الدالة الضمنية

مثال لتكن $ص = س^٣ + ٤س$

فإن $\frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ٤$

تمرين إذا كانت $ص = جا^٢ س - ٧س + ١٤$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$\frac{د ص}{د س} = ٢ جا س جتا س - ٧$

مثل هذه الدوال تسمى دوال صريحة لأنه "ص" وحدها في طرف وأسها ١

مثال إذا كانت $جتا ص + ص = ٢$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

$\therefore ص + جتا س = ٢$

نلاحظ أنه "ص" ليست وحدها

$\therefore$ مثل هذه الدوال تسمى ضمنية

ويمكنه تحويلها الى دالة صريحة

$ص = - جتا س + ٢$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = + جا س$

مثال (٢٠١٢) إذا كانت $(ص + ٥س)^٣ = ٨$

أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = -٥$

الحل

نلاحظ أن الدالة ضمنية ولكنه يمكنه تحويلها إلى صريحة بأخذ $\sqrt[٣]{}$ للطرفين

$\therefore ص + ٥س = ٢$

$\therefore ص = -٥س$ $\therefore \frac{د ص}{د س} = -٥$

تمرين $(ص - ٤س)^٥ = ٢$

أثبت أن $\frac{د ص}{د س} = ٤$

مثال لتكن $ص^٢ + س^٢ - ص = ٦س$

أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل

إذا كانت "ص" ليست وحدها في طرف وليست أسها ١ تسمى دالة ضمنية

طريقة الاشتقاق

١ نشتق الدالة الضمنية بالنسبة لـ س

٢ الحدود التي فيها "ص" نضع ص في طرف والباقي في طرف

٣ نأخذ عامل مشترك لكي نضع "ص" وحدها

$\therefore ص^٢ + س^٢ - ص = ٦س$ نشتق الطرفين

$٢ ص \frac{د ص}{د س} + ٢س - \frac{د ص}{د س} = ٦$

$٢ ص \frac{د ص}{د س} - \frac{د ص}{د س} = ٦ - ٢س$

$\frac{د ص}{د س}(٢ ص - ١) = ٦ - ٢س$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٦ - ٢س}{٢ ص - ١}$

تعويض $(ص)' = \frac{د ص}{د س}$

$(ص^٥)' = ٥ ص^٤ \frac{د ص}{د س}$

أي ننزل القوة ثم نشتق ما تحت القوس

$(جا ص)' = ٥ جا^٤ ص \times جتا ص \times \frac{د ص}{د س}$

لا مشتقة الزاوية

Scanned by CamScanner

$(س^ن ص)' = س^ن ص' + ص \times ن س^{ن-1}$

حاصل ضرب

① $(\frac{1}{ص})' = \frac{-ص'}{ص^2}$

② $(\frac{س}{ص})' = \frac{ص - س ص'}{ص^2}$

مثال ضع ظا س = ص

إذا كان $ص' = 2س - 1$

فأوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $(\frac{\pi}{4}, 1)$

الحل

$\therefore ص' = 2س - 1$ دالة ضمنية

$2ص ص' = 6س$

$\therefore ص' = \frac{6س}{2ص} = \frac{3س}{ص}$ (×)

مثال أوجد ميل المماس للمنحنى $س^2 + ص^2 = 25$ عند النقطة $(-3, 4)$

الحل

$2س + 2ص ص' = 0$

$2ص ص' = -2س$

$ص' = \frac{-2س}{2ص} = -\frac{س}{ص}$

ميل المماس $= -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$

مثال إذا كان $س = جا ص$ أوجد $ص'$ عند ما $ص = \frac{\pi}{4}$

الحل

$\therefore س = جا ص$ نشتق

$1 = ص' جتا ص$ نعوض عن $ص = \frac{\pi}{4}$

$1 = ص' جتا \frac{\pi}{4} \Leftarrow 1 = ص' \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore ص' = \sqrt{2}$

مثال إختر الإجابة الصحيحة

إذا كان $س^2 + ص^2 = 16$ فإن $ص' =$ ($\frac{ص}{س}$ ، $-\frac{ص}{س}$ ، $\frac{س}{ص}$ ، $-\frac{س}{ص}$)

مثال إذا كانت $ص^2 - 2س ص + س^2 = لو س$

أوجد $ص'$ عند $(1, 2)$

الحل

$\therefore ص^2 - 2س ص + س^2 = لو س$ نشتق الطرفين

$2ص ص' - (2س ص' + ص \times 2) + 2س = \frac{1}{س}$

$2ص ص' - 2س ص' + 2ص + 2س = \frac{1}{س}$

نريد أن نشتق نفرض عند $س = 1$

$ص = 2$

$2 \times 2 ص' - 2 \times 1 ص' + 2 \times 2 + 2 \times 1 = \frac{1}{1}$

$2ص' - 2ص' + 4 + 2 = 1$

$-ص' + 6 = 1$

$-ص' = -5 \therefore ص' = 5$

مثال إختر الإجابة الصحيحة

إذا كان $س^2 + ص^2 = 2س ص$

فإن $ص' =$ عند $(-2, 2)$ (1 ، 2 ، 3 ، 4)

الحل

$س^2 + ص^2 = 2س ص$ نشتق الطرفين

$2س + 2ص ص' = 2ص + 2س ص'$

$2ص ص' - 2س ص' = 2ص - 2س$

$ص'(2ص - 2س) = 2ص - 2س$

$\therefore ص' = \frac{2ص - 2س}{2ص - 2س}$

$\therefore ص' = 1$

تدريب إذا كان $س^{\frac{1}{2}} + ص^{\frac{1}{2}} = 10$

أوجد $ص'$ عند النقطة $(9, 1)$

Scanned by CamScanner

مثال إذا كانت $س ص = ظا س$
أثبت أن
$ص + س ص_{س} = 1 + س^2 ص^2$

الحل

$\therefore س ص = ظا س$ نشتق

$س ص_{س} + ص = 1 + ظا^2 س$

$س ص_{س} + ص = 1 + س^2 ص^2$

مثال إذا كانت $س = ظا ص$
أثبت أن $\frac{ص}{س} = \frac{1}{1 + س^2}$

الحل

$س = ظا ص$ نشتق

$1 = (1 + ظا^2 ص)\ ص_{س}$

$\therefore ص_{س} = \frac{1}{1 + ظا^2 ص} = \frac{1}{1 + س^2}$

مثال إذا كانت $لو س + لو ص = 1$
أثبت أن $ص_{س} = \frac{-ص}{س}$

الحل

$\therefore لو س + لو ص = 1$

$لو س ص = 1$ بأخذ $\frac{د}{د س}$

$\therefore ص + س ص_{س} = 0$

$\therefore ص_{س} = \frac{-ص}{س}$

$ص_{ص} + س ص_{س} + ص_{س} = 0$

$\therefore ص_{ص} = \frac{-2 ص_{س}}{س}$

نعوض عن قيمة $ص_{س}$ $= \frac{-ص}{س}$

$\therefore ص_{ص} = \frac{-2 \times \frac{-ص}{س}}{س} = \frac{2ص}{س^2}$

مثال إذا كان $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = 1$
أثبت أن $ص_{ص} = \frac{2ص}{س^2}$

الحل

$\therefore \sqrt{س} + \sqrt{ص} = 1$

$\frac{1}{2\sqrt{س}} + \frac{1}{2\sqrt{ص}}\ ص_{س} = 0$

$\frac{1}{\sqrt{ص}}\ ص_{س} = -\frac{1}{\sqrt{س}}$

$ص_{س} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

$ص_{ص} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ نشتق مرة أخرى

$ص_{ص} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} \times ص_{س} - \frac{1}{\sqrt{س}} \times \frac{1}{2\sqrt{ص}}$

$ص_{ص} = -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} \times -\frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{س}} - \frac{1}{2\sqrt{س ص}}$

$ص_{ص} = \frac{ص}{س} + \frac{1}{2\sqrt{س ص}}$

$ص_{ص} = \frac{2ص}{2س} + \frac{1}{2\sqrt{س ص}}$

$ص_{ص} = \frac{2ص\sqrt{ص} + \sqrt{س}}{2س\sqrt{ص}}$

$ص_{ص} = \frac{2ص\sqrt{ص} + \sqrt{س}}{2س\sqrt{ص}} \times \frac{\sqrt{ص}}{\sqrt{ص}}$

$ص_{ص} = \frac{2ص + \sqrt{س ص}}{2س ص}$

$ص_{ص} = \frac{2ص + 1 - \sqrt{س}}{2س ص}$

$ص_{ص} = \frac{2ص + 1 - 1 + س}{2س ص}$

$ص_{ص} = \frac{2ص + س}{2س ص}$

مثال إذا كان $ص^2 + 2 ص_{س} = 4 س^2$
أثبت أن $ص_{ص} = \frac{4 س^2 - 2ص}{2ص}$

الحل

$2 ص ص_{س} = 4 س^2$

$ص ص_{س} = 2 س^2$

$ص ص_{ص} + ص_{س} \times ص_{س} = 4 س$

$ص ص_{ص} + ص_{س}^2 = 4 س$ #

تمرين إذا كان $س ص = ظا س$
أثبت أن $س ص_{ص} + 2 ص_{س} + س ص = 0$

مثال إذا كان $ص = هـ^{ع}$ ، $ع = لو(س^2 + 1)$
أثبت أن $ص ص_{ص} - 2 ص = 0$

الحل

$\therefore ص = هـ^{ع}$ ، $ع = لو(س^2 + 1)$

نعوض عن قيمة ع

$\therefore ص = هـ^{لو(س^2 + 1)}$

$\therefore ص = س^2 + 1$

$ص_{س} = 2س$ $\therefore ص_{ص} = 2$

نعوض بالطرف الأيمن عن قيمة $ص_{ص}$ ، $ص$

$ص ص_{ص} - 2 ص = (س^2 + 1) \times 2 - 2(س^2 + 1)$

$= 2س^2 + 2 - 2س^2 - 2 = 0$ صفر

Scanned by CamScanner

مثال إذا كانت $س ص = لو س$

أثبت أنه $س^2 ص'' + س^2 ص' + 1 = 0$

الحل

$\because س ص = لو س$

$س ص' + ص = \frac{1}{س}$ نشتق

$س ص'' + ص' + ص' = \frac{-1}{س^2}$

$س ص'' + 2 ص' = \frac{-1}{س^2}$ بالضرب $\times س^2$

$س^2 ص'' + 2 س^2 ص' = -1$

$\rightarrow$

$\therefore س^2 ص'' + 2 س^2 ص' + 1 = 0$

تمرين إذا كانت

$س = (هـ^{س})^{ص}$ أثبت أنه

$س^2 ص'' + 2 س ص' + ص = 0$

مثال إذا كانت $س = جا ص$

أثبت أنه

الحل

$\because س = جا ص$ نشتق الطرفين

$1 = -جا ص \times ص'$ نشتق

حاصل ضرب

$0 = -جا ص ص'' + ص' \times -جا ص ص'$

$= -جا ص ص'' - جا ص ص'^2$

بالضرب $\times -1$

$جا ص ص'' + س ص'^2 = 0$

$\frac{-1}{ص} \times ص'' + س ص'^2 = 0$

بالضرب $\times -ص$

$ص ص'' - س ص'^2 = 0$

تمرين لتكن $ص = س^{س ص}$

أثبت أنه $\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{2 ص}{س}$

Scanned by CamScanner