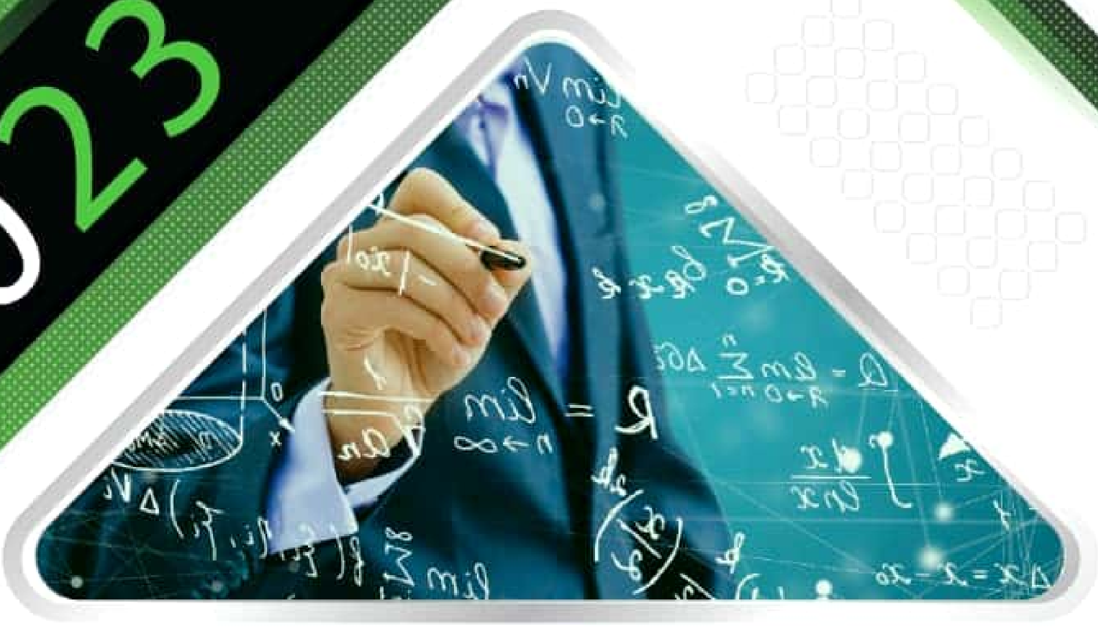
مكثفة

المتتاليات ونهاية المتتالية

2023



إعداد المدرس

محمد أحمد

0964848890

المتتاليات:

المتتالية: هي تابع منطلقه (مجموعة تعريفه) N ومستقره R.

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$N^* = N / \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

بشكل عام نرمز للمتتالية $(U_n)_{n \geq n_0}$

حيث n_0 من N وتمثل بعض المسألة ويسمى الـ U_n الحد ذو الدليل n

* طرق تعريف المتتالية:

أولاً: تعريف صريح: $U_n = f(U_n)$.

مثال: لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$U_n = \frac{2n}{n+3}$$

$$U_0 = \frac{2(0)}{0+3} = 0$$

$$U_5 = \frac{2(5)}{5+3} = \frac{5}{4}$$

ثانياً: تعريف بالتدرج:

$U_{n+1} = f(U_n)$. & U_0 من البدء

مثال: لتكن لدينا المتتالية الآتية $(U_n)_{n \geq 0}$

$U_0 = 3 , U_{n+1} = 2U_n + 3$

الحل: $U_1 = 2U_0 + 3 = 2(3) + 3 = 9$

$U_2 = 2U_1 + 3 = 2(9) + 3 = 21$

$U_3 = 2U_2 + 3 = 2(21) + 3 = 45$

"أنواع المتتاليات"

المتتالية الحسابية:

كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد حقيقي r ونسميه أساس المتتالية.

$2, 5, 8, 11, 14$

الحد الأول هو 2 والأساس $r = 3$

سؤال امتحاني:

لإثبات متتالية حسابية:

$U_{n+1} - U_n =$ عدد ثابت

أي: $U_{n+1} = U_n +$ عدد ثابت

القانون الأساسي:

$$U_m - U_p = (m - p) \times r$$

أي: $U_m = U_p + (m - p) \times r$

U_m: حد ما ذو دليل m

U_p: حد ما ذو الدليل p

r: أساس المتتالية

فائدة القانون الأساسي:

1. كتابة U_n بدلالة n
2. حساب حد ما بمعرفة حد آخر وأساس
3. حساب الأساس r لمعرفة أي حدات.

قانون المجموع:

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$

a: هو الحد الأول في المجموع

l: هو الحد الأخير في المجموع

n: هو عدد الحدود ويساوي

الدليل الأخير - الدليل الأول + 1.

"المتتالية الهندسية"

كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد حقيقي q ويسمى أساس المتتالية.

3 , 6 , 12 , 24

الحد الأول 3 ، الأساس $q=2$.

لإثبات أن المتتالية هندسية:

$\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = عدد ثابت "(حقيقي)"

إذن: $U_{n+1} = U_n \times q$

القانون الأساسي:

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

إذن: $U_m = U_p \cdot q^{m-p}$

U_m: حد مانه الدليل m

U_p: حد مانه الدليل p

q: أساس المتتالية.

فائدة القانون الأساسي:

1) كتابة U_n بدلالة n.

2) حساب حد ما بمعرفة حد آخر وأساس.

3) حساب الأساس بمعرفة أي حدين.

قانون المجموع:

$$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

a: هو الحد الأول في المجموع

q: أساس المتتالية.

n: هو عدد الحدود ويساوي

الدليل الأخير - الدليل الأول + 1.

(المتتالية المطردة)

$U_{n+1} > U_n$ متزايدة تماماً.

$U_{n+1} \geq U_n$ متزايدة.

$U_{n+1} < U_n$ متناقصة تماماً.

$U_{n+1} \leq U_n$ متناقصة.

$U_{n+1} = U_n$ ثابتة.

كيف ندرس جهة إطراد المتتالية:

1) معيار الطرح (نحسب الفرق):

$\boxed{U_{n+1} - U_n = \text{عدد}}$

العدد:

a) عدد > 0 (موجب) متتالية متزايدة تماماً.

b) عدد < 0 (سالب) متتالية متناقصة تماماً.

c) عدد = 0 متتالية ثابتة

أ.محمد أحمد - 0964848890

② معيار القسمة : $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ عدد

العدد:

ⓐ عدد > 1 ⇐ متتالية متزايدة تماماً.

ⓑ عدد < 1 ⇐ متتالية متناقصة تماماً.

ⓒ عدد $= 1$ ⇐ متتالية ثابتة.

③ معيار الاشتقاق : $U_n = f(U_n)$

مثال: $U_n = n + 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$

وهنا نشتق $f'(x)$.

ⓐ $f'(x) > 0$ التابع متزايد تماماً وبالتالي متتالية متزايدة.

ⓑ $f'(x) < 0$ التابع متناقص تماماً وبالتالي متتالية متناقصة.

(البرهان بالتدريج)

① نثبت أن القضية صحيحة من أجل $n = n_0$

حيث n_0 تذكر بالمسألة إما: $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$ أو ......

② نفرض أن القضية صحيحة من أجل n أي $E(n)$

③ نبرهن أن القضية صحيحة من أجل $n+1$ أي $E(n+1)$

ملاحظة: (1)

إذا كانت c و b و a ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

ملاحظة: (2)

إذا كانت c و b و a ثلاث حدود متعاقبة من متتالية هندسية فإن:

$$b^2 = a \cdot c$$

"بنك مسائل المتتاليات"

السؤال الأول:

لتكن لدينا المتتالية $U_n = 3n + 1$

① أثبت أن المتتالية حسابية ثم أوجد حدها الأول وأساسها.

② احسب $S = U_3 + U_4 + \dots + U_8$

الحل: $U_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$

فالمتتالية $U_n = 3n + 1$ حسابية.

$U_0 = 1$ ، $r = 3$ ،

$S = \frac{n}{2}(a + \ell)$

$a = u_3 = 3(3)+1 = 10$

$\ell = u_8 = 3(8)+1 = 25$

$S = \frac{n}{2}(a+\ell)$

عدد الحدود $n = 8-3+1 = 6$

$S = \frac{6}{2}[10+25] = 105$

السؤال الثاني:

لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ الآتيتين حسابية.

(1) $u_n = 3n+1$

(2) $v_n = n^2+1$

الحل:

(1) $u_{n+1} - u_n =$

$\Rightarrow = 3(n+1)+1-(3n+1)$

$= 3 \in R$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حسابية حدها الأول (1) وأساسها 3

(2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2+1-(n^2+1)$

$= 2n+1$ ليس ثابت

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ ليست متتالية حسابية.

السؤال الثالث: (2018) (2)

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها $u_0 = 1$

احسب u_3

ثم احسب المجموع

$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$

الحل:

$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$

$u_3 = u_0 \cdot q^{3-0}$

$\Rightarrow u_3 = (1)(2)^3 = 8$

$S = a \times \frac{1-q^n}{1-q} = u_3 \times \frac{1-q^n}{1-q}$

$n = 7-3+1 = 5$ و $u_3 = 8$

$S = 8 \cdot \frac{1-(2)^5}{1-2} = \frac{8}{-1}(1-32)$

$= 248$

السؤال الرابع: (نموذج وزاري 5)

لتكن المتتالية $u_n = 4n+1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعيّن أساسها ثم احسب

$u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

الحل: $u_{n+1} = 4(n+1)+1 = 4n+5$

$u_{n+1} - u_n = 4n+5-4n-1 = 4$

وهي متتالية حسابية أساسها $r = 4$

وحدها الأول $u_0 = 1$

$S = \frac{n}{2}(a+\ell)$

$n = 10-0+1 = 11$

$a = u_0 = 4(0)+1 = 1$

$l = u_{10} = 4(10)+1 = 41$

$S = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{11}{2}(1+41)$

$= 231.$

السؤال الخامس: (اختبار 2).

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$, $u_0 = 1$

1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n.

2) أثبت أن المتتالية متزايدة.

الحل: 1

نرمز للقضية $E(n): 0 \leq u_n \leq 4$

نبرهن صحة القضية $E(0)$ أي: $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$ محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة: $0 \leq u_n \leq 4$ ......(*)

لنبرهن صحة القضية $E(n+1)$.

أي سنبرهن: $0 \leq u_{n+1} \leq 4$ ......(**)

من (*) $0 \leq u_n \leq 4$

$\Rightarrow (+12) \Rightarrow 12 \leq 12+u_n \leq 16$

$\Rightarrow$ نجذر $\Rightarrow \sqrt{12} \leq \sqrt{12+u_n} \leq 4$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$

فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي بالتدريج وجدنا: $0 \leq u_n \leq 4$ محققة وذلك أياً كان العدد الطبيعي n

2) $E(n): u_{n+1} \geq u_n$

نبرهن صحة القضية $E(0)$ أي:

$u_1 \geq u_0$

$\Rightarrow u_1 = \sqrt{12+1} = \sqrt{13}$

$\Rightarrow \sqrt{13} \geq 1$ محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة أي:

$u_{n+1} \geq u_n$ ....(*)

لنبرهن صحة القضية $E(n+1)$

$u_{n+2} \geq u_{n+1}$ .....(**)

من (*) $u_{n+1} \geq u_n$

$(+12) \Rightarrow 12+u_{n+1} \geq 12+u_n$

نجذر $\Rightarrow \sqrt{12+u_{n+1}} \geq \sqrt{12+u_n}$

$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$

$(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

T. Mohammed Ahmed
0964848890

السؤال السادس: (اختبار (1))

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات:

$u_0 = 0$

$u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$

تزايدية تماماً.

الحل: نرمز للقضية $E(n): u_{n+1} > u_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$:

$u_1 > u_0$

$u_0 = 0$ ، $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = 1$

$\Rightarrow 1 > 0$ محققة

نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$:

$u_{n+1} > u_n$ .....(*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$u_{n+2} > u_{n+1}$ .....(**)

من * $u_{n+1} > u_n$

$\Rightarrow$ (نربع) $u_{n+1}^2 > u_n^2$

$\Rightarrow$ نضيف واحد $\Rightarrow 1+u_{n+1}^2 > 1+u_n^2$

$\Rightarrow$ نجذر $\Rightarrow \sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$

$u_{n+2} > u_{n+1}$

القضية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي صحيحة من أجل $n \geq 0$

ومنه المتتالية تزايدية تماماً

M-Ah

السؤال السابع: (وزاري 1)

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق:

$x_0 = 4$

$x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$

في حالة $n \geq 0$

(1) نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $y_n = x_n - 8$

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

واكتب y_n بدلالة n واحسب

$\lim_{n\to+\infty} y_n$

الحل:

$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8$

$= \frac{3}{4}x_n - 6$

$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{3}{4}(y_n + 8) - 6$

$= \frac{3}{4}y_n + 6 - 6 = \frac{3}{4}y_n$

$y_{n+1} = \frac{3}{4}y_n$ هندسية $(y_n)_{n\geq 0}$

أساسها $\frac{3}{4}$

وحدها الأول: $y_0 = x_0 - 8$

$= 4 - 8 = -4$

$y_n = y_0 \cdot q^{n-0} = -4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$

بما أن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = -4 \times 0 = 0$

Scanned by CamScanner

السؤال الثامن:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق:

$U_0 = 1$, $U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 6}$

عند كل $n \geq 0$

① أثبت أن التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً.

واستنتج أن $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي n

② أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الحل:

① $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$

$f'(x) = \frac{3(2x+6) - (2)(3x+2)}{(2x+6)^2}$

$f'(x) = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$

$\Leftarrow$ التابع متزايد تماماً.

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

نرمز للقضية $E(n): \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): \frac{1}{2} \leq U_0 \leq 1$

$U_0 = 1$

$\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$

ومنه القضية صحيحة من أجل $n=0$

نفرض صحة القضية من أجل n.

$E(n): \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$ ....(*)

صحيحة.

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

أي نريد اثبات:

$E(n+1): \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$ ....(**)

مبرهن $\Leftarrow$ (*)

$\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

نطبق الأطراف:

$f(\frac{1}{2}) \leq f(U_n) \leq f(1)$

$\frac{3(\frac{1}{2})+2}{2(\frac{1}{2})+6} \leq U_{n+1} \leq \frac{3(1)+2}{2(1)+6}$

$\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{8} < 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$

ومنه القضية صحيحة من أجل $n+1$

ومنه القضية محققة أياً كان n

② نرمز للقضية: $E(n): U_{n+1} < U_n$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): U_1 < U_0$

$\left.\begin{array}{l} U_0 = 1 \\ U_1 = \frac{5}{8} \end{array}\right\} \frac{5}{8} < 1$

محققة

نفرض صحة القضية من أجل n

أي :

$E(n): U_{n+1} < U_n$ ....(*)

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$

$E(n+1): U_{n+2} < U_{n+1}$ ....(**)

من * : $U_{n+1} < U_n$

- نصور الأطراف : f

$f(U_{n+1}) < f(U_n)$

$U_{n+2} < U_{n+1}$

ومنه القضية محققة من أجل $n+1$

ومنه القضية محققة أياً كان $n \in \mathbb{N}$

"نهاية المتتالية"

$$\lim_{n \to +\infty} U_n$$

(1) $\lim_{n \to +\infty} U_n = b$

هنا نقول إن المتتالية متقاربة من b

(2) $\lim_{n \to +\infty} U_n = \mp\infty$

هنا نقول إن $(U_n)_{n \geq n_0}$ متباعدة .

نهاية المتتالية الهندسية : q^n

$\boxed{1}$ $-1 < q < 1$ عندها $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

$\boxed{2}$ $q > 1$ $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

$\boxed{3}$ $q \leq -1$ $\lim_{n \to +\infty} q^n =$ "غير موجودة"

$\boxed{4}$ $q = 1$ $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$ (المتتالية ثابتة).

نهاية المتتالية عندما $n \to +\infty$

كيف نوجد نهاية متتالية :

أولاً: إذا كانت المتتالية مكتوبة بشكل صريح نطبق نفس قواعد نهاية التابع :

مثال : $U_n = \frac{2n+3}{3n-1}$

الحل: $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{2}{3}$

ثانياً: إذا كانت المتتالية بشكل مجموع :

نحول المجموع إلى شكل صريح باستخدام قانون المجموع في المتتالية الهندسية .

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

"كن مع الله ولا تبالي"

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

مثال: ليكن $-1<q<1$ ولنعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$$U_n = 1 + q + q^2 + \dots\dots + q^n$$

أعط صيغة أخرى تفيد في حساب U_n واستنتج $\Leftarrow$ $S = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

الحل: نلاحظ أنها متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول واحد.

عدد الحدود $n+1$

أول حد هو 1 والأساس q

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$= 1 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$\Rightarrow -1<q<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

لا تيأس ....

M.Ah

ثالثاً: إذا كانت بشكل تدريجي نظيمي:

إذا كانت متزايدة ومحدودة من الأعلى أو إذا كانت متناقصة ومحدودة من الأدنى فإن نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(x) = x$

مبرهنات الإحاطة

① $W_n \leq U_n \leq V_n$

$$\ell$$

② $|U_n - \ell| \leq e_n \to 0$

مثال: $|U_n - 4| \leq \frac{1}{n} \to 0$

$$\lim U_n = 4$$

③

$U_n \leq V_n$ ، $U_n \to +\infty$ ، $V_n \to +\infty$

$U_n \leq V_n$ ، $V_n \to -\infty$ ، $U_n \to -\infty$

قاعدة: إذا كانت نهاية المتتالية عدد حقيقي ℓ نقول عن المتتالية (متقاربة)

ملاحظة: إذا كانت المتتالية مكتوبة بشكل مجموع وطلب نهايتها فالبا تكون هندسية.

★ إذا كانت نهاية المتتالية $\mp\infty$ نقول عنها (متباعدة)

(المتتاليات المحدودة)

$u_n \leq M \Longleftrightarrow$ محدودة من الأعلى
(M) عنصر راجح.

$u_n \geq m \Longleftrightarrow$ محدودة من الأدنى
(m عنصر قاصر).

u_n محدودة من الأعلى والأدنى
$\Longleftrightarrow$ محدودة.

مبرهنة (1): كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تسعى إلى $+\infty$

* وكل متتالية متناقصة وغير محدودة من الأدنى تسعى إلى $-\infty$

مبرهنة (2): كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.

ب) كل متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى تكون متقاربة.

* ملاحظة:

1) إذا كان M عنصراً راجحاً على $(u_n)_{n\geq0}$ فإن أي عدد أكبر من M هو عنصر راجح عليها.

2) إذا كان m عنصراً قاصراً عنه $(u_n)_{n\geq0}$ فإن أي عدد أصغر من m هو عنصر قاصر عنها.

"بنك مسائل المتتاليات ونهاية المتتالية"

السؤال الأول: دورة (2017) أولى.

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق:

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ وفق:

$v_n = u_n + 3$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq0}$ متتالية هندسية أوجد أساسها.

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.

3) إذا كانت:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq0}$

الحل:

1) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3}$

$= \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n+3} = \frac{\frac{1}{3}u_n + 1}{u_n+3}$

$= \frac{\frac{1}{3}\cancel{(u_n+3)}}{\cancel{u_n+3}} = \frac{1}{3} \rightarrow$ عدد ثابت

v_n متتالية هندسية أساسها

$q = \frac{1}{3}$

التقدم البسيط في كل يوم ..... يؤدي إلى نتائج أكبر.
"M-AH"

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = 6 - 0 = 6$

السؤال الثاني:

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

(1) أثبت أن $u_n > 0$ بالتدريج أياً كان العدد الطبيعي n.

(2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية.

واكتب عبارة v_n بدلالة n ثم

استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل: (1) نرمز للقضية $E(n): u_n > 0$

نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$

محققة $1 > 0 \Rightarrow u_0 > 0$

نفرض صحة القضية من أجل n أي:

$u_n > 0$ ......(*)

نبرهن صحة القضية من أجل $n+1$

$u_{n+1} > 0$ ......(**)

$f(x) = \frac{x}{1+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$

أكمل ذاتياً.

(2) $v_n = v_p \cdot q^{n-p}$

$\Rightarrow v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

$v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$

$v_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$

$\Rightarrow v_n = u_n + 3$

$\Rightarrow u_n = v_n - 3 = \frac{4}{3^n} - 3$

(3) $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

هي مجموع متتاليات هندسية حدها الأول v_0

وأساسها $q = \frac{1}{3}$

وعدد حدودها $n+1$

$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$= v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$

$= 4 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$= 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$S_n = 6 - \frac{2}{3^n}$

لما أن: $q = 3 > 1$ $\lim_{n \to +\infty} (3)^n = +\infty$

مكثفة المتتاليات
ونهـاية المتتالية

* من $u_n > 0$

$f(u_n) > f(0)$

وهو المطلوب: $u_{n+1} > 0$

(2) $v_n = \frac{1}{u_n}$

لإثبات أن المتتالية حسابية يجب أن يكون: $v_{n+1} - v_n =$ عدد ثابت

$$= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1+u_n}} - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{1+u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1$$

فالمتتالية حسابية أساسها $r = 1$

ولكتابة v_n بدلالة n:

$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$

$v_n = v_0 + (n-0) \times r$

$v_n = 1 + (n-0) \times 1$

$v_n = n+1$

لنستنتج عبارة u_n بدلالة n:

$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n+1}$

M. Ah

المتتاليات المتجاورة:

تعريف:

نقول إن المتتاليتين $(t_n)_{n \geq 0}$ ، $(S_n)_{n \geq 0}$ متجاورتان إذا وفقط إذا كانت إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة وكانت:

$\lim(S_n - t_n)$ تساوي الصفر.

أو $\lim S_n = \lim t_n$

السؤال الثالث: تمرين وزاري (5)

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n \geq 0}$ و $(X_n)_{n \geq 0}$ المعرفتين:

$X_n = \frac{4n+5}{n+1}$ ، $Y_n = \frac{4n+1}{n+2}$

برهن أنهما متجاورتين.

الحل: نفرض تابع:

$f(x) = \frac{4x+5}{x+1}$

نشتق: $f'(x) = \frac{4(x+1) - (1)(4x+5)}{(x+1)^2}$

$= \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$

f متناقص تماماً فالمتتالية متناقصة تماماً

$$g(x)=\frac{4x+1}{x+2}$$

$$g'(x)=\frac{4(x+2)-1(4x+1)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{7}{(x+2)^2}>0$$

g متزايدة تماماً فالمتتالية متزايدة تماماً

$$\lim_{n\to\infty}(X_n-Y_n)=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{4n+5}{n+1}-\frac{4n+1}{n+2}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}\right]=0$$

إذاً المتتاليتان $(X_n)_{n\geq0}$ & $(Y_n)_{n\geq0}$ "متجاورتان"

السؤال الرابع: (مهم):

لتكن المتتالية $(X_n)_{n\geq1}$, $(Y_n)_{n\geq1}$

حيث: $X_n=2-\frac{1}{n}$

$$y_n=2+\frac{1}{n^2}$$

أثبت أن هاتين المتتاليتين متجاورتين.

الحل: $X_{n+1}-X_n=2-\frac{1}{n+1}-2+\frac{1}{n}$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}>0$$

$(X_n)_{n\geq1}$ متزايدة تماماً.

$$X_{n+1}>X_n$$

$$y_{n+1}-y_n=2+\frac{1}{(n+1)^2}-2-\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}=\frac{n^2-(n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

$$=\frac{n^2-n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}=\frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}<0$$

$(y_n)_{n\geq1}$ متناقصة تماماً.

$$y_{n+1}<y_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}(X_n-y_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[2-\frac{1}{n}-2-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$=\lim\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

$(X_n)_{n\geq1}$ & $(Y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان

التقدم البسيط في كل يوم يؤدي إلى نتائج أكبر .....

T. Mohammed Ahmed.

Scanned by CamScanner

السؤال الخامس: "وزاري (3)"

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0=\frac{1}{2}$ ، $u_{n+1}=\frac{u_n}{2-u_n}$

1) أثبت أن $0<u_n<1$ أياً كانت n من N.

2) نعرف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث: $v_n=\frac{1}{u_n}-1$.
أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واستنتج v_n بدلالة n

3) اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل: 1) نرمز للقضية:

$E(n):\ 0<u_n<1 \quad \forall n\in N$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$: أي

$0<u_0<1 \Rightarrow u_0=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 0<\frac{1}{2}<1$.

نفرض أن $E(n)$ صحيحة:

$0<u_n<1$ ....(*)

نبرهن صحة القضية $E(n+1)$:

$0<u_{n+1}<1$ ....(**)

ليكن لدينا التابع: $f(x)=\frac{x}{2-x}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R\setminus\{2\}$

$f'(x)=\frac{1(2-x)-(-1)(x)}{(2-x)^2}$

$=\frac{2}{(2-x)^2}>0$ f متزايد تماماً على $R\setminus\{2\}$

من (*) $0<u_n<1$

$f(0)<f(u_n)<f(1)$

(لأن f متزايد تماماً ....)

$0<u_{n+1}<1$ ....(**)

$E(n+1)$ محققة.

ومنه نستنتج أن $E(n)$ محققة مهما يكن $n\in N$

2) $v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}}-1=\frac{1}{\frac{u_n}{2-u_n}}-1$

$=\frac{2-u_n}{u_n}-1$

$v_{n+1}=\frac{2-u_n-u_n}{u_n}=\frac{2-2u_n}{u_n}$

$v_{n+1}=2\times\frac{1-u_n}{u_n}=2\left(\frac{1}{u_n}-1\right)$

$=2v_n$

$(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0=\frac{1}{u_0}-1$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$

$v_n = v_0 \cdot q^{n-0}$

$v_n = 1 \times 2^n = 2^n$

③ $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

$\Rightarrow \frac{1}{u_n} = v_n + 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n + 1}$

$= \frac{1}{2^n + 1}$

وبما أن $2 > 1$ فإن :

$\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{+\infty} = 0$

السؤال السادس :

ادرس تقارب المتتالية :

① $x_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$

② $y_n = \frac{10^n - 1}{10^n + 1}$ ⟹ وظيفة

الحل :

$3 > 1 \Rightarrow \lim 3^n = +\infty$

$2 > 1 \Rightarrow \lim 2^n = +\infty$

$\lim x_n = \frac{+\infty - \infty}{+\infty}$ ع.ت

$x_n = \frac{3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

$-1 < \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$-1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$

حل الوظيفة : ←

كُنْ مَعَ اللّهِ وَلا تُبالي .....

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

السؤال السابع:

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $U_n=\frac{4n+1}{2}$ والمطلوب.

1) برهن أن المتتالية حسابية عين أساسها وحدها الأول.

2) احسب المجموع $U_1+U_2+\dots+U_{50}$

3) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متباعدة.

الحل: 1) $U_n=\frac{4n+1}{2}$

$U_{n+1}=\frac{4n+5}{2}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{4n+5}{2}-\frac{4n+1}{2}=\frac{4}{2}=2$

متتالية حسابية أساسها $r=2$ حدها الأول $U_0=\frac{1}{2}$

2) $S=\frac{n}{2}(a+l)$

$U_{50}=\frac{4(50)+1}{2}=\frac{201}{2}$

$U_1=\frac{4(1)+1}{2}=\frac{5}{2}$

$n=50-1+1=50$

$S=\frac{50}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{201}{2}\right)=2575$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n+1}{2}=+\infty$

فهي متباعدة

السؤال الثامن: دورة 2019/ثانية

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يأتي: $U_n=\frac{2n-1}{n+1}$

1) ادرس إطراد المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

2) أثبت أن العدد 2 راجح على $(U_n)_{n\geq 0}$

3) احسب $\lim U_n$ ثم جد عدداً حقيقياً n_0 يحقق أنه أياً كان $n\geq n_0$ كان U_n في المجال $]1.9,2.1[$

الحل: نفرض 1) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$

حيث: $U_n=f(U_n)$

$f'(x)=\frac{2(x+1)-(1)(2x-1)}{(x+1)^2}$

$=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}>0$

والتابع متزايد تماماً فالمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

السؤال التاسع:

أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ حيث: $U_n = 1 - e^{\frac{1}{n}}$ متزايدة

وأن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ حيث: $V_n = 1 - e^{n}$ متناقصة.

ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

هل المتتاليات متجاورتان؟ علل ذلك؟

الحل:

$$U_{n+1} - U_n = 1 - e^{\frac{1}{n+1}} - 1 + e^{\frac{1}{n}}$$

$$= e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{n}} > e^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$$ متزايدة تماماً

$$V_{n+1} - V_n = 1 - e^{n+1} - 1 + e^{n}$$

$$= e^{n} - e^{n+1}$$

$$n+1 > n \Rightarrow e^{n+1} > e^{n}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n < 0$$ متناقصة تماماً.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$$

إذن:

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = -\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} V_n \neq \lim_{n \to +\infty} U_n$$

المتتاليات غير متجاورتان

② $U_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2$

$$= \frac{\cancel{2n}-1-\cancel{2n}-2}{n+1} = \frac{-3}{n+1} < 0$$

$$\Rightarrow U_n < 2$$

③ $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim \frac{2n-1}{n+1} = \lim \frac{2n}{n}$

$$= 2$$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2.1}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = 0{,}1$$

$$|U_n - c| < r \Rightarrow |U_n - 2| < 0.1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{2n-1-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{-3}{n+1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow n+1 > 30$$

$$\Rightarrow n > 29$$

وبالتالي يمكن اختيار $n_0 \geq 29$

السؤال العاشر: دورة (2012) أولى

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

1) أثبت أن المتتالية متزايدة تماماً.

2) أثبت أن S_n يكتب بالشكل:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right).$$

ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ بيّن أنها متقاربة.

الحل:

$$S_{n+1} - S_n = 1 + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} - \left(1 + \dots + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

2) حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

عدد حدودها $n - 0 + 1 = n + 1$

وحدها الأول 1

$$S_n = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= 1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(3 - \frac{3}{3^{n+1}}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

لإيجاد العنصر الراجح نأخذ نهاية S_n عندما $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}(3 - 0) = \frac{3}{2}$$

$$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim \frac{1}{3^n} = 0$$

$\Rightarrow$ (وجدنا أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى بعنصر راجح فهي متقاربة).

السؤال الحادي عشر: أولى (2018)

ليكن لدينا المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان وفق:

$$U_n = 5 - \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad V_n = 5 + \frac{1}{n^2}$$

1) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

2) أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 1}$ متناقصة

3) هل المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان؟ علل ذلك؟

" غذِّ قلبك بالآيات، وغذِّ عقلك بالرياضيات "

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

الحل: ①

$x > 0$

$f(x) = 5 - \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

f متزايدة تماماً ⟸ فالمتتالية $(U_n)_{n\geq1}$ متزايدة

$g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ $x > 0$

$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0$

g متناقص تماماً ⟸ فالمتتالية $(V_n)_{n\geq1}$ متناقصة.

الشرط الأول محقق؛

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 5$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = 5$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n$

⟸ $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

M.Ah

M-AH

(H.work) السؤال الثاني عشر:

لتكن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ المعرفتين وفق العلاقتين:

$U_n = -\frac{1}{n}$ و $V_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

① ادرس اطراد كل من $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$

② أثبت أن المتتاليتان $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

"الأستاذ: محمد أحمد"

السؤال الثالث عشر: دورة ثانية 2017

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة وفق ما يأتي:

$U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

① أثبت أن U_n متتالية متناقصة

② أثبت أن $0 \leq U_n \leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

كل

$x \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\sqrt{x}) \quad (\sqrt{x+1})$

$= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} \Rightarrow f'(x) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = x+1$

$\Rightarrow 0 = 1$ مستحيلة

$f'(x) < 0$

$\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ لأن البسط سالب والمقام موجب.

f متناقص ومنه المتتالية متناقصة.

(2) ندرس تغيرات التابع

$[0, +\infty[\quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

$f(0) = 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty - \infty$ عدم تعيين

$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$

$= \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$1 \searrow$	0

$0 \leq f(x) \leq 1$

$0 < U_n \leq 1$

بالتالي متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 0$

ادرس بذكاء، وليس بجهد

M. Ah

السؤال الرابع عشر: (هام جداً)

نتأمل المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 0}$ ، $(y_n)_{n\geq 0}$

المعرفتين وفق:

$$x_0 = 3 ,\ x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n - 2$$

$$y_n = x_n + 3$$

1) a) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b) احسب y_n ثم x_n بدلالة n

2) نضع: $S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

a) احسب كلاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b) استنتج نهاية كل من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$

الحل:

1) a) $y_{n+1} = x_{n+1} + 3$

$$= \frac{1}{3} x_n - 2 + 3 = \frac{1}{3} x_n + 1$$

$$= \frac{1}{3}(x_n + 3) = \frac{1}{3} y_n$$

$(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

b) كتابة y_n بدلالة n.

$$y_n = y_p . q^{n-p}$$

$$y_n = y_0 . q^{n-0}$$

$$y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$\Rightarrow y_n = y_0 . q^{n-0}$$

$$y_n = 6 . \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ولكتابة X_n بدلالة n

$$X_n = y_n - 3$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

2) $S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n$

مجموع n+1 حداً متتابعاً من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول

$$y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6$$

$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q} = 6 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 6 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$= 6 \times \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = 9 \times \left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$$

Scanned by CamScanner

$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$

$= (y_0 - 3) + (y_1 - 3) + \dots + (y_n - 3)$

$S'_n = \underbrace{y_0 + y_1 + \dots + y_n} + \underbrace{(-3) + (-3) + \dots + (-3)}_{\text{عددهم } n+1}$

$S'_n = S_n + (-3) \times (n+1)$

$S'_n = 9 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] - 3n - 3$

$\Rightarrow -1 < \frac{1}{3} < 1$

$\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 9 \times [1 - 0] = 9$

$\lim\limits_{n \to +\infty} S'_n = 9[1-0] - \infty - 3$

$= 9 - \infty - 3 = -\infty$

السؤال الخامس عشر: (وزاري هام)

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يأتي:

$U_0 = 0 \ , \ U_{n+1} = \frac{2U_n + 1}{U_n + 2}$

① أثبت أن $0 \leq U_n \leq 1$

② أثبت أن $(U_n)_{n \geq 0}$ متزايدة

③ علل تقارب المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل: ① نرمز للقضية $E(n)$:

$0 \leq U_n \leq 1$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$0 \leq U_0 \leq 1$

$0 \leq 0 \leq 1$ ..... محققة

نفرض أن القضية $E(n)$ صحيحة:

$0 \leq U_n \leq 1$ ..... (*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$0 \leq U_{n+1} \leq 1$ ..... (**)

ومن أجل ذلك ندرس إطراد التابع.

$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $R \setminus \{-2\}$

$f'(x) = \frac{2(x+2) - (1)(2x+1)}{(x+2)^2}$

$= \frac{3}{(x+2)^2} > 0$

$f'(x) > 0$ متزايد تماماً على مجال تعريفه

من (*) $0 \leq U_n \leq 1$

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$

(لأن f متزايد تماماً).

ومنه: $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq \frac{3}{3}$

$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$

$\Leftarrow$ $E(n+1)$ محققة

ومنه $E(n)$ محققة مهما يكن $n \in N$

(2) نرمز للقضية $E(n)$

$U_{n+1} > U_n$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$U_1 > U_0 \quad \Rightarrow U_0 = 0$

$U_1 = \frac{1}{2}$

$U_1 > U_0$

$\frac{1}{2} > 0$ محققة.

نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$

$U_{n+1} > U_n$ ...... (*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$U_{n+2} > U_{n+1}$ ...... (**)

من (*) $U_{n+1} > U_n$

$f(U_{n+1}) > f(U_n)$

(لأن f متزايد تماماً)

$U_{n+2} > U_{n+1}$

$E(n+1)$ محققة

مما سبق كله نستنتج أن $E(n)$ محققة مهما يكن $n \in N$

$\Leftarrow$ $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

(3) بما أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد (1) فهي متقاربة ولتكن نهايتها هي l حيث $0 \leq l \leq 1$

وبما أن مستمر على $R \setminus \{-2\}$ فهو مستمر عند l وبالتالي يكون l هو حل للمعادلة: $f(x) = x$

$\frac{2x+1}{x+2} = x \Rightarrow 2x+1 = x^2 + 2x$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

إما $\boxed{x = -1}$ مرفوض

أو $\boxed{x = 1}$ مقبول

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

السؤال السادس عشر:

لتكن المتتاليتين $(U_n)_{n\geq 1}$ $(V_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين وفق العلاقتين:

$U_n = -\frac{1}{n}$ & $V_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

(1) ادرس إطراد كل من $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$

(2) أثبت أن المتتاليتان $(U_n)_{n\geq 1}$ و $(V_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

أ.محمد أحمد – 0964848890

سنبلغ حلمنا لو بعد حين، فنحن بجد وعزم إن أردنا ....

مكثفة المتتاليات ونهاية المتتالية

الحل

① $U_n = -\frac{1}{n}$

$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}$

$= \frac{1}{n(n+1)} > 0$

$(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً.

$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 0$

$(V_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً

② من الطلب السابق وجدنا أن:

$(U_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً

$(V_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماماً.

$U_n - V_n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0 - 0 = 0$

(المتتاليتان متجاورتان)

السؤال السابع عشر: "وزاري"

لتكن $(X_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة وفق:

$x_0 = 5$

$x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$

① احسب x_1 ، x_2 ، x_3.

ادرس اطراد المتتالية.

② نعرف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة:

$y_n = x_n + 4$

أثبت أن $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية

③ اكتب y_n بدلالة n ثم احسب $y_2 + y_3 + \dots\dots + y_{10}$.

بدلالة قوة العدد $\frac{6}{5}$

الحل:

① $x_1 = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$

$x_2 = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{204}{25} + \frac{4}{5}$ (5)

$= \frac{224}{25}$

$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1344}{125} + \frac{4}{5}$ (25)

$= \frac{1444}{125}$

نستطيع من الحدود الأولى أن نخمن أن المتتالية متزايدة تماماً.

لذلك سوف نحاول إثبات صحة القضية مهما يكن $n \in N$.

$E(n): \; X_{n+1} > X_n$

$E(0): \; X_1 > X_0$

$\frac{34}{5} > 5$

نفرض أن القضية صحيحة من أجل

$E(n): x_{n+1} > x_n$ ....(*)

نبرهن صحة القضية من أجل

$E(n+1): x_{n+2} > x_{n+1}$ ....(**)

من (*) $x_{n+1} > x_n$

$\frac{6}{5}x_{n+1} > \frac{6}{5}x_n$

$\Rightarrow \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} > \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$

$x_{n+2} > x_{n+1}$

$\Rightarrow E(n+1)$ محققة

ومنه نستنتج $E(n)$ محققة مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

وبالتالي نستنتج أن $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

② $y_{n+1} = x_{n+1} + 4$

$= \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4$

$= \frac{6}{5}(y_n - 4) + \frac{24}{5}$

$= \frac{6}{5}y_n - \frac{24}{5} + \frac{24}{5}$

$y_{n+1} = \frac{6}{5}y_n$

← ومنه $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{6}{5}\right)$

وحدها الأول

$y_0 = x_0 + 4 = 5 + 4 = 9$

$y_n = y_0 . q^{n-0} = 9 \times \left(\frac{6}{5}\right)^n$

عدد الحدود المراد حساب مجموعها هو

$10 - 2 + 1 = 9$

$a = y_2 = x_2 + 4 = \frac{224}{25} + 4$

$= \frac{324}{25}$

$S = a \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$

$= \frac{324}{25} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{1 - \frac{6}{5}}$

$= \frac{324}{25} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9}{-\frac{1}{5}}$

$= \frac{324}{5}\left[1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9\right].$

السؤال الثامن عشر: (اختبار (3))

أثبت أن المتتاليتين $(X_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

$$X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$y_n = X_n + \frac{1}{4n}$$

الحل:

$$X_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$X_{n+1} - X_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$2(2n+1)$ $\quad 2(n+1)$ $\quad (2n+1)$

$$= \frac{-4n-2+2n+2+2n+1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$$

المتتالية X_n متزايدة تماماً

$$y_n = X_n + \frac{1}{4n}$$

$$y_{n+1} = X_{n+1} + \frac{1}{4n+4}$$

$$y_{n+1} - y_n = X_{n+1} + \frac{1}{4n+4} - X_n - \frac{1}{4n}$$

$$= X_{n+1} - X_n + \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{4n}$$

$(2n)$ $\quad n(2n+1)$ $\quad (n+1)(2n+1)$

$$= \frac{2n+2n^2+n-2n^2-3n-1}{4n(n+1)(2n+1)}$$

$$= \frac{-1}{4n(n+1)(2n+1)} < 0$$

المتتالية y_n متناقصة تماماً

$$\lim_{n\to+\infty} (y_n - X_n) = \lim \frac{1}{4n} = 0$$

إذاً المتتاليتان $(y_n)_{n\geq1}$ و $(X_n)_{n\geq1}$ متجاورتان.

السؤال التاسع عشر:

المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $U_0 = \frac{3}{2}$ وعندئذ $n \in \mathbb{N}$

$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

1) أثبت مستعملاً البرهان بالتدريج أن $1 \leq U_n \leq 2$ أياً يكن $n \in \mathbb{N}$

2) a) أثبت أن $U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1)$ أياً $n \in \mathbb{N}$

b) استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

3) أهي متقاربة؟

1) نرمز للقضية

$E(n): \quad 1 \leq U_n \leq 2$

نبرهن صحة القضية من أجل $E(0)$

$1 \leq U_0 \leq 2$

$1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$

نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$

$1 \leq U_n \leq 2$ (*)

نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$ (**)

من (*): $0 \leq U_n - 1 \leq 1$

$0 \leq (U_n - 1)^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq (U_n - 1)^2 + 1 \leq 2$

$1 \leq U_n^2 - 2U_n + 1 + 1 \leq 2$

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$

إذاً القضية صحيحة.

2) a)

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 2 - U_n =$

$U_n^2 - 3U_n + 2$

$= (U_n - 2)(U_n - 1)$

b) وجدنا أن $1 \leq U_n \leq 2$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} U_n - 1 \geq 0 \\ U_n - 2 \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{n+1} - U_n = (U_n - 2)(U_n - 1) \leq 0$$

$\Leftarrow$ $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

3) بما أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متناقصة وبما أن $U_n \geq 1$ محدودة من الأدنى $\Leftarrow$ $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من ℓ

السؤال الواحد والعشرون: وزاري رابع

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجيا بالشكل $U_0 = e^3$, $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

و $(V_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل:

$V_n = \ln(U_n) - 2$

والمطلوب:

① أثبت أن V_n هندسية وعيّن q و V_0

② اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n.

③ أثبت أن $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = e^2$

الحل

$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - 2$

$= \ln(e.\sqrt{U_n}) - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= \frac{1}{2}\ln(U_n) - 1 = \frac{1}{2}[\ln(U_n) - 2]$

$= \frac{1}{2} V_n$

وهي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

وحدها الأول

$V_0 = \ln(U_0) - 2 = 3 - 2 = 1$

② $V_n = V_0 . q^n$

$= 1 \times (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^n$

③ $V_n = \ln(U_n) - 2$

$V_n + 2 = \ln(U_n)$

$\Rightarrow U_n = e^{V_n + 2} = e^{(\frac{1}{2})^n + 2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n) = \lim(e^{(\frac{1}{2})^n + 2})$

$= e^{0+2} = e^2$

لأن:

$-1 < \frac{1}{2} < 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$

السؤال الثاني والعشرين:

أثبت أنه مهما كان العدد الطبيعي n كان $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.

① نبرهن صحة القضية من أجل $n = 0$ أي $E(0)$

$4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ مضاعف للعدد 3 محقق

② نفرض أن القضية صحيحة من أجل $E(n)$

أي: ($\star$) $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.

③ نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$

أي لنثبت أن: $4^{n+1} + 2$ ....($\star\star$)

مضاعف للعدد 3.

الإثبات:

$4^{n+1}+2 = 4^n.4+2 = 4^n(3+1)+2$

$= 4^n.3+4^n+2$ ... مضاعف للعدد 3

لأن: 4^n+2 مضاعف للعدد 3

3 مضاعف للعدد 3
4^n عدد طبيعي
$\Leftarrow$ $4^n.3$ مضاعف للعدد 3

$4^n.3+4^n+2$ مضاعف للعدد 3.

السؤال الثالث والعشرون: دورة (2021)

لتكن لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدرجية:

$U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n-3$, $U_0=2$

1) أثبت أن المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $V_n=U_n+6$ هندسية عين أساسها واحسب حدها الأول

ثم احسب عبارة V_n بدلالة n

2) لنعرف المتتالية $(W_n)_{n\geq 0}$ $W_n=\ln V_n$

أثبت أنها حسابية واحسب W_0 ثم احسب المجموع

$S=W_0+W_1+W_2+W_3+W_4+W_5$

الحل:

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{U_{n+1}+6}{U_n+6}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}U_n-3+6}{U_n+6}=\frac{\frac{1}{2}U_n+3}{U_n+6}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{U_n+6}}{\cancel{U_n+6}}\right)=\frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ المتتالية $(V_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول.

$V_0=U_0+6=2+6=8$

$$V_n=V_0.q^{n-0}=8\left(\frac{1}{2}\right)^n=\boxed{\frac{8}{2^n}}$$

2) $W_{n+1}-W_n=\ln(V_{n+1})-\ln(V_n)$

$$=\ln 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\ln 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\ln\frac{8\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{8\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\ln\frac{1}{2}$$

$$=-\ln 2=r$$

أي أن: $(W_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $-\ln 2$ وحدها الأول.

$W_0=\ln(V_0)=\ln(U_0+6)=$

$\ln(2+6)=\ln 8$

$=3\ln 2$

① $v_0 = \frac{1}{2}$

$v_1 = \frac{5(\frac{1}{2})+4}{\frac{1}{2}+2} = \frac{13}{5}$

$v_2 = \frac{5(\frac{13}{5})+4}{\frac{13}{5}+2} = \frac{85}{33}$

نلاحظ أن: $v_0 = \frac{1}{2}, v_1 = \frac{13}{5}$

$v_2 = \frac{85}{33}$

حدود متتالية متزايدة

ومنه نثبت أن المتتالية متزايدة.

سنبرهن أن: $v_{n+1} > v_n$

نرمز للقضية

$E(n): v_{n+1} > v_n$

نثبت صحة القضية من أجل $n=0$

$E(0): v_1 > v_0$

محققة .... $\frac{13}{5} > \frac{1}{2}$

نفرض صحة القضية من أجل n أي:

$E(n): v_{n+1} > v_n$ (*)

نثبت صحة القضية من أجل $n+1$ أي:

$E(n+1): v_{n+2} > v_{n+1}$ (**)

نتوجه تابع: $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$

ويكون:

$w_n = \ln 8 - n\ln 2$

$w_5 = \ln 8 - 5\ln 2$

$= 3\ln 2 - 5\ln 2$

$= -2\ln 2$

$n = 5-0+1 = 6$

$S = \frac{n}{2}(a+l)$

$= \frac{6}{2}(3\ln(2) + (-2\ln(2)))$

$= 3(3\ln(2) - 2\ln(2))$

$= 3\ln 2$

السؤال الرابع والعشرون: H.Work

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي:

$v_0 = \frac{1}{2}$

وظيفة

$v_{n+1} = \frac{5v_n + 4}{v_n + 2}$

① ادرس جهة إطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$

② نعرف المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة

$U_n = \frac{v_n - 4}{v_n + 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية/ ثم عين أساسها وحدها الأول.

ب) أوجد عبارة U_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n وعين نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$.

أ.محمد أحمد – 0964848890

$$f'(x) = \frac{5(x+2) - (1)(5x+4)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{6}{(x+2)^2} > 0$$

ومنه التابع متزايد.

مـ (*) : $v_{n+1} > v_n$

$f(v_{n+1})\ f(v_n)$

$v_{n+2} > v_{n+1}$

ومنه القضية محققة من أجل $n+1$

ومنه العلاقة صحيحة أياً كان n

ومنه المتتالية متزايدة

(2) (1) $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ ثابت

$$u_{n+1} = \frac{v_{n+1} - 4}{v_{n+1} + 1}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{5v_n + 4}{v_n + 2} - 4}{\frac{5v_n + 4}{v_n + 2} + 1}$$

$$= \frac{\frac{5v_n + 4 - 4v_n - 8}{v_n + 2}}{\frac{5v_n + 4 + v_n + 2}{v_n + 2}}$$

$$u_{n+1} = \frac{\frac{v_n - 4}{v_n + 2}}{\frac{6v_n + 6}{v_n + 2}} = \frac{v_n - 4}{6v_n + 6}$$

$$u_n = \frac{v_n - 4}{v_n + 1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{v_n - 4}{6v_n + 6}}{\frac{v_n - 4}{v_n + 1}} =$$

$$= \frac{\cancel{v_n - 4}}{6v_n + 6} \times \frac{v_n + 1}{\cancel{v_n - 4}} = \frac{\cancel{v_n + 1}}{6(\cancel{v_n + 1})}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ومنه : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{6}$

ومنه المتتالية هندسية أساسها

$q = \frac{1}{6}$

وحدها الأول :

$$u_0 = \frac{v_0 - 4}{v_0 + 2} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{\frac{1}{2} + 2} = -\frac{7}{5}$$

$v_0 = \frac{1}{2}$, $u_0 = -\frac{7}{5}$

مكثفة المتتاليات ونهـاية المتتالية

بما أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فإن: ب

$$\frac{U_m}{U_p} = q^{m-p}$$

$$\frac{U_n}{U_0} = q^{n-0} \quad ; \quad U_0 = -\frac{7}{5}$$

$$q = \frac{1}{6}$$

$$U_n = U_0 \cdot q^{n-0}$$

$$\Rightarrow U_n = -\frac{7}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

ولكتابة V_n بدلالة n:

$$U_n = \frac{V_n - 4}{V_n + 1}$$

$$U_n(V_n + 1) = V_n - 4$$

$$U_n \cdot V_n + U_n - V_n + 4 = 0$$

$$V_n(U_n - 1) + U_n + 4 = 0$$

$$V_n(U_n - 1) = -U_n - 4$$

$$V_n = \frac{-U_n - 4}{U_n - 1}$$

ولكن: $U_n = -\frac{7}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$V_n = \frac{\frac{7}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 4}{-\frac{7}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n - 1}$$

ولحساب نهاية $(V_n)_{n\geq 0}$

$$\lim_{n\to+\infty}(V_n) = \frac{\frac{7}{5}(0) - 4}{-\frac{7}{5}(0) - 1} = \frac{0-4}{0-1} = 4$$

حيث

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

لأن: $-1 < \frac{1}{6} < 1$

انتهت مكثفة المتتاليات و نهاية المتتالية ......

مع تمنياتي لكم بالنجاح التام ان شاء الله.

الأستاذ: محمد أحمد.

0964848890

"2023"

(ورقة عمل على قناة التلجرام) ⇓

نكالوريا رياضيات مع الأستاذ:

محمد أحمد.

مكثفة المتتاليات
ونهـاية المتتالية

"المتتاليــات" بكالوريا 2023

تدريب $\frac{1}{18}$ + بند $\frac{2}{18}$ ③ و ④ + مثال ص20 + تدريب 1 ص21

تمارين الوحدة: $\frac{1}{22}$ + $\frac{4}{22}$ طلب ① + $\frac{5}{22}$ + $\frac{10}{24}$ + $\frac{13}{25}$ ① و②

$\frac{15}{25}$ + $\frac{16}{25}$

تمارين هامة وليست توقعات

الأستاذ: محمد أحمد .....

"نهاية المتتالية"

مثال ص117 + مثال ص116 + $\frac{5}{119}$ + $\frac{6}{119}$ + $\frac{7}{119}$ + مثال ص126

$\frac{6}{128}$ + مثال ص130 + $\frac{3}{132}$ + $\frac{10}{138}$ + $\frac{13}{140}$ + $\frac{15}{142}$ + $\frac{16}{142}$ +

$\frac{3}{137}$ + $\frac{21}{144}$ + $\frac{22}{144}$ + $\frac{25+24}{144}$ + $\frac{27}{145}$ هام جداً + $\frac{29}{145}$

+ دراسة النماذج الوزارية
+ الدورات من 2017 حتى 2022
+ الاختبارات

(هذه التمارين ليست توقعات)

الأستاذ: محمد أحمد

بالتوفيق .....

Mohammed Ahmed

Math Teacher

0964848890