	قوة ناتج الضرب

هي أكبر درجة لوحدات الحد المكونة لها

#### درجة كثيرة الحدود

شروط كثيرة الحدود :

لا تحتوي على متغير في المقام	لا تحتوي على جذر	لا تحتوي على أسس سالبة أو أسس كسرية
------------------------------	------------------	-------------------------------------

عملية تبسيط عبارات تتضمن إعادة كتابتها دون اقواس أو أسس سالبة

#### التبسيط

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما

#### تبسيط وحدات الحد

تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.	لا تتضمن قوى قوة.
لا تتضمن اقواسا أو أسسا سالبة	يظهر كل أساس مرة واحدة.

نتخلص من الاقواس ونجمع او نطرح الحدود المتشابهة

#### جمع كثيرات الحدود وطرحها

نستعمل خاصية التوزيع لضرب وحيدة حد في كثيرة حدود او في ضرب كثيرات الحدود

#### ضرب كثيرات الحدود

## 3-4 قسمة كثيرات الحدود

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

خطوات قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد .

1. توزيع البسط (كثيرة الحدود) على المقام (وحيدة حد) .
2. اقسام كل حد في البسط على المقام .
3. اكتب الناتج في ابسط صورة .

$$\frac{4y^2x - 2xy + 2yx^2}{xy} = \frac{4xy^2}{xy} - \frac{2xy}{xy} + \frac{2yx^2}{xy}$$

$$= 4y - 2 + 2x$$

**مثال 1 :** بسطي العبارة التالية :

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود

عندما يكون قسمة كثيرة حدود على ثنائية هناك طريقتان للحل عن طريق المثال هذا نوضح ذلك الطريقتين

**مثال 2 :** استعملي القسمة الطويلة لاجاد الناتج :  $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$

خطوات خوارزمية كثيرات حدود على أخرى :

1. اكتب كثيرة الحدود في كل من المقسوم والمقسوم عليه بحيث تكون حدودها مرتبة ترتيبا تنازليا حسب درجتها .

2. ابدأ بقسمة الحد الأول في المقسوم على الحد الأول في المقسوم عليه وضع الإجابة في المكان المخصص لذلك .

3. اضرب ناتج القسمة في الخطوة السابقة في المقسوم عليه واكتب الإجابة تحت المقسوم واطرحه من المقسوم .

4. استمر بقسمة الحد الثاني و هكذا حتى نصل الى ان يكون باقي القسمة 0 او كثيرة حدود درجتها اقل من درجة المقسوم عليه .

$$\begin{array}{r} x + 8 \\ x - 5 \overline{) x^2 + 3x - 40} \\ \underline{- x^2 - 5x} \phantom{- 40} \\ 8x - 40 \\ \underline{- 8x - 40} \\ 0 \end{array}$$

## القسمة التركيبية :

هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ثنائية حد .

## خطوات القسمة التركيبية :

1. اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليا بحسب درجتها تاكد من ان المقسوم عليه على الصورة  $x - r$  ثم اكتب الثابت  $r$  في الصندوق و اكتب المعامل الأول اسفل الخط الافقي
2. اضرب المعامل الأول في  $r$  و اكتب الناتج اسفل المعامل الذي يليه .
3. اجمع ناتج الضرب مع المعامل الذي فوقه .
4. كرر الخطوتين السابقتين على ناتج الجمع في الخطوة السابقة حتى تصل الى ناتج جمع العددين في العمود الأخير .
5. الاعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة ، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم والعدد الأخير هو الباقي

**مثال 3 :** استعملي القسمة التركيبية ليجاد الناتج :  $(x^2 + 3x - 40) \div (x - 5)$

	$x^2$	$x$	الحد الثابت	المتغيرات ←
	1	3	-40	المعاملات ←
		+	+	
		5	40	
		8	0	
	1			الباقي ←

ناتج القسمة هو :  $x + 8$  والباقي 0

## تذكير

اذا لم يوجد احد الحدود في كثيرة حدود المقسوم فأضفه وليكن معامل صفر

مثال :  $2x^3 - 5x^2 + 8$

فاكتبه  $2x^3 - 5x^2 + 0x + 8$



## 3-5 دوال كثيرات الحدود

كثيرة الحدود بمتغير واحد عبارة جبرية على الصورة التالية .

اعداد حقيقية ،  $a_n \neq 0$  ،  $n$  عدد صحيح غير سالب . حيث  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

درجة كثيرة الحدود هي اس المتغير ذي أكبر أس فيها.

المعامل الرئيسي هو معامل الحد الاول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية.

كثيرة حدود	مثال	الدرجة	المعامل الرئيسي
الثابتة	14	0	14
الخطية	$2x + 3$	1	2
التربيعية	$5x^2 - 3x + 1$	2	5
التكعيبية	$8x^3 + 12x^2 - 3x + 1$	3	8
الصيغة العامة	$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$	$n$	$a_n$

هي دالة متصلة تكتب على الصورة  $f(x) = a x^b$

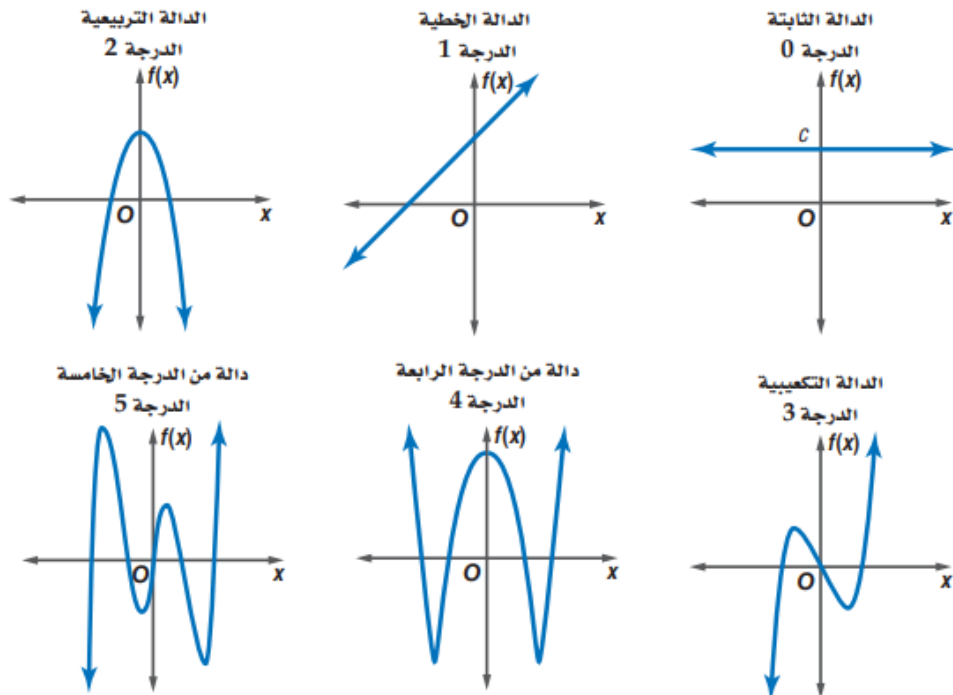
حيث  $a$  عدد حقيقي ،  $b$  عدد صحيح غير السالب

دالة القوة

هو التمثيل البياني لكثيرات الحدود

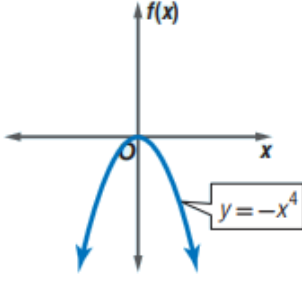
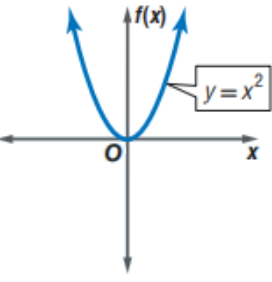
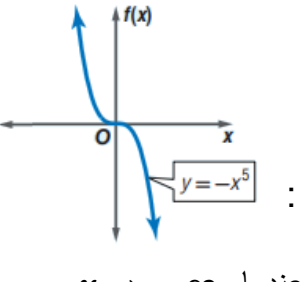
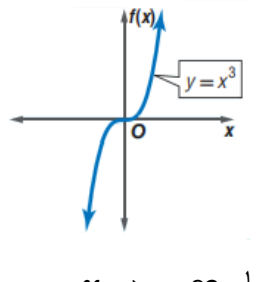
التمثيل البياني لكثيرات الحدود

هذا التمثيل المحور  $x$  ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود وهكذا



## سلوك طرفي الدالة في التمثيل البياني

العاملان الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني هما المعامل الرئيسي و درجة كثيرة الحدود.

 <p>الدرجة : زوجية المعامل الرئيسي : سالب المجال : <math>R</math> المدى : مجموعه الاعداد الحقيقية الأقل من او تساوي القيمة العظمى</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني : ( في الاتجاه نفسة ) عندما <math>x \rightarrow -\infty</math> <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> عندما <math>x \rightarrow +\infty</math> <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p>	 <p>الدرجة : زوجية المعامل الرئيسي : موجب المجال : <math>R</math> المدى : مجموعه الاعداد الحقيقية الاكبر من او تساوي القيمة الصغرى</p> <p>سلوك طرفي التمثيل البياني : ( في الاتجاه نفسة ) عندما <math>x \rightarrow -\infty</math> <math>f(x) \rightarrow +\infty</math> عندما <math>x \rightarrow +\infty</math> <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p>
 <p>الدرجة : فردية المعامل الرئيسي : سالب المجال : <math>R</math> المدى : <math>R</math> سلوك طرفي التمثيل البياني : ( في اتجاهين مختلفين )</p> <p>عندما <math>x \rightarrow -\infty</math> <math>f(x) \rightarrow +\infty</math> عندما <math>x \rightarrow +\infty</math> <math>f(x) \rightarrow -\infty</math></p>	 <p>الدرجة : فردية المعامل الرئيسي : موجب المجال : <math>R</math> المدى : <math>R</math> سلوك طرفي التمثيل البياني : ( في اتجاهين مختلفين )</p> <p>عندما <math>x \rightarrow -\infty</math> <math>f(x) \rightarrow -\infty</math> عندما <math>x \rightarrow +\infty</math> <math>f(x) \rightarrow +\infty</math></p>

## صفر الدالة

صفر الدالة الحقيقي : هو الاحداثي  $x$  لنقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة مع المحور  $x$ .

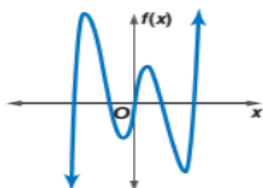
عدد اصفار الدالة الحقيقية : هو عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع المحور  $x$ .

## أصفار الدوال ذات الدرجة الفردية والزوجية

يكون للدوال الفردية عدد فردي من الاصفار المنتمية لمجموعة الاعداد الحقيقية ويكون للدوال الزوجية

الدرجة عدد زوجي من الاصفار أو لا يكون لها اصفار تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية

مثال : الدالة في التمثيل البياني التالي لها 5 اصفار حقيقية



## 3-6 حل معادلات كثيرات الحدود

### طرائق تحليل كثيرات الحدود

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حدان	الفرق بين مربعين الفرق مكعبين مجموع مكعبين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود المربع الكامل	$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
	ثلاثية الحدود بالصورة العامة	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b) = (x + y)(a + b)$

### كثيرة الحدود الأولية

هي كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها إلى كثيرتي حدود درجة كل منهما أقل من درجة كثيرة الحدود المعطاة .

### الصورة التربيعية

الصورة التربيعية لكثيرة الحدود هي:  $au^2 + bu + c$  ،  $a \neq 0$  ،  $a, b, c$  أعداد حقيقية ويمكن أن تكتب بعض كثيرات الحدود في المتغير  $x$  على هذه الصورة وذلك بعد تعريف  $u$  بدلالة  $x$  .

مثال :

اكتب العبارة على الصورة التربيعية  $8x^4 + 12x^2 + 18$

$$2(2x^2)^2 + 6(2x^2) + 18 \Rightarrow (u = 2x^2) \Rightarrow 2(u)^2 + 6(u) + 18$$

تنبيه :

هناك كثيرات حدود لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية مثال لذلك  $x^4 + 5x + 6$  لا يمكن كتابتها على الصورة التربيعية .

## 3-7 نظريتنا الباقي والعوامل

### نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود  $P(x)$  على  $x - r$  , فإن الباقي ثابت ويساوي  $P(r)$  , وكذلك :

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - r) + P(r)$$

حيث  $Q(x)$  دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة  $P(x)$  .

**مثال 1 :**  $x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$

### التعويض التركيبي

هو عملية إيجاد قيمة دالة عند عدد بتطبيق نظرية الباقي واستعمال القسمة التركيبية .

**ملاحظة :** في التعويض التركيبي يتم قسمة كثيرة حدود على ثنائية حد على الصورة  $(x - a)$  وفي هذه الحالة استعمال  $a$  , وإذا كانت ثنائية الحد على الصورة  $(x + a)$  فاستعمل  $-a$

### نظرية العوامل

تكون ثنائية الحد  $x - r$  عاملا من عوامل كثيرة الحدود  $P(x)$  إذا وفقط إذا كان  $P(r) = 0$

**مثال 2 :** ثنائية الحد  $x - 5$  عاملا من عوامل  $P(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$

إذا كان  $P(5) = 0$

**نظرية العوامل** تعد حالة خاصة من نظرية الباقي .

"التحليل الى العوامل " ليس شرطا ان تكون عوامل كثيرة الحدود ثنائيات حد .

فمثلا ,  $x^2 + x^3 - x + 15$  هما

$x + 3$  و  $x^2 - 2x + 5$  .

## 3-8 الجذور والأصفار

### النظرية الأساسية في الجبر

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي الى مجموعة الاعداد المركبة .

#### الجذور المكررة

يمكن ان يكون لمعادلات كثيرات الحدود جذر مكرر مرتين او ثلاث او اربع وهكذا

### نتيجة للنظرية الاساية في الجبر

يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة  $n$  العدد  $n$  فقط من الجذور المركبة بما في ذلك الجذور المكررة .

#### مثال 1:

$$(1) \quad x^3 + 2x^2 + 6 : \text{ لها 3 جذور}$$

$$(2) \quad 4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 : \text{ لها 4 جذور}$$

$$(3) \quad 2x^5 - 3x^2 + 8 : \text{ لها 5 جذور}$$

### قانون ديكارت للإشارات

هو قانون يستخدم لمعرفة عدد الاصفار الحقيقية والتخيلية لدالة كثيرة الحدود .

إذا كانت  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية فإن :

1. عدد الاصفار **الموجبة** للدالة  $P(x)$  **يساوي** عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة  $P(x)$  ، او اقل منه بعدد زوجي .
2. عدد الاصفار **السالبة** للدالة  $P(x)$  **يساوي** عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة  $P(-x)$  ، او اقل منه بعدد زوجي .

**مثال 2:** اذكر العدد الممكن للاصفار الحقيقية الموجبة والحقيقية السالبة والتخيلية للدالة

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

الخطوة 1 : احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات  $f(x)$

$$f(x) = \underbrace{+2x^5}_{\text{لا}} + \underbrace{x^4}_{\text{لا}} + \underbrace{+3x^3}_{\text{نعم}} - \underbrace{4x^2}_{\text{لا}} - \underbrace{x}_{\text{نعم}} + 9$$

نجد أن هناك 2 من تغيرات في إشارة المعاملات لذا عدد الاصفار الحقيقية الموجبة سيكون 2 أو 0

الخطوة 2 : احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات  $f(-x)$

$$f(-x) = 2(-x)^5 + (-x)^4 + 3(-x)^3 - 4(-x)^2 - (-x) + 9$$

$$f(x) = \underbrace{-2x^5}_{\text{نعم}} + \underbrace{x^4}_{\text{نعم}} - \underbrace{3x^3}_{\text{لا}} - \underbrace{4x^2}_{\text{نعم}} + \underbrace{x}_{\text{لا}} + 9$$

نجد أن هناك 3 تغيرات في إشارة المعاملات لذا عدد الاصفار الحقيقية السالبة سيكون 3 أو 1

الخطوة 3 : ننشئ جدول يبين عدد الجذور الحقيقية والتخيلية الممكنة

عدد الاصفار الحقيقية الموجبة	عدد الاصفار الحقيقية السالبة	عدد الاصفار التخيلية يساوي العدد 5 مطروحا منه ( عدد الاصفار الموجبة والسالبة الحقيقية )
2	3	$5 - (2 + 3) = 0$
	1	$5 - (2 + 1) = 2$
0	3	$5 - (0 + 3) = 2$
	1	$5 - (0 + 1) = 4$

### نظرية الأعداد المركبة المترافقة

إذا كان  $a, b$  عددين حقيقيين , وكان  $a + bi$  صفرا لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية . فان  $a - bi$  صفر للدالة أيضا .

**مثال 3:** اكتب دالة كثيرة حدود درجتها اقل ما يمكن , ومعاملات حدودها اعداد صحيحة ، اذا كان العددان  $-1, 5 - i$

من المعطيات فان  $-1, 5 - i$  من اصفار كثيرة حدود

وبما ان  $5 - i$  صفر للدالة فان المرافق أيضا صفر للدالة  $5 + i$

اكتب معادلة كثيرة الحدود على صورة حاصل ضرب عواملها .

$$P(x) = (x + 1) [ x - (5 - i) ] [x - (5 + i)]$$

$$= (x + 1) [(x - 5) + i] [(x - 5) - i]$$

$$= (x + 1) [(x - 5)^2 - i^2]$$

$$= (x + 1) (x^2 - 10x + 26)$$

$$= x^3 - 10x^2 + 26x + x^2 - 10x + 26$$

$$= x^3 - 9x^2 + 16x + 26$$