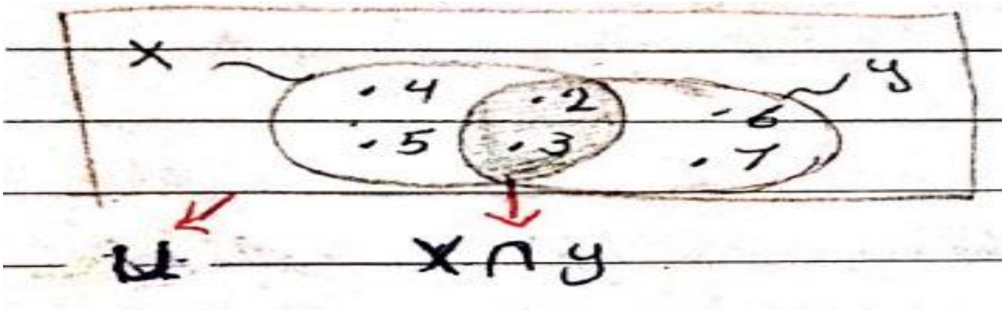
المعيار الثاني (الجبر والدوال الحقيقية)

١- يتعرف خصائص المجموعات و العمليات عليها "التقاطع، الاتحاد، ...)

التقاطع: تقاطع مجموعتين هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى والمجموعة الثانية في نفس الوقت ويُرمز له بالرمز "n" مثال:

x = {2, 3, 4, 5} ، y = {2, 3, 6, 9}

$$n \cap y = \{2,3\}$$



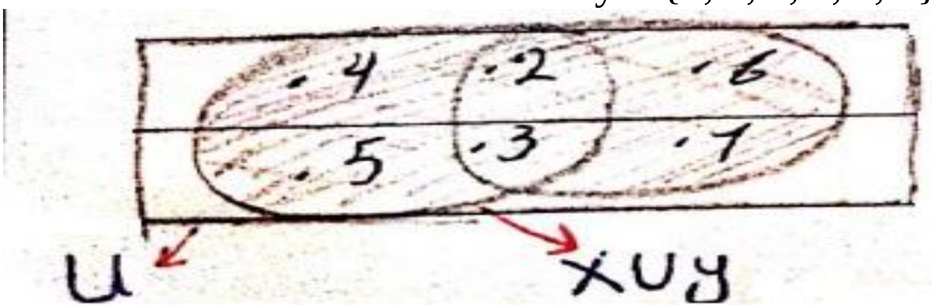
الاتحاد:

اتحاد المجموعتين هي مجموعة كل العناصر التي تنتمي للمجموعة الأولى أو المجموعة الثانية أو إلى كليهما ونرمز لها بالرمز "U"

مثال ذلك:

y = {2, 3, 6, 7} , x = {2, 3, 4, 5}

x U y = {2, 3, 4, 5, 6, 7}



المجموعة الشاملة:

هي المجموعة التي تضم كل المجموعات ونرمز لها بـ U:

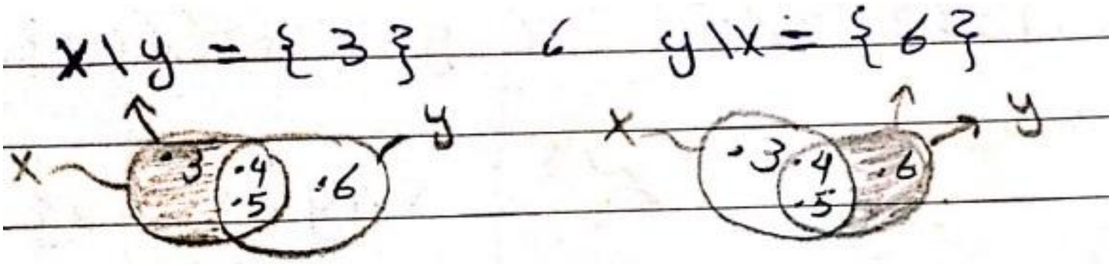
الفرق بين مجموعتين:

هي مجموعة عناصر تنتمي للمجموعة الأولى ولا تنتمي للمجموعة الثانية ونرمز لها بالرمز x \ y ← $x \setminus y = \{x : x \in x, x \notin y\}$

مـثـال :

X = [{3, 4, 5}   ,   y={6, 5, 4}

x\y= {3}   , y\x= {6}



المجموعة المتممة :

هي المجموعة التي عناصرها تنتمي إلى المجموعة الشاملة ولا تنتمي عناصرها إلى المجموعة x ويرمز لها بالرمز $\bar{x}$

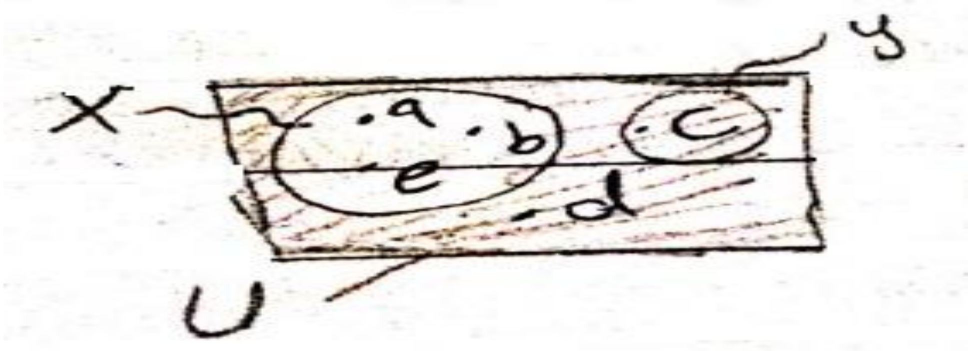
$\bar{x} = \{x : x \in u, x \notin x\}$

مـثـال :

u = {a,b,c,d,e}   ,   x = {a,b,e}

y={c}

$\bar{x} = \{c, d\}$



- تحليل العبارات الجبرية وتبسيطها :

العبارة الجبرية: هي جملة تحتوي على أعداد ومتغيرات ويكون تبسيطها بتجميع الحدود المتشابهة والأخلص من الأقواس بالخواص ووضعها في أبسط صورة.

مثال :

قيمة المقدار :

$\frac{7x^3y^2+63x^2y^2}{21x^2y^2}$ تساوي

$$=\frac{7x^2y^2(x+9)}{21x^2y^2}$$

$$\frac{1}{3}(x+9)=\frac{1}{3}x+3$$

مثال (٢) : ما التحليل الصحيح للمقدار

$X^2 - 8x - 40a - 25a^2$

$(x^2 - 25a^2) - (8x + 40a)$

$= (x - 5a)(x + 5a) - 8(x + 5a)$

$= (x + 5a)(x - 5a - 8)$

تمرين: إذا كان $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ فما قيمة $x^6+\frac{1}{x^6}$؟

أ- ١٨ ب – ٢٥ جـ - ٩٦ د- ١٢٥

٣- يحل المعادلات والمتباينات الخطية والتربيعية والمحتوية على قيمة مطلقة؟

يحل معادلات الدرجة الثانية تحل بثلاث طرق إما بالتحليل أو بالقانون العام أو بإكمال المربع.

مثال: مجموعة حل المعادلة $2x^2 - 22x + 60 = 0$

أ- $\{-5, 6\}$ ب- $\{5,6\}$ جـ- $\{3,\frac{2}{5}\}$ د - $\{3,\frac{1}{2}\}$

الحل:

(للتبسيط ٢) $2x^2 - 22x + 60 = 0$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

إعداد أن حاصل ضربهما 30 $= (x-5)(x-6)$

وجمعهما يساوي 11 $x-5=0 \Rightarrow x=5$

الحل : (ب) $\&=\{5,6\}$ $x-6=0 \Rightarrow x=6$

مـثـال (٢)

لنفرض أن x+y=xy=1 مجموع قيم x التيي تحقق المعادلتين هو :

أ- ١ ب- $2\sqrt{3}i$ جـ- $2-\sqrt{3}i$ د- $2+\sqrt{3}i$

الـحل : $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

نعوض بقيمة y في yx=1 ← yx = (1-x)x=1

$X - x^2 = 1 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$

تـحل بـالـقـانـون الـعام $a = -1 , b = +1 , c = -1$

$-b \pm \sqrt{}$

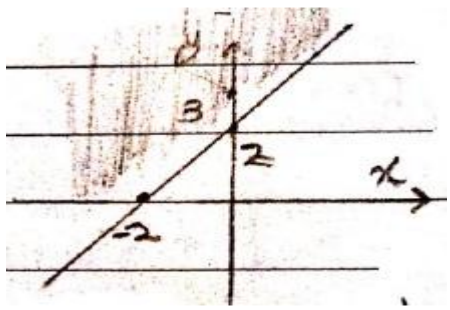
مـجـموع قـيـم X الـتـي تـحقـق الـمعـادلـتـين

الحل (أ)

مـثـال (٣)

أي من المتباينات المعطاه يمثلها الجزء المظلل من المستوى الموضح بالشكل أدناه؟

أ- $y \le x-2$ ب- $y \le x+2$ ج- $y \ge x-2$ د- $y \ge x+2$



الحل من الرسم نلاحظ أن الجزء المظلل (الجزء الموجب من y والجزء المقطوع من محور الصادات يساوي ٢

$\therefore$ $y \ge x+2$ ← $y = ax + b$ (الجزء المقطوع من محور y) **b**

الـحل (د)

تـمـريـن: إذا قطع مستقيم $y = mx + 1$ القطع الناقص $x^2+4y^2=1$ في نقطة واحدة فقط فما قيمة m^2؟

أ- $\frac{1}{4}$ ب- $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ج- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د- $\frac{3}{4}$

مـثـال: $|2x-5| < -3$

الحالة الأولى	الحالة الثانية
$2x -5 < -3$ $+5 \quad +5$ $2x < +2$ $X<1$	$-(2x-5) < +3$ $-2x + 5 > +3$ $-5 \quad -5$ $-2x > -2$ $x>1$

٤- يـجـري الـعـمـلـيـات عـلـى الـمـصـفـوفـات؟

مـا هـي الـمـصـفـوفـة ؟

هي ترتيب على هيئة مستطيل لمتغيرات أو أعداد في صفوف أفقية وأعمدة رأسية محصورة بين قوسين وهي أنواع...

الـعـمـلـيـات عـلـى مـصـفـوفـات:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

أوجد ناتج الآتي $3A + 5B$

نضرب العدد في المصفوفة $3.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + 5.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

ثم نجمع $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

ضرب المصفوفات

في ضرب المصفوفات لابد أن تكون أعمدة

المصفوفة الأولى تساوي **2X2 = 3X2** عدد صفوف المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \downarrow & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & & \mathbf{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 \times 1 + 0 \times -1} & \mathbf{1 \times 2 + 0 \times 2} \\ \mathbf{3 \times 1 + 4 \times -1} & \mathbf{3 \times 2 + 4 \times -2} \end{bmatrix}$$

الناتج يكون منن نفس نوع المصفوفة $\mathbf{2 \times 2}$ $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix} =$

ملاحظة :

١-لاحظ أن شرط جمع المصفوفات أن تكون من نفس النوع.

٢-لاحظ شرط ضرب المصفوفات أن تكون أعمدة

A . B = AB

m×r = r×t =m×t

رتبة المصفوفة متساويان

منوال المصفوفة أو (حدود المصفوفة) $\mathbf{A^t}$ في أن تصبح المصفوفة أعمدة والأعمدة صفوف ومثال على ذلك:

$\boldsymbol{A} \quad \mathbf{(2 \times 3)}$

رتبة المصفوفة $\mathbf{A^t}$ رتبة المصفوفة **A** و**1**

خواص حدود أو منقول المصفوفة :

1- $(A^t)^t = A$

2- $(A+B)^t = A^t + B^t$

3- $(CA)^t = C(A^t)$ **C** عدد ثابت

4- $(AB)^t = B^t . B^t$

المحدد للمصفوفات:

محدد المصفوفة من الدرجة الثانية

المصفوفة من الرتبة 3×3 نستخدم قاعدة الأقطار كطريقة ثانية:

أوجد قيمة المحددة:

١–نعيد كتابة العمود الأول والثاني

٢–نوجد حاصل ضرب الأقطار ونجمعها

$$=|(0)(5) + (-2)(4)2)+3(-1)(-1)$$
$$- [(-2)(-1)(5) + (1)(4)(-1)+3(o)(z)]$$
$$=(0 – 16- 3) – (10 – 4 + 0)$$
$$-13 – 6 = - 19$$

ونرمز لمحدد المصفوفة A بالرمز $|A|$

النظير الضريبي للمصفوفة:

لإيجاد النظير الضريبي للمصفوفة:

١–نوجد أولاً معكوس المتحدد.

٢–نعكس أعداد القطر الأول وَ نغير إشارة القطر الثاني

مثال: أوجد A^{-1} للمصفوفة A

$$= (-1)\ (3) – (1)\ (\ 2) = \quad -5$$

٥- تحل أنظمة المعادلات الخطية ويستخدم المصفوفات والمحددات في ذلك ويمثل الحل جبرياً وهندسياً .

لقد شوفا إلى المحددات في المعيار الرابع.

فأخذ مثال لحل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات والمحددات (نشرحه في المثال قاعدة كرامر لحل نظام المعادلتين وثلاث من الدرجة الأولى).

مثال: حل النظام التالي: باستخدام قاعدة كرامر:

3x – 4y = 1
X+ 2y = 7

١- نوجد أولاً Δ (تسمى دلتا) وهي محدد يضم معاملات x و y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10$$

٢- نوجد Δx (تسمى دلتا اكس) وتضم عمود النواتج وعمود عوامل y:

Δx

٣- $\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = (3)(7) - (1)(1)$

21 -1 = 20

تـمـريـن: ما مجموعة قيم الثابت x التي تجعل للنظام

$\begin{bmatrix} 5-x & -12 \\ 2 & -5-x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ عدداً غير منته من الحلول؟

(١) {أ} (ب) **{-1}** (ج) **{-1, 1}** (د) **R-{-1, 1}**

٢ إذا كانت **A** مصفوفة نم الدرجة **3x3** وكان **|A| = -2** (يعني المحدد **A**) فما قيمة $|2A^t (A^{-1})^2|$ ؟

(أ) **-8** (ب) **-4** (ج) **-2** (د) **4**

٣ ما جمع قـيم k الـتـي تـجـعـل الـنـظـام

(k+1)x + k+3)y = 0

2x + ky = 0 حلولاً غير تافهة؟

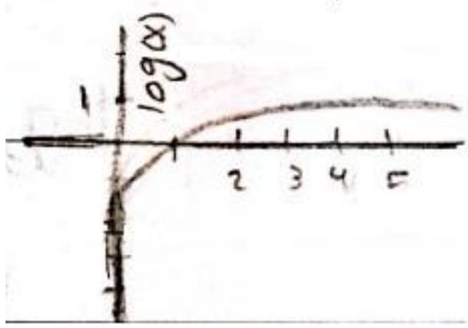
(أ) **-1** (ب) **1** (ج) **2** (د) **3**

٦) يستخدم خواص الدوال الأسية واللوغاريتمية في حل المعادلات:

تعريف اللوغاريتم: هي العملية العكسية للدوال الأسية وهو عدد ما بالنسبة للأساس ما بأنه الأس المرفوع على الأساس والذي سينتج عن ذلك العدد مثال:

نقرأ لوغاريتم ١٦ للأساس ٢ يساوي ٤.

خواص اللوغاريتمات:



1- $log_b^x y = log_b x + log_b y$

2- $log_b \frac{x}{y} = log_b x - log_b y$

3- $log_b x^m = mlog_b x$

4- $log_b b^z = x$

5- $log_b b = 1 \quad , 10\ log_b 1 = 0 \ \neq 6$

إذا كان $log\ x \geq 10\ \log_b y$ فإن $x \geq y$

اللوغاريتم العشري هو لوغاريتم للأساس ١٠ وتكتب دون كتابة الأساس.

مثال: $log10000 = 4$ $\quad log\ 1000 = 3,$

مثال: إذا كان $log_7^{(3x-2)} = log_7^3$

$3x - 2 = 3 \rightarrow 3x = 5\ x = \frac{5}{3}$

مـثـا ل: ٢ **:** اكتب العبارة اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

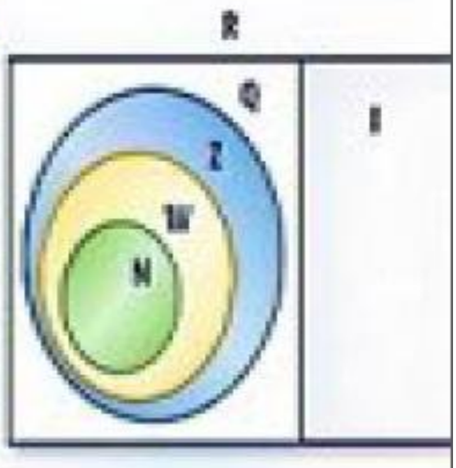
مـثـا ل ٣ **:** حل المعادلة:

الـحل :

تـمـريـن : حل المعادلة: $\mathbf{3^{x-1} = 8}$

٧) يقارن بين العلاقات والدوال وخصائص الدوال الحقيقية وأنواعها ويوجد مجالها ومداها؟

الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.66\ldots$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi = 3.14159\ldots$ $\sqrt{3} = 1.73205\ldots$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$2, 96, 0, \sqrt{36}$
N	الأعداد الطبيعية	$3, 17, 6, 86$

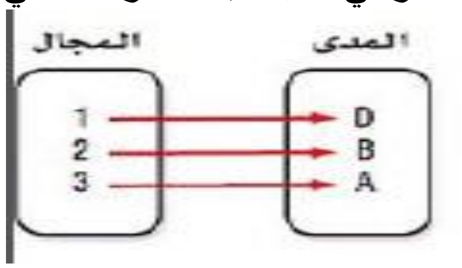


الخاصية	الجمع	الضرب
❶ التبديلية	$a + b = b + a$	$a . b = b . a$
❷ التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a . b) . c = a . (b . c)$
❸ العنصر المحايد	$a + 0 = a = 0 + a$	$a . 1 = a = 1 . a$
❹ النظير	$a + (-a) = 0 = (-a) + a$	$a . \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} . a$
❺ الانغلاق	$a + b$ عدد حقيقي	$a . b$ عدد حقيقي
❻ التوزيع	$a(b + c) = ab + ac , (b + c) a = ba + ca$	

nony **Sarhan alsarhan**

الدالة المتباينة :

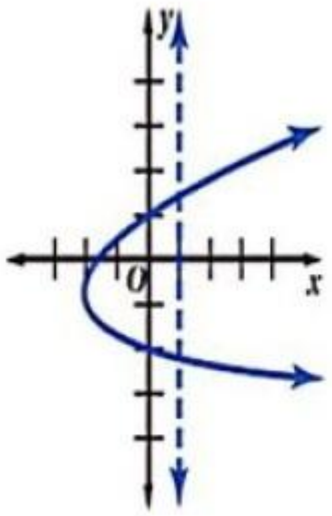
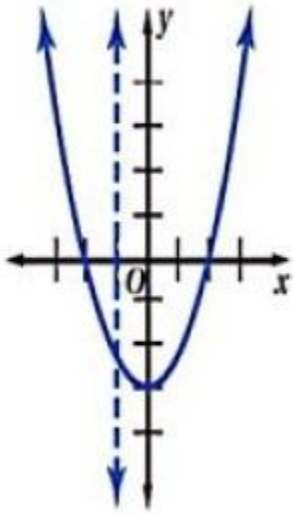
كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى، أي أنه لا يرتبط من عنصر في المجال بالعنصر نفسه في المدى.



خاصية المقارنة	$a<b$ أو $a=b$ أو $a>b$
خاصية التعدي	١- إذا كان $a<b$ و $b<c$ فإن $a<c$ ٢- إذا كان $a>b$ و $b>c$ فإن $a>c$
خصائص الجمع و الطرح	١- إذا كان $a>b$ فإن $a+c > b+c$ و $a-c > b-c$ ٢- إذا كان $a<b$ فإن $a+c < b+c$ و $a-c < b-c$
خصائص الضرب و القسمة	١- إذا كان $c>0$ و $a<b$ فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ٢- إذا كان $c>0$ و $a>b$ فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ٣- إذا كان $c<0$ و $a<b$ فإن $ac> bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ٤- إذا كان $c<0$ و $a>b$ فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

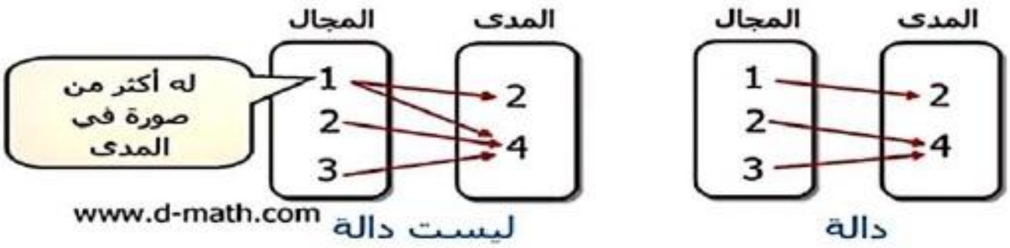
التعبير اللفظي:

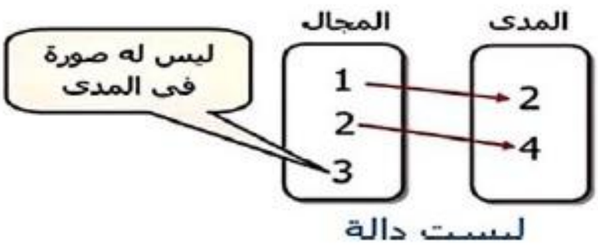
إذا لم يقطع أي خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة بأكثر من نقطة، فالعلاقة دالة.	إذا قطع خط رأسي التمثيل البياني للعلاقة في نقطتين أو اكر فالعلاقة ليست دالة.
النموذج:	النموذج:

الـــد الـــة

الدالة هي علاقة يرتبط فيها كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.





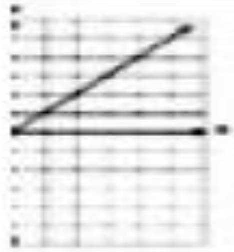
أحمد	خالد
$f(3d)=-4(3d)^2-2(3d)+1$ $= -4\ (9d^2) – 6d + 1$ $= -36\ d^2 – 6d + 1$	$f(3d) = -4(3d)^2 – 2(3d)+1$ $= 12d^2 – 6d + 1$

دالة القيمة المطلقة :

$F(x) = |x|$

المجال R

المدى = $[0,\infty)$

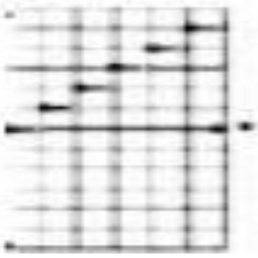


الدالة الدرجية:

$f(x) = [x]$

المجال R

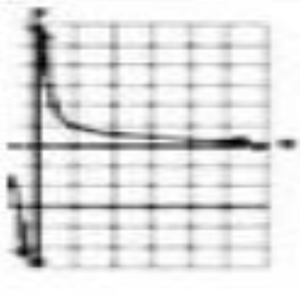
المدى = Z



دالة المقلوب:

المجال = $R-\{0\}$

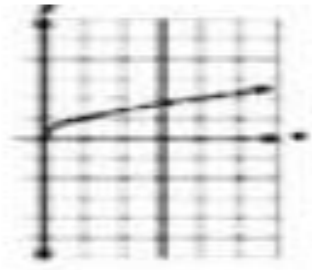
المدى = $R-\{0\}$



دالة الجذر التربيعي :

المجال = $[0,\infty)$

المدى $[0, \infty)$



٨- تجري العمليات على الدوال (العمليات الأربع - التحليل - ومعكوس الدالة)

العمليات على الدوال:

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالهما فإننا نعرف العمليات كالآتي

الجمع $f + g (x) = f (x) + g (x)$

مثال :

$F(x) = x^2 -4 , g(x) = 2x + 1$

$F (+g) (x) = (x^2-4) + (2x+1)$

$= x2 + 2x – 3$

الطرح: $(f-g) (x) = f(x) – g(x)$

مثال: أوجد من المثال السابق $f-g (x)$

$(x^2-4) – (2x +1)$

$x^2 -4 -2 x -1$

$x^2 – 2x -5 = (f-g) (x)$

الضرب: $f.g (x) = f(x).g(x)$

مثال:

$F (x) = x^2+4x + 12 , g(x) = 3x -4$

$f.g (x) = f(x) . g(x)$

$(x^2 + 4x + 12) . (3x -4)$

$3x. (x^2 + 4x + 12) – 4 (x^2 + 4x + 12)$

$3x^3 + 12x^2 + 36 x – 4x^2 -28x – 48$

$3x^3 + 8x^2 + 8x - 48$

الـقـسمـة:

$f/g\,(x) = f(x) / g(x)$

مثال السابق:

$$\frac{x^2+4x+12}{3x-4}\,f/g(x)$$

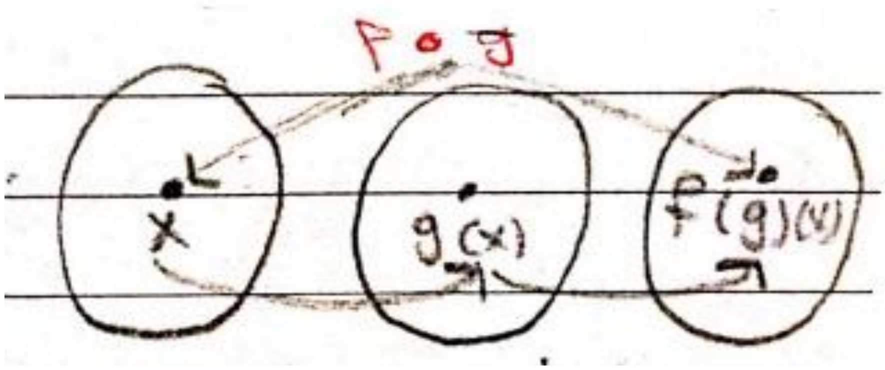
مجال كل من **f** *و* **g** *هو* **(-∞/∞)** *ولكن* **x=0** *وتجعلان مقام الدالة صفراً لذا فإن الدالة الكسرية* $R - \frac{4}{3}$

مـلاحظـا ت :

إذا كانت **f(x)** *كثيرة حدود فيكون مجالها هو مجموعة الأعداد الحقيقية* **R**

- *إذا كان* **f(x)** *دالة جذرية فيكون المجال هو جميع الأعداد الحقيقية التي تجعل ما بداخل الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.*
- *يتكون مجال جميع الدوال الناتجة عن عمليات الجمع أو الطرح أو الضرب للدالتين* **f(x), g(x)** *من تقاطع مجاليهما.*
- *مجال الدالة* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *هو تقاطع مجالي الدالتين* **f(x), g(x)** *باستثناء القيم التي تجعل المقام يساوي صفراً*
- *تركيب دالتين (أو تحصيل دالتين)*

يتكون مجال الدالة **fog**



من جميع قيم **x** *في مجال الدالة* **g** *مع أن تكون* **g(x)** *في مجال* **f(x)**

Fog(x) → f (g(x))

مـثـال:

$F(x) = 3x-1 \quad , \quad G(x) = 2x + 5$

$fog(x) = f(g(x)) = F(2x+5)$

$= 3(2x + 5) - 1 = 6x + 14$

أوجد **(GoF) (3)**

$Gof(x) = g(f(x)) = g(3x-1)$

$2(3x-1)+5 = 6x + 3$

$6(3) + 3 = 21$

مـعـكـوس الـدالـة :

معكوس الدالة **f(x)** *يرمز له بالرمز* **$\rightarrow f^{-1}(x)$**

إذا كانت الدالة **g(x)** *دالة عكسية لدالة* **f(x)** *فإن* **$fog(x) = gof(x) = x$**

مـثـال: *أوجدي الدالة العكسية*

$F(x) = 3x - 1$ **f(x)-y**

$y=3x-1$

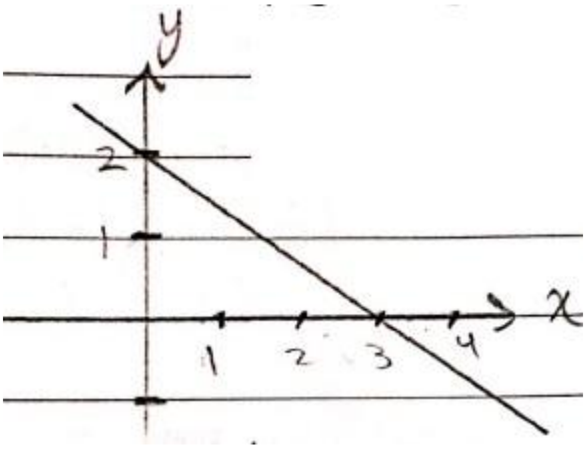
نقوم بالتبديل بين **x , y** **$x-3y-1$**

نجعل **y** *في طرف* $\frac{x+1}{3} = y$

دالة عكسية **$f\text{-}1(x)=\frac{x+1}{3}$**

٩- يرسم الدوال الخطية وكثيرات الحدود من الدرجة الثانية :

مثال: أي مما يلي يمثل معادلة التقييم المبين في الشكل أدناه؟



أ- $y = \frac{-2}{3}x + 2$ الحل

ب- $y = \frac{2}{3}x$-2

ت- y=6x + 2

ث- y=6x-2

الحل: نلاحظ أن **2** على محور **y** هو الجزء المقطوع من محور الصادات حتى أعين الميل أنزل خطوتين وثلاث خطوات على اليمين لأصل النقطة الثانية للمستقيم الحل إذن (أ)

نلاحظ أن المعادلات الخطية لابد أن يكون فيه ميل وجزء مقطوع من محور الصادات

y = mx + b

b الجزء الموجود على محور الصادات.