الاسم :	مذاكرة (الأعداد العقديّة)	BAC MATHS
المدّة :	الدرجة الكاملة : 300	

أوّلاً: **أجب عن الأسئلة الآتية :** (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ليكن العدد العقدي $z = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$. **المطلوب :**

1) عيّن طويلة و زاوية العدد العقدي z^2 , ثم اكتب z بالشكل الأسّي .
2) استنتج كلاً من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

السؤال الثاني: ليكن العدد العقدي z الذي يحقق $|z| = 1$. أثبت في الحالتين الآتيتين أنّ $|w| = 1$:

1) $w = \frac{5+7z}{7+5z}$ 2) $w = \frac{z+2i}{1-2iz}$

السؤال الثالث: بسّط كتابة العدد العقدي :

$$z = \frac{\cos x + i\sin x - 1}{\cos x + i\sin x + 1}$$

ثانياً: **حل التمارين الآتية :** (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول: ليكن كثير الحدود $P(z) = z^3 - 6iz^2 - 11z + 6i$ نهدف إلى حل المعادلة $P(z) = 0$ في $\mathbb{C}$.

1) أثبت أنّ $P(i) = 0$.
2) عيّن كثير حدود Q من الدرجة الثانية يحقّق $P(z) = (z-i)Q(z)$.
3) أوجد جميع حلول المعادلة $P(z) = 0$ بالشكل الجبري .

التمرين الثاني: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقطتان A و B الممثلتان بالعددين العقديين :

$$z_A = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad , \quad z_B = \overline{z_A}$$

1) أثبت أنّ $\frac{z_A}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ و استنتج زاوية العدد العقدي z_A .
2) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.
3) أثبت أنّ $1 + z_A + z_A^2 + \cdots + z_A^{15} = 0$.

التمرين الثالث: في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ليكن العدد العقدي $w = -12 + 16i$. **المطلوب :**

1) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد w .
2) أوجد العددين z_A و z_B حلَّي المعادلة $z^2 + (4+2i)z + 6 = 0$.
3) صف Γ مجموعة النقاط $M(z)$ من المستوي التي تحقّق : $|z+1-i| = |z+3+3i|$.
4) اكتب معادلة للمجموعة Γ .

-------- انتهت الأسئلة --------

حل مذاكرة الأعداد العقدية "1-2022"

أولاً: السؤال الأول:

1)

$$z^2=(\sqrt3+1)^2-(\sqrt3-1)^2+2i(\sqrt3+1)(\sqrt3-1)$$

$$=(\sqrt3+1+\sqrt3-1)(\sqrt3+1-\sqrt3+1)+2i(3-1)$$

$$=(2\sqrt3)(2)+4i$$

$$z^2=4\sqrt3+4i$$

$$|z^2|=4\cdot\sqrt{3+1}=4\cdot 2=8$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{4\sqrt3}{8}=\frac{\sqrt3}{2}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{8}=\frac12\end{array}\right\}\ \theta=\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$$

$$z^2=8e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{z=2\sqrt2\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

2)

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt3+1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt3-1}{2\sqrt2}=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$$

السؤال الثاني:

$$|z|=1 \Leftrightarrow \bar z=\frac{1}{z}$$

1)

$$\bar w=\overline{\left(\frac{5+7z}{7+5z}\right)}=\frac{\overline{(5+7z)}}{\overline{(7+5z)}}$$

$$\bar w=\frac{5+7\bar z}{7+5\bar z}=\frac{5+7\cdot\frac{1}{z}}{7+5\cdot\frac{1}{z}}\cdot\frac{z}{z}$$

$$\bar w=\frac{5z+7}{7z+5}=\frac{1}{w}$$

$$\Rightarrow \boxed{|w|=1}$$

2)

$$\bar w=\frac{\bar z-2i}{1+2i\bar z}=\frac{\frac{1}{z}-2i}{1+2i\cdot\frac{1}{z}}\cdot\frac{z}{z}$$

$$\bar w=\frac{1-2iz}{z+2i}=\frac{1}{w}\Rightarrow \boxed{|w|=1}$$

السؤال الثالث:

طريقة أولى:

$$z=\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\cdot\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}}=\frac{2i\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\boxed{z=i\tan\frac{\theta}{2}}$$

طريقة ثانية:

$$z=\frac{-(1-\cos\theta)+i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=\frac{-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\left[\frac{i\cos\frac{\theta}{2}+i^2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$=\tan\frac{\theta}{2}(i)=i\tan\frac{\theta}{2}$$

ثانياً: التمرين الأول:

1)

$$P(i)=i^3-6i^3-11i+6i$$

$$=-i+6i-11i+6i=0$$

2)

$$\begin{array}{r|l} z^3-6iz^2-11z+6i & z-i\\ -z^3+iz^2 & z^2-5iz-6\\ \hline -5iz^2-11z+6i & \\ +5iz^2+5z & \\ \hline -6(z-i) & \end{array}$$

$Z_A = re^{i\theta}$, $Z_B = \overline{Z_A} = re^{-i\theta}$

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

$$e^{2i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{4} + 2\pi K \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$\theta = \frac{\pi}{8} + \pi K$$

لكن A تقع في الربع الأول :

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{8}} \quad (2\pi)$$

2- $Z_A = |Z_A| . e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{8}}$

$$Z_A = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

بالمطابقة :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

3- $1 + Z_A + Z_A^2 + Z_A^3 + \dots + Z_A^{15}$

$$= (1)\frac{1 - Z_A^{16}}{1 - Z_A} = \frac{1 - (e^{i\frac{\pi}{8}})^{16}}{1 - e^{i\frac{\pi}{8}}}$$

$$= \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{i\frac{\pi}{8}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{\pi}{8}}} = 0 .$$

حيث تذكير :

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\Rightarrow Q(Z) = Z^2 - 5iZ - 6$$

3- $P(Z) = (Z - i)(Z^2 - 5iZ - 6)$

$P(Z) = 0 \iff \boxed{Z_1 = i}$ إما

أو $Z^2 - 5iZ - 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -25 + 24 = -1$$

$$\sqrt{-\Delta} = 1$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{5i + i}{2} = 3i$$

$$\boxed{Z_2 = 3i}$$

$$Z_3 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{5i - i}{2} = 2i$$

$$\boxed{Z_3 = 2i}$$

$$S = \{i, 2i, 3i\}$$

التمرين الثاني :

1- $\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{Z_A}{\overline{Z_A}} = \frac{Z_A^2}{\overline{Z_A} \cdot Z_A} = \frac{Z_A^2}{|Z_A|^2}$

$$Z_A^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} + 2i\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{4-2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|Z_A|^2 = |Z_A^2| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\frac{Z_A}{Z_B} = e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

التمرين الثالث :

1) $Z = x+iy \quad , \quad w = a+ib$

$$Z^2 = w$$

$$x^2 - y^2 = a = -12$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{144+256}$$

$$= \sqrt{400} = 20$$

$$2xy = b = 16 \quad \text{—} (*)$$

$$x^2 - y^2 = -12 \quad \text{———} (1)$$

$$x^2 + y^2 = 20 \quad \text{———} (2) \quad +$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

نعوض في (2) :

$$4+y^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

من (*) الإشارات متماثلة :

$$Z_1 = 2+4i \quad , \quad Z_2 = -2-4i$$

2)

$$Z^2 + (4+2i)Z + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4+2i)^2 - 24$$

$$= 16 + 16i - 4 - 24$$

$$\Delta = -12 + 16i$$

$$\sqrt{\Delta} = 2+4i$$

$$Z_A = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2i+2+4i}{2}$$

$$= \frac{-2+2i}{2} = -1+i$$

$$Z_B = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2i-2-4i}{2} = -3-3i$$

3) $\Gamma : \quad |Z-(-1+i)| = |Z-(-3-3i)|$

$$|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$$

$$MA = MB$$

تمثل محور القطعة المستقيمة AB .

4)

$$Z = x+iy$$

$$|x+iy+1-i| = |x+iy+3+3i|$$

$$|(x+1)+i(y-1)| = |(x+3)+i(y+3)|$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}$$

نربع الطرفين :

$$(x+1)^2+(y-1)^2 = (x+3)^2+(y+3)^2$$

$$\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-2y+1 = \cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}+6y+9$$

$$2x-2y+2 = 6x+6y+18 \quad (\div 2)$$

$$x-y+1 = 3x+3y+9$$

$$2x+4y+8 = 0$$

$$\boxed{\Gamma : \quad x+2y+4 = 0}$$

BAC MATHS