بسمة أمل

(في الرياضيات)

اساسيات (الفصل الثالث)

إعداد: ابتسام العمر

هـ 0991070187

III - القسمة -

* - قسمة كثير حدود على كثير حدود:

$$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + a_3 x^{n-2} + \dots + a_n$$

يسمى هنا الشكل كثير حدود من المرتبة (n).

مثال 1:

$$p(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6x - 7$$

كثير حدود من الدرجة الرابعة.

مثال:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$$

كثير حدود من الدرجة الثالثة.

♥ صورة عدد وفق كثير حدود:

$P(x_0)$ يعني نعوض في كثير الحدود مكان كل x بـ x_0 ثم نصلح ونحسب المجموع.

مثال 1:

$$P(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$P(2) = 2(2)^2 + 5(2) - 3$$

$$= 2(4) + 10 - 3$$

$$= 8 + 10 - 3 = 15$$

مثال:

$$P(x) = x^3 + 8$$

$$P(-2) = (-2)^3 + 8$$

$$= -8 + 8 = 0$$

انتبه: إذا كانت $p(x_0) = 0$ نسمي x_0 "صفر" لكثير الحدود $p(x)$.

يعني في أمكانية أن نقسم $p(x)$ على $x - x_0$.

مثال: $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

احسب $p(1)$ ، $p(-1)$ ، $p(0)$.

الحل:

$* \; p(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 3(0) - 1 = -1$

$* \; p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) - 1$

$= -1 - 3(1) - 3 - 1$

$= -1 - 3 - 3 - 1 = -8$

$* \; p(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1$

$= 1 - 3(1) + 3 - 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

- STOP -

لقسمة كثير حدود على كثير حدود مشابه له "كثير حدود يعني" يجب أن يكون درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام.

مثال:

$$\frac{x^2 + 6x - 5}{x + 3}$$

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x + 3 & x^2 + 6x - 5 \\ & \mp x^2 \mp 3x \\ \hline & 3x - 5 \\ & \mp 3x \mp 9 \\ \hline & -14 \end{array}$$

نقسم الحد الأول على الحد الأول... لكن لما نضرب نضرب بكل حد في المقسوم عليه. ونكرر العملية حتى نحصل على درجة أقل من درجة المقسوم عليه.

$$\Rightarrow \frac{x^2+6x-5}{x+3} = x+3+\frac{-14}{x+3}$$

الباقي

$$\frac{P(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

الناتج — المقسوم عليه

Ex₂ : $\dfrac{x^2+16x+5}{x-1}$

ناتج — مقسوم عليه

$$\begin{array}{r|l} x^2+16x+5 & x-1 \\ \mp x^2 \pm x & x+17 \\ \hline 17x+5 & \\ \mp 17x \pm 17 & \\ \hline 22 & \end{array}$$

باقي ← 22

$$\Rightarrow \frac{x^2+16x+5}{x-1} = x+17+\frac{22}{x-1}$$

Ex₃ : $P(x) = x^3-3x^2+3x-1$

احسب $P(+1)$

ثم اكتب $P(x)$ بالشكل:

$P(x) = (x-1).\ Q(x)$

حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

الحل:

$P(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1$

$= 1 - 3 + 3 - 1 = 0$

نقسم على $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+3x-1 & x-1 \\ \mp x^3 \pm x^2 & x^2-2x+1 \\ \hline -2x^2+3x-1 & \\ \pm 2x^2 \mp 2x & \\ \hline x-1 & \\ \mp x \pm 1 & \\ \hline 0\ \ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow P(x) =$ المقسوم عليه × الناتج

$P(x) = (x-1)(x^2-2x+1)$

Ex₃ : $P(x) = x^3+3x-4$

* أثبت أنه $P(1)=0$.
* اكتب $P(x)$ بالشكل:

$P(x) = (x-1)\ Q(x)$

حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية:

الحل: « للتدرب » ت

بس للتحقق: الناتج بيطلع x^2+x+4 .

Note: تستخدم القسمة "الإقليدية" في:

1. تغيير شكل تابع كسري.
2. في إيجاد مقارب مائل.
3. في حساب تكامل. ت
4. في حل معادلات درجة ثالثة ←

حل معادلة
- درجة ثالثة -

ليكن $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1 - أثبت أن $p(-1) = 0$

2 - استنتج أنه $P(x)$ يكتب بالشكل

$$p(x) = (x+1).Q(x)$$

حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية

3 - حل المعادلة $P(x) = 0$

الحل:

1 - $p(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + (-1) - 2$

$= 2(-1) + 5(+1) - 1 - 2$

$= -2 + 5 - 3$

$= 0$

$\Rightarrow p(-1) = 0$

2 -

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 5x^2 + x - 2 & x+1 \\ \mp 2x^3 \mp 2x^2 & 2x^2 + 3x - 2 \\ \hline 3x^2 + x - 2 & \\ \mp 3x^2 \mp 3x & \\ \hline -2x - 2 & \\ \pm 2x \pm 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$

3 - $P(x) = 0$

$(x+1).(2x^2 + 3x - 2) = 0$

إما $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

أو $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 3^2 - 4(2)(-2)$

$= 9 + 16$

$= 25 > 0$

للمعادلة حلان مختلفان

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{2(2)}$

* $x_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

* $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \frac{-3-5}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$

فحلول المعادلة $p(x) = 0$ هي

$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -2,\ x_3 = -1$

Look for ward with hope not ~~look~~ back wards with regret. انظر للأمام بأمل ولا تنظر للخلف بندم

حبيب قلبي

دراسة إشارة - مقدار -

- المتراجحة -

$<$ أصغر

$>$ أكبر

$\leq$ أصغر أو يساوي

$\geq$ أكبر أو يساوي

مجالات:

أشكال المجالات:

- # $b < x < a$ مجال مفتوح $x \in]b, a[$

- # $b < x \leq a$ نصف مفتوح $x \in]b, a]$

- # $b \leq x < a$ نصف مفتوح $x \in [b, a[$

- # $b \leq x \leq a$ مغلق $x \in [b, a]$

هام جداً بل وضروري:

متى يكون المجال مفتوح ؟؟

متى يكون المجال مغلق ؟؟

إذا كان في المتراجحة إشارة "أو يساوي" فالمجال مغلق.

وإذا كانت "أكبر فقط أو أصغر فقط" فالمجال مفتوح.

« باللوغاريتم عطول المجالات مفتوحة إلا في حالات نادرة ».

« بالتابع الجذري عطول المجالات مغلقة إلا في حالات نادرة ».

« عند $+\infty$ و $-\infty$ عطول المجالات مفتوحة »

Note

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ وهي مجموعة الأعداد الحقيقية.

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ كل الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر

$\mathbb{R}^*_+ =]0, +\infty[$ الحقيقية الموجبة فقط

$\mathbb{R}^*_- =]-\infty, 0[$ الحقيقية السالبة فقط

❤ ما عدا :

جملة "ما عدا" بتشوفوها بالاحتمالات وكمان بمجموعة تعريف تابع كسري.

IR ما عدا العدد (5) شلون بنكتبها؟؟

$\mathbb{R}\setminus\{5\} =]-\infty,5[\cup]5,+\infty[$

IR ما عدا العددين ٥ و ١ ؟؟

$\mathbb{R}\setminus\{0,1\} =]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$

الي بتوقف عنده كمل من عنده.

ملاحظات عالطاير:

1- الأعداد ضمن المجال لازم تكون مرتبة. يعني من الصغير للكبير.

مثلاً: الأعداد بين 14 و 6

$[14, 6]$ غلط

$[6, 14]$ ✓

2- ما في أكثر من عددين ضمن المجال.

$]0, 1, 3[$ → غلط

$]0,1[\cup]1,3[$ (✓)

3- للتسلية: $]0,1[$

« في كم عدد موجود بين الصفر والواحد »

« نستقبل أول مصيبة ونقول ألو..... »

ع- $x > 0$ ⇐ يعني $x \in]0,+\infty[$

$x < 0$ ⇐ يعني $x \in]-\infty,0[$

$x > a$ ⇐ يعني $x \in]a,+\infty[$

$x < a$ ⇐ يعني $x \in]-\infty,a[$

VIQ : كيف نوجد مركز ونصف قطر مجال؟؟

إذا كان لدينا المجال $]a,b[$ ونريد معرفة مركزه c ونصف قطره r.

المركز $c = \frac{a+b}{2}$

نصف القطر $r = \frac{b-a}{2}$

مثال: أوجد مركز ونصف قطر المجال $]2,10[$

$a=2$ $b=10$

المركز $c = \frac{a+b}{2} = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6$

نصف القطر $r = \frac{b-a}{2} = \frac{10-2}{2} = \frac{8}{2} = 4$

« والذين آمنوا أشد حباً لله ».

لا تعلق سعادتك بغير الله ... فإن الحبيب يجفو والقريب يبعد والحي يموت والمال يفنى والصحة ترحل ولا يبقى معك إلا الله ❤

حل متراجحة درجة أولى:

سؤال:

شو الفرق بين حل معادلة وحل متراجحة ؟؟

← هاها: الفرق حل المعادلة بيطلع الجواب عدد

حل المتراجحة بيطلع الجواب مجال

مثال:

$$4x + 8 > 0$$
$$4x > -8$$
$$x > \frac{-8}{4}$$
$$x > -2$$
$$\Rightarrow x \in]-2, +\infty[$$

سهلة طلعت ... يعني بحل المتراجحة كأنها معادلة موصلك ؟؟

← أممم .. هيك شي ... بس في شغلة لازم تنتبه إلها .. وهي:

♥ عند القسمة أو الضرب بعدد سالب تقلب إشارة التراجح.

♥ عند أخذ المقلوب لمقدار ما .. تقلب إشارة التراجح.

مثال:

$$-2x + 4 < 0$$
$$-2x < -4$$
$$\frac{-2x}{-2} < \frac{-4}{-2}$$
$$x > 2$$
$$\Rightarrow x \in]2, +\infty[$$

مثال:

$$\frac{3}{x-1} > \frac{5}{7x}$$

نقلب

$$\frac{x-1}{3} < \frac{7x}{5}$$
$$5(x-1) < 7x \cdot 3$$
$$5x - 5 < 21x$$
$$5x - 21x < 5$$
$$-17x < 5$$
$$x > \frac{-5}{17}$$
$$\rightarrow x \in]-\frac{5}{17}, +\infty[$$

مثال:

$$\frac{4}{x} < \frac{2}{7}$$

« تدريب »

للتواصل: 0991070187

♥ دراسة إشارة مقدار

A - درجة أولى :

لمعرفة إشارة هذا $ax+b$ المقدار نجعله مساوياً للصفر $ax+b=0$ ونحل المعادلة الناتجة ثم ننظم الجدول :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
المقدار	يخالف إشارة x	0	يوافق إشارة x

« ما قبل الصفر تخالف إشارة x وما بعد الصفر توافق إشارة x » احفظ

Ex : ادرس إشارة المقدار : $2x+6$

الحل :

$$2x+6=0$$
$$2x=-6$$
$$x=-\frac{6}{2}$$
$$x=-3$$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$2x+6$	$-$	0	$+$

Ex_2 : ادرس إشارة المقدار $-2x+10$

الحل :

$$-2x+10=0$$
$$-2x=-10$$
$$x=\frac{-10}{-2}$$
$$\boxed{x=5}$$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$-2x+10$	$+$	0	$-$

B - درجة ثانية :

لمعرفة إشارة هذا المقدار ax^2+bx+c نجعله مساوياً للصفر $ax^2+bx+c=0$ ونحل المعادلة الناتجة.

ولدينا ثلاث حالات :

أولاً : للمعادلة حلان مختلفان :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
المقدار	يوافق	0	يخالف	0	يوافق

« يخالف إشارة x^2 ما بين الجذرين يخالف
ويوافق إشارة x^2 وخارجهما يوافق
إشارة x^2 »

Ex : ادرس إشارة المقدار x^2+3x-4

الحل :

$$x^2+3x-4=0$$
$$(x+4)(x-1)=0$$

إما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$	-4		1	$+\infty$
$+x^2+3x-4$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ex_2 : ادرس إشارة المقدار $9-x^2$

الحل: $9 - x^2 = 0$

$(3-x)(3+x)=0$

إما $3-x=0 \Rightarrow x=3$

أو $3+x=0 \Rightarrow x=-3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ثانياً: للمعادلة جذر مضاعف:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
المقدار		يوافق	0	يوافق	

EX: ادرس إشارة المقدار x^2-6x+9

الحل: $x^2-6x+9=0$

$(x-3)(x-3)=0$

إما $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (حل وحيد)

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3$

ط2: $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

ط3: عن Δ.

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
x^2-6x+9		$+$	0	$+$	

ثالثاً: المعادلة مستحيلة الحل:

إشارة المقدار توافق إشارة x^2.

x	$-\infty$		$+\infty$
المقدار		توافق إشارة x^2.	

EX: ادرس إشارة المقدار. x^2+1

الحل: $x^2+1=0$

$a=1,\ b=0,\ c=1$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=0^2-4(1)(1)$

$\Delta=-4<0$

مستحيلة الحل.

x	$-\infty$				$+\infty$
x^2+1		$+$	$+$	$+$	

حل متراجحة درجة ثانية ♥

لحل متراجحة درجة ثانية نتبع الخطوات

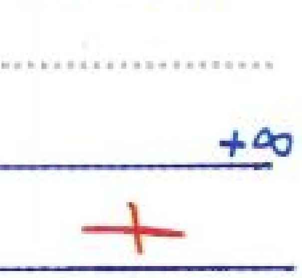
1 - نجعل الطرف الأول يساوي الصفر.

2 - نحل المعادلة الناتجة.

3 - نشكل الجدول:

«ثلاثة أسطر ... السطر الأول x

السطر الثاني المقدار وإشارته السطر الثالث المتراجحة»



x	
المقدار	
المتراجحة	

Ex①: حل المتراجحة: $x^2+5x-6>0$

الحل: $x^2+5x-6=0$

$(x+6)(x-1)=0$

إما $x+6=0 \Rightarrow x=-6$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
x^2+5x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2+5x-6>0$		محققة		غير محققة		محققة	

((المتراجحة أكبر من الصفر ← +)) سالب مرفوض

$\Rightarrow E =]-\infty, -6[\cup]1, +\infty[$

Ex②: حل المتراجحة: $x^2+3x+2\leq 0$

الحل: $x^2+3x+2=0$

$(x+2)(x+1)=0$

إما $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
x^2+3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2+3x+2\leq 0$		غير محققة		محققة		غير محققة	

$E=[-2,-1]$.

Note: ((إذا كانت إشارة المتراجحة أكبر من الصفر ← يعني على القيم الموجبة تصبح محققة والقيم السالبة تصبح غير محققة))

((وإذا كانت إشارة المتراجحة أصغر من الصفر ← يعني على القيم السالبة تصبح محققة والقيم الموجبة تصبح غير محققة)).

سؤال الكيوت:

ليكن $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$

1- تحقق أن $P(-1)=0$

2- أثبت أن $P(x)$ يكتب بالصيغة:

$P(x)=(x+1)\cdot Q(x)$

حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

3- حل المعادلة $P(x)=0$.

4- استنتج حلول المتراجحة

$P(x)\leq 0$

الحل:

1- $P(-1) = 2(-1)^3+5(-1)^2+(-1)-2$

$= 2(-1)+5(+1)-1-2$

$= -2+5-3$

$P(-1)=0$

للتواصل: 0991070187

٢-

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+3x-2 \\
\hline
x+1 & 2x^3+5x^2+x-2 \\
 & \mp 2x^3 \mp 2x^2 \\
\hline
 & 3x^2+x-2 \\
 & \mp 3x^2 \mp 3x \\
\hline
 & -2x-2 \\
 & \pm 2x \pm 2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$P(x) = (x+1).(2x^2+3x-2)$

٣- $p(x)=0$

$(x+1).(2x^2+3x-2)=0$

إما: $x+1=0 \Leftarrow x=-1$

أو: $2x^2+3x-2=0$

$a=2,\ b=3,\ C=-2$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 3^2-4(2)(-2)$

$= 9+16 = 25 > 0$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{2(2)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{2(2)} = \dfrac{-8}{4} = -2$

فحلول المعادلة $p(x)=0$ هي:

$x=-2,\ x=-1,\ x=\frac{1}{2}$

٤- حلول المتراجحة $P(x) \le 0$.

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2+3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$ نضرب		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x) \le 0$		محققة		//////		محققة		//////	

$E =]-\infty, -2] \cup [-1, \frac{1}{2}]$

وانتهى الدرس -

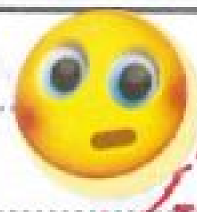
انهض ..

انهض واختر لنفسك هدفاً عظيماً واكمل حياتك لأجله ..

اعمل جاهداً لنجاح فكرتك ولاتستصعب شيئاً في سبيل هدفك مهما يكن من عقبات أم صعوبات ..

اختر مكاناً لنفسك في الحياة وإياك والإعجاب بذاتك فهي من أكبر العوائق والوقوف دون الهدف والتراجع عنه ..

إذا أردت أن تكون عظيماً فلا تتعامل مع نفسك بنعومة .



- القيمة المطلقة -

- whatt-?!

القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لأي عدد هي بُعد هذا العدد عن الصفر على مستقيم الأعداد بمعنى آخر ... هي العدد نفسه بدون إشارة.

مثال:

$|-7| = 7 \quad \& \quad |-3| = 3$

$|5| = 5 \quad \& \quad |+9| = +9$

*** خواص القيمة المطلقة:**

1- $|x.y| = |x|.|y|$

مثال:

$|8 \times (-x)| = |8|.|-x|$

$= 8.x$

2- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

مثال:

$\left|\frac{-4}{3}\right| = \frac{|-4|}{|3|} = \frac{4}{3}$

3- $|x+y| \neq |x|+|y|$

ولكن: $|x+y| \leq |x|+|y|$

مثال: $|-5+7| \leq |-5|+|7|$

$|+2| \leq 5 + 7$

$2 \leq 12$

4- $|x-y| = |x|-|y|$

ولكن: $|x-y| \geq |x|-|y|$

مثال: $|-5-3| \geq |-5|-|+3|$

$|-8| \geq 5 - 3$

$8 \geq 2$

5- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ هام

مثال: $|x| < 5$

$-5 < x < 5$

6- $|x-c| < r \Leftrightarrow x \in [c-r, c+r]$

مثال:

$|x-1| < 3$

$x \in [3-1, 3+1]$

$x \in [2, 4]$

ركز يا أخي العزيز: "الخواص 5 + 6 بيلزموك بالوحدة الثانية نهايات" سؤال امتحاني عيّن قيمة A .

حل معادلة تحوي قيمة مطلقة:

حل معادلة $|x| = a$

إما: (نفسها) $x = a$

أو: (عكسها) $x = -a$

Ex1: $|x| = 5$

حلها: إما $x = +5$

أو $x = -5$

Ex2: $|x - 1| = 4$

حلها:

إما: $x - 1 = 4$

$x = 4 + 1$

$x = 5$

أو: $x - 1 = -4$

$x = -4 + 1$

$x = -3$

Ex3: $|x - 7| = 0$

حلها: $x - 7 = 0$

$x = 7$

حالة خاصة: $|x| = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Note: القيمة المطلقة مقدار موجب

يعني $|x| = -5$ مستحيلة الحل

حل متراجحة تحوي قيمة مطلقة.

$|x - 2| \le 4$

ط1: باستخدام الخاصة $\boxed{6}$:

$x \in [-4+2, 4+2]$

$x \in [-2, 6]$

ط2: $|x - 2| \le 4$ حسب $\boxed{5}$

$-4 \le x - 2 \le 4$

$(+2)$ $-4 + 2 \le x - 2 + 2 \le 4 + 2$

$-2 \le x \le 6$

$\Rightarrow x \in [-2, 6]$

ط3: $|x - 2| \le 4$

إما: $x - 2 \le 4$ عندما $x - 2 \ge 0$

$x \le 4 + 2$

$x \le 6$

أو: $-(x - 2) \le 4$ عندما $x - 2 < 0$

$x - 2 \ge -4$

$x \in [-2, 6] \Leftarrow x \ge -2$

- وانتهى الفصل -