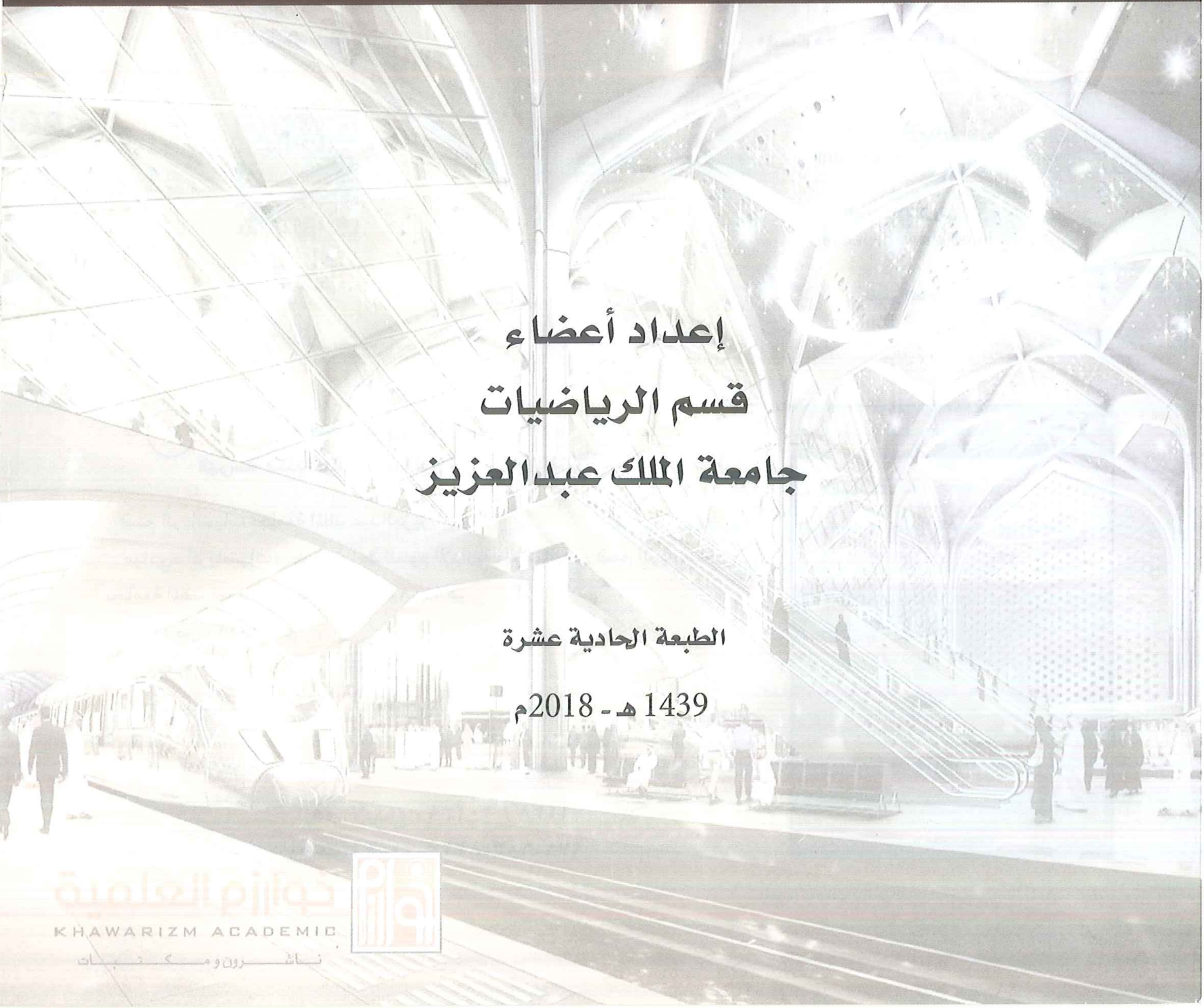
رؤية VISION 2030
المملكة العربية السعودية
KINGDOM OF SAUDI ARABIA

مبادئ الرياضيات

وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية



إعداد أعضاء
قسم الرياضيات
جامعة الملك عبدالعزيز

الطبعة الحادية عشرة

1439 هـ - 2018م

خوارزم العلمية
KHAWARIZM ACADEMIC
ناشرون ومكتبات

الطبعة الحادية عشرة

1439 هـ - 2018م

امسح رمز الاستجابة السريعة للوصول إلى موقع المكتبة

خوارزم العلمية
KHAWARIZM ACADEMIC
ناشرون ومكتبات

الإدارة :
المملكة العربية السعودية - جدة
حي الفيحاء
بجوار مدارس الفكر
هاتف : ١٠٨١١ ٩٦٦٩٢٠٠ +
تحويلة : ١١١-١١٥ - ١٢٤ - ١٢٦
فاكس : ٩٦٦٢٦٨١٨٨٣١ +
المستودع : ٩٦٦٢٦٤٠٠٧٠٩ +

الموقع الإلكتروني :
www.khawarizm.com

البريد الإلكتروني :
info@khawarizm.com

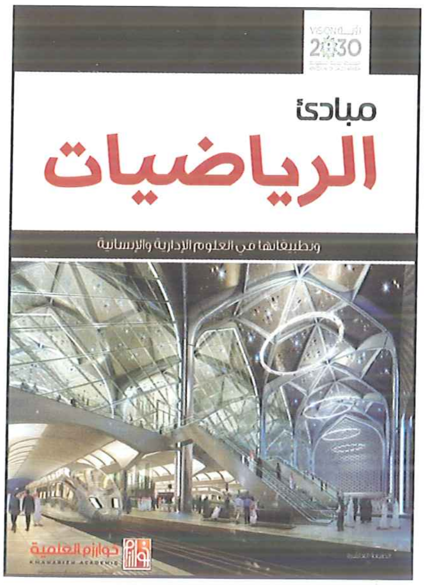
المدير العام :
gm@khawrizm.com

(ج) خوارزم العلمية للنشر والتوزيع، ١٤٣٨هـ
فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز
مبادىء الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية / قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز ط١١ - جدة ١٤٣٨ هـ
٤٧٠ ص ، ٢١×٢٩سم
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٨٢٢٧-٠٠-٨

١ -الرياضيات	أ. العنوان
ديوي ٥١٠	١٤٣٨ / ١٠٢٣٩

رقم الإيداع : ١٠٢٣٩ / ١٤٣٨
ردمك : ٩٧٨-٦٠٣-٨٢٢٧-٠٠-٨



بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة ..

تعد المبادئ الأساسية للرياضيات وتطبيقاتها أداة رئيسية في معالجة وحل المسائل العلمية في مختلف التخصصات، وسعياً من قسم الرياضيات بجامعة الملك عبدالعزيز في إعداد طلبة مرحلة البكالوريوس للتخصصات العلوم الإدارية والإنسانية بالمهارات والمفاهيم الأساسية وتطبيقاتها فإن القسم يقدم كتاباً مبسطاً بعنوان: (مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية) ويحتوي الكتاب على ستة أبواب تناولت أهم الأساسيات الرياضية والتي لها تطبيقات عديدة وفي مختلف التخصصات على النحو التالي:

الباب الأول: مفاهيم أساسية في الجبر ويستعرض مبادئ المجموعات، والعمليات الجبرية، والأسس والجذور.

الباب الثاني: التحليل ويقدم المقادير الجبرية، وتحليل المقادير الجبرية، وتحليل المقدار الثلاثي، والعمليات على المقادير الجبرية الكسرية، والفترات العددية.

الباب الثالث: المحددات والمصفوفات ويتعامل مع المصفوفات، والمحددات، والمعكوس الضربي للمصفوفات.

الباب الرابع: المعادلات والمتباينات ويتضمن الأحداثيات المستوية، معادلات الدرجة الأولى، ومعادلات الخط المستقيم، ومعادلات الدرجة الثانية، والمتباينات الخطية، وتطبيقات إدارية وإنسانية.

الباب الخامس: الدوال ويشمل الدوال، والدوال الجبرية، والدالة الزوجية والدالة الفردية، والدوال المسترسلة، وتطبيقات إدارية وإنسانية.

الباب السادس : المتتابعات ويتطرق إلى المتتابعات الحسابية والهندسية،وتطبيقات إدارية وإنسانية.

أعضاء

قسم الرياضيات


مبادئ
الرياضيات
وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإنسانية
1
مفاهيم أساسية في الجبر
2
التحليل
3
المحددات والمصفوفات
4
المعادلات والمتباينات
5
الدوال
6
المتتابعات

المحتويات ..

1

Chapter

الباب الأول

مفاهيم أساسية في الجبر

1 - 1 مبادئ المجموعات

1 - 2 العمليات الجبرية

1 - 3 الأسس والجذور

1.1 الفصل الأول

مبادئ المجموعات

1.1.1 طرق التعبير عن المجموعات.

1.1.2 المجموعات العددية.

1.1.3 خصائص الأعداد الحقيقية.

1.1.4 العمليات على المجموعات.

1.1.5 القيمة المطلقة.

1.1.6 تمارين.

مبادئ المجموعات

تعريف (المجموعة):

المجموعة هي تجمع من الأشياء المعروفة والمحددة تحديداً تاماً .

مثال (1):

1) مجموعة الحروف العربية.

2) مجموعة طلاب السنة التحضيرية للعام الجامعي 1438هـ - 1439هـ.

3) مجموع أيام الأسبوع

4) مجموعة الأشهر الهجرية.

ويُرمز للمجموعات عادة بالأحرف الكبيرة مثل $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ والأشياء التي تتألف منها المجموعة تُسمى عناصر ويُرمز للعناصر بالأحرف الصغيرة مثل $a, b, c, \ldots, x, y, z$.

إذا كان العنصر x هو أحد عناصر المجموعة A فإنه يُقال أن x ينتمي إلى A وتُكتب $x \in A$ ، أما إذا كان العنصر y لا ينتمي للمجموعة A فإننا نكتب $y \notin A$.

تعريف (المجموعة الخالية):

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا يوجد بها أي عنصر و يُرمــــز لها بالرمز ϕ أو $\{\}$.

1.1.1 طرق التعبير عن المجموعات

فيما يلي طريقتان للتعبير عن المجموعات:

1) طريقة السرد (الحصر)

ويتم فيها كتابة جميع العناصر المكونة للمجموعة داخل قوسين من الشكل $\{\}$ عنصراً تلو الآخر دون تكرار ويُفصل بين العناصر بفواصل.

مثال (2):

1) مجموعة الحروف المكونة لكلمة pen هي $X = \{p, e, n\}$.

2) مجموعة دول مجلس التعاون الخليجي هي:

$Y =$ { السعودية، عمان، الكويت، قطر، الإمارات، البحرين } .

3) مجموعة الحروف المكون لكلمة book هي $Z = \{b, o, k\}$.

2) طريقة الوصف

ويتم فيها ذكر صفة أو خاصية تميّز عناصر المجموعة داخل قوسين على الشكل { الخاصية $x: x\}$. وجدير بالذكر أن العلامة " : " تعني "حيث أن" .

مثال (3):

1) مجموعة الحروف المكونة لكلمة pen هي: $X =\{ x:$ pen حرف من حروف كلمة $x\}$.

2) مجموعة دول مجلس التعاون الخليجي هي:

$Y =\{ y :$ دولة من دول مجلـــس التعاون الخليجي $y\}$.

3) مجموعة حروف المكونة لكلمة book هي : $Z = \{ z :$ book حروف من حروف كلمة $z\}$.

تعريف (المجموعة المنتهية وغير المنتهية):

المجموعات التي تتألف من عدد محدود من العناصر تُسمى مجموعات منتهية، أما المجموعات التي تتألف من عدد غير محدود أو غير منتهي من العناصر تُسمى مجموعات غير منتهية.

مثال (4):

فيما يلي أمثلة على المجموعات المنتهية و غير منتهية:

1) $X = \{a, b, c, d\}$ مجموعة منتهية.

2) $Y = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ مجموعة غير منتهية.

تعريف (المجموعة الجزئية) :

إذا كان كل عنصر في المجموعة X ينتمي للمجموعة Y فهذا يعني أن المجموعة X مجموعة جزئية من المجموعة Y ونكتب ذلك رياضياً $X \subset Y$. حيث أن الرمز " $\subset$ " يعني مجموعة جزئية.

مثال (5):

إذا كانت $X = \{a, b, c\}$ ، $Y = \{a, b, c, d\}$ ، $Z = \{a, c, f\}$ ، فإن كل عنصر من عناصر X ينتمي إلى Y وبالتالي $X \subset Y$ ، والعنصر f لا ينتمي إلى المجموعة Y وبذلك تكون $Z \not\subset Y$.

مثال (6):

إذا كانت $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $Y = \{3, 4\}$ ، $Z = \{5, 6, 7\}$ ، فإن $Y \subset X$ ، $Z \not\subset X$

ملاحظة (1):

المجموعة الخالية ϕ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.

تعريف (تساوي مجموعتين)

يقال أن المجموعتين X ، Y متساويتان إذا كانتا تحتويان نفس العناصر وتكتب $X = Y$.

مثال (7):

1) إذا كانت $X = \{4 , 2 , 6\}$ ، $Y = \{6 , 4 , 2\}$ فإن $X = Y$.

2) إذا كانت $A = \{a , b , c , d\}$ ، $B = \{b , d , a , c\}$ فإن $A = B$.

3) إذا كانت X هي مجموعة أرقام العدد 9694426

Y هي مجموعة أرقام العدد 9642 فإن $Y = X$.

تعريف :

رتبة المجموعة X يُرمز لها بالرمز $|X|$ ، وتعني عدد عناصر المجموعة X .

مثال (8):

إذا كانت $X = \{a,b,c,d,e\}$ ، $Y = \{1,5,8\}$

فإن $|X| = 5$ ، $|Y| = 3$.

ملاحظة (2):

رتبة المجموعة الخالية ϕ تساوي صفر لخلوها من العناصر وبالتالي عدد عناصرها يساوي الصفر.

1.1.2 المجموعات العددية

1 - مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$:

هي مجموعة الأعداد التي تستخدم في العد $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

2 - مجموعة الأعداد الكلية $\mathbb{W}$:

هي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافاً لها الصفر $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

3 - مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

4 - مجموعة الأعداد القياسية (النسبية أو الكسرية) :

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة كسر $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$ ، بحيث أن المقام لا يساوي صفر والبسط والمقام أعداد صحيحة، ويمكن كتابتها على الصورة:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{a}{b} , a,b \in \mathbb{Z} , b \neq 0 \right\}$$

التمثيل العشري للأعداد القياسية إما أن يكون منتهي أو أن يكون غير منتهي ومتكرراً.

مثال (9):

فيما يلي أمثلة على التمثيل العشري المنتهي وغير المنتهي:

1) $\frac{20}{80}$ هو عدد قياسي وتمثيله العشري منتهي وهو 0.25 .

2) $\frac{1}{3}$ هو عدد قياسي وتمثيله العشري غير منتهي (متكرر) $0.33333\ldots$.

5- مجموعة الأعداد غير القياسية (غير النسبية - غير الكسرية) $\overline{Q}$:

هي مجموعة الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة كسر مثل: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{1}{\sqrt{7}}, e, \pi$

التمثيل العشري للأعداد غير القياسية غير منتهي وغير متكرر، فمثلاً

$\pi = 3.1415926535...$ ، $e = 2.71828$ ، $\sqrt{3} = 1.732050808...$ ، $\sqrt{2} = 1.414213562...$

ملاحظة (3):

التقريب النسبي للعدد غير النسبي π هو 3.14 أو $\frac{22}{7}$ ، أي أن $\pi \approx 3.14$ أو $\pi \approx \frac{22}{7}$.

6 - مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

وهي مجموعة جميع الأعداد الكسرية وغير الكسرية.

1.1.3 خصائص الأعداد الحقيقية

إذا كانت a,b,c أعداد حقيقية، فإن الأعداد الحقيقية تتمتع بالخواص التالية:

1) خاصية الإغلاق للجمع والضرب: $a+b \in \mathbb{R}$ ، $ab \in \mathbb{R}$. (جمع أو ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي)

2) خاصية الإبدال للجمع والضرب: $a+b=b+a$ ، $ab=ba$.

3) خاصية الدمج أو التجميع للجمع والضرب: $(a+b)+c=a+(b+c)$ ، $(ab)c=a(bc)$ (تحريك الأقواس)

4) خاصية وجود العنصر المحايد الجمعي: $a=0+a=a+0=a$. أي أن العدد صفر هو العنصر المحايد الجمعي.

5) خاصية وجود العنصر المحايد الضربي: $a=(1)(a)=(a)(1)=a$.أي أن العدد واحد هو العنصر المحايد الضربي.

6) خاصية ضرب عدد في صفر: $0=(0)(a)=(a)(0)=0$.

7) خاصية المعكوس الجمعي: $a+(-a)=(-a)+a=0$.

8) خاصية المعكوس الضربي: إذا كان $a \neq 0$، فإنه يوجد عدد حقيقي مقلوب للعدد a يُسمى بالمعكوس الضربي للعدد a ويرمز له بالرمز $\frac{1}{a}$ بحيث أن $1=\left(\frac{1}{a}\right)(a)=(a)\left(\frac{1}{a}\right)$.

9) خاصية التوزيع: $a(b+c)=ab+ac$ (التوزيع من اليسار)

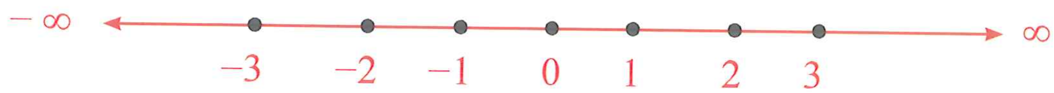
$(a+b)c=ac+bc$ (التوزيع من اليمين)

10) خاصية الشطب (الاختصار): $a+b=a+c \Leftrightarrow b=c$

$ab=ac \Leftrightarrow b=c$ ، $(a\neq 0)$

11) خاصية عوامل الصفر: $ab=0 \Leftrightarrow a=0$ or $b=0$.

12) خاصية الترتيب: لأي عددين حقيقين مختلفين يجب على أحدهما أن يكون أصغر من الآخر وهذه الخاصية سمحت لنا بتمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بخط مستقيم يسمى بخط الأعداد الحقيقية



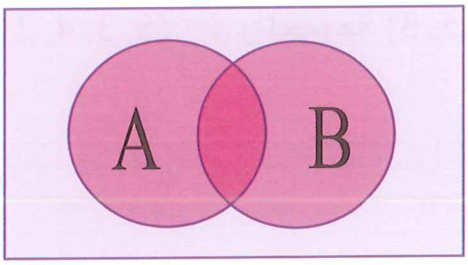
1.1.4 العمليات على المجموعات

1) عملية اتحاد مجموعتين $(Union)$

تعريف (الإتحاد)

إتحاد مجموعتين A وَ B هي أخذ جميع عناصر المجموعتين (أي العناصر الموجودة في A أو B أو في كل من A وَ B بدون تكرار للعناصر)، ويُرمز لها بالرمز $A \cup B$ وتُعرّف بـ

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{or} \quad x \in B\}$$



حيث أن الرمز "$\cup$" يرمز لعملية الاتحاد.

مثال (10):

إذا كانت المجموعة A هي $A = \{2, 3, 4, 5\}$ والمجموعة B هي $B = \{3, 5, 7\}$

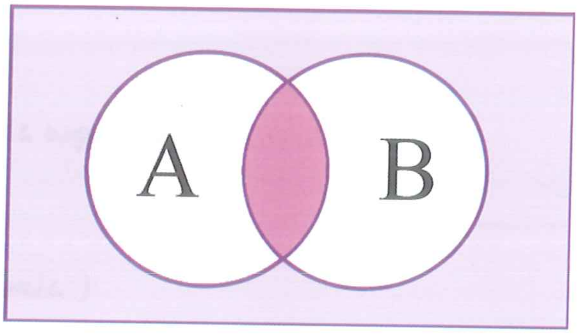
فإن $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

2) عملية تقاطع مجموعتين $(Intersection)$

تعريف (التقاطع)

تقاطع مجموعتين A وَ B هي إيجاد العناصر المشتركة بينهما، ويُرمز لها بالرمز $A \cap B$ وتُعرّف بـ

$A \cap B = \{x : x \in A \quad , \quad x \in B\}$



حيث أن الرمز "$\cap$" يرمز لعملية التقاطع.

مثال (11):

إذا كانت المجموعة $A= \{5, 3, 4, 2\}$ والمجموعة $B=\{7, 5, 3\}$ فإن

$A \cap B = \{5, 3\}$

ملاحظة (4):

إذا كان $A \cap B = \phi$ فإن المجموعتين منفصلتين، أي أنه لا توجد بينهما عناصر مشتركة.

ملاحظة (5):

إذا كانت A , B مجموعتين وكان $A \subset B$ فإن

(1) $A \cup B = B$

(2) $A \cap B = A$

ملاحظة (6):

(1) $R = Q \cup \overline{Q}$

(2) $Q \cap \overline{Q} = \phi$

حيث Q هي مجموعة الأعداد النسبية.

حيث $\overline{Q}$ هي مجموعة الأعداد غير النسبية.

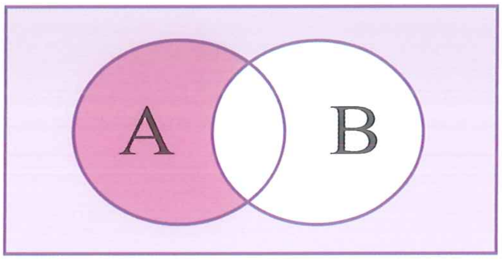
حيث R هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

3) عملية طرح مجموعة من أخرى (*Difference*)

تعريف (الفرق بين مجموعتين A وَ B)

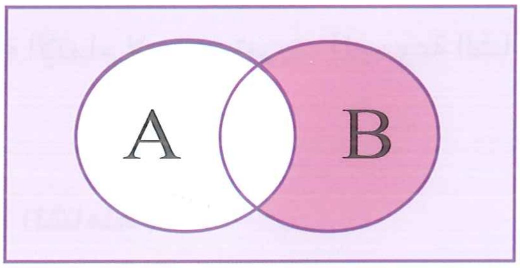
(1) $A - B = \{x : x \in A,\ \ x \notin B\}$

هي جميع العناصر الموجودة في المجموعة A ولا توجد في المجموعة B .



(2) $B - A = \{x : x \in B,\ \ x \notin A\}$

هي جميع العناصر الموجودة في المجموعة B ولا توجد في المجموعة A .



مثال (12):

إذا كانت $B = \{5, 7, 3\}$ ، $A = \{2, 4, 5, 3\}$ فإن:

$A - B = \{2, 4, 5, 3\} - \{5, 7, 3\} = \{2, 4\}$

$B - A = \{5, 7, 3\} - \{2, 4, 5, 3\} = \{7\}$

خاصية (1):

إذا كانت $A\ ,B$ مجموعتين فإن

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

(3) $A \cup \phi = A$

(4) $A \cap \phi = \phi$

4. عملية الإتمام (Complement)

قبل التحدث عن عملية الإتمام لابد من تعريف المجموعة الشاملة(Universal)

تعريف (المجموعة الشاملة)

هي المجموعة التي تضم كل المجموعات الجزئية ويُرمز لها بالرمز U .

مثال (13):

لو رمزنا لمجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية بالرمز A ولمجموعة الأعداد الطبيعية الفردية بالرمز B ، فإن المجموعة الشاملة U هي مجموعة الأعداد الطبيعية.

تعريف (عملية الإتمام)

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة الشاملة U فإن $U-A$ هي المجموعة المتممة للمجموعة A ويُرمز لها بالرمز A' وتُعرّف بـ $A'=\{x : x \in U, x \notin A\}$.

خاصية (2):

(1) $A \cup A' = U$

(2) $A \cap A' = \phi$

(3) $A \cup U = U$

(4) $A \cap U = A$

مثال (14):

إذا كانت $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$. أوجد A' .

الحــــل:

$$A' = U-A = \{1, 2, 7, 8, 9, 10\}$$

مثال (15):

إذا كانت

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k, m\}$

$A = \{a, c, d, e, f\}$, $B = \{a, d, f, b, k, m\}$

$C = \{a, f, e\}$

فإن

(1) $A \cup B = \{a, c, d, e, f, b, k, m\}$

(2) $A \cap B = \{a, d, f\}$

(3) $A - B = \{c, e\}$

(4) $B - A = \{b, k, m\}$

(5) $A' = U - A = \{b, g, h, k, m\}$

(6) $B' = U - B = \{c, e, g, h\}$

(7) $C \subset A \ , C \not\subset B$

(8) $A \cup U = U$

(9) $B \cap U = B$

(10) $|A \cup B| = 8 \quad , \quad |B - A| = 3$

مجموعة المجموعات الجزئية لأي مجموعة:

إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ ، فإن مجموعة المجموعات الجزئية هي:

$$S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\} \{1, 2, 3\}, \phi\}$$

ملاحظة (7):

عناصر S هي مجموعات جزئية من A، وعليه يكون $\{1\} \in S$ بينما $\{1\} \subset A$.

ملاحظة (8):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.1.5 القيمة المطلقة

تعريف (القيمة المطلقة) :

القيمة المطلقة لعدد حقيقي x هي المسافة الفاصلة بين x و العدد 0 على خط الأعداد الحقيقية ويُرمز لها بالرمز $|x|$، وتُعرّف بـ

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ونعبّر عنها بعدد الوحدات بين x والعدد 0 .

مثال (16) :

1) $4 = |4|$ ، حيث أن المسافة (أو عدد الوحدات) بين 0 وَ 4 على خط الأعداد الحقيقية تساوي 4 وحدات.

2) $|-6| = -(-6) = 6$ ، حيث أن المسافة (أو عدد الوحدات) بين -6 وَ 0 على خط الأعداد الحقيقة تساوي 6 وحدات.

تعريف : (المسافة بين عددين على خط الأعداد)

المسافة بين عددين x وَ y على خط الأعداد تُقدَّر بالقيمة المطلقة للفرق بين x وَ y أي أن:

$$d(x, y) = |x - y|$$

ونعبّر عنها بعدد الوحدات بين x وَ y .

ملاحظة (9) :

المسافة بين x وَ y هي نفس المسافة بين y وَ x أي أن:

$$|x - y| = |y - x| \quad \text{أو} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

مثال (17):

أوجد المسافة بين -1 ، 2 .

الحـــل:

المسافة بين العددين: -1 ، 2 هي:

$$d(-1,2)=|-1-2|=|-3|=3$$

خصائص القيمة المطلقة

ليكن x وَ y عددين حقيقيين فإن :

1) $|x| \geq 0$

2) $|-x|=|x|$

3) $|xy|=|x|\ |y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

5) $|x+y| \leq |x|+|y|$ (المتراجحة المثلثية)

1.1.6 تمارين

(1) $\sqrt{9} \in Q$ حيث Q هي مجموعة الأعداد الكسرية

a	صواب	b	خطأ

(2) مجموع الأعداد الكلية $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ تكون منتهية

a	صواب	b	خطأ

(3) $\{s, t, u, x\} \cup \{t, u, w\}$

a	$\{x, z, w\}$	b	$\{t, u\}$
c	$\{s, t, u, x, w\}$	d	$\{w\}$

(4) $\{s, t, u, x\} \cap \{t, u, w\}$

a	$\{r\}$	b	$\{s, t, u\}$
c	$\{r, v, w\}$	d	$\{s, u, v\}$

(5) رتبة المجموعة $\{1\}$ هي 1

a	صواب	b	خطأ

(6) $\sqrt{4} \notin Q$ حيث Q هي مجموعة الأعداد الكسرية

a	صواب	b	خطأ

(7) $\{t, u, x, z\} \cup \{t, u, w\}$

a	$\{x, z, w\}$	b	$\{t, u\}$
c	$\{t, u, x, z, w\}$	d	$\{w\}$

(8) رتبة المجموعة $\{a\}$ هي 0

a	صواب	b	خطأ

(9) $\{2, 4, 6, 8\} - \{1, 2, 3, 4, 6\} = \{8\}$

a	صواب	b	خطأ

(10) $\{r, s, t, u, w\} \cap \{s, t, u, v\}$

a	$\{r\}$	b	$\{s, t, u\}$
c	$\{r, v, w\}$	d	$\{r, w\}$

(11) $\sqrt{9} \notin Q$ حيث Q هي مجموعة الأعداد الكسرية

a	صواب	b	خطأ

(12) $\{a ,b ,c ,d ,e ,f ,g\} \cup \{c ,d ,e ,h\}$

a	$\{a, b, c, d, e, f, g ,h\}$	b	$\{c, f\}$
c	$\{a, b, d\}$	d	$\{c, d\}$

(13) رتبة المجموعة ϕ هي 1

a	صواب	b	خطأ

(14) مجموع الأعداد الكلية $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ تكون غير منتهية

a	صواب	b	خطأ

(15) $\{a, b, c, d, e, f, g\} \cap \{c, d, e, h\}$

a	$\{c, d, e\}$	b	$\{a, b\}$
c	$\{h\}$	d	$\{f, g\}$

(16) $\{a, b, c, f, h\} - \{b, c, f, k\}$

a	$\{b, k\}$	b	$\{a, h\}$
c	$\{c, k\}$	d	$\{b, d, h\}$

(17) $\sqrt{5} \notin Q$ حيث Q هي مجموعة الأعداد الكسرية

a	صواب	b	خطأ

(18) $\{r, s, t\} \cup \{s, t, u, v\}$

a	$\{r\}$	b	$\{s, t, u, v\}$
c	$\{r, s, t, u, v\}$	d	$\{s, t\}$

(19) رتبة المجموعة $\{r, s, t, u, v\}$ هي 5

a	صواب	b	خطأ

(20) مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, ...\}$ تكون غير منتهية

a	صواب	b	خطأ

(21) $\{r, s, t\} \cap \{s, t, u, v\}$

a	$\{r, u, v\}$	b	$\{u, v\}$
c	$\{r\}$	d	$\{s, t\}$

(22) $\{r, s, t, u, v\} \cap \{s, t, u, v, w\}$

a	$\{r, w\}$	b	$\{u, v\}$
c	$\{r\}$	d	$\{s, t, u, v\}$

(23) المسافة بين العددين -4 و -3 هي 1

a	صواب	b	خطأ

(24) المسافة بين العددين -4 و 3 هي 7

a	صواب	b	خطأ

(25) المسافة بين العددين 4 و 3 هي 1

a	صواب	b	خطأ

(26) المسافة بين العددين 4 و -3 هي 1

a	صواب	b	خطأ

(27) المسافة بين العددين -5 و 11 تساوي

a	5	b	6
c	11	d	16

(28) المسافة بين العددين -7 و 12 تساوي

a	7	b	12
c	19	d	5

(29) المسافة بين العددين -6 و 11 تساوي

a	6	b	17
c	5	d	11

(30) المسافة بين العددين -8 و 12 تساوي

a	20	b	12
c	8	d	4

1.2 الفصل الثاني

العمليات الجبرية

العمليات الجبرية

توجد أربع عمليات جبرية أساسية على الأعداد هي عملية الجمع، عملية الطرح، عملية الضرب و عملية القسمة، مع ملاحظة أن لأي عدد إشارة إما موجب واما سالب.

1.2.1 عملية الجمع الجبري

قاعدة الإشارات في عملية الجمع الجبري

عند جمع الأعداد الحقيقية جمعاً جبرياً فإننا نتبع ما يلي:

1) إذا تشابهت إشارتي العددين نجمع العددين و نضع نفس الإشارة.

2) إذا اختلفت إشارتي العددين نطرح العددين ونضع في الناتج إشارة العدد الأكبر.

مثال (1):

1) $+3+2=+5$ (نجمع ونضع نفس الإشارة)

2) $-2-3=-5$ (نجمع ونضع نفس الإشارة)

3) $-3+2=-1$ (نطرح ونضع إشارة العدد الأكبر)

4) $+3-2=+1$ (نطرح ونضع إشارة العدد الأكبر)

1.2.2 عملية الضرب الجبري

قاعدة الإشارات في عملية الضرب الجبري

عند ضرب الأعداد الحقيقية أو قسمتها فإننا نتبع ما يلي:

1) إذا تشابهت إشارتي العددين فإن إشارة العدد الناتج من العملية الجبرية موجبة.

2) إذا اختلفت إشارتي العددين فإن إشارة العدد الناتج من العملية الجبرية سالبة.

مثال (2):

1) $(3)(4) = 12$

2) $(-3)(-4) = 12$

3) $(3)(-4) = -12$

4) $(-3)(4) = -12$

5) $\frac{20}{5} = 4$

6) $\frac{-20}{-5} = 4$

7) $\frac{20}{-5} = -4$

8) $\frac{-20}{5} = -4$

ترتيب إجراء العمليات الجبرية

لإتمام العمليات الجبرية نتبع ما يلي:

1) إذا احتوت العملية الجبرية على الجمع الجبري فقط فإننا نجمع الأعداد الموجبة (المسبوقة بإشارة موجبة) ويكون ناتجها بإشارة موجبة، ونجمع الأعداد السالبة (المسبوقة بإشارة سالبة) ويكون ناتجها بإشارة سالبة ثم نطرح الناتجين مع وضع إشارة الأكبر للناتج.

مثال (3):

1) $12 - 3 + 4 - 2 = 12 + 4 - 3 - 2 = 16 - 5 = 11$

2) $20 + 5 - 18 + 2 - 4 = 20 + 5 + 2 - 18 - 4 = 27 - 22 = 5$

3) $-15 + 7 + 4 - 12 = -15 - 12 + 7 + 4 = -27 + 11 = -16$

2) إذا احتوت العملية الجبرية على الضرب الجبري فقط فإننا نجري العملية بالترتيب حسب ظهورها من اليسار إلى اليمين.

مثال (4):

1) $15 \div 5 \times 4 \div 6 = 3 \times 4 \div 6 = 12 \div 6 = 2$

2) $30 \div 6 \times 3 \div 5 = 5 \times 3 \div 5 = 15 \div 5 = 3$

3) $-3 \times 8 \div 4 \div 3 = -24 \div 4 \div 3 = -6 \div 3 = -2$

3) إذا احتوت العملية الجبرية على عمليتي الضرب الجبري والجمع الجبري فإننا نجري عملية الضرب الجبري أولاً ثم الجمع الجبري ثانياً.

مثال (5):

1) $2 \times 5 + 18 \div 6 = 10 + 3 = 13$

2) $4 \times 6 + 40 \div 8 = 24 + 5 = 29$

3) $-50 \div 10 + 3 \times 4 = -5 + 12 = 7$

4) $6 + 2 \times 4 - 15 \div 5 = 6 + 8 - 3 = 14 - 3 = 11$

4) إذا احتوت العملية الجبرية على أقواس فإننا نجري العملية داخل الأقواس الصغيرة ( ) أولاً ، ثم الأقواس المتوسطة { } ، ثم الأقواس الكبيرة [ ] بالترتيب.

مثال (6):

1) $4 \times (2 + 7) = 4 \times 9 = 36$

2) $\{24 \div (8 - 4)\} \div 6 = \{24 \div 4\} \div 6 = 6 \div 6 = 1$

3) $[\{(5 \times 6) + (15 \div 5)\} + 2] \div 7 = [\{30 + 3\} + 2] \div 7 = [33 + 2] \div 7 = 35 \div 7 = 5$

1.2.3 قواسم العدد

عملية تحليل عدد إلى عوامله الأولية هي عملية كتابته كحاصل ضرب مجموعة أعداد. تُسمى الأعداد التي عند ضربها نحصل على العدد المطلوب بعوامل العدد الأولية. أو تسمى الأعداد التي تقسم عدد ما بدون باقي بعوامل العدد أو قواسم العدد.

مثال (7):

1) العدد 6 قاسم من قواسم العدد 24 لأن العدد 24 يقبل القسمة على العدد 6 بدون باقي.

2) العدد 6 ليس قاسماً من قواسم العدد 25 لأن العدد 25 لا يقبل القسمة على العدد 6 بدون باقي.

الأعداد الأولية

العدد الأولي هو العدد الذي لا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى الواحد الصحيح.

أو هو العدد الذي له قاسمان فقط العدد واحد و العدد نفسه.

و مثال على ذلك :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

ملاحظة (1):

العدد الذي له أكثر من قاسمين هو عدد غير أولي.

مثال (8):

لإيجاد العوامل أو القواسم للعدد نقوم بتحليله كالتالي:

1) 24

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24=(2)(2)(2)(3)$

2) 38

$$\begin{array}{r|l} 38 & 2 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array}$$

$38=(2)(19)$

3) 65

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$65=(5)(13)$

4) 125

$$\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$125=(5)(5)(5)$

القواسم المشتركة لعددين

هي الأعداد التي يقسم كل منها هذين العددين.

مثال (9):

أوجد قواسم العددين 30 وَ 18 المشتركة.

الحـــل:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$30=(2)(3)(5)$ $\qquad$ $18=(2)(3)(3)$

القواسم المشتركة هي: 2 , 3 , $3 \times 2 = 6$

مثال (10):

أوجد قواسم العددين 72 وَ 48 المشتركة.

الحل:

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$72=(2)(2)(2)(3)(3)$$

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$$48=(2)(2)(2)(2)(3)$$

القواسم المشتركة هي: 2 , 4 , 8 , 3 , 6 , 12 , 24

1.2.4 مضاعفات العدد

تسمى نواتج ضرب العدد في 1 ، وفي 2 ، وفي 3 ، وفي 4 ، وفي و ... بمضاعفات العدد.

مثال (11):

أوجد مضاعفات الأعداد 5 ، 6 ، 7

الحل:

مضاعفات العدد 5 هي:

$1)\ 5\times1 = 5$

$5\times2 = 10$

$5\times3 = 15$

$5\times4 = 20$

$5\times5 = 25$

$\vdots$

مضاعفات العدد 6 هي:

$2)\ 6\times1 = 6$

$6\times2 = 12$

$6\times3 = 18$

$6\times4 = 24$

$\vdots$

مضاعفات العدد 7 هي:

$3)\ 7\times1 = 7$

$7\times2 = 14$

$7\times3 = 21$

$7\times4 = 28$

$\vdots$

مثال (12):

أوجد المضاعفات المشتركة للعددين 4 وَ 5

الحـــل:

مضاعفات العدد 4 هي: 4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,...

مضاعفات العدد 5 هي: 5,10,15,20,25,30,35,40,...

المضاعفات المشتركة للعددين هي الأعداد 20,40,60,...

1.2.5 القاسم المشترك الأكبر لعددين

يُسمى أكبر قاسم مشترك لعددين بالقاسم المشترك الأكبر ويُرمز له بالرمز (ق.م.ك).

ملاحظة (2):

القاسم المشترك الأكبر هو حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة فقط.

مثال (13):

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 44 و 60.

الحـــل:

44	2
22	2
11	11
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = (2)(2)(3)(5)$

$44 = (2)(2)(11)$

القواسم المشتركة هي: 2 و 4 ، وبالتالي فإن ق.م.ك $= (2)(2) = 4$ (أكبرهما).

مثال (14):

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 45 .

الحـــل:

75	3
25	5
5	5
1	

45	3
15	3
5	5
1	

$45 = (3)(3)(5)$

$75 = (3)(5)(5)$

إذا ق.م.ك $= 3 \times 5 = 15$

1.2.6 المضاعف المشترك الأصغر لعددين

يُسمى أصغر مضاعف مشترك لعددين بالمضاعف المشترك الأصغر ويُرمز له بالرمز (م. م. ص.).

مثال (15):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3 وَ 5.

الحـــل:

مضاعفات العدد 3 هي: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, \ldots$

مضاعفات العدد 5 هي: $5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \ldots$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين 3 وَ 5 هو العدد 15

ملاحظة (3):

1) لكل عددين مضاعفات مشتركة كثيرة و للحصول على المضاعف المشترك الأصغر للعددين، نكتب سلسلة مضاعفات كل منهما، ثم نعيّن المضاعف المشترك الأصغر.

ملاحظة (4):

المضاعف المشترك الأصغر هو حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة وغير المشتركة.

مثال (16):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 14 و 36.

الحل:

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

14	2
7	7
1	

$14 = (2)(7)$

$36 = (2)(2)(3)(3)$

المضاعف المشترك الأصغر (م. م. ص.) هو:

$(2)(7)(2)(3)(3) = 252$

مثال (17):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 و 15 .

18	2
9	3
3	3
1	

15	3
5	5
1	

$15 = (3)(5)$

$18 = (2)(3)(3)$

المضاعف المشترك الأصغر (م. م. ص.) هو: $(3)(5)(2)(3) = 90$

ملاحظة (5):

المضاعف المشترك الأصغر لعددين أوليين هو حاصل ضربهما.

مثال (18):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 17 وَ 23 .

الحـــل:

بما أن العددان 17 وَ 23 عددان أوليان، فالمضاعف المشترك الأصغر (م.م.ص.) هو .

$$17 \times 23 = 391$$

مثال (19):

أوجد كلا من القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين 80 وَ 32 .

الحـــل:

2	80
2	40
2	20
2	10
5	5
	1

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$32 = (2)(2)(2)(2)(2)$$

$$80 = (2)(2)(2)(2)(5)$$

القاسم المشترك الأكبر $= (2)(2)(2)(2) = 16$

المضاعف المشترك الأصغر $= (2)(2)(2)(2)(2)(5) = 160$

1.2.7 الكسور

الكسر عبارة عن مقدار مكون من بسط ومقام، و يُكتب على الصورة $\frac{x}{y}$ حيث $x,y \in \mathbb{R}$ ، $y \neq 0$ يسمى x بسط الكسر و y مقام الكسر.

مثال (20):

الأعداد التالية تمثل كسور: $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{-4}$, $\frac{-3}{7}$, $\frac{2}{5}$

تكافؤ الكسور

إذا ضربنا كلاً من البسط و المقام لكسر ما في نفس العدد الثابت فإننا نحصل على كسر مكافئ للكسر المعطى، وكذلك إذا قسمنا كلاً من البسط و المقام لكسر ما على نفس العدد الثابت فإننا نحصل على كسر مكافئ للكسر المعطى.

مثال (21):

1) $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{3\times3}{5\times3} = \frac{3\times4}{5\times4} \cdots \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{9}{15} = \frac{12}{20} \cdots$

2) $\frac{30}{60} = \frac{30\div2}{60\div2} = \frac{30\div3}{60\div3} = \frac{30\div5}{60\div5} = \frac{30\div6}{60\div6} = \frac{30\div30}{60\div30} \cdots \Rightarrow \frac{30}{60} = \frac{15}{30} = \frac{10}{20} = \frac{6}{12} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \cdots$

تبسيط الكسور

يمكن تبسيط الكسر لأبسط صورة وذلك بقسمة بسطه ومقامه على عدد بحيث بعد ذلك لا يوجد عدد غير الواحد يقسم بسطه و مقامه معاً.

مثال (22):

1) $\frac{1}{2}$ مكتوب في أبسط صورة

2) $\frac{3}{7}$ مكتوب في أبسط صورة

3) $\frac{12}{30}$ ليس في أبسط صورة

4) $\frac{15}{35}$ ليس في أبسط صورة

ملاحظة (6):

يمكن كتابة $\frac{12}{30}$ في أبسط صورة و ذلك بقسمة بسطه و مقامه على 6 فنحصل على $\frac{2}{5}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 2 وَ 5 معاً، كذلك $\frac{15}{35}$ بقسمة بسطه و مقامه على 5 يصبح $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$ حيث لا يوجد عدد غير الواحد يقسم 3 وَ 7 معاً.

أي بقسمة كلا من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مقارنة الكسور

1) إذا كان للكسرين نفس المقام نقارن البسطين فقط.

ملاحظة (7):

عند ما نقارن الكسرين $\frac{c}{b}$ ، $\frac{a}{b}$ و $b > 0$ فإن:

1) إذا كان $a > c$ فإن $\frac{a}{b} > \frac{c}{b}$

2) إذا كان $a < c$ فإن $\frac{a}{b} < \frac{c}{b}$

مثال (23):

قارن الكسرين في كل مما يلي:

1) $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{5}$

2) $\frac{2}{9}$, $\frac{5}{9}$

3) $\frac{-3}{4}$, $\frac{2}{4}$

4) 0 , $\frac{5}{13}$

الحــل:

1) $\frac{7}{5} > \frac{3}{5}$ لأن $(7 > 3)$

2) $\frac{2}{9} < \frac{5}{9}$ لأن $(2 < 5)$

3) $\frac{-3}{4} < \frac{2}{4}$ لأن $(-3 < 2)$

4) $0 < \frac{5}{13}$ (لأن $0 = \frac{0}{13}$ ومنه $0 < 5$)

2) إذا كان للكسرين مقامين مختلفين نحولهما إلى كسرين مكافئين لهما وبما أن الكسرين المكافئين لهما نفس المقام فإننا نقارن البسطين.

ملاحظة (8):

عند ما نقارن الكسران $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ يوجد 3 احتمالات هما:

1) إذا كان $cb < ad$ فإن $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

2) إذا كان $cb > ad$ فإن $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

3) إذا كان $cb = ad$ فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

مثال (24):

قارن الكسرين في كل مما يلي:

1) $\frac{2}{5} \ , \ \frac{3}{4}$

2) $\frac{3}{8} \ , \ \frac{1}{6}$

3) $\frac{-2}{5} \ , \ \frac{-3}{7}$

الحـــل:

1) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \dots$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots$

$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$ (لأن $8 < 15$)

2) $\frac{3}{8} = \frac{6}{16} = \frac{9}{24} = \frac{12}{32} = \dots$

$\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \dots$

$\frac{3}{8} > \frac{1}{6}$ (لأن $9 > 4$)

$$3)\ \frac{-2}{5} = \frac{-4}{10} = \frac{-6}{15} = \frac{-8}{20} = \frac{-10}{25} = \frac{-12}{30} = \frac{-14}{35} = \dots$$

$$\frac{-3}{7} = \frac{-6}{14} = \frac{-9}{21} = \frac{-12}{28} = \frac{-15}{35} = \dots$$

$\frac{-2}{5} > \frac{-3}{7}$ (لأن $-14 > -15$)

ملاحظة (9):

إذا كانت $a, b \in \mathbb{R}$ ، $b \neq 0$ فإن

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

1.2.8 تمارين

(1) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 ، 6 هو.

a	18	b	6
c	108	d	9

(2) القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 ، 36 هو.

a	6	b	36
c	18	d	12

(3) القاسم المشترك الأكبر للعددين 24 ، 36 هو.

a	6	b	36
c	18	d	12

(4) القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 ، 36 هو.

a	6	b	36
c	18	d	12

(5) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 16 ، 24 هو.

a	6	b	24
c	48	d	6

(6) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 ، 9 هو.

a	108	b	6
c	18	d	9

(7) $2 \times 6 + 9 \div 3 =$

a	12	b	15
c	7	d	-15

(8) $8 \div 2 + 4 \times 6 =$

a	16	b	28
c	36	d	84

(9) الكسر $\frac{15}{18}$ في أبسط صورة

a	صواب	b	خطأ

(10) القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 ، 27 هو .

a	3	b	9
c	18	d	27

(11) الكسر $\frac{7}{6}$ يكافىء

a	$\frac{35}{6}$	b	$\frac{7}{6}$
c	$\frac{35}{30}$	d	$\frac{7}{30}$

(12) $12 \div 3 + 5 \times 2 =$

a	4	b	5
c	12	d	14

(13) الكسر $\frac{10}{16}$ في أبسط صورة

a	صواب	b	خطأ

(14) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18 ، 36 هو .

a	27	b	36
c	9	d	18

(15) $3 \times 5 + 8 \div 4 =$

a	2	b	15
c	17	d	9

1.3 الفصل الثالث

الأسس والجذور

الأسس والجذور

1.3.1 الأسس

تعريف :

نفرض أن x عدد حقيقي وأن n عدد صحيح فإن :

1 - إذا كان n عدد صحيح موجب.

$$x^n = \underbrace{(x)(x)\ldots(x)}_{n}$$

2 - إذا كان $n = 0$ فإن

$$x^0 = 1 \quad , \quad x \neq 0$$

3 - إذا كان عدد n صحيح سالب

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}} \quad , \quad x \neq 0$$

ملاحظة (1):

إذا كان x عدد حقيقي ، n عدد طبيعي فإن $x \neq 0$ ، $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

مثال (1):

1) $2^4 = (2)(2)(2)(2) = 16$

2) $x^5 = (x)\,(x)\,(x)\,(x)\,(x)$

3) $(-4)^2 = (-4)\,(-4) = 16$

4) $(-5)^3 = (-5)\,(-5)\,(-5) = -125$

5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$

6) $2^0 = (-2)^0 = (100)^0 = x^0 = 1 \quad , \quad x \neq 0$

7) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$

8) $(-4)^{-2} = \dfrac{1}{(-4)^2} = \dfrac{1}{16}$

9) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{-2} = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{2} = \dfrac{49}{9}$

1.3.2 خـــواص الأسس

إذا كانت y ,x أعداد حقيقية وَ n , m أعداد صحيحة فإن:

الخاصية الأولى:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n}$$

مثال (2):

1) $(2)^2(2)^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

2) $(5)^8(5)^{-5} = 5^{8-5} = 5^3 = 125$

3) $(x+3)^4(x+3)^3 = (x+3)^{4+3} = (x+3)^7$

4) $(x-1)^7(x-1)^{-4} = (x-1)^{7-4} = (x-1)^3$

5) $(x+2)^{-3}(x+2)^{-8} = (x+2)^{-11}$

الخاصية الثانية:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad , \quad x \neq 0$$

مثال (3):

1) $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

2) $\frac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0 = 1$

3) $\frac{3^2}{3^{-2}} = 3^{2-(-2)} = 3^4 = 81$

4) $\frac{2^{-3}}{2^2} = 2^{-3-2} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

5) $\frac{(x+3)^4}{(x+3)} = (x+3)^{4-1} = (x+3)^3$

6) $\frac{(a-b)^7}{(a-b)^4} = (a-b)^{7-4} = (a-b)^3$

7) $\frac{2^{-3}}{2^{-4}} = 2^{-3-(-4)} = 2^{-3+4} = 2^1 = 2$

الخاصية الثالثة:

$$(x^m)^n = x^{m\,n}$$

مثال (4):

1) $(x^4)^3 = x^{(4)(3)} = x^{12}$

2) $(2^3)^2 = 2^{(3)(2)} = 2^6 = 64$

3) $((x+3)^4)^0 = (x+3)^0 = 1$

4) $(x^4)^{-3} = x^{(4)(-3)} = x^{-12} = \dfrac{1}{x^{12}}$

5) $((-2)^3)^2 = (-2)^{(3)(2)} = (-2)^6 = 64$

6) $((x+5)^2)^4 = (x+5)^{(2)(4)} = (x+5)^8$

7) $((-3)^2)^{-2} = (-3)^{(2)(-2)} = (-3)^{-4} = \dfrac{1}{(-3)^4} = \dfrac{1}{81}$

8) $((x-1)^5)^{-3} = (x-1)^{(5)(-3)} = (x-1)^{-15} = \dfrac{1}{(x-1)^{15}}$

الخاصية الرابعة:

$$(xy)^m = x^m y^m$$

مثال (5):

1) $(xy)^3 = x^3 y^3$

2) $(2\times3)^2 = 2^2\times3^2 = 4\times9 = 36$

الخاصية الخامسة:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m},\quad y \neq 0$$

مثال (6):

1) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{3^2}{5^2} = \dfrac{9}{25}$

2) $\left(\frac{-x}{y}\right)^4 = \frac{(-x)^4}{y^4} = \frac{x^4}{y^4}$

3) $\left(\frac{-2}{4}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{(4)^3} = \frac{-8}{64} = -\frac{1}{8}$

ملاحظة (2):

إذا كان y ، x أعداداً حقيقية n, m, p أعداداً صحيحة فإن :

1) $(x^n y^m)^p = x^{np} y^{mp}$

2) $\left(\frac{x^n}{y^m}\right)^p = \frac{x^{np}}{y^{mp}} \quad y \neq 0$

ملاحظة اضافية

$(x \pm y)^n \neq x^n \pm y^n$

مثال (7):

1) $(x^3 y^4)^5 = x^{15} y^{20}$

2) $(x^3 y^{-2})^4 = x^{12} y^{-8} = \frac{x^{12}}{y^8}$

3) $(x^{-3} y^{-2})^5 = x^{-15} y^{-10} = \frac{1}{x^{15} y^{10}}$

4) $(x^3 y^{-2})^{-5} = x^{-15} y^{10} = \frac{y^{10}}{x^{15}}$

5) $(-3x^3 y^2 z^5)^3 = -27 x^9 y^6 z^{15}$

6) $\left(\frac{2x^2 y^2}{z^5}\right)^3 = \frac{8 x^6 y^6}{z^{15}}$

7) $\left(\dfrac{-4\,x^{-2}\,y^{6}}{3\,z^{5}}\right)^{3} = \dfrac{-64\,x^{-6}\,y^{18}}{27\,z^{15}} = \dfrac{-64\,y^{18}}{27\,x^{6}\,z^{15}}$

8) $\left(\dfrac{9\,x^{5}\,y^{4}}{3\,x^{3}\,y}\right)^{2} = (3\,x^{2}\,y^{3})^{2} = 9\,x^{4}\,y^{6}$

9) $(2\,a^{3}\,b^{4})^{3}(a^{2}\,b^{-2})^{2} = (8\,a^{9}\,b^{12})(a^{4}\,b^{-4}) = 8\,a^{13}\,b^{8}$

10) $\left(\dfrac{-25\,x^{3}\,y^{5}\,z^{2}}{5\,x^{3}\,yz}\right)^{-3} = (-5\,y^{4}\,z)^{-3}$

$$= \left(\frac{1}{-5\,y^{4}\,z}\right)^{3}$$

$$= \frac{1}{-125\,y^{12}\,z^{3}}$$

$$= -\,\frac{1}{125\,y^{12}\,z^{3}}$$

1.3.3 الجـــذور

تعريف (الجذر النوني)

يُسمى العدد x الجذر النوني للعدد a إذا كان $x^{n} = a$ ، حيث n عدد طبيعي أكبر من الواحد، $a, x \in R$ ويُكتب:

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

ملاحظة (3):

1) $x = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ويُسمى الجذر التربيعي للعدد a.

2) $x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ ويُسمى الجذر التكعيبي للعدد a.

3) إذا كان n عدداً زوجياً وكان لدينا $\sqrt[n]{a}$ فإن $a \geq 0$ لأنه إذا كان a سالباً فإن الجذر غير معرّف في الأعداد الحقيقية.

مثال (8):

1) $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

2) $\sqrt[3]{64} = 4$

3) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

4) $\sqrt[3]{-1000} = -10$

5) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

6) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

7) $\sqrt{-4}$ غير معرّف $(\sqrt{-4} \notin R)$

8) $\sqrt[6]{-64}$ غير معرّف $(\sqrt[6]{-64} \notin R)$

1.3.4 خــواص الجــذور

إذا كانت x ، y أعداداً حقيقية وَ n عدداً طبيعياً أكبر من الواحد و m عدداً صحيحاً فإن :

الخاصية الأولى:

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$

حيث n عدد زوجي، $n \geq 2$.

مثال (9):

1) $\sqrt{y^2} = |y|$

2) $\sqrt[4]{x^4} = |x|$

3) $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$

4) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$

الخاصية الثانية:

$$\sqrt[n]{x^n} = x$$

حيث n عدد فردي، $n \geq 3$.

مثال (10):

1) $\sqrt[5]{x^5} = x$

2) $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$

3) $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$

الخاصية الثالثة:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$$

(حيث $x \geq 0$, $y \geq 0$ إذا كان n عدداً زوجياً)

مثال (11):

1) $\sqrt{5}\sqrt{5} = 5$

2) $\sqrt{t}\,\sqrt{t} = |t|$

3) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\,\sqrt{y}$

4) $\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{20}$

5) $\sqrt{9x^4} = \sqrt{9}\,\sqrt{x^4} = 3x^2$

6) $\sqrt[3]{27x^{18}} = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{x^{18}} = 3x^6$

7) $\sqrt[3]{-8}\,\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-8)(-8)} = \sqrt[3]{64} = 4$

الخاصية الرابعة:

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad , \; y \neq 0$$

(حيث $x \geq 0 \, , y > 0$ إذا كان n عدداً زوجياً)

مثال (12):

1) $\sqrt[3]{\frac{16t^7}{2t^4}} = \sqrt[3]{8t^3} = 2t$

2) $\sqrt{\frac{4x^6}{9x^4}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}\,x^2} = \frac{2}{3}|x|$

3) $\sqrt{\frac{16x^4}{9y^6}} = \frac{\sqrt{16x^4}}{\sqrt{9y^6}} = \frac{4x^2}{3|y^3|}$

الخاصية الخامسة:

$$\sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = x^{\frac{m}{n}}$$

(حيث m ، n أعداد طبيعية أكبر من الواحد، $x > 0$ في حالة n عدد زوجي).

مثال (13):

1) $\sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$

2) $\sqrt[3]{x^6 y^6} = x^{\frac{6}{3}} y^{\frac{6}{3}} = x^2 y^2$

3) $\sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$

4) $\sqrt[3]{27x^{15} y^6} = 3x^{\frac{15}{3}} y^{\frac{6}{3}} = 3x^5 y^2$

5) $\sqrt{16x^{24} y^{14} z^8} = 4x^{12} \left| y^7 \right| z^4$

6) $\sqrt[3]{\dfrac{16x^{17} y^3 z}{2x^2 z^7}} = \sqrt[3]{\dfrac{8x^{15} y^3}{z^6}} = \dfrac{2x^5 y}{z^2}$

الخاصية السادسة:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$$

حيث m ، n أعداد طبيعية أكبر من الواحد وكذلك $x \geq 0$ كلما كانت m أو n عدداً زوجياً.

مثال (14):

1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$

2) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

3) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[15]{y}$

ملاحظة (4):

1) $\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$

2) $\sqrt[n]{x-y} \neq \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$

1.3.5 تمارين

اختر الإجابة الصحيحة:

(1) $\left(\dfrac{2^{-2}x^3y}{z^{-3}}\right)^{-3} =$

a	$\dfrac{2^6x^9}{z^9y^3}$	b	$\dfrac{2^6z^{-9}}{z^3x^9}$
c	$\dfrac{2^9y^3}{2^6x^9}$	d	$\dfrac{2^6}{x^9y^3z^9}$

(2) $(x^{-2})^4 =$

a	x^{-2}	b	x^{-8}
c	x^{-6}	d	x^{-3}

(3) $(2x^4y^4)(3x^2y^3z) =$

a	$6x^{10}y^8z$	b	$6x^7y^8z$
c	$6x^7y^6z$	d	$6x^6y^7z$

(4) $\left(\dfrac{2^{-2}x^3y}{z}\right)^{-3} =$

a	$\dfrac{2^6x^9}{z^3y^3}$	b	$\dfrac{2^6z^{-3}}{z^3x^9}$
c	$\dfrac{2^3y^3}{2^6x^9}$	d	$\dfrac{2^6z^3}{x^9y^3}$

(5) $(x^{-2})^3 =$

a	x^{-2}	b	x^{-8}
c	x^{-6}	d	x^{-3}

(6) $(2x^3y^4)(3x^2y^3z) =$

a	$6x^6y^8z$	b	$6x^5y^8z$
c	$6x^5y^7z$	d	$6x^6y^7z$

(7) $\left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1$

a	صواب	b	خطأ

(8) $\left(a+\frac{1}{b}\right)^0 = 1$ حيث $b \neq 0$

a	صواب	b	خطأ

(9) $\left(3+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)^0 = 1$

a	صواب	b	خطأ

(10) $(x^3)^2 =$

a	x^5	b	x^6
c	x	d	x^{-1}

(11) $\sqrt{144} = \sqrt{100} + \sqrt{44}$

a	صواب	b	خطأ

(12) $\sqrt[2]{x^{-3}} =$

a	$x^{\frac{3}{2}}$	b	$x^{\frac{2}{3}}$
c	$x^{\frac{-3}{2}}$	d	$x^{\frac{-2}{3}}$

(13) $\sqrt{x^2y} = |x|\sqrt{y}$

a	صواب	b	خطأ

(14) $\sqrt[3]{27x^6z^9} =$

a	$3x^6z^3$	b	$3x^3z^3$
c	$3x^3z^2$	d	$3x^2z^3$

(15) $\sqrt{x}\,\sqrt[6]{x} = \sqrt[8]{x}$

a	صواب	b	خطأ

(16) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{x}$

a	صواب	b	خطأ

(17) $\sqrt[6]{x^{-2}} =$

a	$x^{\frac{-1}{3}}$	b	x^3
c	x^{-3}	d	$x^{\frac{1}{3}}$

(18) $\sqrt{x^2y} = x\sqrt{y}$

a	صواب	b	خطأ

(19) $\sqrt[3]{27x^9z^6} =$

a	$3x^6z^3$	b	$3x^3z^3$
c	$3x^3z^2$	d	$3x^2z^3$

(20) $\sqrt[6]{x}\,\sqrt[3]{x} = \sqrt[18]{x}$

a	صواب	b	خطأ

(21) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[9]{x}$

a	صواب	b	خطأ

(22) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^3}{y^6}} =$

a	$\dfrac{8x}{y^3}$	b	$\dfrac{8x}{y^4}$
c	$\dfrac{2x}{y^2}$	d	$\dfrac{2x}{y^4}$

(23) $\sqrt[5]{\dfrac{x^5}{y^{10}}} =$

a	$\dfrac{x^5}{y^2}$	b	$\dfrac{x}{y^{10}}$
c	$\dfrac{x}{y^2}$	d	$\dfrac{x^{25}}{y^{50}}$

(24) أوجد قيمة المقادير التالية:

1) 32^{-3}

2) $\sqrt{49}$

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

4) $\sqrt[3]{27}$

5) $\dfrac{7^{-7}}{7^{-5}}$

6) $\sqrt[4]{81}$

7) $(2)^0(2)^{-2}$

8) $\sqrt[3]{27x^6}$

9) $(3^2 \times 2^{-3})^{-2}$

10) $\sqrt[4]{81x^{12}}$

11) $\sqrt[3]{64x^{12}y^6}$

12) $\sqrt[7]{x^7y^{14}}$

13) $\left(\dfrac{x^{-2}(a+b)^4}{x^2(a+b)^2}\right)^3$

14) $\sqrt[3]{\sqrt{64x^{18}y^{12}}}$

15) $\sqrt[3]{\dfrac{16x^5y^2z}{2x^2y^5z}}$

2

Chapter

الباب الثاني

التحليل

2.1 الفصل الأول

المقادير الجبرية

المقادير الجبرية

2.1.1 المقدار الجبري

تُسمى الصيغة الرياضية المكونة من أعداد ورموز مرتبطة فيما بينها بعمليات الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة بالمقدار الجبري.

مثال (1):

المقادير الآتية تمثل مقادير جبرية :

1) $3x^4 - 2x + 1$

2) $\dfrac{x - 3y}{x + 1}$

3) $3x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 1$

4) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

5) $x^3y^2 - 3xy + 4$

6) $\dfrac{\sqrt{3}x^2y^3 - 5x}{y - 4}$

2.1.2 العمليات الحسابية على المقادير الجبرية

1) جمع وطرح المقادير الجبرية:

عند جمع المقادير الجبرية نقوم بجمع المعاملات العددية للمتغيرات المتطابقة (المتشابهة) ذات الأسس المتشابهة (المتساوية) وكذلك الطرح.

مثال (2):

1) $(4x^3 + 5x + 3)+(2x^3 + 5x^2 - 7x)= 6x^3 + 5x^2 - 2x + 3$

2) $(5x^6 - 3x^2 - 7)-(3x^4 - 2x^2 - 3)= 5x^6 - 3x^2 - 7 -3x^4 + 2x^2 +3 = 5x^6 -3x^4 -x^2 -4$

3) $(2x^3 - 7x^2 + x - 5)-(x^3 - 8x^2 + x -3)= 2x^3 - 7x^2 +x -5 - x^3 + 8x^2 -x + 3 = x^3 + x^2 -2$

2) ضرب المقادير الجبرية:

عند ضرب مقدارين جبريين فإننا نبدأ بضرب المعاملات (الأعداد) ثم ضرب المتغيرات (الرموز). وعند ضرب الرموز نستخدم قوانين الأسس.

مثال (3):

1) $4(3x^3 - 5x + 2) = 12x^3 - 20x + 8$

2) $\frac{1}{4}(16x^3 - 4x^2 - 8) = 4x^3 - x^2 - 2$

3) $-2x(2x^2 - 3x + 3) = -4x^3 + 6x^2 - 6x$

4) $3x^2 (5x^2 - 2x - 3)=(3x^2)(5x^2) + (3x^2)(-2x) + (3x^2)(-3)= 15x^4 - 6x^3 - 9x^2$

5) $(x -3)(x + 7) = x (x + 7) -3(x + 7) = x^2 + 7x -3x -21 = x^2 + 4 x -21$

6) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$

7) $(x-2)(x-3)=x^2-3x-2x+6=x^2-5x+6$

8) $(x-2)(x+3)=x^2+3x-2x-6=x^2+x-6$

9) $(x+2)(x-3)=x^2-3x+2x-6=x^2-x-6$

10) $(a-b)(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$ يُسمى الناتج فرق بين مربعين

11) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$ يُسمى الناتج فرق بين مكعبين

12) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$ يُسمى الناتج بمجموع مكعبين

13) $(a+b)(a+b)=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ يُسمى الناتج بالمربع الكامل

14) $(a-b)(a-b)=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ يُسمى الناتج بالمربع الكامل

15) $(x^2-3)(x^2-5x+6)=x^2(x^2-5x+6)-3(x^2-5x+6)=x^4-5x^3+6x^2-3x^2+15x-18$

$=x^4-5x^3+3x^2+15x-18$

16) $(2xy^2 - 5x^2y)(3x^2 - 6y + 5) = 2xy^2(3x^2 - 6y + 5) - 5x^2y\,(3x^2 - 6y + 5)$

$= 6x^3y^2 - 12xy^3 + 10xy^2 - 15x^4y + 30x^2y^2 - 25x^2y$

3) قسمة المقادير الجبرية :

عند قسمة مقدار جبري على آخر نبدأ بقسمة المعاملات (الأعداد) ثم قسمة الرموز.
وعند قسمة الرموز تستخدم قوانين الأسس.

أولاً : قسمة مقدار جبري يحتوي عدة حدود على مقدار جبري يحتوي حد واحد فقط.

مثال (4) :

1) $\dfrac{5x^3 + 10x^2 - 15x}{5x} = \dfrac{5x^3}{5x} + \dfrac{10x^2}{5x} - \dfrac{15x}{5x} = x^2 + 2x - 3$

2) $\dfrac{20x^4 - 12x^2 - 8x}{4x} = \dfrac{20x^4}{4x} - \dfrac{12x^2}{4x} - \dfrac{8x}{4x} = 5x^3 - 3x - 2$

3) $\dfrac{16x^5 - 8x^4 - 32x^3}{8x^2} = \dfrac{16x^5}{8x^2} - \dfrac{8x^4}{8x^2} - \dfrac{32x^3}{8x^2} = 2x^3 - x^2 - 4x$

4) $\dfrac{15x^3y^2 - 5x^2y + 5xy}{5xy} = \dfrac{15x^3y^2}{5xy} - \dfrac{5x^2y}{5xy} + \dfrac{5xy}{5xy} = 3x^2y - x + 1$

ثانياً: قسمة مقدار جبري يحتوي عدة حدود على مقدار جبري يحتوي عدة حدود.

مثال (5):

اقسم $3x^2 - 2x - 8$ على $x - 2$.

الحـــل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 4 \\
\hline
x - 2 & 3x^2 - 2x - 8 \\
 & \mp 3x^2 \pm 6x \\
\hline
 & \quad\quad 4x - 8 \\
 & \quad\quad \mp 4x \pm 8 \\
\hline
 & \quad\quad 0 \quad\ 0
\end{array}
$$

إذن ناتج القسمة هو $3x + 4$.

ملاحظة (1):

عند إجراء القسمة المطولة نرتب المقسوم والمقسوم عليه ترتيب تنازلي بالنسبة للأسس ونترك فراغاً للحد غير الموجود.

مثال (6):

اقسم $3x^3 - 2x^2 + 1$ على $x^2 - 1$.

الحـــل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x - 2 \\
\hline
x^2 - 1 & 3x^3 - 2x^2 \qquad\quad + 1 \\
 & \mp 3x^3 \qquad\quad \pm 3x \\
\hline
 & \qquad -2x^2 + 3x + 1 \\
 & \qquad \pm 2x^2 + \qquad \mp 2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 3x - 1
\end{array}
$$

ناتج القسمة هو $3x - 2$ والباقي $3x - 1$.

أو

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x^2 - 1} = 3x - 2 + \frac{3x - 1}{x^2 - 1}$$

2.1.3 تمارين

(1) $(5x^2 - 6x + 4) + (x^2 - 2x - 4) = 6x^2 - 8x$

a	صواب	b	خطأ

(2) $(5x^2 - 2x + 6) + (x^2 - 2x - 2) = 4x^2 - 4x + 4$

a	صواب	b	خطأ

(3) $(5x^2 - 6x + 4) - (x^2 - 2x - 4) = 4x^2 - 4x + 8$

a	صواب	b	خطأ

(4) $(5x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 2x - 4) = 4x^2 + 8$

a	صواب	b	خطأ

(5) $2x(2x + y^2) = 2x^2 + 2y^2$

a	صواب	b	خطأ

(6) $2x(2x - y^2) = 4x^2 + 2xy^2$

a	صواب	b	خطأ

(7) $5x(2x^3 + 4y^2) = 10x^4 + 20xy^2$

a	صواب	b	خطأ

(8) $y(x^2 - 3y) = x^2y + 3y^2$

a	صواب	b	خطأ

(9) $(x-1)(x^2+x+1) =$

a	x^3-2x^2+x-1	b	x^3+x^2-2x+1
c	x^3-1	d	x^3+1

(10) $(x-1)(x^2+x-1) =$

a	x^3-2x+1	b	x^3+2x^2-2x+1
c	x^3+1	d	x^3-1

(11) $(x-1)(x^2-x+1) =$

a	x^3-2x^2+2x-1	b	x^3-2x^2-1
c	x^3+1	d	x^3-1

(12) $(x+3)(x^2-3x+9) =$

a	$x^3-3x^2+9x-27$	b	$x^3+3x^2-9x+27$
c	x^3+27	d	x^3-27

(13) $(x-3)(x^2+3x+9) =$

a	$x^3-3x^2-9x-27$	b	$x^3+3x^2-9x+27$
c	x^3+27	d	x^3-27

(14) $(x-4)\,(2x+3) = \;2x^2+5x-12$

a	صواب	b	خطأ

(15) $(x-4)(2x-3) = 2x^2 - 11x + 12$

a	صواب	b	خطأ

(16) $(x-2)(x+9) = x^2 - 9x + 18$

a	صواب	b	خطأ

(17) $\dfrac{x^3 - 2x + 3}{x} =$

a	$x^2 - 2 + 3x^{-1}$	b	$x^2 - 2x + 3$
c	$x^2 - 2 + 3x$	d	$x - 3$

(18) $\dfrac{3x^2 + 9x + 12}{3x} =$

a	$x^2 + 3 + 4x^{-1}$	b	$x^2 + 3x + 4$
c	$x^2 + 3 + 4x$	d	$x + 3 + 4x^{-1}$

(19) $\dfrac{12x^4 - 18x^3 + 6x^2}{6x^2} = 2x^2 - 3x + 1$

a	صواب	b	خطأ

(20) $(x+1)(x^2 - x + 1) = x^3 + 1$

a	صواب	b	خطأ

2.2 الفصل الثاني

تحليل المقادير الجبرية

2.2.1 قواعد التحليل.

- قاعدة 1 : العامل المشترك.
- قاعدة 2 : الفرق بين مربعين.
- قاعدة 3 : الفرق بين مكعبين.
- قاعدة 4 : مجموع مكعبين.
- قاعدة 5 : المربع الكامل.

2.2.2 تمارين.

تحليل المقادير الجبرية

تحليل المقدار الجبري هو الحصول على عوامله الأولية وكتابته كحاصل ضرب تلك العوامل.

2.2.1 قواعد التحليل

قاعدة1 : العامل المشترك

العامل المشترك لمقدارين جبريين هو المقدار الجبري الذي يقبل كل من المقدارين القسمة عليه بدون باقٍ.

مثال (1) :

1) $ax + ay = a(x + y)$

2) $x^2 + 3x = x(x + 3)$

3) $6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$

4) $3x^2y - 6xy^2 + 9xy = 3xy(x - 2y + 3)$

5) $xy + 3x - y - 3 = x(y + 3) - (y + 3)$

$= (y + 3)\,(x - 1)$

قاعدة2: الفرق بين مربعين

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

مثال (2):

1) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

2) $x^2 - 7 = x^2 - (\sqrt{7})^2 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$

3) $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

4) $16x^4 - y^2 = (4x^2)^2 - y^2 = (4x^2 - y)(4x^2 + y)$

5) $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

6) $64x^5y - 324xy^5 = 4xy(16x^4 - 81y^4)$

$$= 4xy(4x^2 - 9y^2)(4x^2 + 9y^2)$$

$$= 4xy(2x - 3y)(2x + 3y)(4x^2 + 9y^2)$$

7) $25x^2 - 9y^2 = (5x)^2 - (3y)^2 = (5x - 3y)(5x + 3y)$

8) $(x + h)^2 - x^2 = (x + h - x)(x + h + x)$

$$= h(2x + h)$$

ملاحظة (1):

$(x^2 + y^2)$ يُسمى مجموع المربعين ولا يمكن تحليله.

قاعدة3: الفرق بين مكعبين

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال (3):

1) $x^3 - 8 = x^3 - (2)^3 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

2) $64 - y^3 = 4^3 - y^3 = (4 - y)(16 + 4y + y^2)$

3) $16x^2y^5 - 54x^5y^2 = 2x^2y^2(8y^3 - 27x^3)$

$= 2x^2y^2((2y)^3 - (3x)^3)$

$= 2x^2y^2(2y - 3x)(4y^2 + 6xy + 9x^2)$

4) $x^6 - 8y^3 = (x^2)^3 - (2y)^3 = (x^2 - 2y)(x^4 + 2x^2y + 4y^2)$

5) $2x^3 - 250 = 2(x^3 - 125) = 2(x^3 - 5^3) = 2(x - 5)(x^2 + 5x + 25)$

6) $y^6 - x^6 = ((y^2)^3 - (x^2)^3) = (y^2 - x^2)(y^4 + y^2x^2 + x^4) = (y - x)(y + x)(y^4 + y^2x^2 + x^4)$

7) $3x^4 - 81x = 3x\,(x^3 - 27) = 3x\,(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

قاعدة4: مجموع مكعبين

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

مثال (4):

1) $x^3 + 125 = x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

2) $8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

3) $250x^2y^5 + 2x^5y^2 = 2x^2y^2(125y^3 + x^3) = 2x^2y^2((5y)^3 + x^3) = 2x^2y^2\,(5y + x)(25y^2 - 5xy + x^2)$

4) $64 + z^3 = 4^3 + z^3 = (4 + z)(16 - 4z + z^2)$

5) $3x^3 + 24y^3 = 3(x^3 + (2y)^3) = 3(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

قاعدة5: المربع الكامل

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

مثال (5):

1) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + (2)(x)(3) + (3)^2$

$= (x + 3)^2$

2) $x^2 - 10x + 25 = x^2 - (2)(x)(5) + (5)^2$

$= (x - 5)^2$

3) $x^2 - 6xy + 9y^2 = x^2 - (2)(x)(3y) + (3y)^2$

$= (x - 3y)^2$

4) $4x^2 + 16x + 16 = 4(x^2 + 4x + 4)$

$= 4(x + 2)^2$

5) $9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - (2)(3x)(4) + (4)^2$

$= (3x - 4)^2$

6) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - (2)(2a)(3b) + (3b)^2$

$= (2a - 3b)^2$

2.2.2 تمارين

(1) $2x^2 - 14x =$

a	$2x(x - 14)$	b	$x(2x + 14)$
c	$2x(x + 7)$	d	$2x(x - 7)$

(2) $3x^2y^2 + 9x^2 =$

a	$3x^2(y^2 + 3)$	b	$x^2y^2(y + 3)$
c	$x^2(3x^2 + 9)$	d	$x(3xy^2 - 9y)$

(3) $x^2 - 25 =$

a	$(x - 5)^2$	b	$(x + 5)^2$
c	$(x - 5)(x + 5)$	d	$x(x - 25)$

(4) $x^2 + 16 =$

a	$(x - 4)(x + 4)$	b	$(x - 4)^2$
c	$(x + 4)^2$	d	لا يمكن تحليله

(5) $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 2 =$

a	$(x - \sqrt{2})^2$	b	$(x + \sqrt{2})^2$
c	$(x + 5)^2$	d	$(x - 2)^2$

(6) $9x^2 - 81 =$

a	$9(x - 3)^2$	b	$9(x + 9)^2$
c	$(3x - 9)(3x + 9)$	d	$9(x^2 + 9)$

(7) $x^3 - 27 =$

a	$(x-3)(x^2+3x+9)$	b	$(x-3)(x^2-3x+9)$
c	$(x+3)(x^2+3x+9)$	d	$(x+3)(x^2-3x+9)$

(8) $2x^3 + 16 =$

a	$2(x+2)(x^2+x+4)$	b	$2(x-2)(x^2-2x+4)$
c	$2(x-2)(x^2+2x+4)$	d	$2(x+2)(x^2-2x+4)$

(9) $xy^3 + 27x = x(y^3 - 27)$

a	صواب	b	خطأ

(10) $x^2 - 14x + 49 = (x+7)^2$

a	صواب	b	خطأ

(11) $x^2 + 12x + 36 =$

a	$(x-6)(x+6)$	b	$(x-6)^2$
c	$(x+6)^2$	d	$(x-12)^2$

(12) $3x^3 - 12x^2 + 12x = 3x(x+2)^2$

a	صواب	b	خطأ

(13) $xy^4 - x^4y = xy(x-y)(x^2+xy+y^2)$

a	صواب	b	خطأ

2.3 الفصل الثالث

تحليل المقدار الثلاثي

2.3.1 المـــــــــقــــــــدار الــــــثـــــلاثـــــي.

- الحالة الأولى : معامل x^2 يساوي واحد.
- الحالة الثانية معامل x^2 لايساوي واحد.

2.3.2 تمـــــــــــــــــاريـــــــــــــن.

تحليل المقدار الثلاثي

2.3.1 المقدار الثلاثي

المقدار الثلاثي هو تعبير رياضي على الصورة: $ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad a,b,c \in R$.

الحالة الأولى: معامل x^2 يساوي واحد

عند تحليل المقدار $x^2 + bx + c$ فإننا نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي c وحاصل جمعهما أو طرحهما يساوي b ، أما بالنسبة لإشارة العددين فتبعا للقاعدة التالية:

1) إذا كانت إشارة الحد الأخير موجبة، فإشارة العددين تتبع إشارة الحد الأوسط (وهذا يعني أن العددين جمعهما يعطي الحد الأوسط).

2) إذا كانت إشارة الحد الأخير سالبة، فإشارة العددين مختلفة بحيث يأخذ العدد الأكبر إشارة الحد الأوسط (وهذا يعني أننا نبحث عن عددين حاصل طرحهما يعطي الحد الأوسط).

مثال (1):

حلل المقدار $x^2 + 5x + 6$

الحـــل:

إشارة الحد الأخير موجبة فسنتبع القاعدة (1):

$$x^2 + 5x + 6 = (x + \ )(x + \ )$$

العددان هما $+2$ ، $+3$ ، $(2)(3)=6$ لأن وَ $2 + 3 = 5$

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

مثال (2):

حلل المقدار $x^2+7x+10$

الحـــل:

$$x^2+7x+10=(x+\ )(x+\ )$$

العددان هما $+5$ ، $+2$ ، لأن $(2)(5)=10$ وَ $2+5=7$

$$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$$

مثال (3):

حلل المقدار

(a) $x^2-7x+12$

(b) x^2-6x+8

الحـــل:

(a) $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

(b) $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

مثال (4):

حلل المقدار x^2-x-20

إشارة الحد الأخير سالبة فستتبع القاعدة (2):

الحـــل:

$$x^2-x-20=(x-\ )(x+\ )$$

العددان هما -5 ، $+4$ لأن: $(-5)(+4)=-20$ وَ $-5+4=-1$

$$x^2-x-20=(x-5)(x+4)$$

مثال (5):

حلل المقادير الآتية

(a) $x^2-7x-18$

(b) x^2-x-6

(c) x^2+x-12

(d) $x^2-9x-10$

الحـــل:

(a) $x^2-7x-18=(x-9)(x+2)$

(b) $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

(c) $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$

(d) $x^2-9x-10=(x-10)(x+1)$

الحالة الثانية : معامل x^2 لا يساوي واحد

مثال (6):

حلل المقادير الآتية

(a) $2x^2-4x-30$

(b) $3x^2+15x-108$

الحــــل:

بأخذ معامل x^2 عامل مشترك نجد أن

$$\text{(a) } 2x^2 - 4x - 30 = 2(x^2 - 2x - 15)$$

$$= 2(x-5)(x+3)$$

$$\text{(b) } 3x^2 + 15x - 108 = 3(x^2 + 5x - 36)$$

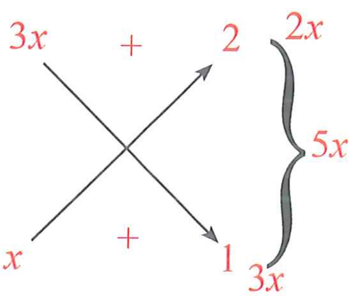
$$= 3(x+9)(x-4)$$

مثال (7):

حلل المقدار $3x^2 + 5x + 2$

الحــــل:

$$3x^2 + 5x + 2 = (3x + \quad)(x + \quad)$$



1) نحلل الحد الأول وهو $3x^2$ إلى x ، $3x$

2) نحلل الحد الأخير وهو 2 إلى 1 ، 2

3) نكوّن مقصاً كما في الشكل و نلاحظ أن:

$$(3x)(1) + (2)(x) = +5x$$

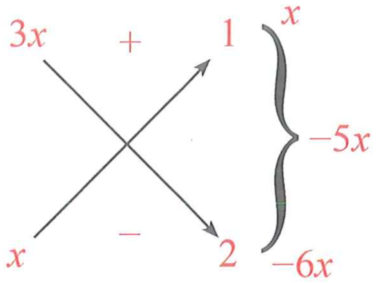
$$3x^2 + 5x + 2 = (3x+2)(x+1)$$

مثال (8):

حلل المقدار $3x^2 - 5x - 2$

الحـــل:

$$3x^2 - 5x - 2 = (3x \quad)(x \quad)$$



1) نحلل الحد الأول و الأخير كما في المثال 7

2) نكوّن مقصاً مع مراعاة أن العدد الأكبر يأخذ إشارة الوسط بعد الضرب على المقص فنجد أن:

$$(-2)(3x) + (1)(x) = -6x + x = -5x$$

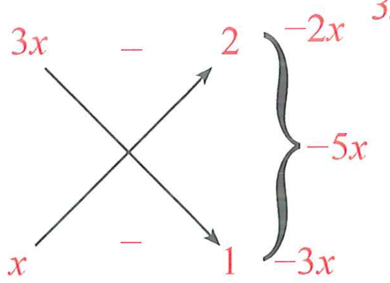
$$3x^2 - 5x - 2 = (3x + 1)(x - 2)$$

مثال (9):

حلل المقدار $3x^2 - 5x + 2$

الحـــل:

$$3x^2 - 5x + 2 = (3x - \quad)(x - \quad)$$



نستعرض الاحتمالات فنجد أن

$$(3x)(-1) + (-2)(x) = -5x$$

$$3x^2 - 5x + 2 = (3x - 2)(x - 1)$$

مثال (10):

حلل المقدار $3x^2 + 5x - 2$

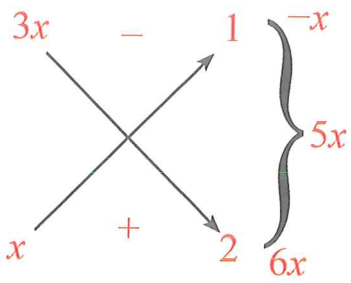
الحـــل:

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x \quad\;)(x \quad\;)$$

1) نحلل الحد الأول والأخير كما في المثال 7

2) نكوّن مقصاً مع مراعاة أن العدد الأكبر يأخذ

إشارة الوسط بعد الضرب على المقص فنجد أن



$$(2)(3x) + (-1)(x) = 6x - x = +5x$$

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2)$$

2.3.2 تمارين

حلل المقادير الثلاثية التالية:

(1) $x^2 - 6x - 7 =$

a	$(x-2)(x-3)$	b	$(x-1)(x-7)$
c	$(x+1)(x+7)$	d	$(x+1)(x-7)$

(2) $x^2 + x - 20 =$

a	$(x-4)(x+5)$	b	$(x-4)(x-5)$
c	$(x+4)(x-5)$	d	$(x+4)(x+5)$

(3) $x^2 + 8x + 15 =$

a	$(x+3)(x-5)$	b	$(x-3)(x-5)$
c	$(x-3)(x+5)$	d	$(x+3)(x+5)$

(4) $x^2 - 11x + 24 =$

a	$(x-3)(x-8)$	b	$(x+3)(x+8)$
c	$(x+3)(x-8)$	d	$(x-3)(x+8)$

(8) $2x^2 - 10x - 28 =$

a	$2(x+2)(x-7)$	b	$(x-2)(x-7)$
c	$(x+2)(x+7)$	d	$2(x+2)(x+7)$

(5) $3x^2 + 33x + 90 =$

a	$3(x-5)(x-6)$	b	$3(x+5)(x+6)$
c	$3(x-5)(x+6)$	d	$(x-5)(x-6)$

(6) $y^2 - 3y - 28 =$

a	$(y-4)(y-7)$	b	$(y+4)(y-7)$
c	$(y-4)(y+7)$	d	$(y+4)(y+7)$

(7) $7y^2 + 14xy + 7x = 3x(x+y)^2$

a	صواب	b	خطأ

(8) $2x^2 - 9x - 5 =$

a	$(2x-1)(x-5)$	b	$(4x-1)(2x-5)$
c	$(5x+1)(x-2)$	d	$(2x+1)(x-5)$

(9) $8x^2 - 2x - 3 =$

a	$(2x+3)(4x-1)$	b	$(4x-3)(2x+1)$
c	$(2x-3)(4x+1)$	d	$(4x+3)(2x-1)$

(10) $10x^2 - 11x + 3 =$

a	$(5x-3)(2x-1)$	b	$(5x-3)(2x+1)$
c	$(2x+3)(5x-1)$	d	$(5x+3)(2x+1)$

(11) $9x^2 + 15x + 20 = (3x+4)(3x+5)$

a	صواب	b	خطأ

2.4

الفصل الرابع

العمليات على المقادير الجبرية الكسرية

العمليات على المقادير الجبرية الكسرية

المقدار الجبري الكسري هو قسمة مقدراين جبريين بحيث المقام لا يساوي الصفر.

2.4.1 أولاً: تبسيط المقادير الجبرية

قاعدة 1:

إذا كان a,b,k اعداد حقيقية بحيث $b \neq 0$ ، $k \neq 0$ فإن

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

مثال (1):

بسط المقدار

$$\frac{2x-8}{x^2-4x}$$

الحــل:

$$\frac{2x-8}{x^2-4x} = \frac{2(x-4)}{x(x-4)} = \frac{2}{x}, \quad x \neq 4$$

مثال (2):

بسط المقدار

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$$

الحـــــل:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-4}{x+1}\ ,\ x\neq 1$$

مثال (3):

بسط المقدار

$$\frac{x^2-2x-24}{x^2-5x-6}$$

الحـــــل:

$$\frac{x^2-2x-24}{x^2-5x-6}=\frac{(x-6)(x+4)}{(x-6)(x+1)}=\frac{x+4}{x+1}\ ,\ x\neq 6$$

2.4.2 ثانياً : جمع وطرح المقادير الجبرية الكسرية

قاعدة 2:

إذا كان a,b,c,d أعداد حقيقية بحيث $d \neq 0$ ، $b \neq 0$ فإن

$$(1)\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$(2)\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$(3)\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$(4)\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

مثال (4):

بسط المقادير الآتية :

$$(a)\quad \frac{x}{x-2}+\frac{3}{x-2}$$

$$(b)\quad \frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x+3}$$

الحـــل:

$$(a)\quad \frac{x}{x-2}+\frac{3}{x-2}=\frac{x+3}{x-2}$$

$$(b)\quad \frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x+3}=\frac{x-(x-3)}{x+3}=\frac{x-x+3}{x+3}=\frac{3}{x+3}$$

مثال (5):

بسط المقادير الآتية :

$$2+\frac{x+4}{x+2}$$

الحـــل:

$$2+\frac{x+4}{x+2}=\frac{2(x+2)}{(x+2)}+\frac{x+4}{x+2}=\frac{2(x+2)+x+4}{x+2}$$

$$=\frac{2x+4+x+4}{x+2}=\frac{3x+8}{x+2}$$

مثال (6):

بسط

$$\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x+3}$$

الحـــل:

$x^2-9=(x+3)(x-3)$ ، فالمقام المشترك هو $(x+3)(x-3)$

$$\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x+3}=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3}{x+3}$$

$$=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\frac{2+3(x-3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{2 + 3x - 9}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{3x - 7}{(x+3)(x-3)}$$

مثال (7):

بسط

$$\frac{2x}{x^2 - x - 20} - \frac{1}{x-5}$$

الحـــل:

$$\frac{2x}{x^2 - x - 20} - \frac{1}{x-5} = \frac{2x}{(x-5)(x+4)} - \frac{1}{x-5}$$

$$= \frac{2x}{(x-5)(x+4)} - \frac{(x+4)}{(x-5)(x+4)}$$

$$= \frac{2x - (x+4)}{(x-5)(x+4)}$$

$$= \frac{2x - x - 4}{(x-5)(x+4)}$$

$$= \frac{x-4}{(x-5)(x+4)}$$

مثال (8):

بسط

$$\frac{4x - 20}{x^3 - 125} - \frac{4}{x^2 + 5x + 25}$$

الحـــــل:

$$\frac{4x-20}{x^3-125}-\frac{4}{x^2+5x+25}=\frac{4(x-5)}{(x-5)(x^2+5x+25)}-\frac{4}{x^2+5x+25}$$

$$=\frac{4}{x^2+5x+25}-\frac{4}{x^2+5x+25}=0$$

مثال (9):

بسط

$$\frac{3x}{x^2+4x+4}-\frac{3}{2x+4}$$

الحـــــل:

$$\frac{3x}{x^2+4x+4}-\frac{3}{2x+4}=\frac{3x}{(x+2)^2}-\frac{3}{2(x+2)}$$

$$=\frac{(2)(3x)}{2(x+2)^2}-\frac{3(x+2)}{2(x+2)(x+2)}$$

$$=\frac{6x-3(x+2)}{2(x+2)^2}$$

$$=\frac{6x-3x-6}{2(x+2)^2}$$

$$=\frac{3x-6}{2(x+2)^2}=\frac{3(x-2)}{2(x+2)^2}$$

مثال (10):

بسط

$$\frac{1}{x^2-7x}+\frac{x-1}{x^2-49}$$

الحـــل:

$$\frac{1}{x^2-7x}+\frac{x-1}{x^2-49}=\frac{1}{x(x-7)}+\frac{x-1}{(x+7)(x-7)}$$

$$=\frac{x+7}{x(x-7)(x+7)}+\frac{x(x-1)}{x(x+7)(x-7)}$$

$$=\frac{x+7+x^2-x}{x(x-7)(x+7)}$$

$$=\frac{x^2+7}{x(x-7)(x+7)}$$

2.4.3 ثالثاً: ضرب وقسمة المقادير الجبرية الكسرية

قاعدة 3 :

إذا كان a,b,c,d أعداد حقيقية بحيث $d \neq 0$ ، $b \neq 0$ فإن

$$(1)\quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\ c}{b\ d}$$

$$(2)\quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a\ d}{b\ c}$$

مثال (11):

بسط المقادير الآتية :

$$(a)\quad \frac{2x}{3} \times \frac{x-1}{x}$$

$$(b)\quad \frac{x-2}{6} \div \frac{x-2}{x+2}$$

الحـــل:

$$(a)\quad \frac{2x}{3} \times \frac{x-1}{x} = \frac{2x(x-1)}{3x} = \frac{2(x-1)}{3}$$

$$(b)\quad \frac{x-2}{6} \div \frac{x-2}{x+2} = \frac{x-2}{6} \times \frac{x+2}{x-2} = \frac{(x-2)\,(x+2)}{6\,(x-2)}$$

$$= \frac{x+2}{6}$$

مثال (12):

بسط

$$\frac{x^2-16}{(x+4)^2}\times\frac{(x+4)}{(x-4)}$$

الحـــل:

$$\frac{x^2-16}{(x+4)^2}\times\frac{(x+4)}{(x-4)}=\frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)^2}\times\frac{(x+4)}{(x-4)}=1$$

مثال (13):

بسط

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2-9}\div\frac{x+4}{5x-15}$$

الحـــل:

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2-9}\div\frac{x+4}{5x-15}=\frac{x^2+7x+12}{x^2-9}\times\frac{5x-15}{x+4}$$

$$=\frac{(x+3)\,(x+4)}{(x-3)\,(x+3)}\times\frac{5(x-3)}{(x+4)}=5$$

4.4 تمارين

(1) $\frac{2}{3x} + \frac{4}{3x} =$

a	$\frac{6}{x}$	b	$\frac{2}{x}$
c	$\frac{x}{6}$	d	$\frac{1}{x}$

(2) $\frac{5}{x-2} + \frac{4}{x^2-4} =$

a	$\frac{9}{x^2-4}$	b	$\frac{5x+14}{x^2-4}$
c	$\frac{5x-14}{x-2}$	d	$\frac{15x-14}{x^2-4}$

(3) $\frac{3}{x-2} - \frac{2}{2-x} =$

a	$\frac{1}{x-2}$	b	$\frac{1}{x-2}$
c	$\frac{-5}{x-2}$	d	$\frac{5}{x-2}$

(4) $\frac{5}{x-1} - \frac{3}{x-4} = \frac{2x-17}{(x-4)(x-1)}$

a	صواب	b	خطأ

(5) $\frac{3}{y+2} + \frac{2}{y-2} - \frac{4y}{y^2-4} =$

a	$\frac{1}{y-2}$	b	$\frac{1}{y+2}$
c	$\frac{y-2}{y+2}$	d	$\frac{1}{y^2-4}$

(6) $x+2 - \frac{x-2}{x-1} =$

a	$\frac{x^2}{x-1}$	b	$\frac{x}{x-1}$
c	$\frac{x}{x^2-1}$	d	$\frac{x}{x+1}$

(7) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{1}{x+y} =$

a	1	b	$\frac{x-y}{x+y}$
c	$\frac{1}{x-y}$	d	-1

(8) $\frac{x^2-9}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x+3}$

a	صواب	b	خطأ

(9) $\frac{1}{x^2-6x+9} \div \frac{1}{x-3} = x-3$

a	صواب	b	خطأ

$$\frac{x^2-1}{x+2} \div \frac{x+1}{x^2-4} = \qquad (10)$$

a	$(x-1)^2$	b	$(x-2)^2$
c	$(x-1)(x-2)$	d	x

$$\frac{x^2-y^2}{xy} \div \frac{x-y}{y} = \frac{x+y}{y} \qquad (11)$$

a	صواب	b	خطأ

بسط المقادير الجبرية التالية :

$$\frac{2}{3x} + \frac{7}{3x} \qquad (12)$$

$$\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} \div \frac{1}{x+y} \qquad (13)$$

$$\frac{5}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \qquad (14)$$

$$\frac{3x+12}{2x-8} \div \frac{(x+4)^2}{(x-4)^2} \qquad (15)$$

$$\frac{x^2-y^2}{xy} \times \frac{xy-y^2}{x+y} \qquad (16)$$

$$\frac{2}{x^2-6x+9} \div \frac{x+1}{3x-9} \qquad (17)$$

$$\frac{2}{x^2 - x - 2} - \frac{3}{x + 1} \qquad (18)$$

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 27} \times \frac{x^2 + 3x + 9}{x^2 + 6x + 9} \qquad (19)$$

$$5 - \frac{5}{x + 1} + \frac{10}{x^2 - 1} \qquad (20)$$

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x^2 + y + 1}{x^2 + 2x + 1} \qquad (21)$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 2x} - \frac{3x + 3}{(x + 2)(x + 1)} \qquad (22)$$

$$\frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x + 2} - \frac{x}{x^2 - 4} \qquad (23)$$

$$\frac{x + 4}{x - 3} - \frac{2}{x + 2} - \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 9} \qquad (24)$$

2.5 الفصل الخامس

الفترات العددية

الفترات العددية

نفرض أن a , b أعداد حقيقية فإنه :

(1) العدد a أكبر من العدد b تكتب على الصورة $a > b$

(2) العدد a أقل من العدد b تكتب على الصورة $a < b$

(3) العدد a أكبر من أو يساوي العدد b تكتب على الصورة $a \geq b$

(4) العدد a أقل من أو يساوي العدد b تكتب على الصورة $a \leq b$

أما المتباينة المزدوجة $a \leq x \leq b$ تعني أن $x \geq a$ و $x \leq b$

2.5.1 تنقسم الفترات إلى فترات محدودة ولا محدودة

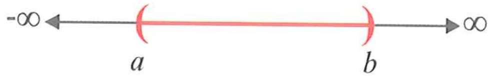
(1) الفترات المحدودة :

1 – الفترة المغلقة $[a,b]$: تشمل جميع الأعداد الحقيقية بين العددين a,b بالإضافة للعددين a,b

$$[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

2) الفترة المفتوحة (a,b) : تشمل جميع الأعداد الحقيقية بين a,b ولا تشمل أي من العددين a,b .

$$(a,b) = \{x : a < x < b\}$$

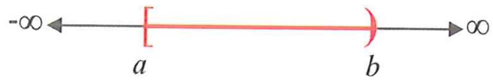


3) الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة $(a,b]$: تشمل جميع الأعداد الحقيقية بين a,b بالإضافة إلى b العدد .

$$(a,b] = \{x : a < x \leq b\}$$

4) الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة $[a,b)$: تشمل جميع الأعداد الحقيقية بين a,b بالإضافة إلى a العدد .

$$[a,b) = \{x : a \leq x < b\}$$

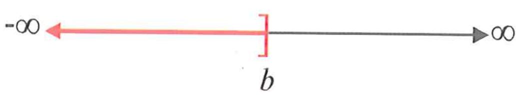


2. الفترات غير المحدودة :

هي الفترات التي يكون أحد حديها أو كلاهما ∞ أو $-\infty$.

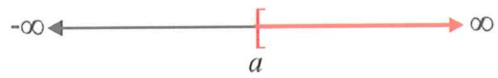
1) الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة $(-\infty , b]$: تشمل جميع الأعداد الحقيقية التي أقل من b مع العدد b .

$$(-\infty , b] = \{x : x \leq b\}$$



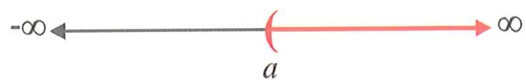
2) الفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة $[a , \infty)$: تشمل جميع الأعداد الحقيقية التي أكبر من a مع العدد a .

$$[a , \infty) = \{x : x \geq a\}$$



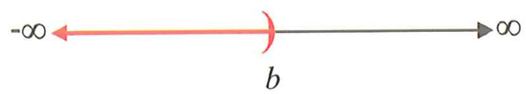
3) الفترة المفتوحة (a , ∞) : تشمل جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من a .

$$(a , \infty) = \{x : x > a\}$$



4) الفترة المفتوحة $(-\infty , b)$: تشمل جميع الأعداد الحقيقية الأقل من b .

$$(-\infty , b) = \{x : x < b\}$$



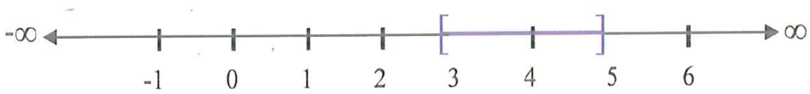
5) فترة جميع الأعداد الحقيقة $\mathbb{R} = (-\infty , \infty)$ وهي فترة مفتوحة.

$$\mathbb{R} = (-\infty , \infty)$$

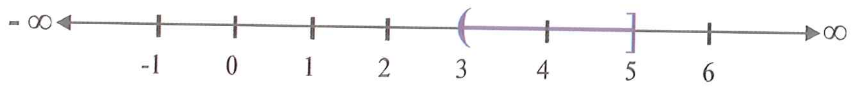
مثال (1) :

فيما يلي بعض الأمثلة على الفترات العددية:

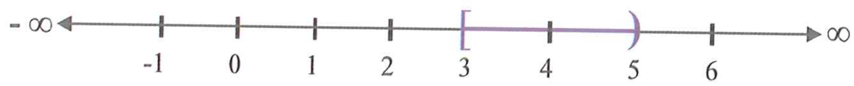
1) $[3 , 5] = \{x : 3 \leq x \leq 5\}$



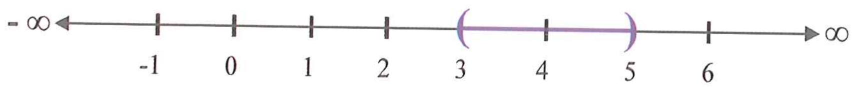
2) $(3, 5] = \{x : 3 < x \le 5\}$



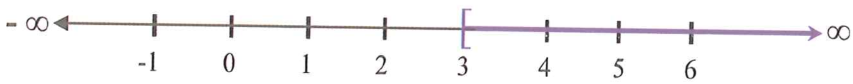
3) $[3, 5) = \{x : 3 \le x < 5\}$



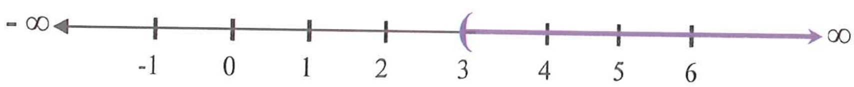
4) $(3, 5) = \{x : 3 < x < 5\}$



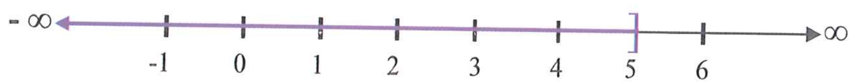
5) $[3, \infty) = \{x : x \ge 3\}$



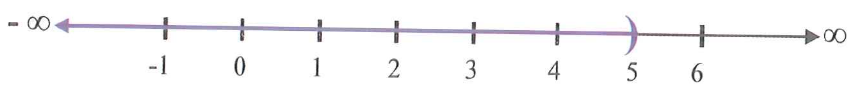
6) $(3, \infty) = \{x : x > 3\}$



7) $(-\infty, 5] = \{x : x \le 5\}$



8) $(-\infty, 5) = \{x : x < 5\}$



مثال (2):

عبّر عن إتحاد الفترتين $[-3 , 1]$ وَ $(-1 , 3)$.

1) على خط الأعداد.

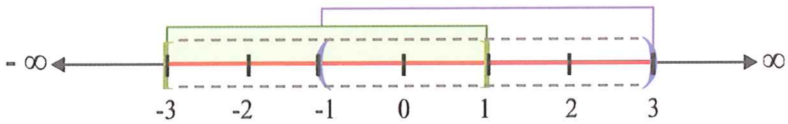
2) على صورة فترة.

3) على صورة مجموعة.

الحـــل:

إتحاد الفترتين $[-3 , 1]$ وَ $(-1 , 3)$ هو عبارة عن مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي في الفترة $[-3 , 1]$ أو في الفترة $(-1 , 3)$ أو كليهما بدون تكرار.

1) على خط الأعداد الحقيقية:



2) على صورة فترة: $(-1 , 3) \cup [-3 , 1] = [-3 , 3)$

3) على صورة مجموعة:

$$(-1 , 3) \cup [-3 , 1] = \{x : -1 < x < 3\} \cup \{x : -3 \le x \le 1\} = \{x : -3 \le x < 3\}$$

مثال (3) :

عبّر عن تقاطع الفترتين $[-3 , 1]$ وَ $(-1 , 3)$.

1) على خط الأعداد.

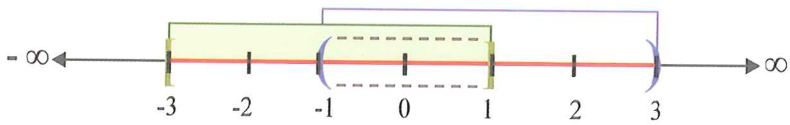
2) على صورة فترة.

3) على صورة مجموعة.

الحـــل:

تقاطع الفترتين $[-3\,,1]$ وَ $(-1\,,3)$ هو عبارة عن مجموعة كل الأعداد الحقيقية المشتركة بين الفترتين $[-3\,,1]$ وَ $(-1\,,3)$ بدون تكرار.

1) على خط الأعداد الحقيقية:



2) على صورة فترة: $(-1\,,3)\cap[-3\,,1]=(-1\,,1]$

3) على صورة مجموعة:

$(-1\,,3)\cap[-3\,,1]=\{x:-1<x<3\}\cap\{x:-3\le x\le 1\}=\{x:-1<x\le 1\}$

مثال (4):

أوجد :

(a) $(-\infty\,,4)\cup(-1\,,6]$

(b) $(-\infty\,,1)\cap(-2\,,\infty)$

الحـــل:

(a) $(-\infty\,,4)\cup(-1\,,6]=(-\infty\,,6]$

(b) $(-\infty\,,1)\cap(-2\,,\infty)=(-2\,,1)$

2.5.2 تمارين

(1) $\{x : x < -2\} =$

a	$[-1 , -\infty)$	b	$(-\infty , -2)$
c	$(-\infty , -2]$	d	$(-2 , -\infty)$

(2) $\{x : x \geq 5\} =$

a	$(5 , \infty)$	b	$[5 , \infty)$
c	$(-\infty , -5]$	d	$(-5 , \infty)$

(3) $\{x : -4 \leq x < 5\} =$

a	$(-4 , 5)$	b	$[-4 , 5)$
c	$[-4 , 5)$	d	$[-4 , 5]$

(4) $(-4 , 8) =$

a	$\{x : -4 \leq x \leq 8\}$	b	$\{x : -4 \leq x < 8\}$
c	$\{x : -4 < x \leq 8\}$	d	$\{x : -4 < x < 8\}$

(5) $(-\infty , 7] =$

a	$\{x : x > 7\}$	b	$\{x : x < 7\}$
c	$\{x : x \geq 7\}$	d	$\{x : x \leq 7\}$

(6) $(-5 , 5) \cup [4 , 7]$

a	$(-5 , 7)$	b	$[4 , 5)$
c	$(-5 , 7]$	d	$(4 , 5]$

(7) $(-\infty , 5) \cup (-2 , \infty) =$

a	$(-2 , 1)$	b	$(1 , \infty)$
c	$(-\infty , -2)$	d	R

(8) $[-1 , 4] \cap (2 , 6] =$

a	$[2 , 4]$	b	$(2 , 4)$
c	$[2 , 4)$	d	$(2 , 4]$

(9) $(-\infty , 1) \cap (2 , \infty) = (1 , 2)$

a	صواب	b	خطأ

(10) $(-3 , 2) \cap [-5 , \infty) =$

a	$(-3 , \infty)$	b	$(2 , \infty)$
c	$(-3 , 2)$	d	$(-5 , 2)$

3

Chapter

الباب الثالث

المحددات والمصفوفات

3.1 الفصل الأول

المصفوفات

المصفوفات

3.1.1 مقدمه :

فى دراستنا لهذا الباب سوف نعطى فكرة مبسطة وسريعة عن جبر المصفوفات حتى يكون للقارئ إلماما بالرموز و المصطلحات ويكون على دراية بكيفية استعمالها إذا مادعتة دراسته إلى الاستعانة بها.

تعريف:

المصفوفة هي ترتيب لعناصر او متغيرات في شكل مستطيل ويرمز لها بالحروف الكبيرة .. .. B و A والعناصر بالحروف الصغيرة a , b وتوضع بين ( ) أو [ ].

تعريف:

رتبة المصفوفة التي عدد صفوفها m وعدد أعمدتها n تكتب على الصورة $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{a_{ij}} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

a_{ij} ترمز للعنصر الذي يقع في الصنف رقم i ، العمود رقم j حيث:

$i = 1, 2, ..., m \qquad 1 \le i \le m$

$j = 1, 2, ..., n \qquad 1 \le j \le n$

المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ أي تحتوي على m من الصفوف و n من الأعمدة

مثال (1):

أوجد رتبة المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 31 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ e & 7 & c \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad D = (1 \quad 0 \quad -3 \quad 9)$$

الحــــل:

$$A = \begin{pmatrix} 31 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

حيث ان عدد صفوف المصفوفة A يساوي 3 وعدد اعمدتها يساوي 2

فان رتبة المصفوفة A هي 3×2

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

حيث ان عدد صفوف المصفوفة B يساوي 3 وعدد اعمدتها يساوي 1

فان رتبة المصفوفة B هي 3×1

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ e & 7 & c \end{pmatrix}$$

حيث ان عدد صفوف المصفوفة C يساوي 2 وعدد اعمدتها يساوي 3

فان رتبة المصفوفة C هي 2×3

$$D = (1 \quad 0 \quad -3 \quad 9),$$

حيث ان عدد صفوف المصفوفة D يساوي 1 وعدد اعمدتها يساوي 4

فان رتبة المصفوفة D هي 1×4

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

حيث ان عدد صفوف المصفوفة E يساوي 3 وعدد اعمدتها يساوي 3

فان رتبة المصفوفة E هي 3×3

3.1.2 أشكال المصفوفات

المصفوفة المستطيلة:

هي مصفوفة عدد صفوفها لا يساوي عدد أعمدتها أي ان $m \neq n$

المصفوفة المربعة:

هي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها أي ان $m = n$ وتأخذ الشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $n \times n$

مصفوفة الصف:

هي مصفوفة تحتوي على صف واحد فقط وأي عدد من الأعمدة وتأخذ الشكل

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n})$$

وتكون رتبتها $1 \times n$

مصفوفة العمود:

هي مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط وأي عدد من الصفوف

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

وتكون رتبتها $n \times 1$

المصفوفة الصفرية:

هي مصفوفة مستطيلة أو مربعة، وجميع عناصرها أصفار، ويرمز لها بالرمز O.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المصفوفة القطرية:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا القطر الرئيسي.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

القطر الرئيسي:

عناصره على الشكل $i=j$ (أي رقم الصف = رقم العمود).

المصفوفة القياسية:

المصفوفة القياسية هى المصفوفة القطرية التى جميع عناصرها متساوية مثل

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة:

هي مصفوفة مربعة (قطرية) جميع عناصرها أصفار ما عدا القطر الرئيسي عناصره تحتوي على الواحد الصحيح.. ويرمز لها بالرمز I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مدور المصفوفة :

إذا كانت A مصفوفة من رتبة $m \times n$ فاننا نحصل علي مدور المصفوفة بجعل الصفوف أعمدة و الاعمدة صفوف فإنه ينتج مصفوفة أخرى من رتبة $n \times m$ والمصفوفة الناتجة تسمى بمدور المصفوفة A (Transpose) ويرمز لها بالرمز A^T.

مثال (2):

أوجد مدور المصفوفات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 4 \\ e & 7 & c \end{pmatrix}$$

$$D = (1 \quad 0 \quad -3 \quad 9), \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

الحـــل:

نحصل على مدور المصفوفة بجعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف في المصفوفة المعطاة

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^T = (a \quad b \quad c)$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & e \\ a & 7 \\ 4 & c \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 9 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

نتيجة:

إذا كانت A مصفوفة من رتبة $m \times n$ فان

$$(A^T)^T = A$$

3.1.3 جبر المصفوفات

(1) تساوى المصفوفات

تعريف:

يقال للمصفوفتين $A = (a_{ij})$ ، $B = (b_{ij})$ إنهما متساويتان أى $A = B$ إذا تحقق :

(1) رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B

(2) العناصر المتناظرة متساوية أي أن $a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$

مثال (3) :

إذا كانت $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وكانت $A = B$ فاوجد قيمة المتغيرات x و y

الحـــل:

حيث ان

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

فإن $x = 1$, $y = 2$

مثال (4) :

اوجد قيمة x , y اذا كان

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix}^T$$

الحـــل:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ x & 3 \end{pmatrix}^T$$

إذا

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & x \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

فان

$$x = 2, \quad y = 3$$

مثال (5)

اوجد قيمة المتغيرات a, b, c, d, e, f, g, h اذا كان

$$\begin{pmatrix} a & 3 & -5 \\ c & 4 & d \\ 1 & 7 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & b & f \\ -2 & h & 9 \\ e & g & h \end{pmatrix}$$

الحـــل:

حيث ان المصفوفتان متساويتان فان العناصر المتناظرة متساوية

فان

$$a = 11,\ b = 3,\ c = -2,\ d = 9,\ e = 1,\ f = -5, \quad g = 7, \quad h = 15$$

(2) جمع المصفوفات :

إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ، $B=(b_{ij})_{m\times n}$ (رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B) فإن حاصل جمع المصفوفتين B ، A يعرف كما يلى بإنه المصفوفة $C=(c_{ij})_{m\times n}$ حيث رتبة المصفوفة C هى نفس رتبة كل من المصفوفتين B ، A وأن $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ لجميع قيم i , j وفى هذه الحالة نكتب

$$A+B=C$$

(3) طرح المصفوفات :

إذا كانت $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ، $B=(b_{ij})_{m\times n}$ (رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة B) فإن حاصل طرح المصفوفة B من المصفوفة A يعرف كما يلى بإنه المصفوفة $C=(c_{ij})_{m\times n}$ حيث رتبة المصفوفة C هى نفس رتبة كل من المصفوفتين A,B وأن $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ لجميع قيم i , j وفى هذه الحالة نكتب

$$A-B=C$$

مثال (6):

اذا كانت

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

فاوجد $A+B$ و $A-B$

الحـــل:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5+(-4) & 2+1 \\ -1+6 & 0+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5-(-4) & 2-1 \\ -1-6 & 0-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$$

مثال (7):

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

أوجد $A + B$ و $A - B$

الحــــل:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3.1.4 خصائص عملية جمع المصفوفات

نفرض ان A, B, C ثلاث مصفوفات لهم نفس الرتبة وان المصفوفة الصفرية O لها نفس الرتبة فان

(1) جمع المصفوفات إبدالي $A + B = B + A$

(2) جمع المصفوفات تجميعي $A + (B+C) = (A+B) + C$

(3) المحايد الجمعي $A + O = O + A = A$

(4) المعكوس الجمعي $A + (-A) = O$

(5) مدور مجموع مصفوفتان $(A + B)^T = A^T + B^T$

مثال (8):

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

اوجد

$$(A+B)^T$$

الحـــل:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

حل آخر:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(4) ضرب المصفوفة في ثابت k :

إذا كانت لدينا $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ، k عدد حقيقي فإن حاصل ضرب k في المصفوفة A نحصل عليه بضرب k في جميع عناصر A أي ان:

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

مثال (9) :

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

فأوجد

$$5\,A, \qquad -4A^T$$

الحـــل:

$$5\,A = 5\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -15 & 10 \\ -5 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث ان

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

اذا

$$-4A^T = -4\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 12 & -24 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال (10) :

اذا كانت

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

فأوجد

$$3A, \ -2B, \qquad 3A - 2B$$

الحـــــل:

$$3A = 3\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$-2B = -2\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -8 \\ -15 & 6 \end{pmatrix}$$

(5) ضرب المصفوفات :

إذا كان لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})_{m\times n}$ والمصفوفة $B = (b_{ij})_{n\times p}$ فإن حاصل الضرب $AB = (c_{ij})_{m\times p}$ يكون مصفوفة من الرتبة $m \times p$ حيث

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ أى أنه لكى يكون الضرب ممكنا ينبغى أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساويا لعدد صفوف المصفوفة الثانية. أي ان

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

علي سبيل المثال:

$$A_{2\times 3} \times B_{3\times 2} = C_{2\times 2}$$

$=$

مثال (11):

إذا كان لدينا ثلاث مصفوفات علي النحو التالي

$A_{2\times 3}$ ، $B_{3\times 4}$ ، $C_{4\times 2}$

ابحث امكانية العمليات الاتية:

(1) AB (2) BA (3) BC (4) CA (5) AC

الحـــل:

(1) حيث ان عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 3 وعدد صفوف المصفوفة B تساوي 3 فان عملية الضرب AB ممكنة وينتج

$$A_{2\times3}\ B_{3\times4} = D_{2\times4}$$

(2) حيث ان عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 4 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 2 فان عملية الضرب BA غير ممكنة

(3) حيث ان عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 4 وعدد صفوف المصفوفة C تساوي 4 فان عملية الضرب BC ممكنة وينتج

$$B_{3\times4}\ C_{4\times2} = F_{3\times2}$$

(4) حيث ان عدد أعمدة المصفوفة C تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 2 فان عملية الضرب CA ممكنة وينتج

$$C_{4\times2}\ A_{2\times3} = H_{4\times3}$$

(5) حيث ان عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 3 وعدد صفوف المصفوفة C تساوي 4 فان عملية الضرب AC غير ممكنة.

مثال (12) :

إذا كانت $A = (1 \quad 2)$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

فأوجد

$$AB,\ BA$$

ان امكن

الحـــل:

حيث ان عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة B تساوي 2 فان عملية الضرب AB ممكنة

اذن

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1)(4) + (2)(5) & (1)(3) + (2)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \end{pmatrix}$$

وحيث ان عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 1 فان عملية الضرب BA غير ممكنة.

مثال (13):

إذا كان
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

فأوجد

$$AB, \ BA$$

ان امكن

الحـــل:

حيث ان عدد أعمدة المصفوفة A تساوي 3 وعدد صفوف المصفوفة B تساوي 3 فان عملية الضرب AB ممكنة

اذن

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(1) + (0)(-2) + (-1)(-1) & (1)(0) + (0)(1) + (-1)(-3) \\ (2)(1) + (3)(-2) + (-2)(-1) & (2)(0) + (3)(1) + (-2)(-3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 1 & 0 + 0 + 3 \\ 2 + (-6) + 2 & 0 + 3 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

حيث ان عدد أعمدة المصفوفة B تساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة A تساوي 2 فان عملية الضرب BA ممكنة

اذن

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(1)+(0)(2) & (1)(0)+0(3) & (1)(-1)+(0)(-2) \\ (-2)(1)+(1)(2) & (-2)(0)+(1)(3) & (-2)(-1)+(1)(-2) \\ (-1)(1)+(-3)(2) & (-1)(0)+(-3)(3) & (-1)(-1)+(-3)(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -7 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن AB مصفوفة من رتبة 2×2 بينما BA من رتبة 3×3 أى أن

$$AB \neq BA$$

من الامثله السابقة نجد أن ضرب المصفوفات ليس أبداليا

ضرب المصفوفات تحقق العلاقات الآتية : -

(1) $A(B + C) = AB + AC$

(2) $A(BC) = (AB)\,C$

(3) $AI = IA = A$

حيث I مصفوفة الوحدة.

المصفوفة المتماثلة :

المصفوفة المربعة A تسمى مصفوفة متماثلة إذا كان $A^T = A$ فمثلا

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & h \\ e & h & c \end{pmatrix}$$

المصفوفة شبة المتماثلة :

المصفوفة المربعة A تسمى مصفوفة شبه متماثلة إذا كان $A^T = -A$ فمثلا

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & h \\ -e & -h & 0 \end{pmatrix}$$

مثال (14):

بين نوع المصفوفة من حيث كونها متماثلة او شبة متماثلة او خلاف ذلك:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} , \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

الحـــل:

نقوم بإيجاد مدور المصفوفات كالأتي

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

حيث ان $A^T = A$ وبالتالي فان المصفوفة A متماثلة

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

حيث ان $B^T = -B$ وبالتالي فان المصفوفة B شبة متماثلة

$$E^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث ان $E^T \neq E$ وايضا $E^T \neq -E$ وبالتالي فان المصفوفة E ليست متماثلة وليست شبة متماثلة

3.1.5 تمارين

(1) أوجد حاصل الجمع $A+B$ مبيناً الحالات التي لا يكون الجمع فيها ممكنا

(i) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}$

(ii) $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 4 & 6 & 9\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

(iii) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}$

(iv) $A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\ 2 & 9 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\\ 1 & 9 & 10\end{pmatrix}$

(2) أوجد قيمة كل مما يأتى

(i) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 3\\ 9 & 12\end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ -3 & -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$

(3) أوجد

$A+B$, $A+B^T$, $B+A^T$, $A-B^T$, B^T-A

اذا كانت

$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 5 & 7\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\\ 1 & 6\end{pmatrix}$

ووضح الحالات غير الممكنة

(4) أوجد BA ، AB

اذا كانت $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(5) ضع علامة (صح) أمام الإجابة الصحيحة و علامة (خطا) أمام العبارة الخاطئة فيما يلي:

(i)	عملية جمع المصفوفات عملية إبداليه	○
(ii)	لأي مصفوفتان $AB = BA$	○
(iii)	قيمة العنصر a_{23} في المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 0 \\ -1 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ يساوي 5	○
(iv)	المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ من الرتبة 3×1	○
(v)	اذا كانت المصفوفة A من الرتبة 2×3 والمصفوفة B من الرتبة 1×3 فان AB من الرتبة 2×1.	○
(vi)	المصفوفة $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ تسمي مصفوفة محايدة	○

(6) اختر الاجابة الصحيحة فيما يلي

1	المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ من الرتبة			○
	1×3	3×1	2×1	1×2

2	اذا كانت $B_{1\times3}$ ، $A_{1\times3}$ فان رتبة المصفوفة AB تكون			
	3×2	1×2	2×1	لا يمكن الضرب
3	اذا كانت المصفوفة A مربعة من الرتبة 3×3 فلا يمكن ان تحتوي علي العنصر			
	a_{22}	a_{41}	a_{21}	a_{32}
4	حاصل الضرب $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ يساوي			
	$\begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix}$	الضرب غير معرف
5	قيمة العنصر a_{13} في المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -6 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$			
	5	0	3	-1
6	اذا كان $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ فان قيمة x تساوي			
	1	2	3	5

(7) حدد رتبة المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 4 & 5 & -9 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ثم اوجد كلا من العناصر التالية: a_{33} ، a_{31} ، a_{12}

(8) اذا كان

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

أوجد كلاً من :

$$2A, \quad A + B, \quad A - B, \quad 2A - 2B, \quad A.B$$

(9) برهن أن $AB \neq BA$ حيث $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

3.2

الفصل الثاني

المحددات

3.2.1 مقدمة.

3.2.2 خواص المحددات.

3.2.3 تمارين.

المحددات

3.2.1 مقدمة :

سندرس فى هذا الفصل خواص محددات المصفوفات المربعة والتى لها فوائد عظيمة فى كثير من فروع الرياضيات البحته والتطبيقية على السواء.

لتكن A مصفوفة مربعة من رتبة $(n \times n)$ فإن محدد المصفوفة A يعطي التالي:

$$\triangle = det\,(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويرمز له بشكل مختزل : $\triangle = \left|a_{ij}\right|_n$

حيث أنه في a_{ij} يرمز الدليل الأول لرقم الصف والدليل الثاني لرقم العمود الذي يقع فيه العنصر a_{ij} .

فمثلا :

العنصر a_{11} يقع في الصف الاول والعمود الاول.

العنصر a_{23} يقع في الصف الثاني والعمود الثالث.

- عناصر القطر الرئيسي في المحدد هي a_{11} ، a_{22} ، a_{33} ، $\cdots$ ، a_{nn} .

• صورة المحدد من الرتبة الثانية تكون عناصره مرصوصة فى صفين وعمودين

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

• صورة المحدد من الرتبة الثالثة يحتوى على تسعة عناصر مرصوصة فى ثلاثة أعمدة وثلاثة صفوف

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

تعريف:

(أ) مفكوك لابلاس للمحدد (قيمة المحدد) الذى رتبته "2" .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(ب) مفكوك لابلاس للمحدد (قيمة المحدد) الذى رتبته "3" .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

وذلك باستخدام عناصر الصف الأول.

تعريف:

المحيد Minor "المحدد المصاحب" لاى عنصر فى محدد رتبته n هو محدد من الرتبة $(n-1)$ ناتج من حذف العمود والصف الواقع فيه العنصر. ففى المحدد

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يكون محيد العنصر a_{11} هو $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ بينما محيد العنصر a_{22} هو $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

تعريف:

معامل العنصر cofactor الذى يقع فى الصف الذى ترتيبه i والعمود الذى ترتيبه j فى أى محدد هو عبارة عن محيد العنصر مضروباً فى الإشارة $(-1)^{i+j}$.

مثال (1):

(أ) أوجد معامل العنصر الذى يقع فى الصف الثانى والعمود الثالث من المحدد $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

المعامل المطلوب هو

$$(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\,(0-(-2)) = -2$$

(ب) أوجد معامل العنصر الذى يقع فى الصف الأول والعمود الثالث من المحدد $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

المعامل المطلوب هو

$$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1)\,(0-(-2)) = 2$$

وبالتالي تكون قاعدة الاشارة لمحدد رتبة 3 هي

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a}_{11} & \overset{-}{a}_{12} & \overset{+}{a}_{13} \\ \overset{-}{a}_{21} & \overset{+}{a}_{22} & \overset{-}{a}_{23} \\ \overset{+}{a}_{31} & \overset{-}{a}_{32} & \overset{+}{a}_{33} \end{vmatrix}$$

وبالتالي يمكن ايجاد قيمة المحدد الذى رتبته "3" باستخدام عناصر الصف الثاني

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

مثال (2):

أوجد رتبة وقيمة المحدد

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

الحــل:

حيث ان المحدد يحتوي علي صفين وعمودين فان رتبة المحدد تساوى 2 .

$$\triangle = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (3)(6) - (-2)(5) = 18 - (-10) = 18 + 10 = 28$$

مثال (3):

أوجد رتبة وقيمة المحدد

$$\triangle = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

الحـــل

حيث ان المحدد يحتوي علي ثلاث صفوف و ثلاث أعمدة فان رتبة المحدد تساوى 3 .

سنقوم بايجاد قيمة المحدد وذلك باستخدام عناصر الصف الاول

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2(0-8) - 3(0-12) - 7(2-15) = 16 + 36 + 91 = 143$$

حاول إيجاد قيمة المحدد باستخدام عناصر أى صف (عمود) آخر.

ملاحظة (1):

عند إيجاد قيمة المحدد يستحسن أن نستخدم عناصر الصف (العمود) الذى يحتوى على أصفار أكثر وذلك لتسهيل الحسابات.

مثال (4):

أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الحـــل

حيث ان العمود الثاني يحتوي علي اصفار سنقوم بفك المحدد باستخدام عناصر العمود الثاني

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2-2) = -8$$

قاعدة:

طريقة الأقطار المتوازية سارس :

نكتب عناصر المحدد كما هي ثم نضيف على يمينها مباشرة العمود الأول ثم العمود الثاني، فينتج لدينا خمسة أعمدة وثلاثة صفوف كما يلي:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

وتكون قيمة المحدد مساوية:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

مثال (5):

أوجد قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحـــل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-4) + 2(-2-2) + 3(-4-(-3)) = -7 + 2(-4) + 3(-1) = -7 - 8 - 3 = -18$$

ويمكن ايجاد قيمة المحدد باستخدام طريقة الأقطار المتوازية كالآتي:

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (1)(-3)(1)+(-2)(2)(1)+(3)(-2)(2)-(3)(-3)(1)-(1)(2)(2)-(-2)(-2)(1)$$

$$= -3+(-4)+(-12)-(-9)-4-(4) = -3-4-12+9-4-4 = -18$$

نتيجة :

$$(A) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$(B) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

$$(C) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

وبالتالي قيمة المحددات التي على الصور السابقة تساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

مثال (6) :

أوجد قيمة المحددات الاتية

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

الحـــل

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (1)(3)(6) = 18$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-3)(-1)(8) = 24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(5)(4) = -40$$

3.2.2 خواص المحددات

فيما يلى سنذكر بعض الخواص الأساسية للمحددات.

(1) قيمة المحدد لا تتغير إذا صارت الأعمدة صفوفا والصفوف أعمدة أى أن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(2) تبديل صفين (أو عمودين) متتاليين لمحدد لا يتغير من قيمة المحدد العددية بل يغير من إشارة المحدد فقط. أى أن

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

نتيجة :

إذا احتوى المحدد على صفين (عمودين) متطابقين فإنه يساوى صفر (ينعدم المحدد إذا تساوى فيه صفين أو عمودين)

كمثال:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_1 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

(3) إذا ضرب أى صف (أي عمود) لمحدد فى "k" فإن قيمة المحدد الناتج تساوى "k" مضروباً فى قيمة المحدد الأصلى.

كمثال:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

نتيجة :

يمكن أخذ عامل مشترك بين جميع عناصر أى صف أو أى عمود فمثلاً

$$(A)\quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(B)\quad \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 15 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

(4) إذا ضربت مكونات اى صف (اى عمود) فى عدد معين وجمعت على المكونات المناظرة لصف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(5) إذا كانت مكونات اى صف (اى عمود) فى محدد تساوي صفر فان قيمة المحدد تساوي صفر

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

مثال (7):

احسب قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

الصف الثانى نطرح منه ضعف الصف الأول، الصف الثالث نطرح منه ثلاثة أمثال الصف الأول ينتج أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -2 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 14 = 16$$

مثال (8):

احسب قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -5 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل:

بأخذ 2 عامل مشترك من الصف الأول نجد أن

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

وحيث ان عناصر العمود الاول والثالث متساوية فان

$$\Delta = 0$$

مثال (9):

احسب قيمة المحدد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

الحـــل:

باخذ 2 عامل مشترك من الصف الاول، ينتج أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

وحيث ان عناصر الصف الاول والثالث متساوية فان

$$\Delta = 0$$

ملاحظة (2):

محدد المصفوفة المربعة يساوي محدد مدور المصفوفة.

$$det\ (A) = det\ (A^T)$$

3.2.3 تمارين

أوجد رتبة وقيمة المحددات الآتية:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

(9) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

(11) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

(12) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

(13) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(14) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 30 \\ 70 & -5 & -20 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

(15) أحسب قيمة كل من المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 9 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

(16) أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(17) أوجد قيمة كلاً من المحددين

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad , \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

3.3 الفصل الثالث

المعكوس الضربي للمصفوفات

3.3.1 المصفوفة المفردة وغير المفردة.

3.3.2 النظير الضربي لمصفوفة مربعة (المعكوس الضربي للمصفوفة).

3.3.3 تمارين.

المعكوس الضربي للمصفوفات

3.3.1 المصفوفة المفردة وغير المفردة

لأى مصفوفة مربعة A من الرتبة ($n\times n$) ، يقال إنها غير مفردة إذا كان محدد المصفوفة A الذى رتبة (n) لا يساوي الصفر، أى أنه :

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

أما إذا كان محدد المصفوفة A الذى رتبة (n) يساوي الصفر فإن المصفوفة A تسمى مصفوفة مفردة أى أنه :

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

وتلعب المصفوفة غير المفردة دوراً هاماً فى إيجاد معكوس المصفوفة.

مثال (1) :

بين ما إذا كانت المصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مفردة أم غير مفردة

الحـــل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كالآتى:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3\,(-1) + 2(-1)$$

$$= -3 - 2 = -5 \neq 0$$

حيث أن :

$$\det(A) \neq 0$$

فالمصفوفة A مصفوفة غير مفردة.

مثال (2):

بين ما إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

مفردة أم غير مفردة

الحـــل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كالآتى:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\,(-1) - 2(-2) + (-1) = -3 + 4 - 1 = 0$$

حيث أن :

$$\det(A) = 0$$

فالمصفوفة A مصفوفة مفردة.

3.3.2 النظير الضربى لمصفوفة مربعة (المعكوس الضربي للمصفوفة)

إذا كانت A مصفوفة مربعة ، B مصفوفة مربعة من نفس الرتبة للمصفوفة A حيث

$$AB = BA = I$$

فإنه يقال أن المصفوفة B هي النظير الضربى للمصفوفة A أو المعكوس الضربي للمصفوفة A. لاحظ أن المصفوفة B وحيدة ويرمز لها بالرمز A^{-1} .

مثال (3) :

إذا كان
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

فإن

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

كذلك

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

أى أن

$$B = A^{-1}$$

لاحظ أنه إذا كانت B هي النظير الضربى للمصفوفة A فإن A هى النظير الضربى للمصفوفة B أي أن

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ملاحظة (1):

لإيجاد النظير الضربى للمصفوفة A نتبع الآتي

(1) نوجد محدد المصفوفة $A = |A|$.

(2) نكون المصفوفة B التي عناصرها هي المحددات المرافقة لكل عنصر في المصفوفة A موضوعة مكان نفس العنصر.

(3) نطبق قاعدة الإشارات على المصفوفة B.

(4) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} B^T$ بحيث $|A| \neq 0$.

الطريقة المبسطة للحصول على معكوس مصفوفة 2×2 .

بشكل عام يمكننا إيجاد معكوس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

باستخدام الطريقة

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ab - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال (4):

أوجد النظير الضربى للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

الحل:

أولاً توجد محدد المصفوفة $|A| = 0 - (-2) = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

مثال (5)

أوجد النظير الضربى للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

الحـــل:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{5} \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \mathbf{5} & 12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36-25 & -(12-5) & 5-3 \\ -(24-15) & 12-3 & -(5-2) \\ 10-9 & -(5-3) & +3-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ -9 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 الفصل الأول

الأحداثيات المستوية

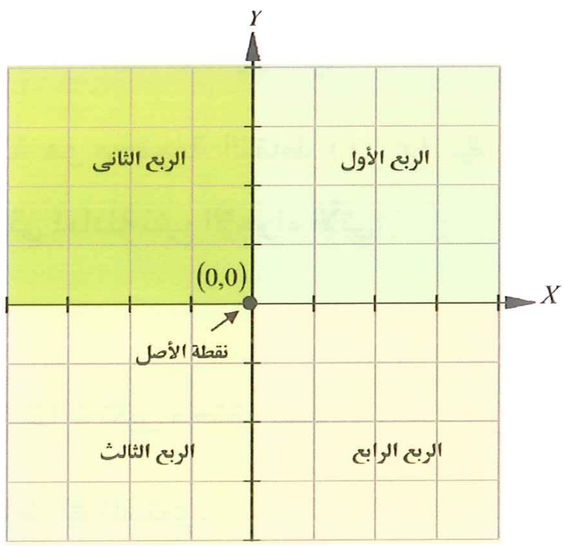
الإحداثيات المستوية

أي نقطة P في المستوى XY تحدد بزوج مرتب من الأعداد الحقيقية y ، x يُرمز له بالرمز (x, y) ، حيث: x تُسمى الإحداثي x للنقطة وَ y تُسمى الإحداثي y للنقطة.

مثال (1) :

$(1, 3)$ ، $(-1, 2)$ ، $(0, 5)$ ، $(3, -2)$ تمثل أزواج مرتبة.

لتمثيل نقطة $P = (x, y)$ نحتاج إلى رسم محورين متعامدين أحدهما أفقي ويُسمى محور X والآخر رأسي (عمودي) ويسمى محور Y ، يتقاطع المحوران في المنتصف عند نقطة تُسمى نقطة الأصل، والتي إحداثياتها $(0, 0)$. يحدد تقاطع المحورين أربع مناطق تُسمى الربع الأول ، الثاني، الثالث و الرابع، كما في الشكل (1) ، في الربع الأول يكون كلا الإحداثيين موجبين، أما في الربع الثاني فيكون الإحداثي x سالباً والإحداثي y موجباً، وفي الربع الثالث يكون كلاهما سالباً، وأخيراً في الربع الرابع يكون الإحداثي x موجباً والإحداثي y سالباً.



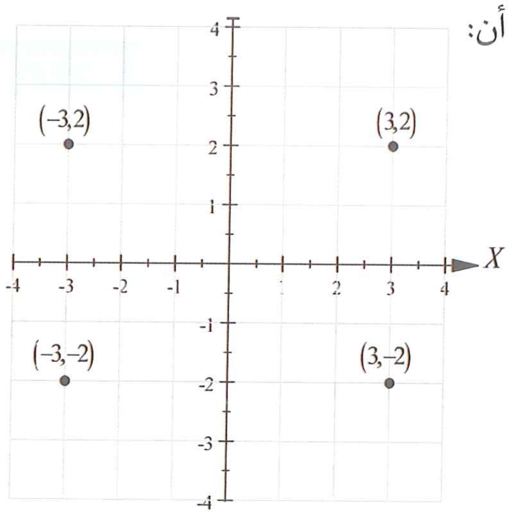
شكل (1)

مثال (2):

مثل النقاط الآتية على الإحداثيات المستوية (المتعامدة) $(3, 2)$، $(-3, 2)$ ، $(3, -2)$، $(-3, -2)$.

الحـــل:

نحدد النقاط كما في الشكل (2) مع ملاحظة أن:



شكل (2)

النقطة $(3, 2)$ تقع في الربع الأول.

النقطة $(-3, 2)$ تقع في الربع الثاني.

النقطة $(-3, -2)$ تقع في الربع الثالث.

النقطة $(3, -2)$ تقع في الربع الرابع.

4.1.2 الرسم البياني لمعادلة

الرسم البياني لمعادلة هو مجموعة النقاط (x , y) في المستوى التي تحقق المعادلة، وللحصول على الرسم البياني لمعادلة نتبع الإجراء الآتي:

1) وضع جدول لعدة نقاط تكون محققة للمعادلة.

2) تحديد هذه النقاط في المستوى.

3) نوصل بين هذه النقاط فنحصل على المنحنى الذي يمثل المعادلة.

4.1.1 نقاط التقاطع مع المحاور في المستوى

1) نقطة تقاطع المنحنى الممثل لمعادلة مع محور X تأخذ الشكل $(x,0)$ ونحصل عليها بالتعويض عن $y=0$ في المعادلة، ثم نوجد قيمة x.

2) نقطة تقاطع المنحنى الممثل لمعادلة مع محور Y تأخذ الشكل $(0,y)$ و نحصل عليها بالتعويض عن $x=0$ في المعادلة، ثم نوجد قيمة y.

مثال (3):

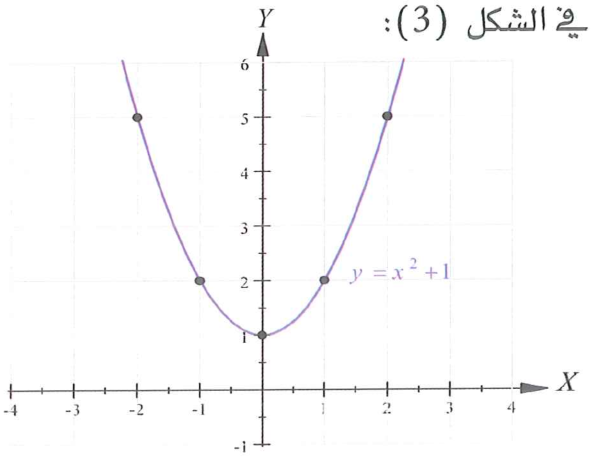
ارسم المعادلة $y=x^2+1$

الحــــل:

نكون جدول للحصول على النقاط التي تحقق المعادلة $y=x^2+1$ كالآتي:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

ثم نرسم كما في الشكل (3):



شكل (3)

المسافة بين نقطتين في المستوى

تعريف: (قانون المسافة بين نقطتين في المستوى)

المسافة بين نقطتين $P=(x_1,y_1)$ وَ $Q=(x_2,y_2)$ في المستوى تعطى بالقانون:

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

وتكون d هي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين في المستوى.

نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى

تعريف: (قانون نقطة المنتصف بين نقطتين في المستوى)

إحداثيات نقطة المنتصف M بين النقطتين $P=(x_1,y_1)$ وَ $Q=(x_2,y_2)$ في المستوى تعطى بالقانون:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال (4):

أوجد المسافة بين النقطتين $P=(-1,3)$ وَ $Q=(4,-2)$ و أوجد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين.

الحـــل:

المسافة بين النقطتين هي:

$$d(P,Q)=\sqrt{(4-(-1))^2+(-2-3)^2}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين هي:

$$M=\left(\frac{-1+4}{2},\frac{3+(-2)}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

مثال (5):

أوجد المسافة بين النقطتين $P=(-3,5)$ وَ $Q=(2,-2)$.

الحـــل:

المسافة بين النقطتين هي:

$$d(P,Q)=\overline{PQ}=\sqrt{(2-(-3))^2+(-2-5)^2}$$

$$=\sqrt{(2+3)^2+(-7)^2}$$

$$=\sqrt{(5)^2+(-7)^2}$$

$$=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}$$

مثال (6):

أوجد أحداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين $P=(-3,5)$ وَ $Q=(2,-2)$.

الحــــل:

أحداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين هي:

$$M=\left(\frac{2+(-3)}{2},\frac{-2+5}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

مثال (7):

أوجد المسافة بين النقطتين $P=(2,-2)$ وَ $Q=(7,-6)$.

الحــــل:

المسافة بين النقطتين هي:

$$d(P,Q)=\overline{PQ}=\sqrt{(7-2)^2+(-6-(-2))^2}$$

$$=\sqrt{(5)^2+(-4)^2}$$

$$=\sqrt{25+16}\;=\sqrt{20}$$

مثال (8):

أوجد أحداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين $Q=(4,-6)$ وَ $P=(2,-2)$.

الحــــل:

أحداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين هي:

$$M=\left(\frac{2+4}{2},\frac{-2+(-6)}{2}\right)=\left(\frac{6}{2},\frac{-8}{2}\right)=(3,-4)$$

نتيجة

مساحة المثلث الذى رؤوسه هى

$(x_1 , y_1),(x_2 , y_2), (x_3 , y_3)$

هى القيمة المطلقة لما يلى

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

مثال (9) :

أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه هى النقاط

$(0,0), (2,3), (6,-2)$

نقوم بحساب

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-4-18) = -11$$

وحيث أن القيمة المطلقة للعدد -11 هي 11 فإن مساحة المثلث تساوي 11.

نتيجة

شرط وقوع ثلاث نقاط $(x_1 , y_1),(x_2 , y_2), (x_3 , y_3)$ على استقامة واحدة هو

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (10) :

اثبت أن النقط الثلاث $(1,1), (5,2), (9,3)$ على استقامة واحدة

الحـــل:

نوجد قيمة المحدد وذلك بطرح الصف الأول من كلا من الصفين الثاني والثالث نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (8 - 8) = 0$$

إذن النقاط الثلاثة تقع على استقامة واحدة.

4.1.3

تمارين

(1) المسافة بين النقطتين

$P=(2\,,3)$ وَ $Q=(1,-3)$.

هي:

a $\sqrt{37}$ b $\sqrt{10}$

c 1 d $\sqrt{7}$

(2) المسافة بين النقطتين

$P=(-1\,,3)$ وَ $Q=(5,-3)$.

هي:

a $6\sqrt{2}$ b $\sqrt{18}$

c $\sqrt{5}$ d 4

(3) المسافة بين النقطتين

$Q=(4\,,3)$ وَ $P=(0,3)$.

هي: 4

a صواب b خطأ

(4) المسافة بين النقطتين

$Q=(-5\,,-3)$ وَ $P=(1,3)$.

هي: $6\sqrt{2}$

a صواب b خطأ

(5) المسافة بين النقطتين

$Q = (2, 0)$ وَ $P = (0, 3)$.

هي: 13

a	صواب	b	خطأ

(6) احداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين

$P = (-2, -2)$ وَ $Q = (4, 6)$.

هي:

a	(3, 4)	b	(2, 4)
c	(6, 8)	d	(1, 2)

(7) احداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين

$Q = (5, -3)$ وَ $P = (-1, 3)$.

هي: (2, 0)

a	صواب	b	خطأ

(8) احداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين

$Q = (2, 0)$ وَ $P = (0, 2)$.

هي: (2, 2)

a	صواب	b	خطأ

(9) احداثيات نقطة المنتصف بين النقطتين

$Q = (-3, -3)$ وَ $P = (3, 3)$.

هي: (0, 0)

a	صواب	b	خطأ

(10) النقطة $(-1, 3)$ تقع في الربع الثالث.

a	صواب	b	خطأ

(11) النقطة $(-1, -2)$ تقع في الربع الثالث.

a	صواب	b	خطأ

(12) النقطة $(1, -2)$ تقع في الربع الرابع.

a	صواب	b	خطأ

(13) النقطة $(1, 2)$ تقع في الربع الثاني.

a	صواب	b	خطأ

(14) النقطة $(-2, 3)$ تقع في الربع الثاني.

a	صواب	b	خطأ

(15) النقطة $(2, 3)$ تقع في الربع الثالث.

a	صواب	b	خطأ

(16) النقطة $(2, -3)$ تقع في الربع الثاني.

a	صواب	b	خطأ

(17) النقطة $(-2, -3)$ تقع في الربع الثالث.

a	صواب	b	خطأ

(18) النقطة $(4, 2)$ تقع في الربع.

a	الأول	b	الثاني
c	الثالث	d	الرابع

(19) النقطة $(2\ ,\ -5)$ تقع في الربع.

a	الأول	b	الثاني
c	الثالث	d	الرابع

(20) النقطة $(-2\ ,\ 6)$ تقع في الربع.

a	الأول	b	الثاني
c	الثالث	d	الرابع

(21) النقطة $(9\ ,\ 7)$ تقع في الربع.

a	الأول	b	الثاني
c	الثالث	d	الرابع

(22) النقطة $(4\ ,\ -9)$ تقع في الربع.

a	الأول	b	الثاني
c	الثالث	d	الرابع

(23) اوجد مساحة المثلث ABC الذي رؤوسه هي $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$ باستخدام طريقة المحددات

(24) مساحة المثلث الذي رؤوسه هي $(3,0)$, $(0,4)$, $(1,0)$ هي :

a	3	b	4	c	8	d	12

(25) اثبت أن النقط الثلاث $(-1,2)$, $(1,8)$, $(0,5)$ على استقامة واحدة

4.2 الفصل الثاني

معادلات الدرجة الأولى

معادلات الدرجة الأولى

تعريف : (المعادلة)

المعادلة هي تعبير رياضي يحتوي على متغير واحد أو أكثر مكتوب على صيغة طرفين بينهما علامة يساوي (=) وتُسمى هذه المتغيرات مجاهيل، وحل المعادلة يعني إيجاد قيم المجاهيل العددية التي تحقق التساوي. أي أن: الطرف الأيمن = الطرف الأيسر بعد التعويض بهذه القيم.

4.2.1 معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد

هي معادلة على الصورة $ax + b = 0, \quad a \neq 0$

ولكي نوجد قيمة المجهول x وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للعدد b وتصبح المعادلة على الصورة

$$ax + b - b = -b$$

$$ax = -b$$

ومن ثم بقسمة طرفي المعادلة على a نحصل على:

$$x = \frac{-b}{a}$$

مثال (1):

أوجد قيمة x في المعادلة $5x - 20 = 0$

الحـــل:

بإضافة 20 إلى طرفي المعادلة نحصل على :

$$5x - 20 + 20 = 20$$

$$5x = 20$$

وبقسمة طرفي المعادلة على 5 نحصل على:

$$x = \frac{20}{5} = 4$$

وللتحقق من صحة الحل نعوض عن x بالعدد 4 نحصل على:

الطرف الأيمن $= 5(4) - 20 = 20 - 20 = 0 =$ الطرف الأيسر.

مثال (2):

أوجد قيمة x في المعادلة $7x+35=0$

الحــــل:

بإضافة -35 لطرفي المعادلة نجد أن :

$$7x = -35$$

وبقسمة طرفي المعادلة على 7 نحصل على:

$$x = \frac{-35}{7} = -5$$

مثال (3):

أوجد قيمة x من المعادلة $-5x + 25 = 0$

الحــــل:

بإضافة -25 لطرفي المعادلة نجد أن :

$$-5x = -25$$

$$\Rightarrow x = \frac{-25}{-5} = 5$$

مثال (4):

أوجد حل المعادلة $3x + 5 = 14$

الحـــل:

نضع المعادلة في الصورة $3x = 14 - 5$

ومن ثم نحصل على:

$$3x = 9 \qquad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{3} = 3$$

مثال (5):

حل المعادلة

$$5(2x - 8) = 10 - 2\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

الحـــل:

نعمل على فك الأقواس لنحصل على:

$$10x - 40 = 10 - x - 6$$

نضيف كلا من x ، 40 لطرفي المعادلة نحصل على

$$10x + x = 10 - 6 + 40 \quad \Rightarrow \quad 11x = 44$$

بقسمة طرفي المعادلة على 11 يكون الناتج:

$$x = \frac{44}{11} = 4$$

مثال (6):

أوجد قيمة x في المعادلة $3x - 7 = 2x + 1$

الحـــل:

$$3x - 2x = 1 + 7 \Rightarrow x = 8$$

مثال (7):

حل المعادلة $-5\,(2 - x) = 15$

الحـــل:

نعمل على فك الأقواس فنحصل على: $-10 + 5x = 15$

$$5x = 15 + 10 \Rightarrow 5x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{5} = 5$$

4.2.2 حل معادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة كسر

مثال (8):

أوجد حل المعادلة

$$\frac{x-1}{3} = \frac{1}{2}$$

الحـــل:

حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الطرفين، وعليه نحصل على:

$$2(x-1) = (3)(1) \Rightarrow 2x-2=3 \Rightarrow 2x=2+3 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

مثال (9):

أوجد حل المعادلة

$$\frac{x-2}{2} + \frac{x+4}{3} = 0$$

الحـــل:

بضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين $2,3$ على الترتيب وهو 6 نحصل على:

$$6\left(\frac{x-2}{2}\right) + 6\left(\frac{x+4}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3(x-2)+2(x+4)=0$$

$$\Rightarrow 3x-6+2x+8=0 \Rightarrow 3x+2x=6-8$$

$$\Rightarrow 5x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{5}$$

مثال (10):

أوجد حل المعادلة الآتية

$$\frac{1}{3x} = \frac{1}{2x+5}$$

الحـــل:

حيث أن حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطتين نجد أن :

$$2x + 5 = 3x$$

$$\Rightarrow \quad 5 = 3x - 2x$$

$$\Rightarrow \quad 5 = x$$

مثال (11):

أوجد حل المعادلة الآتية

$$\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{5} = 0$$

الحـــل:

بضرب طرفي المعادلة في 15 نجد أن

$$5x - 6x - 3 = 0$$

$$-x - 3 = 0$$

$$x = -3$$

4.2.3 حل معادلات من الدرجة الأولى في مجهول واحد في صورة جذر

مثال (12):

حل المعادلة الآتية $\sqrt{3x-2}=5$

الحـــل:

بتربيع الطرفين نجد أن :

$$3x-2=5^2 \Rightarrow 3x-2=25$$
$$\Rightarrow 3x=27$$
$$\Rightarrow x=\frac{27}{3}=9$$

مثال (13):

حل المعادلة الآتية : $\sqrt[3]{x+1}=2$

الحـــل:

بتكعيب الطرفين نحصل على :

$$x+1=(2)^3=8 \Rightarrow x=8-1 \Rightarrow x=7$$

4.2.4 معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

إذا كان لدينا المعادلتين:

$$a_1x+b_1y=c_1 \quad (1)$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \quad (2)$$

عند حل المعادلتين يجب دراسة الحالات الثلاث الآتية:

1) الحالة الأولى: إذا كان $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ فإن المعادلتين ليس لهما حل.

2) الحالة الثانية: إذا كان $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ، فإنه يوجد للمعادلتين عدد لا نهائي من الحلول.

3) الحالة الثالثة: إذا كان $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ ، فإن للمعادلتين حل جبري وحيد.

مثال (14):

إثبت أن المعادلتين ليس لهم حل:

$$2x+3y+7=0$$

$$4x+6y+9=0$$

الحل:

بما أن $\frac{c_1}{c_2}=\frac{-7}{-9}=\frac{7}{9}$ ، $\frac{b_1}{b_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ، $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

إذاً ليس للمعادلتين حل.

مثال (15):

إثبت أن المعادلتين لهما عدد لا نهائي من الحلول:

$$2x+3y+7=0$$

$$6x+9y+21=0$$

الحـــل:

بما أن

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{1}{3}$$

إذا يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

مثال (16):

إثبت أن للمعادلتين حل وحيد:

$$3x+y-3=0$$

$$5x-y-13=0$$

الحـــل:

بما أن

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{5} \quad , \quad \frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{-1}=-1$$

نجد أن

$$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

إذاً يوجد حل جبري وحيد.

4.2.5 طرق حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين

أولاً: طريقة التعويض

1) نوجد قيمة x بدلالة y من أحدى المعادلتين.

2) نعوض بقيمة x في المعادلة الأخرى (أو العكس) فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد y (أو) x .

3) نحل هذه المعادلة بالطرق السابقة فنحصل على قيمة y (أو قيمة x).

4) نعوض عن قيمة y (أو قيمة x) في أي من المعادلتين فنحصل على قيمة x (أو قيمة y).

5) نتأكد من أن قيمة الحل تحقق المعادلتين.

ثانياً: طريقة الحذف

1) نجعل معاملي أحد المجهولين x أو y متساويين في المعادلتين مع اختلاف إشارتيهما، وذلك بضرب أحد المعادلتين أو كليهما في عدد ثابت.

2) نجمع المعادلتين فنحصل على معادلة في مجهول واحد.

3) نحل المعادلة في مجهول واحد فنحصل على قيمة أحد المجاهيل.

4) نعوض بتلك القيمة في أي من المعادلتين فنحصل على المجهول الآخر.

ثالثاً: طريقة كرامر

تطبق طريقة كرامر عندما تكون عدد المعادلات مساوية لعدد المجاهيل.

كيفية حل المعادلات باستخدام طريقة كرامر.

أولاً : نحسب محدد المعاملات والذي نرمز له بالرمز Δ ويكون على الصورة

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

حيث أن العمـود الأول هو معاملات المجهول x .

والعمود الثاني هو معاملات المجهول y .

ثانياً : لإيجاد قيمة المجهول x نحسب أولاً قيمة المحدد Δx وذلك باستبدال عناصر العمود الأول (معاملات x) في محدد المعاملات Δ بالثوابت ويكون على الصورة

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمة x هي :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

ثالثاً : لإيجاد قيمة المجهول y نحسب أولاً قيمة المحدد Δy وذلك باستبدال عناصر العمود الثاني (معاملات y) في محدد المعاملات Δ بالثوابت ويكون على الصورة.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

وتكون قيمة y هي:

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

عند حل المعادلات توجد ثلاث صور للحلول وهي :

1 – حل وحيد ذلك في حالة $\Delta \neq 0$.

2 - عدد لا نهائي من الحلول وذلك في حالة $\Delta = \Delta x = \Delta y = 0$.

3 - لا يوجد حل وذلك في حالة $\Delta = \Delta y = 0\ ,\ \Delta x \neq 0$ أو $\Delta = \Delta x = 0\ ,\ \Delta y \neq 0$

مثال (17):

حل المعادلتين الآتيتين:

$$x + 2y = 8 \quad (1)$$

$$-x - 3y = -13 \quad (2)$$

الحـــل:

بما أن $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$ ، فإن للمعادلتين حل وحيد.

أولاً: طريقة التعويض

من المعادلة (1) نجد أن $x = 8 - 2y$ ، نعوض في المعادلة (2) نجد أن:

$$-(8-2y)-3y=-13 \Rightarrow -8+2y-3y=-13$$

$$\Rightarrow -y=-13+8=-5 \Rightarrow y=5$$

بالتعويض عن قيمة y في المعادلة (1) نجد أن:

$$x+(2)(5) = 8 \quad \Rightarrow x=8-10 \quad \Rightarrow x=-2$$

إذاً الحل هو $x=-2, y=5$. (يمكن للطالب التأكد من صحة الحل إذا كان الحل يحقق المعادلتين).

ثانياً: طريقة الحذف

لاحظ أن معاملي x في المعادلتين متساويين مع اختلاف الإشارة، لذلك نجمع المعادلتين (1)، (2) فنجد أن:

$$-y=-5 \Rightarrow \quad y=5$$

بالتعويض في (1) نجد أن:

$$x+(2)(5)=8 \quad \Rightarrow \quad x=8-10 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

إذاً الحل هو $x=-2, y=5$.

ثالثاً: طريقة كرامر

نحسب محدد المعاملات Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3+2=-1 \neq 0$$

إذن للمعادلتين حل وحيد

نحسب المحدد Δx .

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = -24+26=2$$

نحسب المحدد Δy.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -13 \end{vmatrix} = -13+8=-5$$

وبالتالي يكون الحل على الصورة

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5$$

مثال (18):

حل المعادلتين الآتيتين:

$$2x + 5y = -21 \quad (1)$$

$$7x - 3y = -12 \quad (2)$$

الحـــل:

لاحظ أن المجهولين هما x,y . بما أن $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ، فإن للمعادلتين حل وحيد.

طريقة الحذف

لكي نتخلص من y نضرب المعادلة (1) في 3 والمعادلة (2) في 5 ، نحصل على:

$$6x + 15y = -63 \quad (3)$$

$$35x - 15y = -60 \quad (4)$$

بجمع المعادلتين (3) و (4) نحصل على:

$$41x = -123$$

$$\Rightarrow x = \frac{-123}{41} = -3$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد أن:

$$7(-3) - 3y = -12$$

$$\Rightarrow -3y = -12 + 21$$

$$\Rightarrow -3y = 9$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{-3} = -3$$

إذاً الحل هو $y = -3$ ، $x = -3,$

ثانياً: طريقة كرامر

نحسب محدد المعاملات Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -6-35=-41 \neq 0$$

إذن للمعادلتين حل وحيد

نحسب المحدد Δx.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -21 & 5 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} = 63+60=123$$

نحسب المحدد Δy.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -21 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} = -24+147=123$$

وبالتالي يكون الحل على الصورة

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{123}{-41} = -3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{123}{-41} = -3$$

مثال (19):

حل المعادلتين الآتيتين:

$$3x + y = 3 \qquad (1)$$

$$5x - y = 13 \qquad (2)$$

الحــل:

بطريقة الحذف

(بما أن $\frac{b_1}{b_2} \neq \frac{a_1}{a_2}$ ، فإن للمعادلتين حل وحيد)

لاحظ أن معاملي y في المعادلتين متساويين مع إختلاف الإشارة، بجمع المعادلتين (1) وَ (2) نجد أن:

$$8x = 16 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad (3)$$

بالتعويض بقيمة x من (3) في المعادلة (1) نحصل على:

$$3(2) + y = 3 \quad \Rightarrow \quad 6 + y = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - 6 \quad \Rightarrow \quad y = -3$$

إذاً الحل هو $x = 2 \;,\; y = -3$

مثال (20):

أوجد قيمة x وَ y من المعادلتين:

$$4x + 3y = 3 \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 11 \qquad (2)$$

الحــل:

باستخدام طريقة كرامر

نحسب المحدد Δ.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7 \neq 0$$

نحسب المحدد Δx.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 33 = -21$$

نحسب المحدد Δy.

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 44 - 9 = 35$$

وبالتالي يكون الحل على الصورة

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-21}{7} = -3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{35}{7} = 5$$

4.2.6 تمارين

(1) قيمة x في المعادلة $2x+7=1$ هي

a	$x=4$	c	$x=-3$
b	$x=3$	d	$x=-4$

(2) قيمة x في المعادلة $2-4x=0$ هي

a	$x=2$	c	$x=2$
b	$x=\frac{1}{2}$	d	$x=\frac{1}{2}$

(3) قيمة x في المعادلة $3x+1=0$ هي

a	$x=-\frac{1}{3}$	c	$x=-3$
b	$x=3$	d	$x=\frac{1}{3}$

(4) قيمة x في المعادلة $3x+1=2x+5$ هي

a	$x=4$	c	$x=-4$
b	$x=6$	d	$x=-6$

(5) قيمة x في المعادلة $7x+5=5x-13$ هي

a	$x=8$	c	$x=9$
b	$x=-8$	d	$x=-9$

(6) حل المعادلة $-2x-5=3x+7$ هو $x=-3$

a	صواب	b	خطأ

(7) حل المعادلة $2x+1=-3x+3$ هو $x=2$

a	صواب	b	خطأ

(8) قيمة x في المعادلة $\frac{2x+1}{2}-\frac{x}{3}=0$ هي

a	$x=-\frac{3}{4}$	c	$x=\frac{3}{4}$
b	$x=-\frac{4}{3}$	d	$x=\frac{4}{3}$

(9) قيمة x في المعادلة $\frac{3}{2x-5}+\frac{1}{x}=0$ هي

a	$x=1$	c	$x=2$
b	$x=-1$	d	$x=-2$

(10) قيمة x في المعادلة $\sqrt{x-3}=4$ هي

a	$x=19$	c	$x=13$
b	$x=1$	d	$x=7$

(11) قيمة x في المعادلة $\sqrt[3]{x-1}=3$ هي

a	$x=28$	c	$x=26$
b	$x=4$	d	$x=2$

(12) قيمة x في المعادلة $\sqrt{3x+1}-3=1$ هي

a	$x=1$	c	$x=2$
b	$x=5$	d	$x=-1$

(13) قيمة x في المعادلة $\sqrt{3x+7} = \sqrt{x+5}$ هو $x = -1$

a	صواب	b	خطأ

(14) قيمة x في المعادلة $\sqrt[3]{2x-2} = \sqrt[3]{x-1}$ هو $x = 1$

a	صواب	b	خطأ

(15) حل المعادلة $\sqrt[3]{x+1} + 3 = 1$ هو

a	$x = 1$	c	$x = 0$
b	$x = -9$	d	ليس لها حل

(16) إذا كان : $\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ فإن

a	$x = 2 \quad , \quad y = 2$	c	$x = -2 \quad , \quad y = 2$
b	$x = -2 \quad , \quad y = -2$	d	$x = 2 \quad , \quad y = -2$

(17) إذا كان : $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ فإن

a	$x = 2 \quad , \quad y = 3$	c	$x = 2 \quad , \quad y = -3$
b	$x = -2 \quad , \quad y = 3$	d	$x = -2 \quad , \quad y = -3$

(18) إذا كان : $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ فإن

a	$x = 3 \quad , \quad y = 3$	c	$x = 3 \quad , \quad y = -3$
b	$x = -3 \quad , \quad y = 3$	d	$x = -3 \quad , \quad y = -3$

(19) إذا كان : $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ فإن

a	$x = 2 \quad , \quad y = 3$	c	$x = 2 \quad , \quad y = -3$
b	$x = -2 \quad , \quad y = -2$	d	$x = -2 \quad , \quad y = 3$

(20) إذا كان : $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$ فإن

a	$x = 1 \quad , \quad y = 2$	c	$x = -1 \quad , \quad y = 2$
b	$x = -1 \quad , \quad y = -2$	d	$x = 1 \quad , \quad y = -2$

(21) إذا كان : $\begin{cases} 3x + 2y = 16 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$ فإن

a	$x = 3 \quad , \quad y = \frac{7}{2}$	c	$x = 3 \quad , \quad y = -\frac{7}{2}$
b	$x = -3 \quad , \quad y = \frac{7}{2}$	d	$x = -3 \quad , \quad y = -\frac{7}{2}$

(22) إذا كان : $\begin{cases} 5x + 2y = 12 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$ فإن

a	$x = 2 \quad , \quad y = 1$	c	$x = -2 \quad , \quad y = -1$
b	$x = -2 \quad , \quad y = 1$	d	$x = 2 \quad , \quad y = -1$

(23) إذا كان : $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ فإن

a	$x = -2 \quad , \quad y = 3$	c	$x = -2 \quad , \quad y = -3$
b	$x = 2 \quad , \quad y = 3$	d	$x = 2 \quad , \quad y = -3$

(24) إذا كان : $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ فإن

a	$x = \frac{7}{11}$, $y = \frac{2}{11}$	a	$x = \frac{7}{11}$, $y = -\frac{2}{11}$
b	$x = -\frac{7}{11}$, $y = \frac{2}{11}$	c	$x = -\frac{7}{11}$, $y = -\frac{2}{11}$

(25) إذا كان : $\begin{cases} 5x + y = -5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ فإن $y = \frac{25}{9}$, $x = \frac{-14}{9}$

a	صواب	b	خطأ

(26) إذا كان : $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ فإن

a	$x = \frac{5}{7}$, $y = \frac{2}{7}$	c	$x = \frac{5}{7}$, $y = -\frac{2}{7}$
b	$x = -\frac{5}{7}$, $y = \frac{2}{7}$	d	$x = -\frac{5}{7}$, $y = \frac{2}{7}$

(27) إذا كان : $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ فإن

a	$x = 2$, $y = 1$	c	$x = 2$, $y = -1$
b	$x = -2$, $y = 1$	d	$x = -2$, $y = -1$

حل معادلة الدرجة الأولى بيانياً

4.2.7 حل معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد بيانياً

طريقة حل معادلة الدرجة الأولى في مجهول واحد بيانياً:

1) نضع y تساوي المعادلة الصفرية المطلوب حلها.

2) نحدد على الأقل نقطتين تقعان على المستقيم.

3) نرسم المستقيم الذي يمثل هذه المعادلة.

4) حل المعادلة هو الإحداثي x لنقطة تقاطع المستقيم مع محور X .

مثال (1):

حل كلاً من المعادلات التالية بيانياً:

(1) $x - 2 = 0$

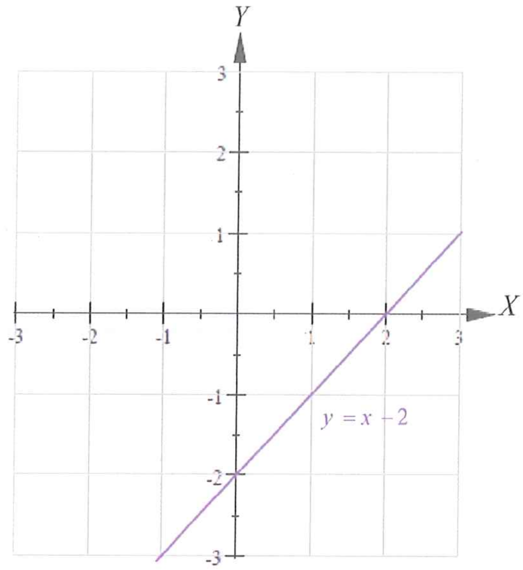
(2) $-3x + 2 = 0$

الحـــل:

1) نضع $y = x - 2$ ، نكون الجدول كالتالي:

x	-1	0	1	2
y	-3	-2	-1	0

نرسم الإحداثيات ونضع النقـاط في المستـوى XY. نجد أن تقاطع المستقيم $y = x - 2$ مع محور X عند النقطة $(2,0)$ وبالتالي حل المعادلة $x - 2 = 0$ هو الإحداثي x لنقطة التقاطع $x = 2$.



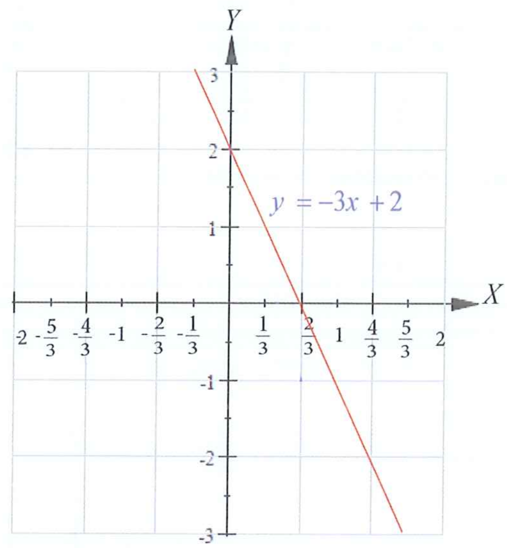
شكل (1)

2) نضع $y = -3x + 2$ نكون الجدول كالتالي:

x	0	1	2
y	2	-1	-4

نرسم الإحداثيات ونضع النقاط في المستـــوى XY.

نجد أن نقطة تقاطع المستقيم $y = -3x + 2$ مع محور X هي $\left(\frac{2}{3},0\right)$ وبالتالي حل المعادلة هو $x = \frac{2}{3}$.



شكل (2)

4.2.8 حل معادلات الدرجة الأولى في مجهولين بيانياً

حل معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين بيانياً عبارة عن إيجاد نقطة أو نقاط تقاطع المستقيمين الممثلين بالمعادلتين إن أمكن. فعدد الحلول إما واحد أو عدد لا نهائي من الحلول أو لا يوجد حل وهذا يعني أن المستقيمين لا يتقاطعان أبداً أي أنهما متوازيان.

طريقة حل معادلتين من الدرجة الأولى في مجهولين بيانياً:

1) نرسم الخطين المستقيمين.

2) حل المعادلة هو نقطة تقاطع المستقيمين.

مثال (2):

أوجد حل المعادلتين الآتية بيانياً:

$$x + y = 3 \quad (1)$$

$$x - y = 1 \quad (2)$$

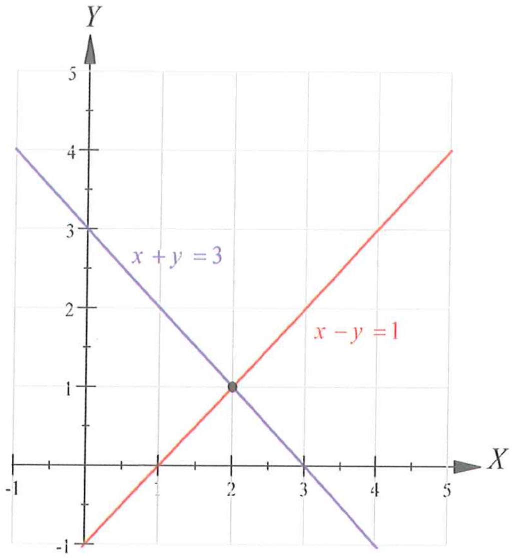
الحل:

نرسم المعادلة الأولى بيانياً بوضع $y = 3 - x$

x	-1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0

نرسم المعادلة الثانية بيانياً بوضع $y = x - 1$

x	0	1	2	3
y	-1	0	1	2



من الرسم نجد أن نقطــة تقاطع المستقيمين هي $(2,1)$.

إذاً حل المعادلتين هو $x = 2\ ,\ y = 1$.

مثال (3):

أوجد حل المعادلتين الآتيتين بيانياً:

$$x + 3y = 3 \quad (1)$$

$$-x + 4y = 4 \quad (2)$$

الحـــل:

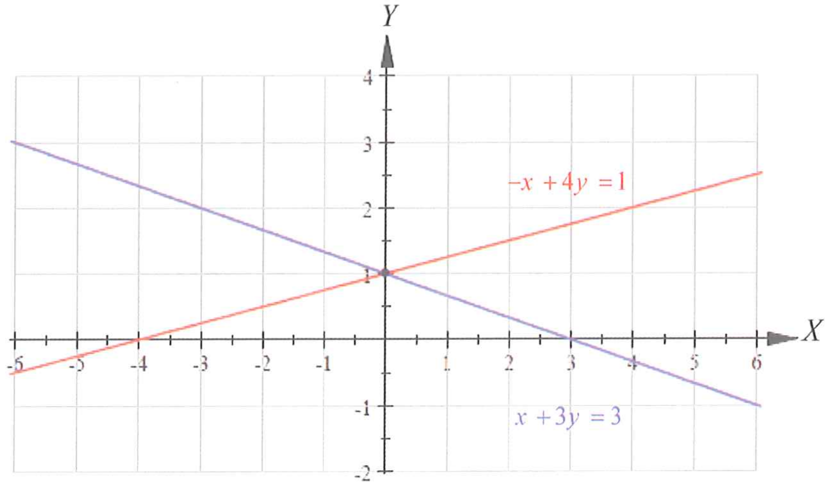
نرسم المعادلتين بيانياً كالآتي:

المعادلة الأولى $y = \dfrac{-x}{3} + 1$

x	-3	0	3
y	2	1	0

المعادلة الثانية $y = \dfrac{x}{4} + 1$

x	-4	0	4
y	0	1	2



شكل (4)

من الرسم نجـد أن نقطـة تقاطـع المستقيمين هـي $(0,1)$ ، أي أن حـل المعادلتين هــو $x = 0$ ، $y = 1$.

4.2.9 تمارين

أوجد حل المعادلات التالية بيانياً:

(1) $3x + 4 = 1$

(2) $7x - 3 = 11$

(3) $3x - 3 = 7$

(4) $2x + 3 = 9$

(5) $3x - 8 = 1$

(6) $2x - 7 = 4x - 2$

(7) $2x - 2 = 8$

(8) $2x + 6 = 4$

(9) $3x - 1 = 5$

(10) $-2x + 3 = 12$

حل المعادلتين التاليتين بيانياً في كل مما يلي:

(11) $x + y = 7$, $x - y = 3$

(12) $x + y = 7$, $2x + 3y = 18$

(13) $x - y = -3$, $2x + y = 6$

(14) $x - y = 4$, $x + 3y = 12$

4.3

الفصل الثالث

معادلات الخط المستقيم

معادلات الخط المستقيم

تعريف :

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي : -

$$ax+by+c=0 \ , \quad a, b, c \in R$$

(حيث $b \neq 0$ أو $a \neq 0$)

تعريف :

ميل الخط المستقيم $ax+by+c=0$ يعطي

بالعلاقة

$$m=-\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=-\frac{a}{b}$$

حيث $b \neq 0$ والميل هو m .

مثال (1):

أوجد ميل الخط المستقيم $3x+2y+5=0$

الحـــل:

ميل الخط المستقيم يعطي بالعلاقة

$$m=-\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=-\frac{3}{2}$$

مثال (2):

أوجد ميل الخط المستقيم $2x - 4y = 1$

الحـــل:

ميل الخط المستقيم يعطي بالعلاقة

$$m = -\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = -\frac{2}{(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

تعريف :

ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (x_1 , y_1) و (x_2 , y_2)

يعطي بالعلاقة

$$m = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث m هي الميل .

مثال (3):

أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3 , 5) , (7 , 8)$

الحـــل:

نفرض أن

$(x_1 , y_1) = (3 , 5)$

$(x_2 , y_2) = (7 , 8)$

حيث أن ميل الخط المستقيم يعطي بالعلاقة

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{8 - 5}{7 - 3} = \frac{3}{4}$$

مثال (4):

أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين

$(-8 , 10) , (-3 , 5)$

الحـــــل:

نفرض أن

$(x_1 , y_1) = (-8 , 10)$

$(x_2 , y_2) = (-3 , 5)$

حيث أن الميل يعطي بالعلاقة

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 10}{-3 - (-8)} = \frac{-5}{-3 + 8} = \frac{-5}{5} = -1$$

حالات خاصة : -

1 - إذا كان الخط المستقيم افقياً (أي أنه يوازي محور X) يكون الميل منعدم $m = 0$.

2 - إذا كان الخط المستقيم رأسياً (أي أنه يوازي محور Y) يكون الميل غير معرّف.

3 - إذا كان الخط المستقيم يميل في جزئه العلوي نحو اليمين يكون الميل موجباً.

4 - إذا كان الخط المستقيم يميل في جزئه العلوي نحو اليسار يكون الميل سالباً.

4.3.1 الصور المختلفة لمعادلات الخط المستقيم

تعريف:

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطع من محور الصادرات هي:

$$y = mx + b$$

حيث أن m هي ميل المستقيم و b هي الجزء المقطوع من محور الصادات Y.

مثال (5):

أوجد ميل الخط المستقيم $y = 3x + 5$.

الحل:

حيث أن ميل الخط المستقيم $y = mx + b$ هو m (معامل x)

فإن ميل المستقيم $y = 3x + 5$ هو $m = 3$.

مثال (6):

أوجد طول الجزء المقطوع من محور الصادات $y = 3x - 4$.

الحل:

حيث أن الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم الذي ميل m ويقطع جزء b من محور الصادات هي:

$$y = mx + b$$

إذا الجزء المقطوع من محور الصادات هو

$$b = -4$$

وبالتالي يكون طول الجزء المقطوع من محور الصادات مساوي

$$|b| = |-4| = 4$$

قاعدة 1:

إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة

$$y = mx + b$$

فإن:

(1) طول الجزء المقطوع من محور الصادات هي : $|b|$

(2) طول الجزء المقطوع من محور السينات هي : $\left|\frac{-b}{m}\right|$

مثال (7):

أوجد طول الجزء المقطوع من محور السينات بواسطة الخط المستقيم $y = 4x + 20$.

الحــــل:

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع $y = 0$ في معادلة الخط المستقيم $y = 4x + 20$ وبالتالي نجد أن :

$$0 = 4x + 20$$

$$\Rightarrow 4x = -20 \quad \Rightarrow x = -\frac{20}{4} = -5$$

إذا المستقيم يقطع جزء طوله

$$|-5| = 5$$

من محور السينات X .

مثال (8):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله -3 ويقطع جزء قدره -4 من محور الصادات.

الحـــل:

المعادلة العامة للخط المستقيم الذي ميل m ويقطع جزء قدره b من محور الصادات تعطي بالعلاقة.

$$y = mx + b$$

إذا المعادلة المطلوبة هي :

$$y = -3x - 4$$

مثال (9):

أوجد ميل الخط المستقيم والجزء المقطوع من محور Y.

$$3y = 9x - 14$$

الحـــل:

نضع المعادلة في الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم الذي ميل m ويقطع جزء من قدره b من محور Y وهي $y = mx + b$

إذا بالقسمة على 3 نجد أن .

$$y = \frac{9}{3}x - \frac{14}{3}$$

$$= 3x - \frac{14}{3}$$

وبالتالي فإن الميل $m = 3$.

والجزء المقطوع من محور Y هو $b = -\frac{14}{3}$.

قاعدة 2:

إذا كانت معادلة الخط المستقيم على الصورة

$$a\,x + b\,y + c = 0$$

فإن :

(1) الجزء المقطوع من محور الصادات Y هو $\frac{-c}{b}$. وذلك بوضع $x = 0$ في المعادلة ثم حلها.

(2) الجزء المقطوع من محور السينات X هو $\frac{-c}{a}$. وذلك بوضع $y = 0$ في المعادلة ثم حلها.

مثال (10):

أوجد الجزء المقطوع من محور الصادات Y بواسطة الخط المستقيم.

$$4\,y + 3\,x - 36 = 0$$

الحـــل:

لإيجاد الجزء المقطوع من محور الصادات Y نضع $x = 0$ في المعادلة

$$4\,y + 3\,x - 36 = 0$$

وبالتالي نجد أن :

$$4y - 36 = 0 \Rightarrow 4y = 36$$

$$\Rightarrow y = \frac{36}{4} = 9$$

إذا الجزء المقطوع من محور الصادات هو 9 .

حل آخر

حيث إن :

$$a = 3 \quad , \quad b = 4 \quad , \quad c = -36$$

فإن الجزء المقطوع من محور الصادات يعطي بالعلامة $-\frac{c}{b}$.

$$\frac{-c}{b} = -\left(\frac{-36}{4}\right) = 9$$

مثال (11):

أوجد الجزء المقطوع من محور السينات X بواسطة الخط المستقيم.

$$4y + 3x = 36$$

الحل:

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات X نضع $y = 0$ في المعادلة

$$4y + 3x = 36$$

وبالتالي نجد أن :

$$3x = 36$$

$$\Rightarrow x = \frac{36}{3} = 12$$

إذا الجزء المقطوع من محور السينات هو 12 .

تعريف:

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (x_1 , y_1) وميله يساوي m هي :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y = m\,(x - x_1) + y_1$$

مثال (12):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ ويمر بالنقطة $(4 , -3)$.

الحــــل:

حيث أن معادلة الخط المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

حيث أن : $(x_1 , y_1) = (4 , -3)$ والميل $m = \frac{1}{3}$.

إذا معادلة المستقيم هي :

$$\frac{y - (-3)}{x - 4} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{y + (3)}{x - 4} = \frac{1}{3}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد أن:

$$3y + 9 = x - 4$$

$$\Rightarrow 3y = x - 13 \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{3}\,x - \frac{13}{3}$$

مثال (13):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2,2)$ وميله $\frac{1}{2}$.

الحل:

$$m=\frac{1}{2}\ ,\ (x_1\ ,y_1)=(-2,2)$$

معادلة الخط المستقيم هي:

$$(y-y_1)=m\,(x-x_1)\quad\Rightarrow\quad y-2=\frac{1}{2}\ (x-(-2))$$

$$\Rightarrow\quad y-2=\frac{1}{2}\ (x+2)$$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x+1+2$$

$$\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x+3$$

3. معادلة الخط المستقيم بدلالة نقطتين عليه

إذا كان الخط المستقيم يمر بالنقطتين $(x_1\ ,y_1)$ ، $(x_2\ ,y_2)$ ، فإن معادلته:

$$\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}$$

مثال (14):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(-2,-1)$ ، $(-3,8)$.

الحل:

$$(x_1\ ,y_1)=(-2\ ,-1)$$

$(x_2 , y_2) = (-3 , 8)$

معادلة الخط المستقيم هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \quad \frac{y + 1}{x + 2} = \frac{8 + 1}{-3+2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y + 1}{x + 2} = -9$$

$$\Rightarrow \quad y + 1 = -9(x + 2)$$

$$\Rightarrow \quad y = -9x - 18 - 1$$

$$\Rightarrow \quad y = -9x - 19$$

مثال (15):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2,8) ، (4,3) .

الحـــل:

$(x_1 , y_1) = (2 , 8)$

$(x_2 , y_2) = (4 , 3)$

معادلة الخط المستقيم هي:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \quad \frac{y - 8}{x - 2} = \frac{3 - 8}{4 - 2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y - 8}{x - 2} = \frac{-5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y-8=-\frac{5}{2}(x-2)$$

$$\Rightarrow \quad y=-\frac{5}{2}x+5+8$$

$$\Rightarrow \quad y=-\frac{5}{2}x+13$$

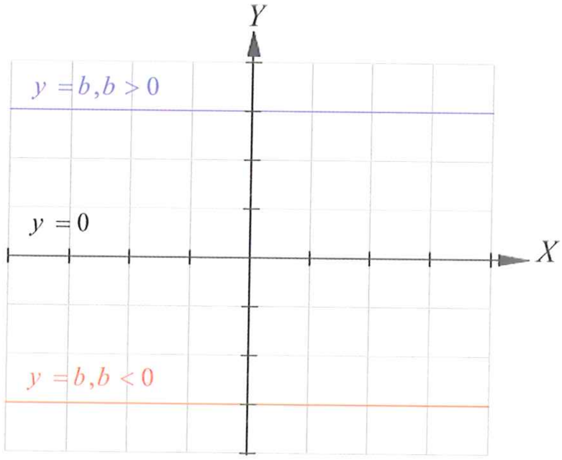
ملاحظة (1):

1) معادلة محور X هي $y=0$.

2) معادلة محور Y هي $x=0$.

4. معادلة المستقيم الأفقي

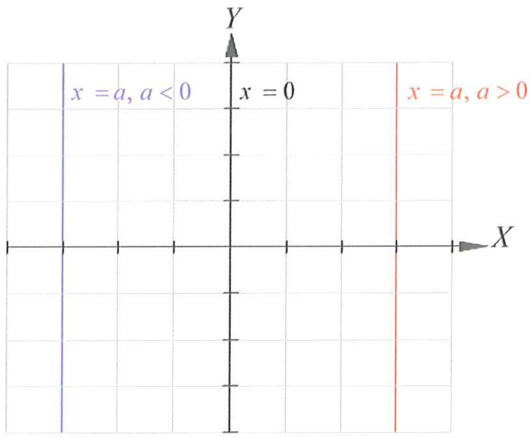
معادلة الخط المستقيم الأفقي الموازي لمحور X ويبعد عنه مسافة مقدارها b هي $y=b$، بحيث إذا كانت $b>0$ ، فإن الخط المستقيم يوازي محور X ويبعد عنه مسافة مقدارها b إلى الأعلى أما إذا كانت $b<0$ ، فإن الخط المستقيم يوازي محور X ويبعد عنه مسافة مقدارها b إلى الأسفل.



شكل (1)

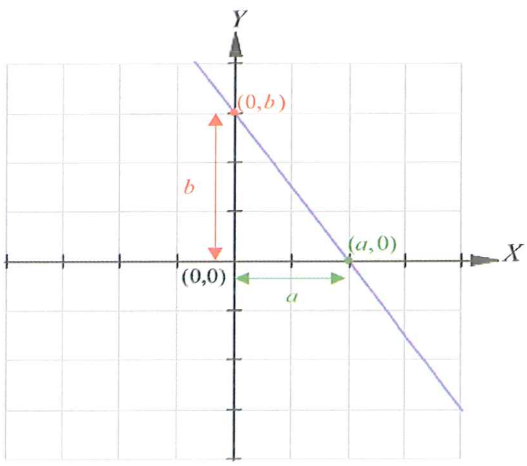
5. معادلة المستقيم الرأسي

معادلة الخط المستقيم الرأسي الموازي لمحور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها a هي $x=a$، بحيث إذا كانت $a>0$ ، فإن الخط المستقيم يوازي محور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها a إلى اليمين أما إذا كانت $a<0$ ، فإن الخط المستقيم يوازي محور Y ويبعد عنه مسافة مقدارها a إلى اليسار.



شكل (2)

6. معادلة الخط المستقيم الذي يقطع محوري X ، Y بمقداري a، b على الترتيب تُعطى من $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$



شكل (3)

مثال (16):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع الجزئين $3,2$ من محوري Y، X على الترتيب.

الحـــل:

المعادلة هي

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

مثال (17):

أوجد الجزئين المقطوعين من محوري X، Y ، إذا كانت معادلة المستقيم $2x+3y=6$.

الحـــل:

نقسم طرفي المعادلة على 6 فنحصل على:

$$\frac{2x}{6}+\frac{3y}{6}=\frac{6}{6} \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

إذاً الجزء المقطوع من محور X يساوي 3 والجزء المقطوع من محور Y هو 2 .

4.3.2 نظرية (الموازي والعمودي)

1) يتوازى المستقيمان إذا كان ميل الأول يساوي ميل الثاني

أي أن:

$$m_1=m_2$$

2) يتعامد المستقيمان إذا كان حاصل ضرب ميلهما يساوي -1

أي أن:

$$m_1 m_2 = -1 \quad \text{أو} \quad m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

أو ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

مثال (18):

أوجد معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $2x + 3y + 7 = 0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$.

الحـــل:

ميل الخط المستقيم $2x + 3y + 7 = 0$ هو $m_1 = \frac{-2}{3}$

بما أن المستقيمان متوازيان فإن $m_1 = m_2$ ، إذاً $m_2 = \frac{-2}{3}$

وبما أن هذا الخط يمر بالنقطة $(1,2)$ ، إذاً معادلته تعطى من:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{x-1} = \frac{-2}{3}$$

$$3y - 6 = -2x + 2$$

$$2x + 3y - 8 = 0$$

مثال (19):

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $3x - 4y + 9 = 0$ ويمر بالنقطة $(1,2)$.

الحـــل:

ميل المستقيم $3x-4y+9=0$ هو: $m_1=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

بما أن المستقيمان متعامدان، إذاً: $m_2=\frac{-1}{m_1}=-\frac{4}{3}$

ومعادلة المستقيم العمودي هي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{y-2}{x-1}=\frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad 3y-6=-4x+4 \quad\Rightarrow\quad 4x+3y-10=0$$

مثال (20):

أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطة تقاطع الخطين المستقيمين $x+y=3$، $x-y=1$ ويوازي الخط المستقيم $2x-3y+5=0$.

الحـــل:

لايجاد نقطة تقاطع المستقيمين نحل المعادلتين :

$$\left.\begin{array}{lr} x+y=3 & (1) \\ x-y=1 & (2) \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$\begin{array}{l} 2x=4 \\ x=2 \end{array}$$

بالتعويض في المعادلة (1):

$$2+y=3 \quad\Rightarrow\quad y=1$$

إذاً نقطة التقاطع هي $(2,1)$.

بما أن الخط المستقيم المعطى $2x - 3y + 5 = 0$ ، إذاً ميله:

$$m_1 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

وبالتالي فإن ميل المستقيم الموازي $m_2 = m_1 = \dfrac{2}{3}$

إذاً معادلة المستقيم المطلوب هي:

$$\frac{y-1}{x-2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad 3y - 3 = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad -2x + 3y + 1 = 0$$

4.3.3 تمارين

(1) ميل الخط المستقيم $3x - 3y + 7 = 0$ هو $m = 1$

a صواب　　b خطأ

(2) ميل الخط المستقيم $7x - 14y - 2 = 0$ هو $m = ½$.

a صواب　　b خطأ

(3) ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(3 , 6)$ ، $(5 , -8)$ هو .

a $m = -7$　　b $m = 7$

c $m = -\frac{1}{2}$　　d $m = \frac{1}{2}$

(4) ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(3 , 6)$ ، $(1 , 12)$ هو .

a $m = 2$　　b $m = -3$

c $m = -\frac{1}{2}$　　d $m = \frac{1}{2}$

(5) ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(-1 , -3)$ ، $(5 , -3)$ هو -4.

a صواب　　b خطأ

(6) الخط المستقيم الذي ميله 3 ، ويقطع جزء قدره -5 من محور الصادات هي:

a $y = 3x + 5$　　b $y = 3x - 5$

c $y = -5x - 3$　　d $y = -5x + 3$

(7) الخط المستقيم الذي ميله -2 ، ويقطع من الجزء السالب من محور الصادات Y جزءاً قدره 7 هي: $y = -2x + 7$

a صواب b خطأ

(8) ميل الخط المستقيم $2y = 4x + 3$ هو $m = 4$.

a صواب b خطأ

(9) الجزء المقطوع من محور الصادات Y بواسطة الخط المستقيم $2y = 4x + 3$ هو 3 .

a صواب b خطأ

(10) الجزء المقطوع من محور السينات X بواسطة الخط المستقيم $2y = 4x + 3$ هو $-\frac{3}{4}$.

a صواب b خطأ

(11) طول الجزء المقطوع من محور الصادات Y بواسطة الخط المستقيم $3y = 7x - 9$ هو 3 .

a صواب b خطأ

(12) طول الجزء المقطوع من محور السينات X بواسطة الخط المستقيم $y = 3x + 21$ هو 7 .

a صواب b خطأ

(13) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(1,2)$ وميله 3 هي $y = 3x - 1$.

a صواب b خطأ

(14) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(2, -5)$ وميله -4 هي .

a	$y = 4x + 3$	b	$y = -4x + 3$
c	$y = 4x - 3$	d	$y = -4x - 3$

(15) ميل الخط المستقيم $2y - 4x + 7 = 0$ هو $m = 2$.

a	صواب	b	خطأ

(16) ميل الخط المستقيم $3x + 2y - 8 = 0$ هو $m = -\frac{3}{4}$.

a صواب   b خطأ

(17) ميل الخط المستقيم $3y + 7 = 0$ هو $m = 0$.

a صواب   b خطأ

(18) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(1 , 1)$ و $(2 , -2)$ هي :

a	$y = -3x - 4$	b	$y = 3x + 4$
c	$y = -3x + 4$	d	$y = 3x - 4$

(19) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(-3 , 6)$ و $(1 , 12)$ هي: $y = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2}$

a صواب   b خطأ

(20) المستقيمان $y = 2x - 1$ و $y = -2x + 1$ متوازيان.

a صواب   b خطأ

(21) المستقيمان $3y = 6x + 1$ و $y = 2x + 1$ متوازيان.

a صواب	b خطأ

(22) المستقيمان $y = 2x + 7$ و $y = \frac{1}{2}x - 7$ متعامدان.

a صواب	b خطأ

(23) المستقيمان $y = \frac{1}{3}x + 5$ و $y = -3x + 10$ متعامدان.

a صواب	b خطأ

4.4

الفصل الرابع

معادلات الدرجة الثانية

معادلات الدرجة الثانية

4.4.1 حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد جبرياً

في هذا الفصل سنتعرف على كيفية حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد وهي على الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية، $a \neq 0$.

وحلها يُعطى من القانون العام وهو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وما تحت الجذر $(b^2 - 4ac)$ يُسمى المميز، ويوجد ثلاث حالات للحل:

1) إذا كان $b^2 - 4ac > 0$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان.

2) إذا كان $b^2 - 4ac = 0$ فإن للمعادلة جذران حقيقيان متساويان.

3) إذا كان $b^2 - 4ac < 0$ فليس للمعادلة جذور حقيقية.

مثال (1):

حل المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$

الحـــل:

باستخدام القانون العام حيث:

$$a = 1 \ , \ \ b = -3 \ , c = 2$$

أولاً نحسب المميز:

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1>0$$

إذاً للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان هما:

$$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad , \quad x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

مثال (2):

حل المعادلة $2x^2 + 2x = 1$

الحـــل:

نضع المعادلة في الصورة القياسية $2x^2 + 2x - 1 = 0$

باستخدام القانون العام حيث:

$$a = 2 \ , \ \ b = 2 \ , c = -1$$

أولاً: نوجد المميز:

$$b^2 - 4ac = 4 - 4(2)\,(-1) = 4 + 8 = 12>0$$

إذاً للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \ , \ x_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$$

مثال (3):

حل المعادلة:

$$x^2 - 5x - 4 = 0$$

الحـــل

باستخدام القانون العام حيث

$$a = 1\ ,\ \ b = -5\ ,\ c = -4$$

أولاً : نحسب المميز

$$b^2 - 4ac = 25 - 4(1)(-4)$$

$$= 25 + 16 = 41$$

إذا للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}$$

مثال (4):

حل المعادلة $x^2 = -2x - 1$

الحـــل:

نضع المعادلة في الصورة القياسية $x^2 + 2x + 1 = 0$

باستخدام القانون العام حيث:

$$a = 1 \ , \ b = 2 \ , c = 1$$

أولاً نوجد المميز:

$$b^2 - 4ac = 4 - 4\,(1)\,(1) = 0$$

إذاً هناك حلان متساويان حقيقيان (جذر واحد مكرر)

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2(1)} = \frac{-2}{2} = -1$$

لاحظ أن: $x_2 = -1 \ , \ x_1 = -1$.

مثال (5):

حل المعادلة $x^2 + x + 5 = 0$

الحـــل:

باستخدام القانون العام حيث:

$$a = 1 \ , \ b = 1 \ , c = 5$$

أولاً: نحسب المميز $b^2 - 4ac = 1 - 4\,(1)(5) = 1 - 20 = -19 < 0$

إذاً لا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

حالات خاصة:

1) إذا كانت $c = 0$ تصبح معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد على الصورة:

$$ax^2 + bx = 0$$

ولحلها نتبع الطريقة التالية:

$$x\,(ax+b)=0$$

$$x_1=0\ ,\ ax_2+b=0 \Rightarrow x_2=\frac{-b}{a}$$

2) إذا كانت $b=0\ ,\ c=0$ فإن المعادلة تصبح على الصورة $ax^2=0$ ، ويكـون الحل كالتالي:

$$x_1=x_2=0$$

3) إذا كانت $b=0$ فإن المعادلة تصبح على الصــــورة $ax^2+c=0$ ، ويكون الحـــل كالتالي:

$$ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\frac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

يشترط أن يكون $\frac{c}{a}<0$ حتى يكون للمعادلة جذران حقيقيان.

ملاحظة (1):

في المعادلات التي يمكن فيها تحليل المقدار الثلاثي فإننا نستخدم إحدى طرق التحليل.

مثال (6):

حل المعادلة الآتية $x^2-2x-3=0$

الحـــل:

أولاً: طريقة التحليل:

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-3)=0 \Rightarrow x=3\,, \qquad (x+1)=0 \Rightarrow x=-1$$

إذا حل المعادلة هو $x_1=3,\ x_2=-1$

ثانياً: طريقة القانون العام:

نحسب المميز حيث أن:

$$a=1\,,\ b=-2\,,\ c=-3$$

$$b^2-4ac=\ (-2)^2-4(1)\,(-3)=4+12=16$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{+2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1=\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3 \quad , x_2=\frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

إذاً حل المعادلة هو $x_1=3,\ x_2=-1$.

مثال (7):

حل المعادلة الآتية $3x^2+5x-2=0$

الحـــل:

أولاً: طريقة التحليل (المقص):

$$(3x-1)\,(x+2)=0$$

$$\Rightarrow \quad (3x-1)=0 \quad \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \quad , \quad (x+2)=0 \Rightarrow x=-2$$

إذاً الحلان هما $x_2 = -2$, $x_1 = \frac{1}{3}$.

ثانياً: طريقة القانون العام:

نحسب المميز حيث أن:

$a = 3\ ,\ b = 5\ ,\ c = -2$

$b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{6}$

$\Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = \dfrac{-5-7}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2,$

إذاً الحلان هما $x_2 = -2$, $x_1 = \frac{1}{3}$.

مثال (8):

حل المعادلة $x^2 - 7x = 0$

الحل:

$x^2 - 7x = x\,(x - 7) = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 - 7 = 0 \ \Rightarrow x_2 = 7$

إذاً الحلان هما $x_1 = 0,\ x_2 = 7$.

مثال (9):

حل المعادلة $x^2 + 4x = 0$

مثال (14):

حل المعادلة الآتية

$$\frac{x^2}{5} = \frac{x + \frac{2}{5}}{3}$$

الحـــل:

باستخدام حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين

$$3x^2 = 5x + 5\left(\frac{2}{5}\right) \Rightarrow 3x^2 = 5x + 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (3x+1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (3x+1) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}, x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

إذاً حل المعادلة هو $x = 2$ ، $x = \frac{-1}{3}$.

مثال (15):

حل المعادلة $\frac{2x}{3} + \frac{x^2 - 5}{6} = 0$

الحـــل:

بضرب المعادلة في 6

$$6\left(\frac{2x}{3}\right) + 6\left(\frac{x^2 - 5}{6}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2(2x) + x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x + x^2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x+5=0 \Rightarrow x=-5, \quad x-1=0 \Rightarrow x=1.$$

إذن حل المعادلة هو

$$x=1 \;, x=-5$$

4.4.3 حل معادلات من الدرجة الثانية في صورة جذر

مثال (16):

حل المعادلة $\sqrt{2x-9}=x-4$

الحــــل:

بتربيع الطرفين نتخلص من الجذر

$$\left(\sqrt{2x-9}\right)^2=(x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x-9=x^2-8x+16$$

$$\Rightarrow x^2-8x-2x+16+9=0 \Rightarrow x^2-10x+25=0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-5)=0 \quad \Rightarrow x_1=x_2=5$$

مثال (17):

حل المعادلة $\sqrt{x^2-3x}=2$

الحــــل:

بتربيع الطرفين

$$x^2-3x=4$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow (x-4)=0 \Rightarrow x=4, \quad x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

مثال (18):

حل المعادلة $\sqrt[3]{x^2+2x}=2$.

الحـــل:

بتكعيب الطرفين

$$x^2+2x=2^3$$

$$x^2+2x=8$$

$$x^2+2x-8=0$$

باستخدام القانون العام حيث

$$a=1\,,\ b=2\,,\ c=-8$$

نحسب المميز

$$b^2-4ac=4-4(1)(-8)=4+32=36>0$$

$$\therefore x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+6}{2}=\frac{4}{2}=2, \qquad x_2=\frac{-2-6}{2}=\frac{-8}{2}=-4$$

4.4.4 حل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانياً

لحل معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانياً، لا بد من كتابة المعادلة على الصورة العامة:

$$y = ax^2 + bx + c$$

ثم نرسم المنحنى، حل المعادلة هو الإحداثي x لنقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات .

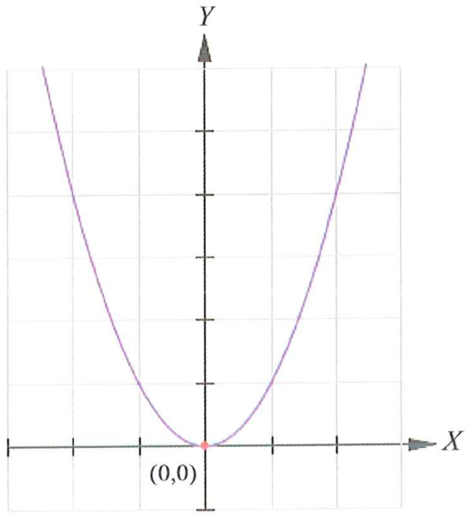
مثال (19):

حل المعادلة $x^2 + a = 0$ بيانياً.

الحـــل:

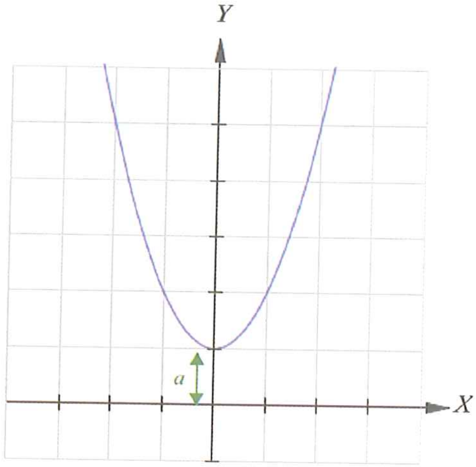
نكتب المعادلة على الصورة $y = x^2 + a$ ونرسم المنحنى في الحالات التالية:

1) إذا كانت $a = 0$ فإن المنحنى يمر بنقطة الأصل ويكون الحل هو $x = 0$



شكل (1)

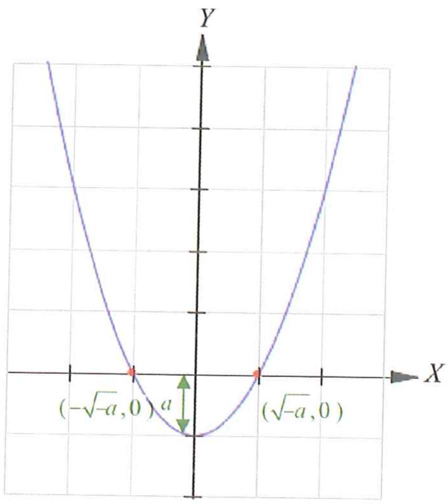
2) إذا كانت $a > 0$ فإن المنحنى يكون كما في الشكل (2):



شكل (2)

وفي هذه الحالة لا يوجد حل للمعادلة في R لأن المنحنى لا يقطع محور X في أي نقطة.

3) إذا كانت $a < 0$ فإن المنحنى يكون كما في الشكل (3):



شكل (3)

وفي هذه الحالة الحل هو نقاط تقاطع المنحنى مع محور X أي أن حل المعادلة $x^2 + a = 0$

هو: $x = \sqrt{-a}, x_2 = -\sqrt{-a}$

4.5 تمارين

(1) المميز للمعادلة $x^2 - x - 2 = 0$ هو 9 .

a صواب b خطأ

(2) المميز للمعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$ هو 1 .

a صواب b خطأ

(3) المميز للمعادلة $x^2 + 6x + 9 = 0$ هو 0 .

a صواب b خطأ

(4) إذا كانت $x^2 - x - 6 = 0$ فإن قيمة x هي.

a $2, 3$ b $-2, -3$

c $-2, 3$ d $2, -3$

(5) إذا كانت $x^2 - 7x + 12 = 0$ فإن قيمة x هي.

a $4, 3$ b $4, -3$

c $-4, 3$ d $-4, -3$

(6) إذا كانت $x^2 + x - 20 = 0$ فإن قيمة x هي.

a $4, 5$ b $-4, -5$

c $-4, 5$ d $4, -5$

(7) إذا كانت $x^2 + x = 0$ فإن قيمة x هي.

a	$0, -1$	b	$0, 1$
c	0	d	-1

(8) إذا كانت $x^2 + 8x + 12 = 0$ فإن قيمة x هي.

a	$2, 6$	b	$-2, -6$
c	$-2, 6$	d	$2, -6$

(9) $x^2 - 81 = 0$.

a	$x = 9$	b	$x = -9$
c	$x = \pm 9$	d	ليس لها حل

(10) $x^2 + 9 = 0$.

a	$x = 3$	b	$x = -3$
c	$x = \pm 3$	d	ليس لها حل

(11) $x^2 - 9 = 0$.

a	$x = 3$	b	$x = -3$
c	$x = \pm 3$	d	ليس لها حل

(12) $x^2 + 81 = 0$.

a	$x = 9$	b	$x = -9$
c	$x = \pm 9$	d	ليس لها حل

(13) قيمة x في المعادلة $\sqrt{x^2 - 3x} = 2$ هي.

a	$4, -1$	b	$4, 1$
c	$-4, -1$	d	$-4, 1$

(14) قيمة x في المعادلة $\sqrt{x^2 + 3x} = 2$ هي.

a	$4, -1$	b	$4, 1$
c	$-4, -1$	d	$-4, 1$

(15) قيمة x في المعادلة $\sqrt{x^2 + 8x} = 3$ هي.

a	$9, -1$	b	$9, 1$
c	$-9, -1$	d	$-9, 1$

(16) قيمة x في المعادلة $\sqrt{x^2 - 8x} = 3$ هي.

a	$9, -1$	b	$9, 1$
c	$-9, -1$	d	$-9, 1$

(17) قيمة x في المعادلة $\sqrt[3]{x^2 + 2x} = 2$ هي.

a	$-4, 2$	b	$4, -2$
c	$-4, -2$	d	$4, 2$

(18) قيمة x في المعادلة $\sqrt[3]{x^2 + 6x} = 3$ هي.

a	$9, 3$	b	$-9, 3$
c	$9, -3$	d	$-9, -3$

(19) إذا كانت $\frac{5x+6}{3} = \frac{x^2}{3}$ فإن قيمة x هي.

a $6, -1$ b $6, 1$

c $-6, 1$ d $-6, -1$

(20) إذا كانت $\frac{x^2+x}{3} = \frac{x-1}{2}$ فإن قيمة x هي $x = -3$ ، $x = \frac{1}{2}$.

a صواب b خطأ

(21) إذا كانت $\frac{x}{3x+4} = \frac{1}{x}$ فإن قيمة x هي.

a $4, -1$ b $-4, 1$

c $4, 1$ d $-4, -1$

(22) أوجد حل المعادلات التالية جبرياً:

1) $x^2 - 36 = 0$

2) $x^2 = 1 - 4x$

3) $x^2 - 40 = 9$

4) $6x^2 + 5x = 4$

5) $2x^2 - 5x = 0$

6) $9x^2 - 12x = 2$

7) $2x^2 + 3x = 1$

8) $8x = 4x^2 - 13$

9) $(x+1)^2 = 2 - x$

10) $5x^2 + 14x = 3$

11) $x^2 + 4x - 1 = 0$

12) $x^2 - x - 12 = 0$

13) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

14) $x^2 + 6x + 5 = 0$

15) $x^2 + 3x - 10 = 0$

16) $2x^2 - x - 3 = 0$

17) $3x^2 + 4x - 4 = 0$

18) $x^2 + 3x - 2 = 0$

19) $x^2 + 10x - 20 = 0$

20) $x^2 - 5x + 6 = 0$

21) $2x^2 - 11x - 21 = 0$

22) $x^2 - 2x - 4 = 0$

23) $(x - 2)(x + 3) = x + 10$

24) $3x^2 + 5x - 1 = 0$

25) $x^2 - 1 = 0$

26) $x^2 - 3x = 0$

27) $x^2 = 2x$

28) $x^2 = -6x - 9$

29) $x^2 - 10x = -25$

30) $x^2 - 5x + 6 = 0$

31) $x^2 + 3x + 5 = 0$

32) $x^2 - x = 20$

33) $x^2 + 3x - 1 = 0$

34) $2x^2 - 6x = 0$

35) $x(x + 4) = 5$

36) $x^2 + 9 = 7x - 1$

37) $5x^2 + 3x = -6x + 2$

38) $2x^2 = 6(x + 1) + 2$

39) $x(x + 1) + 1 = -2$

40) $3(x^2 - x) = 8x + 4$

41) $6(x^2 + x) = 5x + 2$

42) $\sqrt{x} + 5 = x + 3$

4.5

الفصل الخامس

المتباينات الخطية

المتباينات الخطية

4.5.1 المتباينات الخطية

في هذا الفصل سنقوم بحل المتباينات الخطية في متغير واحد:

نظرية:

إذا كانت $a , b , c \in R$ ، وكانت $a < b$ فإن:

1) $a + c < b + c$

2) $a - c < b - c$

3) $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ إذا كانت b , a كلاهما موجب أو كلاهما سالب.

4) إذا كانت $c > 0$ ، فإن $\frac{b}{c} < \frac{a}{c}$, $ac < bc$

5) إذا كانت $c < 0$ ، فإن $\frac{b}{c} > \frac{a}{c}$ ، $ac > bc$

6) إذا كانت $b < c$ ، $a < b$ ، فإن $a < c$

ولحل متباينة من الدرجة الأولى في x نضع الحد الذي يحتوي على المجهول x في طرف والعدد في الطرف الآخر ثم نطبق النظرية السابقة.

مثال (1):

حل المتباينة $3x + 4 < 19$

الحــــل:

بإضافة -4 للطرفين نحصل على: $3x < 15$

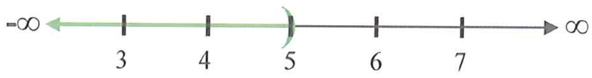
بالقسمة على 3 نحصل على: $x < 5$

إذاً مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية الأقل من العدد خمسة.

وتُكتب مجموعة الحل كالتالي:

$$S = \{x : x < 5\}$$

أو الفترة العددية المفتوحة $S = (-\infty, 5)$



مثال (2):

حل المتباينة $2x - 3 \geq 5$

الحــــل:

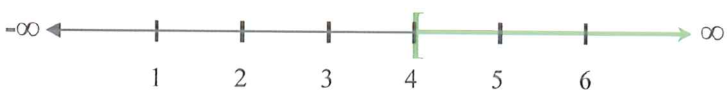
بإضافة 3 للطرفين نحصل على: $2x \geq 8$

بالقسمة على 2 نحصل على: $x \geq 4$

إذاً مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 4 وتُكتب كالتالي:

$$S = \{x : x \geq 4\} = [4, \infty)$$

أو الفترة العددية نصف المغلقة



مثال (3):

حل المتباينة $3x + 5 \geq x + 9$

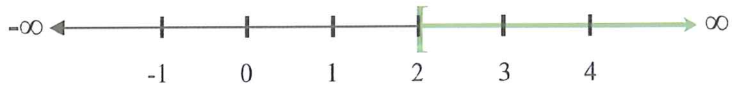
الحـــل:

بإضافة $-x$ ، -5 للطرفين نحصل على :

$$3x - x \geq 9 - 5 \quad \Rightarrow \quad 2x \geq 4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 2$$

إذاً مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 وتُكتب كالتالي:

$$S = \{x : x \geq 2\} = [2, \infty)$$



مثال (4):

حل المتباينة $\dfrac{2x-3}{4} + 6 \geq 2 + \dfrac{4x}{3}$

الحـــل:

بضرب طرفي المتباينة في المضاعف المشترك الأصغر للعددين $3,4$ وهو 12 نحصل على

$$(12)\left(\frac{2x-3}{4}\right) + (6)(12) \geq (12)(2) + (12)\left(\frac{4x}{3}\right)$$

$$3\,(2x-3) + 72 \geq 24 + 4(4x)$$

$$6x - 9 + 72 \geq 24 + 16x$$

$$6x + 63 \geq 24 + 16x$$

$$6x \geq -39 + 16x$$

$$-10x \geq -39$$

بالقسمة على -10

$$x \leq \frac{39}{10}$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{39}{10}\right]$$

مثال (5):

حل المتباينة $-4 < 5x + 6 \leq 21$

الحـــل

نقوم أولاً بإضافة -6 لجميع حدود المتباينة

$$-6 - 4 < 5x + 6 - 6 \leq 21 - 6$$

$$-10 < 5x \leq 15$$

بالقسمة على 5

$$\frac{10}{5} < \frac{5x}{5} \leq \frac{15}{5}$$

$$-2 < x \leq 3$$

$$\therefore \quad x \in (-2, 3]$$

مثال (6):

حل المتباينة $-3 \leq 7 - 2x \leq 7$

الحــــل:

بإضافة -7 لحدود المتباينة.

$$-3-7 \le 7-2x -7 \le 7-7$$

$$-10 \le -2x \le 0$$

بالقسمة على -2

$$\frac{-10}{-2} \ge \frac{-2x}{-2} \ge 0$$

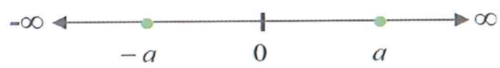
$$5 \ge x \ge 0$$

$$0 \le x \le 5$$

$$x \in [0, 5]$$

4.5.2 حل المتراجحة من الدرجة الأولى وتحتوي على القيمة المطلقة

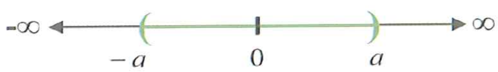
1) إذا كانت $|x| = a$ ، فإن مجموعة الحل هي $S = \{a, -a\}$



2) إذا كانت $|x| < a$ ، فإن $-a < x < a$.

أي أن مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية التي تقع في الفترة

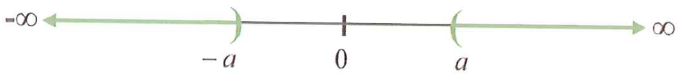
$$S = \{x: -a < x < a\} = (-a, a)$$



3) إذا كانت $|x| > a$ ، فإن $x > a$ أو $x < -a$.

أي أن مجموعة الحل هي مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من a اتحاد مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأقل من $-a$ أو الفترة $S = (-\infty, -a) \cup (a,\infty)$

أو $S = \{x{:}x > a \quad \text{or} \quad x < -a\}$



مثال (7) :

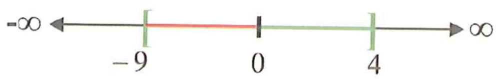
حل المتباينة $|2x + 5| \leq 13$

الحــــل:

$$-13 \leq 2x + 5 \leq 13 \;\Rightarrow\; -13 - 5 \leq 2x \leq 13 - 5 \;\Rightarrow\; -18 \leq 2x \leq 8 \;\Rightarrow\; -9 \leq x \leq 4$$

إذاً مجموعة الحل هي:

$$S = \{x{:}\ -9 \leq x \leq 4\} = [-9, 4]$$



مثال (8):

حل المتباينة $|2x + 3| > 15$

الحــــل:

$2x + 3 > 15$ أو $2x + 3 < -15$

$2x < -15 - 3$ أو $2x > 15 - 3$

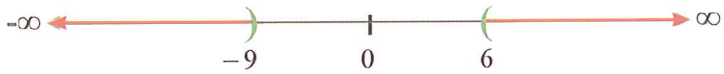
$2x < -18$ أو $2x > 12$

$x < -9$ أو $x > 6$

إذاً مجموعة الحل هي:

$$S = \{x : x < -9 \text{ or } x > 6\} = (-\infty, -9) \cup (6, \infty)$$

أو



4.5.3 تمارين

(1) حل المتباينة $4x < -8$ وهو

a $[-2, \infty)$ b $(-\infty, -2)$

c $(-2, \infty)$ d $(-\infty, 2]$

(2) حل المتباينة $2x -12 < x -6$ وهو

a $(-\infty, 6]$ b $(-\infty, 6)$

c $(6, \infty)$ d $(-\infty, -6]$

(3) حل المتباينة $3 - x \geq 5\ (3 - x)$ وهو

a $(3, \infty)$ b $(-\infty, 3]$

c $[3, \infty)$ d $(-\infty, 3)$

(4) حل المتباينة $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$ وهو

a $(-7, \infty)$ b $(-\infty, -7)$

c $(-7, \infty)$ d $(-\infty, -7]$

(5) حل المتباينة $1 \leq 3x - 8 \leq 7$ وهو

a $(3, 5)$ b $[3, 5]$

c $[3, 5)$ d $(3, 5]$

(6) حل المتباينة $-9 < 1 - 5x \leq 6$ وهو

a $[-1, 2)$ b $(-1, 2)$

c $(-1, 2]$ d $[-1, 2]$

(7) حل المتباينة $|x-5| \leq 3$ وهو

a $(2, 8]$ b $(2, 8)$

c $[2, 8)$ d $[2, 8]$

(8) حل المتباينة $|2x-5| < 7$ وهو

a $(-1, 6]$ b $(-1, 6)$

c $[-1, 6)$ d $[-1, 6]$

(9) حل المتباينة $|2x-3| > 9$ وهو

a $(-\infty, 6]$ b $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$

c $(-\infty, -3]$ d $[-3, 6]$

(10) حل المتباينة $|2x-3| \geq 9$ وهو

a $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$ b $[-3, 6]$

c $(-\infty, -3] \cup [6, \infty)$ d $(-3, 6)$

4.6 الفصل السادس

تطبيقات إدارية وإنسانية

تطبيقات إدارية وإنسانية

4.6.1 تطبيقات إدارية وإنسانية

مثال (1):

العلاقة بين تكاليف الصيانة y لسيارة وعدد ساعات العمل x بهذه السيارة تعطي في الصورة :

$$y(x) = 100x + 50$$

1) فإذا كانت تكاليف الصيانة 700 ريال، احسب عدد ساعات العمل بالسيارة.

2) احسب تكاليف الصيانة لسيارة عمل بها أربع ساعات.

الحل:

1) بوضع $y = 700$ في المعادلة نحصل على:

$$700 = 100x + 50 \quad \Rightarrow \quad 100x = 700 - 50$$

$$\Rightarrow \quad 100x = 650 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{650}{100}$$

$$\Rightarrow \quad x = 6.5 \ hour$$

2) بوضع $x = 4$ في المعادلة، نحصل على:

$$y(4) = 100(4) + 50 = 400 + 50 = 450 \ reyal$$

مثال (2):

ادخر عاملان مقدارين من المال متتاليين في القيمة ومجموعهما يعادل 13,000 ريال. استخدم المعادلات الخطية في تحديد المبلغين.

الحـــل:

نفرض أن المقدار الأول هو x بالآلاف من الريالات، وحيث أن المقدارين متتاليين فإن المقدار الثاني هو $x+1$ بالآلاف من الريالات، وحيث أن مجموع المقدارين يساوي 13 من الآلاف من الريالات، تكون لدينا المعادلة التالية:

$$x+(x+1)=13 \quad \Rightarrow \quad 2x=13-1 \quad \Rightarrow \quad 2x=12 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{12}{2} \quad \Rightarrow \quad x=6$$

إذاً المبلغ الأول 6,000 ريال والمبلغ الثاني 7,000 ريال.

مثال (3):

توزع المملكة ثلاث جوائز متتالية القيمة للعاملين في مجال الدعوة والآداب والتاريخ، فإذا كان مجموع الجوائز 75,000 ريال. استخدم المعادلات الخطية في تحديد قيمة كل جائزة.

الحـــل:

نفرض أن قيمة جائزة الدعوة هي x بآلاف الريالات، وقيمة جائزة الآداب هي $x+1$ بآلاف الريالات، وقيمة جائزة التاريخ هي $x+2$ بآلاف الريالات، وحيث أن مجموع الجوائز يساوي 75 من الآلاف من الريالات، تكون لدينا المعادلة:

$$x+(x+1)+(x+2)=75 \quad \Rightarrow \quad 3x+3=75 \quad \Rightarrow \quad 3x=75-3 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{72}{3} \quad \Rightarrow \quad x=24$$

إذاً قيمة جائزة الدعوة 24,000 ريال، وقيمة جائزة الآداب 25,000 ، وقيمة جائزة التاريخ 26,000 ريال.

مثال (4):

تقوم شركة تحاليل طبية بإنتاج مصلين لوباء الأنفلونزا والطاعون ويستلزم ذلك عمل معملي تحاليل A وَ B وكانت الكمية المطلوبة من مصلي الأنفلونزا والطاعون هما 19 وَ 27 ألف مصل في اليوم. إذا كان المعمل A ينتج 2000 مصل أنفلونزا وَ 3000 مصل طاعون في الساعة، بينما المعمل B ينتج 3000 مصل أنفلونزا وَ 4000 مصل طاعون في الساعة. احسب عدد الساعات التي يجب أن يستمر العمل فيها في المعملين لإنتاج الكمية المطلوبة في أسرع وقت.

الحـــل:

نفرض أن عدد الساعات المطلوبة في المعمل A هي x.

نفرض أن عدد الساعات المطلوبة في المعمل B هي y.

يمكننا إنشاء الجدول التالي:

الكمية المطلوبة	y	x
19000	3000	2000
27000	4000	3000

وبذلك نحصل على المعادلتين:

$$2000x + 3000y = 19000 \qquad (1)$$

$$3000x + 4000y = 27000 \qquad (2)$$

بقسمة كلا المعادلتين على 1000 نحصل على المعادلتين:

$$2x + 3y = 19 \qquad (3)$$
$$3x + 4y = 27 \qquad (4)$$

للتخلص من x نضرب المعادلة (3) في العدد 3 و المعادلة (4) في العدد -2 ، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين كالتالي:

$$\left.\begin{array}{rr} 6x+9y=57 & (5) \\ -6x-8y=-54 & (6) \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$
$$y=3$$

نعوض عن قيمة $y=3$ في المعادلة (3) ، نحصل على:

$$2x+3(3)=19 \Rightarrow 2x=19-9 \Rightarrow x=\frac{10}{2} \Rightarrow x=5$$

يستمر العمل في المعمل A خمسة ساعات و في المعمل B ثلاثة ساعات لإنتاج الكمية المطلوبة في يوم واحد.

مثال (5):

تنتج إحدى شركات تصنيع الملابس نوعين من الأشمخة ممتاز x وسوبر y فإذا كان إنتاج النوعين يستلزم استخدام ماكينة خياطة وماكينة قص وكان النوع الممتاز يستغرق 5 دقائق من ماكينة الخياطة و 10 دقائق من ماكينة القص، أما النوع السوبر فيستغرق 9 دقائق من ماكينة الخياطة و 15 دقيقة من ماكينة القص. في أحد الأيام عملت ماكينة الخياطة لمدة 4 ساعات فقط، بينما عملت ماكينة القص لمدة 7 ساعات.

كم عدد الأشمخة الممتازة والسوبر التي تم تصنيعها ذلك اليوم بحيث يستغل الوقت المتاح لماكينتي الخياطة والقص استغلالاً تاماً.

الحــــل:

يمكن وضع النظام التالي من المعادلات الخطية لتمثيل المسألة:

	x	y	عدد ساعات العمل
ماكينة الخياطة	5	9	دقيقة $(4)(60) = 240$
ماكينة القص	15	15	دقيقة $(7)(60) = 420$

وبذلك نحصل على المعادلتين:

$$5x + 9y = 240 \qquad (1)$$
$$10x + 15y = 420 \qquad (2)$$

للتخلص من x نضرب المعادلة (1) في العدد -2 ، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين كالتالي:

$$\left.\begin{array}{ll} -10x - 18y = -480 & (3) \\ \underline{10x + 15y = 420} & (4) \\ -3y = -60 & \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-60}{-3} = 20$$

بالتعويض عن قيمة $y = 20$ في المعادلة (1) ، نحصل على:

$$5x + 9(20) = 240 \Rightarrow 5x = 240 - 180 \Rightarrow x = \frac{60}{5} \Rightarrow x = 12$$

إذاً عدد الأشمخة السوبر عشرون، وعدد الأشمخة الممتازة اثنا عشر.

مثال (6):

إذا كان رسم دخول مدينة الملاهي لرجل وطفلين يكلّف 44 ريال بينما رسم الدخول لرجلين وثلاثة أطفال يكلّف 76 ريال. احسب تكلفة الدخول لكل طفل ولكل رجل.

الحـــل:

نفرض أن تكلفة دخول الرجل هي x ، وتكلفة دخول الطفل هي y، فيكون لدينا المعادلتين التاليتين:

$$x + 2y = 44 \qquad (1)$$

$$2x + 3y = 76 \qquad (2)$$

للتخلص من x نضرب المعادلة (1) في العدد $2-$ ، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين كالتالي:

$$\left.\begin{array}{rr} -2x - 4y = -88 & (3) \\ 2x + 3y = 76 & (4) \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$-y = -12$$

$$\Rightarrow \quad y = 12$$

بالتعويض عن قيمة $y = 12$ في المعادلة (1) ، نحصل على:

$$x + 2(12) = 44 \Rightarrow x = 44 - 24 \Rightarrow x = 20$$

أي أن تكلفة دخول الرجل هي 20 ريال، وتكلفة دخول الطفل هي 12 ريال.

مثال (7):

تكلفة الحرير في متجر منسوجات هي ثلاثة أضعاف تكلفة القطن، فإذا اشترى رجل 4 متر من القطن و 2 متر من الحرير فكانت التكلفة الكلية هي 280 ريال. احسب تكلفة المتر الواحد من القطن والمتر الواحد من الحرير.

الحـــل:

نفرض أن تكلفة المتر الواحد من القطن هي x ، وتكلفة المتر الواحد من الحرير هي y ، فيكون لدينا المعادلتين التاليتين:

$$y = 3x \quad \Rightarrow 3x - y = 0 \qquad (1)$$

$$4x + 2y = 280 \qquad (2)$$

للتخلص من y نضرب المعادلة (1) في العدد 2 ، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين كالتالي:

$$\left.\begin{array}{lr} 6x - 2y = 0 & (3) \\ \underline{4x + 2y = 280} & (4) \\ 10x \quad\; = 280 & \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{280}{10} = 28$$

نعوض عن قيمة $x = 28$ في المعادلة (1) ، نحصل على:

$$y = 3(28) \quad \Rightarrow \quad y = 84$$

أي أن تكلفة المتر الواحد من القطن هي 28 ريال، وتكلفة المتر الواحد من الحرير هي 84 ريال.

مثال (8):

في بداية العام كان لدى مستثمر مبلغ $50,000$ ريال في حسابه في بنكين مختلفين، وكان كل بنك يدفع فائدة ربحية سنوية مقدارها 4% وَ 6% على الترتيب. فإذا كان المستثمر لم يسحب أي مبلغ من حسابه خلال السنة وحصل على أرباح قدرها $2,750$ ريال من كلا البنكين.فما هو المبلغ المستثمر في كل بنك.

الحـــل:

نفرض أن المبلغ المستثمر في البنك الأول هو x و المبلغ المستثمر في البنك الثاني هو y ، فيكون لدينا المعادلة التالية:

$$x + y = 50,000$$

الفائدة الربحية السنوية في كل بنك مقدارها 4% وَ 6% على الترتيب، فيكون لدينا المعادلة التالية:

$$0.04x + 0.06y = 2,750$$

بضرب المعادلة في 100 نحصل على $4x + 6y = 275,000$

إذاً لدينا المعادلتين التاليتين:

$$x + y = 50,000 \qquad (1)$$

$$4x + 6y = 275,000 \qquad (2)$$

للتخلص من x نضرب المعادلة (1) في العدد -4 ، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين كالتالي:

$$\left.\begin{array}{rr} -4x - 4y = -200,000 & (3) \\ 4x + 6y = 275,000 & (4) \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$2y = 75,000$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{75,000}{2} = 37,500$$

مثال (9):

مزرعة بها دجاج وأرانب، مجموع رؤوس الحيوانات الموجودة بالمزرعة هي 95 رأساً ومجموع الأرجل لها هي 310 رجلاً. كم عدد الدجاج وعدد الأرانب في المزرعة.

الحـــل:

(الدجاج له رجلان والأرانب لها أربعة أرجل)

نفرض أن عدد الدجاج هو x ، وعدد الأرانب هو y ، فيكون لدينا المعادلتين التاليتين:

$$x + y = 95 \qquad (1)$$

$$2x + 4y = 310 \qquad (2)$$

للتخلص من x نضرب المعادلة (1) في العدد -2 ، ثم نجمع المعادلتين الناتجتين كالتالي:

$$\left.\begin{array}{rl} -2x - 2y = -190 & (3) \\ 2x + 4y = 310 & (4) \end{array}\right\} \text{بالجمع}$$

$$\overline{\quad 2y = 120 \quad}$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{120}{2} = 60$$

نعوض عن قيمة $y = 60$ في المعادلة (1) ، نحصل على:

$$x + 60 = 95 \;\Rightarrow\; x = 95 - 60 \;\Rightarrow\; x = 35$$

أي أن عدد الدجاج هو 35، وعدد الأرانب هو 60.

4.6.2 تمارين

1) سعر الوحدة من منتج p بالريال يتحدد من المعادلة التالية:

$$4P-3\left[2P-5(P-1)\right]=-5$$

احسب ثمن الوحدة من هذا المنتج.

2) تنفق شركة بترول مبلغ x بملايين الريالات في الشهر. تتحدد قيمة x من المعادلة التالية:

$$2-\frac{4}{x}=1+\frac{1}{x}$$

احسب قيمة ما تنفقه شركة البترول في الشهر.

3) استثمر ثلاثة طلاب ثلاثة مبالغ متتالية في القيمة مجموعها 2,400 ريال. استخدم المعادلات الخطية في إيجاد المبالغ الثلاثة.

4) قرر قسم الرياضيات توزيع مبلغ 21,000 ريال في صورة ثلاث جوائز متتالية القيمة على الثلاث الطلاب الأوائل بالقسم. استخدم المعادلات الخطية في إيجاد قيمة كل جائزة.

5 Chapter

الباب الخامس

الدوال

5.1

الفصل الأول

الدوال

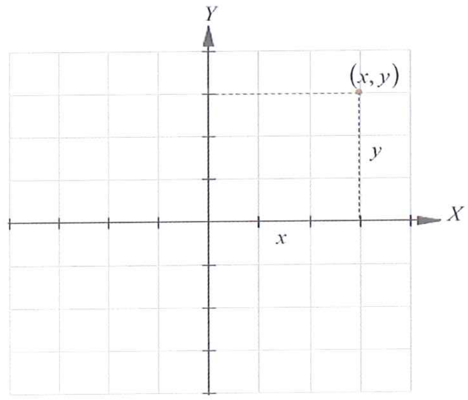
الـــــدوال

5.1.1 الـدوال

قبل دراسة الدالة نعرّف ما يلي:

أولاً: الأزواج المرتبة

إذا كان لدينا المجموعتين A,B وكان $x\in A \ , \ y\in B$ فإن $(x \ , \ y)$ يُسمى الزوج المرتب (ويُقرأ من اليسار إلى اليمين) ويمثل هندسياً نقطة في المستوى XY كما في الشكل (1):



شكل (1)

تعريف: (تساوي زوجان مرتبان)

يكون الزوجان المرتبان (c, d) ، (a ,b) متساويين إذا كان $b = d$ و $a = c$ أي أن:

$$(a, b) = (c, d) \ \Rightarrow \ a = c \ \text{و} \ b = d$$

وخلاف ذلك يكون الزوجان المرتبان مختلفان.

ملاحظة (1): إذا كان $a \neq b$ فإن

الزوج المرتب (a, b) لا يساوي الزوج المرتب (b, a) أي أن: $(a, b) \neq (b, a)$.

ثانياً: حاصل الضرب الكارتيزي

يُعرّف حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين A, B غير الخاليتين بأنه مجموعة الأزواج المرتبة $(x\ , y)$ حيث $x \in A, y \in B$ ، ويُرمز له بالرمز $A \times B$ ويُقرأ A cross B .

مثال (1):

أوجد $B \times A$ ، $A \times B$ للمجموعتين $B = \{-2, 0, 3\}$ ، $A = \{2, 5\}$.

الحل:

$$A \times B = \{(2, -2), (2, 0), (2, 3), (5, -2), (5, 0), (5, 3)\}$$

$$B \times A = \{(-2, 2), (-2, 5), (0, 2), (0, 5), (3, 2), (3, 5)\}$$

مثال (2):

إذا كان $B = \{a, b\}$ ، $A = \{1, 2, 3\}$ ، فأوجد $B \times A$ ، $A \times B$.

الحل:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a,1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

ملاحظة (2):

1) عدد عناصر المجموعة $A \times B$ يساوي عدد عناصر A ضرب عدد عناصر B أي أن:
$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

2) $B \times A \neq A \times B$ ، ولكن عدد عناصر $A \times B$ تساوي عدد عناصر $B \times A$. أي أن رتبة $A \times B$ تساوي رتبة $B \times A$.

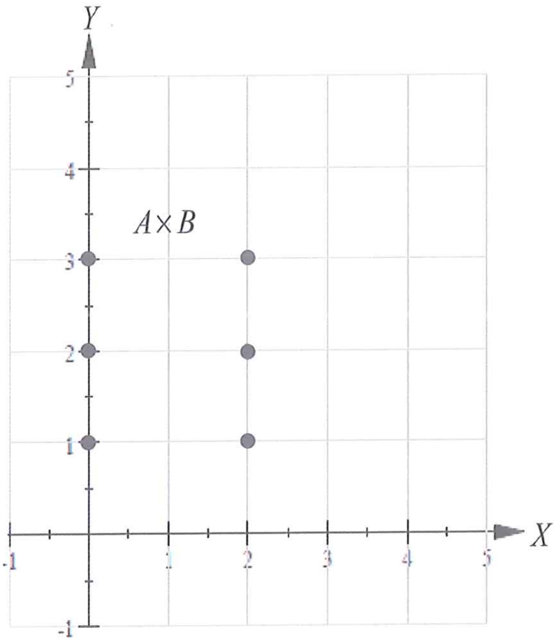
مثال (3):

إذا كانت $A = \{0, 2\}$ ، $B = \{1, 2, 3\}$. أوجد $B\times A$ ، $A\times B$ ومثل ذلك بيانياً.

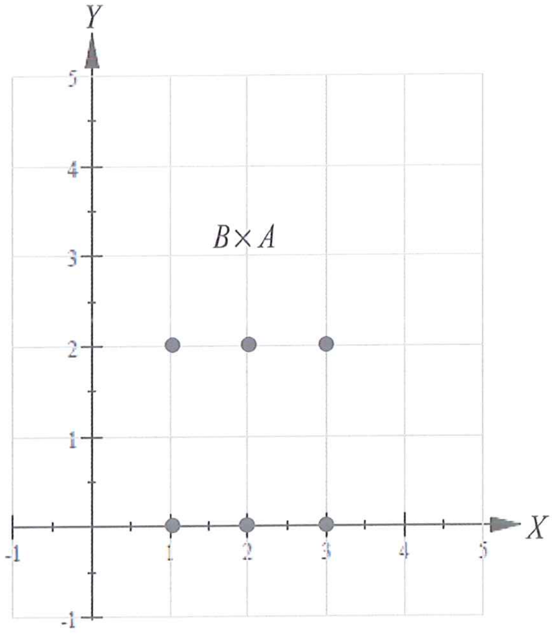
الحـــل:

$$A\times B = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$$

$$B\times A = \{(1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 2) ,(3, 0), (3, 2)\}$$



شكل (2)



شكل (3)

ثالثاً: العلاقة

أي مجموعة من الأزواج المرتبة تُسمى علاقة وتُسمى مجموعة الأعداد في الأحداثي الأول مجال العلاقة بينما تُسمى مجموعة الأعداد في الأحداثي الثاني مدى العلاقة.

بعض العلاقات يمكن الحصول عليها عن طريق الجداول كالقراءات الي نحصل عليها من القياسات العملية والطبيعية كالعلاقة التي حصل عليها أحد الطلبة عند رصد درجات الحرارة يوم ما إبتداء من الصباح حتى المساء فحصل على الجدول الآتي:-

t	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
T	14	15	17	21	25	27	28	28	27	24	22

حيث t تمثل الساعة التي رصدت فيها درجات الحرارة T .

واضح أن هذا الجدول يعطي لنا القراءة "العلاقة" التالية:

$$y=\{(7,14),(8,15),(9,17),(10,21),(11,25),(12,27),(13,28),(14,28),(15,27),(16,24),(17,22)\}$$

حيث أن المجال $=\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ ،

والمدى $=\{14, 15, 17, 21, 25, 27, 28, 24, 22\}$

ملاحظة (3):

ويمكننا أن نُعرّف العلاقة على أنها مجموعة جزئية من حاصل الضرب الكارتيزي لمجموعتين.

مثال (4):

يمكن اعتبار $A_1=\{(1,a),(1,b)\}$ ، $A_2=\{(3,a),(3,b)\}$ ، $A_3=\{(1,a),(2,a),(3,b)\}$ علاقات من A إلى B لأنهم مجموعات جزئية من $A\times B$ ، حيث $B=\{a,b\}$ ، $A=\{1,2,3\}$.

تعريف: (الدالة):

الدالة $f:X\to Y$ هي عبارة عن علاقة أو قاعدة بين مجموعتين غير خاليتين Y وَ X بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى X بعنصر وحيد من المجموعة الثانية Y.

- المجموعة X تُسمى مجال الدالة f، ويُرمز لها بالرمز D_f .
- المجموعة Y تُسمى بالمجال المقابل للدالة f، ويُرمز له بالرمز $Co\text{-}D_f$.
- المدى عبارة عن المجموعة التي تحتوي على صور أو قيم عناصر المجال، ويُرمز لها بالرمز R_f ، حيث يمثل المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل.

في المثال (4) السابق لاحظ أن A_3 تمثل دالة من A إلى B ولكن A_1 ، A_2 لا تمثلان دالة (لماذا)؟

توجد أربع طرق لتمثيل الدالة :

1 - **لفظياً** : من خلال جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.

على سبيل المثال : تكلفة ارسال بريد سريع Y لشحنة ما يعتمد على وزنها X.

2 - **عددياً** (يمكن التعبير عنها بجدول القيم أو مجموعة من الازواج المرتبة أو مخطط سهمي).

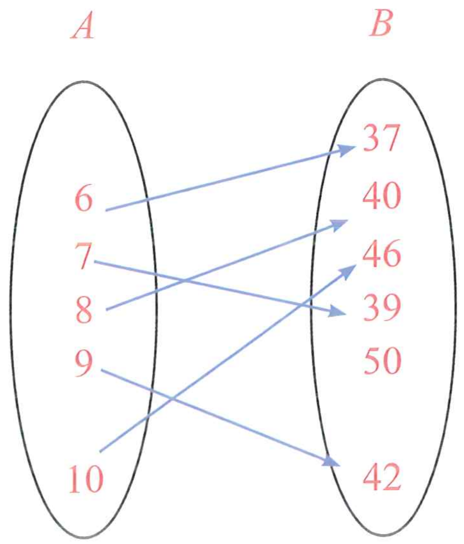
على سبيل المثال: تقدير لدرجات الحرارة $p(t)$ عن زمن t لساعات معينة يعطي بجدول القيم التالي.

t	$p(t)$
6	37
7	39
8	40
9	42
10	46

أو مجموعة من الازواج المرتبة على الصورة

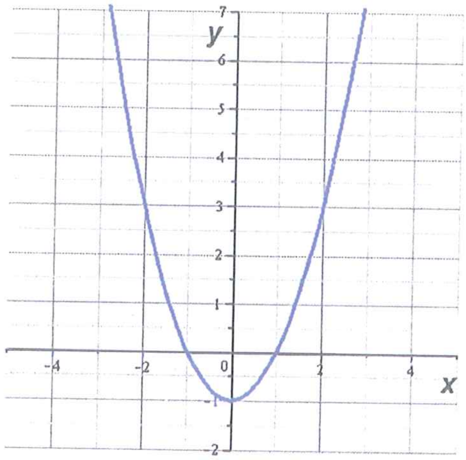
$$\{(6, 37) , (7, 39) , (8, 40) , (9, 42) , (10, 46) \}$$

أو المخطط السهمي التالي :



3 - **بيانياً :** (بواسطة رسم بياني).

على سبيل المثال: الرسم التالي يوضح التغير في قديم Y نتيجة التغير في قيم X.



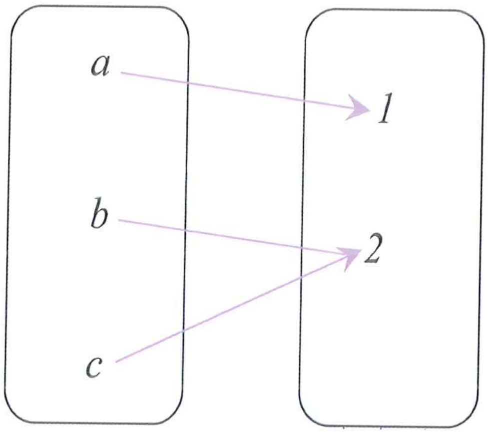
4 - **جبرياً** : وذلك بوصف عمل الدالة على عنصر اختياري X

على سبيل المثال: إذا كان لدينا $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = x + 5$

مثال (5):

لتكن $A = \{a,b,c\}$ ، $B = \{1, 2\}$ ولنُعرّف الدالة f من A إلى B كالتالي:

$$A \xrightarrow{f} B$$



أي أن صورة العنصر a بهذه الدالة f هو العنصر 1 ، ويمكن كتابته $f(a)= 1$ ،

وصورة العنصر b هو العنصر 2 ويمكن كتابته $f(b) = 2$.

وصورة العنصر c هو العنصر 2 ويمكن كتابته $f(c) = 2$.

لاحظ في المثال السابق أن عنصرين مختلفين من A وهما b, c لهما نفس الصورة ولكن

كل عنصر من عناصر A ارتبط بعنصر وحيد في B . يمكن تمثيل الدالة السابقة كثنائيات مرتبة كالتالي:

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$$

مثال (6):

لتكن المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $Y = \{a, b, c\}$ والعلاقة:

$$h = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, b)\}$$

تمثل دالة من X إلى Y وتُكتب $h : X \rightarrow Y$ وفي هذه الحالة فإن $\{1, 2, 3, 4\}$ هو مجال الدالة h وَ $\{a, b, c\}$ هو المجال المقابل وَ $\{a, b\}$ هو المدى (لاحظ أن c عنصر في المجال المقابل لا يرتبط بأي عنصر في المجال لذلك هو لا ينتمي للمدى).

إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ ، $B = \{a,b,c,d\}$ فتحقق ما إذا كانت العلاقات التالية تمثل دالة من A إلى B أو لا وفي حالة كونها دالة أوجد مداها.

$f_1 = \{(2, b), (2, c), (1, d)\}$

$f_2 = \{(1, b), (2, c), (3, d)\}$

$f_3 = \{(2, a), (3, c)\}$

$f_4 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$

$f_5 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

الحـــل:

f_1 لا تمثل دالة لأن $f(2) = b$ ، $f(2) = c$.

f_2 تمثل دالة ومداها $\{b, c, d\}$.

f_3 لا تمثل دالة ، لأن العنصر 1 ينتمي لمجال العلاقة وليس له صورة.

f_4 تمثل دالة ومداها $\{a\}$ وتسمى بالدالة الثابتة لأن صورة كل العناصر في A هي العنصر الثابت a.

f_5 تمثل دالة ومداها $\{a, b\}$.

مثال (8):

إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $B = \{a, b, c, d, e\}$.

وكانت الدالة $f : A \to B$ حيث

$$f = \{(2, a), (1, c), (4, a), (3, d), (5, e)\}$$

أوجد كلاً من المجال والمجال المقابل والمدى للدالة f .

الحـــل

مجال الدالة f هو

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$$

المجال المقابل للدالة f هو

$$Co - D_f = \{a, b, c, d, e\} = B$$

المدى

$$R_f = \{a, c, d, e\}$$

ملاحظة (4):

يمكن تعريف الدالة بطريقة الوصف بدلاً من السرد وذلك بوصف عمل الدالة على عنصر اختياري x كالتالي:

مثال (9):

إذا كان لدينا $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = 3x + 5$

نفهم من هذا أن هذه الدالة معرّفة على كل عناصر الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وأن صورة كل

عنصر اختياري هو ثلاثة أضعافه ومن ثم إضافة 5 . أي أن صورة $f(1) = 8$ ، $f(0) = 5$ ، $f(2) = 11$ وهكذا.

مثال (10):

إذا كان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = x^3 + 3$ ، أوجد $f(2), f(0), f(-1)$.

الحل:

$$f(x) = x^3 + 3$$

$$f(2) = 2^3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$f(0) = 0^3 + 3 = 3$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 3 = -1 + 3 = 2$$

مثال (11):

إذا كان $f: [-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث $f(x) = \sqrt{x + 1}$

أوجد $f(0)\ , f(-1)\ , f(x + h)$

الحل:

$$f(0) = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(-1) = \sqrt{-1 + 1} = \sqrt{0} = 0$$

$$f(x + h) = \sqrt{x + h + 1}$$

5.1.2 التمثيل البياني للدالة

لتمثيل الدالة بيانياً نتبع الخطوات التالية :

1) نحدد بعض قيم x ، ثم نوجد قيم y المناظرة.

2) نضع هذه القيم في جدول.

3) نمثل هذه النقاط في المستوى XY .

4) نصل هذه النقاط بمنحنى أملس (غير متعرج).

مثال (12) :

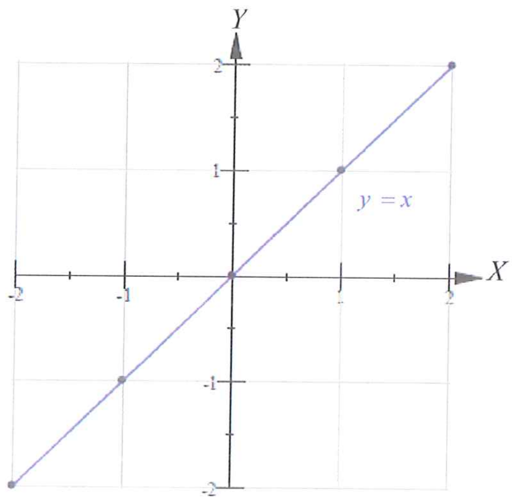
مثّل الدالة $f(x)=x$ بيانياً في المجال $[-2,2]$.

الحـــل:

لدينا الدالة $y=x$ ، نختار قيم للمتغير المستقل x ونحدد قيم y المناظرة كما في الجدول:

x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2

ثم نرسم كما في الشكل (4)



شكل (4)

مثال (13):

ارسم منحنى الدالة $f(x) = 3x + 5$ في المجال $[-2, 2]$.

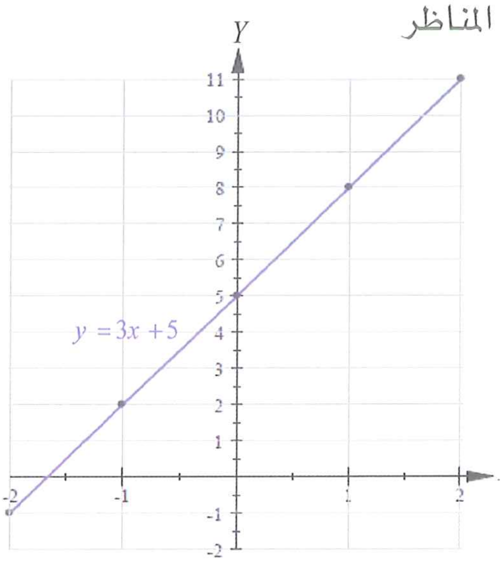
الحـــل:

نختار قيم للمتغير المستقل x ونحدد قيم y المناظر

كما بالجدول :

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	2	5	8	11

ثم نرسم كما في الشكل (5)



شكل (5)

مثال (14):

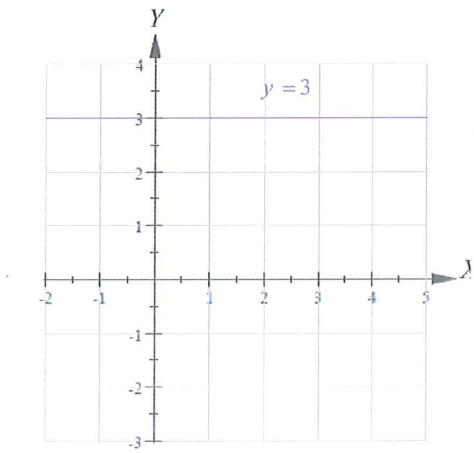
مثّل الدالة $y = 3$ بيانياً.

الحـــل:

منحنى الدالة يمثل مستقيم يوازي محور X

ويبعد عنه مسافة 3 وحدات لأعلى

ثم نرسم كما في الشكل (6) :



شكل (6)

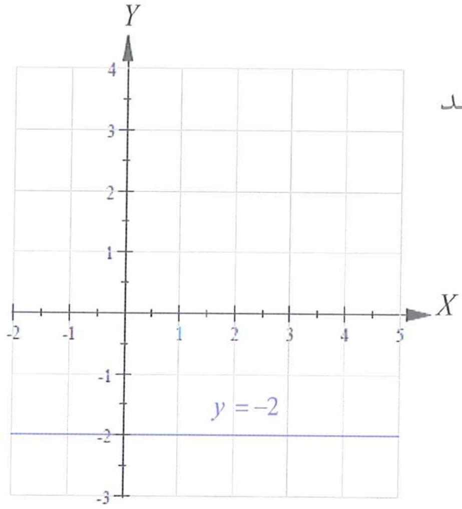
مثال (15):

مثّل الدالة $y = -2$ بيانياً.

الحـــل:

منحنى الدالة يمثل مستقيم يوازي محور Y ويبعد عنه مسافة 2 وحدات لأسفل

ثم نرسم كما في الشكل (7) :



شكل (7)

مثال (16):

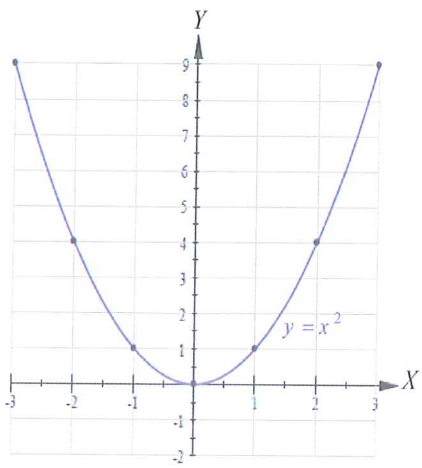
مثّل المنحنى $y = x^2$ بيانياً في المجال $[-3, 3]$.

الحـــل:

نكون الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

ثم نرسم كما في الشكل (8) :



شكل (8)

مثال (17):

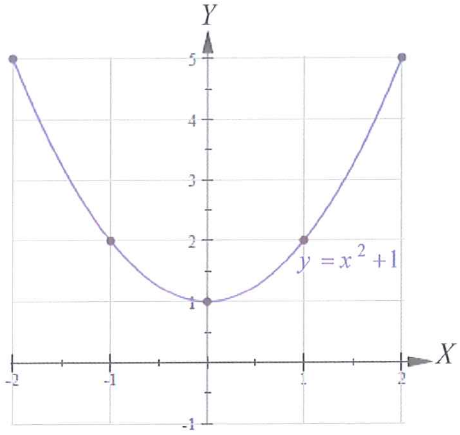
مثل الدالة $y = x^2 + 1$ بيانياً في المجال $[-2, 2]$.

الحـــل:

نكون الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
y	5	2	1	2	5

ثم نرسم كما في الشكل (9) :



شكل (9)

مثال (18):

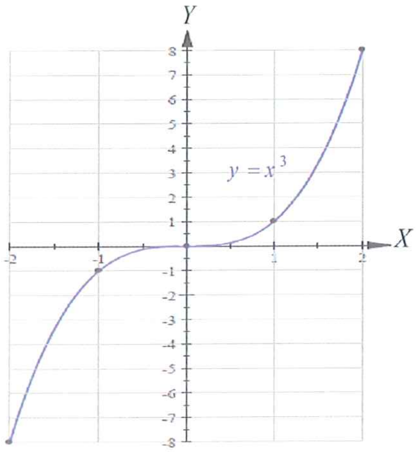
مثل الدالة $y = x^3$ بيانياً في المجال $[-2, 2]$.

الحـــل

نكون الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

ثم نرسم كما في الشكل (10) :



شكل (10)

مثال (19):

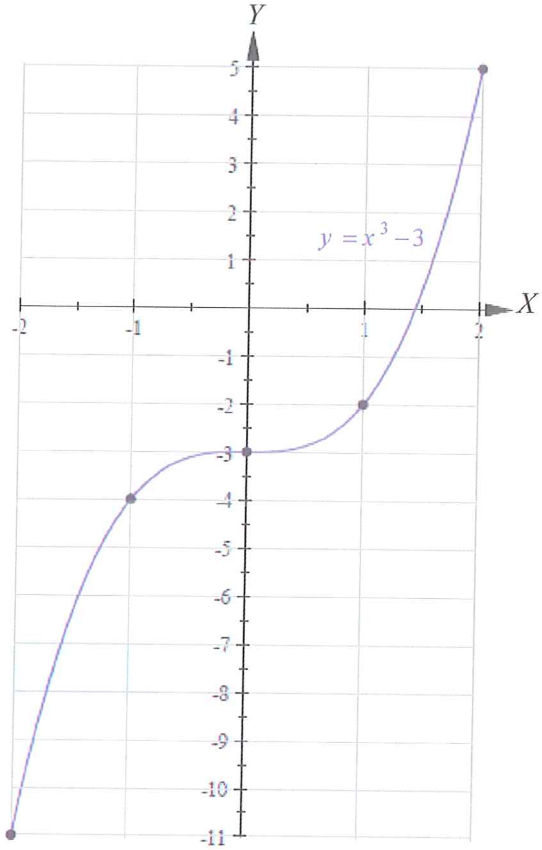
مثّل الدالة $y = x^3 - 3$ بيانياً في المجال $[-2, 2]$.

الحل

نكون الجدول التالي:

x	-2	-1	0	1	2
y	-11	-4	-3	-2	5

ثم نرسم كما في الشكل (11) :



شكل (11)

اختبار الخط الرأسي لدالة

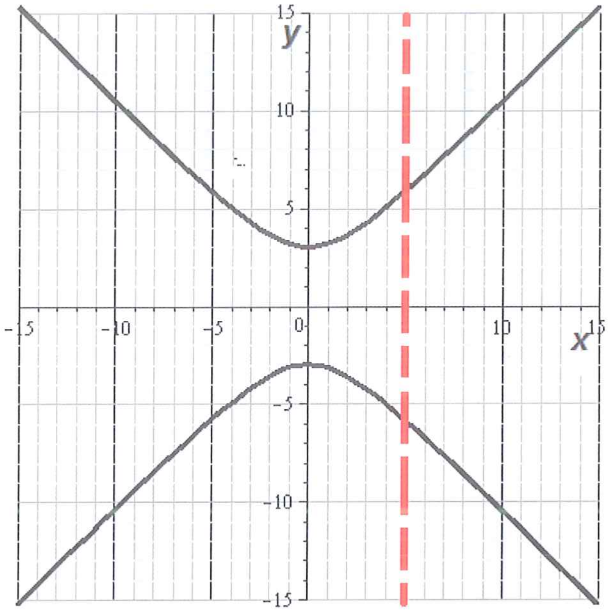
إذا كان لدينا منحنى معادلة فإن المعادلة تمثل دالة إذا رسمنا أي خط رأسي فإنه يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر.

أما إذا قطع أي خط رأسي المنحنى في نقطتين أو أكثر فإن المعادلة لا تمثل دالة.

مثال (20):

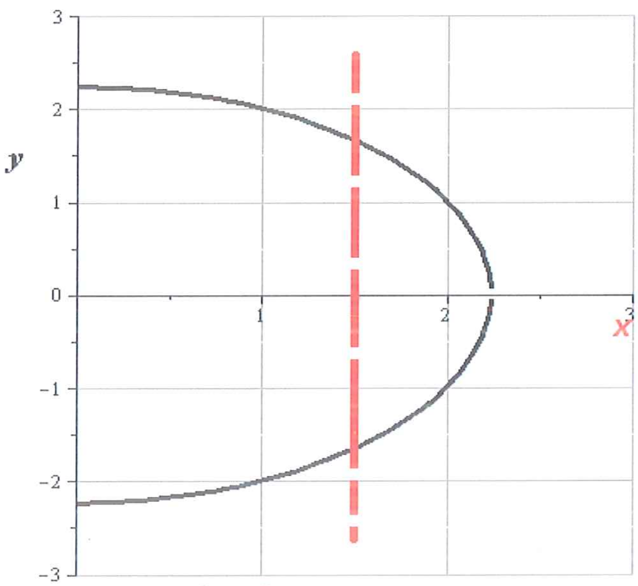
من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت المعادلة تمثل دالة أم لا ؟

(a)



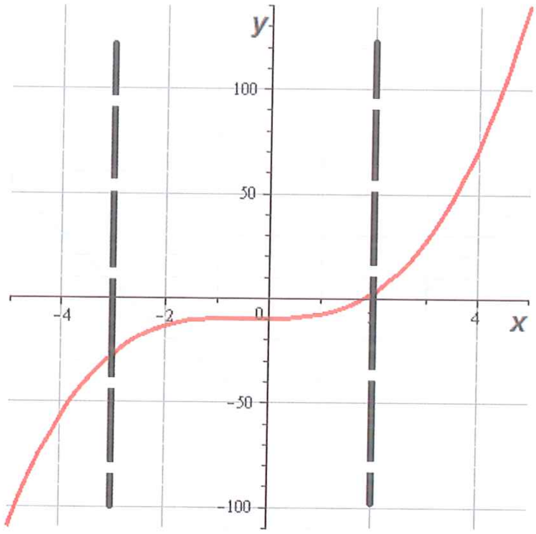
$y^2 - x^2 = 9$

(b)



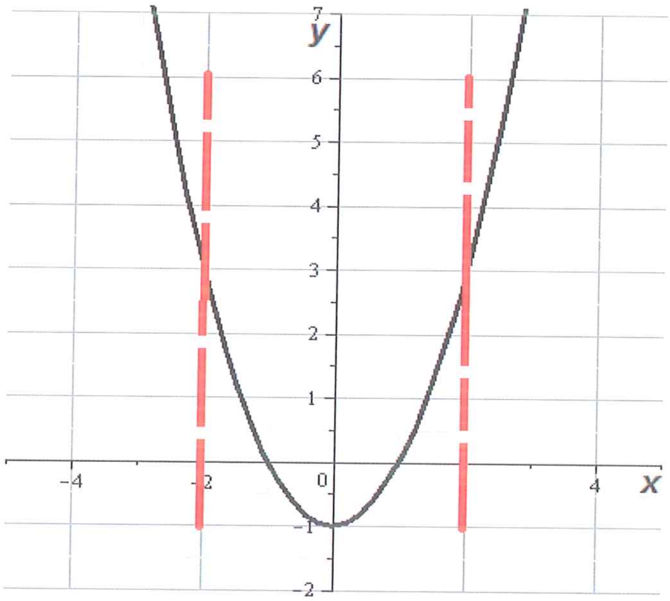
$x^2 + y^2 = 5$

(c)



$y = x^3 + x^2 - 10$

(d)



$y = x^2 - 1$

باستخدام اختبار الخط الرأسي نجد أن المعادلات في (a)و (b) لا تمثل دالة لأنه يوجد خط رأس يمر بنقطتين على المنحنى.

أما المعادلات في (c) و (d) فإنها تمثل دالة لأن أي خط رأس يقطع المنحنى في نقطة على الأكثر.

5.1.3 تمارين

(1) إذا كانت $f(x) = 3x - 1$ ، أوجد $f(0), f(-1), f(x+1)$.

(2) إذا كانت $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ ، أوجد $f(0), f(-2), f(2x)$.

(3) إذا كانت $f(x) = 10$ ، أوجد $f(0), f(-3), f(10x)$.

(4) إذا كانت $f(x) = \sqrt{x+5}$ ، أوجد $f(0), f(5), f(-5)$.

(5) إذا كانت $f(x) = 3x + 7$ أوجد $f(-5), f(2)$.

(6) إذا كانت $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ فأوجد $f(-1), f(2), f(0)$.

(7) حدد ما إذا كانت العلاقات التالية من $A = \{3, 5, 7, 9\}$ إلى $B = \{a, b, c, d\}$ تمثل دالة أم لا.

a) $A_1 = \{(3,a),(5,c),(7,b),(9,d)\}$

b) $A_2 = \{(5, a), (7, b)\}$

c) $A_3 = \{(3, a), (3, b), (5, a), (7, b), (9, d)\}$

d) $A_4 = \{(3, a), (5,a), (7, a), (9, a)\}$

(8) أوجد المجال والمدى للدوال الآتية:

a) $f = \{(2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$

b) $f = \{(1, 1), (2, 2), (4, 4), (9, 9)\}$

c) $f = \{(-2, 0), (-1, -2), (1, 2), (0, -1)\}$

d) $f = \{(1, -3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5)\}$

(9) لتكن $A = \{a, b, c\}$ وَ $B = \{1, 2, 4\}$ ، أوجد $A \times B$.

(10) مثل كل من الدوال الآتية بيانياً:

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = x^2 - 4$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = x^3 - 5$

e) $f(x) = x + 3$

f) $f(x) = -x^2 + x - 1$

(11) ارسم منحنى الدوال التالية في المجال المحدد:

a) $y = 2x + 3, \ [-3, 2]$

b) $y = x^2 + 4, \ [-3, 3]$

c) $y = x^2 - 2, \ [-3, 3]$

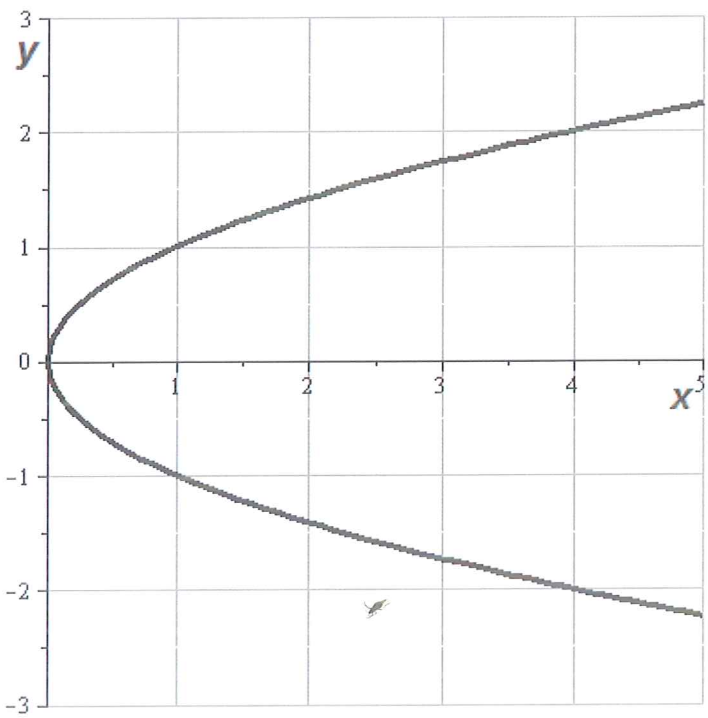
d) $y = x^3 + 4, \ [-2, 2]$

e) $y = x^2 - 4x, \ [-2, 6]$

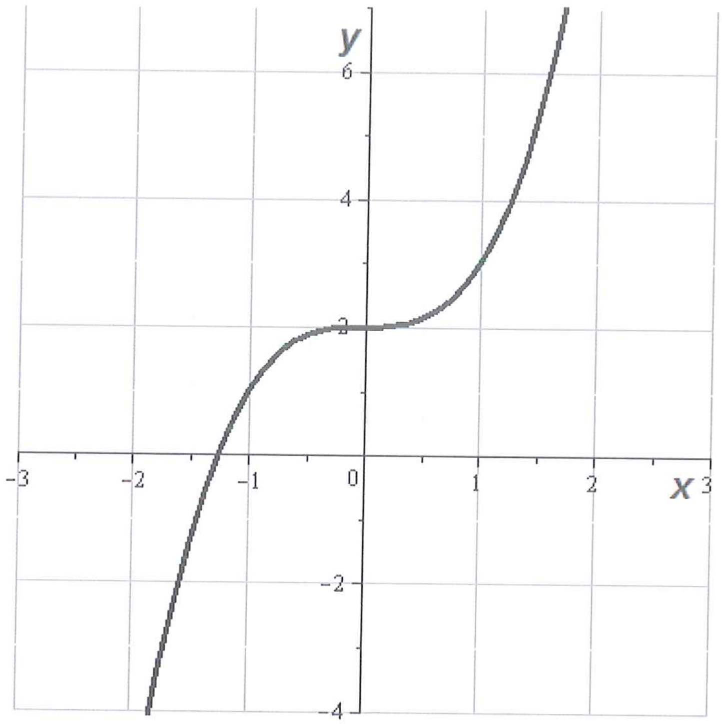
f) $y = 3x - x^2, \ [-2, 5]$

(12) من الأشكال الآتية بين ما إذا كانت المعادلة تمثل دالة أم لا ؟

(a)



(b)



5.2

الفصل الثاني

الدوال الجبرية

الـــــــــدوال الجبرية

5.2.1 الدوال الجبرية

الدوال الجبرية هي أي دالة مكونة من كثيرات حدود مع استخدام العمليات الجبرية (الجمع و الطرح و الضرب و القسمة و أخذ الجذر) ،وما عدا ذلك تسمى دوال مسترسلة (غير جبرية).

5.2.2 أنواع الدوال الجبرية

1 - دالة كثيرة الحدود:

تعريف: (كثيرات الحدود)

هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ ، $a_0, a_1, \dots\dots\dots, a_n \in \mathbb{R}$

n عدد صحيح أكبر من أو يساوي صفر، حيث n تُسمى درجة كثيرة الحدود.

مجال جميع كثيرات الحدود هو جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty , \infty)$

مثال (1):

الدوال الآتية تعتبر كثيرات حدود:

1) $y = f(x) = a_0$

حيث a_0 ثابت وتُسمى الدالة الثابتة وهي كثيرة حدود من الدرجة الصفرية $(n = 0)$.

2) $y = f(x) = a_1 x + a_0$

حيث a_1, a_0 ثوابت وتُسمى الدالة الخطية أو كثيرة حدود من الدرجة الأولى $(n = 1)$.

3) $y = f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

حيث a_2, a_1, a_0 ثوابت وتُسمى الدالة التربيعية وهي كثيرة حدود من الدرجة الثانية $(n = 2)$.

4) $y = f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

حيث a_3, a_2, a_1, a_0 ثوابت وتُسمى الدالة التكعيبية وهي كثيرة حدود من الدرجة الثالثة $(n = 3)$.

مثال (2):

هل الدوال الآتية تمثل كثيرات حدود، وإن كانت فعيّن نوعها.

1) $y = f(x) = 7$

2) $y = f(x) = x - 1$

3) $y = f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^3 - 1$

4) $y = f(x) = \dfrac{x^{-2}}{5} + x^3 + 3$

5) $y = f(x) = \dfrac{2}{5} x^2 + 7$

6) $y = f(x) = \sqrt{3}x^3 - 2x + 1$

7) $y = f(x) = x$

الحـــل:

1) الدالة تعتبر كثيرة حدود من الدرجة الصفرية وتُسمى الدالة الثابتة.

2) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى وتُسمى الدالة الخطية.

3) الدالة ليست كثيرة حدود لوجود الحد $x^{\frac{1}{2}}$ حيث أن الأس ليس عدداً صحيحاً.

4) الدالة ليست كثيرة حدود لوجود الحد x^{-2} حيث أن الأس عدد صحيح سالب.

5) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية وتُسمى الدالة التربيعية.

6) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة وتُسمى الدالة التكعيبية.

7) الدالة كثيرة حدود من الدرجة الأولى وتُسمى دالة الوحدة.

قاعدة:

لإيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عند النقطة x_0 نقوم بالتعويض عن x_0 في معادلة الدالة $f(x)$ فتصبح $f(x_0)$.

مثال (3):

إذا كانت $f(x) = x + 3$ أوجد قيمة الدالة عند:

$$x = 0, x = 1, x = 2, x = -1, x = -3$$

وأوجد مجال الدالة

الحـــل:

قيمة $f(x)$ عند $x = 0$: $f(0) = 0 + 3 = 3$

قيمة $f(x)$ عند $x = 1$: $f(1) = 1 + 3 = 4$

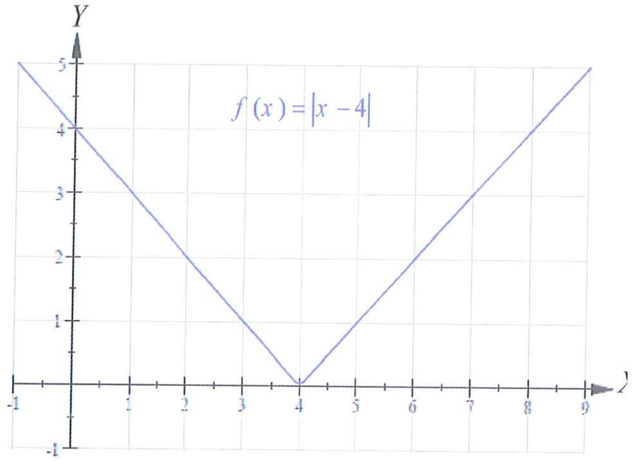
قيمة $f(x)$ عند $x = 2$: $f(2) = 2 + 3 = 5$

مثال (6):

ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = |x-4|$.

الحل:

$$y(x) = \begin{cases} x-4, & x \geq 4 \\ -(x-4), & x < 4 \end{cases}$$



شكل (2)

لاحظ أن:

المجال هو $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

والمدى هو $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$

مثال (7):

ارسم منحنى الدالة $y = f(x) = |x^2-4|$.

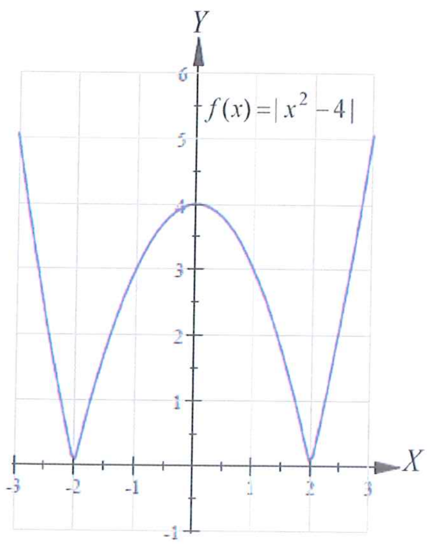
الحل:

$$y(x) = \begin{cases} x^2-4, & x \leq -2, x \geq 2 \\ -(x^2-4), & -2 < x < 2 \end{cases}$$

لاحظ أن:

المجال هو $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

والمدى هو $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$



شكل (3)

3. الدالة الكسرية

تعريف: (الدالة الكسرية)

هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

حيث $g(x), h(x)$ كثيرات حدود.

مجال الدالة الكسرية هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا قيم x التي تجعل $h(x) = 0$

مثال (8):

لماذا الدوال الآتية دوال غير كسرية؟

1) $f(x) = \dfrac{x^{1/2} - 3}{x + 1}$

2) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^{5/2} + 7}$

3) $f(x) = \dfrac{|x^2 + 5|}{2x + 3}$

الحــل:

1) الدالة ليست كسرية لأن البسط لا يمثل كثيرة حدود لإحتوائه على $x^{\frac{1}{2}}$.

2) الدالة ليست كسرية لأن المقام لا يمثل كثيرة حدود لإحتوائه على $x^{\frac{5}{2}}$.

3) الدالة ليست كسرية لأن البسط ليس كثيرة حدود لإحتوائه على المقياس.

مثال (9):

أوجد قيم الدوال الآتية عند قيم x المعطاة.

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{x - 2}$, $(x = 0, 1, 2)$

2) $g(x) = \dfrac{x - 5}{x^3 + 8}$, $(x = -2, 0, 1)$

الحـــل:

1) قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = 0$ هي: $f(0) = \dfrac{2(0)^2 - 5}{(0) - 2} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$

قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = 1$ هي: $f(1) = \dfrac{2(1)^2 - 5}{(1) - 2} = \dfrac{2 - 5}{1 - 2} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = 2$ هي: $f(2) = \dfrac{2(2)^2 - 5}{(2) - 2} = \dfrac{8 - 5}{2 - 2} = \dfrac{3}{0}$

إذاً الدالة غير معرّفة عند $x = 2$ لأن المقام $= 0$

2) قيمة الدالة $g(x)$ عند $x = -2$ هي: $g(-2) = \dfrac{(-2) - 5}{(-2)^3 + 8} = \dfrac{-7}{-8 + 8} = \dfrac{-7}{0}$

أي أن الدالة غير معرّفة عند $x = -2$ لأن المقام $= 0$

قيمة الدالة $g(x)$ عند $x = 0$ هي: $g(0) = \dfrac{(0) - 5}{(0)^3 + 8} = \dfrac{-5}{8}$

قيمة الدالة $g(x)$ عند $x = 1$ هي: $g(1) = \dfrac{(1) - 5}{(1)^3 + 8} = \dfrac{-5}{1 + 8} = \dfrac{-4}{9}$

لإيجاد مجال الدالة الكسرية نتبع الخطوات التالية :

1) نساوي المقام بالصفر.
2) نحلل المقام (إذا احتجنا لذلك).
3) نوجد قيم x التي تجعل المقام = صفر.
4) المجال هو $\mathbb{R} - \{$أصفار المقام$\}$.

مثال (10) :

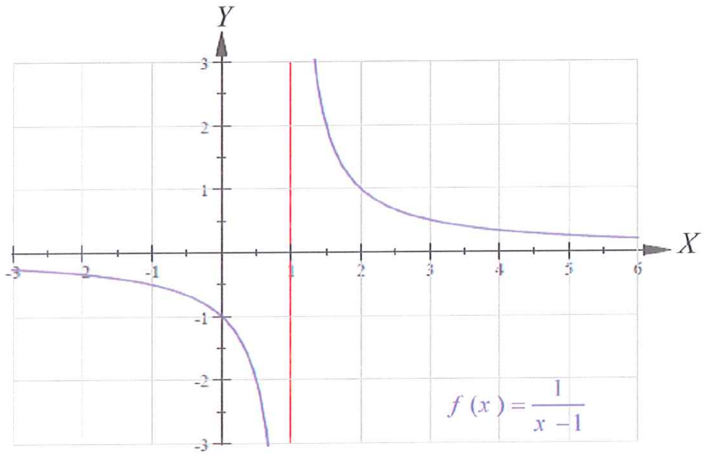
عيّن مجال الدالة الكسرية $y = f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ثم ارسم الدالة.

الحـــل :

نساوي المقام بالصفر فنحصل على:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

إذا المجال هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty) = \mathbb{R} - \{1\}$



شكل (4)

مثال (11) :

أوجد مجال الدالة الآتية ثم ارسم الدالة.

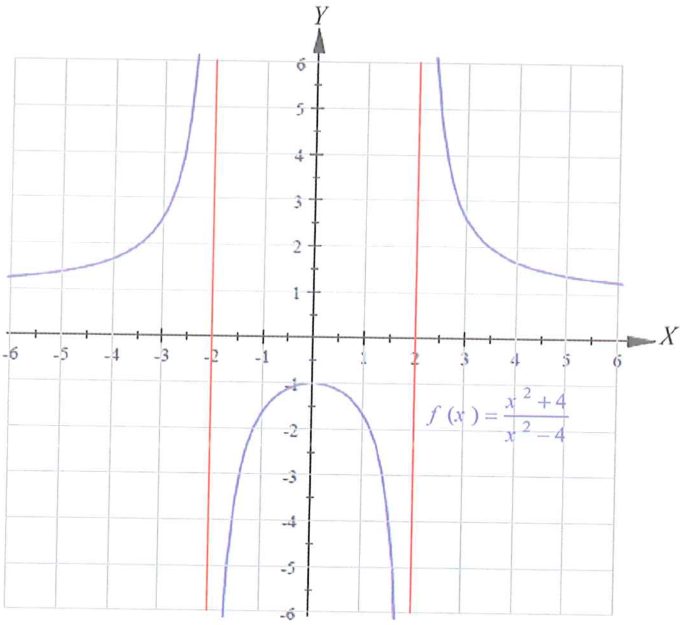
$$y = f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

الحـــل:

نساوي المقام بالصفر ونحلل كالتالي:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2, -2$$

إذاً المجال هو $(-\infty,-2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$



شكل (5)

مثال (12):

أوجد مجال الدالة الآتية:

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

الحـــل:

نساوي المقام بالصفر ونحلل كالتالي:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x-2)(x-3) = 0$$

إذاً القيم التي تجعل المقام = صفر هي $x = 0, \ x = 2, \ x = 3$

وبالتالي فإن مجال الدالة $f(x)$ هو $\mathbb{R} - \{0, 2, 3\}$

4 - الدالة الجذرية

تعريف: (الدالة الجذرية)

هي الدالة التي معادلتها على الصورة $y = f(x) = \sqrt[n]{x}$ ، حيث $n > 1, n \in N$.

مجال الدالة الجذرية هو جميع قيم x بحيث $x \geq 0$ إذا كان n عدد زوجي، وجميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ إذا كان n عدد فردي.

ملاحظة (1):

في معظم التطبيقات العملية الاقتصادية يظهر النوع الآتي من الدوال $y = f(x) = \sqrt[n]{h(x)}$ حيث $h(x)$ كثيرة حدود، $n > 1, n \in N$. ويكون مجال الدالة في هذه الحالة هو جميع قيم x التي تجعل $h(x) \geq 0$ إذا كان n عدد زوجي، أما إذا كان n عدد فردي فإن المجال هو $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

مثال (13):

إذا كانت $y = f(x) = \sqrt{5x + 1}$ أوجد:

$$f(0),\ f(1),\ f(\frac{1}{5}),\ f(x^2 + 2)$$

الحل:

$$f(0) = \sqrt{5(0) + 1} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$f(1) = \sqrt{5(1) + 1} = \sqrt{5 + 1} = \sqrt{6}$$

$$f(\frac{1}{5}) = \sqrt{5\left(\frac{1}{5}\right)+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$f(x^2+2) = \sqrt{5(x^2+2)+1} = \sqrt{5x^2+10+1} = \sqrt{5x^2+11}$$

مثال (14):

إذا كانت $y = f(x) = \sqrt[3]{3x+8}$ أوجد:

$$f(0),\ f(-3),\ f\left(\frac{19}{3}\right)$$

الحـــل:

$$f(0) = \sqrt[3]{3(0)+8} = \sqrt[3]{0+8} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(2)} = 2$$

$$f(-3) = \sqrt[3]{3(-3)+8} = \sqrt[3]{-9+8} = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(-1)^3} = -1$$

$$f\left(\frac{19}{3}\right) = \sqrt[3]{3\left(\frac{19}{3}\right)+8} = \sqrt[3]{19+8} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{(3)^3} = 3$$

مثال (15):

لماذا تعتبر هذه الدوال دوال ليست جذرية؟

1) $f(x) = \sqrt{x} + x^{-1}$

2) $g(x) = \sqrt{|x+1|}$

3) $h(x) = \sqrt{\dfrac{5x+1}{3x+2}}$

الحـــــل:

1) $f(x)$ ليست دالة جذرية لأن $x^{-1}=\frac{1}{x}$ ليست دالة جذرية.

2) $g(x)$ ليست دالة جذرية لأن ما تحت الجذر ليس كثيرة حدود.

3) $h(x)$ ليست دالة جذرية لأن ما تحت الجذر ليس كثيرة حدود (دالة كسرية).

مثال (16):

أوجد مجال الدوال الآتية:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}$

2) $g(x)=\sqrt[3]{x-2}$

3) $h(x)=\sqrt{1-x}$

الحـــــل:

عند حساب مجال الدوال الجذرية نحدد أولاً n زوجية أم فردية:

i) إذا كانت n زوجية نوجد قيم x التي تجعل ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر.

ii) إذا كانت n فردية فمجال الدالة هو $\mathbb{R}=(-\infty\,,\infty)$.

1) بما أن $n=2$ عدد زوجي، نضع:

$$x-2\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq 2$$

إذاً المجال هو: $[2,\infty)$

2) بما أن $n=3$ عدد فردي، إذاً المجال هو جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}=(-\infty\,,\infty)$.

3) بما أن $n=2$ عدد زوجي، نضع:

$$1-x\geq 0 \;\Rightarrow\; x\leq 1$$

إذاً المجال هو: $(-\infty,1]$

5.2.3 العمليات على الدوال

إذا كان لدينا دالتين f, g فإن

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq 0$

مثال (17):

إذا كان

$$f(x) = 3x + 1$$

$$g(x) = x + 2$$

أوجد كلاً من :

1) $(f + g)(x)$

2) $(f - g)(x)$

3) $(f \cdot g)(x)$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

5) $(f + g)(-1)$

6) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

الحــــل

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 1 + x + 2 = 4x + 3$

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x+1) - (x+2) = 2x - 1$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x+1) \cdot (x+2) = 3x^2 + 7x + 2$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+1}{x+2} \quad , \quad x \neq -2$

5) $(f+g)(-1) = 4(-1) + 3 = -4 + 3 = -1$

6) $\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{3(0)+1}{0+2} = \frac{1}{2}$

نقاط تقاطع دالتين:

إذا كان لدينا دالتين $f(x)$ ، $g(x)$ فإن نقاط تقاطع الدالتين يمكن إيجادها بطريقتين:

الطريقة الجبرية : هي أن نوجد قيم x التي تحقق المعادلة $f(x) = g(x)$

الطريقة البيانية : هي أن نقوم برسم كلاً من الدالتين f , g ونحدد نقاط تقاطع الدالة f مع منحنى الدالة g.

مثال (18):

إذا كانت $g(x) = x + 6$ ، $f(x) = x^2$ أوجد نقاط تقاطع الدالتين f , g جبرياً وبيانياً

الحــــل

أولاً الطريقة الجبرية : نقوم بإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

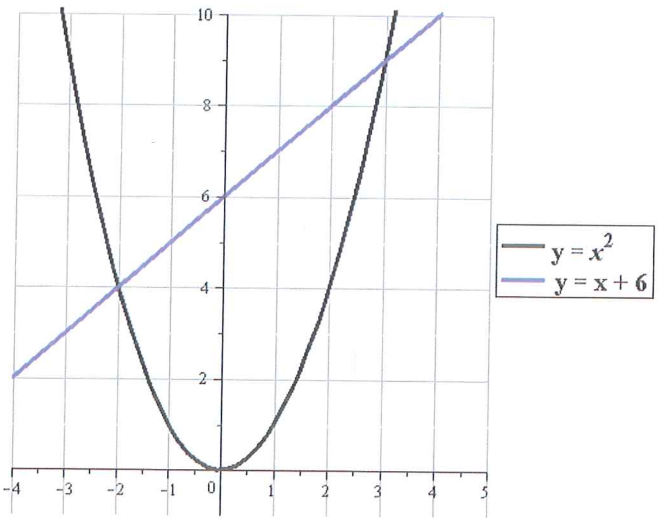
بالتعويض بقيم $x = 3$ ، $x = -2$ في f أو g نحصل على

$$f(3) = (3)^2 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^2 = 4$$

إذاً نقاط التقاطع هي $(-2, 4)$ ، $(3, 9)$.

ثانياً الطريقة البيانية : من الرسم نجد أن نقاط التقاطع هي $(-2, 4)$ ، $(3, 9)$.



شكل (6)

مثال (19):

إذا كانت

$$f(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$g(x) = 2x + 6$$

أوجد نقاط تقاطع الدالتين g , f جبرياً وبيانياً

الحـــل

أولاً الطريقة الجبرية : نقوم بإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 4x + 3 = 2x + 6$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$

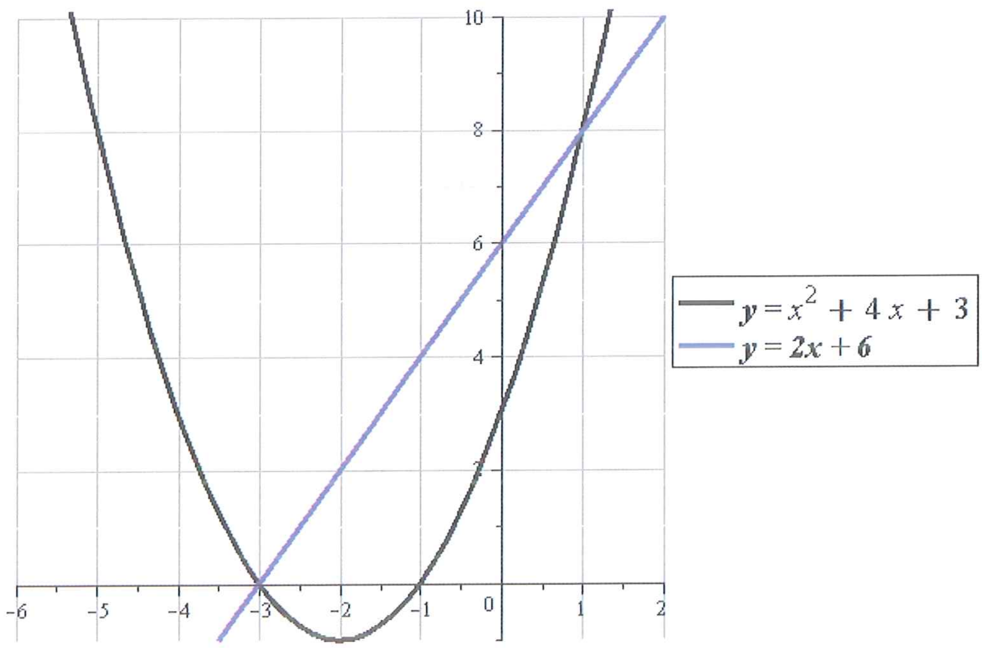
$\Rightarrow x = -3 \quad , \quad x = 1$

$g(-3) = 2(-3) + 6 = -6 + 6 = 0$

$g(1) = 2(1) + 6 = 8$

إذاً نقاط التقاطع هي $(1, 8)$ ، $(-3,0)$.

ثانياً الطريقة البيانية : نقوم برسم كلاً من الدالتين g , f ونجد أن نقاط المنحنين هما $(1, 8)$ ، $(-3,0)$.



شكل (7)

5.2.4 تمارين

(1) أوجد مجال الدوال التالية:

1) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-1}$

2) $f(x) = \sqrt{x+4}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{5-x}$

4) $f(x) = \sqrt{x-3}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

6) $f(x) = x^3 - 5x + 1$

(2) مثل كل من الدوال الآتية بيانياً:

1) $f(x) = 4$

2) $f(x) = x^2 - 4$

3) $f(x) = x$

4) $f(x) = x^3 - 5$

5) $f(x) = -x + 3$

6) $f(x) = x^2 + x - 1$

(3) أوجد درجة كثيرات الحدود الآتية:

1) $f(x) = 3 + 5x + x^7$

2) $g(t) = t^4 - 3$

3) $h(x) = 5$

4) $f(x) = x + 3$

5) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

6) $h(x) = x^3 - x$

(4) إذا كانت الدالة $f(x) = x - 1$ فإن قيمة $f(1)$ هى :

a	0	b	3
c	1	d	-3

(5) إذا كان $f(x) = x^3 - 2$ فإن $f(-1) =$ هى :

a	-2	b	-3
c	2	d	-4

(6) إذا كان $f(x) = x^3 + 2$ فإن $f(1) =$ هى :

a	-2	b	-3
c	2	d	3

(7) إذا كانت الدالة $f(x) = x^2 - 3$ فإن قيمة $f(1)$ هى :

a	0	b	3
c	1	d	-2

(8) مجال الدالة $f(x) = x^2 - 3x + 8$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

a	صواب	b	خطأ

(9) مجال الدالة $f(x) = \dfrac{5x + 11}{x}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

a	صواب	b	خطأ

(10) مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ هو $\mathbb{R} - \{1\}$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية

a	صواب	b	خطأ

(11) مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{x+1}$ هو $\mathbb{R} - \{1\}$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية

a	صواب	b	خطأ

(12) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ هو:

a	$(-\infty,-2)$	b	$(-\infty,2)$
c	$[-2,\infty)$	d	$(-2,\infty)$

(13) مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x-5}$ هو:

a	$(-\infty,5)$	b	$(-\infty,5)$
c	$[5,\infty)$	d	$(5,\infty)$

(14) مجال الدالة $f(x) = \sqrt[5]{8-x}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

a	صواب	b	خطأ

(15) $y = f(x) = 2x + 6$ تمثل دالة:

a	خطية	b	تربيعية
c	تكعيبية	d	ثابتة

(16) $y = f(x) = x^3 + x$ تمثل دالة :

a خطية b تربيعية

c تكعيبية d ثابتة

(17) $y = f(x) = -5x^2 + x - 2$ تمثل دالة :

a خطية b تربيعية

c تكعيبية d ثابتة

(18) $y = f(x) = -3$ تمثل دالة :

a خطية b تربيعية

c تكعيبية d ثابتة

(19) أوجد نقاط تقاطع الدوال الآتية:

1) $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = x - 15$

2) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = -5x - 3$

3) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $g(x) = x^2 + 2x + 4$

4) $f(x) = 12$, $g(x) = x^2 + 3$

5) $f(x) = 5x - 2$, $g(x) = 3x^2$

5.3 الفصل الثالث

الدالة الزوجية والدالة الفردية

الدالة الزوجية والدالة الفردية

5.3.1 الدالة الزوجية والدالة الفردية

تعريف: (الدالة الزوجية)

تسمى الدالة $f(x)$ دالة زوجية إذا كانت $f(-x)=f(x)$ لجميع قيم x في مجال الدالة.

ملاحظة (1) :

منحنى الدالة الزوجية متماثل حول محور y .

مثال (1):

أثبت أن الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية.

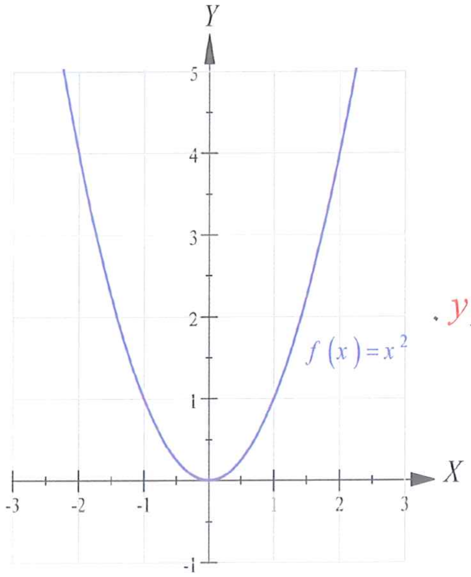
الحـــل:

نلاحظ أن:

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$

بالتالي فالدالة $f(x)=x^2$ هي دالة زوجية.

من الرسم نجد أن منحنى الدالة متماثل حول محور y .



شكل (1)

مثال (2):

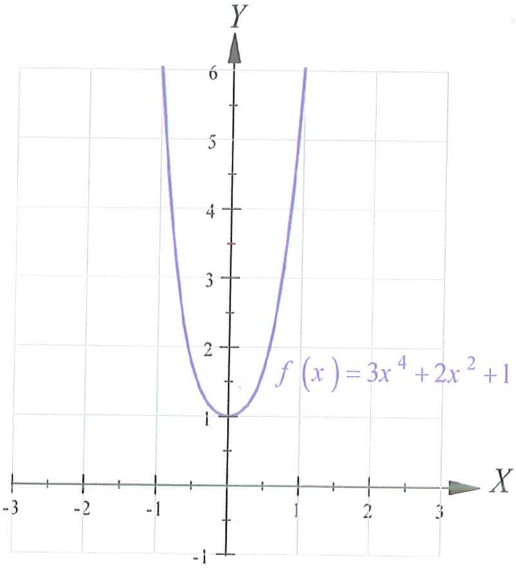
أثبت أن الدالة $f(x) = 3x^4 + 2x^2 + 1$ دالة زوجية.

الحـــل:

نلاحظ أن:

$$f(-x) = 3(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1$$
$$= 3x^4 + 2x^2 + 1$$
$$= f(x)$$

بالتالي فالدالة زوجية.



شكل (2)

مثال (3):

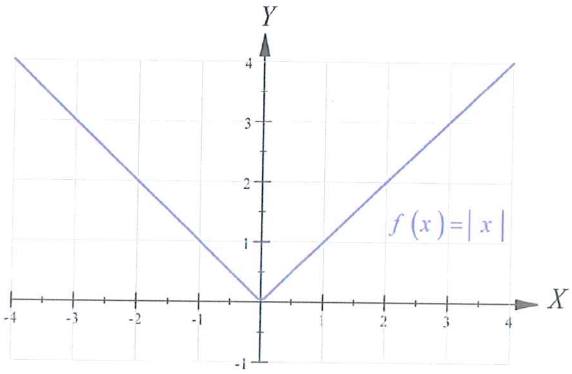
أثبت أن الدالة $f(x) = |x|$ دالة زوجية.

الحـــل:

نلاحظ أن:

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

بالتالي فالدالة زوجية.



شكل (3)

تعريف: (الدالة الفردية)

الدالة $f(x)$ تسمى دالة فردية إذا كانت

$$f(-x) = -f(x)$$

ملاحظة (2):

منحنى الدالة الفردية متماثل حول نقطة الأصل .

مثال (4):

أثبت أن الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية.

الحـــل:

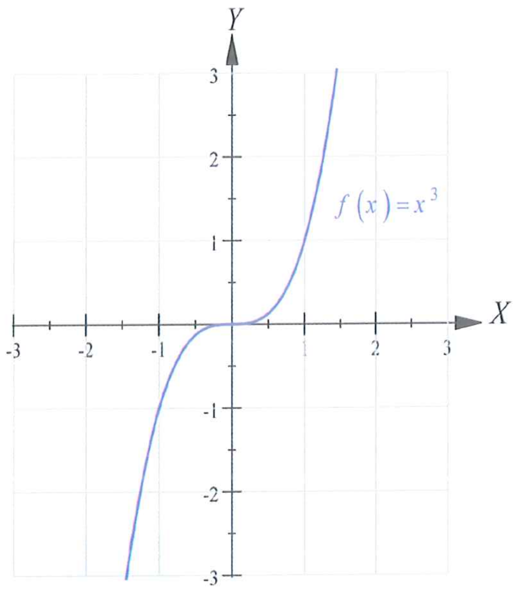
نلاحظ أن:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

بالتالي فالدالة $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.

من الرسم نجد أن منحنى الدالة متماثل

حول نقطة الأصل .



شكل(4)

مثال (5):

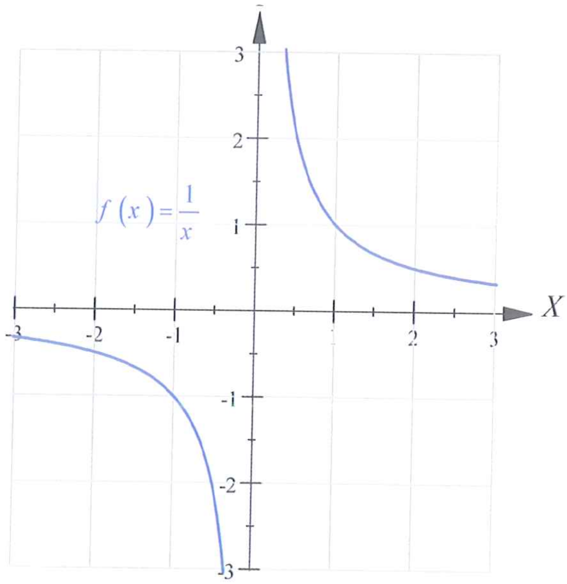
أثبت أن الدالة $f(x)=\dfrac{1}{x}$ دالة فردية.

الحـــل:

نلاحظ أن:

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$

بالتالي فالدالة فردية.



شكل (5)

ملاحظة (3):

الدالة التي لا تحقق الشرط (1) ولا الشرط (2) تُسمى دالة لا زوجية ولا فردية.

مثال (6):

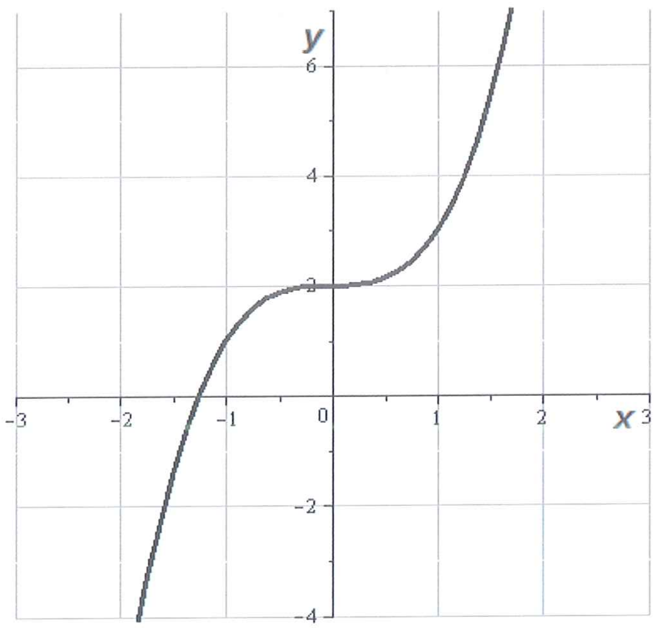
أثبت أن الدالة $f(x)=x^3+2$ هي دالة لازوجية ولا فردية.

الحـــل:

$f(-x) = (-x)^3 + 2 = -x^3 + 2 \neq f(x)$ إذا الدالة ليست زوجية

$f(-x) = -x^3 + 2 \neq -f(x)$ إذا الدالة ليست فردية.

إذا الدالة لازوجية ولافردية



شكل (6)

5.3.2 خواص الدوال الزوجية والفردية

1) مجموع (أو فرق) أي دالتين زوجتين هو دالة زوجية.

2) مجموع (أو فرق) أي دالتين فرديتين هو دالة فردية.

3) حاصل ضرب (أو قسمة) دالتين زوجتين هو دالة زوجية.

4 حاصل ضرب (أو قسمة) دالتين فرديتين هو دالة زوجية.

5) حاصل ضرب (أو قسمة) دالتين أحداهما زوجية والأخرى فردية هو دالة فردية.

مثال (7):

حدد نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية:

1) $f(x) = 2x^2 + 3$

2) $f(x) = 5x$

3) $f(x) = x + 1$

4) $f(x) = (2 + x)^2 - (2 - x)^2$

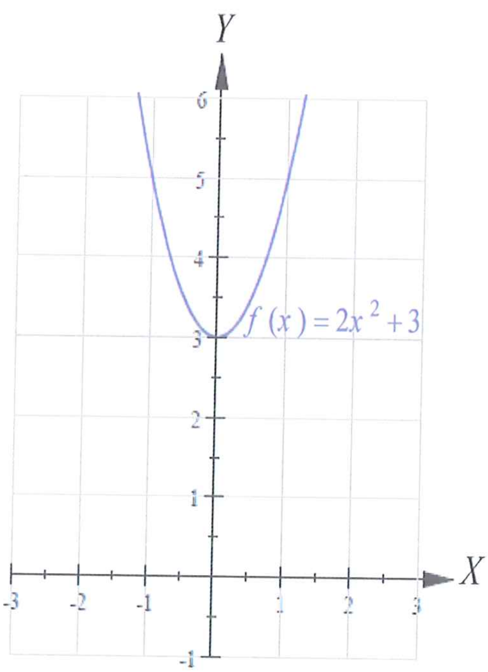
5) $f(x) = (1 + x)^3 + (1 - x)^3$

الحـــل:

1) $f(x) = 2x^2 + 3$

$f(-x) = 2(-x)^2 + 3 = 2x^2 + 3 = f(x)$

$\Rightarrow \quad f(-x) = f(x)$



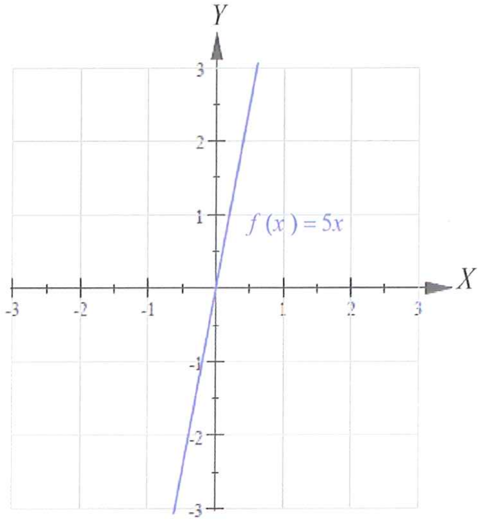
شكل (7)

بالتالي فإن الدالة زوجية.

2) $f(x) = 5x$

$f(-x) = 5(-x) = -5x = -f(x)$

$\Rightarrow \quad f(-x) = -f(x)$



شكل (8)

بالتالي فإن الدالة فردية.

3) $f(x) = x + 1$

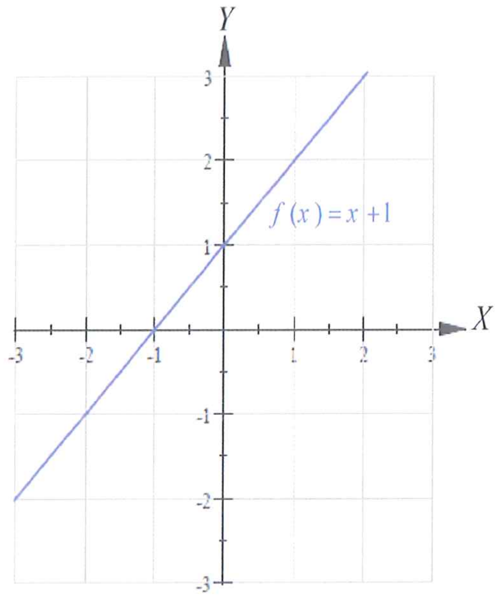
$f(-x) = (-x) + 1 = -x + 1 \neq f(x)$

إذاً الدالة ليست زوجية

$f(-x) = -(x - 1) \neq -f(x)$

إذاً الدالة ليست فردية.

إذاً الدالة لا زوجية ولا فردية.



شكل (9)

4) $f(x) = (2 + x)^2 - (2 - x)^2$

$f(-x) = (2 - x)^2 - (2 + x)^2$

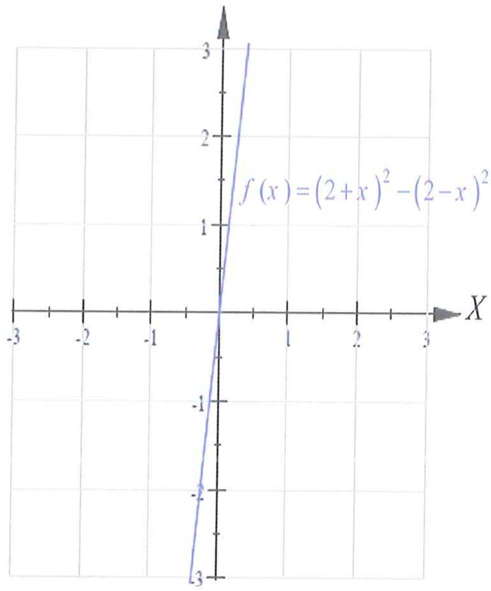
$= -[(2 + x)^2 - (2 - x)^2] = -f(x)$

إذاً الدالة ليست زوجية

بالتالي فإن الدالة فردية.

لاحظ أن $f(x) = 8x$

$f(x) = (2 + x)^2 - (2 - x)^2 = 8x$



شكل (10)

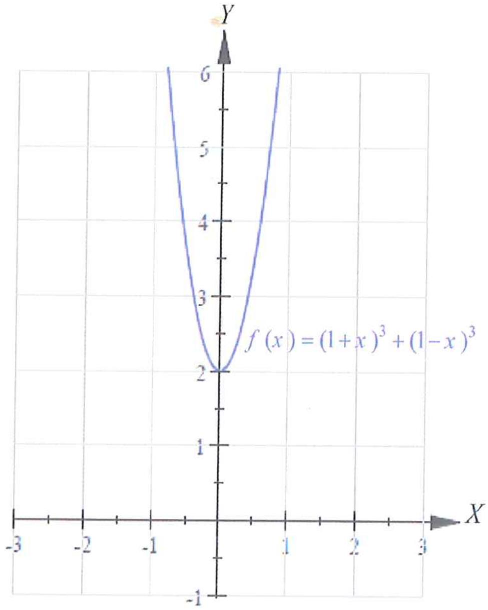
5) $f(x) = (1 + x)^3 + (1 - x)^3$

$f(-x) = (1 - x)^3 + (1 + x)^3$

$= (1 + x)^3 + (1 - x)^3 = f(x)$

بالتالي فإن الدالة زوجية.

لاحظ أن $f(x) = (1 + x)^3 + (1 - x)^3 = 6x^2 + 2$



شكل (11)

5.3.3 تمارين

(1) ابحث نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية:

1) $f(x) = 5$

2) $f(x) = |4x|$

3) $f(x) = 3x - 2x^3$

4) $f(x) = \dfrac{2x^3}{5}$

5) $f(x) = x^7 - 5x^6$

6) $f(x) = \dfrac{5}{2x+3}$

7) $f(x) = x^4 - 2x + 5$

8) $f(x) = (x+1)^2$

9) $f(x) = x^5 - 2x^3 + 1$

10) $f(x) = \dfrac{12x^2 + 4}{16}$

11) $f(x) = 2x^2 + 3x^4 - 5$

12) $f(x) = \left(\dfrac{2x^3}{5} \times \dfrac{5}{2x}\right)^2$

13) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^3 + x}$

14) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^5 + x^3}$

15) $f(x) = \dfrac{-3}{x^4 + 1}$

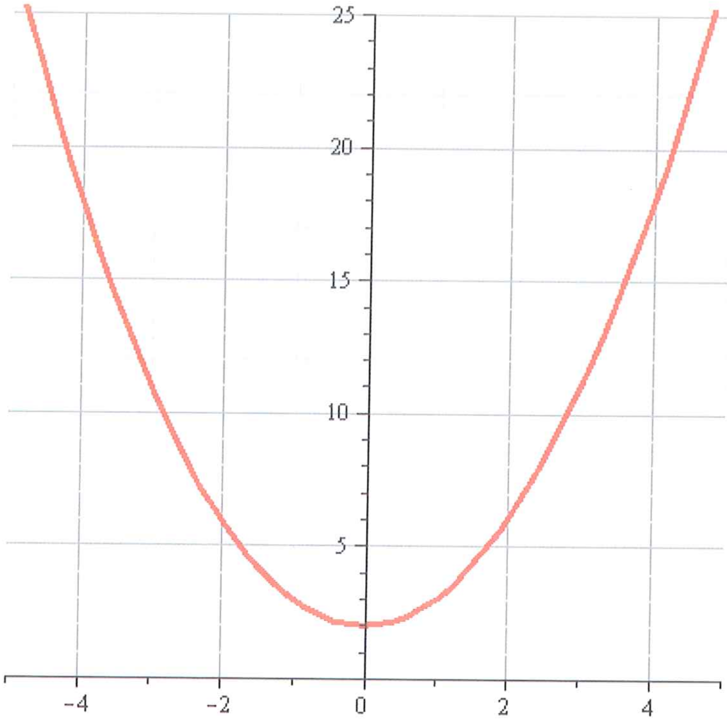
16) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3}$

17) $f(x) = x^2 + \dfrac{x}{x^3 + 5x}$

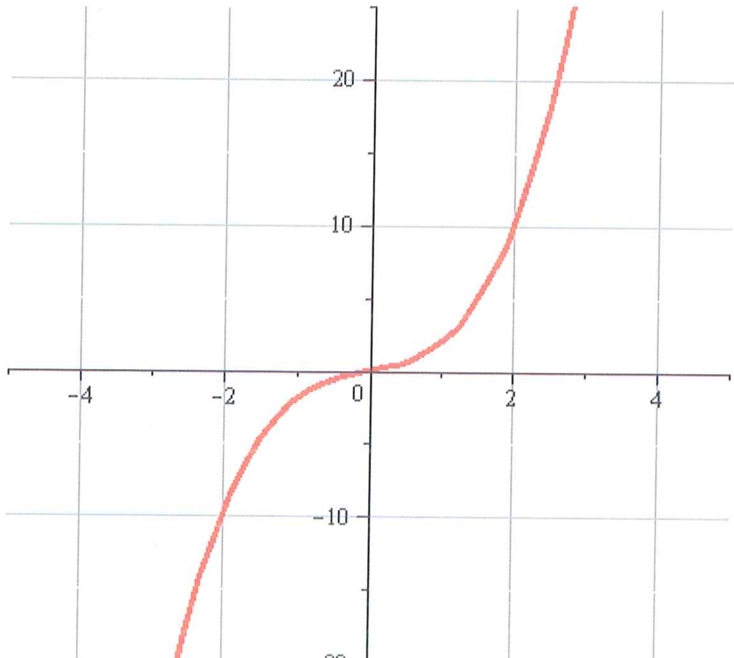
18) $f(x) = x^3 - \dfrac{x^3}{x^4 + x^2}$

(2) وضح من الرسم ما إذا كانت الدوال الآتية زوجية أو فردية أو لازوجية ولافردية.

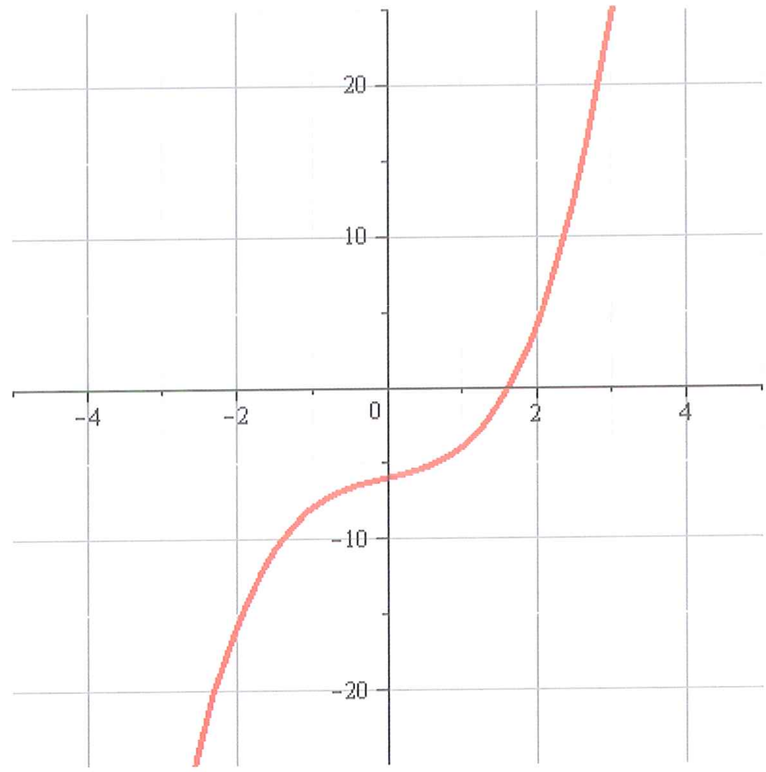
1)



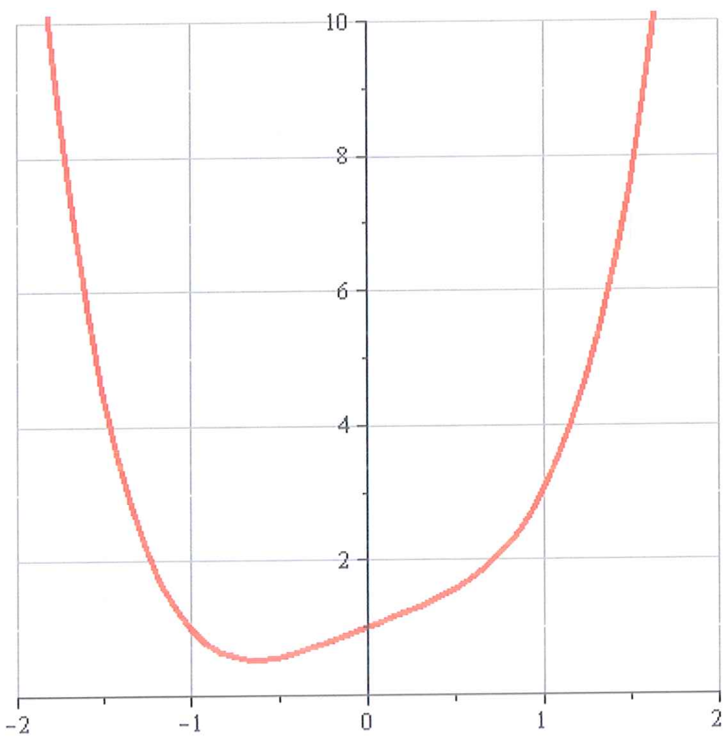
2)



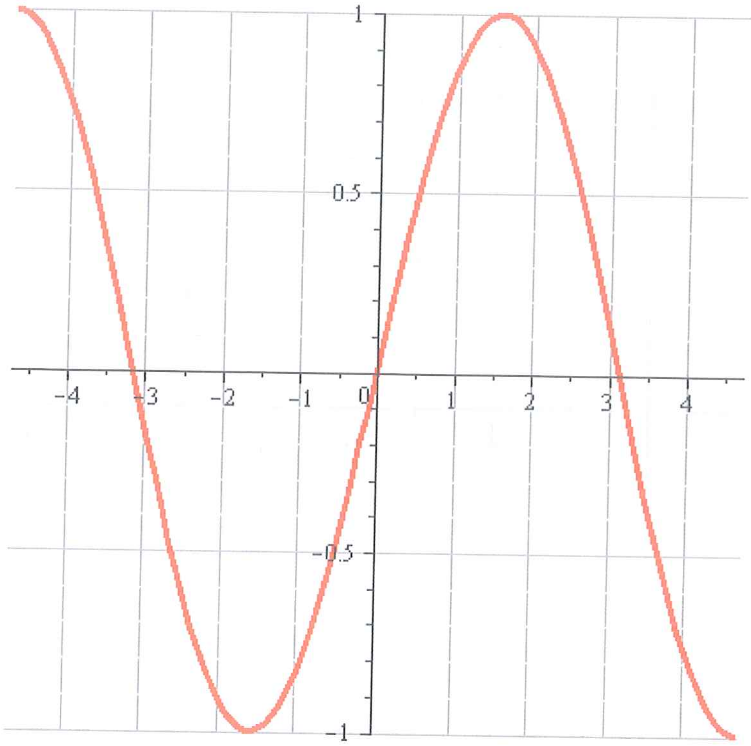
3)



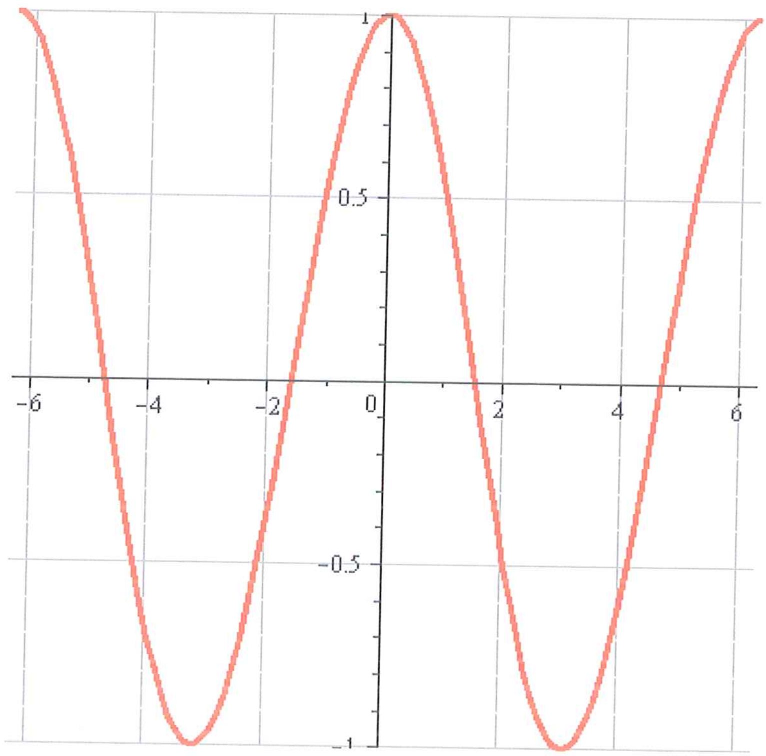
4)



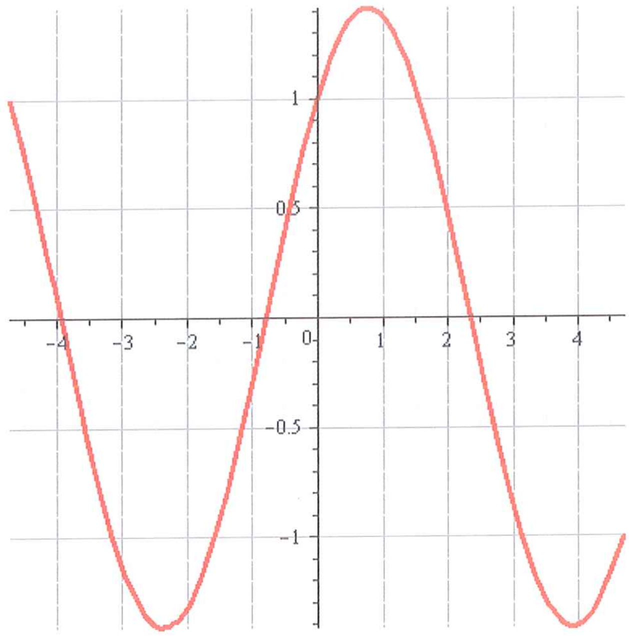
5)



6)



7)



(3) اختيار الاجابة الصحيحة.

1) الدالة $f(x) = x - x^5$ دالة فردية.

a صواب b خطأ

2) الدالة $f(x) = x^2 - 3$ دالة فردية.

a صواب b خطأ

3) الدالة $f(x) = x^3 - x^5$ دالة فردية.

a صواب b خطأ

4) الدالة $f(x) = x^2 - x^6$ دالة زوجية.

a صواب b خطأ

5) الدالة $f(x) = x^3 - x^4$ دالة زوجية.

a صواب b خطأ

5.4 الفصل الرابع

الدوال المسترسلة

الدوال المسترسلة

5.4.1 الدالة الأسية

تنقسم الدالة الأسية إلى نوعين هما:

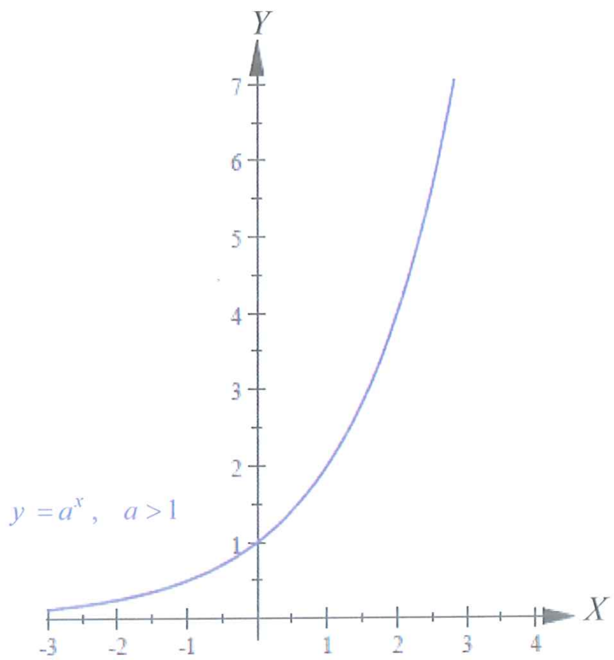
أولاً: الدالة الأسية العامة

تعريف:

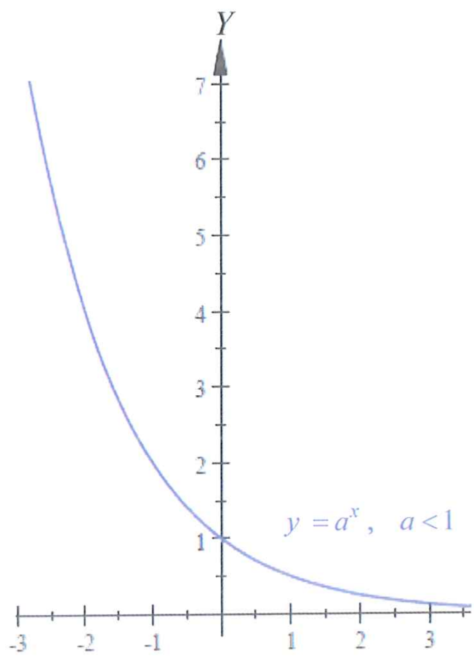
الدالة الأسية العامة هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = f(x) = a^x$$

حيث a عدد حقيقي موجب غير الواحد، ويُسمى a بالأساس والمتغير x هو الأس.



شكل (1)



شكل (2)

ثانياً: الدالة الأسية الطبيعية

تعريف:

هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = e^x$$

حيث e عدد غير قياسي ويساوي تقريباً $e \approx 2.718282$ ويُسمى الأساس الطبيعي.

مجال أي دالة أسية هو $R = (-\infty, \infty)$ ومداها هو $(0, \infty)$.

ملاحظة (1):

تتبع الدالة الأسية العامة والطبيعية قواعد الأسس المذكورة في الفصل 1.3

مثال (1):

هل الدوال الآتية تمثل دوال أسية عامة؟

1) $f(x) = 3^x$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

3) $f(x) = x^x$

4) $f(x) = x^3$

الحل:

1) $f(x) = 3^x$

دالة أسية لأن الأساس $a = 3$ ثابت والمتغير x في الأس.

2) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$

دالة أسية لأن الأساس $a=\frac{1}{4}$ ثابت والأس متغير هو x .

3) $f(x)=x^x$

لا تمثل دالة أسية لأن الأساس $a=x$ متغير .

4) $f(x)=x^3$

لا تمثل دالة أسية لأن الأس 3 مقدار ثابت، والأساس $a=x$ متغير.

5.4.2 الدالة اللوغاريتمية

تنقسم هذه الدالة إلى نوعين هما:

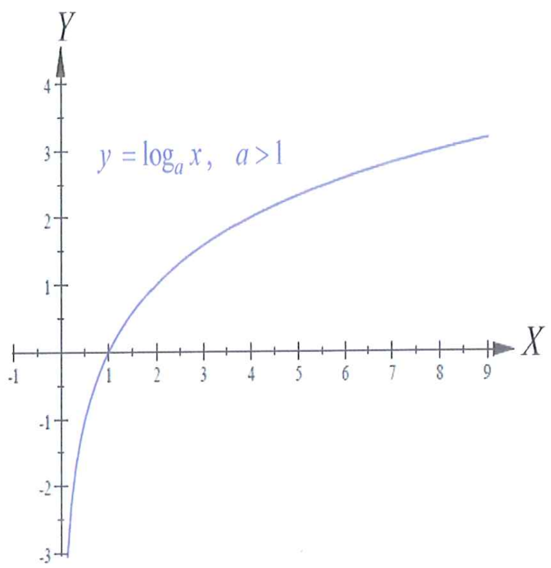
أولاً: الدالة اللوغاريتمية العامة:

تعريف:

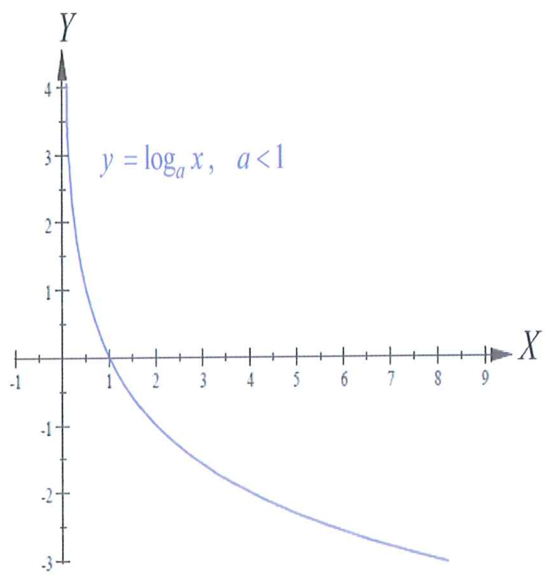
هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y=f(x)=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

حيث يُسمى a أساس الدالة اللوغاريتمية وهو عدد موجب غير الواحد.



شكل(3)



شكل(4)

ثانيا : الدالة اللوغاريتمية الطبيعية :

تعريف:

هي الدالة التي معادلتها على الصورة:

$$y = f(x) = \log_e x = \ln x$$

حيث يُسمى e هو الأساس الطبيعي للدالة اللوغاريتمية الطبيعية.

ملاحظة (2):

1) تُكتب $\log_e x$ بالرمز $\ln x$ للتمييز بين اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم العام.

2) إذا كان الأساس 10 لا يُكتب وتُسمى اللوغاريتمات المعتادة $\log_{10} x = \log x$.

3) مجال أي دالة لوغاريتمية هو $(0, \infty)$ ومداها هو $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$.

قوانين اللوغاريتمات

لأي عددين p,u حقيقيين موجبين وَ a عدد حقيقي موجب غير الواحد

1) $\log_a (pu) = \log_a p + \log_a u$

2) $\log_a \left(\dfrac{p}{u}\right) = \log_a p - \log_a u$

3) $\log_a (p^n) = n \log_a p$

4) $\log_a (a) = 1$

5) $\log_a (1) = 0$

6) $\log_a p = c \Leftrightarrow p = a^c$

ملاحظة (3):

جميع الدوال اللوغاريتمية تتبع قوانين اللوغاريتمات السابقة.

مثال (2):

احسب ما يلي باستخدام التعريف:

1) $\log 10 = 1 \quad (10 = 10^1)$

2) $\log 100 = 2 \quad (100 = 10^2)$

3) $\log 0.001 = -3 \quad (0.001 = \dfrac{1}{1000} = 10^{-3})$

4) $\log_2(32) = 5 \quad (32 = 2^5)$

5) $\log_{16}(4) = \dfrac{1}{2} \qquad (4 = \sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}})$

6) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right) = -2 \qquad (\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2} = 3^{-2})$

7) $\log_{\sqrt{9}}(9) = 2 \qquad (9 = (\sqrt{9})^2)$

8) $\log_7(7) = 1 \quad (7 = 7^1)$

9) $\log_5(1) = 0 \quad (1 = 5^0)$

مثال (3):

احسب ما يلي:

1) $\log_4(4 \times 3) = \log_4 4 + \log_4 3 = 1 + (\log_4 3)$

2) $\log_4\left(\dfrac{9}{4}\right) = \log_4 9 - \log_4 4 = \log_4 9 - 1$

3) $\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3\log_5 5 = 3 \times 1 = 3$

مثال (4):

أوجد قيمة ما يلي:

$$\log_2 32 + \log_6 36 - \log_5 625$$

الحل:

$$\log_2 32 + \log_6 36 - \log_5 625 = \log_2 2^5 + \log_6 6^2 - \log_5 5^4 = 5 + 2 - 4 = 7 - 4 = 3$$

مثال (5):

أوجد قيمة ما يلي:

$$\log_5 \sqrt{5} + \log_4 2 + \log_9 3$$

الحل:

$$\log_5 5^{1/2} + \log_4 4^{1/2} + \log_9 9^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

مثال (6):

أوجد قيمة ما يلي:

1) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

2) $\log_4 32 + \log_4 2 = \log_4 (32 \times 2) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

مثال (7):

بسط المقدار التالي:

1) $\log_5(125\times25) = \log_5 125 + \log_5 25 = \log_5 5^3 + \log_5 5^2 = 3\log_5 5 + 2\log_5 5 = 3 + 2 = 5$

2) $\log_6\left(\dfrac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt{6}}\right) = \log_6 \sqrt[3]{36} - \log_6 \sqrt{6} = \log_6 6^{\frac{2}{3}} - \log_6 6^{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

مثال (8):

بسط المقدار التالي:

1) $\ln 125 - \ln 25 = \ln 5^3 - \ln 5^2 = 3\ln 5 - 2\ln 5 = \ln 5$

2) $\ln 28 - \ln 7 + \ln 14 - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{28 \times 14}{7 \times 2}\right) = \ln 28$

5.4.3 المعادلات الأسية واللوغاريتمية

نعلم من تعريف الدالة الأسية واللوغاريتمية أن:

$$\log_a x = y \quad \Rightarrow \quad x = a^y, \quad a \neq 1, \quad a, x > 0$$

ملاحظة (4):

1) إذا كان $a^m = a^n$ (بحيث أن $(a > 0, \ a \neq 1)$) فإن $m = n$.

2) إذا كان $x^m = y^m$ (بحيث أن $(m \neq 0)$ عدد فردي) فإن $x = y$.

3) إذا كان $x^m = y^m$ (بحيث أن $(m \neq 0)$ عدد زوجي) فإن $x = \pm y$.

مثال (9):

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

1) $5^{3x-2} = 125$

2) $2^{x-1} = 16$

3) $3(2^x) = 12$

4) $\left(\sqrt[6]{64}\right)^{x+2} = 16$

5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7x-2} = (125)^{x-1}$

الحل:

1) $5^{3x-2} = 125 \iff 5^{3x-2} = 5^3$

$\iff 3x - 2 = 3$

$\iff x = \frac{5}{3}$

2) $2^{x-1} = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x-1} = 2^4$

$\Leftrightarrow \quad x - 1 = 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 5$

3) $3(2^x) = 12 \quad \Leftrightarrow \quad 3(2^x) = 3(2^2)$

$\Leftrightarrow \quad 2^x = 2^2$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

4) $\left(\sqrt[6]{64}\right)^{x+2} = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[6]{2^6}\right)^{x+2} = 2^4$

$\Leftrightarrow \quad 2^{x+2} = 2^4$

$\Leftrightarrow \quad x + 2 = 4$

$\Leftrightarrow \quad x = 2$

5) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{7x-2} = (125)^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad (5^{-1})^{7x-2} = (5^3)^{x-1}$

$\Leftrightarrow \quad 5^{-7x+2} = 5^{3x-3}$

$\Leftrightarrow \quad -7x + 2 = 3x - 3$

$\Leftrightarrow \quad 10x = 5$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

مثال (10):

أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

1) $\log_x 64 = 3$

2) $\log_4 x = 3$

3) $\log_4 64 = x$

4) $\log_x 125 = \dfrac{3}{2}$

5) $\log_8 (x+5) = \dfrac{1}{3}$

الحـــل:

1) $\log_x 64 = 3 \iff 64 = x^3$

$\iff 4^3 = x^3$

$\iff x = 4$

2) $\log_4 x = 3 \iff x = 4^3$

$\iff x = 64$

3) $\log_4 64 = x \iff 64 = 4^x$

$\iff 4^3 = 4^x$

$\iff x = 3$

4) $\log_x 125 = \dfrac{3}{2} \iff 125 = x^{\frac{3}{2}}$

$\iff 5^3 = x^{\frac{3}{2}}$

$\iff x = (5^3)^{\frac{2}{3}}$

$\iff x = 5^2$

$\iff x = 25$

5) $\log_8 (x+5) = \dfrac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x+5 = 8^{\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow \quad x+5 = 2$

$\Leftrightarrow \quad x = -3$

5.4.4 تمارين

(1) أوجد مجال الدوال التالية:

1) $f(x) = 3^x$

2) $f(x) = 3e^x$

3) $f(x) = \log_3(x-1)$

4) $f(x) = \ln(x-1)$

(2) بسط الدوال التالية:

1) $y = \log_3 \dfrac{x^2}{27}$

2) $y = \log_5(5x+3) + \log_5 2$

3) $y = \log_3 3^4(2x+1)$

4) $y = \log_5 \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2-9}$

(3) بسط ما يلي:

1) $y = \log_3 \sqrt[n]{\dfrac{a^2 b}{c^5}}$

2) $\ln 125 - \ln 125$

3) $\dfrac{\log 8 - 3\log 9}{\log 4 - 4\log 3}$

4) $\ln 27 - \ln 7 + \ln 14 - \ln 2$

5) $\log_2 \dfrac{1}{4} - \log_7 49 + \dfrac{3}{7}\log_2 128$

6) $\log_7 49 - 2\log_5 5 + \log_5 125 - \log_7 7^{-3}$

(4) حل المعادلات التالية:

1) $e^{x^2} = e^{16}$

2) $\log_3 x = -2$

3) $3^x = 3^{5x-6}$

4) $\log_x 27 = 3$

5) $5^{3x} = 5^{4x-2}$

6) $\log_2(x-7) = 3$

7) $25^{x+3} = 125^x$

8) $\log 5 + \log x = 2$

9) $5^x = (x+7)^3$

10) $\log(x+5) = \log x(2x-7)$

11) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-5}$

12) $\log(x+1) - \log x(2x-7) = 0$

(5) إذا كان $3^{2x-1} - 9 = 0$ فإن قيمة x هي :

a	$\frac{1}{2}$	b	$\frac{3}{2}$
c	$\frac{-1}{2}$	d	$\frac{3}{5}$

(6) إذا كان $3^{5x-1} - 9 = 0$ فإن قيمة x هي :

a	$\frac{3}{2}$	b	$\frac{1}{2}$
c	$\frac{3}{5}$	d	$\frac{-1}{2}$

(7) إذا كان $3^{3x-2} = 81$ فإن $x =$

a	2	b	-1
c	1	d	0

(8) $\log_2(64) - \log_5(125) =$

a	4	b	0
c	3	d	7

5.5.1 تطبيقات على الدالة الخطية :

مثال (1) :

تتوقع إحدى دور النشر للكتاب أن تزداد مبيعاتها خلال أسبوع معرض الكتاب بحيث تصل المبيعات إلى 3,000 كتاب في اليوم إذا كان متوسط سعر البيع هو 100 ريال للكتاب الواحد، فإذا تم تخفيض السعر ليصبح 80 ريال للكتاب فإن دار النشر تتوقع زيادة المبيعات بمقدار 500 كتاب يومياً. ما هي المعادلة التي تمثل العلاقة بين مبيعات الكتاب والسعر المحدد لبيعها.

الحـــل:

نفرض أن السعر المحدد لبيع الكتاب x (متغير مستقل) ونفرض أن حجم المبيعات y (متغير تابع).

مقدار التغير في حجم المبيعات هو

$$m = \frac{3500 - 3000}{80 - 100} = \frac{500}{-20} = -25$$

العلاقة هي معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(100,3000)$ و $(80,3500)$:

$$y - 3000 = m\,(x - 100)$$

$$\Rightarrow (y - 3{,}000) = -25\,(x - 100) \;\Rightarrow\; y = -25x + 2{,}500 + 3{,}000 \;\Rightarrow\; y = -25x + 5{,}500$$

لاحظ أنه إذا كان السعر $= 100$ ريال فإنه يقابل مبيعات:

$$y = -25\,(100) + 5{,}500 = -2{,}500 + 5{,}000 = 3{,}000$$

بينما إذا كان السعر $= 80$ ريال فإنه يقابل مبيعات:

$$y = -25\,(80) + 5{,}500 = -2{,}000 + 5{,}500 = 3{,}500$$

وتكون الزيادة في المبيعات $500 = 3{,}000 - 3{,}500$.

مثال (2):

معرض سيارات له فروع كثيرة وكان تزايد (نمو) هذه الفروع يتم بصورة ثابتة مع الزمن وكان عدد الفروع في البداية 12 فرع وبعد مرور 5 سنوات أصبح عددها 25 فرعاً. ما هي العلاقة التي تربط عدد الفروع بالفترة الزمنية.

الحل:

نفرض أن السنوات التي تمر x (متغير مستقل) ونفرض أن عدد الفروع y (متغير تابع).

العلاقة هي معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(5,25)$ و $(0,12)$:

$$\frac{y-12}{x-0}=\frac{25-12}{5-0} \Rightarrow \frac{y-12}{x}=\frac{13}{5} \Rightarrow y=\frac{13}{5}x+12$$

لاحظ أنه عندما $x=0$ (في بداية المشروع) كان عدد الفروع هو:

$$y=\frac{13}{5}x+12 \Rightarrow y=\frac{13}{5}(0)+12=12$$

وبعد 5 سنوات أي أصبح عدد الفروع هو:

$$y=\frac{13}{5}x+12 \Rightarrow y=\frac{13}{5}(5)+12=13+12=25$$

مثال (3):

مكتب لتأجير السيارات يؤجر السيارة في اليوم بـ 100 ريال وغرامة قيمتها 150 ريال عن كل يوم تأخير. احسب التكلفة الكلية لتأجير السيارات كمعادلة في عدد أيام التأخير.

الحـــــل:

نرمز للتكلفة بالرمز $cost\ (t)$ حيث t متغير مستقل يشير لعدد أيام التأخير وتكون المعادلة:

$cost\ (0) =$ الإيجار اليومي $+\ 0$ (غرامة التأخير عن كل يوم)

$= 100 + 0\ (150) = 100 + 0 = 100$ ريال

$cost\ (1) =$ الإيجار اليومي $+\ 1$ (غرامة التأخير عن كل يوم)

$= 100 + 1\ (150) = 100 + 150 = 250$ ريال

$cost\ (2) =$ الإيجار اليومي $+\ 2$ (غرامة التأخير عن كل يوم)

$= 100 + 2\ (150) = 100 + 300 = 400$ ريال

بالتالي فالمعادلة على الشكل:

$cost\ (t) =$ الإيجار اليومي $+\ t$ (غرامة التأخير عن كل يوم)

$$= 100 + 150\ t$$

مثال (4):

تعداد سكان مدينة ما بعد مرور t من السنوات على إنشائها يعطى بالدالة الخطية:

$$p\ (t) = 30{,}000 + 2{,}000\ t$$

1) ما هو تعداد المدينة عندما أنشئت.

2) ما هو تعداد المدينة بعد مرور سنة كاملة على إنشائها. وما هي الزيادة السكانية لكل عام.

3) كم سنة تمر حتى يصبح تعداد سكان المدينة 50,000 .

الحـــل:

1) المدينة أنشأت عندما $t = 0$، بالتالي فتعداد المدينة هو:

$$p\,(0) = 30{,}000 + 2{,}000(0) = 30{,}000$$

وهذا العدد من السكان يمثل بداية التعداد في هذه المدينة.

2) بعد مرور عام كامل أيا $t = 1$، يصبح تعداد المدينة:

$$p\,(1) = 30{,}000 + 2{,}000(1) = 32{,}000$$

الزيادة السكانية في العام الواحد هي:

$$p\,(1) - p\,(0) = 32{,}000 - 30{,}000 = 2{,}000$$

3) عندما يصبح تعداد سكان المدينة $p\,(t) = 50{,}000$

$$50{,}000 = 30{,}000 + 2{,}000(t) \;\Rightarrow\; 2{,}000\,t = 20{,}000 \;\Rightarrow\; t = 10$$

أي أنه بعد مرور عشر سنوات يصبح تعداد السكان في تلك المدينة 50,000 مواطن.

مثال (5):

القيمة الشرائية لسيارة من النوع الفاخر بعد مرور t من السنوات على شرائها تعطى بالعلاقة التالية:

$$value\ (t) = 180{,}000 - (17{,}000)\ t$$

1) ما هي القيمة الشرائية للسيارة وهي جديدة.

2) ما هي القيمة الشرائية للسيارة بعد مرور سنة كاملة.

3) ما هي الخسارة في القيمة الشرائية للسيارة كل عام.

الحـــل:

1) القيمة الشرائية للسيارة وهي جديدة. عندما تكون $t = 0$ هي:

$$value\ (0) = 180{,}000 - (17{,}000)(0) = 180{,}000$$ ريال

2) القيمة الشرائية للسيارة بعد مرور سنة كاملة. عندما تكون $t = 1$ هي:

$$value\ (1) = 180{,}000 - (17{,}000)(1) = 180{,}000 - 17{,}000 = 163{,}000$$ ريال

3) الخسارة هي:

$$value\ (0) - value\ (1) = 180{,}000 - 163{,}000 = 17{,}000$$ ريال

مثال (6):

في تجربة نمو النبات في علم الأحياء وجد أن العلاقة بين ارتفاع شجرة يساوي h من السنتيمترات بعد زراعتها بفترة d من الأيام يعطى بالعلاقة:

$$h(d) = 10 + 2(d)$$

ماذا تمثل الثوابت 2 وَ 10 بدلالة ارتفاع الشجرة.

الحـــل:

قيمه الارتفاع عندما $d = 0$ هو:

$$h(0) = 10 + 2(0) = 10$$

بالتالي 10 تمثل الارتفاع المبدئي للشجرة عند زراعتها.

ارتفاع الشجرة بعد مرور يوم واحد عندما $d = 1$ هو:

$$h(1) = 10 + 2(1) = 10 + 2 = 12$$

معدل نمو الشجرة في اليوم هو:

$$h(1) - h(0) = 12 - 10 = 2$$

بالتالي فالعدد 2 يمثل معدل نمو الشجرة في اليوم.

مثال (7):

تكلفة إنتاج x من الأقراص المضغوطة الفارغة (CDs) بالريالات تعطى بالعلاقة التالية:

$$cost\ (x) = 0.05\,x + 500$$

اوجد تكلفة إنتاج ما يلي:

1) $100\ CDs$.

2) $100{,}000\ CDs$.

الحـــل:

1) تكلفة إنتاج $100\ CDs$ هي:

$cost\ (100) = 0.05(100) + 500 = 5 + 500 = 505$ ريال

2) تكلفة إنتاج $100{,}000\ CDs$ هي:

$cost\ (100{,}000) = 0.05(100{,}000) + 500 = 5{,}500$ ريال

مثال (8):

لدى محمد مكتبة كبيرة بها 150 كتاب، قام بالإشترك بنادي القصة و الرواية والذي يرسل له 3 كتب كل شهر. اكتب الدالة التي تمثل عدد الكتب في مجموعة محمد كدالة في السنوات التي اشترك فيها بنادي القصة.

الحــل:

عدد الكتب قبل الاشتراك بالنادي (سنوات الاشتراك $= 0$) هي 150 كتاب، بالتالي فإن $F(0) = 150$.

محمد يجمع 3 كتب كل شهر،وعليه فإنه يجمع $3(12) = 36$ كتاب في السنة و تكون العلاقة كالتالي:

$$F(t) = 150 + 36t$$

مثال (9):

تبدأ طائرة مبتعدة عن المطار بمسافة 1,000 ميل بالطيران 50 ميل كل ساعة في اتجاه المطار.

اكتب المسافة التي تبعدها الطائرة عن المطار بالميل كدالة في عدد الساعات التي تطيرها.

الحــل:

بما أن الطائرة تطير بسرعة ثابتة وبالتالي معدل تغير المسافة ثابت. إذاً الدالة التي تمثل المسافة هي دالة خطية:

$$d(t) = a + bt$$

حيث t عدد الساعات.

لإيجاد a,b نستخدم المعطيات:

عندما $t = 0$ كانت المسافة $d = 1000$ ، أي أن:

$$d(0) = a = 1000 \Rightarrow a = 1000$$

بعد ساعة تكون الطائرة قطعت مسافة 50 ميل، أي أن المسافة تقلصت إلى 950

وبالتالي:

$$d(1) = 1000 + b\,(1) = 950 \Rightarrow b = 950 - 1000 \Rightarrow b = -50$$

وعليه تكون الدالة:

$$d(t) = 1000 - 50t$$

نظرية العرض و الطلب

1. نظرية الطلب

كثيراً ما نسمع أن السوق "عرض وطلب" فإذا كنت صاحب محل تجاري أو مصنع أو مدير لمؤسسة أو شركة فأنت تحتاج لمعرفة نظرية الطلب ونظرية العرض، وذلك لتفهم كيف يعمل السوق وكيف تُنافس فيه وكيف تحدد الأسعار والكمية المعروضة من المنتجات ومتى تقرر رفع سعر المنتج ومتى تقرر خفضه.

والسؤال الذي يتبادر الآن إلى الذهن هو ما هو الطلب ؟

الطلب عبارة عن الكمية المطلوبة التي يكون لدى المستهلك الرغبة والقدرة على شرائها عند الأسعار المحتملة وذلك خلال فترة زمنية معينة.

من هذا التعريف يتضح لنا ما يلي:

1) الطلب هو كمية مطلوبة من سلعة معينة عند سعر معين.

2) الطلب الفعّال = رغبة (في الشراء) + قدرة (على الشراء).

3) يرتبط الطلب بفترة زمنية محددة.

2. قانون الطلب

هو القانون الذي يشير إلى العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة وسعر هذه السلعة.

القانون ينص على أن " الارتفاع في سعر سلعة ما مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة يؤدي إلى نقص الكمية المطلوبة منها في حين أن انخفاض السعر للسلعة يؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة منها "

إذاً العلاقة بين السعر والكمية المطلوبة علاقة عكسية.

من الوسائل المستخدمة للتعبير عن العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر ما يُعرف بدالة الطلب.

إذاً دالة الطلب هي عبارة عن دالة خطية تعبّر عن العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر:

$$D(P) = A - (B)(P)$$

حيث:

D هي الكمية المطلوبة.

P هو السعر (الثمن).

A هي الكمية المطلوبة عند انعدام السعر $(D(0) = A)$.

B هي التغير في الكمية المطلوبة بالنسبة للتغير في السعر.

الإشارة السالبة في المعادلة تشير إلى العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر.

مثال (10):

إذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة D وسعر الوحدة B بأحد المصانع التجارية علاقة خطية بحيث أن عند بيع 25 وحدة إنتاج يكون السعر 1200 ريال وعند بيع 85 وحدة إنتاج يكون السعر 1000 ريال فأوجد ما يلي:

1) دالة الطلب $D(P)$.

2) الكمية المطلوبة عند سعر بيع 1100 ريال.

الحـــل:

1) المعادلة الخطية الممثلة لدالة الطلب تمر بالنقطتين $(1200,25)$ ، $(1000,85)$

وبالتالي باستخدام قاعدة ميل الخط المستقيم نجد أن:

$$\frac{D-25}{P-1200}=\frac{85-25}{1000-1200} \Rightarrow \frac{D-25}{P-1200}=\frac{6}{-20}$$

$$\Rightarrow D-25=\frac{-3}{10}(P-1200) \Rightarrow D-25=\frac{-3}{10}P+360$$

$$\Rightarrow D=\frac{-3}{10}P+360+25 \Rightarrow D=\frac{-3}{10}P+385$$

$$\Rightarrow D=385-0.3\,P$$

2) الكمية المطلوبة عند سعر بيع $P=1100$ هي:

$$\Rightarrow D\,(1100)=385-0.3(1100)=385-330=55$$

3. قانون العرض

هو القانون الذي يشير إلى العلاقة بين الكمية المعروضة من سلعة معينة وسعر هذه السلعة.

القانون ينص على " الارتفاع في سعر سلعة ما مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة يؤدي إلى زيادة الكمية المعروضة منها في حين أن انخفاض السعر للسلعة يؤدي إلى نقص الكمية المعروضة منها "

إذاً العلاقة بين السعر والكمية المعروضة علاقة طردية.

من الوسائل المستخدمة للتعبير عن العلاقة بين الكمية المعروضة والسعر ما يُعرف بدالة العرض.

إذاً دالة العرض هي عبارة عن دالة خطية تعبر عن العلاقة بين الكمية المعروضة والسعر:

$$S(P) = A + (B)(P)$$

حيث:

S هي الكمية المعروضة.

P هو السعر (الثمن).

A هي الكمية المعروضة عند انعدام السعر $(S(0) = A)$.

B هي التغير في الكمية المعروضة بالنسبة للتغير في السعر.

الإشارة الموجبة في المعادلة تشير إلى العلاقة الطردية بين الكمية المعروضة والسعر.

مثال (11):

قام أحد مصانع البطاريات الجافة بدراسة كميات العرض مقارنة بالأسعار السائدة لسلعته فوجد أن دالة العرض تخضع للعلاقة:

$$S(P) = 20 + 4P$$

حيث P هو سعر الجملة بالريال للدرزن الواحد من البطاريات الصغيرة. احسب:

1) السعر عندما تكون الكمية المعروضة 1000 درزن.

2) الكمية المعروضة عندما يكون السعر 50 ريال.

الحـــل:

1) عندما تكون الكمية المعروضة $S(P) = 1000$ نجد أن:

$$1000 = 20 + 4P \Rightarrow 4P = 1000 - 20 \Rightarrow 4P = 980 \Rightarrow P = \frac{980}{4} \Rightarrow P = 245$$

إذاً السعر عندما تكون الكمية المعروضة 1000 درزن هو 245 ريال.

2) عندما يكون السعر $P = 50$ نجد أن:

$$(50) = 20 + 4\,(50) = 20 + 200 = 220$$

إذاً الكمية المعروضة عندما يكون السعر 50 ريال هي 220 درزن.

4. نظرية الإتزان

يُقال أن وضع السلعة في حالة توازن إذا تساوى العرض والطلب، وبمساواة دالتي العرض والطلب نحصل على ثمن التوازن (الثمن الذي يحدث عنده توازن في السوق) وكمية التوازن.

مثال (12):

تمثل الدالتان التاليتان العرض والطلب لإحدى السلع:

$$S\,(P) = 30 + 7P$$

$$D\,(P) = 128 + 3P$$

حيث P هو سعر الوحدة بالريال بينما وحدتي S,D هما بالدرزن. أوجد قيمة التي تمثل نقطة توازن لهذه السلعة وما هي كمية التوازن حينئذٍ.

الحل:

لإيجاد نقطة التوازن أو ثمن التوازن نساوي بين دالتي العرض والطلب:

$$S(P) = D(P)$$

$$\Rightarrow \quad 30 + 7P = 128 - 3P$$

$$\Rightarrow \quad 7P + 3P = 128 - 30$$

$$\Rightarrow \quad 10P + 98$$

$$\Rightarrow \quad P + 9.8$$

وهذا يمثل ثمن التوازن، للحصول على كمية التوازن نعوض في أي دالة من الدالتين كالتالي :

$$S(9.8) = 30 + 7(9.8) = 30 + 68.6 = 98.6$$

أو

$$D(9.8) = 128 - 3(9.8) = 128 - 29.4 = 98.6$$

وهذا مفهوم الاتزان في السوق (كمية العرض = كمية الطلب).

دالة تكاليف الإنتاج:

دالة تكاليف الإنتاج ويُرمز لها بالرمز $cost(q)$ حيث q هي كمية المنتج وتُعطى بالعلاقة:

$$cost(q) = A + (B)(q)$$

وتُسمى بالتكلفة الثابتة، أما فتُسمى بتكلفة الوحدة الواحدة (تكاليف حدية).

دالة الاستهلاك القومي :

دالة الاستهلاك القومي ويُرمز لها بالرمز $cost(I)$ حيث I هو الدخل المسموح بالتصرف فيه وتُعطى بالعلاقة:

$$cost(I) = A + (B)(I)$$

مثال (13):

ينتج مصنع اسطوانات الغاز الطبيعي 100,000 اسطوانة شهرياً بتكلفة 25 ريال للاسطوانة الواحدة، فإذا أُضيفت تكاليف ثابتة (مثل أجر موزعي الاسطوانات، عمال النقل، سيارات التحميل) قدرها 40,000 ريال في الشهر.

1) أوجد دالة التكاليف الخطية.

2) احسب تكلفة الاسطوانة الواحدة إذا تم تخفيض الإنتاج إلى 30,000 اسطوانة شهرياً.

الحل:

1) دالة التكاليف الخطية هي:

$$cost(q) = A + (B)(q)$$

5.5.2 تمارين

(1) درجة حرارة التربة 30^{o} عند السطح وتقل بمعدل 0.04^{o} لكل سنتيمتر. اكتب درجة حرارة التربة كدالة في العمق d بالسنتيمتر تحت السطح.

(2) اشترى مزارع شجرة صبّار ارتفاعها 5 أقدام وتنمو بمعدل 0.2 قدم لكل عام. اكتب ارتفاع الصبّار H كدالة في السنوات t منذ الشراء.

(3) تكلفة تأجير رجال الترميم بهيئة الآثار بالريال لعدد ساعات h تعطى بالعلاقة التالية:

$$cost\,(h) = 50 + 25h$$

a) ما هي تكلفة تأجير رجال الترميم عند بدء العمل.

b) ما هي التكلفة إذا استغرق ترميم أثر ما يومان.

c) ما هي عدد ساعات الترميم لتكلفة مقدارها 10,000 ريال.

(4) تكلفة استئجار سيارة أجرة $C\,(t)$ لعدد t من الساعات تعطى بالعلاقة التالية:

$$C\,(t) = 300 + 100t$$

a) احسب إيجار سيارة أجرة عند بداية الفترة الزمنية.

b) ما هي التكلفة إذا انقضت ثلاث ساعات.

c) ما هي الفترة الزمنية إذا كانت التكلفة 1200 ريال.

$$S\,(9.8) = 30 + 7\,(9.8) = 30 + 68.6 = 98.6$$

أو

$$D\,(9.8) = 128 - 3\,(9.8) = 128 - 29.4 = 98.6$$

وهذا مفهوم الاتزان في السوق (كمية العرض = كمية الطلب).

دالة تكاليف الإنتاج:

دالة تكاليف الإنتاج ويُرمز لها بالرمز $cost(q)$ حيث q هي كمية المنتج وتُعطى بالعلاقة:

$$cost(q) = A + (B)(q)$$

وتُسمى بالتكلفة الثابتة، أما فتُسمى بتكلفة الوحدة الواحدة (تكاليف حدية).

دالة الاستهلاك القومي :

دالة الاستهلاك القومي ويُرمز لها بالرمز $cost(I)$ حيث I هو الدخل المسموح بالتصرف فيه وتُعطى بالعلاقة:

$$cost(I) = A + (B)(I)$$

مثال (13):

ينتج مصنع اسطوانات الغاز الطبيعي 100,000 اسطوانة شهرياً بتكلفة 25 ريال للاسطوانة الواحدة، فإذا أُضيفت تكاليف ثابتة (مثل أجر موزعي الاسطوانات، عمال النقل، سيارات التحميل) قدرها 40,000 ريال في الشهر.

1) أوجد دالة التكاليف الخطية.

2) احسب تكلفة الاسطوانة الواحدة إذا تم تخفيض الإنتاج إلى 30,000 اسطوانة شهرياً.

الحل:

1) دالة التكاليف الخطية هي:

$$cost(q) = A + (B)(q)$$

حيث التكلفة الحدية وهي تكلفة إنتاج اسطوانة غاز واحدة هي $B = 25$، والتكاليف الثابتة هي $A = 40,000$. وعليه فإن دالة التكاليف الخطية هي:

$$cost(q) = 40,000 + 25\ (q)$$

2) إذا تم تخفيض الإنتاج بحيث تصبح كمية الإنتاج $q = 30,000$ اسطوانة شهرياً، فإن تكلفة الإنتاج هي:

$$cost(30,000) = 40,000 + 25(30,000) = 40,000 + 750,000 = 790,000\ reyal$$

بالتالي تكلفة الاسطوانة الواحدة هي:

$$\frac{790,000}{30,000} = 26\frac{1}{3}\ reyal$$

مثال (14):

في مصنع لإطارات السيارات وجد أن تكلفة إنتاج 800 إطار تساوي 8,000 ريال وتكلفة إنتاج 1,000 إطار تساوي 8,800 ريال.

1) أوجد المعادلة التي تربط التكاليف وكمية الإنتاج.

2) أوجد تكلفة إنتاج 1200 إطار.

3) أوجد عدد الإطارات التي تكلفتها 10.000 ريال.

الحـــل:

1) المعادلة التي تربط التكاليف وكمية الإنتاج خطية وهي:

$$cost(q) = A + (B)(q)$$

وهي تمثل بخط مستقيم يمر بالنقطتين (800,8000) ، (1000,8800) وبالتالي:

$$\frac{cost - cost_1}{q - q_1} = \frac{cost_2 - cost_1}{q_2 - q_1} \Rightarrow \frac{cost - 8,000}{q - 800} = \frac{8,800 - 8,000}{1000 - 800}$$

$$\Rightarrow \ cost - 8,000 = 4 \ (q - 800) \ \Rightarrow \ cost = 8,000 + 4(q - 800)$$

$$\Rightarrow \ cost - 8,000 = 4q - 3200 \ \Rightarrow \ cost = 4,800 + 4q$$

إذاً المعادلة التي تربط التكاليف $cost$ وكمية الإنتاج q هي:

$$cost(q) = 4,800 + 4q$$

لاحظ أنه عندما $q = 0$ فإن $cost(0) = 4,800$ وتُسمى بالتكلفة الثابتة، أما العدد 4 فهو تكلفة إنتاج إطار واحد.

2) تكلفة إنتاج 1200 إطار نحصل عليها من المعادلة السابقة بوضع $q = 1200$ فتكون التكلفة هي:

$$cost(1200) = 4,800 + 4(1200) = 4,800 + 4,800 = 9,600 \ reyal$$

3) عدد الإطارات التي تكلفتها 10,000 ريال نحصل عليها من المعادلة السابقة بوضع

$$cost(q) = 10,000$$

فيكون عدد الإطارات هو:

$$10,000 = 4,800 + 4q$$

$$\Rightarrow \ 4q = 10,000 - 4,800 = 5,200$$

$$\Rightarrow \ q = \frac{5,200}{4} = 1,300$$

أي أن تكلفة إنتاج 1300 إطار تساوي 10,000 ريال.

5.5.2 تمارين

(1) درجة حرارة التربة 30^o عند السطح وتقل بمعدل 0.04^o لكل سنتيمتر. اكتب درجة حرارة التربة كدالة في العمق d بالسنتيمتر تحت السطح.

(2) اشترى مزارع شجرة صبّار ارتفاعها 5 أقدام وتنمو بمعدل 0.2 قدم لكل عام. اكتب ارتفاع الصبّار H كدالة في السنوات t منذ الشراء.

(3) تكلفة تأجير رجال الترميم بهيئة الآثار بالريال لعدد ساعات h تعطى بالعلاقة التالية:

$$cost\ (h) = 50 + 25h$$

a) ما هي تكلفة تأجير رجال الترميم عند بدء العمل.

b) ما هي التكلفة إذا استغرق ترميم أثر ما يومان.

c) ما هي عدد ساعات الترميم لتكلفة مقدارها 10,000 ريال.

(4) تكلفة استئجار سيارة أجرة $C\ (t)$ لعدد t من الساعات تعطى بالعلاقة التالية:

$$C\ (t) = 300 + 100t$$

a) احسب إيجار سيارة أجرة عند بداية الفترة الزمنية.

b) ما هي التكلفة إذا انقضت ثلاث ساعات.

c) ما هي الفترة الزمنية إذا كانت التكلفة 1200 ريال.

(5) عدد الطلاب في مادة الرياضيات 111 تعطى بالعلاقة التالية:

$$S = 200 + 5y$$

حيث y عدد السنوات منذ عام 1430 هـ .

a) احسب عدد الطلاب في مادة الرياضيات 111 عام 1430 هـ.

b) احسب عدد الطلاب في مادة الرياضيات 111 عام 1435 هـ.

(6) أوجد السعر الذي يتزن عنده السوق في الحالات التالية:

a) دالة الطلب $D = 5 + 3P$ ، دالة العرض $S = 25 - 2P$

b) دالة الطلب $D = 3P^2 + P + 27$ ، دالة العرض $S = 3P^2 + P + 27$

c) دالة الطلب $D = 5P^2 + 2P + 10$ ، دالة العرض $S = 4P^2 + P + 16$

6

Chapter

الباب السادس

المتتابعات

6.1 الفصل الأول

المتتابعات

المتتابعات

إن مفهوم المتتابعات يلعب دوراً كبير في العديد من التطبيقات الرياضية والبناء الرياضي. وسوف نستعرض هنا تعريف المتتباعات وأنواعها.

تعريف المتتابعة :

المتتابعة هي مجموع من الأعداد تتمتع بنمط معين من الترتيب وكل عدد من المجموعة يسمى الحد.

يرمز للحد الأول بالرمز a_1، والحد الثاني a_2، والحد الثالث a_3، وهكذا وقد تكون المتتابعات المنتهية (لها عدد محدد من الحدود أو لها حد أخير) أو متتابعات غير منتهية والتي يكون عدد حدودها غير محدود .

ملاحظة

سندرس نوعان من المتتابعات وهما المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية.

6.1.1 المتتابعة الحسابية

تعريف المتتابعة الحسابية $\{a_n\}$: هي متتابعة كل حد فيها يساوي الحد السابق مضافاً إليه مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز d .

أي أن :

$$d = a_{n+1} - a_n$$

مثال (1):

هل المتتابعات الآتية حسابية أم لا ؟

a) $\{5, 10, 15, 20, ...\}$

b) $\{1, -3, -7, -11, ...\}$

c) $\{2, 4, 7, 11, ...\}$

الحــــل:

(a)

حيث أن: $a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15,\ a_4 = 20, ...$

$$a_2 - a_1 = 10 - 5 = 5$$

$$a_3 - a_2 = 15 - 10 = 5$$

$$a_4 - a_3 = 20 - 15 = 5$$

إذن نحصل على أي حد من حدود المتتابعة بإضافة 5 إلى الحد السابق له. وبالتالي تكون المتتابعة حسابية .

(b)

حيث أن: $a_1 = 1,\ a_2 = -3,\ a_3 = -7,\ a_4 = -11, ...$

$$a_2 - a_1 = -3 - 1 = -4$$

$$a_3 - a_2 = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$$

$$a_4 - a_3 = -11 - (-7) = -11 + 7 = -4$$

إذن أساس المتتابعة

$$d = -4$$

وتكون المتتابعة حسابية

(c)

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ a_4 = 11,$$

$$a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 7 - 4 = 3$$

لاحظ أن

$$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$$

ومن ثم فإن المتتابعة ليست حسابية

الحد النوني للمتتابعة الحسابية :

الحد النوني في المتتابعة الحسابية هو

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

حيث a_1 هو الحد الأول

d أساس المتابعة

n عدد طبيعي وهو ترتيب الحد

ملاحظة

يمكن كتابة المتتابعة على الصورة

$$a_1,\ a_1 + d\ ,\quad a_1 + 2d\ ,\quad a_1 + 3d\ , \ldots$$

مثال (2) :

أوجد الحد النوني من المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 5 وأساسها 3

الحــــل:

حيث أن $a_1 = 5, \qquad d = 3$

إذن

$$a_n = 5 + 3\,(n - 1)$$

$$= 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

مثال (3):

أوجد الحد النوني للمتابعة الحسابية

$$12, 7, 2, -3, -8, \ldots$$

الحــــل:

حيث أن

$$a_1 = 12, \quad d = 7 - 12 = -5$$

إذن الحد النوني يعطي بالعلاقة

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d = 12 + (n - 1)(-5)$$

$$= 12 - 5n + 5 = -5n + 17$$

مثال (4):

أوجد الحد العشرون من المتتابعة

$$9, 16, 23, 30, \ldots$$

الحـــل:

$$a_1 = 9, \qquad d = 16 - 9 = 23 - 16 = 7$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d = 9 + (n-1)(7)$$

$$= 9 + 7n - 7 = 7n + 2$$

إذن نحصل على الحد رقم عشرون وذلك بالتعويض $n = 20$ في الحد النوني

$$a_{20} = 7(20) + 2 = 142$$

مثال (5):

أوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية

$$12, 6, 0, -6, \ldots$$

الحـــل:

$$a_1 = 12, \quad d = 6 - 12 = 0 - 6 = -6$$

إذن

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$= 12 + (n-1)(-6)$$

$$= 12 - 6n + 6 = -6n + 18$$

للحصول على الحد العاشر نعوض $n = 10$ في الحد النوني

$$a_{10} = -6(10) + 18 = -42$$

مثال (6):

إذا كان الحد النوني من متتابعة حسابية هو

$$a_n = -2n + 5$$

أوجد المتتابعة

الحـــل:

لايجاد حدود المتتابعة نضع $n = 1, 2, 3, 4,$ في الحد النوني نحصل على

$$a_1 = -2(1) + 5 = 3$$

$$a_2 = -2(2) + 5 = 1$$

$$a_3 = -2(3) + 5 = -6 + 5 = -1$$

$$a_4 = -2(4) + 5 = -3$$

إذا المتتابعة هي

$$3, 1, -1, -3, \ldots$$

وحدها الأول هو 3 وأساسها هو

$$d = 1 - 3 = -2$$

مثال (7):

إذا كان أساس المتتابعة الحسابية هو 6 والحد الخامس يساوي 19 أوجد المتتابعة

الحـــــل:

لدنيا

$$a_5 = 19 \quad ، \quad d = 6$$

من تعريف الحد التوني بأن

$$a_5 = a_1 + 4d$$

بالتعويض عن

$$a_5 = 19 \quad ، \quad d = 6$$

فإننا نحصل على

$$19 = a_1 + 4\,(6)$$

$$19 = a_1 + 24$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 19 - 24 = -5$$

إذن حدود المتتابعة تكون

$$a_1 = -5$$

$$a_2 = a_1 + d = -5 + 6 = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + 6 = 7$$

$$a_4 = a_3 + d = 7 + 6 = 13$$

ومن ثم تكون المتتابعة كالآتي

$$-5, 1, 7, 13, \ldots$$

مثال (8):

أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي 15 في المتتابعة الحسابية التي حدها الأول هو -3 وأساسها 3 .

الحـــل:

لدينا

$$a_n = 15$$

$$a_1 = -3$$

$$d = 3$$

إذن

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 15$$

$$-3 + (n-1)(3) = 15$$

$$-3 + 3n - 3 = 15$$

$$3n = 15 + 6 = 21$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{21}{3} = 7$$

إذا الحد الذي قيمته 15 هو الحد السابع أي أن $a_7 = 15$

مثال (9):

إذا كانت $2, x, y, z, 14$ في تتابع حسابي أوجد قيمة كلاً من x, y, z.

الحـــل:

لدينا

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = x, \qquad a_3 = y, \qquad a_4 = z \qquad a_5 = 14$$

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$14 = 2 + 4d$$

$$4d = 14 - 2 = 12$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{12}{4} = 3$$

ومن ثم

$$x = a_2 = a_1 + d = 2 + 3 = 5$$

$$y = a_3 = a_2 + d = 5 + 3 = 8$$

$$z = a_4 = a_3 + d = 8 + 3 = 11$$

وتكون المتتابعة على الصورة

$$2, 5, 8, 11, 14$$

مثال (10):

إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة 92000 ريال ويزيد سنوياً بمقدار ثابت 16000 ريال فبعد كم سنة يصبح دخل المؤسسة 380000 ريال؟

الحل

حيث أن قيمة الزيادة السنوية ثابتة إذن

$$d = 16000 \quad , \quad a_1 = 92000 \quad , \quad a_n = 380000$$

لدينا

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

$$380000 = 92000 + (n - 1)\,(16000)$$

$$380000 = 92000 + 16000\,n - 16000$$

$$380000 = 16000\,n + 76000$$

$$16000\,n = 304000$$

$$n = \frac{304000}{16000}$$

$$n = 19$$

إذن يصبح دخل المؤسسة 380000 بعد 19 سنة

مجموع المتتابعة الحسابية :

إذا كان لدينا متابعة حسابية $a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots, a_n$

فإن مجموع المتتابعة يكون

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

ويعطي قانون مجموع المتتابعة الحسابية التي عدد حدوها n كالآتي

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2\,a_1 + (n-1)\,d]$$

وأيضاً إذا كان لدينا متتابعة حسابية حدها الاول a_1 وحدها الأخير a_n فإن مجموع n

من الحدود يعطي بالعلاقة

$$S_n = \frac{n}{2}\,[a_1 + a_n]$$

مثال (11) :

أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة

$$1, 7, 13, 19, \ldots$$

الحـــل:

لدينا $a_1 = 1\ , \qquad d = 7 - 1 = 6$

فإن مجموع السته حدود الأولى هو

$$S_6 = \frac{6}{2}\,[2(1) + (6-1)\,6]$$

$$= 3\,[2 + 30] = 96$$

مثال (12):

إذا كان الحد الأول يساوي 5 والحد الثاني عشر يساوي 115 من متتابعة حسابية أوجد مجموعة الأثنى عشر حداً الأولى منها؟.

الحـــل:

حيث أن $a_1 = 5,\quad a_{12} = 115,\quad n = 12$

فإن مجموع المتتابعة يعطي بالعلاقة

$$S_{12} = \frac{12}{2}\,[5 + 115] = 6\,(120) = 720$$

مثال (13):

إذا كان الحدد الأول من متتابعة حسابية يساوي 5 وحدها الأخير يساوي 125 وكان مجموعها هو 845 أوجد عدد حدود المتتابعة

الحـــل:

$$a_1 = 5,\quad a_n = 125,\quad S_n = 845$$

حيث أن

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$845 = \frac{n}{2}[5 + 125]$$

$$845 = \frac{n}{2}[130]$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{845}{65} = 13$$

مثال (14):

أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100

الحــــل:

$$a_1 = 1, \quad a_{100} = 100$$

إذن $n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S_{100} = \frac{100}{2}[1 + 100]$$

$$= 50\,(101) = 5050$$

مثال (15):

إذا كان لدينا متتابعة حسابية حدها الأول 3 وحدها الأخير 30 ومجموعها 165

أوجد عدد حدودها

الحـــــل:

بما أن

$$a_1 = 3, \quad a_n = 30, \quad S_n = 165$$

إذن

$$S_n = \frac{n}{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$165 = \frac{n}{2}\,[3 + 30]$$

$$165 = \frac{33}{2}\,n \;\Rightarrow\; n = \frac{2(165)}{33} = \frac{330}{33} = 10$$

أي أن عدد حدود المتتابعة هو 10

6.1.2 المتتابعة الهندسية

هي متتابعة كل حد فيها يساوي ناتج ضرب الحد السابق له بعدد حقيقي ثابت r مثلاً ويسمى بأساس المتتابعة وتكون على الصورة

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

مثال (16):

هل المتتابعات التالية هندسية أم لا

(a) $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$

(b) $16, 8, 4, 2, 1, \ldots$

(c) $3, 6, 18, 27, \ldots$

الحـــــل:

حيث أن

(a) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 9, \quad a_4 = 27, \ldots$

نلاحظ أن

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{27}{9} = 3$$

فإن المتتابعة تكون هندسية أساسها $r = 3$

(b) $a_1 = 16, \quad a_2 = 8, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 2, \ldots$

يكون لدينا

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

فإن المتتابعة تكون هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$

(c) $a_1 = 3, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 18, \quad a_4 = 27, \ldots$

حيث أن

فإن

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{18}{6} = 3$$

فيكون

$$\frac{a_3}{a_2} \neq \frac{a_2}{a_1}$$

فإن المتتابعة تكون غير هندسية

الحد النوني في المتتابعة الهندسية :

يعطى الحد النوني للمتتابعة الهندسية حدها الأول a وأساسها r بالصيغة الآتية

$$a_n = ar^{n-1}$$

حيث n عدد طبيعي

مثال (17):

أكتب الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 9 وأساسها 2

الحـــل:

حيث أن الحد النوني يعطي بالعلاقة

$$a_n = ar^{n-1}$$

وحيث $a = 9$ $r = 2$ فإن

$$a_n = 9(2)^{n-1} \qquad (1)$$

لايجاد الحد الثاني نضع $n = 2$ في المعادلة (1)

$$a_2 = 9(2)^1 = 18$$

لإيجاد الحد الثالث نضع

$$n = 3$$

فنحصل على

$$a_3 = 9(2)^2 = 9(4) = 36$$

وبالمثل نحصل على الحدين

$$a_4 = 9(2)^3 = 9(8) = 72$$

$$a_5 = 9(2)^4 = 9(16) = 144$$

وعليه فإن الخمسة حدود الأولى هي

$$9, 18, 36, 72, 144$$

مثال (18):

أوجد الحد السادس من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 6 وأساسها 3

الحـــل:

لدينا $a = 6 \quad , \ r = 3$

فإن

$$a_6 = ar^5 = 6\,(3)^5 = 6\,(243) = 1458$$

مثال (19):

أوجد الحد النوني لمتتابعة هندسية أساسها 6 وحدها الخامس يساوي 5.

الحـــــل:

$$r = 6, \quad a_5 = 5$$

حيث

$$ar^4 = a_5$$

$$\therefore a\ (6)^4 = 5$$

$$a = \frac{5}{6^4}$$

الحد النوني يعطي بالعلاقة

$$a_n = ar^{n-1} = \frac{5}{6^4}(6)^{n-1}$$

$$= 5\ (6^{n-1-4}) = 5\ (6^{n-5})$$

مثال (20):

أوجد الحد النوني من المتتابعة الهندسية

$$-\frac{1}{4}, 2, -16, 128$$

الحـــــل:

لدينا $a = -\frac{1}{4}$

لايجاد أساس المتتابعة

$$r = \frac{2}{-\frac{1}{4}} = -2(4) = -8$$

إذن

$$a_n = ar^{n-1} = -\frac{1}{4}(-8)^{n-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{4}(8)^{n-1}$$

أوجد الحد النوني من المتتابعة الهندسية

$$2, 8, 32, 128$$

الحــــل:

نجد أن

$$a = 2$$

$$r = \frac{8}{2} = 4$$

فإن الحد النوني يعطي بالعلاقة

$$a_n = ar^{n-1} = 2(4)^{n-1} = 2(2^2)^{n-1}$$

$$= 2(2)^{2n-2}$$

إذن

$$a_n = 2^{2n-1}$$

مثال (21):

أوجد أساس المتتابعة الهندسية التي حدها النوني

$$a_n = 3^{2n-1}$$

الحــــل:

نوجد الحد a_{n+1} كالاتي

$$a_{n+1} = 3^{2(n+1)-1} = 3^{2n+2-1} = 3^{2n+1}$$

ومنها فإن أساس المتتابعة يعطي بالعلاقة

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{2n+1}}{3^{2n-1}} = 3^{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$= 3^{1+1} = 3^2 = 9$$

مثال (22):

إذا كان عدد سكان في مدينة ما 10000 نسمة وعلماً بأن معدل تكاثر السكان يزداد كل عام بنسبة 10% عن العام الذي يسبقه مباشراً أوجد عدد السكان بعد عشر سنوات

الحــــل:

الحد الأول من المتتابعة الهندسية هو

$$a_1 = 10000$$

الحد الثاني هو

$$a_2 = 10000 + 10000 \times \frac{10}{100}$$

$$= 10000 + 1000 = 11000$$

الحد الثالث هو

$$a_3 = 11000 + 11000 \times \frac{10}{100} = 12100$$

إذا أساس المتتابعة

$$r = \frac{11000}{10000} = \frac{11}{10} = 1.1$$

إذا الحد النوني يساوي

$$a_n = ar^{n-1} = 10000\,(1.1)^{n-1}$$

ويكون عدد السكان بعد عشرة سنوات بمعنى عدد السكان في بداية العام الحادي عشر

أي أن a_{11}

$$a_{11} = 10000\,(1.1)^{10}$$

مثال (23):

تنقص قيمة سيارة بمعدل 15% كل سنة أوجد قيمتها نهاية السنة الثالثة إذا كان ثمنها الأصلي 20000 ريال

الحـــل:

الحد الأول من المتتابعة الهندسية هو 20000

أساس المتتابعة

$$r = 1 - \frac{15}{100}$$

ومن ثم ثمن السيارة في نهاية السنة الثالثة نضع $n = 4$ في

$$a_n = ar^{n-1}$$

إذن

$$a_4 = 20000\,(0.85)^3 = 12282.5$$

مجموع المتتابعة الهندسية:

إذا كان $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$

متتابعة هندسية عدد حدودها n وأساسها ، فإن مجموعها يعطي بالعلاقة

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

حيث $r \neq 1$

إذا كان عدد حدود المتتابعة الهندسية لا نهائي وأساس المتتابعة يحقق $-1 < r < 1$

فإن مجموعها هو

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

مثال (24):

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي حدها الأول يساوي 2 وعدد حدودها 5 وأساسها يساوي 3.

الحل:

حيث أن المجموع يعطي بالعلاقة

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

إذن

$$S_5 = \frac{2((3)^5 - 1)}{3 - 1} = 243 - 1 = 242$$

مثال (25):

أوجد مجموع العشرة حدود الأول من المتتابعة الهندسية

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

الحل:

حيث أن $a = 2$

وأساس المتتابعة $r = \frac{4}{2} = 2$

فإن

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2(2^{10} - 1) = 2(1024 - 1)$$

$$= 2(1023)$$

$$= 2046$$

مثال (26):

أوجد مجموع الستة حدود الاول من المتتابعة الهندسية

$$-3, 6, -12, 24, \ldots$$

الحـــل:

حيث أن

$$a = -3$$

وأساس المتتابعة

$$r = \frac{6}{-3} = -2$$

فإن

$$S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_6 = \frac{(-3)\,[(-2)^6 - 1]}{-2 - 1} = (-2)^6 - 1 = 64 - 1 = 63$$

مثال (27):

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية غير النهائية

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

الحـــل:

$$a = 1$$

$$r = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

مثال (28):

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية غير النهائية التي حدها الأول $\frac{2}{3}$ وأساس $\frac{1}{3}$

الحـــل:

$$a=\frac{1}{3} \quad , \quad r=\frac{2}{3}$$

$$S_{\infty}=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1$$

6.1.3 تمارين

(1) بين نوع المتتابعات الآتيتين من حيث كونها حسابية أو هندسية

(a) $1, 7, 3, 9, \ldots$

(b) $-100, 50, -25, 12.5, \ldots$

(c) $16, 20, 24, 28, \ldots$

(d) $7, 14, 21, 28, \ldots$

(e) $-9, -3, 0, 3, 9, \ldots$

(f) $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

(g) $5, 0, -5, -10, \ldots$

(h) $147, 21, 14, 7, \ldots$

(2) أوجد الحد النوني من المتتابعة الحسابية التي حدها الأول 10 وأساسها 2-.

(3) أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها النوني

$$a_n = 3n - 2$$

(4) أوجد الحد النوني من المتتابعة الهندسية حدها الأول 3 وأساسها 10 .

(5) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها النوني

$$a_n = 5^{n+1}$$

(6) أوجد الحد الثاني عشر من المتتابعة الحسابية

$16, 23, 30, 37$

(7) أوجد الحد الخامس من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول 10 وأساساها 2 .

(8) إذا كان أساس المتتابعة الحسابية هو 6 والحد السابع يساوي 30 أوجد المتتابعة

(9) أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي 100 من متتابعة حسابية حدها الأول 5 وأساسها 5.

(10) أوجد مجموع المتتابعات الآتية :

(a) $3, 6, 9, 12, ..., 81$

(b) $10, 20, 30, 40, ..., 200$

(c) $81, 27, 9, 3, ...$

(11) أوجد مجموع العشر حدود الأولى من المتتابعات الآتية :

(a) $7, 14, 21, 28, ...$

(b) $5, 25, 125, 625, ...$

(c) $100, 50, 0, -50, ...$

(12) أوجد

(a) $2 + 4 + 6 + ... + 60$

(b) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ... + \infty$

(13) إذا كان ارتفاع منضاد مملؤ بغاز بعد دقيقة واحدة من إنطلاقه هو 100 متر وكان من ارتفاعه بعد كل دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% من ارتفاعه في الدقيقة السابقة أوجد ارتفاع المطاط بعد 5 دقائق.

(14) عند رجل مبلغ من المال يصرف نصفه في الشهر الأول ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا إذا كان المبلغ الباقي بعد خمسة شهور هو 3000 ريال فما هو المبلغ الأصلي.

6.2 الفصل الثاني

تطبيقات إدارية وإنسانية

تطبيقات إدارية وإنسانية

سندرس في هذا الفصل كيفية استخدام ما تم دراسته في الفصول السابقة من الكسور والعمليات الجبرية الخاصة بها في حياتنا العملية وذلك لنعرف أن تعلم الرياضيات يفيد في تعاملات الحياة اليومية ويظهر ذلك في تطبيق الرياضيات في الاقتصاد والإدارة والعلوم الإنسانية والإحصاء وغيرها من العلوم، أيضاً تظهر الأهمية القصوى لمبادىء الرياضيات في طرق حساب زكاة الأموال والزروع بجميع أنواعها وأيضاً حساب قواعد الميراث والذي يسمى يعلم الفرائض.

6.2.1 النسبة :

النسبة هي قسمة كميتين، بمعنى أن نسبة العدد a إلى العدد b تُعطى بالكسر $\frac{a}{b}$ حيث a البسط، b المقام أو تُكتب $a : b$.

قاعدة :

عند تقسيم عدد p إلى النسبة $m : n$.

1) نحسب عدد الأجزاء وذلك بجمع عددي النسبة فيكون عدد الأجزاء الكلية $m + n$.

2) العدد الأول يصبح $p\left(\frac{m}{m+n}\right)$، العدد الثاني يصبح $p\left(\frac{n}{m+n}\right)$.

مثال (1):

قسم العدد 80 إلى النسبة $3:2$.

الحـــل:

مجموع الأجزاء $= 2 + 3 = 5$

العدد الأول $= (80)\left(\frac{3}{5}\right) = 48$

العدد الثاني $= (80)\left(\frac{2}{5}\right) = 32$

وبذلك تم تقسيم العدد إلى العددين 32 و 48 بنسبة 2 : 3 .

مثال (2):

قسم العدد 150 إلى النسبة 1:2:3 .

الحـــل:

مجموع الأجزاء $= 3 + 2 + 1 = 6$

العدد الأول $= (150)\left(\frac{1}{6}\right) = 25$

العدد الثاني $= (150)\left(\frac{2}{6}\right) = 50$

العدد الثالث $= (150)\left(\frac{3}{6}\right) = 75$

وبذلك تم تقسيم العدد 150 إلى الأعداد 75 ، 50 ، 25 بنسبة 3 : 2 : 1.

مثال (3):

صندوق يحتوي نوعان من الأقلام A ، B وكان نسبة الأقلام A إلى الأقلام B تساوي 5 : 2 أحسب عدد الأقلام من كل نوع إذا كان العدد الكلي للأقلام بالصندوق 280 قلماً.

الحــــل:

عدد الأجزاء $= 5 + 2 = 7$

عدد الأقلام من النوع $A = (280)\left(\frac{2}{7}\right) = 80$

عدد الأقلام من النوع $B = (280)\left(\frac{5}{7}\right) = 200$

بالتالي عدد الأقلام من النوع A هو 80 قلماً، وعدد الأقلام من النوع B هو 200 قلماً.

مثال (4):

رجل يوزع مبلغ 2600 ريال على ثلاث أولاد بنسبة $5 : 3 : 2$ أحسب نصيب كل ولد.

الحــــل:

عدد الأجزاء $= 5 + 3 + 2 = 10$

نصيب الولد الأول $= (2600)\left(\frac{2}{10}\right) = 520$

نصيب الولد الثاني $= (2600)\left(\frac{3}{10}\right) = 780$

نصيب الولد الثالث $= (2600)\left(\frac{5}{10}\right) = 1300$

مثال (5):

اشترى مطعم $260\ kg$ من اللحوم تم توزيعها على الأطباق العربية والفرنسية واليابانية

بنسبة $6 : 3 : 4$.

أحسب نصيب كل نوع من الأطباق من اللحوم.

الحـــل:

عدد الأجزاء $= 6 + 3 + 4 = 13$

نصيب الأطباق العربية من اللحوم $= (260)\left(\frac{4}{13}\right) = 80$ kg

نصيب الأطباق الفرنسية من اللحوم $= (260)\left(\frac{3}{13}\right) = 60$ kg

نصيب الأطباق اليابانية من اللحوم $= (260)\left(\frac{6}{13}\right) = 120$ kg

مثال (6):

قسم الكتلة $220\ kg$ بنسبة $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$

الحـــل:

أولاً: نحول النسبة $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$ إلى نسبة مكافئة وذلك بضرب طرفي النسبة في 3 ثم في 4 كالتالي:

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{1} = \frac{8}{3}$$

مجموع الأجزاء $= 3 + 8 = 11$

الكتلة الأول $= (220)\left(\frac{8}{11}\right) = 160$

الكتلة الثانية $= (220)\left(\frac{3}{11}\right) = 60$

وبذلك تم تقسيم الكتلة $220\ kg$ إلى الكتلتين $60\ kg$ ، $160\ kg$ بنسبة $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$.

قاعدة:

النسبة ليس لها وحدة وذلك لتساوي وحدتي البسط والمقام، ولا تتغير قيمة النسبة بتغير وحدتي البسط والمقام.

مثال (7):

سرعة الرياح في الرياض $15\ m/h$ وسرعة الرياح في جدة $12\ m/h$. أوجد نسبة سرعة الرياح في الرياض إلى سرعة الرياح في جدة.

الحل:

النسبة $= \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

مثال (8):

في مباراة تنس ضرب اللاعب 15 ضربة إرسال أصاب منها 10 ضربات وأخفق في الباقي. أحسب نسبة الضربات الصائبة إلى الضربات المخفقة، أحسب نسبة الضربات المخفقة إلى الضربات الصائبة.

الحل:

نسبة الضربات الصائبة إلى الضربات المخفقة $= \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

نسبة الضربات المخفقة إلى الضربات الصائبة $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

مثال (9):

تصدر دار نشر نسخة ملونة طباعة فاخرة من كتاب علمي بمبلغ 400 ريال وتُصدر نفس الدار نسخة مخفضة غير ملونة للطلاب من نفس الكتاب بمبلغ 280 ريال. أحسب نسبة سعر النسخة الملونة إلى سعر النسخة غير الملونة.

الحـــل:

نسبة سعر النسخة الملونة إلى سعر النسخة غير الملونة $= \frac{400}{280} = \frac{10}{7}$

مثال (10):

مصنع للمصابيح الكهربائية في اختبار الجودة للمنتج اختبر 100 مصباح ووجد أن هناك 3 مصابيح عاطبة. استخدم هذه النسبة الحساب عدد المصابيح العاطبة من عدد 4300 مصابح.

الحـــل:

نسبة المصابيح العاطبة $= \frac{3}{100}$

عدد المصابيع العاطبة المتوقع $= (4300)\left(\frac{3}{100}\right) = 129$ مصباح

6.2.2 المعدل:

عند استخدام النسبة في المقارنة بين نوعين مختلفين في المقياس تُسمى المعدل.

مثال (11):

عدد دقات قلب الإنسان في حالة السكون 4200 دقة في الساعة. احسب معدل دقات قلب الإنسان لكل دقيقة.

الحـــل:

معدل دقات قلب الإنسان لكل دقيقة $= \frac{4200}{1 \times 60} = 70$ دقة / دقيقة.

مثال (12):

مدرس يصحح 5 ورقات إجابة كل 40 دقيقة بهذا المعدل كم يستغرق في تصحيح 100 ورقة أجابة.

الحــــل:

معدل التصحيح $= \frac{40}{5} = 8$ دقائق / ورقة.

الوقت المستغرق $= 8(100) = 800$ دقيقة.

إذاً المدرس يستغرق $13\frac{1}{3}$ ساعة للإنتهاء من تصحيح 100 ورقة.

6.2.3 النسبة المئوية:

هي كسر مقامه 100 لتحويل الكسر إلى نسبة مئوية نضربه في 100 ونتبعه بالرمز %، ويرمز لها بالبسط متبوعاً بالرمز %.

مثال (13):

حول الكسر $\frac{3}{8}$ إلى نسبة مئوية.

الحــــل:

$$\frac{3}{8} \times 100 = \frac{300}{8} = 37.5 \Rightarrow \frac{3}{8} = 37.5\ \%$$

مثال (14):

حول الكسر $\frac{7}{10}$ إلى نسبة مئوية.

الحـــل:

$$\frac{7}{10} \times 100 = \frac{700}{10} = 70 \Rightarrow \frac{7}{10} = 70\ \%$$

مثال (15):

احسب $25\ \%$ من 80 .

الحـــل:

$25\ \%$ من 80 هو: $\frac{25}{100} \times 80 = \frac{2000}{100} = 20$

قاعدة :

الزيادة أو النقصان في الراتب لنسبة مئوية x هو :

$$\pm \frac{(x) \times (\text{الراتب})}{100}$$

حيث:

$+$ تستخدم في الزيادة ، $-$ تستخدم في النقصان

$$\text{الراتب الجديد} = \text{الراتب القديم} \pm \frac{(x) \times (\text{الراتب القديم})}{100}$$

مثال (16):

عند شراء جهاز كمبيوتر بمبلغ 2000 ريال وكان هناك خصم بنسبة $15\ \%$.

احسب المبلغ المدفوع عند الشراء.

الحـــل:

$15\ \%$ من 2000 هو: $\frac{15}{100} \times 2000 = 300$

إذاً المبلغ المدفوع عند الشراء هو

$2000 - 300 = 1700$ ريال

مثال (17):

حصل عامل على زيادة في الراتب بمقدار5 % من راتبه. فإذا كان راتبه 1500 ريال، أحسب.

1) مقدار الزيادة في الراتب.
2) الراتب الجديد (الراتب بعد الزيادة).

الحـــل:

1) مقدار الزيادة في الراتب حيث هي :

$$\frac{(\text{الراتب}) \times (x)}{100} = \frac{(1500) \times (5)}{100} = 75 \text{ ريال}$$

2) الراتب الجديد هو :

$$1500 + 75 = 1575 \text{ ريال}$$

مثال (18):

فاتورة تليفون بقيمة 800 ريال تأخر صاحبها في الدفع فزادت قيمتها بنسبة 10 % .
احسب قيمة الفاتورة بعد الزيادة.

الحـــل:

الزيادة في قيمة الفاتورة $= \left(\frac{10}{100}\right) 800 = 80$ ريال.
قيمة الفاتورة بعد الزيادة هي

$$800 + 80 = 880 \text{ ريال}$$

قاعدة:

1) الربح هو الفرق بين ثمن البيع وثمن الشراء لسلعة ما بشرط أن يكون ثمن البيع أكبر من ثمن الشراء. النسبة المئوية للربح هي x وتعطي من :

$$\frac{\text{مقدار الربح}}{\text{ثمن الشراء}} = \frac{x}{100}$$

2) الخسارة هي الفرق بين ثمن الشراء وثمن البيع بشرط أن يكون ثمن الشراء أكبر من ثمن البيع. النسبة المئوية للخسارة هي x وتعطي من :

$$\frac{\text{مقدار الخسارة}}{\text{ثمن الشراء}} = \frac{x}{100}$$

مثال (19):

اشترت سيدة مصوغات ذهبية وباعتها بمكسب $10\ \%$. فإذا كان صافي الربح $10,000$ ريال، فبكم اشترت الذهب.

الحل:

نفرض ثمن الشراء y بالتالي :

$$\frac{10}{100} = \frac{10,000}{y} \Rightarrow y = \frac{(10,000)(100)}{10} = 100,000 \text{ ريال}$$

إذاً ثمن المصوغات الذهبية هو مائة ألف ريال.

6.2.4 التناسب :

أي زوجين من الأعداد لهما نفس النسبة يكونا في تناسب بمعنى تكون الأعداد a, b, c, d متناسبة إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أو $ad = bc$.

مثال (20):

حدد ما إذا كان $4, 8, 1, 2$ في تناسب أم لا.

الحل:

النسبة الأولى هي : $\frac{1}{2}$، والنسبة الثانية هي : $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ (من اليسار لليمين).

إذاً النسبتان متساويتان، بالتالي فالأعداد $4, 8, 1, 2$ في تناسب .

مثال (21):

وضح أن الأعداد $2, 5, 6, 9$ غير متناسبة.

الحـــــل:

النسبة الأولى هي : $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$، والنسبة الثانية هي : $\frac{2}{5}$

إذاً النسبتان غير متساويتان، بالتالي فالأعداد $2, 5, 6, 9$ غير متناسبة.

مثال (22):

أثبت أن الأعداد $6.4, 1.6, 6.8, 1.7$ في تناسب.

الحـــــل:

النسبة الأولى هي : $\frac{4}{1} = \frac{6.8}{1.7}$ ، النسبة الثانية هي : $\frac{4}{1} = \frac{6.4}{1.6}$.

إذاً النسبتان متساويتان، بالتالي فالأعداد $6.4, 1.6, 6.8, 1.7$ في تناسب.

حل التناسب :

لإيجاد الحد x في التناسب $\frac{c}{d} = \frac{x}{a}$ تساوي حاصل ضرب الطرفين بحاصل ضرب الوسطين كالتالي :

ومنها:

$$xd = ac$$

$$x = \frac{ac}{d}$$

ويُسمى ذلك بحل التناسب.

مثال (23):

أوجد قيمة الحد x في كل مما يلي :

1) $\frac{x}{5}=\frac{7}{3}$

2) $\frac{2.4}{3.2}=\frac{x}{1.6}$

3) $\frac{6}{x}=\frac{2}{3}$

4) $\frac{1.5}{x}=\frac{2.5}{3.5}$

الحـــل:

1) $\frac{x}{5}=\frac{7}{3} \Rightarrow 3x=(5)(7) \Rightarrow 3x=35 \Rightarrow x=\frac{35}{3}$

2) $\frac{2.4}{3.2}=\frac{x}{1.6} \Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{x}{1.6} \Rightarrow 4x=4.8 \Rightarrow x=\frac{4.8}{4} \Rightarrow x=1.2$

3) $\frac{6}{x}=\frac{2}{3} \Rightarrow 2x=18 \Rightarrow x=\frac{18}{2} \Rightarrow x=9$

4) $\frac{1.5}{x}=\frac{2.5}{3.5} \Rightarrow \frac{1.5}{x}=\frac{5}{7} \Rightarrow 5x=(7)(1.5) \Rightarrow x=\frac{(7)(1.5)}{5} \Rightarrow x=2.1$

مثال (24):

اشترى طالب 10 تذاكر لمباريات كأس العالم بمبلغ 650 ريال، فكم تذكرة يمكن شرائها بمبلغ 1000 ريال.

الحـــل:

نفرض أن عدد التذاكر المطلوبة هو x بالتالي فإن

$$\frac{10}{650}=\frac{x}{1000} \Rightarrow x=\frac{1000}{65} \Rightarrow x=15.385$$

إذاً عدد التذاكر هو 15 تذكرة كاملة

6.2.5 زكاة المال وعلم الفرائض

أولاً: مسائل زكاة المال:

الزكاة هي حق واجب من مال خاص لطائفة مخصوصة في وقت مخصوص.

شروط وجوب الزكاة:

1) الإسلام (أن يكون المُزكي مسلماً).

2) بلوغ النصاب وهو يختلف حسب الأنواع التي يجب فيها الزكاة.

3) الحول (الحول القمري علماً بأن السنة القمرية 354 يوماً).

الأنواع التي يجب فيها الزكاة:

1) الذهب والفضة والأوراق المالية.

2) النعم (الإبل - البقر - الغنم - الماعز - الجاموس وخلافه).

3) عروض التجارة.

4) المعدن والركاز (مال وُجِد تحت الأرض مثل الكنز والآثار)

5) الزروع والثمار.

سنقتصر في العرض على زكاة المال ونصابها ما قيمته 92 جراماً من الذهب وقيمة

الزكاة هي ربع العُشر من المال بمعنى $\frac{1}{40}$ من المال أو $2.5\ \%$ من المال أو $\frac{25}{1000}$.

أي أن

$$2.5\ \% = \frac{2.5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{40}$$

مثال (25):

احسب مقدار زكاة المال في مقدار من المال قدره 20000 ريال حال عليه الحول، علماً بأن سعر جرام الذهب في وقت إخراج الزكاة 150 ريال.

الحل:

أولاً : نحدد إذا كان المبلغ المذكور بلغ النصاب أم لا.

النصاب $= 92 \times 150 = 13{,}800$ ريال، وعليه فإن المبلغ المذكور 20,000 ريال قد بلغ النصاب

$$\text{مقدار زكاة المال} = \left(\frac{25}{1000}\right)(20000)$$

$$= \left(\frac{1}{40}\right)(20000)$$

$$= \left(\frac{20000}{40}\right) = 500 \text{ ريال}$$

مثال (26):

إدخر رجل مبلغ استحق زكاة بمقدار 2000 ريال بعد مرور حول كامل. احسب المبلغ المدخر.

الحل:

نفرض أن المبلغ المدخر x بالتالي:

$$\frac{1}{40} = \frac{2000}{x} \Rightarrow x = (40)(2000) \Rightarrow x = 80000$$

إذاً المبلغ المدخر هو 80,000 ريال .

ثانيـــاً: علــم الفرائــض:

لقد كان توجيه القرآن الكريم لأهمية الكسور والنسب والتي سُميت بالفروض فتحاً في علم الحساب. إذ بفضل هذا التوجيه القرآني انطلق علماء المسلمين منذ أن أُنزلت آيات المواريث في محاولات حل مُعضلات الفرائض والوصايا فأدّى بهم الأمر إلى تطوير علم الحساب وابتكار الأرقام المناسبة والصفر ووضع مبادئ علم الجبر وبفضل ذلك التوجيه وتلك الجهود وصلت المدنية المعاصرة إلى ما وصلت إليه وبلغت ما بلغته من تقدم في شتى المجالات.

قبل توزيع التركة يجب أن يُراعى الآتي:

1) تسدد ديون المتوفي قبل توزيع تركته.

2) إذا كان هناك وصية فلابد من إخراجها قبل توزيع التركة بشرطين:

a) لا وصية لوارثه.

b) لاتزيد الوصية عن ثلث التركة.

النموذج 1: مات رجل وترك زوجة وأم وأب وأولاد (على الأقل ابن واحد)

الوارث	النصيب
الزوجة	$\frac{1}{8}$
الأم	$\frac{1}{6}$
الأب	$\frac{1}{6}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين

النموذج 2: مات رجل وترك زوجة وأولاد (على الأقل ابن واحد)

الوارث	النصيب
الزوجة	$\frac{1}{8}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين

النموذج 3: ماتت امرأة وتركت زوج وأم وأب وأولاد (على الأقل ابن واحد)

الوارث	النصيب
الزوج	$\frac{1}{4}$
الأم	$\frac{1}{6}$
الأب	$\frac{1}{6}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين

النموذج 4: ماتت امرأة وتركت زوج وأولاد (على الأقل ابن واحد)

الوارث	النصيب
الزوج	$\frac{1}{4}$
الأولاد	باقي التركة بشرط أن يرث الذكر مثل حظ الأنثيين

ملاحظة (1):

1) نلاحظ في النماذج السابقة كلمة (على الأقل ابن واحد) وهذا يحجب الورثة الآخرين عدا المذكورين في الجدول.

2) أولاد تعني الأبناء والبنات الذكور والإناث.

3) إذا وُجد أكثر من زوجة فهن شركاء في النصيب المفروض للزوجة كما في الجدول.

4) لم يتم ذكر المسائل التي يكون الأولاد إناث فقط وذلك لدخول العصب وأولو الأرحام في التركة ومن ثم تتعدد المسائل وتختلف الأنصبة والتي لا مجال لذكرها ومن أراد الاستزادة فعليه بكتب علم الميراث.

5) إذا كان الأولاد كلهم ذكور (أبناء)، فإن:

$$\text{نصيب كل ابن} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد الأبناء}}$$

6) إذا كان الأولاد ذكور وإناث (أبناء وبنات)، فإن:

$$\text{نصيب كل بنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + 2\,(\text{عدد الأبناء})}$$

$$\text{نصيب كل ابن} = 2\ \text{نصيب كل بنت}$$

النموذج 5: مات رجل وترك زوجة وأم وأب (بدون أولاد)

الوارث	النصيب
الزوجة	$\frac{1}{4}$
الأم	$\frac{1}{3}$ الباقي
الأب	باقي التركة

النموذج 6: ماتت امرأة وتركت زوج وأم وأب (بدون أولاد)

الوارث	النصيب
الزوج	$\frac{1}{2}$
الأم	$\frac{1}{3}$ الباقي
الأب	باقي التركة

ملاحظة (2):

1) في جميع الحالات نصيب الزوجة الثمن إن كان للزوج المتوفي ولد ولها الربع إن لم يكن له ولد.

2) في جميع الحالات نصيب الزوج الربع إن كان للزوجة المتوفية ولد وله النصف إن لم يكن لها ولد.

مثال (27):

توفى رجل وترك ميراثاً قدره 72,000 ريال وترك زوجة وأم وأب وابن وثلاث بنات. استخدم علم الفرائض في توزيع التركة.

الحـــل:

لاحظ أن المسألة تتبع النموذج (1).

نصيب الزوجة يساوي ثمن التركة وهو:

$$\frac{1}{8}(72,000)=\frac{72,000}{8}=9,000 \text{ ريال}$$

نصيب الأم = نصيب الأب = سدس التركة

نصيب الأم هو: $\frac{1}{6}(72,000)=\frac{72,000}{6}=12,000$ ريال

نصيب الأب هو: $\frac{1}{6}(72,000)=\frac{72,000}{6}=12,000$ ريال

باقي التركة للأولاد بحيث للذكر مثل حظ الأنثيين.

باقي التركة هو:

$$72,000-(9,000+12,000+12,000)=72,000-33,000=39,000$$ ريال

نصيب كل بنت هو $= \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + (\text{عدد الأبناء})\,2} = \frac{39,000}{2(1)+3} = \frac{39,000}{5} = 7,800$ ريال

نصيب ابن هو = نصيب الابن = (نصيب البنت) $2 = 2(7,800) = 15,600$ ريال

ويمكن كتابة التوزيع كالتالي:

<table>
<tr><th>الوارث</th><th colspan="4">النصيب</th></tr>
<tr><td>الزوجة</td><td colspan="4">9,000</td></tr>
<tr><td>الأم</td><td colspan="4">12,000</td></tr>
<tr><td>الأب</td><td colspan="4">12,000</td></tr>
<tr><td rowspan="4">الأولاد</td><td rowspan="4">باقي التركة</td><td rowspan="4">39,000</td><td>ابن</td><td>15,000</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3 بنات</td><td>7,800</td></tr>
<tr><td>7,800</td></tr>
<tr><td>7,800</td></tr>
<tr><td>مجموع التركة</td><td colspan="4">72,000</td></tr>
</table>

مثال (28):

توفى رجل وترك ميراثاً قدره 72,000 ريال وترك ثلاث زوجات وأم وأب وابن وثلاث بنات.

استخدم علم الفرائض في توزيع التركة.

الحـــل:

لاحظ أن المسألة هي المثال (29) مع اختلاف عدد الزوجات وعليه سنحسب نصيب الزوجات وأما باقي الأنصبة لا تتغير.

نصيب الزوجات الثلاث يساوي ثمن التركة: ريال $(72,000)\left(\frac{1}{8}\right)=9,000$

نصيب كل زوجة هو : نصيب كل زوجة $= \frac{\text{نصيب الزوجات}}{\text{عدد الزوجات}} = \frac{9,000}{3} = 3,000$ ريال

مثال (29):

توفى رجل تاركاً 790,000 ريال وكان عليه دين قدره 40,000 ريال وترك زوجة وابن.

احسب نصيب الورثه علماً بأن الرجل أوصى بـ 30,000 ريال كوقف خيري لتحفيظ القرآن الكريم.

الحـــل:

أولاً: لا بد من التأكد أن الوصية لا تزيد عن ثلث التركة:

ثلث (التركة- الدين) $= \frac{790,000-40,000}{3} = \frac{750,000}{3} = 250,000$ ريال.

بما أن المبلغ الموصى به وهو 30,000 ريال أقل من ثلث (التركة- الدين)، إذاً الوصية نافذة.

الوصية + الدين = $30,000 + 40,000 = 70,000$ ريال

باقي التركه = $70,000 - 790,000 = 720,000$ ريال

نصيب الزوجة = $(790,000)\frac{1}{8} = 720,000$ ريال

نصيب الإبن = $90,000 - 720,000 = 630,000$ ريال

مثال (30):

توفيت امرأة وتركت ميراثا قدره 150,000 ريال وتركت زوج وأم وأب وبنتان وثلاث أبناء.

استخدم علم الفرائض في توزيع التركة.

الحل:

لاحظ أن المسألة تتبع النموذج (3).

نصيب الزوج يساوي ربع التركة وهو:

$$\frac{1}{4}(150,000) = \frac{150,000}{4} = 37,500 \text{ ريال}$$

نصيب الأم = نصيب الأب = سدس التركة

نصيب الأم هو: $\frac{1}{6}(150,000) = \frac{150,000}{6} = 25,000$ ريال

نصيب الأب هو: $\frac{1}{6}(150,000) = \frac{150,000}{6} = 25,000$ ريال

باقي التركة للأولاد بحيث للذكر مثل حظ الأنثيين.

باقي التركة هو:

$$150,000 - (37,500 + 25,000 + 25,000) = 150,000 - 87,500 = 62,500 \text{ ريال}$$

نصيب كل بنت هو:

$$\text{نصيب كل بنت} = \frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + (\text{عدد الأبناء})\,2} = \frac{62,500}{2(3)+2} = \frac{62,500}{8} = 7812.5 \text{ ريال}$$

نصيب كل ابن هو:

$$\text{نصيب الابن} = (\text{نصيب البنت})\ 2 = 2(7812,5) = 15,625 \text{ ريال}$$

ويمكن كتابة التوزيع كالتالي:

الوارث	النصيب			
الزوج				37,000
الأم				25,000
الأب				25,000
الأولاد	باقي التركة	39,000 39,000	3 أبناء	15,625
				15,625
				15,625
			2 بنت	7812,5
				7812,5
مجموع التركة				150,000

مثال (31):

توفيت امرأة وتركت ميراثاً قدره 80,000 ريال وتركت زوج وابنان وبنت. استخدم علم الفرائض في توزيع التركة.

الحـــل:

لاحظ أن المسألة تتبع النموذج (4).

نصيب الزوج يساوي ربع التركة وهو:

$$\frac{1}{4}(80,000)=\frac{80,000}{4}=20,000 \text{ ريال}$$

باقي التركة للأولاد بحيث للذكر مثل حظ الأنثيين.

باقي التركة هو: $80,000-20,000=60,000$

نصيب كل بنت هو:

$$\text{نصيب كل بنت}=\frac{\text{باقي التركة}}{\text{عدد البنات} + (\text{عدد الأبناء})\,2}=\frac{60,000}{2(2)+1}=\frac{60,000}{5}=12,000 \text{ ريال}$$

نصيب كل ابن هو:

$$\text{نصيب الابن}=(\text{نصيب البنت})\,2=2(12,000)=24,000 \text{ ريال}$$

مثال (32):

توفى رجل عقيم وترك ميراثاً قدره 80,000 ريال وترك زوجة وأم وأب. استخدم علم الفرائض في توزيع التركة.

الحـــل:

لاحظ أن المسألة تتبع النموذج (5) حيث أن الرجل عقيم أي لا ينجب (بدون أولاد).

نصيب الزوجة يساوي ربع التركة وهو:

$$\frac{1}{4}(80,000) = \frac{80,000}{4} = 20,000 \text{ ريال}$$

باقي التركة هو: $80,000 - 20,000 = 60,000$ ريال

نصيب الأم = ثلث باقي التركة وهو:

$$\frac{1}{3}(60,000) = \frac{60,000}{3} = 20,000 \text{ ريال}$$

نصيب الأب = ثلثي باقي التركة وهو:

$$\frac{2}{3}(60,000) = \frac{2(60,000)}{3} = 40,000 \text{ ريال}$$

تُسمي تلك المسألة بالعُمَرِيَّة الأولى نسبة لعمر بن الخطاب حيث كان أول من فَقِهَ إلى أنّ نصيب الأم ثلث باقي التركة وليس ثلث التركة كاملة. وعليه نصيب الأب ضعف نصيب الأم.

مثال (33):

توفيت امرأة عاقر وتركت ميراثاً قدره 120,000 ريال وتركت زوج وأم وأب. استخدم علم الفرائض في توزيع التركة.

الحـــل:

لاحظ أن المسألة تتبع النموذج (6) حيث أن المرأة عاقر أي لا تنجب (بدون أولاد).

نصيب الزوج يساوي نصف التركة وهو:

$$\frac{1}{2}(120,000) = \frac{120,000}{2} = 60,000 \text{ ريال}$$

باقي التركة هو: ريال $120,000-60,000=60,000$

نصيب الأم = ثلث باقي التركة وهو:

$$\frac{1}{3}(60,000)=\frac{60,000}{3}=20,000$$ ريال

نصيب الأب = ثلثي باقي التركة وهو:

$$\frac{2}{3}(60,000)=\frac{2(60,000)}{3}=40,000$$ ريال

تُسمى تلك المسألة بالعُمَرِيَّة الثانية.

6.2.6 تمارين

تمارين على النسبة :

(1) مثلث ABC قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي :

$$|AB| = 10\ cm \quad , \quad |BC| = 8\ cm \quad , \quad |AC| = 6\ cm$$

احسب نسبة :

a) طول الضلع $|BC|$ إلى طول الضلع $|AC|$.

b) طول الضلع $|AC|$ إلى طول الوتر (الوتر يقابل الزاوية القائمة وهو أكبر أضلاع المثلث طولاً) .

c) طول الضلع $|BC|$ إلى طول الوتر.

d) طول الوتر إلى طول محيط المثلث (محيط المثلث هو مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة) .

(2) احسب نسبة طول أي ضلع في المثلث متساوي الأضلاع إلى نسبة محيطه.

تمارين على المعدل:

(3) احسب معدل مساحة مربع إلى طول ضلعه.

(4) احسب معدل مساحة دائرة إلى محيطها.

(5) احسب معدل مساحة دائرة إلى قطرها.

(6) في المثلث ABC قائم الزاوية أطواله أضلاعه هي .

$$|AB| = 5\ cm \quad , \quad |BC| = 4\ cm \quad , \quad |AC| = 3\ cm$$

احسب معدل محيط المثلث إلى مساحته (مساحة المثلث قائم الزاوية حاصل ضرب ضلعي القائمة) .

تمارين على التناسب

(7) أوجد الحد المفقود x في كل مجموعة من الأعداد المتناسبة الآتية :

a) $x,5,6,3$

b) $10,x,5,4$

c) $3,2,x,6$

d) $4,1,8,x$

تمارين على النسبة المئوية :

(8) استخدم مهندس معماري خلطة خرسانية مكونة من الاسمنت والرمل تزن $100\ kg$ وكان وزن الاسمنت فيها $40\ kg$. أوجد وزن الرمل ثم احسب النسبة المئوية لوزن الاسمنت في الخلطة الخرسانية وكذلك النسبة المئوية للرمل.

(9) يعمل موظف بشركة ويتقاضى راتباً شهرياً قدره 3000 ريال، فإذا قرر مدير الشركة أن يمنح كل موظف زيادة في الراتب قدرها 15 % ، كم سيمنح هذا الموظف.

تمارين على الربح والخسارة :

(10) اشترت شركة عقارية 65 عقاراً بمبلغ 650,000 ريال وباعت العقار الواحد بمبلغ 15,000 ريال. احسب النسبة المئوية لربح الشركة في العقار الواحد.

(11) ابتاعت شركة حسابات 100 جهاز حاسب آلي متماثلة بمبلغ 500,000 ريال وباعت الجهاز الواحد بمبلغ 6,000 ريال. احسب النسبة المئوية لربح الشركة بالنسبة للجهاز الواحد.

(12) في ظل الأزمة الاقتصادية العالمية باع بنك مدينة سكنية مكونة من 1000 من شقة بمبلغ 75 مليون ريال بخسارة 25 % في الشقة الواحدة ، أحسب الثمن الأصلي للمدينة السكينة .

تمارين على زكاة المال :

(13) ادخر رجل مبلغ 30,000 ريال حال عليه الحول وبلغ النصاب أحسب زكاة المال.

(14) إذا كانت زكاة المال المطلوبة من رجل تقدر بمبلغ 15,000 ريال . احسب أصل المال المستحق للزكاة.

تمارين على الإرث:

(15) مات رجل وترك مبلغ من المال قدره 480,000 ريال وترك زوجة وابنان وبنتان. احسب نصيب الزوجة والأولاد.

(16) مات رجل وترك مبلغ من المال قدره 24,000 ريال وترك زوجة بدون أولاد وورثة آخرون. احسب نصيب الزوجة.

(17) ماتت زوجة وتركت مبلغ من المال قدره 100,000 ريال وتركت زوج وابنان وبنتان . احسب نصيب الزوج والأولاد.

(18) ماتت زوجة وتركت مبلغ من المال قدره 50,000 ريال وتركت زوج بدون أولاد وورثة آخرون. احسب نصيب الزوج.

(19) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 100,000 ريال وترك زوجة وأم وأب وابنان وبنتان وزّع التركة طبقاً للشريعة الإسلامية.

(20) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 80,000 ريال وترك زوجة وأم وأب وثلاث أبناء وبنتان احسب نصيب كل وارث، علماً بأنه أوصى بمبلغ 10,000 ريال لرعاية الأيتام.

(21) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 90,000 ريال وترك زوجة وأم وابنان وبنت احسب نصيب كل وارث.

(22) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 40,000 ريال وترك زوجة وأب وثلاث أبناء وبنت احسب نصيب كل وارث.

(23) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 50,000 ريال وترك زوجتان وأم وأب وثلاث أبناء وبنت احسب نصيب كل وارث.

(24) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 100,000 ريال وترك أربع زوجات وأم وأب وابنان وبنتان وزع التركة طبقاً للشريعة الإسلامية، علماً بأنه كان مديناً بمبلغ 40,000 ريال.

(25) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 100,000 ريال وترك ثلاث زوجات وأم وأب وثلاث أبناء وأربع بنات وزع التركة طبقاً للشريعة الإسلامية، علماً بأنه أوصى بمبلغ 20,000 ريال لفقراء المسلمين.

(26) ماتت زوجة وتركت زوج وأم وأب وثلاث بنات وابنان وتركت ميراثاً قدره 80,000 ريال احسب نصيب كل وارث، علماً بأنها كانت مدينة بمبلغ 10,000 ريال.

(27) ماتت زوجة وتركت زوج وأم و بنت وابن وتركت ميراثاً قدره 200,000 ريال احسب نصيب كل وارث، علماً بأنها أوصت بمبلغ 50,000 ريال كوقف لوجه الله.

(28) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 100,000 ريال وترك ثلاث زوجات وأم وأب وليس له أولاد وزع التركة طبقاً للشريعة الإسلامية، علماً بأنه كان مديناً بمبلغ 20,000 ريال وأوصى بمبلغ 10,000 ريال صدقة جارية له.

(29) توفى رجل وترك ميراثاً قدره 100,000 ريال وترك أربع زوجات وأم وأب وليس له أولاد وزع التركة طبقاً للشريعة الإسلامية، علماً بأنه أوصى بمبلغ 20,000 ريال لفقراء المسلمين.

(30) ماتت زوجة وتركت زوج وأم وأب وتركت ميراثاً قدره 200,000 ريال احسب نصيب كل وارث.

اختار الإجابة الصحيحة:

(31) قسم العدد 150 بنسبة 2 : 1 : 3 فتكون الأعداد هى على الترتيب.

a	50, 75, 25	b	25, 75, 50
c	75, 25, 50	d	25, 50, 75

(32) فاتورة تليفون بقيمة 1240 ريال تأخر صاحبها في الدفع لمدة خمسة أشهر فزادت قيمتها بنسبة % 10 فصارت قيمتها بعد الزيادة.

a	1339.2	b	1314.4
c	1240	d	1364

(33) الكسر $\frac{7}{10}$ يكافئ النسبة المئوية.

a	20 %	b	70 %
c	75 %	d	80 %

(34) الأعداد 1.2, 4.8, 1.7, 6.8 تكون متناسبة.

a	صواب	b	خطأ

(35) ادخر عبدالله مبلغاً وقد حال عليه الحول فإذا كان مقدار الزكاة الواجبة 400 ريال فإن المبلغ المُدخر هو.

a	18000	b	16000
c	14000	d	12000

(36) الأعداد 4, 8, 1, 2 تكون متناسبة.

a	صواب	b	خطأ

(37) النسبة المئوية % 20 تكافئ الكسر.

a	$\frac{1}{5}$	b	$\frac{1}{2}$
c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{3}$

(38) عند شراء جوال كان الخصم % 20 والثمن المدفوع عند الشراء 1700 ريال. السعر الأصلي للجوال قبل الخصم هو.

a	2100	b	2150
c	2000	d	2125

(39) حصل عامل على زيادة في الراتب بمقدرا % 20 فإذا كان راتبه قبل الزيادة 1500 ريالاً فما هو الراتب الجديد.

a	1600	b	1700
c	1800	d	1900

(40) الكسر $\frac{3}{4}$ يكافئ النسبة المئوية.

a	70 %	b	65 %
c	75 %	d	80 %

(41) إذا اشترى محمد سيارة بمبلغ 100,000 ريال وربح 4000 ريال فإن نسبة ربح محمد هي.

a	2 %	b	3 %
c	4 %	d	5 %

(42) مقدار زكاة المال على مبلغ قدره 120,000 ريال حال عليه الحول هي 3000 ريال.

a	صواب	b	خطأ

(43) مقدار زكاة المال على مبلغ قدره 360,000 ريال حال عليه الحول هي 4000 ريال.

a	صواب	b	خطأ

(44) الأعداد 3, 6, 1, 2 تكون متناسبة.

a	صواب	b	خطأ

(45) النسبة المئوية 25 % تكافئ الكسر .

a	$\frac{1}{5}$	b	$\frac{1}{2}$
c	$\frac{1}{4}$	d	$\frac{1}{3}$

(46) عند شراء جوال كان الخصم 25 % والثمن المدفوع عند الشراء 2400 ريال، السعر الأصلي للجوال قبل الخصم هو.

a	3000	b	3200
c	3400	d	3600

(47) حصل عامل على زيادة في الراتب بمقدرا 25 % فإذا كان راتبه قبل الزيادة 2000 ريالاً فما هو الراتب الجديد.

a	2400	b	2500
c	2600	d	2800

(48) إذا اشترى محمد سيارة بمبلغ 120,000ريال ثم باعها وربح 6000 ريال فإن نسبة ربح محمد هي.

a	2 %	b	3 %
c	4 %	d	5 %

(49) مقدار زكاة المال على مبلغ قدره 180,000 ريال حال عليه الحول هي 4500 ريال.

a	صواب	b	خطأ

(50) الأعداد 3, 6, 4, 4 تكون متناسبة

a	صواب	b	خطأ

(51) النسبة المئوية 30 % تكافئ الكسر .

a	$\frac{3}{5}$	b	$\frac{3}{20}$
c	$\frac{3}{100}$	d	$\frac{3}{10}$

(52) عند شراء جوال كان الخصم 30 % والثمن المدفوع عند الشراء 2100 ريال، السعر الأصلي للجوال قبل الخصم هو.

a	3000	b	3200
c	3400	d	3600

(53) الكسر $\frac{4}{5}$ يكافئ النسبة المئوية.

a	50 %	b	60 %
c	70 %	d	80 %

(54) إذا اشترى محمد سيارة بمبلغ 60,000ريال ثم باعها وربح 3000 ريال فإن نسبة ربح محمد هي.

a	2 %	b	3 %
c	4 %	d	5 %

(55) مقدار زكاة المال على مبلغ قدره 280,000 ريال حال عليه الحول هي 7000 ريال.

a	صواب	b	خطأ

(56) الأعداد 3, 6, 4, 8 تكون متناسبة

a	صواب	b	خطأ

(57) النسبة المئوية 40 % تكافئ الكسر .

a	$\frac{3}{5}$	b	$\frac{2}{5}$
c	$\frac{4}{5}$	d	$\frac{1}{5}$

(58) عند شراء جوال كان الخصم 40 % والثمن المدفوع عند الشراء 2100 ريال، السعر الأصلي للجوال قبل الخصم هو.

a	3000	b	3300
c	3500	d	3600

(59) حصل عامل على زيادة في الراتب بمقدرا 40 % فإذا كان راتبه قبل الزيادة 3000 ريالاً فما هو الراتب الجديد.

a	4200	b	4600
c	4800	d	4900

(60) الكسر $\frac{3}{5}$ يكافئ النسبة المئوية.

a	40 %	b	50 %
c	60 %	d	65 %

(61) إذا اشترى محمد سيارة بمبلغ 80,000 ريال ثم باعها وربح 4000 ريال فإن نسبة ربح محمد هي.

a	2 %	b	3 %
c	4 %	d	5 %

(62) مقدار زكاة المال على مبلغ قدره 200,000 ريال حال عليه الحول هي 5000 ريال.

a صواب	b خطأ

(63) قسم العدد 150 بنسبة 3 : 2 : 1 فتكون الأعداد هي على الترتيب.

a 50, 75, 25	b 25, 75, 50
c 75, 25, 50	d 25, 50 , 75

(64) فاتورة تليفون بقيمة 1240 ريال تأخر صاحبها في الدفع لمدة خمسة أشهر فزادت قيمتها بنسبة 5 % فصارت قيمتها بعد الزيادة.

a 1339.2	b 1314.4
c 1302	d 1364

(65) الكسر $\frac{4}{5}$ يكافئ النسبة المئوية.

a 20 %	b 70 %
c 75 %	d 80 %

(66) الكسر المناظر للنسبة المئوية 50 % .

a $\frac{1}{20}$	b $\frac{2}{8}$
c $\frac{3}{6}$	d $\frac{3}{4}$

(67) الأعداد 6.4, 1.6, 6.8, 1.7 تكون متناسبة

a صواب	b خطأ

(68) ادخر عبدالله مبلغاً وقد حال عليه الحول فإذا كان مقدار الزكاة الواجبة 300 ريال فإن المبلغ المُدخر هو.

a	12000	b	14000
c	16000	d	18000

(69) اشترت سيدة مصوغات ثم باعتها بمكسب 8 % فإذا كان صافي الربح 2400 ريالاً فإن قيمة المصوغات عند الشراء هي.

a	30000	b	32500
c	35000	d	27500

(70) قسم العدد 150 بنسبة 1 : 3 : 2 فتكون الأعداد هي على الترتيب.

a	50, 75, 25	b	25, 75, 50
c	75, 25, 50	d	25, 50 , 75

(71) الكسر $\frac{3}{4}$ يكافئ النسبة المئوية.

a	20 %	b	70 %
c	75 %	d	80 %

(72) الأعداد 1.6, 6.4, 1.7, 6.8 تكون متناسبة

a	صواب	b	خطأ

(73) الكسر المناظر للنسبة المئوية 25 % .

a	$\frac{1}{20}$	b	$\frac{2}{8}$
c	$\frac{3}{6}$	d	$\frac{3}{4}$

(74) ادخر عبدالله مبلغاً وقد حال عليه الحول فإذا كان مقدار الزكاة الواجبة 350 ريال فإن المبلغ المُدخر هو.

a	12000	b	14000
c	16000	d	18000

(75) قسم العدد 150 بنسبة 2 : 3 : 1 فتكون الأعداد هي على الترتيب.

a	50, 75, 25	b	25, 75, 50
c	75, 25, 50	d	25, 50 , 75

(76) فاتورة تليفون بقيمة 1240 ريال تأخر صاحبها في الدفع لمدة ثلاثة أشهر فزادت قيمتها بنسبة % 6 فصارت قيمتها بعد الزيادة.

a	1339.2	b	1314.4
c	1302	d	1364