بنك أسئلة التحليل التوافقي

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة التحليل التوافقي

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

م . مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 1 :

اختزل المقادير التالية : $③\ \frac{(2n)!}{1\times3\times5\cdots(2n-1)}$ ، $②\ \frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$ ، $①\ \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

الحل :

$$① \quad \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)(n!)}=\frac{n+1}{(n+1)(n!)}-\frac{1}{(n+1)(n!)}$$

$$=\frac{n+1-1}{(n+1)(n!)}=\frac{n}{(n+1)(n)(n-1)!}=\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

$$② \frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}=\frac{(2n)(2n-1)!-(2n-1)!}{2n(n-1)!-(n-1)!}=\frac{(2n-1)(2n-1)!}{(2n-1)(n-1)!}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

$$③ \quad \frac{(2n)!}{1\times3\times5\cdots(2n-1)}$$

$$=\frac{2n\times(2n-1)(2n-2)\times\cdots\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{1\times3\times5\times\cdots(2n-1)}$$

$$=2n\times(2n-2)\times\ldots\ldots\times6\times4\times2 \;=2^n\;(n\times(n-1)\times\ldots\ldots\times3\times2\times1)$$

$$=2^n n!$$

التمرين 2 :

عيّن n في كل من الحالات الآتية :

$❶\ P_{n+2}^4=14P_n^3 \quad ❷\ \binom{10}{3n}=\binom{10}{n+2} \quad ❸\ 3\binom{n}{4}=14\binom{n}{2} \quad ❹\ \frac{1}{6}P_{n+1}^2=\binom{n+2}{4}$

الحل :

$❶\ P_{n+2}^4=14P_n^3$

حتى تكون المعادلة قابلة للحل يجب ان يتحقق:

$n\geq3$

و $n+2\geq4\Longrightarrow n\geq2$

و $n\in\mathbb{N}$

و هذا يكافئ $n\geq3$ و $n\in\mathbb{N}$

$$P_{n+2}^4=14P_n^3$$
$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)=14(n)(n-1)(n-2)$$
$$(n+2)(n+1)(n)(n-1)-14(n)(n-1)(n-2)=0$$
$$(n)(n-1)(n^2-11n+30)=0$$
$$(n)(n-1)(n-5)(n-6)=0$$

إما : $n=0\leq3$ مرفوض أو : $n=1\leq3$ مرفوض

$n=5\geq3$: مقبول أو : $n=6\geq3$ مقبول

إذن مجموعة الحلول هي : $\{5,6\}$

❷ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

شرط الحل

$n \in \mathbb{N}$

و $3n \leq 10 \Longrightarrow n \leq \frac{10}{3} \Longrightarrow n \leq 3$

و $n + 2 \leq 10 \Longrightarrow n \leq 8$

وهذا يكافئ $0 \leq n \leq 3$

لهذه المعادلة حلان:

إما $3n + n + 2 = 10$ **ومنه** $n = 2$ **وهو حل مقبول. أو** $3n = n + 2$ **ومنه** $n = 1$ **كذلك مقبول**

❸ $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$

شرط الحل

$n \in \mathbb{N}$

و $n \geq 2$

و $n \geq 4$

وهو يكافئ $n \geq 4$

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2} = 14\frac{n(n-1)}{2} \quad \Longrightarrow (n-2)(n-3) = 56$$

$$n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n-10)(n+5) = 0$$

إما $n = -5$ **وهو مرفوض. أو** $n = 10$ **مقبول**

❹ $\frac{1}{6}P_{n+1}^{2} = \binom{n+2}{4}$

شرط الحل

$n \in \mathbb{N}$

$n + 1 \geq 2 \Longrightarrow n \geq 1$

$n + 2 \geq 4 \Longrightarrow n \geq 1$

و هذا يكافئ $n \geq 2$ **و** $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{6}(n+1)(n) = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$(n+2)(n-1) = 4 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow (n+3)(n-2) = 0$$

إما $n = -3$ **وهو مرفوض. أو** $n = 2$ **مقبول**

التمرين 3 : الاختبار 1

احسب قيمة r إذا علمت أنّ : $\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}}$

الحل:

شرط الحل $0 \le r \le 4$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad : n \ge r$$

$$\frac{1}{\binom{4}{r}} = \frac{1}{\binom{5}{r}} + \frac{1}{\binom{6}{r}} \Rightarrow \frac{(4-r)!\,r!}{4!} = \frac{(5-r)!\,r!}{5!} + \frac{(6-r)!\,r!}{6!}$$

$$\frac{(4-r)!}{4!} = \frac{(5-r)(4-r)!}{5\times 4!} + \frac{(6-r)(5-r)(4-r)!}{6\times 5\times 4!}$$

نلاحظ أنّ $r = 4$ لا تحقّق المساواة لذلك نقسم الطرفين على $0 \ne (4-r)!$

$$30 = 6(5-r) + (6-r)(5-r)$$

$$30 = 30 - 6r + 30 - 11r + r^2$$

$$r^2 - 17r + 30 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-15) = 0$$

إما $r = 2$ مقبول أو $r = 15$ مرفوض لأنه لا يحقق شرط الحل

التمرين 4:

❶ أثبت صحّة المساواة : $n\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$ في حالة $n \ge 2$ و $1 \le r \le n$

❷ أثبت صحة العلاقة التالية : $\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$

الحل:

❶ $\binom{n-1}{r-1} = r\binom{n}{r}$

$$n\binom{n-1}{r-1} = \frac{n(n-1)!}{(r-1)!\,(n-1-r+1)!} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} =$$

$$r\frac{n!}{r(r-1)!\,(n-r)!} = r\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = r\binom{n}{r}$$

❷ $\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r}$

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(n+1-r)(n-r)!} \times \frac{(n-r)!}{n!} == \frac{n+1}{n+1-r}$$

التمرين 5 :

احسب قيمة كل من n و r إذا علمت أن :

$$3\binom{n}{r} = 8\binom{n}{r-1} \quad \text{و} \quad 2\binom{n+1}{r+1} = 5\binom{n+1}{r}$$

الحل:

$$3.\binom{n}{r} = 8.\binom{n}{r-1} \Rightarrow \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{8}{3}$$

$$3\frac{n!}{r!\,(n-r)!} = 8\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$\frac{3}{r(r-1)!\,(n-r)!} = \frac{8}{(r-1)!\,(n-r+1)(n-r)!}$$

$$\frac{3}{r} = \frac{8}{n-r+1} \Rightarrow 3n - 3r = 11r$$

$$3n + 3 = 11r \ldots \ldots ❷$$

بحل المعادلتين ❶ و ❷ حلاً مشتركاً نجد : $r = 15$, $n = 54$.

التمرين 6 : دورة 2018 الثانية

في إحدى مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمسة عمال ,

كم لجنة قوامها مهندس واحد وعاملان يمكن تشكيلها لمتابعة أعمال الخدمة

الحل:

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} = 3 \times \frac{5 \times 4}{2} = 30 \text{لجنة}$$

التمرين 7 :

نريد تأليف لجنة مكوّنة من ثلاثة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة طلاب وأربع طالبات

❶ كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها ؟

❷ كم لجنة مختلفة مكوّنة من طالبين وطالبة يمكننا تأليفها؟

❸ كم لجنة مختلفة مكوّنة من أشخاص من نفس الجنس يمكننا تأليفها؟

الحل:

❶ $\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2} = 84$

❷ $\binom{5}{2} \times \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40$

❸ $\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = 10 + 4 = 14$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 8 : الاختبار 2

نريد تأليف لجنة مكوّنة من (مدير ونائب مدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص.
بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علماً بأنّ في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

الحل:

إذا تمّ اختيار المدير من أحد الأشخاص المتخاصمين فيتم الاختيار بطريقتين، وبعد اختيار المدير يُستثنى الشخص الخصم له فيتم اختيار النائب بثلاث طرق وأمين السر بطريقتين وعدد الطرق في هذه الحالة:

$$P_2^1 \times P_3^2 \times 3 = 2 \times 6 \times 3 = 36$$

أما إذا استثنينا الشخصين المتخاصمين يتم اختيار المدير بثلاث طرق والنائب بطريقتين وأمين السر بطريقة واحدة فقط وعدد الطرق في هذه الحالة:

$$P_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

وعدد الطرق جميعاً هو: $36 + 6 = 42$ **طريقة.**

يمكن الحل اعتماداً على الحدث المتمّم:

$$P_5^3 - P_2^2 \times P_3^1 \times 3 = 60 - 2 \times 3 \times 3 = 60 - 18 = 42$$

التمرين 9 :

نريد تأليف لجنة مكونة من ثلاثة أشاص من مجموعة تضم خمسة اشخاص ،
بكم طريقة يمكن اختيار هذه اللجنة علما ان في المجموعة شخصين متخاصمين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها

عدد طرق الاختيار إذا كان أحد الأشخاص المتخاصمين في اللجنة

$$\binom{2}{1} \times \binom{3}{2} = 2 \times 3 = 6$$

عدد طرق الاختيار إذا استثنينا الشخصين المتخاصمين

$$\binom{3}{3} = 1$$

عدد طرق الاختيار الكلي

$$6 + 1 = 7$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 10 : دورة 2017 الأولى

في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن خمسة أسئلة من ثمانية أسئلة .

❶ بكم طريقة يُمكن للطالب أن يختار الأسئلة.

❷ بكم طريقة يُمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الثلاثة الأخيرة إجبارية

الحل:

❶ $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$

انتبه : هنا الترتيب غير مهم نحن نبحث عن عدد المجموعات الجزئية التي قوامها (5) عناصر من أصل مجموعة تحوي (3) عناصر ولذلك استخدمنا التوافيق

❷ هناك ثلاثة أسئلة اجبارية لذلك بقي لدينا 5 أسئلة اختيارية يجب أن نختار منها اثنان فقط لأن عدد الأسئلة التي نريد الإجابة عنها هو 5 ومنه

$$\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{3\times2\times1} = 10$$

التمرين 11 :

يريد معلم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً بحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل:

المرحلة الأولى : سنشكل جائزة واحدة مكونة من مجموع جائزتين لأن عدد الجوائز الكلي يزيد عن عدد الطلاب بواحد فقط وهذا يعني أن هناك طالب واحد فقط سوف يحصل على جائزتين مختلفتين من أجل هذه الجوائز و عدد طرائق اختيار هاتين الجائزتين هو عدد المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين من هذه العناصر أي :

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

المرحلة الثانية سنوزع الجوائز بالتي أصبح عددها n بعد دمج اثنيتن منها في نهاية المرحلة الأولى على الطلاب الذين عددهم n أيضا

فتصبح عدد النتائج المختلفة للعملية :

$$\binom{n+1}{2}.n! = \frac{(n+1)n.n!}{2} = \frac{n(n+1)!}{2}$$

التمرين 12 :

يريد معلم توزيع 6 هدايا مختلفة على 5 طلاب بحيث يحصل كل تلميذ على هدية واحدة على الأقل ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل:

$$\binom{6}{2}.5! = \frac{6\times5\times5!}{2} = 1800$$

التمرين 13 :

يريد معلم توزيع 5 هدايا مختلفة على 5 طلاب بحيث يحصل كل طالب على هدية

1. **بكم طريقة يمكن توزيعها**
2. **اذا اصر طالب منهم على هدية معينة بكم طريقة يمكن توزيع الهدايا**

الحل:

1.

$$5! = 120$$

2.

$$1 \times 4! = 24$$

التمرين 14 :

يلتقي عشرة أصدقاء في حفل يصافح كل منهم الاشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط

1. **كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّم النتيجة السابقة في حالة n صديقاً**
2. **كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل اذا علمت أن**

في الحفل أربعة أشخاص متخاصمين فيما بينهم لا يصافح أي منهم الآخر

الحل:

1. **حتى تحدث المصافحة نحتاج إلى شخصين ولا يهم الترتيب هنا**

أي نحن نبحث عن عدد المجموعات الجزئية التي قوامها (2) من أصل عدد الأشخاص ال (10) أي

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ مصافحة}$$

وفي حال n شخصاً :

يكون عدد المصافحات مساوياً لعدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من اصل n شخص أي :

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \text{ مصافحة}$$

2.

$$\binom{10}{2} - \binom{4}{2} = 45 - 6 = 39$$

التمرين 15 :

لتكن $S = \{1,2,3, \cdots , 14,15\}$

كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل: المرحلة الأولى :

نقسم المجموعة S إلى ثلاثة مجموعات جزئية وذلك تِبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 فنحصل على ما يلي :

$$\boldsymbol{A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15\}}$$
$$\boldsymbol{A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\}}$$
$$\boldsymbol{A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14\}}$$

إذاً باقي قسمة أي عنصر من عناصر المجموعات الثلاث على 3 يساوي k حيث $k = 0,1,2$.

المرحلة الثانية :

نشكل مجموعة جزئيّة $H = \{a, b, c\}$ مكوّنة من ثلاثة عناصر من S

وبحيث يكون $a + b + c$ مضاعفاً للعدد 3. وهذا يتحقق عندما :

العناصر الثلاث $\{a, b, c\}$ من نفس المجموعة A أي إما جميعها من A_2 أو A_1 أو A_0

حيث يكون مجموع البواقي من مضاعفات الثلاثة

و عدد مثل هذه المجموعات يساوي: $\binom{5}{3} \times 3 = \frac{5\times4\times3}{3\times2} \times 3 = 30$

العناصر الثلاث $\{a, b, c\}$ كل عنصر من مجموعة $c \in A_2$ و $b \in A_1$ و $a \in A_0$

حيث يكون مجموع البواقي من مضاعفات الثلاثة

و عدد مثل هذا النوع من المجموعات $\{a, b, c\}$ يساوي $5 \times 5 \times 5 = 125$.

وبالتالي عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S

مجموعها من مضاعفات العدد 3 يساوي : مجموعة $30 + 125 = 155$

التمرين 16 :

لدينا مستقيمان متوازيان , نحدد على أحدهما (6) نقاط مختلفة وعلى الثاني (4) نقاط مختلفة

ما عدد المثلثات التي يمكن أن تشكل بين هذه النقاط . ما عدد الرباعيات التي يمكن رسمها من هذه النقاط .

الحل : لنحصل على مثلث يجب أن نختار نقطة من نقاط المستقيم الأول ونقطتين من الثاني

أو نقطة من نقاط المستقيم الأول ونقطتين من الثاني

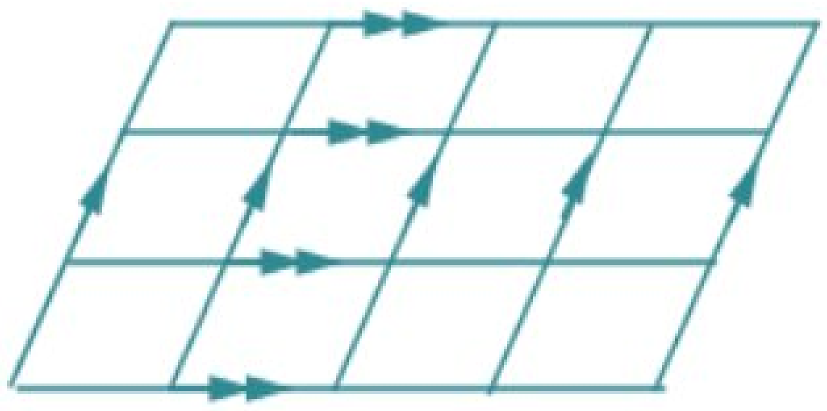
$$\binom{6}{2}.\binom{4}{1} + \binom{4}{2}.\binom{6}{1} = 15 \times 4 + 6 \times 6 = 96$$

لنحصل على رباعي يجب أن نختار ونقطتين من نقاط المستقيم الأول ونقطتين من الثاني

$$\binom{6}{2}.\binom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 17 : دورة 2018 الأولى



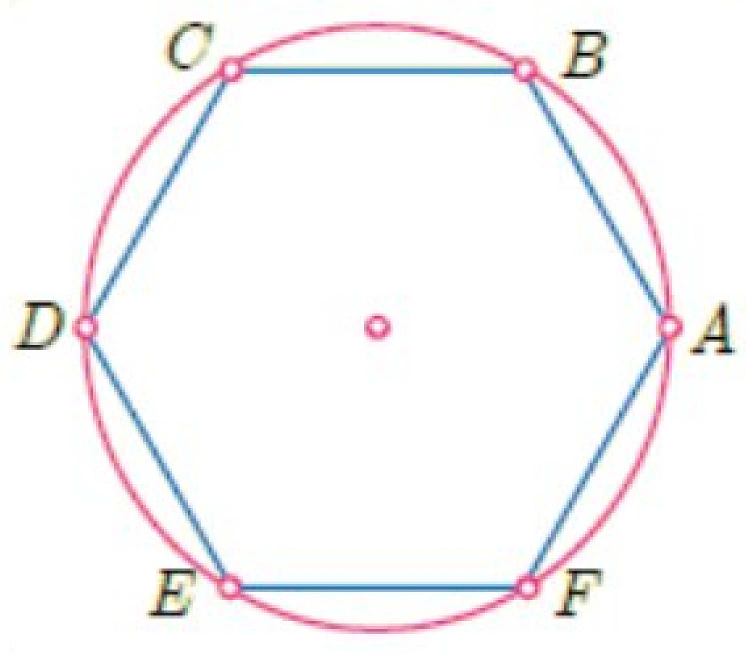
في الشكل المجاور نتأمل شبكة منظمة من المستقيمات المتوازية ,
تشكل فيما بينها متوازيات أضلاع والمطلوب :
احسب عدد متوازيات الأضلاع في الشبكة.

الحل :

$$\binom{5}{2}\times\binom{4}{2}=\frac{5\times 4}{2}\times\frac{4\times 3}{2}=10\times 6=60$$

التمرين 18 :

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F
موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم.



نُجري التجربة الآتية:
نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلّث.

❶ ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

❷ ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

❸ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل :

❶ كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة، وأي مجموعة جزئية مؤلفة من ثلاث نقاط تعين

إذاً عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي $20=\frac{6\times5\times4}{3\times2}=\binom{6}{3}$

❷ كل قطر في المسدس هو وتر لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدس عدا طرفيّ القطر المختار ولدينا ثلاثة أقطار،

فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها هو $12 = 3 \times 4$

❸ هناك مثلث واحدٌ منفرج الزاوية في A مثلاً. إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدس أي 6

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 19 :

لتكن لدينا 8 نقاط في مستوٍ واحد ولا يقع أي ثلاث منها على استقامة واحدة

❶ ما عدد المستقيمات المعينة بها

❷ ما عدد المثلثات المعينة بها

❸ ما عدد الأشكال الرباعية المعينة بها

الحل :

عدد المستقيمات المعينة بها : $\binom{8}{2} = \frac{8\times7}{2} = 28$

عدد المثلثات المعينة بها : $\binom{8}{3} = \frac{8\times7\times6}{3\times2} = 56$

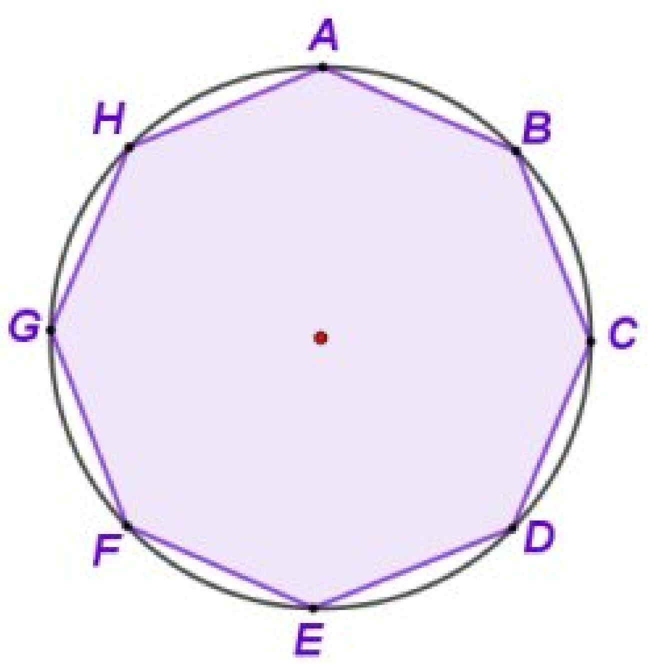
عدد الأشكال الرباعية المعينة بها : $\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2} = 70$

التمرين 20 :

لتكن لدينا 8 نقاط A, B, C, D, E, F, G, H مفروضة

تشكل هذه النقاط رؤوس لمثمن منتظم

❶ ما عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المثمن ؟



❷ كم عدد الأقطار للمضلع السابق و المارة بمركز الدائرة المارة برؤوسه

❸ كم عدد المثلثات القائمة التي يمكن رسمها داخل المضلع

الحل :

❶عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المثمن ؟ (عدد القطع المستقيمة ناقص عدد الاضلاع)

$$\binom{8}{2} - 8 = 20$$

❷عدد الأقطار للمضلع السابق و المارة بمركز الدائرة المارة برؤوسه عدد اقطار المثمن المارة بمركز الدائرة هي 4

عدد المثلثات القائمة التي يمكن رسمها داخل المضلع

❸كل قطر مار بمركز الدائرة هو وتر ل 6 مثلثات قائمة وبما عدد هذه الأقطار 4 فإن

$$\text{عدد المثلثات القائمة} = 4 \times 6 = 24$$

التمرين 21 :

نتأمل مضلعاً محدباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n \geq 4)$ نسمي قطراً في المضلع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع .

❶ ما عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المضلع ؟

❷نفترض أننا في الحالة العامة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة احد رؤوس المضلع . احسب D_n عدد نقاط تقاطع أقطار المضلع بدلالة n .

الحل :

❶عدد الأقطار التي يمكن رسمها في المضلع ؟ (عدد القطع المستقيمة ناقص عدد الاضلاع)

$$\binom{n}{2} - \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}-1)}{2} - n$$

❷في الحالة العامة عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي عدد المجموعات المكونة من أربع نقاط اي : $\binom{n}{4}$

و كل رأس يُرسم منه قطرين على الأقل إذاً كل رأس في المضلع في حالة $n \geq 5$ هو نقطة تقاطع القطرين أي عدد نقاط التقاطع على المضلع تساوي عدد الرؤوس وهو n و بالتالي يكون عدد نقاط تقاطع الأقطار هو :

$$D_n = \binom{n}{4} + n$$

التمرين 22 :

لتكن المجموعة $S = \{1,2,5,8,9\}$

❶ كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S .

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

❸ كم عدداً زوجيّاً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S ؟

الحل :

① **العشرات لها 5 طرق والآحاد لها 5 طرق وبالتالي عدد الأعداد** $5 \times 5 = 25$

② **العشرات لها 5 طرق والآحاد لها 4 طرق وبالتالي عدد الأعداد** $5 \times 4 = 20$

③ **الآحاد لها 2 طريقة والعشرات لها 5 طرق وبالتالي عدد الأعداد** $2 \times 5 = 10$

التمرين 23 :

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$

❶ **كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة** S

❷ **كم عدد مختلف الارقام مؤلف من** 3 **منازل و أصغر من** 300 **يمكن تشكيله من عناصر المجموعة** S

الحل :

① **عدد طرق اختيار المئات 5 , عدد طرق اختيار العشرات 5 , عدد طرق اختيار الآحاد 5**

وبالتالي : $5 \times 5 \times 5 = 125 =$ **عدد الأعداد**

② **عدد طرق اختيار المئات 2 , عدد طرق اختيار العشرات 4 , عدد طرق اختيار الآحاد 3**

وبالتالي : $2 \times 4 \times 3 = 24 =$ **عدد الأعداد**

التمرين 24 :

لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$

❶ **كم عدداً مؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة** S

❷ **كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من أربعة منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة** S

الحل :

① **آحاد الألوف لها** 5 **طرق والمئات لها** 5 **طرق والعشرات لها** 5 **طرق والآحاد لها** 5 **طرق**

وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

② **آحاد الألوف لها** 5 **طرق والمئات لها** 4 **طرق والعشرات لها** 3 **طرق والآحاد لها** 2 **طرق**

وبالتالي عدد الأعداد $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

التمرين 25 : النموذج الوزاري 2019

لتكن المجموعة $S = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\}$

❶ **كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر** S **؟**

❷ **كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين من** S

الحل :

❶ **عدد طرق اختيار المئات 6 , عدد طرق اختيار العشرات 6 , عدد طرق اختيار الآحاد 3**

وبالتالي : $6 \times 6 \times 3 = 108 =$ **عدد الأعداد**

❷ $\binom{6}{2} = 15$

التمرين 26 : النموذج الوزاري الأول 2020

لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 8, 9\}$, والمطلوب:

❶ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S؟

❷ كم عدداً من مضاعفات العدد 5 ومؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر S

الحل :

❶ عدد طرق اختيار المئات 5 , عدد طرق اختيار العشرات 4 , عدد طرق اختيار الآحاد 3

وبالتالي : $60 = 5 \times 4 \times 3 =$ عدد الأعداد

❷ عدد طرق اختيار المئات 5 , عدد طرق اختيار العشرات 5 , عدد طرق اختيار الآحاد 1

وبالتالي : $25 = 5 \times 5 \times 1 =$ عدد الأعداد

التمرين 27 : الاختبار 4

لتكن المجموعة $S = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$

❶ ما عدد الأعداد المكوّنة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S ؟

❷ ما عدد الأعداد المؤلّفة من ثلاث خانات مختلفة مثنى مثنى وأرقامها مأخوذة من S
وكل عدد منها من مضاعفات العدد 5 وأصغر من 500 ؟

الحل:

❶ يمكن اختيار الآحاد بست طرق والعشرات بخمس طرق والمئات بأربع طرق وعدد الأعداد:

$6 \times 5 \times 4 = 120$ **عدد**

❷ يمكن اختيار المئات بطريقتين والعشرات بأربع طرق والآحاد بطريقة واحدة وعدد الأعداد:

$2 \times 4 \times 1 = 8$ **عدد**

التمرين 28 : دورة 2020 الأولى

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال كود مكون من ثلاث خانات يمكن لأي منها أن يأخذ أياً من القيم : $0, 1, 2, 3, 4, 5$

❶ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل.

❷ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل المكونة من خانات مختلفة مثنى مثنى

الحل:

❶ $6 \times 6 \times 6 = 216$

❷ $6 \times 5 \times 4 = 120$

التمرين 29 :

رماز مؤلف من 6 خانات أرقامه مأخوذة من المجموعة $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

❶ ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل.

❷ اذا علمت أن ارقامه هي $2,2,2,1,1,0$ لكن نسينا ترتيبها كم رماز مختلف يمكن أن يكون من هذه الأرقام

الحل:

❶ $10\times10\times10\times10\times10\times10=1000000$.

❷نختار 3 خانات لنضع فيها العدد 2 ب $\binom{6}{3}=12$ طريقة ثم نختار خانتين لنضع فيها العدد 1 ب $\binom{3}{2}=3$ ثم يبقى خانة واحدة للعدد 0 فيكون عدد الطرق $12\times3\times1=36$

التمرين 30 :

صندوق يحوي 10 كرات ، 6 حمراء و3 بيضاء و كرة واحدة سوداء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة

❶ كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب

❷ كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه

❸ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون

❹ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد

❺ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل

❻ كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأكثر

الحل : باعتبار W تمثل كرة بيضاء R كرة حمراء و B كرة سوداء و D مختلفة

❶ $P_{10}^3=10\times9\times8=720$

❷ النتائج التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هي : $(R,R,D)\,,(W,W,D)$

و يكون عدد النتائج المختلفة هو :

$$(P_6^2\times P_4^1)\times3+(P_3^2\times P_7^1)\times3=(6\times5\times4)\times3+(3\times2\times7)\times3=486$$

❸ الكرات الثلاث مختلفة اللون هي : (R,W,B)

و يكون عدد النتائج المختلفة هو : $(6\times3\times1)\times3!=18\times3\times2\times1=108$

❹ النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد : $720-(P_6^3+P_3^3)=720-(120+6)=594$

بطريقة أخرى : $(P_6^2\times P_4^1)\times3+(P_3^2\times P_7^1)\times3+(6\times3\times1)\times3!=486+108=594$

❺ النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل هو متمم عدم الحصول على اي كرة حمراء $720-P_4^3=720-(4\times3\times2)=696$

❻ النتائج المختلفة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأكثر :$(B,D,D)\,,(D,D,D)$

$$3\times P_1^1\times P_9^2+P_9^3=720$$

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 093683426	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

التمرين 31 :

صندوق يحوي 10 كرات، 6 حمراء و3 بيضاء و كرة واحدة سوداء

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة

❶ **كم عدد النتائج الممكنة لهذا السحب؟**

❷ **كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه**

❸ **كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات مختلفة اللون**

❹ **كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد**

❺ **كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل**

❻ **كم عدد النتائج المختلفة التي تشمل كرة سوداء واحدة على الأكثر**

الحل : باعتبار W تمثل كرة بيضاء R كرة حمراء و B كرة سوداء و D مختلفة

❶ $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

❷ **النتائج التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هي :**

(R, R, D) , (W, W, D) , (B, B, D)

و يكون عدد النتائج المختلفة هو : $3(6^2 \times 4) + 3(3^2 \times 7) + 3(1^2 \times 9) = 648$

❸ **الكرات الثلاث مختلفة اللون هي :** (R, W, B)

و يكون عدد النتائج المختلفة هو : $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$

❹ **النتائج المختلفة التي تشمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد هي متمم سحب ثلاث كرات من لون واحد**

ومنه عدد النتائج هو : $1000 - (6^3 + 3^3 + 1^3) = 756$

بطريقة أخرى :

$$3(6^2 \times 4) + 3(3^2 \times 7) + 3(1^2 \times 9) + (6 \times 3 \times 1) \times 3! = 756$$

❺ **النتائج المختلفة التي تشمل على كرة حمراء واحدة على الأقل :**

(R, D, D) , (R, R, D) , (R, R, R)

و عدد النتائج المختلفة : $3(6 \times 4^2) + 3(6^2 \times 4) + (6^3) = 936$

❻ **النتائج المختلفة التي تشمل على كرة سوداء واحدة على الأكثر :**

(B, D, D) , (D, D, D)

و عدد النتائج : $3(1 \times 9^2) + (9^3) = 972$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 32 : دورة 2020 الثانية

يحتوي صندوق على 5 كرات مرقمة بالأرقام $1, 2, 3, 4, 5$ نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع الإعادة.

❶ كم عدد النتائج المختلفة لهذا للسحب.

❷ كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي

الحل :

❶ $5 \times 5 = 25$

❷ **المجموع فردي يعن الكرة الأولى زوجية والثانية فردية أو العكس**

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

التمرين 33 :

نتأمل مجموعة من البطاقات عدد عناصرها 32

فيها ثماني بطاقات حمراء اللون مرقمة من 1 الى 8

و ثماني بطاقات زرقاء اللون مرقمة من 1 الى 8

و ثماني بطاقات خضراء اللون مرقمة من 1 الى 8

و ثماني بطاقات صفراء اللون مرقمة من 1 الى 8

نسمي سحبا أي مجموعة جزئية مكونة من خمس بطاقات من المجموعة والمطلوب :

❶ كم سحبا يضم تماما بطاقتين حمراوين

❷ كم سحبا يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم 1 ؟

الحل :

① **السحب (بطاقتين حمراوين من البطاقات الحمراء 8 و ثلاث بطاقات من الباقي 24)**

$$\binom{8}{2}\binom{24}{3} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{24 \times 23 \times 22}{3 \times 2 \times 1} = 56672$$

② **كم سحبا يضم على الأقل بطاقة واحدة تحمل الرقم 1 ؟**

نأخذ المتمم عدم وجود بطاقة تحمل الرقم 1 وبالتالي (العدد الكلي منقوصا منه عدم وجود بطاقة تحمل الرقم 1)

$$\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} - \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 103096$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038 | زياد داوود — سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183 | مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 34 :

نتأمل صندوقا يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6,7,8,9 نُجري التجربة الآتية:

نسحب ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة والمطلوب :

❶ كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

❷ كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية:

a . الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6 ، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b . الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8 ، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c . الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9 ، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d . الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

الحل : ❶ عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة هو: $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

❷ عدد النتائج الممكنة :

<table>
<tr><th>الكرة الاولى</th><th>الكرة الثانية</th><th>الكرة الثالثة</th><th>الكرة الاولى</th><th>الكرة الثانية</th><th>الكرة الثالثة</th></tr>
<tr><td>6</td><td>9</td><td>7</td><td>8</td><td>7</td><td>أي رقم</td></tr>
<tr><td colspan="3">$a.\quad 1^1 \times 1^1 \times 1^1 = 1$</td><td colspan="3">$b.\quad 1^1 \times 1^1 \times 4^1 = 4$</td></tr>
<tr><th>الكرة الاولى</th><th>الكرة الثانية</th><th>الكرة الثالثة</th><th>الكرة الاولى</th><th>الكرة الثانية</th><th>الكرة الثالثة</th></tr>
<tr><td>أي رقم</td><td>9</td><td>8</td><td>أي رقم</td><td>7</td><td>أي رقم</td></tr>
<tr><td colspan="3">$c.\ 4^1 \times 1^1 \times 1^1 = 4$</td><td colspan="3">$d.\quad 4^1 \times 1^1 \times 4^1 = 16$</td></tr>
</table>

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 35 : النموذج الوزاري الثاني 2020

يريد طالب أن يدرس مواده السبعة بشكل متتابع.

❶ بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد لدراستها.

❷ بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء

الحل: ❶ $7! = 5040$

❷ $1 \times 1 \times 5! = 120$

التمرين 36 : النموذج الوزاري الخامس

رف يحوي 7 كتب لمؤلّفين، ثلاث كتب للمؤلّف A وأربعة كتب للمؤلّف B

❶ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا كانت الكتب الثلاثة الأولى للمؤلّف B.

❷ بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف إذا اشترطنا أن يكون كتاباً معيّناً للمؤلّف B في البداية

الحل: ❶ يمكن اختيار الكتب الثلاثة الأولى بـ P_4^3 طريقة وباقي الكتب بـ P_4^4 وعدد الطرق

$$P_4^3 . P_4^4 = (4 \times 3 \times 2).(4 \times 3 \times 2) = 576$$ طريقة

❷ يمكن اختيار الكتاب المعيّن بطريقة واحدو والباقي بـ P_6^6 وعدد الطرق

$$1. P_6^6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$ طريقة

التمرين 37 :

يملك أحمد 3 كتب رياضيات مختلفة ، و 4 كتب فيزياء مختلفة ، و كتاب عن العلوم الطبيعية ،

بكم طريقة يمكن ترتيب كتبه على الرف ، بحيث تكون الكتب المتماثلة بجانب بعضها البعض

الحل :

عدد طرق ترتيب كتب الرياضيات المختلفة $3!$

عدد طرق ترتيب كتب الفيزياء المختلفة $4!$

عدد طرق ترتيب كتاب العلوم 1

عدد تباديل الكتب الثلاث المختلقة (الرياضيات , الفيزياء , العلوم ,) $3!$، وبالتالي

عدد الطرق = $(3! \times 4! \times 1) \times 3! = 864$

التمرين 38 :

أنشر المقدار $(1+3x)^n$

واستنتج المجموع $S_n = 1 + \binom{n}{1}3 + \binom{n}{2}3^2 + \cdots + \binom{n}{r}3^r + \cdots \binom{n}{n}3^n$

الحل :

$$(1+3x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3x) + \binom{n}{2}(3x)^2 + \cdots . + \binom{n}{r}(3x)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3x)^n$$

ولاستنتاج قيمة المجموع S_n يكفي أن نعوض بدل كل x بواحد في عبارة المنشور فنجد

$$S_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}(3) + \binom{n}{2}(3)^2 + \cdots + \binom{n}{3}(3)^r + \cdots + \binom{n}{n}(3)^n = (1+3)^n = 4^n$$

التمرين 39 :

عين في منشور كل مما يلي الحد المستقل عن x (في حال وجوده):

❶ $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$, ❷ $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^8$, ❸ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)^{10}$.

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

❶ $T_r = \binom{12}{r} x^{12-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = \binom{12}{r} x^{12-4r}$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $12 - 4r = 0 \implies r = 3$

$$T_3 = \binom{12}{3} x^{12-12} = \frac{12\times11\times10}{3\times2} = 2\times110 = 220$$

❷ $T_r = \binom{8}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{8-r}\left(\sqrt{x}\right)^r = \binom{8}{r}(x)^{\mathrm{r}-8}(x)^{\frac{\mathrm{r}}{2}} = \binom{8}{r} x^{\frac{3\mathrm{r}}{2}-8}$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $\frac{3\mathrm{r}}{2} - 8 = 0 \implies r = \frac{16}{3}$

وبما أن r عدد طبيعي فهذا يعني بأنه لا يوجد حد مستقل عن x في منشور $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^8$

❸ $T_r = \binom{10}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10-r}\left(-\sqrt{x}\right)^r = \binom{8}{r}(x)^{\frac{\mathrm{r}-10}{2}}(x)^{\frac{\mathrm{r}}{2}}(-1)^r = \binom{8}{r} x^{\frac{2\mathrm{r}-10}{2}}$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $\frac{2\mathrm{r}-10}{2} = 0 \implies r = 5$

$$T_5 = \binom{10}{5} x^{10-10}(-1)^5 = -\frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2} = 36\times7 = -252$$

التمرين 40 :

عيّن في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x .

الحل :

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$$T_r = \binom{10}{r} x^{10-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r} x^{10-2r}$$

فالحد الذي يحوي x^2 هو الحد الذي يحقّق: $10 - 2r = 2$ وبالتالي $r = 4$ وهذا الحد يساوي

$$T_4 = \binom{10}{4} x^{10-8} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} x^2 = 210x^2$$

والحد الثابت هو الذي لا يحوي x وبالتالي : $10 - 2r = 0 \implies r = 5$

$$T_5 = \binom{10}{5} x^{10-10} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 36 \times 7 = 252$$

التمرين 41 :

ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ الحد الذي يحوي x^2 والحد الثابت المستقل عن x

الحل :

الحد العام للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هو : $T_r = \binom{n}{r} (x^2)^{n-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{n}{r} x^{2n-3r}$

وجود حد ثابت يكافئ $2n - 3r = 0$ ومنه $r = \frac{2n}{3}$ وكذلك يجب أن يكون العدد n من مضاعفات العدد 3

التمرين 42 :

احسب أمثال x^3 في المنشور $(2+3x)^{15}$.

الحل :

الحد ذو الدليل r في هذا المنشور هو :

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{15}{r} (2)^{15-r} (3x)^r = \binom{15}{r} (2)^{15-r} (3)^r (x)^r$$

وبالتالي أمثال x^3 هي :

$$\binom{15}{3} (2)^{12} (3)^3 = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} \times (2)^{12} \times (3)^3$$
$$= 5 \times 7 \times 13 \times (2)^{12} \times (3)^3 = 50319360$$

التمرين 43 : النموذج الوزاري الثالث

ما هي أمثال الحد x^2y في منشور $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x}{y}\right)^8$

الحل:

$$T_r=\binom{8}{r}a^{n-r}.b^r=\binom{8}{r}\left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r=\binom{8}{r}y^{8-r}\left(\frac{y}{x}\right)^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^r$$

$$=\binom{8}{r}y^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^{r-8}\left(\frac{x}{y}\right)^r=\binom{8}{r}y^{8-r}\left(\frac{x}{y}\right)^{2r-8}$$

$$=\binom{8}{r}x^{2r-8}y^{16-3r}$$

$$2r-8=2\quad\Rightarrow r=5\qquad \&\quad 16-3r=1\Rightarrow r=5$$

بالتالي أمثال الحد x^2y هي:

$$\binom{8}{5}=\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2}=56$$

التمرين 44 :

ما آحاد و عشرات العدد 11^{11}؟

الحل :

العدد يكتب بالشكل $11^{11}=(1+10)^{11}$

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدّين هي $T_r=\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ **وبالتالي :**

الحد ذو الدليل r في منشور $11^{11}=(1+10)^{11}$ **هو** $T_r=\binom{11}{r}(1)^{11-r}(10)^r$ **وبالتالي :**

جميع الحدود $T_2,T_3,\dots,T_{11}$ هي من مضاعفات المئة واضافتها لا تؤثر في الآحاد و العشرات وبالتالي

$$T_0=\binom{11}{0}(1)^{11-0}(10)^0=1\ ,\ T_1=\binom{11}{1}(10)^1=110$$

$$\Rightarrow T_0+T_1=110+1=111$$

وبالتالي كل من آحاد وعشرات العدد 11^{11} هو 1

التمرين 45 :

ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ **حيث** $a\,,b$ **عددان طبيعيان**

فإذا علمت أنّ أمثال x **تساوي** 62 **، فما هي القيم الممكنة للمجموع** $a+b$.

الحل:

طريقة أولى :

أمثال x **هي ناتج** $F'(0)$ **ومنه :**

$$F'(x) = 5(a)(1+ax)^4(1+bx)^4 + 4b(1+bx)^3(1+ax)^5$$

وبالتالي أمثال x **هي:** $F'(0) = 5a + 4b$ **ومن الفرض أيضاً أمثال** x **هي** 62 **فيكون:**

$5a + 4b = 62$**, ومنه نجد :**

$$4a + 4b \le 5a + 4b \le 5a + 5b \Leftrightarrow 4(a+b) \le 62 \le 5(a+b)$$

$$\frac{62}{5} = 12.4 \le a + b \le \frac{62}{4} = 15.5 \Leftrightarrow a + b \in \{13,14,15\}$$

طريقة ثانية :

$$F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$$

$$(1+ax)^5 = 1 + 5ax + \binom{5}{2}a^2x^2 + \binom{5}{3}a^3x^3 + \binom{5}{4}a^4x^4 + a^5x^5$$

$$(1+bx)^4 = 1 + 4bx + \binom{4}{2}b^2x^2 + \binom{4}{3}b^3x^3 + b^4x^4$$

أن الحد الذي يحوي x **في منشور** $F(x)$ **هو :** $5ax + 4bx = (5a+4b)x$ **ومنه**

$5a + 4b = 62$ **وهذا يكافئ :**

$$4a + 4b \le 5a + 4b \le 5a + 5b \Leftrightarrow 4(a+b) \le 62 \le 5(a+b)$$

$$\frac{62}{5} = 12.4 \le a + b \le \frac{62}{4} = 15.5 \Leftrightarrow a + b \in \{13,14,15\}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 093683426 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 46 :

اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x ، ثم أجب عن التمرين الموافق .

❶ $\cos^3 x$ **واستنتج قيمة :** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$ ❷ $\sin^3 x$ **واستنتج قيمة :** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$

❸ $\sin^4 x$ **واستنتج قيمة :** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ ❹ $\cos x \sin^4 x$ **واستنتج قيمة :**

$$F(x) = \int_0^x \cos t \sin^4 t\,dt$$

الحل:

❶ **بتطبيق دستور اويلر :** $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ **ثم منشور ذي الحدين نجد :**

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{2}{8}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + \frac{3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{2}\right) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$$

وذلك باستخدام أويلر مرّة ثانية .

والتكامل المطلوب:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)dx = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x + 3\cos x)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\left(\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{12}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(\frac{1}{12}\sin(0) + \frac{3}{4}\sin(0)\right)$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

❷ بتطبيق دستور اويلر: $cosx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$ ثم منشور ذي الحدين نجد :

$$sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{2ix}.e^{-ix}+3e^{ix}.e^{-2ix}-e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{-2}{8}\left(\frac{e^{3ix}-e^{3ix}}{2i}-\frac{3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{2i}\right) = -\frac{1}{4}(sin3x-3sinx)$$

وذلك باستخدام أويلر مرّة ثانية .

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin3x-3sinx}{tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\,sin^3 x}{tan^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-4\,sin^3 x}{\frac{sin^3 x}{cos^3 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(-4\,cos^3 x) = -4$$

❸ كما سبق نجد :

$$sin^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{2}{16}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}-4\frac{\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)}{2}+\frac{6}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(cos(4x)-4\,cos(2x)+3)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}(cos(4x)-4\,cos(2x)+3)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos(4x)-4\,cos(2x)+3)dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}sin4x-\frac{4}{2}sin2x+3x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{32}sin4x-\frac{1}{4}sin2x+\frac{3}{8}x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{32}sin\left(\frac{4\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)-(0) = \frac{3\pi}{16}$$

❹ **بتطبيق دستوري أويلر نجد:**

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cos x \sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{1}{32}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4$$

$$= \frac{1}{32}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{1}{32}\left(e^{i2x} - e^{-i2x}\right)\left(e^{3ix} - 3e^{2ix}.e^{-ix} + 3e^{ix}.e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{2}{32}\left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} - 3\left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2}\right) + 2\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{16}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x)$$

$$F(x) = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{3}{3}\sin 3x + 2\sin x\right) = \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$$

وبما أنّ

$$\int \cos x \sin^4 x \, dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + c$$

يكون:

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$$

التمرين 47 :

ليكن A_n العدد المعرف بالصيغة : $A_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$

❶ **تحقق انّ A_3 وA_4 هما عددان طبيعيان .**

❷ **أثبت أنّ A_n عدد طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n.**

الحل:

❶

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^3 = 8 + 3(4)\left(\sqrt{3}\right) + 3(2)(3) + 3\sqrt{3} = 26 + 15\sqrt{3}$$
$$\left(2-\sqrt{3}\right)^3 = 8 - 3(4)\left(\sqrt{3}\right) + 3(2)(3) - 3\sqrt{3} = 26 - 15\sqrt{3}$$
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^4 = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^3 = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(26+15\sqrt{3}\right)$$
$$= 52 + 30\sqrt{3} + 26\sqrt{3} + 45 = 97 + 56\sqrt{3}$$
$$\left(2-\sqrt{3}\right)^4 = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^3 = \left(2-\sqrt{3}\right)\left(26-15\sqrt{3}\right)$$
$$= 52 - 30\sqrt{3} - 26\sqrt{3} + 45 = 97 - 56\sqrt{3}$$

ومنه يكون :

$$A_3 = \left(2+\sqrt{3}\right)^3 + \left(2-\sqrt{3}\right)^3 = 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} = 52$$
$$A_4 = \left(2+\sqrt{3}\right)^4 + \left(2-\sqrt{3}\right)^4 = 97 + 56\sqrt{3} + 97 - 56\sqrt{3} = 194$$

أي A_3 و A_4 عددين طبيعيين

❷ **بفرض T_r الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ فيكون :**

$$T_r = \binom{n}{r} 2^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^r$$

بفرض T'_r الحد ذو الدليل r في منشور ذي الحدين $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ فيكون :

$$T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r}\left(-\sqrt{3}\right)^r = \binom{n}{r} 2^{n-r}(-1)^r\left(\sqrt{3}\right)^r$$

نلاحظ إذن أنّ :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^r + \binom{n}{r} 2^{n-r}(-1)^r\left(\sqrt{3}\right)^r$$
$$= \binom{n}{r} 2^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^r\left(1+(-1)^r\right)$$

فإذا كان r عدداً زوجياً $r = 2m$ كان :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^{2m}(2) = \binom{n}{r} 2^{n-r+1}(3)^m$$

وهو عدد طبيعي لأنه جداء لأعداد طبيعية .

فإذا كان r عدداً فردياً $r = 2m+1$ كان :

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r} 2^{n-r}\left(\sqrt{3}\right)^{2m+1}(1-1) = 0$$

وهو عدد طبيعي أيضاً .

و بما أنّ A_n يساوي مجموع $T_r + T'_r$ فهو عدد طبيعي لأنه مجموع أعداد طبيعية .