١

الباب الأول

الاحتمالات

مقدمة عن مفهوم الاحتمالات :

حساب قيمة الاحتمال :

نظرية : اذا كان هناك حدث ما وليكن س وهذا الحدث يتكرر ظهوره م من المرات في تجربة او عينة حجمها ن من المرات ،فان احتمال وقوع هذا الحدث هو : ح(س) = $\frac{م}{ن}$ ، حيث م ≤ ن .

مثال(1)

يتكون مجلس إدارة احدى الشركات من 8 مهندس ، 6 محاسب ، 2 اقتصادي ، اختير احدهم عشوائيا ، ما هو احتمال ان يكون : 1- محاسب . 2- اقتصادي .

الحل :

- ح(محاسب) = $\frac{م}{ن}$ = $\frac{6}{16}$
- ح(اقتصادي) = $\frac{م}{ن}$ = $\frac{2}{16}$

مثال (2)

تضم الشعبة (11) في كلية الاقتصاد 72 طالبا منهم 42 طالب من سكان الرياض ، ويوجد بالشعبة 15 طالبا متزوجا ويوجد أيضا بالشعبة 4 طلاب مدخنين .اختير احد اطلاب عشوائيا ، ما هو احتمال ان يكون:

1. من سكان الرياض .
2. من خارج مدينة الرياض.
3. متزوجا .
4. مدخنا .
5. ان يكون متحدثا باللغة العربية .
6. ان يكون متحدثا باللغة اليابانية.

الحل :

كل سؤال من الأسئلة السابقة تتناول حدثا واحدا ، أي حدث بسيط ، لذا نستخدم القانون :ح(س) = $\frac{م}{ن}$ ، حيث م ≤ ن

(1) ح (من الرياض) = $\frac{42}{72}$

(2) ح (من خارج الرياض) = $\frac{30}{72}$

(3) ح (متزوجا) = $\frac{15}{72}$

(4) ح (مدخنا) = $\frac{4}{72}$

(5) ح (يتحدث لغة عربية) = $\frac{72}{72}$ = 1 أي حدث مؤكد

(6) ح (يتحدث ياباني) = $\frac{0}{72}$ = صفر أي حدث مستحيل

ملاحظة :

- اذا كان احتمال وقوع الحدث هو ح (س) ، فأن احتمال عدم وقوع الحدث يكون ح(س) وبالتالي يصبح :

ح(س) + ح(س) = 1 , ويسمى عدم وقوع الحدث باسم الحدث المكمل ، أي ان احتمال الحدث ومكملة = 1

- الاحتمال هو قيمة كسرية موجبة تقع بين الصفر والواحد الصحيح ، أي :

$0 \le$ ح(س) ≤ 1

(1) أنواع الحوادث الاحتمالية :

تتعلق الاحتمالات بوقوع احداث ، وتنقسم هذه الاحداث الي نوعين :

(أ) حوادث بسيطة : أي حدث واحد فقط وليكن اسمة س واحتمال وقوع هذا الحدث هو :

ح(س) = $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ، حيث م $\le$ ن

(ب) حوادث مركبة : أي عدة حوادث بسيطة ولتكن س ، ص ، ع ، ...... ولحساب قيمة احتمال الحوادث المركبة نستخدم قانون الجمع او قانون الضرب .

قانون الجمع في الاحتمالات

في قانون الجمع يجب التفرقة بين الحوادث المتنافية وغير المتنافية حيث :

1- الحوادث المتنافية : هي تلك الحوادث التي لا يمكن ان تقع معا في وقت واحد .

ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص)

2- الحوادث غير المتنافية : هي تلك الحوادث التي يمكن ان تقع معا في وقت واحد.

ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص)

مثال (3)

يتكون مجلس ادره احدى المستشفيات من 8 طبيب ، 15 ممرض ، 5 فني اشعة . اختير احدهم عشوائيا، ما هو احتمال ان يكون:

1- طبيب .
2- فني اشعة .
3- طبيب او ممرض .
4- ممرض او فني اشعة .

الحل :

1- ح(طبيب) = $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{8}{28}$

2- ح(فني اشعة) = $\frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{5}{28}$

3- ح(طبيب او ممرض) = ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص) = $\frac{8}{28} + \frac{15}{28} = \frac{23}{28}$

هنا س ، ص حوادث متنافية ، لأنه لا يمكن ان يكون الشخص طبيبا وممرضا في نفس الوقت.

4- ح(ممرض او فني اشعة) = ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص) = $\frac{15}{28} + \frac{5}{28} = \frac{20}{28}$

مثال (4)

في احدى الإدارات الحكومية 70 موظف منهم 30 موظف متزوج فقط وهناك 12 موظف مدخن فقط أيضا يوجد 8 موظفين متزوجين ومدخنين في نفس الوقت . اختير احدهم عشوائيا، ما هو احتمال ان يكون:

1- متزوج فقط .
2- مدخن فقط .
3- متزوج او مدخن .

الحل :

1- ح(متزوج) = $\frac{م}{ن} = \frac{30}{70}$

2- ح(مدخن) = $\frac{م}{ن} = \frac{12}{70}$

3- ح(متزوج او مدخن) = ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص)

$= \frac{34}{70} = \frac{8}{70} - \frac{12}{70} + \frac{30}{70}$

مثال (5)

أظهرت نتاج العام الماضي ان نسبة النجاح في الإحصاء 72% ونسبة النجاح في الإحصاء او الاقتصاد 92% اما نسبة النجاح في الإحصاء والاقتصاد معا فكانت 44% . اختير احد الطابة عشوائيا ، ما هو احتمال ان يكون ناجحا في الاقتصاد ؟

الحل :

الإحصاء : س ، الاقتصاد : ص

ح(س) = 72% = 0.72 ، ح(س + ص) = 92% =0.92 ، ح(س ص)=44% = 0.44

ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص)

0.92 = 0.72 + ح(ص) – 0.44

ح(ص) = 0.64

مثال (6)

صندوق بة 20 ورقة متماثلة في الشكل واللون ومرقمة من 1 الى 20 ، سحبت من ورقة واحدة عشوائيا ، ما هو احتمال ان يكون عليها :

1- رقما زوجيا .
2- رقما يقبل القسمة على 3 .
3- رقما يقبل القسمة على 5 .
4- رقما يقل عن 4.
5- رقما يزيد عن 15
6- رقما يقبل القسمة على 3 او 5 .
7- رقما يقبل القسمة على 3 او 7
8- رقما يقبل القسمة على 6 او 8
9- رقما يقبل القسمة على 5 او 10
10- رقما يقبل القسمة على 4 او 8

الحل :

1. ح(رقم زوجي) = $\frac{10}{20}$
2. ح(رقم يقبل القسمة على 3) = $\frac{6}{20}$ ، هناك 6 ورقات:(18،15،12،9،6،3)
3. ح(رقم يقبل القسمة على 5) = $\frac{4}{20}$ ، هناك 4 ورقات:(20،15،10،5)
4. ح(رقم يقل عن 4) = $\frac{3}{20}$ ، هناك 3 ورقات:(1،2،3)
5. ح(رقم يزيد عن 15) = $\frac{5}{20}$ ، هناك 5 ورقات:(20، 19،18،17،16)
6. ح(رقم يقبل القسمة على 3 او 5)

= ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص)

$\frac{9}{20} = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} =$

7. ح(رقم يقبل القسمة على 3 او 7)

= ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص)

$\frac{8}{20} = \frac{6}{20} + \frac{2}{20} =$

8. ح(رقم يقبل القسمة على 6 او 8)

= ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص)

$\frac{5}{20} = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} =$

9. ح(رقم يقبل القسمة على 5 او 10)

= ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص)

$\frac{4}{20} = \frac{4}{20} + \frac{2}{20} - \frac{2}{20} =$

10. ح(رقم يقبل القسمة على 4 او 8)

= ح (س + ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص)

$\frac{5}{20} = \frac{5}{20} + \frac{2}{20} - \frac{2}{20} =$

قانون الضرب في الاحتمالات

في قانون الضرب يجب التفرقة بين الحوادث المستقلة وغير المستقلة حيث :

1- الحوادث المستقلة: هي تلك الحوادث التي لا تؤثر ولا تتأثر بغيرها من الحوادث .

ح (س ص) = ح (س) × ح (ص)

2- الحوادث غير المستقلة: هي تلك الحوادث التي تؤثر وتتأثر بغيرها من الحوادث .

ح (س ص) = ح (س) × ح(ص / س)

يسمى ح (ص / س) بالاحتمال الشرطي

مثال (7)

اذا كان احتمال ذهاب احمد الى مكة هو 0.7 واحتمال ذهاب خالد الى مكة هو 0.2 ، فما هو احتمال ذهاب احمد وخالد الى مكة معا ؟

الحل:

احمد : س ، خالد : ص ، ح(س) = 0.7 ، ح(ص) = 0.2

ح(س ص) = ح(س) × ح(ص) = 0.7 × 0.2 = 0.14

مثال (8)

اذا كان احتمال ذهاب الاب الى المزرعة هو 0.8 واحتمال ذهاب الاب و الابن معا الى المزرعة هو 0.3 ، فما هو احتمال ذهاب الابن الى المزرعة بشرط ان يسبقه الاب الى المزرعة ؟

الحل:

الاب : س ، الابن : ص ، ح(س) = 0.8 ، ح(س ص) = 0.3 ، اوجد : ح(ص / س)

ح(س ص) = ح(س) × ح(ص / س)

0.3 = 0.8 × ح(ص /س) ⟵ ح (ص / س) = 0.3 ÷ 0.8 = 0.375

مثال (9)

على احدى رحلات الخطوط الجوية السعودية مجموعة من الركاب السعوديين والأجانب وقد تم تصنيفهم حسب الحالة الاجتماعية (متزوج او اعزب) في الجدول التالي :

المجموع	اجنبي	سعودي	
132	44	88	متزوج

اعزب	37	16	53
المجموع	125	60	185

اختير احد الركاب عشوائيا ، ما هو احتمال ان يكون :

- سعودي
- متزوج
- سعودي أعزب
- سعودي او أعزب
- سعودي او اجنبي
- اجنبي او متزوج

الحل :

1. ح(سعودي) $= \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{125}{185}$
2. ح(متزوج) $= \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{132}{185}$
3. ح(سعودي اعزب) $= \frac{\text{م}}{\text{ن}} = \frac{37}{185}$
4. ح(سعودي او اعزب) = ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص) − ح(س ص)
   $= \frac{125}{185} + \frac{53}{185} - \frac{37}{185} = \frac{141}{185} = 0.762$
5. ح(سعودي او اجنبي) = ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص)
   $= \frac{125}{185} + \frac{60}{185} = 1$
6. ح(اجنبي او متزوج) = ح(س + ص) = ح(س) + ح(ص) − ح(س ص)
   $= \frac{60}{185} + \frac{132}{185} - \frac{44}{185} = \frac{148}{185} = 0.8$

أسئلة متنوعة

س(1) : حدد نوعية المتغيرات التالية (وصفي اسمي ، وصفي ترتيبي ، كمي متصل ، كمي متقطع)

- عدد الكليات في الجامعات السعودية.
- أطوال عينة من الطلاب.
- جنسيات العاملين بإحدى الشركات.
- ألوان السيارات لعينة من الطلاب.
- أعداد المساجد في مدن المملكة.
- درجات الحرارة اليومية.
- المستوى التعليمي للعاملين.
- الحالة الاجتماعية للموظفين.
- أسماء المدن بالمملكة .
- رواتب العاملين بجامعة الإمام.

س(2) : أكمل ما يلي :

- تقع قيمة الاحتمال بين :........................... ، ....
- إذا كانت قيمة الاحتمال لحدث ما = صفر، فإن هذا الحدث يسمى :...........................
- إذا كانت قيمة الاحتمال لحدث ما = 1 ، فإن هذا الحدث يسمى : ....

- تنقسم الحوادث في الاحتمالات الى حوادث :...................... ، ....
- يرتبط قانون الجمع في الاحتمالات بمفهوم الحوادث:..................
- يرتبط قانون الضرب في الاحتمالات بمفهوم الحوادث:..................
- الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي :.....................
- الحوادث المستقلة هي تلك الحوادث التي:.........................
- إذا كان هناك حدث ما وليكن (أ) يتكرر ظهوره أو وقوعه (م) من المرات في تجربة حجمها (ن) من المرات ، فإن احتمال وقوع أو ظهور هذا الحدث ح (ا) يساوي : ....
- إذا كان س ، ص حدثان غير متنافيان، فإن: ح(س+ ص) =............
- إذا كان س ، ص حدثان متنافيان ،فإن : ح (س ص) =..................
- ح(س+ ص) = ح(س) + ح(ص) – ح(س ص) يستخدم هذا القانون للحوادث............
- إذا كان س ، ص حدثان مستقلان ، فإن : ح(س ص) =...........
- إذا كان س ، ص حدثان غير مستقلان ، فإن : ح(س ص) =.................
- إذا كان أ ، ب حدثان غير مستقلان ، فإن : ح(أ / ب) =.................

س(3): صندوق بداخلة 15 ورقة متماثلة في الشكل واللون مرقمة من 1 إلى 15 اختيرت من الصندوق ورقة واحدة عشوائيا، ما هو احتمال أن يكون عليها :

- رقما زوجيا؟
- رقما اقل من 5 ؟
- رقما يزيد عن 7 ؟
- رقما يقبل القسمة على 3 ؟
- رقما يقبل القسمة على 5 ؟
- رقما يقبل القسمة على 2 أو 6 ؟
- رقما يقبل القسمة على 3 او 5 ؟

س(4): يتكون مجلس إدارة إحدى الشركات من 5 محاسبين ،7 مهندسين ، 3 اقتصاديين . اختير احدهم بطريقة عشوائية. ما هو احتمال أن يكون محاسبا ؟ وما هو احتمال ان يكون محاسبا أو اقتصاديا ؟

س(5): أظهرت نتائج العام الماضي أن نسبة النجاح في مادة الرياضيات هى70 % ونسبة النجاح في مادة المحاسبة هى 80 % ، أما نسبة النجاح في مادتي الرياضيات والمحاسبة معا هى60 % ، اختير احد الطلبة عشوائيا، ما هو احتمال أن يكون ناجحا في الرياضيات أو المحاسبة ؟

س (6): أعلنت احدى الشركات عن وظيفة محاسب ، فتقدم لها 120 شابا من مدينة الرياض منهم 80 شابا من خريجي جامعة الامام والباقي من خريجي جامعة الملك سعود . تقدم أيضا للوظيفة 60 شابا من مدينة القصيم منهم 45 شابا من خريجي جامعة الامام والباقي من خريجي جامعة الملك سعود . اختير أحد الشباب عشوائيا ، ما هو احتمال أن يكون :

- من جامعة الامام.
- من الرياض.
- من الرياض او من خريجي جامعة الملك سعود .
- من الرياض أو من خريجي جامعة الإمام.
- من الرياض او من القصيم .

س(7): إذا كان احتمال نجاح احمد في المحاسبة هو 0.7 واحتمال نجاح خالد في المحاسبة هو 0.9

فما هو احتمال نجاح احمد وخالد معا في المحاسبة ؟

س (8):إذا كان احتمال ذهاب خالد إلى جدة هو 0.4 واحتمال ذهاب كمال إلى جدة بشرط أن يسبقه

خالد هو 0.6 فما هو احتمال ذهاب خالد وكمال معا إلى جدة ؟

س(9): إذا كان احتمال أن يذهب الأب إلى المزرعة هو 0.8 واحتمال أن يذهب الاب والابن معا إلى المزرعة هو 0.4 فما هو احتمال أن يذهب الابن بشرط ان يسبقه الاب إلى المزرعة ؟

الباب الثاني

دالة الاحتمال الجدولية

(1) **تعريف الدالة الاحتمالية** : هي علاقة بين س ، ح(س)

(2) **أنواع الدوال الاحتمالية** : 1- دوال على شكل جدول ، 2- دوال على شكل قانون او توزيع احتمالي.

(3) **شروط الدالة الاحتمالية** (1): 1 ≥ ح(س) ≥ 0 ، (2) مجـ ح(س)= 1

مثال (1)

حدد أي الدوال إحتمالية

(1)

س	-1	0	1	2	3
ح(س)	0.2	0.4	0.1	0.5	0.3

ليست دالة احتمالية لأن مجـ ح(س) ≠ 1

(2)

س	1	2	3	4
ح(س)	0.1	0.3	0.2	0.1

ليست دالة احتمالية لأن مجـ ح(س) ≠ 1

(3)

س	10	15	20	25
ح(س)	0.1	0.4	0.3	0.2

دالة احتمالية لأن مجـ ح(س) = 1

(2)

س	1	2	3	4
ح(س)	0.4	- 0.3	0.2	- 0.3

ليست دالة احتمالية لأن بعض قيم ح(س) سالبة .

مثال(2)

بفرض ان المتغير س له دالة الاحتمال التالية :

س	1	2	3	4

ح(س)	0.1	0.3	ك	0.2

اوجد ما يلي :

1- قيمة ك
2- ح(س = 2)
3- ح(س = 6)
4- ح(س ≤ 3)
5- ح(س > 3)
6- ح(س < 1)
7- 4 > ح(س) > 1
8- 5 > ح(س) ≥ 2

الحل :

1- ك = 1- [0.1 + 0.3 + 0.2] = 1- 0.6 = 0.4
2- ح(س= 2) = 0.3
3- ح(س= 6) = 0
4- ح(س ≤ 3) = 0.6
5- ح(س > 3) = 0.2
6- ح(س < 1) = 0
7- 4 > ح(س) > 1 = 0.7
8- 5 > ح(س) ≥ 2 = 0.9

(4) القيمة المتوقعة والتباين :

(ا) القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) : μ = مجـ [س × ح(س)]

(ب) التباين : σ^2 = مجـ [س^2 × ح(س)] - μ^2

مثال(3)

بفرض ان الدالة الاحتمالية لعدد الأبناء س في عائلات احدى المدن على الصورة التالية:

س	0	1	2	3
ح(س)	0.1	0.2	ك	0.4

اوجد كل من القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي) والتباين لعدد الأبناء س .

الحل :

لحساب كل من القيمة المتوقعة والتباين، نكون الجدول التالي :

س	ح(س)	س × ح(س)	س^2 × ح(س)
0	0.1	0	0
1	0.2	0.2	0.2
2	ك = 0.3	0.6	1.2
3	0.4	1.2	3.6
المجموع	1	2	5

القيمة المتوقعة = μ = مجـ [س × ح(س)] = 2

التباين : σ^2 = مجـ [س^2 × ح(س)] - μ^2 = 5 - (2^2) = 5 – 4 = 1

مثال(4)

بفرض حصولك على النتائج التالية : مجـ [س × ح(س)] = 6 ، مجـ [س^2 × ح(س)] = 40

فما هي قيمة كل من :

μ (القيمة المتوقعة او الوسط الحسابي) ، σ^2 (التباين) ، σ (الانحراف المعياري)

الحل :

μ = مجـ [س × ح(س)] = 6

σ^2 = مجـ [س^2 × ح(س)] - $\mu^2 = 40 - 6^2 = 40 - 36 = 4$

$\sigma = \sqrt{4} = 2$

لاحظ ان الانحراف المعياري = σ = جذر التباين

أسئلة متنوعة

س(1): أكمل ما يلي :

1 - دالة الاحتمال هي علاقة بين :........

2 - دالة الاحتمال إما ان تكون على شكل :........ أو على شكل ....

3- شروط دالة الاحتمال هي :.............. ، ....

4 - عند ألقاء قطعة عملة سليمة 5 مرات ، فإن فراغ العينة يساوي : ....

5 - عند إلقاء قطعة نرد سليمة مرة واحدة ، فإن فراغ العينة يساوي : ....

6- وجهي قطعة العملة (الصورة والكتابة) تمثل حوادث متنافية ام غير متنافية ؟

7- الأوجه الستة في قطعة النرد تمثل حوادث متنافية ام غير متنافية ؟

س(2): بفرض أن المتغير س له الدالة الاحتمالية التالية ، اوجد كل من :

1- ك ، القيمة المتوقعة ، التباين.

2- ح(س< 3) ، ح(س> 1) ، ح(س≤ 2) ، ح(س≥ 1) ، ح(س=5)

س	1	2	3	4
ح(س)	0.1	0.2	0.4	ك

س(3): في دالة الاحتمالية الجدولية حصلنا على النتائج التالية :

مجـ س = 4 ، مجـ [س × ح(س)] = 3 ، مجـ [س^2 × ح(س)] =14

، ما هي قيمة كل من القيمة المتوقعة μ والتباين σ^2 والانحراف المعياري σ ؟

الباب الثالث

التوزيعات الاحتمالية

1- توزيع ذوالحدين: يتعامل مع المتغيرات الكمية المتقطعة او المنفصلة.
2- توزيع بواسون: يتعامل مع المتغيرات الكمية المتقطعة او المنفصلة.
3- التوزيع الطبيعي : يتعامل مع المتغيرات الكمية المتصلة او المستمرة.

أولا : توزيع ذوالحدين

مقدمة :

ح(س) = ^{ن}ق$_{س}$ × ل^{س} × $(1 - ل)^{ن-س}$

القيمة المتوقعة = μ = ن × ل

التباين = σ^2 = ن × ل × (1 – ل)

مثال (1)

بفرض ان المتغير س يتبع توزيع ذوالحدين ، وكان حجم العينة ن = 8 ، واحتمال وقوع الحدث ل = 0.3، اوجد ما يلي :

1. ح(س = 2)
2. القيمة المتوقعة .
3. التباين والانحراف المعياري .

الحل :

ن = 8 ، ل = 0.3 ، (1 – ل) = (1 – 0.3) = 0.7

ح(س) = ^{ن}ق$_{س}$ × ل^{س} × $(1 - ل)^{ن-س}$

ح(س) = ^{8}ق$_{س}$ × $0.3^{س}$ × $0.7^{8-س}$

1. ح(س = 2) = ^{8}ق$_{2}$ × 0.3^{2} × 0.7^{8-2} = ^{8}ق$_{2}$ × 0.3^{2} × $(0.7)^{6}$ =0.2964
2. القيمة المتوقعة = μ = ن × ل = 8 × 0.3 = 2.4
3. التباين = σ^2 = ن × ل × (1 – ل) = 8 × 0.3 ×(1- 0.3) = 1.68
4. الانحراف المعياري = σ = $\sqrt{1.68}$ = 1.296

مثال (2)

اذا كانت نسبة الإنتاج التالف في احد المصانع هو 22% ، سحبت عينة عشوائية من 6 وحدات ، ما هو احتمال ان نجد بها :

1. وحدة واحدة تالفة .
2. وحدتان تالفتان .
3. لا شيء من الوحدات التالفة .
4. العينة كلها وحدات تالفة .
5. 50% من العينة وحدات تالفة .
6. القيمة المتوقعة (الوسط الحسابي)
7. التباين والانحراف المعياري.

الحل :

ن = 6 ، ل = 0.22 ، (1 – ل) = (1 – 0.22) = 0.78 ، س تشير الى عدد الوحدات التالفة.

ح(س) = ^{ن}ق$_{س}$ × ل^{س} × $(1 - ل)^{ن-س}$

ح(س) = ^{6}ق$_{س}$ × $0.22^{س}$ × $0.78^{6-س}$

1. ح(س = 1) = ^{6}ق$_{1}$ × 0.22^{1} × 0.78^{5} = 0.3811
2. ح(س = 2) = ^{6}ق$_{2}$ × 0.22^{2} × 0.78^{4} = 0.2687
3. ح(س = 0) = ^{6}ق$_{0}$ × 0.22^{0} × 0.78^{6} = 0.2252
4. ح(س = 6) = ^{6}ق$_{6}$ × 0.22^{6} × 0.78^{0} = 0.0001

5. 50% من العينة أي من 6 وحدات = 3 أي :ح(س = 3) = ^{6}ق$_{3}$ × 0.22^{3} × 0.78^{3} = 0.1011
6. القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي = μ = ن × ل = 6 × 0.22 = 1.32
7. التباين = σ^{2} = ن × ل × (1 – ل) = 6 × 0.22 ×(1- 0.22) = 1.03
8. الانحراف المعياري σ = $\sqrt{1.03}$ = 1.0149

مثال (3)

أظهرت نتائج احدى الشركات انه من كل 500 وحدة يتم انتاجها تظهر 80 وحدة تالفة ، فاذا سحبت عينة عشوائية من 10 وحدات ، فما هو احتمال ان نجد بها :

1. وحدة واحدة تالفة .
2. اربع وحدات تالفة .
3. اقل من وحدة تالفة .
4. 50% من العينة وحدات تالفة .
5. σ ، μ

الحل :

ن = 10 ، ل =(80 ÷ 500) = 0.16 ، اما : (1 – ل) = (1 – 0.16) = 0.84

ح(س) = ^{ن}ق$_{س}$ × ل^{س} × (1 – ل)$^{ن - س}$

= ^{10}ق$_{س}$ × $0.16^{س}$ × $0.84^{10 - س}$

1. ح(س = 1) = ^{10}ق$_{1}$ × 0.16^{1} × 0.84^{9} = 0.3331
2. ح(س = 4) = ^{10}ق$_{4}$ × 0.16^{4} × 0.84^{6} = 0.0483
3. ح(س < 1) = ح (س = 0) = ^{10}ق$_{0}$ × 0.16^{0} × 0.84^{10} = 0.1749
4. ح(س = 5) = ^{10}ق$_{5}$ × 0.16^{5} × 0.84^{5} = 0.0110
5. μ = ن × ل = 10 × 0.16 = 1.6 ،

σ^{2} = ن × ل × (1 – ل) = 10 × 0.16 × 0.84 = 1.344

σ = $\sqrt{1.344}$ = 1.159

ثانيا : توزيع بواسون

مقدمة

ح(س) = [هـ $^{-م}$ × م^{س}] ÷ س !

القيمة المتوقعة = م = ن × ل = الوسط الحسابي

التباين = σ^{2} = ن × ل   أي ان : القيمة المتوقعة = التباين = م = ن × ل

ويستخدم توزيع بواسون ليصف الحوادث النادرة مثل وقوع الزلازل ، الحرائق ، أخطاء الطباعة....

يستخدم توزيع بواسون بدلا من توزيع ذوالحدين اذا تحقق الشرطين التاليين معا :

1- حجم العينة ن اكبر من 30 (ن > 30) ،
2- الاحتمال ل اقل من 10 %(ل < 0.1)

مثال (1)

حدد أي التوزيعات تستخدم في الحالات التالية :

1. ن = 10 ، ل = 4% ← توزيع ذوالحدين
2. ن = 68 ، ل = 0.26 ← توزيع ذوالحدين
3. ن = 70 ، ل = 6% ← توزيع بواسون
4. ن = 120 ، ل = 0.03 ← توزيع بواسون

مثال (2)

اذا كان متوسط عدد الحرائق التي تقع في احدى المدن الكبرى هو 2 حادث سنويا ، ما هو احتمال ان يقع في احدى السنوات :

1- حادث حريق واحد فقط .
2- ثلاث حوادث حريق .
3- عدم وقوع اية حوادث حريق .
4- القيمة المتوقعة والتباين .

الحل :

متوسط عدد الحرائق = م = 2 ،

ح(س) = [هـ $^{-م}$ × م^{س}] ÷ س !

= [هـ $^{-2}$ × 2^{س}] ÷ س ! ، س : عدد الحرائق

1- ح (س = 1) = [هـ $^{-2}$ × 2^{1}] ÷ 1 ! = 0.2706
2- ح (س = 3) = [هـ $^{-2}$ × 2^{3}] ÷ 3 ! = 0.1804
3- ح (س = 0) = [هـ $^{-2}$ × 2^{0}] ÷ 0 ! = 0.1353
4- القيمة المتوقعة = التباين = م = الوسط الحسابي = 2

مثال (3)

في احدى المدن كانت نسبة الإصابة بمرض معين هو 2% ، اختيرت عينة عشوائية من 200 مواطن ، ما هو احتمال ان نجد بها :

1- مواطن واحد مصاب .
2- ثلاث مواطنين مصابين .
3- خمس مواطنين مصابين .
4- متوسط عدد المصابين والتباين والانحراف المعياري .

الحل :

ل = 0.02 ، ن = 200 ، أي ان شروط استخدام بواسون متحققة ، وفي توزيع بواسون يلزم معرفة المتوسط م ، حيث

م = ن × ل = 200 × 0.02 = 4

ح(س) = [هـ $^{-م}$ × م^{س}] ÷ س !

= [هـ $^{-4}$ × 4^{س}] ÷ س ! ، س : عدد المصابين

1- ح (س = 1) = [هـ $^{-4}$ × 4^{1}] ÷ 1 ! = 0.0732
2- ح (س = 3) = [هـ $^{-4}$ × 4^{3}] ÷ 3 ! = 0.1953
3- ح (س = 5) = [هـ $^{-4}$ × 4^{5}] ÷ 5 ! = 0.1562
4- متوسط عدد المصابين = التباين = م = 4 ، اما الانحراف المعياري = 2

ملاحظة :

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ ، $1! = 1$ ، $0! = 1$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

ثالثا التوزيع الطبيعي

1- مقدمة عن التوزيع الطبيعي .
2- أهمية التوزيع الطبيعي .

3- خصائص منحنى التوزيع الطبيعي .
4- كيفية حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي .

أولا: التوزيع الطبيعي : يتعامل مع المتغيرات الكمية المتصلة مثل الاطوال ، الأوزان ، الأعمار ....

ثانيا: أهمية التوزيع الطبيعي :

1. كثير من الظواهر الطبيعية مثل الاطوال ، الاوزان ،الاعمار..... تتبع التوزيع الطبيعي.
2. كثير من التوزيعات الاحتمالية مثل توزيعي ذوالحدين وبواسون ، يمكن تحويلها الى التوزيع الطبيعي.
3. كثير من مقاييس العينة مثل الوسط الحسابي والنسبة، تتبع التوزيع الطبيعي خاصة في العينات الكبيرة.
4. كثير من النظريات في علم الإحصاء تعتمد بشدة على التوزيع الطبيعي.

ثالثا: خصائص منحنى التوزيع الطبيعي:

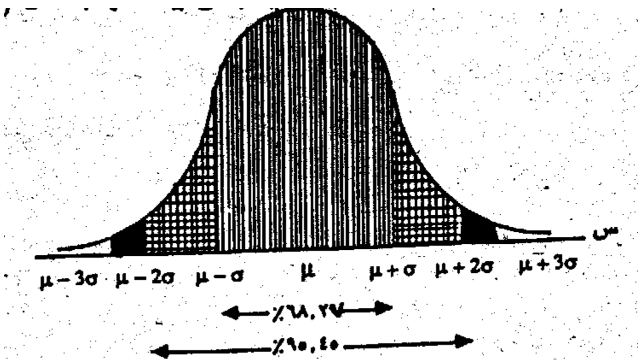
1. منحنى متماثل.
2. الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
3. اجمالي المساحة الاحتمالية تحت منحنى التوزيع الطبيعي = واحد
4. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحصورة بين : $\mu \pm \sigma = 68\%$ تقريبا .
5. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحصورة بين : $\mu \pm 2\sigma = 95\%$ تقريبا .
6. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحصورة بين : $\mu \pm 3\sigma = 99\%$ تقريبا .

رابعا : كيفية حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي.

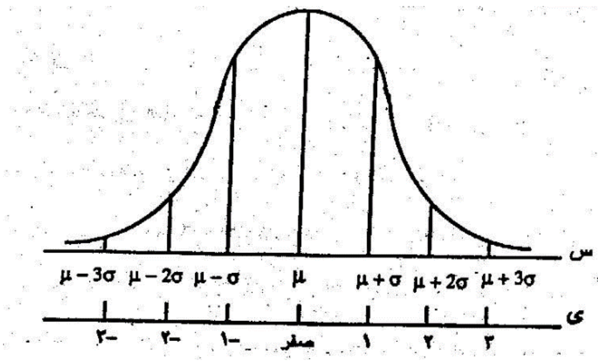
يتم حساب الاحتمال في التوزيع الطبيعي على مرحلتين : بيانيا ثم حسابيا ، ولكن بعد تحويل القيمة الاصلية للمتغير س الى قيمة معيارية ى حيث :

القيمة المعيارية ى = [س - μ] ÷ σ

الشكل التالي يبين بعض المساحات الاحتمالية تحت منحنى التوزيع الطبيعي:



ثم نقوم بالكشف في الجدول عن المساحة الاحتمالية المناظرة لقيمة ى والشكل التالي يوضح الصورة العامة لمنحنى التوزيع الطبيعي القياسي أو المعياري حيث يعبر المحور الأفقي عن القيم المعيارية ى.



ونظراً لتماثل نصفى المنحنى الطبيعي القياسي نجد أن الجدول يعطى المساحة الاحتمالية للنصف الأيمن من المنحنى فقط أي يعطى القيم الاحتمالية المناظرة للقيم الموجبة للمتغير ى أما القيم السالبة للمتغير ى فهي لا تظهر في الجدول لكنها مطابقة تماما للقيم الموجبة .

والقيم الاحتمالية التي تظهر في الجدول مقاسة من بداية منتصف المنحنى عند ى = صفر ومتجهة إلى اليمين أي أن المساحة الاحتمالية تزداد كلما اتجهنا ناحية اليمين بزيادة قيمة ى .

مثال (1) :

إذا كان عمر المصباح الكهربائي الذى تنتجه إحدى الشركات هو متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 750 ساعة وانحراف معياري 80 ساعة ،سحب مصباح من إنتاج الشركة عشوائيا ، احسب الاحتمالات التالية:

(أ) أن يزيد عمر المصباح عن 810 ساعة .

(ب) أن يزيد عمر المصباح عن 670 ساعة .

(ج) أن يقل عمر المصباح عن 770 ساعة .

ملحوظة : يمكنك استخدام هذا المقطع من جدول التوزيع الطبيعي :

ى	0.25	0.50	0.75	1	1.13	1.25	1.50	2
ح(ى)	0.0987	0.1915	0.2734	0.3413	0.3708	0.3944	0.4332	0.4772

الحل :

نفرض أن س هو متغير عشوائي يدل على عمر المصباح الكهربائي ، حيث : μ = 750 ، σ = 80

ولحساب الاحتمالات المطلوبة نقوم بتحويل قيم س إلى قيم معيارية ى ، حيث : ى = $\frac{س-\mu}{\sigma}$

ثم يستخدم الجدول فى إيجاد قيمة الاحتمالات المطلوبة

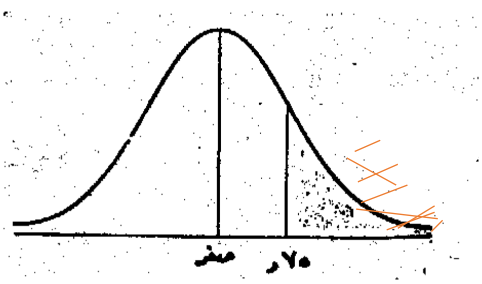
(أ) ح (س < 810) = ح (ى < $\frac{810-750}{80}$) = ح (ى < 0.75)

وهذا الاحتمال عبارة عن المساحة المظللة والتي تقع على يمين العمود المقام عند ى = 0.75 ولكن المساحات أو الاحتمالات التي تظهر في الجدول مقاسة ابتداء من ى = صفر ومتجه إلى اليمين لذا فإن المتباينة السابقة يمكن أن تكتب على النحو التالي حتى يتسنى استخدام الجدول .

ح (ى < 0.75) = 0.5 – ح (صفر > ى > 0.75)

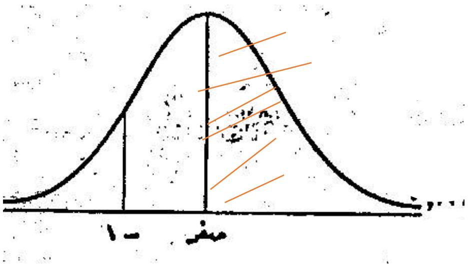
= 0.5 – ح (ى > 0.75)

= 0.5 – 0.2734 = 0.2266



(ب) ح (س < 670) = ح (ى < $\frac{670-750}{80}$) = ح (ى < -1)

وهذا الاحتمال عبارة عن مساحة النصف الأيمن من المنحنى وقدرها (0.5) + المساحة المظللة التي تقع بين ى = -1 ، ى = صفر . وحيث أنه لا يوجد قيم سالبة فى الجدول فإن القيمة الموجبة المناظرة لها تحل محلها بسبب تماثل المنحنى .



ح (ى > -1) = 0.5 + ح (صفر < ى < +1)

= 0.5 + ح (ى <1)

= 0.5 + 0.3413 = 0.8413

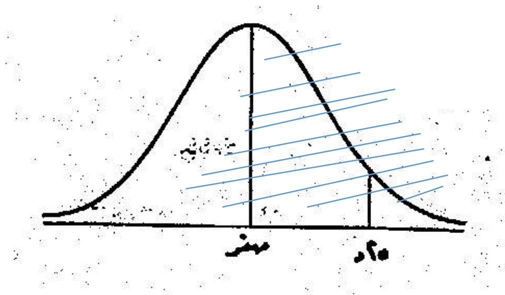
(3) ح (ى < 770) = ح (ى < $\frac{770-750}{80}$)

= ح (ى < 0.25)

= 0.5 + ح (صفر < ى < 0.25)

= 0.5 + ح (ى < 0.25)

= 0.5 + 0.0987 = 0.5987



ملحوظة :

عند كتابة المتباينة يلاحظ أن :

ح (س < 1) = ح (س ≤ 1)

أي أن وضع أو حذف علامة التساوي من المتباينة لا يؤثر فى قيمة الاحتمال . وعلى ذلك يمكن أن نكتب المتباينة التالية على النحو التالي :

ح (-1 < ى < 2) = ح (-1 < ى ≤ 2) = ح (-1 ≤ ى ≤ 2)

مثال (2)

مستخدما بيانات المثال السابق ، احسب الاحتمالات التالية :

(أ) أن يتراوح عمر المصباح بين 750 ، 830 ساعة .

(ب) أن يتراوح عمر المصباح بين 790 ، 870 ساعة .

(ج) أن يتراوح عمر المصباح بين 730 ، 850 ساعة .

الحل :

من المثال السابق : μ = 750 ، σ = 80

(أ) احتمال أن يتراوح عمر المصباح بين 750 ، 830 ساعة . أى

ح (750 < س < 830) وبتحويل هذه الصيغة إلى صورة معيارية .

ح (750 ≤ س ≤ 830) = ح ($\frac{750-750}{80} \le \frac{س-\mu}{\sigma} \le \frac{830-750}{80}$)

= ح (صفر ≤ ى ≤ 1)

= ح (ى < 1) – ح (ى < صفر)

(وبالكشف فى الجدول نجد أن):

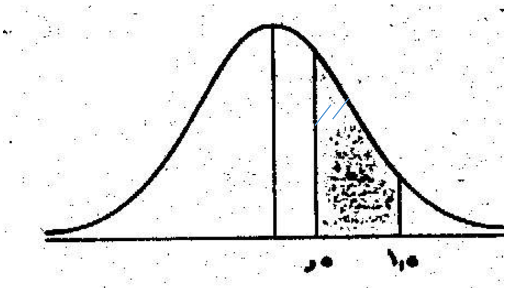
= 0.3413 – صفر = 0.3413

(ب) ح (790 > س > 870) وبتحويلها إلى قيم معيارية .

ح (790 ≥ س ≥ 870) = ح ($\frac{750-790}{80} \geq \frac{\mu - س}{\sigma} \geq \frac{750-870}{80}$) = ح (0.5 ≥ ى ≥ 1.5)

= ح (ى ≥ 1.5) – ح (ى ≥ 0.5)

= 0.4332 – 0.1915 = 0.2417



(ج) ح (730 ≥ س ≥ 850 = ح ($\frac{750-730}{80} \geq \frac{\mu - س}{\sigma} \geq \frac{750-850}{80}$)

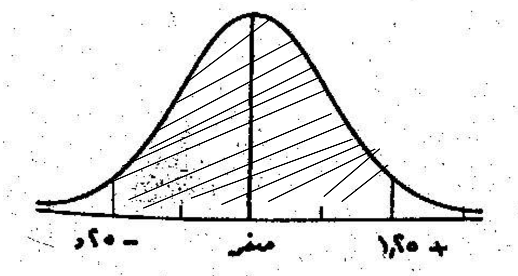
= ح (- 0.25 > ى > 1.25)

وقيمة الاحتمال هنا كما هو واضح من الشكل عبارة عن حاصل جمع المساحة التى تقع على يمين الصفر وحتى ى = +1.25 والمساحة التى تقع على يسار الصفر وحتى ى= -0.25 وحيث أن الجدول لا يظهر قيم سالبة للمتغير ى فإن القيم الموجبة المناظرة لها تحل محلها فى عملية الكشف .

= ح (- 0.25 > ى > 1.25)

= ح (صفر > ى > 0.25) + ح (صفر > ى > 1.25)

= 0.0987 + 0.3944 = 0.4931



ملحوظة :

مثال (3)

وإذا علمت في المثال السابق ان حجم الإنتاج اليومي للشركة من المصابيح هو 800 مصباح يوميا ،اوجد:

1. عدد المصابيح التي يقل عمرها عن 850 ساعة.
2. عدد المصابيح التي يزيد عمرها عن 590 ساعة.
3. عدد المصابيح التي يزيد عمرها عن 830 ساعة.
4. عدد المصابيح التي يتراوح عمرها بين 830 ساعة ، 910 ساعة.

الحل :

فكرة هذا المثال تقوم على أساس حساب الاحتمال بالطريقة التقليدية ثم ضرب الناتج في حجم المجتمع وهو هنا = 800 ،
من المثال السابق : μ = 750 ، σ = 80 ، بجانب ان : حجم المجتمع = 800

(1) ح(س > 850) = ح(ى > $\frac{850-750}{80}$) = ح(ى > 1.25) = 0.5 + الكشف عن 1.25

= 0.5 + 0.3944 = 0.8944

اذن العدد المطلوب = 800 × 0.8944 = 715.52 = 716 مصباح تقريبا

(2) ح(س < 590) = ح(ى < $\frac{590-750}{80}$) = ح(ى < - 2) = 0.5 + الكشف عن 2

= 0.5 + 0.4772 = 0.9772

اذن العدد المطلوب = 800 × 0.9772 = 781.76 = 782 مصباح تقريبا

(3) ح(س < 830) = ح(ى < $\frac{830-750}{80}$) = ح(ى < 1) = 0.5 - الكشف عن 1

= 0.5 - 0.3413 = 0.1587

اذن العدد المطلوب = 800 × 0.1587 = 126.96 = 127 مصباح تقريبا

(4) ح(830 > س > 910) = ح ($\frac{830-750}{80}$ > ى > $\frac{910-750}{80}$) = ح(1 > ى > 2)

= الكشف عن الرقم المعياري 2 - الكشف عن الرقم المعياري 1

= 0.4772 – 0.3413 = 0.1359

اذن العدد المطلوب = 800 × 0.1359 = 108.72 = 109 مصباح تقريبا

أسئلة متنوعة

س(1): أكمل ما يلي :

1- في دالة الاحتمال الجدولية ، تكون القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س هي :..............

2- في دالة الاحتمال الجدولية ، يكون التباين للمتغير العشوائي س هو :..............

3- القانون: ح(س) = ^{ن}ق$_{س}$ × ل^{س} × (1- ل)$^{ن-س}$ يسمى بتوزيع ....

4- إذا كانت ن = 8 ، ل = 0.2 فإننا نستخدم توزيع:....................

5- إذا كانت ن = 120 ، ل = 2% فإننا نستخدم توزيع:....................

6- في توزيع ذو الحدين ، تكون القيمة المتوقعة والتباين على الصورة :............، ....

7- تصنيف عينة من العمال إلى مدخنين وغير مدخنين، هي تجربة خاضعة لتوزيع: ....

8- في توزيع ذو الحدين كانت ن = 10 ، ل = 0.2 فإن القيمة المتوقعة μ والتباين σ^2: ....

9- الأحداث النادرة تتبع توزيع ....

10- من خصائص توزيع بواسون أن القيمة المتوقعة .... التباين.

11- حوادث السيارات على الطرق السريعة ، هي ظاهرة خاضعة لتوزيع :............

12- حوادث حرائق المنازل ، هي ظاهرة خاضعة لتوزيع :.....................

13- يستخدم توزيع بواسون بدلا من توزيع ذو الحدين إذا كانت :.......... ، ....

س(2): إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في احد المصانع هي20% ، سحبت عينة عشوائية من 5 وحدات ، وعلى فرض أن الإنتاج المعيب هو متغير عشوائي يتبع توزيع ذو الحدين ، ما هو احتمال أن نجد بالعينة :

1. وحدة واحدة معيبة ؟
2- لا شئ من الوحدات المعيبة ؟
3-العينة كلها وحدات معيبة.
4- أقل من وحدة واحدة معيبة ؟
5-ثلاث وحدات معيبة؟
6- القيمة المتوقعة والتباين لعدد الوحدات المعيبة؟

س(3): إذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في احد المصانع هي 1 % ، سحبت عينة عشوائية من 100 وحدة ، وعلي فرض أن الإنتاج المعيب هو متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون , ما هو احتمال أن نجد بالعينة:

1. ثلاث وحدات معيبة ؟
2-وحدة واحدة معيبة؟
3-العينة خالية من اية وحدات معيبة؟
4- القيمة المتوقعة والتباين .

س(4):إذا كان متوسط عدد السفن التي تصل لأحد الموانئ في اليوم الواحد هو 3 سفينة ، مستخدما توزيع بواسون ، ما هو احتمال ان تصل في احد الأيام 4 سفن ؟ وما هو احتمال عدم وصول اية سفينة ؟

س(5): أكمل ما يلي :

1- الأطوال والأعمار والأوزان هي متغيرات كمية .... تتبع توزيع ....

2- هل منحنى التوزيع الطبيعي ، منحنى متماثل أم ملتوي ؟

3- من خصائص منحنى التوزيع الطبيعي أن :

أ . الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

ب . الوسط الحسابي ≠ الوسيط ≠ المنوال

ج . الوسط الحسابي > الوسيط > المنوال

4- من خصائص منحنى التوزيع الطبيعي أن 68 % من قيم الظاهرة تقع بين : ....

5- من خصائص منحنى التوزيع الطبيعي أن95 % من قيم الظاهرة تقع بين: ....

6- اجمالي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحصورة بين $\mu \pm \sigma$ تعادل ....

7- اجمالي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحصورة بين $\mu \pm 2\sigma$ تعادل ....

8- اجمالي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي والمحصورة بين $\mu \pm 3\sigma$ تعادل ....

9- إجمالي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي =................

س(6):إذا كان متوسط الدرجات في اختيار الإحصاء 70 درجة بانحراف معياري 10 درجات ، وعلى فرض أن الدرجات متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي ، اختير احد الطلبة عشوائيا ، ما هو احتمال أن يكون حاصلا علي : (إليك جزء من جدول التوزيع الطبيعي)

1- أكثر من 80 درجة ؟ 2- اكثر من 65 درجة؟
3- أقل من 60 درجة؟ 4- اقل من 90 درجة ؟

ي	0.5	1	1.5	2
ح (ي)	0.19	0.34	0.43	0.47

س(7): إذا كانت مدة بقاء المريض بأحد المستشفيات يتبع توزيع طبيعي بمتوسط = 12يوما وانحراف معياري4 أيام ، فإذا استقبلت المستشفى مريضا في احد الأيام :

1- ما هو احتمال أن يبقي بها اقل من 8 أيام ؟
2- ما هو احتمال ان يبقى اكثر من 15 يوم
3- ما هو احتمال ان يبقى ما بين 10 ، 16 يوما؟
4- ما هو احتمال ان يبقى ما بين 14 ، 16 يوما؟

ى	0.5	0.75	1	1.5
ح (ى)	0.19	0.27	0.34	0.43

س(8): في احد المصانع يوجد 800 عامل وكانت إنتاجية العمال تتبع توزيع طبيعي بمتوسط 20 وحدة يوميا وبانحراف معياري 4 وحدات ، اختير احد العمال عشوائيا ، ما هو عدد العمال اللذين يتراوح إنتاجهم اليومي : (استخدم الجدول السابق)

1. ما بين 22 ، 26 وحدة؟ 2 - ما بين 16، 18 وحدة يوميا؟
3 -ما بين 16، 22 وحدة يوميا؟

الباب الرابع
نظرية التقدير

مقدمة

طرق التقدير : 1- التقدير بنقطة 2- التقدير بفترة

محتويات هذا الباب :

1. تقدير متوسط المجتمع بفترة ثقة.
2. تقدير النسبة في المجتمع بفترة ثقة.
3. تقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين بفترة ثقة.
4. تقدير حجم العينة.

مثال(1)

لتقدير متوسط عمر الموظف في احدى الوزارات، سحبت عينة عشوائية من 100 موظف تبين منها ان متوسط عمر الموظف فيها 45 سنة بانحراف معياري 7 سنوات، قدر بدرجة ثقة 95% متوسط عمر الموظف في هذه الوزارة.

الحل :

ن = 100 ، $\bar{س}$= 45 ، ع = 7 ، درجة الثقة 95% تعني ان ى = 1.96

مطلوب μ ؟

$$\mu = \bar{س} \pm ي \times \frac{ع}{\sqrt{ن}} = 45 \pm 1.96 \times \frac{7}{\sqrt{100}} = 45 \pm 1.96 \times 0.7$$

= 45 ± 1.372 = [43.628 ، 46.372] سنة

أي ان متوسط عمر الموظف في الوزارة μ يتراوح بين : [43.628 ، 46.372] سنة وهذا تقدير موثوق فيه بنسبة 95%

ملحوظة: التقدير بنقطة : μ = $\bar{س}$= 45 سنة

مثال(2)

لتقدير نسبة الأمية في احدى الشركات، سحبت عينة عشوائية من 1000 عامل تبين منها ان نسبة الامية فيها 32%:

1- قدر نسبة الامية في الشركة مستخدما طريقة التقدير بنقطة.

2- قدر نسبة الامية في الشركة مستخدما طريقة التقدير بفترة ثقة 99%.

الحل:

ن = 1000 ، النسبة في العينة= ل^ = 32% = 0.32 ، وعند درجة ثقة 99% نجد ان ى = 2.58 مطلوب النسبة في المجتمع ل؟

1- التقدير بنقطة او التقدير وحيد القيمة: ل = ل^ = 0.32

2- القدير بفترة ثقة :

$$ل = \hat{ل} \pm ي \times \sqrt{\frac{\hat{ل}(1-\hat{ل})}{ن}}$$

= 0.32 ± 2.58 × [0.32 (1 – 0.32) ÷ 1000]

= 0.32 ± 2.58 × 0.0147

= 0.32 ± 0.0379 =0.32 ± 0.04 = (0.28 ، [illegible])

أي ان نسبة البطالة في الشركة تتراوح بين 0.28 ، [illegible] وهذا تقدير موثوق فيه بنسبة 99%

مثال(3)

أجريت دراسة عن ظاهرة الأجور على عينتين من عمال صناعتي الورق والخشب وحصلنا على النتائج التالية: في عينة 100 عامل من عمال صناعة الورق كان متوسط الاجر اليومي 220 ريال بانحراف معياري 40 ريال وفي عينة أخرى من 100 عامل من عمال صناعة الخشب كان متوسط الاجر اليومي 180 ريال بانحراف معياري 30 ريال .

1- قدر الفرق بين متوسطي الاجر في الصناعتين مستخدما طريقة التقدير بنقطة(او التقدير وحيد القيمة).

2- قدر الفرق بين متوسطي الاجر في الصناعتين مستخدما طريقة التقدير بفترة ثقة 95%.

الحل :

صناعة الورق : $ن_1$ = 100 ، $\bar{س}_1$= 220 ، $ع_1$= 40 ، μ_1 : متوسط الاجر في صناعة الورق

صناعة الخشب : $ن_2 = 100$ ، $س_2 = 180$ ، $ع_2 = 30$ ، μ_2 : متوسط الاجر في صناعة الخشب

1- التقدير بنقطة : $(\mu_1 - \mu_2) = (\overline{س_1} - \overline{س_2}) = (220 - 180) = 40$ ريال

2- التقدير بفترة ثقة: $(\mu_1 - \mu_2) = (\overline{س_1} - \overline{س_2}) \pm ي \times \sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1} + \frac{ع_2^2}{ن_2}}$

$$= (220 - 180) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{30^2}{100} + \frac{40^2}{100}}$$

$= 40 \pm 1.96 \times 5$

$= 40 \pm 9.8 = (30.2 ، 49.8)$

أي ان الفرق بين متوسطي الأجور في الصناعتين يتراوح بين(30.2 ، 49.8) ريال ، وهذا تقدير موثوق فيه بنسبة 95%

مثال(4)

قدر حجم العينة الواجب سحبها من طلاب التعليم عن بعد وذلك لتقدير متوسط عمر الطالب بشرط الا يتجاوز الخطأ في التقدير عن 4 سنوات وبدرجة ثقة 99% على فرض ان الانحراف المعياري لأعمار الطلاب من دراسات سابقة كان 8 سنوات .

الحل :

د = خطأ التقدير = 4 ، درجة ثقة 99% تعني ان ى = 2.58 ، الانحراف المعياري في المجتمع $\sigma = 8$

$ن = [ى^2 \times \sigma^2] \div د^2 = [2.58^2 \times 8^2] \div 4^2 = 26.62 = 27$ طالب تقريبا

مثال(5)

قدر حجم العينة الواجب سحبها من مدينة الرياض وذلك لتقدير نسبة البطالة بها بشرط الا يتجاوز الخطأ في التقدير عن 3% وبدرجة ثقة 95% على فرض ان نسبة البطالة في الرياض من دراسات سابقة كان 24%

الحل :

د = 3% = 0.03 ، درجة ثقة 95% تعنى ان ى = 1.96 ، النسبة في المجتمع = ل = 24% = 0.24

$ن = [ى^2 \times ل (1 - ل)] \div د^2 = [1.96^2 \times 0.24 (1 - 0.24)] \div 0.03^2$

$ن = [0.7007] \div 0.0009 = 778.555 = 779$ مواطن تقريبا

مثال(6)

قدر حجم العينة الواجب سحبها من احدى الإدارات الحكومية وذلك لتقدير نسبة المتزوجين بها بشرط الا يتجاوز الخطأ في التقدير عن 2% وبدرجة ثقة 95% .

الحل :

د = خطأ التقدير = 2% = 0.02 ، درجة ثقة 95% تعنى ان ى = 1.96 ،

النسبة في المجتمع = ل = مجهولة أي غير معطاة في السؤال ، هنا نعتبر ل = 0.5

ن = $ى^2$ × ل (1 – ل)] ÷ $د^2$ = [1.96^2 × 0.5 (1 – 0.5)] ÷ 0.02^2 = 2401

أسئلة متنوعة

س(1): اكمل ما يلي:

1- يتناسب حجم العينة مع تباين المفردات في المجتمع (σ^2) تناسبا :.......

2- يتناسب حجم العينة مع خطأ التقدير (د) تناسبا :.................

3- يتناسب حجم العينة مع درجة الثقة في التقدير تناسبا :....................

4- إذا كانت النسبة في المجتمع ل مجهولة ، فإننا نعتبرها : ....

5 - القانون المستخدم في تقدير حجم العينة في حالة المتوسط هو :................

6- القانون المستخدم في تقدير حجم العينة في حالة النسبة هو :....................

7 – بفرض ان : ى= 1,96 ، د = 3 ، σ = 10 ، فان حجم العينة ن يكون :..........

س(2): في احدي الشركات ، سحبت عينة من 100 موظف ، وكان متوسط العمر 32 سنة بانحراف معياري 5 سنة . قدر متوسط عمر الموظف في هذه الشركة بدرجة ثقة 95 %

س(3): من جامعة الأمام اختيرت عينة من 200 طالب ، كان عدد الوافدين بها 50 طالب ، قدر نسبة الطلاب الوافدين في الجامعة بدرجة ثقة 95 % .

س(4): إذا توفرت لديك البيانات التالية :

$ن_1$ = 100 $\overline{س_1}$ = 70 ، $ع_1$ = 6

$ن_2$ = 100 $\overline{س_2}$ = 50 ، $ع_2$ = 8

قدر الفرق بين متوسطي المجتمعين يكون عند درجة ثقة 95 %

س(5):ما هو حجم العينة الواجب سحبها من طلاب التعليم عن بعد لتقدير متوسط عمر الدارس بشرط ألا يتجاوز الخطأ في التقدير عن 3 سنوات وبدرجة ثقة 95% ، على فرض أن لانحراف المعياري للأعمار 8 سنوات .

س(6):ما هو حجم العينة (ن) الواجب سحبها من العاملين بإحدى الشركات لتقدير نسبة المتزوجين فيها بشرط ألا يتجاوز الخطأ في التقدير عن 3% وبدرجة ثقة 95% فرض أن نسبة المتزوجين من دراسات سابقة كانت 45% .

س(7):ما هو حجم العينة ن الواجب سحبها من مدينة الرياض لتقدير نسبة البطالة بها بشرط ألا يتجاوز الخطأ في التقدير عن 3% وبدرجة ثقة 95% .

الباب الخامس
اختبارات الفروض الإحصائية

1- فروع الإحصاء التحليلي.

2- خطوات الاختبار الإحصائي:

1- الفرض العدمي والفرض البديل.
2- قيمة وسيلة الاختبار : ى المحسوبة .
3- القيمة الجدولية : ى الجدولية .
4- مقارنة ى المحسوبة مع ى الجدولية.
5- اتخاذ القرار : قبول او رفض الفرض العدمي .

مثال(1)

أظهرت نتائج العام الماضي ان متوسط درجة النجاح في الإحصاء 75 درجة . جربت طريقة حديثة في تدريس هذا المقرر على عينة من 100 طالب ، تبين في نهاية العام ان متوسط درجة النجاح في العينة اصبح 80 درجة بانحراف معياري 5 درجات . اختبر الفرض القائل بأن هذه الطريقة الحديثة في التدريس قد حسنت من أداء الطلاب وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ حيث القيمة الجدولية 1.65 المطلوب :

1- اكتب شكل الفرض العدمي والفرض البديل .
2- هذا الاختبار يسمى اختبار.......
3- قيمة وسيلة الاختبار ى. 4- القرار الاحصائي.

الحل :

معطيات هذا المثال هي : $\mu = 75$ ، ن = 100 ، $\bar{س} = 80$ ، ع = 5

1- الفرض العدمي : $\mu = 75$ ، الفرض البديل : $\mu < 75$

2- هذا الاختبار يسمى اختبار الطرف الايمن .

3- وسيلة الاختبار : $ي = \frac{(\bar{س} - \mu) \times \sqrt{ن}}{ع} = [(80 - 75) \times 10] \div 5 = 10$

4- القرار الاحصائي : رفض الفرض العدمي . (ى المحسوبة اكبر من ى الجدولية)

مثال(2)

اذا كان متوسط المبيعات اليومية للعامل في احد المحال التجارية الكبرى 40 وحدة يوميا، نظمت دورة تدريبية في مهارات فن البيع وذلك على عينة من 64 عامل لمدة معينة، تبين في نهاية الدورة ان متوسط المبيعات للعامل في هذه الدورة هو 42 وحدة بانحراف معياري 9 وحدات. اختبر اثر هذه الدورات على أداء العمال وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 1\%$ حيث القيمة الجدولية 2.58 ، المطلوب :

1- اكتب شكل الفرض العدمي والفرض البديل .
2- هذا الاختبار يسمى اختبار.......
3- قيمة وسيلة الاختبار ى. 4- القرار الاحصائي.

الحل :

معطيات هذا المثال هي : $\mu = 40$ ، ن = 64 ، $\bar{س} = 42$ ، ع = 9

1- الفرض العدمي : $\mu = 40$ ، الفرض البديل : $\mu \neq 40$

2- هذا الاختبار يسمى اختبار الطرفين.

3- وسيلة الاختبار : $ي = \frac{(\bar{س} - \mu) \times \sqrt{ن}}{ع}$

$1.77 = 9 \div [8 \times (40 - 42)] =$

4- القرار الاحصائي : قبول الفرض العدمي . (ى المحسوبة اقل من ى الجدولية)

مثال(3)

اذا كانت نسبة التدخين في احد المصانع 22% ، نظمت حملة للتوعية بمضار التدخين وذلك على عينة من 400 عامل لمدة معينة ، تبين بعدها ان نسبة المدخنين في العينة أصبحت 23% . اختبر الفرض القائل بان حملة التوعية قد خفضت من نسبة المدخنين في المصنع وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ حيث القيمة الجدولية 1.65 ، المطلوب :

1. **اكتب شكل الفرض العدمي والفرض البديل .**
2. **هذا الاختبار يسمى اختبار.......**
3. **قيمة وسيلة الاختبار ى.**   **4- القرار الاحصائي.**

الحل:

معطيات هذا المثال : ل = 22% = 0.22 ، ن = 400 ، ل^ = 0.23 = 18% =

1- الفرض العدمي : ل = 0.22 ، الفرض البديل : ل < 0.22

2- هذا الاختبار يسمى اختبار الطرف الايسر.

3- وسيلة الاختبار $ي = \dfrac{\hat{ل} - ل}{\sqrt{\dfrac{ل\,(1-ل)}{ن}}}$

$= [(0.23 - 0.22) \times 20] \div 0.22(1- 0.22) = 0.2 \div 0.414 = 0.483$

4- القرار الاحصائي : قبول الفرض العدمي. (ي المحسوبة اقل من ي الجدولية)

مثال(4)

تنتج احدى الشركات نوعين من البطاريات الجافة، سحبت عينة عشوائية من 150 بطارية من النوع الأول تبين منها ان متوسط عدد ساعات التشغيل 350 ساعة بانحراف معياري 60 ساعة ، ومن النوع الثاني سحبت عينة من 200 بطارية تبين منها ان متوسط عدد ساعات التشغيل 330 ساعة بانحراف معياري 80 ساعة . اختبر الفرض القائل بعدم وجود فروق حقيقية بين النوعين وذلك عند مستوى معنوية $5\% = \alpha$ حيث القيمة الجدولية 1.96. المطلوب :

1. **اكتب شكل الفرض العدمي والفرض البديل .**
2. **هذا الاختبار يسمى اختبار.......**
3. **قيمة وسيلة الاختبار ى.**   **4- القرار الاحصائي.**

الحل :معطيات هذا المثال :

$ن_1 = 150$ ، $\overline{س1} = 350$ ، $ع_1 = 60$

$ن_2 = 200$ ، $\overline{س2} = 330$ ، $ع_2 = 80$

1- الفرض العدمي : $\mu_1 = \mu_2$ ، الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2$

2- يسمى هذا الاختبار انه اختبار الطرفين.

3 - وسيلة الاختباري = $\frac{\bar{س}_1 - \bar{س}_2}{\sqrt{\frac{ع_1^2}{ن_1}}}$

$ى = [\ 350 - 330\ ] \div 7.48 = 2.673$

4- القرار الاحصائي :رفض الفرض العدمي (ى المحسوبة اكبر من ى الجدولية)

أسئلة متنوعة

س(1):ضع علامة صح أو خطأ أمام العبارات التالية ، مع تصحيح العبارة الخطأ:

1. اختبارات الفروض الإحصائية هي إحدى أدوات الإحصاء التحليلي .
2. فترات الثقة واختبارات الفروض الإحصائية هما أدوات الإحصاء التحليلي .
3. الفروض الإحصائية نوعان : فرض عدمي وفرض بديل .
4. مستوي المعنوية هو احد أنواع أخطاء القرار الإحصائي.
5. يرمز لمستوي المعنوية بالرمز α .
6. مستوي المعنوية α هو التباين .
7. القيم الجدولية : 1,96 ، 2,58 هي قيم مستخرجة من جدول توزيع ذو الحدين .

س(2):إذا كان متوسط إنتاجية العامل في احد المصانع هي 30 وحدة في اليوم . جرب نظاما للحوافز المادية على عينة من 100 عامل لمدة معينة ، تبين بعدها أن متوسط إنتاجية العامل في العينة أصبح 37 وحدة بانحراف معياري4 وحدات. أريد اختبار اثر الحوافز المادية على إنتاجية العامل عند مستوى معنوية5 % حيث القيمة الجدولية = 1,96، في ضوء هذا الاختبار حدد :

1. شكل الفرض العدمي والفرض البديل .
2. قيمة وسيلة الاختبار ى
3. القرار الإحصائي .

س(3):إذا كان متوسط درجة الطالب في احد المقررات هي 75 درجة . جربت طريقة حديثة في تدريس هذا المقرر على عينة من 64 طالب لمدة معينة ، تبين بعدها أن متوسط درجة الطالب في هذه العينة أصبح 77 درجة بانحراف معياري5 درجات. أريد اختبار الفرض القائل بان الطريقة الحديثة ستؤدي إلى تدني مستوى الطالب . في ضوء هذا الاختبار ، اوجد ما يلي :

1. شكل الفرض العدمي و البديل .
2. يسمى هذا الاختبار انه اختبار.
3. قيمة وسيلة الاختبار
4. الإحصائي عند مستوى معنوية 5 % = α حيث القيمة الجدولية = 1,65

س(4): إذا كان متوسط وزن الطفل في عامه الأول هو 9 كجم . جرب احد أنواع الأغذية الحديثة على عينة من 100 طفل لمدة معينة ، تبين بعدها أن متوسط وزن الطفل في العينة أصبح 12 كجم بانحراف معياري2 كجم . وعلى فرض أن القيمة الجدولية عند مستوى معنوية 5 % = α هي 1,65 .أريد اختبار الفرض القائل بأن هذا الغذاء يحسن من وزن الطفل . المطلوب :

1. شكل الفرض البديل.
2. يسمى هذا الاختبار انه اختبار
3. قيمة وسيلة الاختبار .
4. القرار الإحصائي

س(5): إذا كانت نسبة توزيع احد المنتجات هي% 60 . نظمت حملة إعلانية لهذا المنتج لمدة معينة ، تبين بعدها أنه في عينة من 10000 أسرة ،أن نسبة التوزيع أصبحت % 77 . أريد اختبار اثر الحملة الإعلانية على توزيع هذا المنتج . وعلى فرض أن القيمة الجدولية = 1,96. وفق هذه البيانات المطلوب :

1. شكل الفرض البديل.
2. يسمى هذا الاختبار انه اختبار
3. قيمة وسيلة الاختبار
4. القرار الاحصائي

س(6):اجري اختبارا في مادة الإحصاء على عينتين من الطلبة ، وحصلنا على النتائج لتالية : في العينة الأولى والتي تضم 50 طالبا ، كان متوسط الدرجة 18 بانحراف معياري 2 درجة. أما في العينة الثانية والتي تضم أيضا 50 طالبا ، كان متوسط الدرجة 15 بانحراف معياري 4 درجات .أريد اختبار الفرض القائل بعدم وجود اختلاف حقيقي بين العينتين عند مستوى المعنوية 5% حيث القيمة الجدولية = 1,96. وفق هذه البيانات المطلوب :

1. شكل الفرض العدمي والبديل.
2. يسمى هذا الاختبار انه اختبار.
3. قيمة وسيلة الاختبار .
4. القرار الإحصائي .

س(7):أجريت دراسة عن ظاهرة الأجور على عينتين من عمال صناعتي الحديد والأسمنت وحصلنا على النتائج التالية : في عينة من عمال صناعة الحديد من 100 عامل ، كان متوسط الأجر اليومي 200 ريال بانحراف معياري 40 ريال. وفي عينة من عمال صناعة الأسمنت من 100 عامل ،كان متوسط ألأجر اليومي170 ريال بانحراف معياري 30 ريال . أريد اختبار الفرض القائل بأن الأجور في صناعة الحديد تزيد عن الأجور في صناعة الأسمنت عند مستوى المعنوية% 1 ، حيث القيمة الجدولية = 2,33 . وفق هذه البيانات المطلوب :

1. شكل الفرض البديل.
2. يسمى هذا الاختبار انه اختبار
3. قيمة وسيلة الاختبار .
4. القرار الإحصائي .