الجُمْهوريَّة العَربيَّة السُّوريَّة

وزارة التّربيَة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

الـــرّيـــا ضيّـــا ت

الصّف الأول الثّانوي

حلول تمارين كتاب الجبر والهندسة

العام الدراسي $\frac{\text{٢٠١٥ - ٢٠١٦ م}}{\text{١٤٣٦ - ١٤٣٧ هـ}}$

المؤسسة العامة للطباعة

المركز الوطني لتطوير المناهج التربوية

طُبِع أوّل مرّة للعام الدراسي ٢٠١٥ – ٢٠١٦م

إعـداد

أ.د. عمران قوبا
ميكائيل الحمود
بسام بركات
أيشوع اسحق
عصام علي
غدير اندراوس

المراجعة والتدقيق العلمي

الأستاذ الدكتور عمران قوبا

مُقدّمة

لما كان كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي يعتمد أسلوب ينمي قدرة المتعلم على توظيف المعلومات التي اكتسبها من خلال دراسته وجعله محوراً أساسياً في بناء معارفه. كانت الأنشطة والتمارين والمسائل المقدمة التي تضعه في مواقف تعليمية مختلفة،بعضها لتوظيف مكتسباته العقلية التي اكتسبها وبعضها لدفعه إلى البحث والمعرفة وبعضها الاخر تحثه على تطبيق ما سبق أن تعلمه، أو لتمكينه من التعود على التعوُّدِ على البرهان الرياضياتي.

وفي هذا الإطار نقدم لك أخي المدرس هذا الكتاب والذي يتضمن حلول تمارين كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي وارشادات وطرائق لحل التدريبات والتمارين والمسائل فهو يسعى إلى صيانة مكتسباتك وتزويدك بادوات رياضياتية أضافية بهدف السمو بها إلى مستوى البرهنة الرياضياتية كما يسعى إلى توظيف النتائج والخاصيات من أجل حل المسائل بالشكل الأمثل .

أملنا أن يكون هذا الكتاب مرشداً ومعيناً في تعليم مادة الرياضيات وأن يساعدك على تذليل كل الصعوبات التي تعترضك في تعليمك لهذه المادة.

المُعدّون

المحتوى

1 الأعداد الحقيقية وخواصها

1. مجموعات الأعداد
2. العبارات الجبرية
3. المعادلات الجبرية
4. الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

تدرّب

①أجب بصح أو خطأ، عن المقولات التالية معلّلاً إجابتك:

❶ كلُّ كسر عشري هو عددٌ عادي.

❷مقلوب عددٍ عادي غير معدوم هو عددٌ عادي.

❸كلُّ عددٍ صحيح هو عدد عشري.

❹مقلوب عددٍ عشري غير معدوم هو عددٌ عشري.

الحل

❶صح، لأن كلُّ كسر عشري يكتب على الصورة $\frac{a}{10^n}$ مع a صحيح و n طبيعي فهو يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ مع a صحيح و b طبيعي غير معدوم .

❷ صح ، مقلوب عددٍ عاديّ غير معدومٍ هو عددٌ عادي ، إذْ أنّ العدد العادي $\frac{a}{b}$ مع a و bعددان صحيحان و كلٌ منهما غير معدوم مقلوبه هو العدد العادي $\frac{b}{a}$.

❸ صح، كلُّ عددٍ صحيح هو عدد عشري. فكل عدد صحيح a يكتب على الصورة $\frac{a}{10^0}$.

❹خطأ، مقلوب عددٍ عشريّ غيرُ معدومٍ ليس بالضرورة عدداً عشرياً. العدد $\frac{3}{10} = 0.3$ مثلاً ، هو عدد عشري ، بينما مقلوبه $\frac{1}{0.3} = \frac{10}{3} = 3.3333\cdots$ ليس عشرياً (غير منتهٍ).

②اختزل الكسور التالية واكتبها بأبسط صيغة :

❶ $A = \frac{24 \times 18}{60}$ ❷ $B = \frac{32}{24}$ ❸ $C = \frac{20}{14}$ ❹ $D = \frac{15 \times 25}{50 \times 22}$

❺ $E = \frac{14 \times 18}{56}$ ❻ $F = \frac{91}{143}$ ❼ $G = \frac{22}{16}$ ❽ $H = \frac{12 \times 33}{121}$

الحل

❶ $A = \frac{36}{5}$ ❷ $B = \frac{4}{3}$ ❸ $C = \frac{10}{7}$ ❹ $D = \frac{15}{44}$

❺ $E = \frac{9}{2}$ ❻ $F = \frac{91}{143}$ ❼ $G = \frac{11}{8}$ ❽ $H = \frac{36}{11}$

تدرّب

①حلّل العبارة الآتية إلى جداء عوامل بسيطة:

$$A = (x+1)(2x+3) - (x+1)(-x+2) + 5(x+1)^2$$

الحل

نخرج العامل المشترك بين الحدود الثلاثة وهو $(x+1)$ خارج قوسين

$$A=(x+1)\left[(2x+3)-(-x+2)+5(x+1)\right]$$

نفكُّ الأقواس الصغيرة

$$A=(x+1)\left[2x+3+x-2+5x+5\right]$$

نجمع الحدود المتشابه

$$A=(x+1)\left(8x+6\right)$$

وإذا أخذنا عاملاً مشتركاً من القوس الثاني وجدنا:

$$A=2(x+1)(4x+3)$$

② اختزل في حالة $x\neq-\frac{4}{3}$ العبارة التالية بعد أن تحلِّل البسط $A=\frac{(x+1)^2-(2x+3)^2}{3x+4}$.

نحلل البسط :

البسط فرق مربعي حدين، نحلله إلى جداء مجموع الحدين في فرقهما وفق: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$A=\frac{\left(x+1-2x-3\right)\cdot\left(x+1+2x+3\right)}{3x+4}$$

نجمع الحدود المتشابهة ضمن الأقواس نجد:

$$A=\frac{\left(-x-2\right)\left(3x+4\right)}{3x+4}$$

باختصار $3x+4$ من البسط والمقام. نحصل على الناتج النهائي : $A=-x-2$

③ أثبت أنّ $B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2-5$ يُكتب بالشكل $a\sqrt{3}+b$ حيث a و b عددان صحيحان.

الإثبات:

إذا استعملنا المتطابقة: $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ لحساب $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$ وجدنا:

$$B=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2-5=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}+(\sqrt{6})^2-5$$

بمعرفة $a\geq0$: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ وتطبيقها في الحساب والاستفادة من القاعدة $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x.y}$ نجد أنَّ:

$$B=2+2\cdot\sqrt{2\times6}+6-5=3+2\cdot\sqrt{12}$$

ولما كان $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{4}.\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ وجدنا أن :

$$B=3+2(2\sqrt{3})=3+4\sqrt{3}$$

④ أثبت أنّ $B=\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$ عددٌ طبيعي.

الإثبات:

نفك الأقواس التي أخذنا مربعها باستعمال المتطابقتين $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ ، $\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$ فنحصل على المقدار الآتي:

$$B=\left[(3\sqrt{2})^2-2(3\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\right]+\left[(3\sqrt{2})^2-2(3\sqrt{2})(\sqrt{3})+(\sqrt{3})^2\right]$$

بمعرفة أنَّ $a\geq 0$: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ يكون $\left(3\sqrt{2}\right)^2=9\left(\sqrt{2}\right)^2=18$ وبمعرفة $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$ وتطبيقها

في الحساب نجد:

$$B=\left[18-6\sqrt{6}+3\right]+\left[18+6\sqrt{6}+3\right]=42$$

بالإصلاح ينتج:

$$B=18-6\sqrt{6}+3+18+6\sqrt{6}+3=42$$

⑤أثبت صحة المتطابقات التكعيبية التالية:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

الحل

نثبت صحة كل متطابقة على حدتها، فنبدأ من الطرف الأيسر $L.S.$ للوصول إلى الطرف الأيمن $R.S.$ كما يأتي :

إثبات صحة $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

نبدأ بحساب الطرف الأيسر من المتطابقة فنكتب المقدار المرفوع للدرجة الثالثة على صورة جداء

$$L.S.=(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)$$

نستعمل $\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2$ فنجد:

$$L.S.=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)$$

ننجز عملية الضرب لينتج:

$$\begin{aligned}L.S.&=a\cdot(a^2+2ab+b^2)+b\cdot(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\end{aligned}$$

بجمع الحدود المتشابهة لننتهي إلى إثبات العلاقة المنشودة

$$L.S.=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=R.S.$$

إثبات صحة المتطابقة $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$:

نبدأ بحساب الطرف الأيسر من المتطابقة فنكتب المقدار المرفوع للدرجة الثالثة على صورة جداء

ونستعمل $\left(a-b\right)^2=a^2-2ab+b^2$ فنجد:

$$L.S.=(a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b)$$

ننجز عملية الضرب لينتج:

$$L.S.=a\cdot(a^2-2ab+b^2)-b\cdot(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$$

بجمع الحدود المتشابهة نتوصل إلى العلاقة المنشودة

$$L.S.=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=R.S.$$

إثبات صحة المتطابقة: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$:

نبدأ بحساب الطرف الأيمن من المتطابقة فننجز عملية الضرب ثم نجمع الحدود المتشابهة فنجد أنَّ:

$$R.S.=(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3\ \cancel{-a^2b}\ \cancel{+ab^2}\ \cancel{+a^2b}\ \cancel{-ab^2}+b^3$$
$$=a^3+b^3=L.S.$$

إثبات صحّة المتطابقة $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$:

ننجز عملية الضرب في الطرف الأيمن، و من ثَم نجمع الحدود المتشابهة فنجد أنَّ:

$$R.S.=(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3\ \cancel{+a^2b}\ \cancel{+ab^2}\ \cancel{-a^2b}\ \cancel{-ab^2}-b^3$$
$$=a^3-b^3=L.S.$$

⑥ أثبت أن العدد $a=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ عدد صحيح وعيّنه.

الحل

نلاحظ أن المقدار يحوي مجموع جذرين لذلك نربع المقدار $a=\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$ ، فيكون $a^2=\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$ إذا استعملنا المتطابق التربيعية $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

وجدنا:

$$a^2=\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}\right)^2+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\left(\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$$

نتذكر أنَّ $a\geq 0$: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ و أنَّ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a.b}$ ونطبقه على العبارة السابقة كما يأتي:

$$a^2=11\cancel{+6\sqrt{2}}+2\sqrt{(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})}+11\cancel{-6\sqrt{2}}$$
$$=22+2\sqrt{(11+6\sqrt{2})(11-6\sqrt{2})}$$

ولما كان المقدار تحت الجذر التربيعي جداء مجموع مقدارين بفرقهما استعملنا المتطابقة التربيعية $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ ووجدنا:

$$a^2=22+2\sqrt{(11)^2-(6\sqrt{2})^2}$$

مرة ثانية، بالاستفادة من العلاقة $a\geq 0$: $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ تصبح العبارة السابقة على الصورة الآتية:

$$a^2=22+2\sqrt{121-36\times 2}=22+2\sqrt{49}=22+14=36$$

ولما كان العدد a موجباً مجموع جذرين تربيعين وجدنا أنَّ $a=\sqrt{36}=6$ ، وهو عدد صحيح.

تدرّب

① حلّ المعادلات التالية :

❶ $\left(x-1\right)^2=16$ ❷ $\left(x+5\right)^2=5$

❸ $\left(2-x\right)^2=2$ ❹ $\left(x-1\right)^2-2(x-1)+1=0$

❺ $\left(2-x\right)\left(x-1\right)\left(4x-5\right)=0$ ❻ $3\left(x+1\right)-\left(x+1\right)^2=0$

الحل

لحل المعادلات من ❶ إلى ❸ ننقل كل المقادير إلى جهة واحدة من المساواة نحصل على المعادلة $a^2-b^2=0$ وباستعمال المتطابقة $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ نصل إلى معادلة على الصورة $(a-b)(a+b)=0$ التي تكافئ المعادلتين $a-b=0$ ، $a+b=0$

❶ $\left(x-1\right)^2=16$

بالنقل إلى جهة واحدة من المساواة ينتج

$$\left(x-1\right)^2-4^2=0$$

باستعمال المتطابقة $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ نحصل على المعادلة :

$$\left[\left(x-1\right)-4\right]\cdot\left[\left(x-1\right)+4\right]=0$$

بتبسيط ما داخل كل من القوسين نكتب المعادلة على الصورة:

$$\left(x-5\right)\cdot\left(x+3\right)=0$$

يكون $x-5=0$ أو أن يكون $x+3=0$ ومنه $x=5$ أو $x=-3$

فمجموعة حلول المعادلة هي $\left\{-3,5\right\}$

❷ $\left(x+5\right)^2=5$

بالنقل إلى جهة واحدة من المساواة ينتج أنَّ

$$\left(x+5\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=0$$

باستعمال المتطابقة $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ نحصل على المعادلة :

$$\left[\left(x+5\right)-\sqrt{5}\right]\cdot\left[\left(x+5\right)+\sqrt{5}\right]=0$$

بفك الأقواس الصغيرة نجد أنَّ :

$$\left(x+5-\sqrt{5}\right)\cdot\left(x+5+\sqrt{5}\right)=0$$

يكون $x+5-\sqrt{5}=0$ أو أن يكون $x+5+\sqrt{5}=0$ ومنه $x=-5+\sqrt{5}$ أو $x=-5-\sqrt{5}$

فمجموعة حلول المعادلة هي $\left\{-5-\sqrt{5},-5+\sqrt{5}\right\}$

❸ $(2-x)^2=2$

نحل كما في السؤالين السابقين، بالنقل إلى جهة واحدة ومن ثم بالتحليل واستعمال متطابقة فرق مربعي حدين والإصلاح نجد أنَّ:

$$(x-2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=0$$
$$\left[(x-2)-\sqrt{2}\right]\cdot\left[(x-2)+\sqrt{2}\right]=0$$
$$\left(x-2-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-2+\sqrt{2}\right)=0$$

فمجموعة حلول المعادلة هي $\left\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right\}$.

❹ $(x-1)^2-2(x-1)+1=0$

في هذه المعادلة لدينا في الطرف الأيسر المقدار $(x-1)$ ومربعه $(x-1)^2$ على صورة نستطيع معها استعمال المتطابقة التربيعية $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ كما يأتي:

$$(x-1)^2-2(x-1)+1=\left[(x-1)-1\right]^2$$

بإصلاح ما بين القوسين نحصل على المعادلة : $(x-2)^2=0$ التي تكافئ المعادلة $x-2=0$

فمجموعة حلول المعادلة هي $\{2\}$

ويمكن حل هذا السؤال دون كتابة الطرف الأيسر على صورة متطابقة تربيعية للمقدار $(x-1)$ بل على صورة متطابقة تربيعية للمجهول x ، إذ أننا بفك الأقواس في الطرف الأيسر للمعادلة وجمع الحدود المتشابهة نجد أنَّ : $x^2-4x+4=0$ ومنه $(x-2)^2=0$ ونتابع كالسابق.

❺ $(2-x)(x-1)(4x-5)=0$

لدينا جداء ثلاثة مقادير يساوي الصفر ، فإن أحدها على الأقل مساوٍ للصفر .

إما أن يكون $2-x=0$ أو $x-1=0$ أو $4x-5=0$. وهي معادلات من الدرجة الأولى بمتغير واحد حلولها على التوالي هي : $x=2$ ، $x=1$ ، $x=\frac{5}{4}$.

فمجموعة حلول المعادلة هي $\left\{\frac{5}{4},1,2\right\}$.

❻ $3(x+1)-(x+1)^2=0$

كل الحدود في الطرف الأيسر للمعادلة تحتوي على المقدار $(x+1)$ فهو عامل مشترك، بأخذ هذا العامل المشترك خارج قوسين نجد أنَّ:

$$(x+1)\left[3-(x+1)\right]=0$$

نكتب المقدار بين القوسين الكبيرين دون استعمال أقواس صغيرة فنجد أن $(x+1)(3-x-1)=0$

وبالاختصار $(x+1)(2-x)=0$ إما $2-x=0$ أو $x+1=0$ ومنه $x=2$ أو $x=-1$

فمجموعة حلول المعادلة هي $\{-1,2\}$

② أثبت أنّ $\sqrt{2}+1$ هو حلٌّ للمعادلة $x^2-2x-1=0$ ، هل هناك حلٌّ آخر ؟

الحل

نعوض في الطرف الأيسر للمعادلة كل x بالعدد $\sqrt{2}+1$ لنجد :

$$x^2-2x-1=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-2\left(\sqrt{2}+1\right)-1$$

نفك الأقواس مستعملين المتطابقة التربيعية $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ نحصل على الآتي:

$$2+2\sqrt{2}+1-2\sqrt{2}-2-1=0$$

فالعدد $\sqrt{2}+1$ يحقق المعادلة فهو جذرٌ لها.

نعم يوجد جذر أخر للمعادلة والهدف من طرح هذا السؤال هو إثارة شغف الطلاب حول المعادلة من الدرجة الثانية والتي سيتعلمها الطالب بالتفصيل في الوحدة الثالثة.

③ أثبت أنّ $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ هو حلٌّ للمعادلة $x^2=1+x$ ، هل هناك حلٌّ آخر ؟

الحل إذا عوضنا كل x بالعدد $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ في الطرف الأيسر للمعادلة حصلنا على ما يأتي

$$x^2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{2^2}$$

حيث استعملنا الحقيقة الآتية : "مربع الكسر يساوي مربع البسط على مربع المقام"

ثم استعملنا متطابقة مربع مجموع عددين لحساب مربع البسط ثمَّ قمنا بجمع الأعداد و اختزال الناتج فكانت النتيجة:

$$\begin{aligned} x^2&=\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}\\ &=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\\ &=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

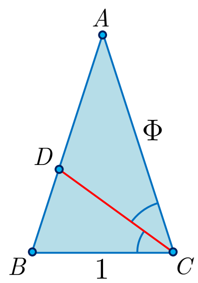
إذا عوضنا كل x بالعدد $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ في الطرف الأيمن للمعادلة حصلنا على ما يأتي

$$1+x=1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

مما سبق نجد أن $x^2 = 1 + x$ من أجل $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فالعدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ جذرٌ للمعادلة.

نعم يوجد جذر أخر للمعادلة

فكّر



يسمّى العدد $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ العدد الذهبي.

في الشكل المجاور، ABC مثلث متساوي الساقين، والمثلثان ABC و CDB متشابهان، و $[CD]$ منصِّف للزاوية $\widehat{BCA}$. تيقّن أنَّ $AC = \Phi$.

الحل

من تشابه المثلثين ABC و CDB، ولما كان المثلث ABC متساوي الساقين، استنتجنا أنَّ المثلث CDB متساوي الساقين وكانت نسبة الساق إلى القاعدة واحدة في كلا المثلثين $\frac{CB}{BD} = \frac{CA}{CB}$ ومنه $\frac{1}{BD} = \frac{CA}{1}$ فإذا افترضنا أنَّ $AC = x$ ، $BD = y$ ، كتبنا المساواة السابقة على الصورة : $x = \frac{1}{y}$

ولما كان $[CD]$ منصِّفاً للزاوية $\widehat{BCA}$ وجدنا التناسب $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$ ، وباستعمال خواص التناسب $\frac{CA+CB}{CB} = \frac{DA+DB}{DB}$ ومنه $\frac{1+x}{1} = \frac{x}{y}$ ، إذن $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{y}$. بالتعويض نحصل على العلاقة $x = \frac{1+x}{x}$ إذن $x^2 = 1 + x$، ولما كان x موجباً كان مساوياً للجذر الموجب للمعادلة ومن السؤال السابق وجدنا أن $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = x$.

في حالة a و b عددين موجبين يكون $a + b$ موجباً، ومن ثَمّ ينتج من المساواة :

$$b^2 - a^2 = \underbrace{(b+a)}_{\text{موجب}}(b-a)$$

أنّ للمقدارين $b^2 - a^2$ و $b - a$ الإشارة نفسها. فإذا كان أحدهما موجباً تماماً كان الآخر موجباً تماماً.

فكّر

هل تبقى النتيجة السابقة صحيحة إذا لم نفترض العددين a و b موجبين ؟

لا ، لا تبقى النتيجة صحيحة ، لأنه في هذه الحالة ، ليس بالضرورة أن يكون $(b+a) > 0$. مثلاً لدينا $2 > -3$ لكن $(2)^2 < (-3)^2$، وكذلك $-1 > -2$ لكن $(-1)^2 < (-2)^2$.

تدرّب

أثبت صحة كلٍ من المتراجحتين: $\sqrt{2} < \frac{17}{12}$ و $\frac{41}{29} < \sqrt{2}$.

نستكشف إشارة الفرق $\frac{17}{12} - \sqrt{2}$ وبناءً عليه نحدد جهة المتراجحة التي تربط بين القيمتين $\sqrt{2}$، $\frac{17}{12}$:

بدايةً نوحِّد المقامات

$$\sqrt{2} - \frac{17}{12} = \frac{12\sqrt{2} - 17}{12}$$

إشارة البسط غير واضحة لذا نضرب البسط والمقام بمقدار يساعدنا في إزالة الجذر من البسط

$$\sqrt{2} - \frac{17}{12} = \frac{\left(12\sqrt{2} - 17\right)\left(12\sqrt{2} + 17\right)}{12\left(12\sqrt{2} + 17\right)}$$

نتابع الحساب في البسط ونستعمل المتطابقة التربيعية "جداء مجموع عددين في فرقهما يساوي فرق مربعي العددين" فنحصل على الآتي:

$$\sqrt{2} - \frac{17}{12} = \frac{\left(12\sqrt{2}\right)^2 - 17^2}{12(12\sqrt{2} + 17)}$$

ولما كان $\left(12\sqrt{2}\right)^2 = 12^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = 144 \times 2 = 288$ وجدنا أنَّ

$$\sqrt{2} - \frac{17}{12} = \frac{\left(12\sqrt{2}\right)^2 - 17^2}{12(12\sqrt{2} + 17)} = \frac{288 - 289}{12(12\sqrt{2} + 17)} = \frac{-1}{12(12\sqrt{2} + 17)} < 0$$

من إشارة الفرق السالبة استنتجنا أن $\sqrt{2} < \frac{17}{12}$.

نثبت صحة المتراجحة الثانية بالطريقة ذاتها فنحسب الفرق بين العددين الذين سنقارن بينهما:

بعد توحيد المقامات و إزالة الجذر من البسط الذي يحتوي على فرق إشارته غير واضحة نحصل على المساواة:

$$\frac{41}{29} - \sqrt{2} = \frac{41 - 29\sqrt{2}}{29} = \frac{41 - 29\sqrt{2}}{29} \times \frac{41 + 29\sqrt{2}}{41 + 29\sqrt{2}}$$

باستعمال المتطابقة التربيعية نجد أن

$$\frac{41}{29} - \sqrt{2} = \frac{41 - 29\sqrt{2}}{29} \times \frac{41 + 29\sqrt{2}}{41 + 29\sqrt{2}} = \frac{\left(41\right)^2 - \left(29\sqrt{2}\right)^2}{29(41 + 29\sqrt{2})}$$

بمتابعة الحساب نحصل على النتيجة الآتية

$$\frac{41}{29} - \sqrt{2} = \frac{1681 - 1682}{29(41 + 29\sqrt{2})} = \frac{-1}{29(41 + 29\sqrt{2})} < 0$$

من إشارة الفرق المدروس نستنتج أنَّ : $\frac{41}{29} < \sqrt{2}$

من المتراجحتين السابقتين نكون قد أثبتنا صحة المتراجحة المزدوجة $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$

توضيح :

تفيدنا المتراجحتان السابقتان في إيجاد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt{2}$ إذ أنّ الآلة الحاسبة تعطينا :

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242097\cdots$$

و $$\frac{17}{12} = 1.4166666666666666666666666666666\cdots$$

و $$\frac{41}{29} = 1.4137931034482758620689655172414\cdots$$

ومنه يتضح صحة المتراجحة الثنائية $\frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{17}{12}$.

وكذلك لدينا الخاصة المهمة التالية:

> ليكن a و b عددين موجبين تماماً. عندئذ يكون $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ إذا وفقط إذا كان $a < b$.

لماذا ؟

العلاقة السابقة هي علاقة تكافؤ وتعني:

إذا كان a و b عددين موجبين تماماً، وكان $a < b$ فإن $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.	إذا كان a و b عددين موجبين تماماً، وكان $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ فإن $a < b$.

التعليل:

إذا كان a و b عددين موجبين تماماً و $a < b$ كان $b - a > 0$ ومنه $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{a \cdot b} > 0$ (حيث $a \cdot b > 0$) أي $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

إذا كان a و b عددين موجبين تماماً و $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ كان $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{a \cdot b} > 0$ أي $b - a > 0$ (حيث $a \cdot b > 0$) أي $a < b$.

تدرّب

① بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة فيما يلي :

♣ إذا كان $x \leq -3$ كان :

❶ $x - 1 < -2$ ❷ $x - 1 \leq -4$ ❸ $x - 1 \leq 4$.

♣ إذا كان $x > 2$ كان :

❶ $-\frac{2}{3}x < -\frac{4}{3}$ ❷ $-\frac{2}{3}x < 2 - \frac{2}{3}$ ❸ $-\frac{2}{3}x > 3$.

♣ إذا كان $0 \leq a \leq 1$ كان :

❶ $a \geq a^2$ ❷ $a^2 < 1$ ❸ $a^2 < a$.

♣ إذا كان $0 < a < 3$ كان :

❶ $\frac{1}{a} < \frac{1}{3}$ ❷ $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{3}$ ❸ $\frac{1}{a} > \frac{1}{3}$.

♣ إذا كان $\frac{1}{2} < a < 2$ كان :

❶ $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} < 2$ ❷ $\frac{1}{4} < \frac{1}{a^2} < 4$ ❸ $\frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{a} < \sqrt{2}$.

♣ إذا كان $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{4}$ و $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ كان :

❶ $\frac{1}{2} < x + y < \frac{5}{4}$ ❷ $\frac{1}{18} < xy < \frac{3}{8}$ ❸ $18 < \frac{1}{xy} < \frac{8}{3}$.

② قارن بين العددين a و b في الحالات التالية :

❶ $a = 5,\ b = 2\sqrt{6}$. ❷ $a = \sqrt{5}\sqrt{7},\ b = 6$.

❸ $a = 8,\ b = 3\sqrt{7}$. ❹ $a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = \frac{7}{10}$.

❺ $a = \frac{9.01}{10^{53}},\ b = \frac{90.11}{10^{54}}$. ❻ $a = 135\times10^{-25},\ b = 2.1\times10^{-23}$.

❶ $a = 5,\ b = 2\sqrt{6}$

لما كان $b > 0$, $a > 0$ و $a^2 = 25,\ b^2 = 24$ (أي أنّ $a^2 > b^2$) كان $a > b$.

❷ $a = \sqrt{5}\sqrt{7},\ b = 6$

لما كان $b > 0$, $a > 0$ و $a^2 = 35,\ b^2 = 36$ (أي أنّ $a^2 < b^2$) كان $a < b$.

❸. $a = 8,\ b = 3\sqrt{7}$

لما كان $b > 0$, $a > 0$ و $a^2 = 64,\ b^2 = 63$ (أي أنّ $a^2 > b^2$) كان $a > b$.

❹ $a = \frac{1}{\sqrt{2}},\ b = \frac{7}{10}$

لما كان $b > 0$, $a > 0$ و $a^2 = \frac{1}{2} = \frac{50}{100}$, $b^2 = \frac{49}{100}$ (أي أنّ $a^2 > b^2$) كان $a > b$.

❺ $a = \frac{9.01}{10^{53}},\ b = \frac{90.11}{10^{54}}$

إذا ضربنا البسط والمقام بالعدد 10 لحساب a وجدنا $a = \frac{9.01}{10^{53}} = \frac{90.1}{10^{54}}$، ومنه $a < b$.

❻ $a = 135\times10^{-25},\ b = 2.1\times10^{-23}$

لدينا $a = 135\times10^{-25} = 1.35\times10^{-23}$، ومنه $a < b$.

③في كلٍّ مما يلي ،احصر المقدار A بين عددين، إذا علمتَ أنّ a تُحقّق الشَّرط المعطى:

❶ $A = a^2 + 3$ ، $\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$.　❷ $A = \frac{1}{a} - 2$ ، $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

❸ $A = \sqrt{a} + 2$ ، $5 < a < 9$.　❹ $A = (a-1)^2 - 3$ ، $1 \le a \le 2$.

❺ $A = \sqrt{a-2}$ ، $6 < a < 11$.　❻ $A = \sqrt{a+1} - 1$ ، $8 < a < 15$.

الحل

❶ $\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$

نربِّع المتراجحة المزدوجة نحصل على المتراجحة $\frac{1}{4} \le a^2 \le \frac{9}{4}$

نضيف 3 لأطراف المتراجحة المزدوجة $\frac{1}{4} + 3 \le a^2 + 3 \le \frac{9}{4} + 3$

نحصل على المتراجحة المطلوبة $\frac{13}{4} \le A \le \frac{21}{4}$

❷ $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

لما كانت أطراف المتراجحة المزدوجة كلها موجبة أخذنا مقاليب الأطراف وغيرنا جهة المتراجحات ووجدنا أنَّ: $2 < \frac{1}{a} < 4$

نطرح 3 من اطراف المتراجحة فنحصل على المطلوب $0 < \frac{1}{a} - 2 < 2$

و المتراجحة المطلوبة هي $0 < A < 2$

❸ $5 < a < 9$

نأخذ الجذر التربيعي لأطراف المتراجحة دون تغيير جهة المتراجحة $\sqrt{5} < \sqrt{a} < 3$

نضيف العدد 2 لأطراف المتراجحة $\sqrt{5} + 2 < \sqrt{a} + 2 < 3 + 2$

ونكون قد حصلنا على المتراجحة المبتغاة $\sqrt{5} + 2 < A < 5$

❹ $1 \le a \le 2$

نطرح العدد 1 من أطراف المتراجحة $0 \le a - 1 \le 1$

ولما كانت أطراف المتراجحة موجبة ربعنا وحصلنا على $0 \le (a-1)^2 \le 1$

بطرح العدد 3 من أطراف المتراجحة $0 - 3 \le (a-1)^2 - 3 \le 1 - 3$

و المتراجحة المنشودة هي $-3 \le A \le -2$

❺ $6 < a < 11$

نطرح 2 من أطراف المتراجحة $4 < a - 2 < 9$

نأخذ الجذر التربيعي $2 < \sqrt{a-2} < 3$

والعلاقة المطلوبة هي $2 < A < 3$

❻ $8 < a < 15$

نضيف العدد 1 إلى أطراف المتراجحة $9 < a+1 < 16$

نأخذ الجذر التربيعي لأطراف المتراجحة $3 < \sqrt{a+1} < 4$

نطرح العدد 1 من أطراف المتراجحة $2 < \sqrt{a+1} - 1 < 3$

والنتيجة المرجوة هي $2 < A < 3$

④ما إشارةُ كلٍّ من العددين $4\sqrt{5} - 9$ و $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3}$ ؟

لدراسة إشارة العدد $4\sqrt{5} - 9$ نضع $a = 4\sqrt{5}\ ,\ b = 9$ ولنحسب $a^2 - b^2$:

$$a^2 - b^2 = 16 \times 5 - 9^2 = 80 - 81 = -1 < 0$$

ولما كان a, b عددان موجبين و $a^2 < b^2$ كان $a < b$ أي $4\sqrt{5} - 9 < 0$

أو بشكلٍ آخر: لكلٍ من العددين $a - b$ ، $a^2 - b^2$ الإشارة ذاتها، ولما كان $a^2 - b^2 < 0$ كان $a - b < 0$، ومنه $4\sqrt{5} - 9 < 0$.

لدراسة إشارة العدد $\dfrac{1}{2\sqrt{2} - 3}$ نضرب البسط والمقام بالعدد $2\sqrt{2} + 3$:

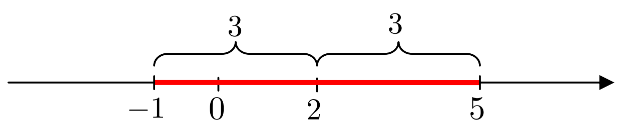
$$\frac{1}{2\sqrt{2} - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{\left(2\sqrt{2} - 3\right) \times \left(2\sqrt{2} + 3\right)} = \frac{2\sqrt{2} + 3}{-1} = -\left(2\sqrt{2} + 3\right) < 0$$

تدرّب

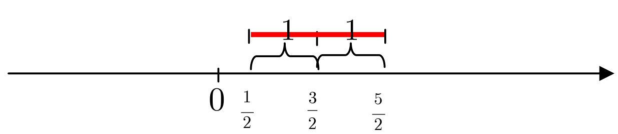
① مثِّل على مستقيم مدرّج مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي تُحقِّق الشرط المعطى في كلٍّ من الحالات التالية :

❶ $|x - 2| < 3$ ❷ $\left|x - \frac{3}{2}\right| < 1$ ❸ $|x| > 0$ ❹ $|x - 1| \geq 2$

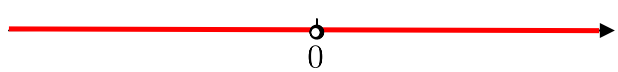
❶ $|x - 2| < 3$



❷ $\left|x - \frac{3}{2}\right| < 1$

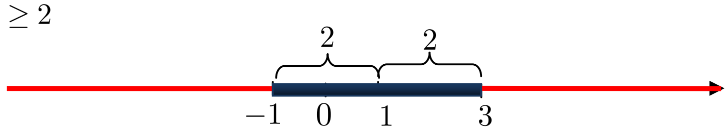


❸ $|x| > 0$



كل المستقيم المدرج ماعدا الصفر

❹ $\left|x-1\right| \geq 2$



②عيّن، في حال وجودها، قيم x التي تُحقّق الشرط المبيَّن في كلٍّ من الحالات التالية :

❶ $\left|x-3\right| = 2$ ❷ $\left|x+5\right| = 10^{-2}$

❸ $\left|x-3\right| = \left|2-x\right|$ ❹ $\left|x-8\right| = \left|x+5\right|$

❺ $\left|x-5\right| = \left|x+5\right|$ ❻ $\left|x+2\right| = 3\left|x-6\right|$

❶ $\left|x-3\right| = 2$

إما $x-3=2$ ومنه $x=5$ أو $x-3=-2$ ومنه $x=1$ بالتالي $x \in \{1,5\}$

*أو بعد x عن 3 يساوي 2 ومنه $x \in \{1,5\}$

❷ $\left|x+5\right| = 10^{-2}$

إما $x+5=10^{-2}$ ومنه $x=10^{-2}-5$ أو $x+5=-10^{-2}$ ومنه $x=-5-10^{-2}$

بالتالي $x=\left\{10^{-2}-5,-10^{-2}-5\right\}$

❸ $\left|x-3\right| = \left|2-x\right|$

بالتربيع نجد أنَّ $|x-3|^2 = |2-x|^2$

بفك المتطابقات التربيعية $x^2-6x+9 = x^2-4x+4$

بالإختصار نجد $2x=5$

ومنه قيمة x هي $x=\frac{5}{2}$

*يمكن إعادة كتابة المعادلة على الصورة $\left|x-3\right| = \left|x-2\right|$

و بعد x عن 3 يساوي بعد x عن 2 ومنه $x=2.5=\frac{5}{2}$

* المساواة $\left|A\right| = \left|B\right|$ تكافئ ($A=B$ أو $A=-B$)

وفي مسألتنا نحصل على المعادلتين: $x-3=2-x$ وحلُّها $x=\frac{5}{2}$

أو $x-3=-\left(2-x\right)$ التي تكافئ المعادلة $-3=-2$ وهي معادلة مستحيلة لا حل لها .

فالحل هو $x=\frac{5}{2}$

بنفس الطريقة نحلُّ المعادلة الأخيرة

❹ $\left|x-8\right| = \left|x+5\right|$

إذا ربعنا طرفي المعادلة واستعملنا الحقيقة الآتية $\left(\left|A\right|\right)^2 = A^2$ حصلنا على المعادلة الآتية:

$\left(x-8\right)^2 = \left(x+5\right)^2$

لو قمنا بفك المتطابقات التربيعية ومن ثم نقل إصلاح المعادلة وجدنا الآتي :

$x^2 - 16x + 64 = x^2 + 10x + 25$

ثم المعادلة من الدرجة الأولى الآتية: $26x = 39$ التي تقبل الحل الآتي: $x = \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$

* أو بعد x عن 8 يساوي بعد x عن -5 ومنه $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$

③ عبِّر باستخدام القيمة المطلقة عن قيم x التي تُحقّق الشرط المبيَّن في كلٍّ من الحالات التالية:

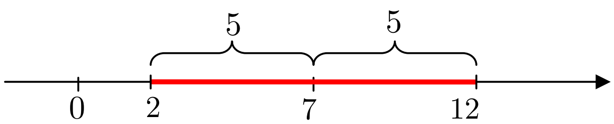
❶ $x \in [2,12]$ ❷ $x \in]3,11[$ ❸ $x \in [-8,-4]$

❹ $x \in \left[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right]$ ❺ $x \in \left]-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right[$ ❻ $x \in]-\infty,-1] \cup [7,+\infty[$

الحل

❶ $x \in [2,12]$

مركز المجال $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$



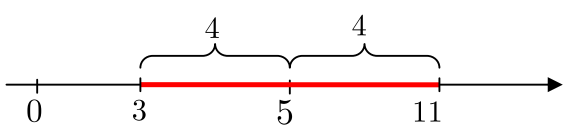
نصف قطر المجال

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{12-2}{2} = 5$$

قيم x التي تحقق العلاقة المعطاة هي قيم x التي تحقق المتراجحة $|x-7| < 4$

❷ $x \in]3,11[$

مركز المجال $c = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$



نصف قطر المجال $r = \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{11-3}{2} = 4$

ومنه كانت العلاقة المطلوبة $|x-7| < 4$

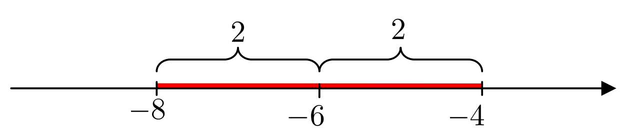
بنفس الطريقة نحدد مركز ونصف قطر كل مجال من المجالات المطلوبة في الأمثلة التالية:

❸ $x \in [-8,-4]$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$|x+6| \leq 2$$

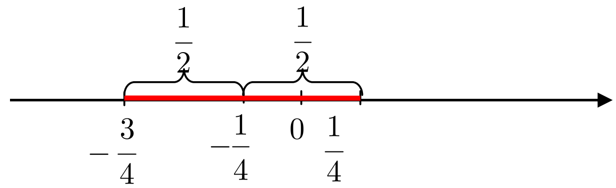


❹ $x \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{-\frac{2}{4}}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left|x + \frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{2}$$

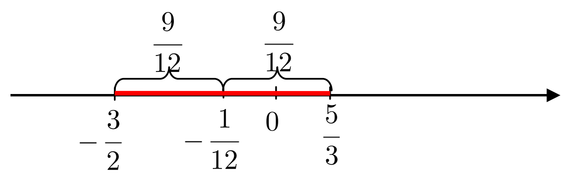


❺ $x \in \left]-\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right[$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{12}$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{19}{12}$$

$$\left|x - \frac{1}{12}\right| < \frac{19}{12}$$

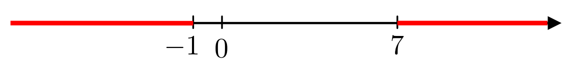


❻ $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[7, +\infty\right[$

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\left|x - 3\right| \geq 4$$



تدرّب

① حلَّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة المعطاة، ومثِّل على مستقيم مدرّج مجموعة حلولها S، واكتبها بصيغة مجال في كلٍّ من الحالات التالية :

❶ $8x + 3 < 10x - 1$ ❷ $-3x + 1 \geq 2x + 4$

❸ $-\frac{1}{2}x - 5 \leq -4$ ❹ $\sqrt{2}x - 1 > 2\sqrt{2} - 1$

الحل

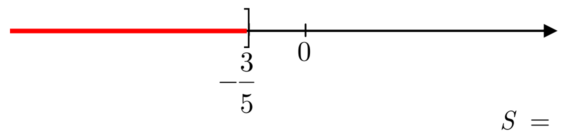
❶ $8x + 3 < 10x - 1$

بنقل المجاهيل والمعاليم كلٌ إلى جهة من المتراجحة $3 + 1 < 10x - 8x$ بالجمع وجدنا أن $4 < 2x$ ومنه $2 < x$.

إذن مجموعة الحل هي: $S = \left]2, +\infty\right[$

❷ $-3x+1 \geq 2x+4$

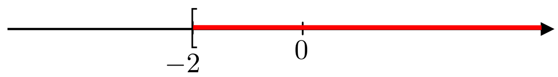
بحل المتراجحة جبرياً $-3 \geq 5x$ ومنه $x \leq -\frac{3}{5}$



إذن مجموعة الحل هي: $S = \left]-\infty\,,-\frac{3}{5}\right]$

❸ $-\frac{1}{2}x-5 \leq -4$

نحل المتراجحة $\frac{1}{2}x \geq -1$ ومنه $x \geq -2$

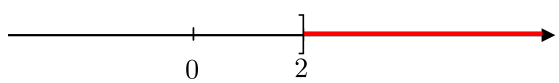


إذن مجموعة الحل هي:

$S = \left[-2\,,+\infty\right[$

❹ $\sqrt{2}x-1 > 2\sqrt{2}-1$

نحل المتراجحة $\sqrt{2}x > 2\sqrt{2}$ ومنه



$x > 2$

مجموعة الحل هي $S = \left]2\,,+\infty\right[$

② ادرس إشارة المقدار $A(x)$ تِبعاً لقيم x في كلٍّ من الحالات التالية :

❶ $A(x) = -3x+5$ ❷ $A(x) = 2x-4$

❸ $A(x) = (x+1)(-2x+6)$ ❹ $A(x) = \frac{-3x+9}{4x-8}$: $\left(x \neq 2\right)$

❺ $A(x) = \left|2x-3\right|$ ❻ $A(x) = -(x-3)^2$

❶ $A(x) = -3x+5$

إن $-3x+5=0$ عندما يكون $x = \frac{5}{3}$ ، وإشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور. من أجل قيم x الأصغر من $\frac{5}{3}$ تكون إشارة التركيب مخالفة لإشارة أمثال x (العدد -3) أي موجبة، ومن أجل قيم x الأكبر من $\frac{5}{3}$ تكون إشارة التركيب مخالفة لإشارة أمثال x أي سالبة.

x		$\frac{5}{3}$	
$-3x+5$	$+$	0	$-$

❷ $A(x)=2x-4$

إن $2x-4=0$ عندما يكون $x=2$ ، وإشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		2	
$2x-4$	$-$	0	$+$

❸ $A(x)=(x+1)(-2x+6)$

إشارة $x+1$. إنّ $x+1=0$ عندما $x=-1$، إذن إشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

إشارة $-2x+6$. إنّ $-2x+6=0$ عندما يكون $x=3$، وإشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		3	
$-2x+6$	$+$	0	$-$

إشارة $A(x)$: ننظِّم جدولاً مشتركاً يضم إشارة كلٍّ من $x+1$ و $-2x+6$. يمكننا في هذا الجدول تعيين حلول المتراجحة

x		-1		3	
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2x+6$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$A(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

ملاحظة : يمكننا دراسة إشارة البسط والمقام و الكسر في جدول واحد.

❹ $x\neq 2\ ;\ A(x)=\dfrac{-3x+9}{4x-8}$

إشارة $-3x+9$: إنّ $-3x+9=0$ عندما $x=3$، إذن إشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		3	
$-3x+9$	$+$	0	$-$

إشارة $4x-8$: إنّ $4x-8=0$ عندما يكون $x=2$، وإشارة هذا المقدار كما في الجدول المجاور.

x		2	
$4x-8$	$-$	0	$+$

إشارة $A(x)$: ننظِّم جدولاً مشتركاً يضم إشارة كلٍّ من $x+1$ و $-2x+6$. ونشير إلى أن الكسر غير معرف عند أصفار المقام بوضع خطين متوازيين كما هو موضحٌ في الجدول المجاور.

x		2		3	
$-3x+9$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$4x-8$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$A(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$

ملاحظة: يمكننا دراسة إشارة كل المقادير في جدولٍ واحدٍ.

❺ $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ A(x)=\left|2x-3\right|\geq 0$

إذ أن القيمة المطلقة موجبة دوماً.

❻ $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ A(x)=-(x-3)^2\leq 0$

باستعمال حقيقة أنَّ مربع عدد حقيقي موجبٌ دوماً.

تمرينات ومسائل

1 العددان $A=\sqrt{2}-\sqrt{6}$ و $B=\sqrt{6}$ هما عددان غير عاديين. بيِّن أيُّ الأعداد التالية عاديّ:

① A^2+B.   ② $5-A^2$.   ③ B^2.

① $A^2+B=\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{6}=2-2\sqrt{12}+6-\sqrt{6}=8\sqrt{6}\left(1-2\sqrt{2}\right)\notin\mathbb{Q}$

② $5-A^2=5-\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2=5-\left(2-2\sqrt{12}+6\right)=-3+2\sqrt{12}\notin\mathbb{Q}$

③ $B^2=\left(\sqrt{6}\right)^2=6\in\mathbb{Q}$

2 توثَّق أنّ العددين التاليين عددان عاديان:

① $\sqrt{1+\frac{3}{5}}\times\sqrt{1-\frac{3}{5}}$.   ② $\sqrt{1+\frac{5}{13}}\times\sqrt{1-\frac{5}{13}}$.

الحل

① إذا استعملنا العلاقة $\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}=\sqrt{A\cdot B}$ وجدنا أن:

$$\sqrt{1+\frac{3}{5}}\times\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)}$$

نستعمل المتطابقة التربيعية $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ ونقوم بالعمليات الحسابية المناسبة نجد:

$$\sqrt{1+\frac{3}{5}}\times\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)}=\sqrt{1^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\frac{4}{5}\in\mathbb{Q}$$

② نستعمل العلاقة $\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}=\sqrt{A\cdot B}$ مرة أخرى لنجد:

$$\sqrt{1+\frac{5}{13}}\times\sqrt{1-\frac{5}{13}}=\sqrt{\left(1+\frac{5}{13}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{13}\right)}$$

ولما كان $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ وجدنا أنَّ:

$$\sqrt{1+\frac{5}{13}}\times\sqrt{1-\frac{5}{13}}=\sqrt{\left(1+\frac{5}{13}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{13}\right)}=\sqrt{1^2-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{169-25}{169}}$$

ومنه $\sqrt{1+\frac{5}{13}}\times\sqrt{1-\frac{5}{13}}=\frac{12}{13}\in\mathbb{Q}$

3 توثَّق أنّ العددين التاليين عددان عاديان :

① $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$.   ② $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$.

الحل

① نستعمل المتطابقة التربيعية الآتية $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ لنجد:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{5}$$

بإجراء العمليات الحسابية المناسبة نحصل على ما يأتي:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2 = \frac{5}{2} - 2 + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

وهو عدد عادي $\frac{9}{10} \in \mathbb{Q}$.

② نستعمل المتطابقة التربيعية الآتية $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ فنجد:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{4}{3} + 2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}$$

نجري العمليات الحسابية المناسبة فنحصل على ما يأتي:

$$\left(\sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{4}{3} + 2 + \frac{3}{4} = \frac{16+24+9}{12} = \frac{49}{12}$$

وهو عدد عادي $\frac{49}{12} \in \mathbb{Q}$.

وبيِّن بوجه عام، أنّه إذا كان a عدداً عاديّاً كان العددان التاليان عددين عاديين:

$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$ و $\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2$.

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 = a - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{a} = a - 2 + \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$$

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2 \; a + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + \frac{1}{a} = a + 2 + \frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$$

4 حلِّل كلاً من العبارات التالية إلى جداء ضرب عوامل بسيطة:

① $A = 9(4x^2 - 4x + 1) + 2(2x - 1)$

② $B = \frac{x^2 - 9}{5} - \frac{x+3}{2}$

③ $C = (x+1)(8x-4) - (2x-1)^2$

④ $D = x^3 + x^2 + x + 1$

الحل

① باستعمال المتطابقة التربيعية $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ نستطيع كتابة المضروب

الثاني على صورة مربع كامل: $4x^2-4x+1=(2x-1)^2$ إذن

$$A=9(4x^2-4x+1)+2(2x-1)=9(2x-1)^2+2(2x-1)$$

و بأخذ المقدار $(2x-1)$ عاملاً مشتركاً نجد:

$$A=9(2x-1)^2+2(2x-1)=(2x-1)\left[9(2x-1)+2\right]$$

بإجراء الحسابات اللازمة بين القوسين نتوصل إلى العبارة: $A=\left(2x-1\right)\left(18x-7\right)$

② نستعمل المتطابقة التربيعية $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ لنكتب البسط في الكسر الأول على صورة جداء $x^2-9=(x-3)(x+3)$ ويكون

$$B=\frac{x^2-9}{5}-\frac{x+3}{2}=\frac{\left(x+3\right)\left(x-3\right)}{5}-\frac{x+3}{2}$$

نأخذ المقدار $\left(x+3\right)$ عاملاً مشتركاً ونكتب المساواة السابقة على الصورة:

$$B=\left(x+3\right)\left[\frac{\left(x-3\right)}{5}-\frac{1}{2}\right]$$

نوحِّد المقامات للمقادير الموجودة بين القوسين ونجري العمليات الحسابية اللازمة فنجد المطلوب:

$$B=\frac{1}{10}\left(x+3\right)\left(2x-11\right)$$

③ نلاحظ أنَّ المقدار $(8x-4)$ يحوي عاملاً مشتركاً هو العدد 4 بأخذه خارج قوسين نجد $(8x-4)=4(2x-1)$ ومنه

$$C=(x+1)(8x-4)-(2x-1)^2=4(x+1)(2x-1)-(2x-1)^2$$

وهذا المقدار يحتوي أيضاً على عامل مشترك هو $(2x-1)$ بإخراجه خارج أقواس يكون

$$C=4(2x-1)\left[(x+1)-(2x-1)\right]$$

بفك الأقواس الصغيرة ضمن القوس الأكبر و إجراء عمليات الجمع نجد

$$C=4(2x-1)(-x+2)$$

④ إن x^2 عامل مشترك للمقدارين x^2 ، x^3 لذا نجزئ المقدار D إلى مجموع تركيبين ونأخذ العامل المشترك لكل تركيب خارج قوسين كما يأتي:

$$D=\left(x^3+x^2\right)+\left(x+1\right)=x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)$$

وهنا نجد أنَّ $\left(x+1\right)$ عامل مشترك للحدين: $D=\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)$

وبهذا يتم المطلوب.

5 حلَّ في $\mathbb{R}$ كلاً من المعادلات الآتية :

① $9x^2-1=3x+1$ ② $x\left(3x-2\right)=4-9x^2$

③ $\dfrac{4}{x-1}=x-1$ ④ $\dfrac{x^2}{x-1}=4$

الحل

① الطرف الأيسر هو متطابقة من الشكل $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$9x^2 - 1 = 3x + 1$

باستعمال المتطابقة والنقل إلى جهة واحدة $(3x-1)(3x+1) - (3x+1) = 0$

بإخراج عامل مشترك $3x+1$ نجد $(3x+1)[(3x-1)-1] = 0$

بإصلاح المقدار بين القوسين يصبح على الصورة $(3x+1)(3x-2) = 0$

ومنه إما $(3x-2) = 0$ أو $(3x+1) = 0$ وبالتالي إما $x = \frac{2}{3}$ أو $x = -\frac{1}{3}$ ومجموعة الحلول هي $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$

② الطرف الأيمن هو متطابقة من الشكل $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$x(3x-2) = 4 - 9x^2$

باستعمال المتطابقة التربيعية نجد أنَّ $x(3x-2) = (2-3x)(2+3x)$

ننقل إلى جهة واحدة من المساواة نحصل على المعادلة $x(3x-2) - (2-3x)(2+3x) = 0$

نستعمل المساواة $-(2-3x) = +(3x-2)$ للحصول على عامل مشترك ثم نأخذه خارج قوسين:

$x(3x-2) + (3x-2)(2+3x) = 0$

$(3x-2)[x + (2+3x)] = 0$

بإصلاح المقدار بين القوسين تصبح المعادلة على الصورة $(3x-2)(4x+2) = 0$

وبالتالي $x = \frac{2}{3}$ أو $x = -\frac{1}{2}$ ومجموعة الحلول هي $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

③ $\frac{4}{x-1} = x - 1$

حتى تكون المعادلة معرفة يجب ألا ينعدم المقام أي أن يكون $x \neq 1$. نضرب طرفي المعادلة بالمقدار $x-1$ الذي لا يساوي الصفر، فنحصل على المعادلة $4 = (x-1)^2$

وبنقل المقادير كلها إلى أحد طرفي المعادلة نجد $(x-1)^2 - 4 = 0$

نستعمل المتطابقة التربيعية المناسبة لنحصل على $[(x-1)-2][(x-1)+2] = 0$

بإتمام عمليات الجمع فيها تصبح المعادلة على الصورة $(x-3)(x+1) = 0$

ومنه إما $(x+1) = 0$ أو $(x-3) = 0$ وبالتالي $x = -1$ أو $x = 3$ ومجموعة الحلول هي $\{-1, 3\}$.

④ $\frac{x^2}{x-1} = 4$

حتى تكون المعادلة معرفة يجب ألا ينعدم المقام، أي يجب أن يكون $x \neq 1$. نضرب طرفي

المعادلة بالمقدار غير المعدوم $x-1$ فنحصل على المعادلة $x^2=4\left(x-1\right)$

نجري عمليات الضرب و نصلح المعادلة لتصبح على الصورة $x^2-4x+4=0$

الطرف الأيسر من المساواة مربع كامل نكتبه $(x-2)^2=0$

ومنه $x-2=0$ أي $x=2$ ومجموعة الحلول هي $\{2\}$.

6 اكتب المقدار التالي بأبسط صيغة :

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

الحل

نضرب البسط والمقام في كل كسر بمرافق المقام للتخلص من الجذور في المقامات

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}+\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

نفك المتطابقات التربيعية في البسط

$$=\frac{\left(5+2\sqrt{5}\sqrt{3}+3\right)+\left(5-2\sqrt{5}\sqrt{3}+3\right)}{5-3}$$

نجري عمليات الجمع والطرح المناسبة لنحصل على النتيجة الاتية

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{8+8}{2}=8$$

7 ليكن x عدداً حقيقياً يُحقّق $x+\frac{1}{x}=5$ ، احسب بأبسط صيغة المقدار $x^3+\frac{1}{x^3}$

الحل

انطلاقاً من العلاقة المعطاة $x+\frac{1}{x}=5$ و بتكعيب الطرفين نجد $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=5^3$

نستعمل المتطابقة التكعيبية $\left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ كما يلي:

$$x^3+3x^2\frac{1}{x}+3x\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=125$$

ومنه $x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=125$

إذا أخذنا العدد 3 عاملاً مشتركاً وجدنا $x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=125$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=125-3(5)=110$$

8 إثبات منطابقات

① أثبت أنّه، أياً كان العدد الحقيقي x كان :

$$3x^4-4x^3+1=(x-1)^2(2x^2+(x+1)^2)$$

② أثبت أنّه، أيّاً كانت الأعداد الحقيقيّة a,b,c,d كان :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

الحل

① لنضع $B=3x^4-4x^3+1$ و $A=(x-1)^2(2x^2+(x+1)^2)$. ننشر المقدار A ننشر كلاً من المتطابقتين $(x+1)^2$ و $(x-1)^2$ ثم نصلح

$$\begin{aligned}A&=(x-1)^2(2x^2+(x+1)^2)\\&=(x^2-2x+1)(2x^2+x^2+2x+1)\\&=(x^2-2x+1)(3x^2+2x+1)\\&=3x^4+2x^3+x^2-6x^3-4x^2-2x+3x^2+2x+1\\&=3x^4-4x^3+1=B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A&=(x-1)^2(2x^2+(x+1)^2)\\&=(x^2-2x+1)(2x^2+x^2+2x+1)\\&=(x^2-2x+1)(3x^2+2x+1)\end{aligned}$$

نجري عملية الضرب لينتج لدينا:

$$A=3x^4+2x^3+x^2-6x^3-4x^2-2x+3x^2+2x+1$$

وبعد جمع الحدود المتشابهة نصل إلى العلاقة: $A=3x^4-4x^3+1$

ومنه نجد أن $A=B$ وهو المطلوب إثباته

② لإثبات صحة العلاقة $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

نضع : $A=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ و $B=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

نكتب المقدار A ونفك المتطابقات التربيعية فيصبح على الصورة:

$$\begin{aligned}A&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=a^2c^2\cancel{+2acbd}+b^2d^2+a^2d^2\cancel{-2adbc}+b^2c^2\\&=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2\end{aligned}$$

نعيد كتابة المقدار B ونجري عمليات الضرب لنجد أنَّ

$$B=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$$

مما سبق وبالمقارنة نجد أنَّ $A=B$ وهي العلاقة المطلوب إثباتها.

9 إختيار الصيغة المناسبة

نعرّف، أيّاً كانت x من $\mathbb{R}$، المقدار ❶ : $E(x) = (x+3)^2 - 25$.

① ◆أثبت أنّ ❷ : $E(x) = x^2 + 6x - 16$.

◆أثبت أنّ ❸ : $E(x) = (x-2)(x+8)$.

②اختر من بين الصيغ الثلاث السابقة الصيغة المناسبة أكثر من غيرها لحل المعادلات الآتية

: (a) $E(x) = 0$. (b) $E(x) = 11$. (c) $E(x) = -16$.

الحل

◆ ①ننشر المقدار $E(x) = (x+3)^2 - 25$ نجد:

$$\begin{aligned} E(x) &= (x+3)^2 - 25 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 25 \\ &= x^2 + 6x - 16 \end{aligned}$$

◆ننشر المقدار $(x-2)(x+8)$ نجد:

$$\begin{aligned} (x-2)(x+8) &= x^2 + 8x - 2x - 16 \\ &= x^2 + 6x - 16 = E(x) \end{aligned}$$

②

(a) الصيغة المُناسبة لحل المعادلة $E(x) = 0$ هي ❸ $E(x) = (x-2)(x+8)$ لأننا في هذه الحالة نحصل على جداء عوامل يساوي الصفر فالحل

$$(x-2)(x+8) = 0$$

إما $(x+8) = 0$ أو $(x-2) = 0$ وبالتالي إمّا $x = -8$ أو $x = 2$ ومجموعة الحلول هي $\{-8, 2\}$

(b) الصيغة المُناسبة لحل المعادلة $E(x) = 11$ هي ❶ $E(x) = (x+3)^2 - 25$ لأننا في هذه الحالة نحصل على فرق مربعين حدين

$$\begin{aligned} & E(x) = (x+3)^2 - 25 = 11 \\ & (x+3)^2 - 36 = 0 \\ & (x+3)^2 - 6^2 = 0 \\ & \left[(x+3) - 6\right]\left[(x+3) + 6\right] = 0 \\ & (x-3)(x+9) = 0 \end{aligned}$$

إما $x = 3$ أو $x = -9$ ومجموعة الحلول هي $\{-9, 3\}$

(c) الصيغة المُناسبة لحل المعادلة $E(x) = -16$ هي ❷ $E(x) = x^2 + 6x - 16$ لأننا في هذه الحالة نستطيع اختصار العدد -16 من الطرفين ويمكن تحويل المعادلة إلى جداء عوامل يساوي الصفر

$E(x)=x^2+6x-16=-16$ ومنه $x^2+6x=0$

بأخذ العامل المشترك خارج قوسين $x(x+6)=0$

إما $x=0$ أو $x=-6$ ومجموعة الحلول هي $\{-6,0\}$

10 نختار، كيفياً أربعة أعداد طبيعيّة متتالية. نضرب أكبرها بأصغرها ونطرح من الناتج جداءَ ضرب العددين الآخرَيْن، فنحصل على العدد -2 . أثبت صحّة هذه الخاصّة.

الحل

نرمز للأعداد بالرموز $a, a+1, a+2, a+3$.

علينا إثبات أنَّ $a(a+3)-(a+1)(a+2)=-2$

بنشر الطرف الأيسر نجد

$$\begin{aligned} a(a+3)-(a+1)(a+2) &= a^2+3a-(a^2+3a+2) \\ &= a^2+3a-a^2-3a-2=-2 \end{aligned}$$

فالخاصية صحيحة.

11 المتراجحات وإشارة جداء

حُلَّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $(\mathcal{E}): \quad (2x+3)^2 \leq (x-1)^2$

الحل

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^2-(2x+3)^2=\left[(x-1)-(2x+3)\right]\left[(x-1)+(2x+3)\right] \\ &= (-x-4)(3x+2) \end{aligned}$$

المتراجحة المعطاة تكافئ المتراجحة $P(x)\geq 0$

ندرس إشارة $P(x)$.

ننظِّم جدولاً مشتركاً يضم إشارة كلٍّ من $-x-4$ و $3x+2$.

يمكننا تعيين حلول المتراجحة من خلال ملاحظة السطر الأخير في الجدول

x		-4		$-\frac{2}{3}$	
$-x-4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$3x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

مجموعة الحل $\left[-4,-\frac{2}{3}\right]$

12 حلَّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\frac{4x+1}{6-x}\leq -1$.

الحل

نحل المسألة في حالة $x\neq 6$ ، يمكننا كتابة المتراجحة المدروسة

بالشكل المُكافئ $\frac{4x+1}{6-x}-1\leq 0$ أي

x		$\frac{-7}{3}$		6	
$-x-4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$6-x$	$-$	$-$	$-$	$\Vert$	$+$
$\frac{-x-4}{6-x}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

$\frac{4x+1+6-x}{6-x} \leq 0$ ، وبتوحيد المقامات و الاختزال نجد أنّ: $\frac{3x+7}{6-x} \leq 0$

ننشئ جدولاً لدراسة إشارة الكسر

يمكننا في هذا الجدول تعيين حلول المتراجحة من خلال ملاحظة السطر الأخير في الجدول.

والمتراجحة محققة عندما $x \in \left]-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left]6, +\infty\right[$

13 لتكن a و b و c و d أربعة أعداد حقيقيّة تحقّق $b \neq 0$ و $d \neq 0$ و $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

① نفترض أنّ $b+d \neq 0$ أثبت أنّ $\frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b}$.

② نفترض أنّ $d-b \neq 0$ أثبت أنّ $\frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b}$.

الحل

من الفرض لدينا $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ أي $ad - bc = 0$

①

$$\frac{a}{b} - \frac{c+a}{d+b} = \frac{ad+ab-bc-ab}{b\left(d+b\right)} = \frac{ad-bc}{b\left(d+b\right)} = 0$$

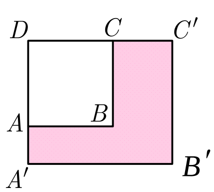
ومنه $\frac{a}{b} = \frac{c+a}{d+b}$

②

$$\frac{a}{b} - \frac{c-a}{d-b} = \frac{ad-ab-bc+ab}{b\left(d-b\right)} = \frac{ad-bc}{b\left(d-b\right)}$$

ومنه $\frac{a}{b} = \frac{c-a}{d-b}$

14 نفترض أنّ $ABCD$ مربّع و $AB'C'D'$ مستطيل. ونفترض أنّ مساحة الجزء الملوّن تساوي 183 متراً مربّعاً. فإذا علمتَ أنّ AA' يساوي 5 أمتار وأنّ CC' يساوي 8 أمتار، احسب AB.



الحل

نفترض أنّ $AB = x$ فيكون $DC' = x+8$ ، $DA' = x+5$

مساحة المربع $ABCD$ تساوي مربع طول ضلعه x^2

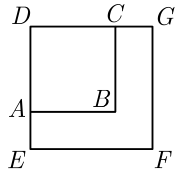
المساحة الكاملة للشكل (مساحة مستطيل) تساوي $(x+8)\times(x+5)$

مساحة الجزء الملون تساوي مساحة الشكل الكامل مطروح منها مساحة $ABCD$ أي

$$\left(x+8\right)\left(x+5\right) - x^2 = 183$$

بالضرب نجد أنَّ: $x^2+13x+40-x^2=183$ ومنه $13x=143$ وينتج أنَّ $x=11$.

15 نفترض أنّ $ABCD$ مربّع. ونفترض أنّ مساحة المربّع $EFGD$ تساوي أربّع مرات مساحة المربّع $ABCD$. فإذا علمتَ أنّ AE يساوي 5 أمتار، احسب AB .



الحل

نفترض $AB=x$ فيكون $DG=x+5$ و $DE=x+5$

لكن مساحة المربع $EFGD$ تساوي أربّع مرات مساحة المربّع $ABCD$ أي $(x+5)^2=4x^2$

بالنقل إلى جهة واحدة من المساواة $(x+5)^2-4x^2=0$

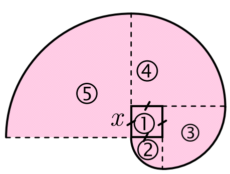
نستعمل المطابقة التربيعية (فرق مربعي حدين يساوي جداء مجموعهما بفرقهما) $[(x+5)+2x][(x+5)-2x]=0$

بعد إجراء عمليات الجمع بين الأقواس نحصل على المعادلة الاتية

$$(3x+5)(-x+5)=0$$

إما $x=5$ وهو حل مقبول أو $x=\frac{-5}{3}$ وهو حلٌ مرفوضٌ لأنَّ x مقدار موجب فهي تعبّر عن طول هندسي.

16 يتألّف الشكل المجاور من مربّع طول ضلعه x وأربعة أرباع دوائر تقع مراكزها على رؤوس المربّع. عبِّر بدلالة x عن مساحة السطح الملوّن. وأعطِ قيمة تقريبيّة لهذه المساحة عندما $x=2$.



الحل

الجزء ① مربع طول ضلعه x و مساحة الجزء ① تساوي x^2

الجزء ② ربع دائرة نصف قطرها x و مساحة الجزء ② تساوي $\frac{\pi}{4}x^2$

الجزء ③ ربع دائرة نصف قطرها $2x$ و مساحة الجزء ③ تساوي πx^2

الجزء ④ ربع دائرة نصف قطرها $3x$ و مساحة الجزء ④ تساوي $\frac{9\pi}{4}x^2$

الجزء ⑤ ربع دائرة نصف قطرها $4x$ و مساحة الجزء ⑤ تساوي $4x^2$

مساحة السطح الملون S هي مجموع المساحات السابقة أي أنَّ:

$$S(x)=x^2+\frac{\pi}{4}x^2+\pi x^2+\frac{9\pi}{4}x^2+4\pi x^2$$

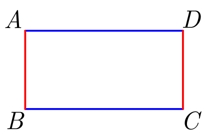
نأخذ x^2 عاملاً مشتركاً و نوحّد المقامات داخل الأقواس

$$S\left(x\right)=x^2\left(1+\frac{\pi}{4}+\pi+\frac{9\pi}{4}+4\pi\right)=x^2\left(\frac{4+30\pi}{4}\right)$$

عندما $x=2$ نعوّض لنجد أنَّ:

$$S\left(2\right)=4\left(\frac{4+30\pi}{4}\right)=4+30\pi\approx 4+30\left(3\cdot 14\right)=4+94.2=98.2$$

17 انطلاقاً من صفيحة مستطيلة $ABCD$، عرضها $AB=\ell$ وطولها $AD=2\ell$، نصطنع سطحين أسطوانيين بطريقتين:



① نجعل الضلع $[BC]$ ينطبق على $[AD]$.

② نجعل الضلع $[AB]$ ينطبق على $[DC]$.

نرمز بالرمز V_1 إلى حجم الأسطوانة التي نحصل عليها بالطريقة الأولى، وبالرمز V_2 إلى حجم الأسطوانة التي نحصل عليها بالطريقة الثانية. اِحسب النسبة $\frac{V_1}{V_2}$.

الحل

في الطريقة الأول محيط القاعدة يساوي $P_1=\pi r_1=\ell$ ومنه $r_1=\frac{\ell}{\pi}$، وارتفاع الأسطوانة $H_1=2\ell$.

حجم الأسطوانة الأولى يساوي $V_1=\pi r_1^2 H_1=\pi\frac{\ell^2}{\pi^2}2\ell=\frac{2\ell^3}{\pi}$

في الطريقة الثانية محيط القاعدة يساوي $P_2=\pi r_2=2\ell$ ومنه $r_1=\frac{2\ell}{\pi}$، وارتفاع الأسطوانة $H_1=\ell$.

حجم الأسطوانة الثانية يساوي $V_1=\pi r_2^2 H_2=\pi\frac{4\ell^2}{\pi^2}\ell=\frac{4\ell^3}{\pi}$. والنسبة المطلوب حسابها :

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{2\ell^3}{\pi}}{\frac{4\ell^3}{\pi}}=\frac{1}{2}$$

18 مُقارنة عددين.

① a و b عددان موجبان تماماً. قارن بين العددين

$$B=\frac{2ab}{a+b} \quad \text{و} \quad A=\frac{a+b}{2}$$

الحل

① نحسب الفرق بين العددين A و B ونحدد إشارته

$$A-B=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{\left(a+b\right)^{2}-4ab}{2\left(a+b\right)}=\frac{a^{2}+2ab^{2}+b-4ab}{2\left(a+b\right)}$$

$$=\frac{a^{2}-2ab+b^{2}}{2\left(a+b\right)}=\frac{\left(a-b\right)^{2}}{2\left(a+b\right)}\geq 0$$

ومنه $A\geq B$ إذن $\frac{a+b}{2}\geq\frac{2ab}{a+b}$.

(نسمّي A الوسط الحسابي للعددين a وb كما نسمي B الوسط التوافقي لهما وأثبتنا أنَّ الوسط الحسابي أكبر من الوسط التوافقي $\frac{a+b}{2}\geq\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$)

② a و b عددان موجبان. قارن بين العددين $A=a+b$ و $B=2\sqrt{ab}$

نظراً لصعوبة المقارنة بين هذين العددين نقارن بين مربعيهما، ونستفيد من نتيجة مقارنة المربعين ومن كون العددين موجبين لإتمام المطلوب.

$A^{2}=\left(a+b\right)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$ ، $B^{2}=\left(2\sqrt{ab}\right)^{2}=4ab$ أما الفرق بينهما

$$A^{2}-B^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}-4ab=a^{2}-2ab+b^{2}=\left(a-b\right)^{2}\geq 0$$

ولمّا كان A و B عددان موجبان و $A^{2}-B^{2}\geq 0$ كان $A\geq B$.

(نسمّي المقدار $\sqrt{ab}$ الوسط الهندسي للعددين a و b , و من المتراجحة السابقة نجد أنَّ $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ ونكون قد أثبتنا أنَّ الوسط الحسابي أكبر من الوسط الهندسي أو يساويه)

19 ليكن a و b عددين موجبين تماماً. أثبت أنّ $\frac{1}{a+b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

الحل

نسمي $B=\frac{1}{a+b}$ ، $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ و لنثبت أنّ $A-B>0$

$$A-B=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}$$

إذا وحدنا المقامات وجدنا:

$$A-B=\frac{b\left(a+b\right)}{ab\left(a+b\right)}+\frac{a\left(a+b\right)}{ab\left(a+b\right)}-\frac{ab}{ab\left(a+b\right)}=\frac{b\left(a+b\right)+a\left(a+b\right)-ab}{ab\left(a+b\right)}$$

بإصلاح المقدار الناتج

$$A-B=\frac{ab+b^{2}+a^{2}+ab-ab}{ab\left(a+b\right)}=\frac{b^{2}+a^{2}+ab}{ab\left(a+b\right)}>0$$

ومنه $B<A$ أي $\frac{1}{a+b}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

20 ليكن a و b عددين موجبين تماماً. أثبت أنّ $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

الحل

نسمي $A = \sqrt{a+b}$ و $B = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ و لنوجد المقدار $B^2 - A^2$ مستعملين المتطابقات التربيعية:

$$B^2 - A^2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - a - b = 2\sqrt{ab} > 0$$

إذن $B^2 > A^2$ و لمّا كان A و B عددان موجبان و $B^2 > A^2$ كان $B > A$

أي أنَّ: $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

21 ليكن a و b عددين حقيقيَّن يُحقّقان $0 < b \le a$. قارن بين الأعداد :

$$\frac{a}{b+1}, \frac{a+1}{b+1}, \frac{a}{b}$$

الحل

<u>أولاً</u>: نقارن بين $\frac{a}{b}$ و $\frac{a}{b+1}$ بحساب الفرق بينهما ومعرفة إشارته كما يأتي:

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b+1} = \frac{a(b+1) - ab}{b \cdot (b+1)} = \frac{a}{b \cdot (b+1)} > 0$$

لأن البسط والمقام موجبان فرضاً. ومنه نجد $\frac{a}{b} > \frac{a}{b+1}$.

<u>ثانياً</u>: نقارن بين $\frac{a+1}{b+1}$ و $\frac{a}{b+1}$ باتباع الأسلوب السابق:

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b+1} = \frac{a+1-a}{b+1} = \frac{1}{b+1} > 0$$

لأن المقام موجبٌ فرضاً. ومنه نجد $\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b+1}$.

<u>ثالثاً</u>: نقارن بين $\frac{a+1}{b+1}$ و $\frac{a}{b}$ باتباع الأسلوب ذاته:

$$\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1) - (a+1)b}{b \cdot (b+1)} = \frac{a-b}{b \cdot (b+1)} > 0$$

لأن البسط والمقام موجبان فرضاً. ومنه نجد $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1}$

إذن: $\frac{a}{b} > \frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b+1}$

تنويه:

يمكننا تعميم هذه النتيجة كما يلي :

$\frac{a+k}{b+k} < \frac{a}{b}$ من أجل أيَّ ثلاثة أعداد موجبة تماماً $0 < b \le a$ ، $k > 0$.

22 احصر المقدار A بين عددين، إذا علمتَ أنّ a تُحقّق الشرط المبيَّن في كلٍّ مما يلي:

❶ $A = a^2 + 3, \quad \frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$.

❷ $A = \frac{1}{a} - 2, \quad \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$.

❸ $A = \sqrt{a} + 2, \quad 5 < a < 9$.

❹ $A = (a-1)^2 - 3, \quad 1 \le a \le 2$.

❺ $A = \sqrt{a-2}, \quad 6 < a < 11$.

❻ $A = \sqrt{a+1} - 1, \quad 8 < a < 15$.

الحل

❶ ننطلق من المتراجحة $\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$ ذات الأطراف الثلاثة الموجبة، نربّع أطراف المتراجحة دون تغيير جهتها المتراجحة (للحصول على a^2 و إيجاد A) كما يأتي: $\frac{1}{4} \le a^2 \le \frac{9}{4}$ ثم نضيف العدد 3 لأطراف المتراجحة نجد أنّ $\frac{5}{4} \le a^2 + 1 \le \frac{13}{4}$ ومنه $\frac{5}{4} \le A \le \frac{13}{4}$.

❷ نعالج المتراجحة المزدوجة المعطاة $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$ التي أطرافها موجبة فنأخذ مقلوب أطراف المتراجحة ونغير جهة المتراجحة لتصبح على الصورة $2 < \frac{1}{a} < 4$ وبطرح العدد 2 من أطراف المتراجحة نجد أنّ $0 < \frac{1}{a} - 2 < 2$ بإبدال A بما تساويه نحصل على المتراجحة $0 < A < 2$.

❸ من المتراجحة $5 < a < 9$ و لمّا كانت أطراف المتراجحة كلها موجبة أخذنا جذور الأطراف الثلاثة دون تغيير جهة المتراجحة (للحصول على $\sqrt{a}$ و إيجاد A) كما يأتي $\sqrt{5} \le \sqrt{a} \le 3$ ثمَّ نضيف العدد 2 لأطراف المتراجحة نجد أنَّ $\sqrt{5} + 2 \le \sqrt{a} + 2 \le 5$ ومنه $\sqrt{5} + 2 \le A \le 5$.

❹ لمّا كان $1 \le a \le 2$ وجدنا بطرح العدد 1 من أطراف المتراجحة أنَّ $0 \le a - 1 \le 1$ بتربيع أطراف المتراجحة $0 \le (a-1)^2 \le 1$ و بطرح العدد 3 من أطراف المتراجحة وجدنا أنَّ $-3 \le (a-1)^2 - 3 \le -2$ أي أنَّ $-3 \le A \le -2$.

❺ نطرح العدد 2 من أطراف المتراجحة المعطاة فتكتب كما يأتي $4 < a - 2 < 9$ ولما كانت أطراف المتراجحة المزدوجة كلها موجبة أخذنا جذرها التربيعي محافظين على جهة الرجحان $2 < \sqrt{a-2} < 3$.

❻ إذا أضفنا العدد 1 إلى أطراف المتراجحة $8 < a < 15$ وأخذنا الجذر التربيعي لأطرافها (الموجبة) وجدنا أنَّ $3 < \sqrt{a+1} < 4$. وبطرح العدد 1 إلى أطراف المتراجحة نحصل على المتراجحة $2 < A < 3$.

23 في كلٍّ من الحالات الآتية، حلَّ المتراجحة المعطاة، ثُمَّ مثِّل مجموعة الحلول على مستقيم مدرّج، وعبِّر عنها بدلالة مجالات:

❷ $\frac{1}{6}-\frac{x}{3}\geq\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$.   ❶ $3-2x\leq 5x-1$.

❹ $5+\frac{2}{3}x>\frac{1}{6}x-1$.   ❸ $\frac{3+x}{4}\leq\frac{x-1}{2}$.

❻ $(7-3x)(x+4)\geq 0$.   ❺ $(2x+1)(-5x+2)<0$.

❽ $(2x+3)^2-4\leq 0$.   ❼ $x^2+3x>0$.

❿ $(x-2)^2-(2x+3)^2\geq 0$.   ❾ $(5x-7)^2+3(7-5x)\leq 0$.

الحل

❶ $3-2x\leq 5x-1$

المتراجحة $3-2x\leq 5x-1$ من الدرجة الأولى، نغير موضع الحدود الموجودة ليكتب على الصيغة الاتية: $3+1\leq 5x+2x$ ومنه $7x\geq 4$ بالقسمة على العدد 7 نجد أن $x\geq\frac{4}{7}$.

مجموعة الحلول هي $\left[\frac{4}{7},+\infty\right[$

❷ $\frac{1}{6}-\frac{x}{3}\geq\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$

$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

$x\geq 2$

مجموعة الحلول هي $[2,+\infty[$

❸ $\frac{3+x}{4}\leq\frac{x-1}{2}$

$3+x\leq 2x-2$

$x\geq 5$

وحلول المتراجحة هي $[5,+\infty[$

❹ $5+\frac{2}{3}x>\frac{1}{6}x-1$

$\frac{4}{6}x-\frac{1}{6}x>-1-5$

$x>-12$

وحلول المتراجحة هي $]-12,+\infty[$

❺ $(2x+1)(-5x+2)<0$

x		$\frac{-1}{2}$		$\frac{2}{5}$	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$-5x+2$	$+$		$+$	0	$-$
$(2x+1)(-5x+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

وحلول المتراجحة هي $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{2}{5},+\infty\right[$

6 $\left(7-3x\right)\left(x+4\right)\geq 0$

x		-4		$\frac{3}{7}$	
$7x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$
$\left(7-3x\right)\left(x+4\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

وحلول المتراجحة هي $\left]-\infty,-4\right]\cup\left[\frac{3}{7},+\infty\right[$

7 $x^2+3x>0$

يمكن كتابة المتراجحة بالصيغة $x\left(x+3\right)>0$

x		-3		0	
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
x^2+3x	$+$	0	$-$	0	$+$

وحلول المتراجحة هي $\left]-\infty,-3\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

8 $\left(2x+3\right)^2-4\leq 0$

يمكن كتابة المتراجحة بالشكل

$$\left(\left(2x+3\right)-2\right)\left(\left(2x+3\right)+2\right)\leq 0$$

أي $\left(2x+1\right)\left(2x+5\right)\leq 0$

وحلول المتراجحة هي $\left[-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right]$

x		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{1}{2}$	
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	0		$+$	
$\left(2x+3\right)^2-4$	$+$	0	$-$	0	$+$

9 $\left(5x-7\right)^2+3\left(7-5x\right)\leq 0$

يمكن كتابة المتراجحة على الشكل

$$\left(7-5x\right)^2+3\left(7-5x\right)\leq 0$$

أي $(7-5x)[(7-5x)+3]\leq 0$

$$\left(7-5x\right)\left(10-5x\right)\leq 0$$

وحلول المتراجحة $\left[\frac{7}{5},2\right]$

x		$\frac{7}{5}$		2	
$7-5x$	$+$	0	$-$		$-$
$10-5x$	$+$		$+$	0	$-$
$\left(5x-7\right)^2+3\left(7-5x\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

10 $\left(x-2\right)^2-\left(2x+3\right)^2\geq 0$

يمكن كتابة المتراجحة بالشكل

$$\left[\left(x-2\right)-\left(2x+3\right)\right]\left[\left(x-2\right)+\left(2x+3\right)\right]\geq 0$$

أي $\left(-x-5\right)\left(3x+1\right)\geq 0$

x		-5		$-\frac{1}{3}$	
$-x-5$	$+$	0		$-$	
$3x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$\left(x-2\right)^2-\left(2x+3\right)^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

وحلول المتراجحة $\left[-5,-\frac{1}{3}\right]$

24 في كلٍّ من الحالات الآتية، بيِّن قيم x الممنوعة، ثُمّ حلَّ المتراجحة المعطاة، ومثِّل مجموعة الحلول على مستقيم مدرّج، وعبِّر عنها بدلالة مجالات :

❶ $\frac{8-2x}{x+5}\geq 0$. ❷ $\frac{2+5x}{x-1}>0$. ❸ $\frac{2-3x}{3-2x}\leq 0$. ❹ $\frac{3x+7}{3x+5}\leq 0$.

❺ $\frac{4}{x+1}\geq -3$. ❻ $\frac{5}{2-6x}<1$. ❼ $\frac{x^2+1}{x^2-4}\leq 0$. ❽ $\frac{x^2+1}{x^2-4}\leq 1$.

الحل

❶ $\frac{8-2x}{x+5}\geq 0$

القيمة الممنوعة في هذه الحالة هي القيمة التي تعدم المقام: $x+5=0$ ومنه $x=-5$.

نحتاج إلى إيجاد القيمة التي تعدم البسط لدراسة إشارته $8-2x=0$ ومنه $x=4$. ندرس الإشارة في الجدول تبعا لقاعدة الإشارات كما يأتي:

x		-5		4	
$8-2x$	$+$		$+$	0	$-$
$x+5$	$-$	0	$+$		
$\frac{8-2x}{x+5}$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$

وحلول المتراجحة $]-5,4]$

❷ $\frac{2+5x}{x-1}>0$

كما في التمرين السابق القيمة الممنوعة هي 1. ندرس إشارة التركيب في جدول و نختار الإشارة المطلوبة لإيجاد مجموعة الحل.

x		$\frac{-2}{5}$		1	
$2+5x$	$-$	0	$+$		
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2+5x}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

حلول المتراجحة $\left]-\infty,-\frac{2}{5}\right[\cup]1,+\infty[$

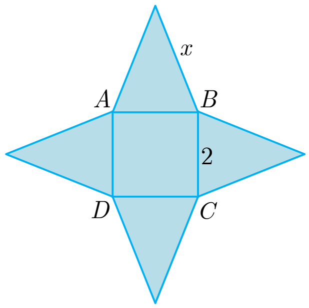
2

مفهوم التَّابع

1. مقدّمة عامّة
2. مفهوم التّابع العددي
3. الخطّ البياني لتابع
4. التّابع المتزايد والتّابع المتناقص
5. جدول اطّراد تابع

تَدرَّبْ

① ليكن $ABCD$ مربّعاً طول ضلعه يساوي 2، نُنشئ على محيط المربّع وخارجه أربعة مثلّثات متساوية الساقين طبوقة فنحصل على نجمة منتظمة، طول كلٍّ من أضلاعها يساوي x كما في الشكل المجاور، ونعرّف التابع f بالقول إنّ $f(x)$ يساوي مساحة سطح النّجمة.



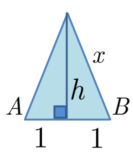
❶ بيّنْ أنّ مُنطلق التّابع f هو $D =]1,+\infty[$.

❷ اكتبْ بأسلوب صحيح عبارة التّابع f.

الحل

❶ في كل من المثلثات متساوية الساقين مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث أي أن $x + x > 2$. ومنه $x > 1$ أي أن $D =]1,+\infty[$.

❷ لمّا كان المثلث متساوي الساقين، كان ارتفاع المثلث المتعلق بقاعدته AB متوسطاً في المثلث، وإذا استعملنا الفرض، قاعدة المثلث المتساوي الساقين تساوي 2 ، طبّقنا مبرهنة فيثاغورث لحساب ارتفاع المثلث ووجدنا أنه يعطى بالعلاقة $h = \sqrt{x^2 - 1}$.



مساحة المثلث تساوي $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{x^2 - 1}$

مجموع مساحات المثلثات الأربع تساوي $4\sqrt{x^2 - 1}$

مساحة السطح النجمي تساوي مجموع مساحات المثلثات الأربعة مضافاً إليها مساحة المربع

$4\sqrt{x^2 - 1} + 4$ ومنه $f(x) = 4\sqrt{x^2 - 1} + 4$

② بيّنْ مجموعة تعريف كلٍّ من التوابع المعرّفة بالعلاقة:

❶ $f(x) = 2x^2 + 1$ ❷ $f(x) = \frac{1}{2x} + 3x$

❸ $f(x) = 2x + \frac{7}{2}$ ❹ $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

❺ $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ ❻ $f(x) = x\sqrt{2} + 1$

❼ $f(x) = \frac{3}{x - 5}$ ❽ $f(x) = \frac{2x}{2x + 3}$

❾ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ❿ $f(x) = \frac{2}{x(x + 1)}$

الحل

❶ $f(x) = 2x^2 + 1$ التابع معرف على $\mathbb{R}$ ، إذ يمكن حساب $f(x)$ من أجل أي عدد حقيقي x . ومنه مجموعة التعريف $]-\infty,+\infty[$.

❷ $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x}+3x$ ، التابع معرف إذا كان $x\neq 0$ ، ومنه مجموعة التعريف
$\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

❸ $f\left(x\right)=2x+\dfrac{7}{2}$ ، التابع معرف على $\mathbb{R}$ ، ومنه مجموعة التعريف $\left]-\infty,+\infty\right[$

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}$ ❹ ، التابع معرف إذا كان $x\neq 1$ ، ومنه مجموعة التعريف
$\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

❺ $f\left(x\right)=2\sqrt{x}+1$ ، التابع معرف إذا كان $x\geq 0$ ، ومنه مجموعة التعريف $\left[0,+\infty\right[$

❻ $f\left(x\right)=x\sqrt{2}+1$ ، التابع معرف على $\mathbb{R}$ ، ومنه مجموعة التعريف $\left]-\infty,+\infty\right[$

❼ $f\left(x\right)=\dfrac{3}{x-5}$ ، التابع معرف إذا كان $x-5\neq 0$ ، أي $x\neq 5$ ومنه مجموعة التعريف
$\left]-\infty,5\right[\cup\left]5,+\infty\right[$

❽ $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{2x+3}$ ، التابع معرف إذا كان $2x+3\neq 0$ ، أي $x\neq -\dfrac{3}{2}$ ومنه مجموعة التعريف $\left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$

❾ $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}$ ، التابع معرف إذا كان $x^2\neq 0$ أي $x\neq 0$ ومنه مجموعة التعريف
$\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

❿ $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x\left(x+1\right)}$ التابع معرّف إذا كان $x\left(x+1\right)\neq 0$ أي $x\neq 0$ و $x\neq -1$
ومنه مجموعة التعريف $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$

③ بيّن مجموعة تعريف كلٍّ من التوابع المعرّفة بالعلاقات:

❶ $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ ❷ $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$

❸ $f(x)=\dfrac{2}{x}+\sqrt{x+1}$ ❹ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$

❺ $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$ ❻ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x+1}$

❼ $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$ ❽ $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

❾ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ ❿ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

الحل

❶ $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$ ، لما كان x^2+1 مختلفاً عن الصفر دوماً ، ولا يمكن أن يساوي الصفر، كان التابع معرف على $\mathbb{R}$ ، ومنه مجموعة التعريف $]-\infty,+\infty[$.

❷ $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ ، التابع معرف إذا كان $x^2-1\neq 0$ ، أي $x\neq -1$ و $x\neq 1$ ومنه مجموعة التعريف $]-\infty,-1[\cup]-1,+1[\cup]+1,+\infty[$.

❸ $f(x)=\dfrac{2}{x}+\sqrt{x+1}$ ، التابع معرف إذا كان $x\neq 0$ و $x+1\geq 0$ ، أي $x\neq 0$ و $x\geq -1$ ومنه مجموعة التعريف $[-1,0[\cup]0,+\infty[$.

❹ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ ، التابع معرف إذا كان $x\neq 1$ و $x+1\geq 0$ ، أي $x\neq 1$ و $x\geq -1$ ومنه مجموعة التعريف $[-1,1[\cup]1,+\infty[$.

❺ $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4x}$ ، التابع معرف إذا كان $x^2+4x\neq 0$ ، أي $x(x+4)\neq 0$ أي عندما $x\neq 0$ و $x\neq -4$ ، ومنه مجموعة التعريف $]-\infty,-4[\cup]-4,0[\cup]0,+\infty[$.

❻ $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-2x+1}$ ، التابع معرّف إذا كان $x^2-2x+1\neq 0$ ، أي $(x-1)^2\neq 0$ أي $x\neq 1$ ومنه مجموعة التعريف $]-\infty,+1[\cup]+1,+\infty[$.

❼ $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$ ، لما كان $2x^2+1$ لا يمكن أن يساوي الصفر كان التابع معرف على $\mathbb{R}$ ومنه مجموعة التعريف $]-\infty,+\infty[$

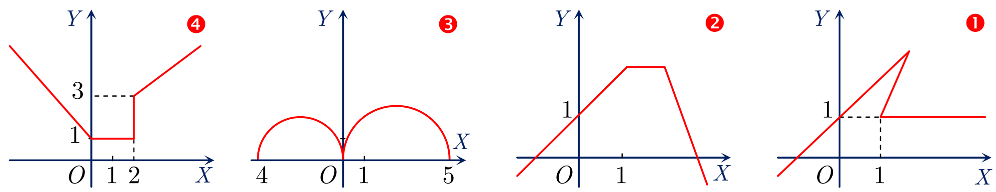
❽ $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ ، التابع معرف إذا تحققت المتراجحة $x^2-1\geq 0$ التي نكتبها بعد تحليل طرفها الأيسر على الصورة التالية $(x-1)(x+1)\geq 0$ والمقدار في الطرف الأيسر موجبٌ إلا عندما تكون x بين القيمتين $-1,+1$ ، ومنه نجد أنَّ مجموعة التعريف $]-\infty,-1]\cup[+1,+\infty[$.

❾ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$ ، التابع معرف إذا كان $\dfrac{x+2}{x-2}\geq 0$ و $x\neq 2$ أي أن مجموعة التعريف $]-\infty,-2]\cup]+2,+\infty[$.

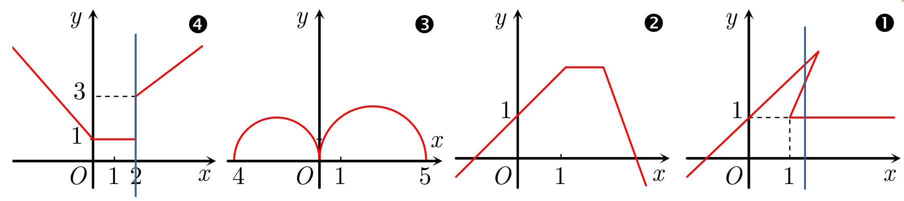
❿ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ ، التابع معرف إذا كان $x+2\geq 0$ و $x-2>0$ ومنه $x\geq -2$ و $x>2$ أي أن مجموعة التعريف $]+2,+\infty[$.

تَدرَّبْ

① بيِّن أيُّ المنحنيات التالية هو خطٌّ بيانيٌّ لتابع:



الحل



المنحني ❶ ليس خطاً بيانياً لتابع ، لاحظ المستقيم الشاقولي في الرسم.

المنحني ❷ خط بياني لتابع.

المنحني ❸ خط بياني لتابع.

المنحني ❹ ليس خطاً بيانياً لتابع ، لاحظ المستقيم الشاقولي في الرسم.

② ليكن $\mathcal{C}$ الخطَّ البيانيَّ الممثّل لتابع f . ترجم العبارات الآتية بعلاقات مساواة تعبّر عنها.

❶ يمرّ $\mathcal{C}$ بنقطة إحداثيّاها $(-2,5)$.

❷ يقطع $\mathcal{C}$ محورَ التراتيب بنقطة ترتيبها -1 .

❸ يقطع $\mathcal{C}$ محورَ الفواصل بنقطتين فاصلتاهما على الترتيب -2 و 3 .

الحل

❶ يمرّ $\mathcal{C}$ بنقطة إحداثيّاتها $\left(-2,5\right)$.أي $f\left(-2\right)=5$.

❷ يقطع $\mathcal{C}$ محورَ التراتيب بنقطة ترتيبها -1 . أي $f\left(0\right)=-1$.

❸ يقطع $\mathcal{C}$ محورَ الفواصل بنقطتين فصلتاهما على الترتيب -2 و 3.أي $f\left(-2\right)=0$ و $f\left(3\right)=0$.

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخطَّ البيانيَّ الممثّل للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=x^2+5$.

❶ بيّن أيٌّ من النقاط $A(-2,9)$ و $B(3,13)$ و $C(\sqrt{2},7)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

❷ أعطِ إحداثيات أربع نقاط تقع على الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

❶ لما كان $f\left(-2\right)=9$ كانت النقطة $A\left(-2,9\right)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

لما كان $f\left(3\right)=9+5=14\neq 13$ كانت النقطة $B\left(3,13\right)$ لا تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

لما كان $f\left(\sqrt{2}\right) = 2 + 5 = 7$ كانت النقطة $C\left(\sqrt{2}, 7\right)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

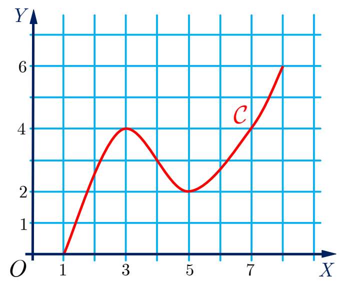
❷ عندما $x = 0$ فإن $f\left(0\right) = 5$ فالنقطة $\left(0, 5\right)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

عندما $x = 1$ فإن $f\left(1\right) = 6$ فالنقطة $\left(1, 6\right)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

عندما $x = -1$ فإن $f\left(-1\right) = 6$ فالنقطة $\left(-1, 6\right)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

عندما $x = 2$ فإن $f\left(2\right) = 9$ فالنقطة $\left(2, 9\right)$ تنتمي إلى $\mathcal{C}$.

④ في الشكل المجاور نجد الخطّ البيانيّ لتابع معرّف على المجال $\left[1, 8\right]$، بقراءة بيانيّة لهذا الشكل، بيّن الصواب من الخطأ في المقولات التالية:



❶ العدد 1 هو صورة 0 وفق f.

❷ العدد 0 هو صورة 1 وفق f.

❸ العدد 4 هو صورة 3 و 7 وفق f.

❹ $f(2) = 5$.

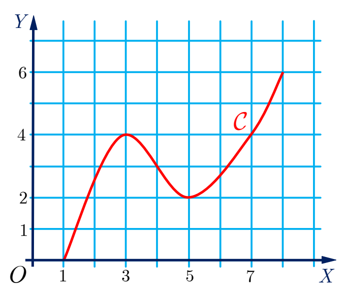
❺ $f(3) > 5$.

❻ للمعادلة $f(x) = 2.5$ ثلاثة حلول.

❼ العدد 0.5 هو صورة عدد وحيد من المجال وفق f.

❽ في حالة $x \in \left[6, 8\right]$ لدينا $f(x) > 2$.

الحل



❶ خطأ. ❷ صح.

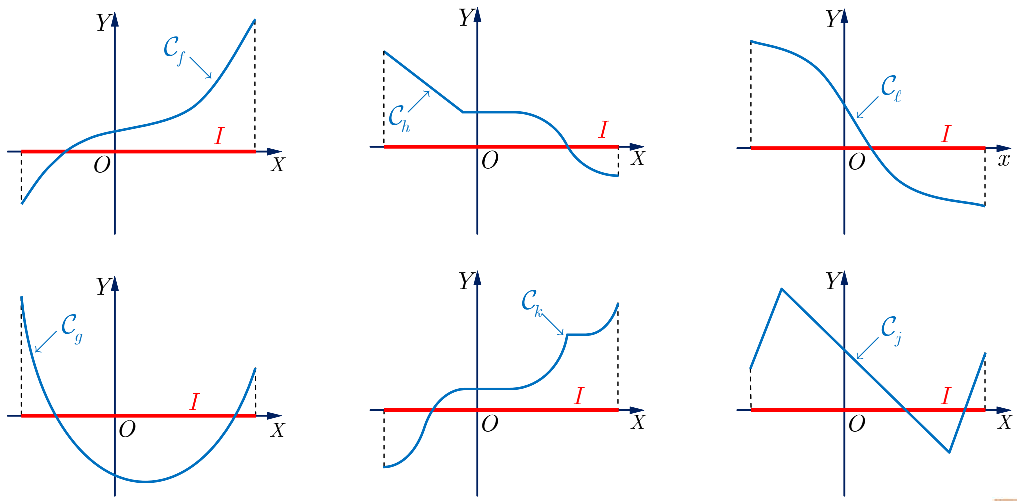
❸ صح. ❹ خطأ.

❺ خطأ. ❻ صح.

❼ صح. ❽ صح.

تَدرَّبْ

① تجد في الشكل التالي، الخطوط البيانية لتوابع f و g و h و j و k و ℓ مُعرَّفة على مجال I. بيّن أيّها متزايدٌ تماماً، وأيّها متناقص تماماً وأيّها متزايدٌ وأيّها متناقص وأيّها لا متزايدٌ ولا متناقص على المجال I.



الحل

التابع f متزايد تماماً على المجال I.

التابع h متناقصٌ على المجال I.

التابع ℓ متناقصٌ تماماً على المجال I.

التابع g لا متزايدٌ و لا متناقصٌ على المجال I.

التابع k متزايدٌ على المجال I.

التابع j لا متزايدٌ ولا متناقص على المجال I.

② لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto x^2 - 4x$.

❶ أثبتْ أنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$.

❷ أثبتْ أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty,2]$.

الحل

❶ ليكن u و v عددين يُحقّقان $2 \leq u < v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$ أي بين العددين $u^2 - 4u$ و $v^2 - 4v$. ولكن لدينا

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= u^2 - 4u - v^2 + 4v \\ &= (u-v)(u+v) - 4(u-v) \\ &= (u-v)(u+v-4) \end{aligned}$$

وهنا نلاحظ ما يلي:

- نستنتج مباشرة، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $u - v < 0$.
- لأنّ $2 < u$ و $2 < v$ استنتجنا أنّ $u + v - 4 > 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u) - f(v) < 0$ أي أنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $[2,+\infty[$.

❷ ليكن u و v عددين يُحقّقان $u < v \leq 2$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$.

لكن لدينا

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &= u^2 - 4u - v^2 + 4v \\ &= (u-v)(u+v) - 4(u-v) \\ &= (u-v)(u+v-4) \end{aligned}$$

وهنا نلاحظ ما يلي:

- نستنتج مباشرة، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $u - v < 0$.
- لأنّ $u < 2$ و $v \leq 2$ استنتجنا أنّ $u + v - 4 < 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u) - f(v) > 0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $]-\infty, 2]$.

③ لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ المعرّف على $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

❶ أثبتْ أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $]0, +\infty[$.

❷ أثبتْ أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0[$.

الحل

❶ ليكن u و v عددين يُحقّقان $0 < u < v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$.

ولكن لدينا $f(u) - f(v) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = \dfrac{v-u}{uv}$

وهنا نلاحظ ما يلي:

- نستنتج مباشرة، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $v - u > 0$.
- لأنّ $u > 0$ و $v > 0$ استنتجنا أنّ $uv > 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u) - f(v) > 0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $]0, +\infty[$.

❷ ليكن u و v عددين يُحقّقان $0 < u < v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$.

ولكن لدينا $f(u) - f(v) = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v} = \dfrac{v-u}{uv}$

وهنا نلاحظ ما يلي:

- نستنتج مباشرة، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $v - u > 0$.
- لأنّ $u < 0$ و $v < 0$ استنتجنا أنّ $uv > 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u) - f(v) > 0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $]-\infty, 0[$.

④ لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ المعرّف على $\mathbb{R}$. أثبت أنّ f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

الحل

ليكن u و v عددين يُحقّقان $0 < u < v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$. ولكن لدينا
$$f(u)-f(v)=\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{1+v^2}=\frac{(u-v)(u+v)}{(1+u^2)(1+v^2)}$$

وهنا نلاحظ ما يلي:

- نستنتج مباشرةً، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $v-u>0$.
- لأنّ $u>0$ و $v>0$ استنتجنا أنّ $u+v>0$.
- لأنّ $(1+u^2)>0$ و $(1+v^2)>0$ استنتجنا أنّ $(1+u^2)(1+v^2)>0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u)-f(v)>0$ أي أنّ f متناقص تماماً على $[0,+\infty[$.

⑤ لنتأمّل التّابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ المعرّف على $[0,+\infty[$. أثبت أنّ f متزايدٌ تماماً.

الحل

ليكن u و v عددين يُحقّقان $0 < u < v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$. ولكن لدينا
$$f(u)-f(v)=\sqrt{u}-\sqrt{v}=\frac{u-v}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$$

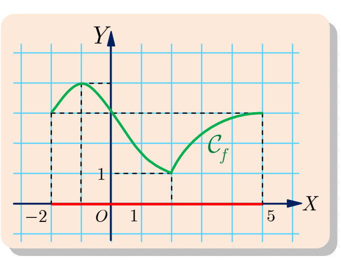
وهنا نلاحظ ما يلي:

- نستنتج مباشرةً، استناداً إلى الفرْض $u < v$، أنّ $v-u>0$.
- لأنّ $\sqrt{u}\geq 0$ و $\sqrt{v}>0$ استنتجنا أنّ $\sqrt{u}+\sqrt{v}>0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u)-f(v)>0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال المعطى $[0,+\infty[$.

فكِّرْ تأمّل الخطَّ البيانيَّ للتّابع f في المثال السابق وأجب عن السؤالين الآتيين:

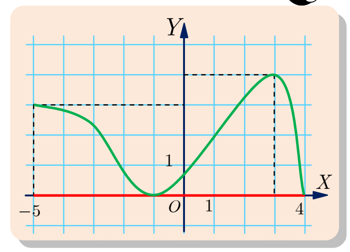
- ما هي أكبر قيمة يأخذها التّابع f على مجال تعريفه؟
- ما هي أصغر قيمة يأخذها التّابع f على مجال تعريفه؟

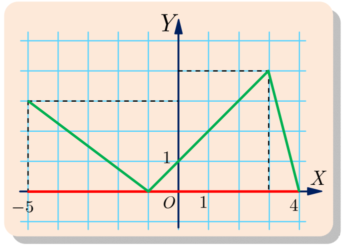


الحل

- أكبر قيمة يأخذها التّابع f على مجال تعريفه هي 4 يأخذها عندما $x=-1$.
- أصغر قيمة يأخذها التّابع f على مجال تعريفه هي 1 يأخذها عندما $x=2$.

فَكِّرْ





تأمّل الخطَّ البيانيَّ للتابع f في المثال السابق وأجب عن التساؤلات الآتية:

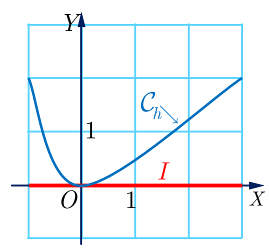
- أصحيح أنّ $f(x) \leq 5$ أيّاً كانت قيمة x من المجال $[-5,4]$ ؟
- أيكون العدد 5 أكبر قيم f على المجال $[-5,4]$ ؟
- هل $f(x) \geq -1$ أيّاً كانت قيمة x من المجال $[-5,4]$ ؟
- أتكون -1 أصغر قيم f على المجال $[-5,4]$ ؟
- أتكون 3 أكبر قيم f على المجال $[-5,-1]$؟

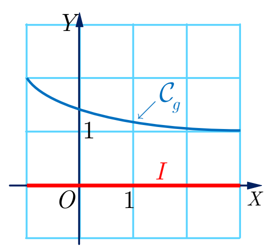
الحل

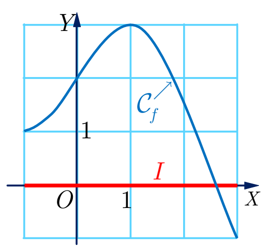
- نعم. (من الرسم) ■ لا. (من الرسم) ■ نعم. (من الرسم)
- لا. (من الرسم) ■ نعم. (من الرسم)

تَدرَّبْ

① تجد في الشكل التالي، الخطوط **البيانيّة** لتوابع f و g و h معرفة على المجال $I=[-1,3]$.
بيِّن الصواب من الخطأ معلِّلاً إجابتك في كلٍّ من القضايا الآتية:







❶ التّابع f ليس متزايداً تماماً على I.

❷ أصغر قيم التّابع f هي $f(-1)$.

❸ أصغر قيم التّابع f هي $f(3)$.

❹ أصغر قيم التّابع g هي $g(-1)$ لأنّ -1 هو أصغر الأعداد في I.

❺ أصغر قيم التّابع g على I هي $g(3)$ لأنّ g متناقص تماماً على I.

❻ أكبر قيم التّابع h على I هي $h(3)$ ويبلغها التّابع f مرّتين.

❼ أصغر قيم التّابع h على كلٍّ من المجالات I و $[-1,0]$ و $[0,2]$ هي 0.

الحل

❶ صح ، لأن التّابع f متزايد تماماً على المجال $[-1,1]$ ومتناقص تماماً على المجال $[1,3]$.

❷ خطأ ، إذ يوجد للتابع f قيم أقل من 1 عندما $x > 2$.

❸ صح.

❹ خطأ ، أولا -1 هو أصغر الأعداد في I وليس أصغر قيم التابع ، ثانياً للتابع g قيم أصغر من $g(-1) = 2$.

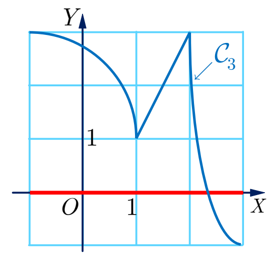
❺ صح .

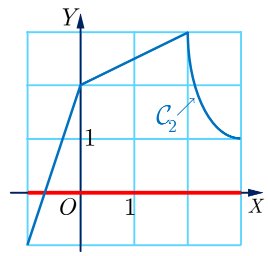
❻ صح ، لأن $h(3) = 2$ ويبلغها التّابع h مرّتين عندما $x = -1$ و $x = 3$.

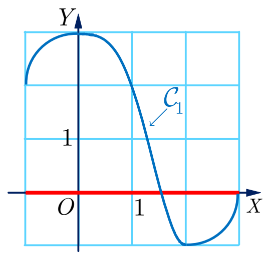
❼ صح .

تمرينات ومسائل

1 نتأمّل ثلاثة خطوط بيانيّة $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$:







ونتأمل كذلك جداول اطّراد ثلاثة توابع f و g و h:

x	-1		$\dots$		$\dots$		3
$h(x)$	$\dots$	$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	$\dots$

x	-1		$\dots$		$\dots$		3
$g(x)$	$\dots$	$\searrow$	$\dots$	$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	$\dots$

x	-1		$\dots$		3
$f(x)$	$\dots$	$\nearrow$	$\dots$	$\searrow$	$\dots$

① اقرن كل واحد من التوابع f و g و h مع أحد الخطوط البيانيّة $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ و $\mathcal{C}_3$.

② املأ الفراغات في جداول اطّراد كلٍّ من التوابع f و g و h.

الحل

① $\mathcal{C}_2$ هو الخط البياني للتابع f، $\mathcal{C}_3$ هو الخط البياني للتابع g، $\mathcal{C}_1$ هو الخط البياني للتابع h. اعتماداً على تزايد وتناقص التابع ومقارنة ذلك بالخط البياني للتابع .

②

x	-1		1		2		3
$g(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

x	-1		0		2		3
$h(x)$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

x	-1		2		3
$f(x)$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1

2 نتأمّل فيما يلي جدول اطّراد تابع f:

x	-3		-1		0		1		3		7
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1

① على كلّ من المجالات $[-3,7]$ و $[-1,1]$ و $[1,7]$، عيّن أكبر قيم التّابع f، وقيم المتغيّر x التي يبلغ عندها هذه القيم الكبرى.

② على كلّ من المجالات $[-3,7]$ و $[0,3]$ و $[1,7]$، عيّن أصغر قيم التّابع f، وقيم المتغيّر x التي يبلغ عندها هذه القيم الصغرى.

الحل

على المجال $[-3,7]$ أكبر قيم التابع هي 3 يبلغها التابع عندما $x=-3$.

على المجال $\left[-1,1\right]$ أكبر قيم التابع هي 1 يبلغها التابع عندما $x=0$.

على المجال $\left[1,7\right]$ أكبر قيم التابع هي 2 يبلغها التابع عندما $x=3$.

على المجال $\left[-3,7\right]$ أصغر قيم التابع هي -2 يبلغها التابع عندما $x=-1$.

على المجال $\left[0,3\right]$ أصغر قيم التابع هي 0 يبلغها التابع عندما $x=1$.

على المجال $\left[1,7\right]$ أصغر قيم التابع هي -1 يبلغها التابع عندما $x=7$.

3 كيف نتصوّر الخطّ البياني الممثّل لتابع ؟

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال $I=\left[-10,10\right]$. نفترض أنّه مهما كان العدد الحقيقي x من I كان $-1\le f(x)\le 3$، ونفترض أيضاً أنّ حلول المعادلة $f(x)=1$ هي الأعداد $x=-3$ و $x=1$ و $x=4$. ارسم، في مَعْلَمٍ متجانس، خطّاً بيانياً $\mathcal{C}$ يُمكن أن يمثِّل التّابع f.

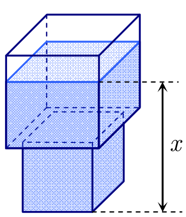
الحل

لمّا كان f تابعاً معرّفاً على المجال $I=\left[-10,10\right]$ كان $x\in\left[-10,10\right]$.

لمّا كان $-1\le f\left(x\right)\le 3$ كان الخط البياني للتابع محصور بين $y=-1$ و $y=3$.

لمّا كانت حلول المعادلة $f\left(x\right)=1$ هي الأعداد $x=-3$ و $x=1$ و $x=4$ كان المنحني ماراً بالنقط $\left(-3,1\right),\left(1,1\right),\left(4,1\right)$

4 تابع تآلفي على مجالات



يبيِّن الشكل المجاور وعاءً مؤلّفاً من مكعّبين متّصلين. طول حرف الأوّل 80 سنتيمتراً وطول ضلع الثاني 60 سنتيمتراً. نرمز بالرمز x إلى ارتفاع السائل في الوعاء مُقاساً بالسنتيمتر، وبالرمز $V(x)$ إلى حجم ذلك السائل باللِّيتر. مثّل بيانيّاً الحجم $V(x)$ بدلالة x. خُذ سنتيمتراً واحداً لكلّ 10 سنتمترات على محور الفواصل، وسنتيمتراً واحداً لكلّ 50 ليتراً على محور التراتيب.

الحل

إن حجم السائل يتعلق بالارتفاع x ومن ثم فإن الحجم V تابع للارتفاع x .

إن الحجم معرف على المجال $\left[0,140\right]$. و $\left[0,140\right]=\left[0,60\right]\cup\left[60,140\right]$

مثلاً:

$$\begin{aligned}
&V\left(50\right)=3600\times 50=80000\ ,\ V\left(0\right)=0\\
&V\left(80\right)=V_1\left(60\right)+V_2\left(20\right)\\
&\qquad=216000+6400\cdot 20=216000+218000\\
&\qquad=344000
\end{aligned}$$

إذن

$\{$

$$V(x) = 3600x \qquad ; \quad x \in [0,60]$$

$$V(x) = 216000x + 6400(x-60) \ ; \ x \in [60,140]$$

كل $10\ \text{cm}$ على محور الفواصل يمثل بـ $1\ \text{cm}$

كل $50\,\text{L}$ على محور الفواصل يمثل بـ 1cm على محور التراتيب

$V(0) = 0$ فالنقطة $(0,0)$ من الخط البياني

$V(60) = 216000$ فالنقطة $(6,43.2)$ من الخط البياني

$V(140) = 600000$ فالنقطة $(14,120)$ من الخط البياني

5 البحث عن أكبر قيمة لتابع

لنتأمّل التّابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

① أثبت أنّ $f(x)$ يُكتبُ أيضاً بالشكل $f(x) = 9 - (x-2)^2$.

② حلَّ المعادلة $f(x) = 9$.

③ أثبت أنّ 9 هي أكبر قيمة للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

①

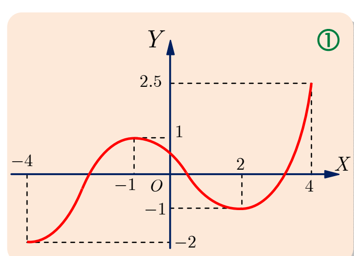
$$f(x) = -x^2 + 4x + 5 = -\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right) + 5$$
$$= -(x-2)^2 + 4 + 5 = -(x-2)^2 + 9$$

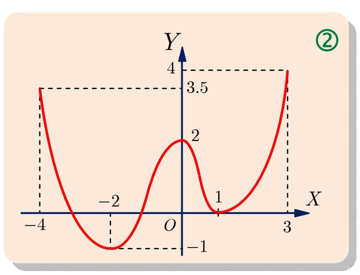
②لدينا $f(x) = 9$ ومنه $9 = -(x-2)^2 + 9$ بالتالي $-(x-2)^2 = 0$ أي $x = 2$ حلُّ المعادلة .

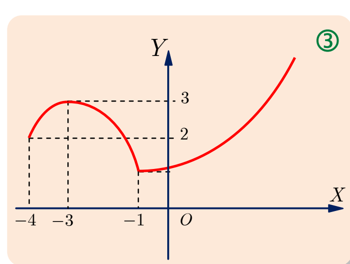
③نعلم أنّ $-(x-2)^2 \leq 0$ ومنه $-(x-2)^2 + 9 \leq 9$ بالتالي $f(x) \leq 9$ وأيضا نلاحظ أن

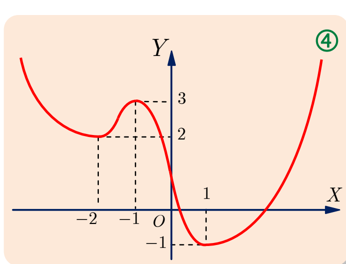
$f(2) = 9$ أي أن 9هي أكبر قيمة للتابع على $\mathbb{R}$

6 في هذا التمرين نُعطي الخطَّ البيانيَّ للتابع f، ويُطلَبُ في كلِّ حالة كتابة جدول الاطِّراد الموافق.









الحل

x	-4	-1	2	4
$f(x)$	$-2 \nearrow$	$1 \searrow$	$-1 \nearrow$	2.5

①

x	-4	-2	0	1	3
$f(x)$	$3.5 \searrow$	$-1 \nearrow$	$2 \searrow$	$0 \nearrow$	4

②

x	-4	-3	-1	$+\infty$
$f(x)$	$2 \nearrow$	$3 \searrow$	$1 \nearrow$	

③

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$2 \nearrow$	$3 \searrow$	$-1 \nearrow$	

④

7 ارسم خطاً بيانيّاً لتابع f يُحقق الخواصّ الآتية:

- مجموعة تعريف f هي $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
- $f(-4) = -3$ و $f(1) = 3$ و $f(4) = 2$ وإذا كان $x > 2$ كان $f(x) > 0$.
- جدول اطّراد التّابع f هو

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	

الحل

من الفرض لدينا أن منحنى التابع يمر بالنقاط $(4,2)$, $(1,3)$, $(-4,-3)$

ومن جدول اطراد التابع نجد أن منحنى التابع يمر

بالنقاط $(2,4)$, $(0,1)$, $(-2,4)$

ومن جدول اطراد التابع نجد أن

① التابع متزايد تماماً على المجال $]-\infty,-2[$

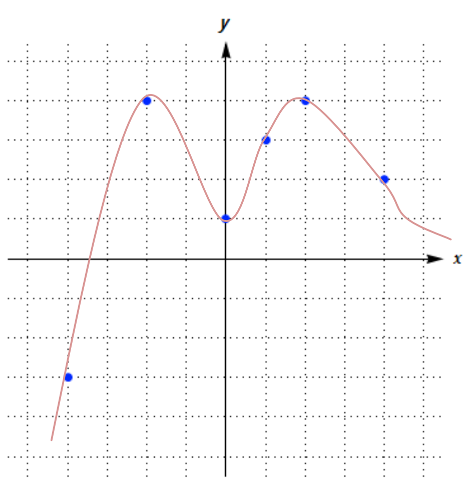
② التابع متناقص تماماً على المجال $]-2,0[$

③ التابع متزايد تماماً على المجال $]0,2[$

④ التابع متناقص تماماً على المجال $]2,+\infty[$

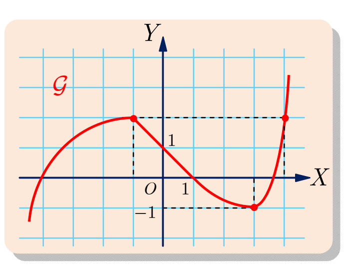
ومن الفرض ، لدينا عندما $x > 2$ فإن منحنى التابع

يقع فوق محور الفواصل



8 الخط البياني $\mathcal{G}$ يمثّل تابعاً f معرّفاً على $\mathbb{R}$، ونعطي أنّ $f(3.6) = 0$.

① اكتب جدول اطّراد f.



② حلَّ بيانيّاً كلاً من المترجحتين $f(x) > 0$ و $f(x) < 0$ ، واستنتج إشارة $f(x)$ تِبعاً لقيم x .

③ حُلَّ بيانيّاً المتراجحة $f(x) \geq 2$.

الحل

①

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$2 \searrow$	$-1 \nearrow$	

② نلاحظ من الخط البياني أن منحني التابع يكون فوق محور الفواصل عندما $x \in]-4,1[$ و $x \in]3.6,+\infty[$. أي أنّ $f(x) > 0$ طالما $x \in]-4,1[\cup]3.6,+\infty[$

نلاحظ من الخط البياني أن منحني التابع يكون تحت محور الفواصل عندما $x \in]-\infty,-4[$ و $x \in]1,3.6[$

أي $f(x) < 0$ عندما $x \in]-\infty,-4[\cup]1,3.6[$

ومنه إشارة التابع f تكون سالبة عندما $x \in]-\infty,-4[\cup]1,3.6[$ و موجبة عندما $x \in]-4,1[\cup]3.6,+\infty[$

③ من ملاحظة الخط البياني نجد أن $f(x) \geq 2$ عندما $x \in]3.6,+\infty[$

9 ادرس اطّراد التّابع $f : x \mapsto x^2 - 3$ على المجال $I = [0,+\infty[$.

الحل

ليكن u و v عددين يُحقّقان $0 \leq u < v$ ، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$. ولكن لدينا

$$f(u) - f(v) = u^2 - 3 - v^2 + 3 = (u - v)(u + v)$$

وهنا نلاحظ ما يلي:

نستنتج مباشرة، استناداً إلى الفرْض $u < v$ ، أنّ $u - v < 0$.

لأنّ $0 \leq u$ و $0 < v$ استنتجنا أنّ $u + v > 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u) - f(v) < 0$ أي أنّ f متزايدٌ تماماً على المجال $[0,+\infty[$.

10 ادرس اطّراد التّابع $f : x \mapsto x^2 - 3$ على المجال $I =]-\infty,0]$.

الحل

ليكن u و v عددين يُحقّقان $u < v \leq 0$ ، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$.

لكن لدينا $f(u) - f(v) = u^2 - 3 - v^2 + 3 = (u - v)(u + v)$

وهنا نلاحظ ما يلي:

نستنتج مباشرة، استناداً إلى الفرْض $u < v$ ، أنّ $u - v < 0$.

لأنّ $u < 0$ و $v \leq 0$ استنتجنا أنّ $u + v < 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u)-f(v)>0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0]$.

11 ليكن f التّابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x)=\frac{x}{3}+|2x-6|$.

① اكتب $f(x)$ بدون استعمال القيمة المطلقة.

② استنتج أنّ f متناقص تماماً على $]-\infty,3]$، وأنّه متزايد تماماً على $[3,+\infty[$.

③ أثبت أنّه إذا كان $x\leq 3$ كان $f(x)\geq 1$.

④ أثبت كذلك أنّه إذا كان $x\geq 3$ كان $f(x)\geq 1$.

⑤ حلّ المعادلة $f(x)=1$. واستنتج أصغر قيمة للتابع f على $\mathbb{R}$.

⑥ لماذا لا تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلولاً ؟

الحل

① لمّا كان $2x-6\geq 0$ أي $x\geq 3$ كان $f(x)=\frac{x}{3}+2x-6$ ، أي $f(x)=\frac{7x}{3}-6$

ولمّا كان $2x-6\leq 0$ أي $x\leq 3$ كان $f(x)=\frac{x}{3}-2x+6$ ، أي $f(x)=-\frac{5x}{3}+6$

ويمكن كتابة التابع f على الشكل

$$\begin{cases} f(x)=\frac{7x}{3}-6 & ; x\geq 3 \\ f(x)=-\frac{5x}{3}+6 & ; x\leq 3 \end{cases}$$

② من الواضح أن التابع f على المجال $]-\infty,3]$ هو تابع أفّيني من الشكل $f(x)=ax+b$ ولمّا كان $a<0$ كان التابع متناقص تماماً على المجال $]-\infty,3]$

من الواضح أن التابع f على المجال $[3,+\infty[$ هو تابع أفّيني من الشكل $f(x)=ax+b$ ولمّا كان $a>0$ كان التابع متناقص تماماً على المجال $[3,+\infty[$

لمّا كان $x\leq 3$ كان $-5x\geq -15$ ، أي أنّ $-\frac{5x}{3}\geq -5$ ومنه $-\frac{5x}{3}+6\geq 1$ ، أي $f(x)\geq 1$.

③لمّا كان $x\leq 3$ كان $5x\leq 15$ ، أي $-\frac{5x}{3}\geq -5$ ومنه $-\frac{5x}{3}+6\geq 1$ أي $f(x)\geq 1$.

④ لمّا كان $x\geq 3$ كان $7x\geq 21$ ، أي $\frac{7x}{3}\geq 7$ ومنه $\frac{7x}{3}-6\geq 1$ أي $f(x)\geq 1$.

⑤لمّا كان $x\geq 3$ كان $\frac{7x}{3}-6=1$ ومنه $\frac{7x}{3}=7$ ، أي $7x=21$ ومنه $x=3$.

لمّا كان $x\leq 3$ كان $-\frac{5x}{3}+6=1$ ومنه $-\frac{5x}{3}=-5$ ، أي $-5x=-15$ ومنه $x=3$.

أي أنّ حل المعادلة $f(x)=1$ هو $x=3$.

لمّا كان $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) \geq 1$ كانت أصغر قيمة للتابع هي 1 يبلغها عندما $x = 3$

⑥ممّا سبق و لمّا كان $1 > 0$ استنتجنا أن المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل أي حل.

12 ليكن f التّابع المعرّف على المجال $]3,+\infty[$ بالعلاقة $f(x) = x - 8 + \dfrac{4}{x-3}$. أثبت أنّ القيمة -1 هي أصغر قيمة للتابع f على $]3,+\infty[$.

الحل

لنحسب الفرق $f(x) - (-1)$ وندرس إشارته، ونثبت أنه مقدار موجب على المجال $]3,+\infty[$ وهذا يكافئ أنَّ $f(x) \geq -1$ على المجال السابق.

$$f(x) - (-1) = f(x) + 1 = x + 7 + \frac{4}{x-3}$$

وبتوحيد المقامات نجد

$$f(x) + 1 = \frac{(x-3)(x-7)+4}{x-3} = \frac{x^2 - 10x + 21 + 4}{x-3}$$

$$= \frac{x^2 - 10x + 25}{x-3} \qquad = \frac{(x-5)^2}{x-3}$$

ولما كان $x > 3$ وكان $(x-5)^2 \geq 0$ وجدنا أن $f(x) + 1 \geq 0$ أي $f(x) \geq -1$ ونلاحظ أن $f(5) = -1$ ومنه -1 هي أصغر قيمة للتابع على المجال $]3,+\infty[$ ويبلغها عند $x = 5$.

3

المعادلات و المتراجحات من الدّرجة الثّانية

1. حلُّ معادلة من الدرجة الثانية
2. تحليل ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية وإشارته
3. العلاقة بين أمثال وجذور ثلاثي حدود من الدرجة الثانية
4. تطبيقات ونشاطات

تَدرَّبْ

① اكتب بالصيغة القانونيَّة ثلاثيات الحدود من الدرجة الثانية الآتية:

❶ $x^2 - 4x + 1$ ❷ $x^2 + 6x$

❸ $x^2 - x + 1$ ❹ $-3x^2 + x + 4$

❺ $-x^2 + 2x - 1$ ❻ $-x^2 + 5x - 6$

الحل

❶
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 3 \\ &= (x-2)^2 - 3 \end{aligned}$$

❷
$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 9 \\ &= (x+3)^2 - 9 \end{aligned}$$

❸
$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 &= x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

❹
$$\begin{aligned} -3x^2 + x + 4 &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right) \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{4}{3}\right) \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} - \frac{48}{36}\right) \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} - \frac{49}{36}\right) \\ &= -3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) + \frac{49}{12} \\ &= -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{49}{12} \end{aligned}$$

❺
$$\begin{aligned} -x^2 + 2x - 1 &= -\left(x^2 - 2x + 1\right) \\ &= -(x-1)^2 \end{aligned}$$

⑥
$$\begin{aligned}
-x^2+5x-6 &= -\left(x^2-5x+6\right)\\
&= -\left(x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+6\right)\\
&= -\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+\frac{24}{4}\right)\\
&= -\left(x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{1}{4}\right)\\
&= -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

② عيّن أصغر قيم التابع $x \mapsto x^2+4x+8$.

الحل

$$x^2+4x+8 = x^2+4x+4-4+8 = \left(x+2\right)^2+4$$

ولمّا كان $\left(x+2\right)^2 \geq 0$ كان $\left(x+2\right)^2+4 \geq 4$ ومنه استنتجنا أن أصغر قيم التابع هي

③ عيّن أكبر قيم التابع $x \mapsto -x^2+2x+1$.

الحل

$$\begin{aligned}
-x^2+2x+1 &= -\left(x^2-2x-1\right)\\
&= -\left(x^2-2x+1-1-1\right)\\
&= -\left(x^2-2x+1\right)+2\\
&= -\left(x-1\right)^2+2
\end{aligned}$$

ولمّا كان $-\left(x-1\right)^2 \leq 0$ كان $-\left(x-1\right)^2+2 \leq +2$ ومنه استنتجنا أن أكبر قيم التابع هي 2.

فكّر

على ماذا تحصل إذا طبّقتَ العلاقتين اللتين تحسبان x_1 و x_2 في حالة $\Delta = 0$ ؟ أترى لماذا يُسمَّى العددُ $-\frac{b}{2a}$ جذراً مُضاعفاً في حالة $\Delta = 0$؟

الحل

في حالة $\Delta = 0$، تُعطي العلاقات

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b-0}{2a} = \frac{-b}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+0}{2a} = \frac{-b}{2a}$ أي

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. وهذا ما يجعلنا نقول إن للمعادلة جذرين متساويين، أو إنّ لها جذراً مضاعفاً.

تدرّب

① حلَّ المعادلات الآتية دون استعمال المميِّز:

❶ $x^2 - 5x = 0$ ❷ $x^2 - 9 = 0$

❸ $x^2 + 4 = 0$ ❹ $1 - (3x-1)^2 = 0$

الحل

❶ تكتب المعادلة $x^2 - 5x = 0$ بالشكل $x(x-5) = 0$ و منه إما $x = 0$ أو $x = 5$

فمجموعة حلول المعادلة هي $S = \{0,5\}$

❷ تكتب المعادلة $x^2 - 9 = 0$ بالشكل $(x-3)(x+3) = 0$ و منه إما $x = -3$ أو $x = +3$ فمجموعة حلول المعادلة هي $S = \{-3,+3\}$

❸ $x^2 + 4 = 0$: لمّا كان $x^2 \geq 0$ كان $x^2 + 4 \geq 4 > 0$ ومنه استنتجنا أنّه ليس للمعادلة حلول أي $S = \phi$

❹ تكتب المعادلة $1 - (3x-1)^2 = 0$ بالشكل $[1-(3x-1)][1+(3x-1)] = 0$ أي $(1-3x+1)(1+3x-1) = 0$ أي $3x(2-3x) = 0$ ومنه إما $x = 0$ أو $x = \dfrac{2}{3}$

فمجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{0,\dfrac{2}{3}\right\}$

② حلَّ المعادلات الآتية:

❶ $x^2 + x - 6 = 0$ ❷ $-x^2 + 2x - 1 = 0$

❸ $u^2 + 5u - 6 = 0$ ❹ $3x^2 - 12x + 12 = 0$

❺ $-m^2 + m - 20 = 0$ ❻ $x^2 + 1.1x + 0.1 = 0$

❼ $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ ❽ $x^2 - (2+\sqrt{3})x + 1 + \sqrt{3} = 0$

الحل

❶ $x^2 + x - 6 = 0$: هنا $a = 1\,,\, b = 1\,,\, c = -6$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-6) = 25$ ولمّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ و $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{-3,2\}$.

❷ $-x^2 + 2x - 1 = 0$: هنا $a = -1 , b = 2 , c = -1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (2)^2 - 4(-1)(-1) = 4 - 4 = 0$

ولمَّا كان $\Delta = 0$ استنتجنا أن لهذه المعادلة جذر مضاعف هو: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$

أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{1\}$.

❸ $u^2 + 5u - 6 = 0$: هنا $a = 1 , b = 5 , c = -6$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (5)^2 - 4(1)(-6) = 25 - 24 = 1$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$u_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{-3, -2\}$.

❹ $3x^2 - 12x + 12 = 0$ يمكن كتابة المعادلة بالشكل $3\left(x^2 - 4x + 4\right) = 0$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $3\left(x - 2\right)^2 = 0$ ومنه $x = 2$ جذر مضاعف أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{2\}$

❺ $-m^2 + m - 20 = 0$: هنا $a = -1 , b = 1 , c = -20$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(-20) = 1 - 80 = -79$ ولمَّا كان $\Delta < 0$

استنتجنا أنَّه ليس لهذه المعادلة حلول أي $S = \phi$

❻ $x^2 + 1.1x + 0.1 = 0$: هنا $a = 1 , b = 1.1 , c = 0.1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (1.1)^2 - 4(1)(0.1) = 1.21 - 0.4 = 0.81$

ولمَّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أنَّ لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1.1 - 0.9}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{و}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1.1 + 0.9}{2} = \frac{-0.2}{2} = -0.1$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{-1, -0.1\}$

❼ $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$: هنا $a = 1 , b = -3\sqrt{2} , c = 4$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)(4) = 18 - 16 = 2$ ولمَّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أنَّ لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{\sqrt{2},2\sqrt{2}\right\}$

❽ $x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x+1+\sqrt{3}=0$: هنا $a=1\ ,\ b=-\left(2+\sqrt{3}\right)\ ,\ c=1+\sqrt{3}$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد

$$\Delta=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\left(1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)=4+4\sqrt{3}+3-4-4\sqrt{3}=3$$

ولمّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{2}=1$$ و

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{2,1+\sqrt{3}\right\}$

③ حلَّ أيضاً المعادلات الآتية:

❶ $3x^2-4\sqrt{7}x-12=0$ ❷ $\sqrt{2}t^2-3t+\sqrt{2}=0$

❸ $2x-x^2-2=0$ ❹ $(2x-1)^2-4=0$

❺ $x^3-8x^2+12x=0$ ❻ $(2-t-t^2)^2=0$

الحل

❶ $3x^2-4\sqrt{7}x-12=0$: هنا $a=3\ ,\ b=4\sqrt{7}\ ,\ c=-12$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(4\sqrt{7}\right)^2-4\left(3\right)\left(-12\right)=112+144=256$ ولمّا

كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\sqrt{7}-16}{2}=2\sqrt{7}-8$$ و

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\sqrt{7}+16}{2}=2\sqrt{7}+8$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{2\sqrt{7}-8,2\sqrt{7}+8\right\}$

❷ $\sqrt{2}t^2-3t+\sqrt{2}=0$: هنا $a=\sqrt{2}\ ,\ b=-3\ ,\ c=\sqrt{2}$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(-3\right)^2-4\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)=9-8=1$ ولمّا كان

$\Delta>0$ استنتجنا أن لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-1}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ و $$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+1}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

❸ يمكن كتابة المعادلة $2x-x^2-2=0$ بالشكل $-x^2+2x-2=0$

هنا $a = -1\ , b = 2\ , c = -2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (2)^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4$ ولمَّا كان

$\Delta < 0$ استنتجنا أنَّه ليس لهذه المعادلة حلول

أي مجموعة حلول المعادلة $S = \phi$

❹ $(2x-1)^2 - 4 = 0$: إذا لاحظنا أن الطرف الأيسر من المعادلة فرق مربَّعين و يساوي مجموع العددين بفرقهما يمكننا كتابة المعادلة بالشكل $[(2x-1)-2][(2x-1)+2] = 0$ ،

بإصلاح كل مقدار بين قوسين مستطيلين نجد أنَّ $(2x-3)(2x+1) = 0$

ومنه إما $x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{3}{2}$ أي مجموعة حلول المعادلة $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

❺ $x^3 - 8x^2 + 12x = 0$: بأخذ العامل المشترك خارج قوسين يمكن كتابة المعادلة بالشكل

$x(x^2 - 8x + 12) = 0$ وبتحليل المقدار من الدرجة الثانية إلى جداء ضرب قوسين نجد

$x(x-2)(x-6) = 0$

ومنه إما $x = 0$ أو $x = 2$ أو $x = 6$ أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{0,2,6\}$.

❻ $(2 - t - t^2)^2 = 0$: باستعمال الحقيقة الآتية:العدد الذي مربَّعه صفر يساوي الصفر ، فإنَّ

هذه المعادلة تكافئ المعادلة $-t^2 - t + 2 = 0$ وهنا $a = -1\ , b = -1\ , c = 2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-1)^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما:

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{و} \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

أي مجموعة حلول المعادلة $S = \{-2,1\}$.

④ عيِّنْ قيمة الوسيط الحقيقي m التي يكون عندها للمعادلة: $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ جذرٌ مضاعفٌ ؟ واحسب عندئذٍ هذا الجذر.

الحل

لنحوِّل ثلاثي الحدود $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ إلى الصِّيغة القانونيَّة

المعادلة $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ يمكن كتابتها بالشكل $x^2 - 4x + 4 - 4 + m - 1 = 0$

أي $(x-2)^2 + m - 5 = 0$.

يكون للمعادلة جذرٌ مضاعفٌ عندما $m - 5 = 0$ أي عندما $m = 5$ عندها الجذر يساوي 2.

<u>حلٌ آخر :</u> هنا لدينا $a = 1\ , b = -4\ , c = m - 1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد

ولمّا كان للمعادلة جذرٌ $\Delta=(-4)^2-4(1)(m-1)=16-4m+4=20-4m$
مضاعفٌ كان المميّز معدوماً . $\Delta=0$ وهذا يكافئ $20-4m=0$ ومنه $m=5$ و
المعادلة $x^2-4x+4=0$ عندها الجذر يساوي $x=\dfrac{-(-4)}{2}=2$.

تَدرَّبْ

① حلّل كلاًّ من ثلاثيّات الحدود الآتية إلى جداء ضرب عوامل من الدَّرجة الأولى:

❶ $f(x)=x^2-7x+10$ ❷ $f(x)=2x^2-5x+2$

❸ $f(x)=-3x^2+4x+4$ ❹ $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$

الحل

❶ $f(x)=x^2-7x+10$: هنا $a=1\,,\,b=-7\,,\,c=10$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(-7\right)^2-4\left(1\right)\left(10\right)=49-40=9$ ولمّا كان
$\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+3}{2}=\frac{10}{2}=5$$

ومنه يمكن كتابة ثلاثي الحدود بالشكل $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x-5\right)$.

❷ $f\left(x\right)=2x^2-5x+2$: هنا $a=2\,,\,b=-5\,,\,c=2$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(5\right)^2-4\left(2\right)\left(2\right)=25-16=9$ ولمّا كان $\Delta>0$
استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

ومنه يمكن كتابة ثلاثي الحدود بالشكل $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-4\right)$.

❸ $f\left(x\right)=-3x^2+4x+4$: هنا $a=-3\,,\,b=4\,,\,c=4$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(4\right)^2-4\left(-3\right)\left(4\right)=16+48=64$ ولمّا كان
$\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-8}{-6}=\frac{-12}{-2}=6 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+8}{-6}=\frac{4}{-6}=-\frac{2}{3}$$

ومنه يمكن كتابة ثلاثي الحدود بالشكل $f\left(x\right)=-3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(x-6\right)$.

❹ $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$: هنا $a=-\dfrac{1}{2}\,,\,b=-\dfrac{1}{2}\,,\,c=1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}\right)(1)=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$ ولمَّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أنَّ لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{-\frac{2}{2}}{-1}=1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{-1}=\frac{\frac{4}{2}}{-1}=-2$$

ومنه يمكن كتابة ثلاثي الحدود بالشكل $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)$.

② فيما يأتي، ادرس تبِعاً لقيم x إشارة ثلاثي الحدود المُعطى:

❶ $f(x)=x^2+x-2$ ❷ $f(x)=-x^2+2x-3$

❸ $f(x)=x^2-4x+4$ ❹ $f(x)=-x^2+6x-5$

الحل

❶ $f(x)=x^2+x-2$: هنا $a=1, b=1, c=-2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(1)^2-4(1)(-2)=1+8=9$ ولمَّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

ولمَّا كان $a>0$ استنتجنا أن $f(x)>0$ عندما $x\in]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$ و $f(x)\leq 0$ عندما $x\in[-2,1]$.

❷ $f(x)=-x^2+2x-3$: هنا $a=-1, b=2, c=-3$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(2)^2-4(-1)(-3)=4-12=-8$ ولمَّا كان $\Delta<0$ استنتجنا أن ليس لثلاثي الحدود جذور.

ولمَّا كان $a<0$ استنتجنا أن $f(x)<0$ أياً كان العدد الحقيقي x.

❸ يمكن كتابة ثلاثي الحدود $f(x)=x^2-4x+4$ بالشكل $f(x)=(x-2)^2$ ومنه $f(x)\geq 0$ أياً كان العدد الحقيقي x.

❹ $f(x)=-x^2+6x-5$: هنا $a=-1, b=6, c=-5$. نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(6)^2-4(-1)(-5)=36-20=16$ ولمَّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-4}{-2}=\frac{-10}{-2}=5 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+4}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

ولمَّا كان $a<0$ استنتجنا أن $f(x)>0$ عندما $x\in[1,5]$ و $f(x)\leq 0$ عندما $x\in]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$.

③ حلَّ كلاً من المتراجحات الآتية:

❶ $x^2 - 3x + 2 > 0$ ❷ $x^2 + x - 20 \le 0$

❸ $x(x-2) < 0$ ❹ $x^2 + 4 \ge 0$

❺ $-x^2 - 9 \ge 0$ ❻ $2x^2 - 24x + 72 < 0$

الحل

❶ $x^2 - 3x + 2 > 0$: هنا $a = 1, b = -3 , c = 2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أنَّ لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ولمَّا كان $a > 0$ استنتجنا أنَّ $x^2 - 3x + 2 > 0$ عندما $x \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

❷ $x^2 + x - 20 \le 0$: هنا $a = 1, b = 1 , c = -20$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-20) = 1 + 80 = 81$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-9}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

ولمَّا كان $a > 0$ استنتجنا أنَّ $x^2 + x - 20 \le 0$ عندما $x \in [-5, 4]$.

❸ $x(x-2) < 0$: من الواضح أنَّ لثلاثي الحدود جذران مختلفان هما:

$x_1 = 0$ و $x_2 = 2$ ولمَّا كان $a > 0$ استنتجنا أن $x(x-2) < 0$ عندما $x \in]0, 2[$.

❹ $x^2 + 4 \ge 0$: لمَّا كان $x^2 + 4 \ge 4$ كانت المتراجحة محققة أياً كان العدد الحقيقي x.

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي $\mathbb{R}$.

❺ يمكننا كتابة المتراجحة $-x^2 - 9 \ge 0$ بالشكل $-(x^2 + 9) \ge 0$

و لمَّا كان $x^2 + 9 \ge 9$ كانت المتراجحة $-(x^2 + 9) \ge 0$ غير محققة أياً كان العدد الحقيقي x. وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي ϕ.

❻ المتراجحة $2x^2 - 24x + 72 < 0$ تكافئ المتراجحة $x^2 - 12x + 36 < 0$

والتي يمكن كتابتها بالشكل $(x-6)^2 < 0$

ولمَّا كان $a > 0$ استنتجنا أن $(x-6)^2 < 0$ غير محققة أياً كان العدد الحقيقي x. وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي ϕ.

فكِّرْ

تأمّل المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$، وافترض أنّ مميِّز ها $\Delta=b^2-4ac$ موجبٌ تماماً. لقد وجدتَ سابقاً صيغة كلٍ من جذريها x_1 و x_2. احسب باستعمال هذه الصيغ المقدارين x_1+x_2 و x_1x_2 واستنتج برهاناً آخر للمُبرهنة السَّابقة.

الحل

لمّا كان $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ كان

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

أيضاً

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$
$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

فكِّرْ

في حالة $\Delta=0$، تُعطي العلاقات $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$. وهذا ما يجعلنا نقول إنَّ للمعادلة جذرين متساويين، أو إنّ لها جذراً مضاعفاً. هل تبقى صيغة مجموع الجذرين وصيغة جداء ضربهما المبيَّنتان سابقاً صحيحتين عند تساوي الجذرين ؟

الحل

نعم تبقى صحيحة ، وذلك لأنَّ

$$x_1+x_2=\frac{-b}{2a}+\frac{-b}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$
$$x_1\cdot x_2=\frac{-b}{2a}\cdot\frac{-b}{2a}=\frac{b^2}{4a^2}=\frac{\Delta+4ac}{4a^2}=\frac{0+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

تَدرَّبْ

① توثَّق أنَّ 2 هو حلٌّ للمعادلة $x^2-5x+6=0$. ما مجموع جذري هذه المعادلة ؟ وما جداء ضربهما؟ استنتج الحل الآخر.

الحل

نعوّض 2 في المعادلة $x^2-5x+6=0$ نحصل على العبارة $2^2-5\cdot 2+6=0$ نجد أنَّها عبارة صحيحة. بالتالي 2 هو حل للمعادلة.

مجموع جذري المعادلة يساوي 5 لأنَّ $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{5}{1}$ و ، وجداء ضربهما يساوي 6. لأنَّ $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1}$

لمَّا كان الحل الأول للمعادلة هو 2 و مجموع الحلين يساوي 5 كان الحل الآخر للمعادلة هو 3.لأنَّ $x_1 + x_2 = 5$ ونعلم أنَّ أحد الجذرين يساوي 2 وليكن x_1 ، إذن $2 + x_2 = 5$ ومنه $x_2 = 3$

② توثَّق أنَّ -1 هو حلٌّ للمعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$. ما مجموع جذري هذه المعادلة؟ وما جداء ضربهما؟ استنتج الحل الآخر.

الحل

نعوض -1 في المعادلة $x^2 + 3x + 2 = 0$ أي $(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 2 = 0$ نجد أنَّها محققة بالتالي -1 هو حل للمعادلة.

مجموع جذري المعادلة يساوي -3، و جداء ضربهما يساوي 2.

لمَّا كان الجذر الأول للمعادلة هو -1 و مجموع الجذرين يساوي -3 كان الجذر الآخر للمعادلة هو -2.

③ لتكن (E) المعادلة $2x^2 + x - m = 0$.

❶ كيف نختار العدد الحقيقي m كي يكون العدد $x = -1$ جذراً للمعادلة (E)؟

❷ استنتج الجذر الآخر.

الحل

لمَّا كان -1 جذراً للمعادلة $2x^2 + x - m = 0$ حصلنا من تعويض -1 في المعادلة على قيمة m أي $2 - 1 - m = 0$ ومنه $m = 1$.

إذا عوَّضنا في المعادلة قيمة m وجدنا أنَّ $2x^2 + x - 1 = 0$. ولمَّا كان مجموع جذري المعادلة يساوي $-\frac{1}{2}$ وكان أحد هذين الجذرين -1 كان الجذر الآخر مساوياً $\frac{1}{2}$.

④ في حالة كلٍّ من المعادلات الآتية ، أوجد أحد الجذرين ذهنياً ، واستنتج الجذر الآخر دون حساب المميِّز:

❶ $x^2 - 7x + 6 = 0$ ❷ $-3x^2 + 2x + 5 = 0$

❸ $x^2 + 3x - 10 = 0$ ❹ $x^2 + 5x + 4 = 0$

❺ $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$ ❻ $2x^2 + \sqrt{5}x - 15 = 0$

الحل

❶ نلاحظ أن مجموع أمثال الحدود يساوي صفر ومنه 1 هو جذر للمعادلة.

ولمَّا كان مجموع جذري المعادلة يساوي 7 وكان أحد جذري المعادلة 1 كان الجذر الآخر يساوي 6.

❷ نلاحظ أن مجموع أمثال الحدود ذات القوى الزوجية يساوي مجموع أمثال الحدود ذات القوى الفردية إذن -1 هو جذر للمعادلة. ولمَّا كان مجموع جذري المعادلة يساوي $\frac{2}{3}$ وكان أحد جذري المعادلة -1 كان الجذر الآخر مساوياً $\frac{5}{3}$.

❸ من الواضح أن 2 أحد جذري المعادلة ولمَّا كان مجموع جذري المعادلة مساوياً -3 وكان أحد جذور المعادلة 2 كان الجذر الآخر مساوياً -5.

❹ من الواضح أن -1 أحد جذري المعادلة ولمَّا كان مجموع جذري المعادلة مساوياً -5 وكان أحد جذور المعادلة -1 كان الجذر الآخر مساوياً -4.

❺ من الواضح أن $-\sqrt{2}$ أحد جذري المعادلة ولمَّا كان مجموع جذري المعادلة مساوياً $\sqrt{2}$ وكان أحد جذور المعادلة $-\sqrt{2}$ كان الجذر الآخر مساوياً $2\sqrt{2}$.

❻ من الواضح أن $\sqrt{5}$ أحد جذري المعادلة ولمَّا كان مجموع جذور المعادلة مساوياً $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ وكان أحد جذري المعادلة $\sqrt{5}$ كان الجذر الآخر مساوياً $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

⑤ جِدِ العددين الحقيقيَّين m و n لتكون المعادلتان الآتيتان متكافئتين.

$$x^2 - mx + m - n = 0 \quad \text{و} \quad 3x^2 - (m+6)x + 1 - n = 0$$

الحل

تكون المعادلتان متكافئتين عندما يكون لهما الجذور ذاتها ، ومنه مجموع جذري المعادلة الأولى يساوي مجموع جذري المعادلة الثانية أي $\frac{m+6}{3} = m$

و كذلك جداء ضرب جذري المعادلة الأولى يساوي جداء ضرب جذري المعادلة الثانية أي

$$\frac{1-n}{3} = m - n$$

من المعادلة $\frac{m+6}{3} = m$ نجد أنَّ $m = 3$ نعوض قيمة m بالمعادلة $\frac{1-n}{3} = m - n$ نجد $1 - n = 9 - 3n$ ومنه $n = 4$.

فَكِّرْ

الخيار الصعب: تخيّل أنّك باحثٌ عن الذهب. تريد شراء قطعة أرض يمكن أن تكون غنيّة بعروق الذهب، شريطة أن تكون على هيئة مستطيل محيطه معطى ولنقل $2p$. يعرضُ البائعُ عليك عدةَ قطع أرضٍ متساوية السعر ومحيطها $2p$. تدرك على الفور أنّ من مصلحتك الإجابة عن السؤال الآتي:أبَيْنَ جميع قطع الأرض المعروضة، قطعةٌ مساحتُها أكبرُ ما يمكن ؟ ما أبعادها؟

① نرمز بالرمز x إلى أحد بعدَي المستطيل. تيقَّنْ أنَّ مساحتَه تُعطى بالعلاقة:

$$S(x) = -x^2 + px$$

② اكتبْ $S(x)$ بالصيغة القانونيّة. عند أيّ قيمة للمتغيِّر x يكون $S(x)$ أكبر ما يمكن. ثُمّ احسبْ بُعديْ المستطيل الموافق.

الحل

① لمّا كان أحد بعدي المستطيل يساوي x كان البعد الآخر مساوياً $\dfrac{2p-2x}{2} = p - x$.

ومنه استنتجنا أنَّ مساحة المستطيل تساوي $S\left(x\right) = x\left(p-x\right) = -x^2 + px$.

② نكتب $S(x)$ بالصورة القانونيَّة كما يلي

$$S\left(x\right) = -x^2 + px = -\left(x^2 - px\right) = -\left(x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$$

$$= -\left(x^2 - px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}\right) = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4}$$

لمَّا كان $-\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \leq 0$ كان $-\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} \leq \frac{p^2}{4}$ أي $S\left(x\right) \leq \frac{p^2}{4}$.

بالتالي تكون مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما $x = \frac{p}{2}$. وتبلغ المساحة القيمة $\frac{p^2}{4}$

وعندها يكون البعد الآخر مساوياً $p - x = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$.

تَدرَّبْ: معادلاتٌ و متراجحاتٌ مضاعفة التربيع

لنتأمّل المسألة الآتية: أيوجد عددٌ حقيقي يكون مجموع مربعه ومقلوب مربعه مساوياً 6 ؟

تؤول هذه المسألة إلى حلِّ المعادلة: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 6$ في $\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$، وهي تكافئُ في المجموعة نفسها المعادلةَ (E) الآتية: $\qquad x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \qquad (E)$

المعادلة (E) هي معادلة من الدرجة **الرابعة**، تُسمَّى **معادلة مضاعفة التربيع**، إذ لا تضمُّ سوى الحدين x^4 و x^2 والحد الثابت.

① **حلُّ المعادلة (E)**

❶ أثبت أنَّه إذا كان x_0 حلاً للمعادلة (E)، كان $t_0 = x_0^2$ حلاً للمعادلة (E') التالية

$$t^2 - 6t + 1 = 0 \qquad (E')$$

❷ بالعكس، أثبت أنَّه إذا كان العدد الموجب t_0 حلاً للمعادلة (E')، كان $x_1 = \sqrt{t_0}$ و $x_2 = -\sqrt{t_0}$ حلَّيْن للمعادلة (E).

❸ أوجد إذن حلول المعادلة (E).

الحل

❶ إذا كان x_0 حلاً للمعادلة (E)، تحققت المساواة $x_0^4 - 6x_0^2 + 1 = 0$، ولما كان $t_0 = x_0^2$ وجدنا بالتعويض أنَّ $t_0^2 - 6t_0 + 1 = 0$ ومنه كان $t_0 = x_0^2$ حلاً للمعادلة (E') .

❷ إذا كان العدد الموجب t_0 حلاً للمعادلة (E')، تحقَّقت المساواة $t_0^2 - 6t_0 + 1 = 0$ ، فإذا كان $x_1 = \sqrt{t_0}$ وجدنا أنَّ $x_1^2 = t_0$ ، وبالتعويض في المساواة السابقة وجدنا أنَّ $x_1^4 - 6x_1^2 + 1 = 0$ ، وهذا معناه أنَّ $x_1 = \sqrt{t_0}$ جذرٌ للمعادلة (E).

كذلك الأمر بالنسبة لـ $x_2 = -\sqrt{t_0}$ ، مربَّعها $x_2^2 = t_0$ ، وبالتعويض في المساواة السابقة وجدنا أنَّ $x_2^4 - 6x_2^2 + 1 = 0$ ، وهذا معناه أنَّ $x_2 = \sqrt{t_0}$ جذرٌ للمعادلة (E).

❸ إذن لإيجاد حلول المعادلة (E). بدايةً نوجد حلول المعادلة (E') ، مميِّز ها $\Delta = b^2 - 4ac$ ويساوي $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(1) = 32$ ولمَّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أنَّ لهذه المعادلة جذرين مختلفين هما: $t_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3-2\sqrt{2}$ و $t_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3+2\sqrt{2}$

نكتب كلاً من جذري المعادلة (E') على صورة مربعٍ كاملٍ:

$$t_1 = 3-2\sqrt{2} = 1-2\sqrt{2}+2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2, t_2 = 3+2\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$$

ومن الدراسة السَّابقة نجد أنَّ $x_1 = \sqrt{t_1} = \sqrt{2}-1$ ، $x_2 = -\sqrt{t_1} = 1-\sqrt{2}$ ، $x_3 = \sqrt{t_2} = \sqrt{2}+1$ ، $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{2}-1$ هي الجذور الأربعة للمعادلة (E) .

② حلُّ معادلات و متراجحات مضاعفة التربيع

حُلَّ كلاً من المعادلات أو المتراجحات المضاعفة التربيع الآتية:

❶ $x^4 - x^2 + 12 = 0$ ❷ $2x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 1 = 0$

❸ $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ ❹ $x^4 - 3x^2 - 4 \geq 0$

❺ $x^4 - 5x^2 + 6 > 0$ ❻ $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$

الحل

❶ نضع $t = x^2$ **ومنه** $t^2 - t + 12 = 0$. **هنا** $a = 1 , b = -1 , c = 12$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = \left(-1\right)^2 - 4\left(1\right)\left(12\right) = 1 - 48 = -47$ ولمَّا كان $\Delta < 0$ استنتجنا أنَّه ليس لهذه المعادلة أي حل ، أي مجموعة حلول المعادلة $S = \phi$.

❷ **نضع** $t = x^2$ **ومنه** $2t^2 - \dfrac{3}{2}t + 1 = 0$ **وبضرب طرفي المعادلة بـ** 2 **نحصل على المعادلة المكافئة** $4t^2 - 3t + 2 = 0$. هنا $a = 4 , b = -3 , c = 2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = \left(-3\right)^2 - 4\left(4\right)\left(2\right) = 9 - 32 = -21$ ولمَّا كان $\Delta < 0$ استنتجنا أنَّه ليس لهذه المعادلة أي حل ، أي مجموعة حلول المعادلة $S = \phi$.

❸ نضع $t = x^2$ ومنه $t^2 + 2t + 1 = 0$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $\left(t+1\right)^2 = 0$

ومنه $t=-1$ أي $x^2=-1$ وهذا مستحيل، أي ، أي مجموعة حلول المعادلة $S=\phi$.

❹ نضع $t=x^2$ ومنه $t^2-3t-4\geq 0$. هنا $a=1\ ,\ b=-3\ ,\ c=-4$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1$ ولمَّا كان $\Delta>0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+5}{2}=\frac{8}{2}=4 \text{ و } t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-5}{2}=-\frac{2}{2}=-1$$

ولمَّا كان $a>0$ استنتجنا أن $t^2-3t-4\geq 0$ عندما $t\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[4,+\infty\right[$.

بالعودة للمتحول x نجد أن $x^2\in\left[4,+\infty\right[$ حيث أن x^2 لا يمكن أن يكون سالب،

لمَّا كان $x^2\in\left[4,+\infty\right[$ كان $x\in\left]-\infty,-2\right]\cup\left[2,+\infty\right[$.

❺ نضع $t=x^2$ ومنه $t^2-5t+6>0$. هنا $a=1\ ,\ b=-5\ ,\ c=6$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$ ولمَّا كان $\Delta>0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3 \text{ و } t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

ولمَّا كان $a>0$ استنتجنا أن $t^2-5t+6>0$ عندما $t\in\left]-\infty,2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$.

بالعودة للمتحول x نجد أن $x^2\in\left[0,2\right[\cup\left]3,+\infty\right[$ حيث أن x^2 لا يمكن أن يكون سالب،

لمَّا كان $x^2\in\left[0,2\right[$ كان $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$.

لمَّا كان $x^2\in\left]3,+\infty\right[$ كان $x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

❺ نضع $t=x^2$ ومنه $t^2-10t+9\leq 0$. هنا $a=1\ ,\ b=-10\ ,\ c=9$ نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-10)^2-4(1)(9)=100-36=64$ ولمَّا كان $\Delta>0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10+8}{2}=\frac{18}{2}=9 \text{ و } t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10-8}{2}=\frac{2}{2}=1$$

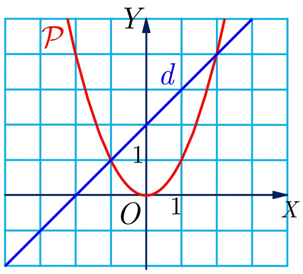
ولمَّا كان $a>0$ استنتجنا أن $t^2-10t+9\leq 0$ عندما $t\in\left[1,9\right]$.

بالعودة للمتحول x نجد أن $x^2\in\left[1,9\right]$. لمَّا كان $x^2\in\left[1,9\right]$ كان $x\in\left[-3,-1\right]\cup\left[1,3\right]$.

تمرينات ومسائل

1 نجد في الشكل المجاور: قطعاً مكافئاً $\mathcal{P}$ معادلته في معلمٍ متجانس هي $y = x^2$. وعلى مستقيمٍ d معادلته $y = x + 2$.

أوجد إحداثيات نقطتيْ تقاطعِ الخطَّين $\mathcal{P}$ و d.



الحل

لإيجاد إحداثيات نقطتي التقاطع نحل المعادلتين حل مشترك أي $x^2 = x + 2$ أي $x^2 - x - 2 = 0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية. هنا $a = 1,\ b = -1\ ,\ c = -2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2 + 8 = 9) = 1$ ولمّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

لإيجاد تراتيب نقطتي التقاطع نعوض $x_1 = -1$ في أي من المعادلتين ومن الأسهل هنا تعويضها بمعادلة المستقيم $y = x + 2$ ومنه نجد $y_1 = x_1 + 2 = -1 + 2 = 1$، نعوض $x_2 = 2$ في معادلة المستقيم $y = x + 2$ ومنه نجد $y_2 = x_2 + 2 = 2 + 2 = 4$.

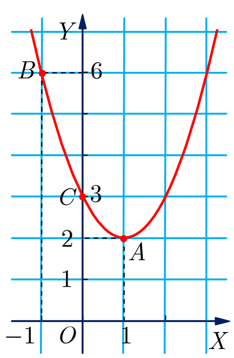
2 نتأمّل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$، $(a \neq 0)$.

① احسبْ بدلالة a و b و c المقادير الآتية:

- $P(0)$
- $\dfrac{P(1) - P(-1)}{2}$
- $\dfrac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2}$

② المنحني المبيّن في الشكل المجاور هو الخط البياني لتابع ثلاثي حدود من الدرجة الثانية $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$ مُعرَّف على $\mathbb{R}$.

عيّنْ a و b و c مستفيداً من المعلومات المتاحة في التمثيل البيانيّ.



الحل

① $P(0) = c$

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = \frac{(a+b+c) - (a-b+c)}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

$$\frac{P(1) + P(-1) - 2P(0)}{2} = \frac{(a+b+c) + (a-b+c) - 2c}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

② من الواضح أن منحني التابع يمر بالنقاط $(1,2)\,,(0,3)\,,(-1,6)$

لدينا $P(0)=c$ ومنه $c=3$

لدينا $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}=b$ ومنه $b=\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}=\dfrac{1-6}{2}=-\dfrac{5}{2}$

لدينا $\dfrac{P(1)+P(-1)-2P(0)}{2}=a$ ومنه

$$a=\frac{P(1)+P(-1)-2P(0)}{2}=\frac{1+6-6}{2}=\frac{1}{2}$$

ومنه التابع هو $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x+3$.

3 ادرس إشارة كلٍّ من كثيرات الحدود الآتية تِبعاً لقيم x.

① $f(x)=x^2-x-6$ ② $f(x)=3-2x+x^2$

③ $f(x)=-2x^2+x+1$ ④ $f(x)=-x^2+\sqrt{2}x-1=0$

الحل

① $f(x)=x^2-x-6$. هنا $a=1,\ b=-1\ ,\ c=-6$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-1)^2-4(1)(-6)=1+24=25$ ولمَّا كان $\Delta>0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

ولمَّا كان $a>0$ استنتجنا أن $f(x)>0$ عندما $x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]3,+\infty[$ و $f(x)\le 0$ عندما $x\in[-2,3]$.

② $f(x)=3-2x+x^2$. هنا $a=1,\ b=-2\ ,\ c=3$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-2)^2-4(1)(3)=4-12=-8$ ولمَّا كان $\Delta<0$

استنتجنا أنَّ إشارة ثلاثي الحدود من إشارة a.

ولمَّا كان $a>0$ استنتجنا أن $f(x)>0$ أياً كان العدد الحقيقي x.

③ $f(x)=-2x^2+x+1$. هنا $a=-2,\ b=1\ ,\ c=1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(1)^2-4(-2)(1)=1+8=9$ ولمَّا كان $\Delta>0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-3}{-4}=\frac{-4}{-4}=1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+3}{-4}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

ولمّا كان $a<0$ استنتجنا أن $f(x)<0$ عندما $x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ و $f(x)\le 0$ عندما $x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

④ $f(x)=-x^2+\sqrt{2}x-1$. هنا $a=-1,\ b=\sqrt{2}\ ,\ c=-1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-4(-1)(-1)=2-4=-2$ ولمّا كان $\Delta<0$

استنتجنا أنَّ إشارة ثلاثي الحدود من إشارة a.

ولمّا كان $a<0$ استنتجنا أن $f(x)<0$ أياً كان العدد الحقيقي x.

4 حلّ كلاً من المتراجحات الآتية:

① $x^2+4x-12<0$ ② $x^2-5x+7>0$

③ $-2x^2+12x-18\ge 0$ ④ $3x(1-x)<0$

⑤ $29x\ge x^2-96$ ⑥ $(2x-3)(x+5)\le 0$

الحل

① $x^2+4x-12<0$. هنا $a=1,\ b=4\ ,\ c=-12$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(4)^2-4(1)(-12)=16+48=64$ ولمّا كان $\Delta>0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$$

ولمّا كان $a>0$ استنتجنا أن $x^2+4x-12<0$ عندما $x\in\left]-6,2\right[$.

② $x^2-5x+7>0$. هنا $a=1,\ b=-5,\ c=7$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-5)^2-4(1)(7)=25-28=-3$ ولمّا كان $\Delta<0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود إشارة واحدة هي إشارة a

ولمّا كان $a>0$ استنتجنا أن $x^2-5x+7>0$ أياً كان العدد الحقيقي x.

③ المتراجحة $-2x^2+12x-18\ge 0$ تكافئ المتراجحة $x^2-6x+9\le 0$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $(x-3)^2\le 0$ ولمّا كان $(x-3)^2\ge 0$ كانت المتراجحة محققة إذا وفقط إذا كان $x=3$.

④ $3x(1-x)<0$. نلاحظ أن للمعادلة $3x(1-x)=0$ جذرين مختلفين هما $x_1=0\ ,\ x_2=1$

ولمّا كان أمثال الحد x^2 سالب كانت المتراجحة السابقة محققة عندما $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

⑤ $29x\ge x^2-96$ يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالشكل $x^2-29x-96\le 0$

هنا $a=1,\ b=-29\ ,\ c=-96$. نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد

$\Delta=(29)^2-4(1)(-96)=1225$ ولمّا كان $\Delta>0$، استنتجنا لثلاثي الحدود جذرين مختلفين:

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29+35}{2} = \frac{64}{2} = 32 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{29-35}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

ولمّا كان $a > 0$ استنتجنا أن $x^2 - 29x - 96 \leq 0$ عندما $x \in \left[3,32\right]$.

⑥ $\left(2x-3\right)\left(x+5\right) \leq 0$. نلاحظ أن للمعادلة $\left(2x-3\right)\left(x+5\right) = 0$ جذرين مختلفين هما $x_2 = -5$, $x_1 = \frac{3}{2}$ ولمّا كان أمثال الحد x^2 موجب كانت المتراجحة محققة عندما $x \in \left[-5,\frac{3}{2}\right]$.

5 أوجد الأعداد الحقيقيّة m التي تجعل ثلاثي الحدود $f(x) = -x^2 + 2x - m$ سالباً على $\mathbb{R}$.

الحل

يكون ثلاثي الحدود $f\left(x\right) = -x^2 + 2x - m$ سالباً على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان مميّز ثلاثي الحدود سالب و أمثال x^2 سالب. هنا $a = -1, b = 2\ , c = -m$

لدينا $a < 0$، نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = \left(2\right)^2 - 4\left(1\right)\left(-m\right) = 4 - 4m$.

ومنه يكون ثلاثي الحدود $f\left(x\right) = -x^2 + 2x - m$ سالباً على $\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $4 - 4m \leq 0$ أي $m \geq 1$ أي $m \in \left[1,+\infty\right[$.

6 حلَّ المتراجحة (I) التالية: $\frac{4x+3}{x-2} \geq \frac{-2x}{x+1}$.

الحل

لا يكون للمتراجحة معنى في حال كانت $x = -1$ أو $x = 2$، إذن سنحلُّ المتراجحة (I) في المجموعة $\mathbb{R}\backslash\left\{-1,2\right\}$.

يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالشكل $\frac{4x+3}{x-2} - \frac{-2x}{x+1} \geq 0$ أي

$$\frac{-2x\left(x-2\right)-\left(4x+3\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)\left(x-2\right)} \geq 0$$

ومنه $\frac{-2x^2+4x-\left(4x^2+7x+3\right)}{\left(x+1\right)\left(x-2\right)} \geq 0$ بالتالي $\frac{-2x^2+4x-4x^2-7x-3}{\left(x+1\right)\left(x-2\right)} \geq 0$

أي $\frac{-6x^2-3x-3}{\left(x+1\right)\left(x-2\right)} \geq 0$.

لدراسة إشارة البسط نكتب $-6x^2 - 3x - 3 = 0$ والتي تكافئ المعادلة $-2x^2 - x - 1 = 0$، هنا $a = -2, b = -1\ , c = -1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$-6x^2-3x-3$	$-$	0	$-$

إشارة المقام

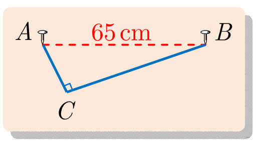
x	$-\infty$ $\quad -1$ $\quad 2$ $\quad +\infty$
$(x+1)(x-2)$	$+$ $\quad 0$ $\quad -$ $\quad 0$ $\quad +$

إشارة الكسر $C(x)$

و المتراجحة محققة عندما $x \in]-1,2[$.

x	$-\infty$ $\quad -1$ $\quad 2$ $\quad +\infty$
$-6x^2-3x-3$	$-$ $\quad -$ $\quad -$ $\quad -$
$(x+1)(x-2)$	$+$ $\quad 0-$ $\quad -0$ $\quad +$
$C(x)$	$-$ $\quad \|+$ $\quad +\|$ $\quad -$
	غير محققة $\quad$ محققة $\quad$ غير محققة

7 كتابة المعادلة الموافقة لمسألة



نثبّت خيطاً طوله $89\,\text{cm}$ من طرفيه إلى مسمارين A و B. المسافة بينهما $65\,\text{cm}$.

يُطلب تبيان إذا كان بالإمكان شدُّ الخيط بطريقة تجعل المثلّث ACB قائماً في C. ثُمّ أعد السؤال في الحالة التي يكون فيها طول الخيط مساوياً $91\,\text{cm}$.

الحل

لدينا من الفرض طول الضلع $AB = 65\ cm$.

لنفترض أن طول الضلع AC يساوي $x\ cm$، لمّا كان طول الخيط يساوي $89\,\text{cm}$ كان طول الضلع BC يساوي $89 - x\ cm$،

يكون المثلث ACB قائماً في C إذا وفقط إذا كان $AB^2 = AC^2 + BC^2$

أي $65^2 = x^2 + (89-x)^2$ ومنه $4225 = x^2 + x^2 + 7921 - 178x$ أي

$2x^2 - 178x + 3696 = 0$، وبالقسمة على 2 نجد المعادلة من الدرجة الثانية

$$x^2 - 89x + 1848 = 0$$

هنا $a = 1,\ b = -89\ ,\ c = 1848$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (89)^2 - 4(1)(1848) = 7921 - 7392 = 529$ ولمّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{89-23}{2} = \dfrac{66}{2} = 33$ و $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{89+23}{2} = \dfrac{112}{2} = 56$

ولمّا كان طول أحد الأضلاع يساوي $x\ cm$ والثاني يساوي $89 - x\ cm$، استنتجنا أن طول أحد الضلعين يساوي $33\ cm$ والثاني يساوي $56\ cm$.

◈ في حال كان طول الخيط مساوياً $91\,\text{cm}$.

لنفترض أن طول الضلع AC يساوي $x\ cm$، لمَّا كان طول الخيط يساوي 91cm كان طول الضلع BC يساوي $91-x\ cm$،

يكون المثلث ACB قائماً في C إذا وفقط إذا كان $AB^2 = AC^2 + BC^2$

أي $65^2 = x^2 + (91-x)^2$ ومنه $4225 = x^2 + x^2 + 8281 - 182x$ أي

$2x^2 - 182x + 4056 = 0$، وبالقسمة على 2 نجد المعادلة من الدرجة الثانية

$$x^2 - 91x + 2028 = 0$$

هنا $a = 1, b = -91 , c = 2028$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (91)^2 - 4(1)(2028) = 8281 - 8112 = 169$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{91-13}{2} = \frac{78}{2} = 39 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{91+13}{2} = \frac{104}{2} = 52$$

ولمَّا كان طول أحد الأضلاع يساوي $x\ cm$ والثاني يساوي $91-x\ cm$، استنتجنا أن طول أحد الضلعين يساوي $39\ cm$ والثاني يساوي $52\ cm$.

8 ليكن m عدداً حقيقيّاً، وليكن f التابعَ من الدرجة الثانية المُعرَّف وفق $f(x) = x^2 - (m+1)x + 4$.

① ما قيم m التي يكون للمعادلة $f(x) = 0$ عند كلٍّ منها جذرٌ وحيدٌ ؟ احسب عندئذٍ هذا الجذر.

② ما قيم m التي لا يكون للمعادلة $f(x) = 0$ عند أيٍّ منها أيَّ حل.

الحل

① يكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذرٌ وحيدٌ عندما يكون المميِّز $\Delta = 0$ أي

$(m+1)^2 - 4(1)(4) = 0$ ومنه $m^2 + 2m + 1 - 16 = 0$ أي $m^2 + 2m - 15 = 0$

هنا $a = 1, b = 2 , c = -15$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (2)^2 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$m_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-8}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \quad \text{و} \quad m_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

ومن قيم m التي يكون للمعادلة $f(x)=0$ عند كلٍّ منها جذرٌ وحيدٌ هي $\{-5,3\}$.

بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد $f(x)=x^2+4x+4$ أو $f(x)=x^2-4x+4$.

② قيم m التي لا يكون للمعادلة $f(x)=0$ عند أيٍّ منها أيَّ حل، عندما يكون المميِّز سالب $\Delta<0$ أي $(m+1)^2-4\left(1\right)\left(4\right)<0$ ومنه $m^2+2m+-15<0$ وهذا يتحقق عندما $m\in\left]-5,3\right[$.

9 حُلَّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $x(x+1)+x^2-1=0$ ② $3x^2+(x-2)(x+3)=12$

③ $4(x+3)^2-(x-5)^2=0$ ④ $\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}=2x-1$

⑤ $\dfrac{3x}{x+2}-\dfrac{x+1}{x-2}=-\dfrac{11}{5}$ ⑥ $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{2x-5}=\dfrac{9}{4}$

الحل

① يمكن كتابة المعادلة بالشكل $x(x+1)+\left(x-1\right)\left(x+1\right)=0$ وبإخراج العامل المشترك $(x+1)$ خارج قوسين نجد $(x+1)\left[x+\left(x-1\right)\right]=0$ ومنه $(x+1)\left(2x-1\right)=0$ إذن إما $x=-1$ أو $x=\dfrac{1}{2}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{\dfrac{1}{2},-1\right\}$.

② بنقل المقادير إلى جهة واحدة من إشارة المساواة يمكننا كتابة المعادلة بالشكل $3\left(x^2-4\right)+(x-2)(x+3)=0$ نحلل فرق المربعين إلى جداء ضرب مجموع عددين بفرقهما نجد $3\left(x-2\right)\left(x+2\right)+(x-2)(x+3)=0$ وبإخراج العامل المشترك خارج قوسين $\left(x-2\right)\left[3\left(x+2\right)+(x+3)\right]=0$ وبفك الأقواس الداخلية وتجميع الحدود $\left(x-2\right)\left[4x+9\right]=0$ ومنه

$x=2$ أو $x=-\dfrac{9}{4}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{-\dfrac{9}{4},2\right\}$.

③ إذا لاحظنا أنَّ المقدار في الطرف الأيسر عبارة عن فرق مربعين أمكننا كتابة المعادلة بالشكل $\left[2(x+3)-(x-5)\right]\left[2(x+3)+(x-5)\right]=0$ وبإجراء العمليات المناسبة لفك الأقواس نجد $\left[2x+6-x+5\right]\left[2x+6+x-5\right]=0$ ومنه $\left[x+11\right]\left[3x+1\right]=0$ ومنه:

إما $x=-11$ أو $x=-\dfrac{1}{3}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{-11,-\dfrac{1}{3}\right\}$.

④ بضرب طرفي المعادلة بـ $x+1$ نجد $x^2+2x-1=(2x-1)(x+1)$ وبنشر الطرف الأيمن $x^2+2x-1=2x^2+x-1$ وبالاختزال نجد $x^2-x=0$ وبإخراج x كعامل مشترك نكتب $x(x-1)=0$ ،ومنه:

$x=0$ أو $x=1$ ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\{0,1\}$.

⑤ بضرب طرفي المعادلة بـ $(x-2)(x+2)$ نجد

$$3x(x-2)-(x+1)(x+2)=-\frac{11}{5}(x^2-4)$$

وبنشر الطرف الأيسر $3x^2-6x-x^2-3x-2=-\frac{11}{5}(x^2-4)$ وبالاختزال في الطرف الأيسر نجد $2x^2-9x-2=-\frac{11}{5}(x^2-4)$ وبضرب طرفي المعادلة بـ 5 نجد $10x^2-45x-10=-11x^2+44$ وبالاختزال نجد $21x^2-45x-54=0$ وبالقسمة على 3 نكتب $7x^2-15x-18=0$ ،هنا $a=7,\ b=-15\ ,\ c=-18$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-15)^2-4(7)(-18)=225+504=729$ ولمّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{15-27}{14}=-\frac{6}{7}\text{ و }x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{15+27}{14}=\frac{42}{14}=3$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{-\frac{6}{7},3\right\}$.

⑥ بضرب طرفي المعادلة بـ $(2x-5)(x+2)$ نجد

$$(2x-5)-2(x+2)=\frac{9}{4}(2x-5)(x+2)$$

وبنشر الطرف الأيسر $2x-5-2x-4=\frac{9}{4}(2x-5)(x+2)$ وبالاختزال في الطرف الأيسر نجد $-9=\frac{9}{4}(2x-5)(x+2)$ وبضرب طرفي المعادلة بـ 4 والقسمة على 9 نجد $-4=(2x-5)(x+2)$ وبنشر الطرف الأيمن نجد $-4=2x^2-x-10$ وبالاختزال نكتب $2x^2-x-6=0$ ،هنا $a=2,\ b=-1\ ,\ c=-6$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-1)^2-4(2)(-6)=1+48=49$ ولمّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-7}{4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}\text{ و }x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+7}{4}=\frac{8}{4}=2$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{-\frac{3}{2},2\right\}$.

10 حُلَّ كلاً من المتراجحات الآتية:

① $\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2} > 0$ ② $(2x-1)^2 > (x+1)^2$

③ $(x+3)(x-1) < 2x+6$ ④ $\dfrac{x+3}{1-x} \geq -5$

الحل

① ندرس إشارة البسط $2x^2+5x+3$. هنا $a=2,\ b=5\ ,\ c=3$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (5)^2 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-1}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+1}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

ومنه جدول إشارة البسط هو

x	$-\infty$		$-3/2$		-1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ندرس إشارة المقام x^2+x-2

هنا $a=1,\ b=1\ ,\ c=-2$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

ومنه جدول إشارة المقام هو

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

إشارة الكسر في الجدول

x	$-\infty$		-2		$-3/2$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+5x+3$			$+$		0	$-$	0		$+$		
x^2+x-2		$+$	0		$-$		$-$		0	$+$	
$\dfrac{2x^2+5x+3}{x^2+x-2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
		محققة		غير محققة		محققة		غير محققة		محققة	

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي: $S = \left]-\infty,-2\right[\cup \left]-\dfrac{3}{2},-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

② يمكن كتابة المتراجحة بالشكل $(2x-1)^2 - (x+1)^2 > 0$ وبالإفادة من المطابقة التربيعية

نكتب $\left[(2x-1)-(x+1)\right]\left[(2x-1)+(x+1)\right] > 0$ وباختزال الطرف الأيسر نجد

$3x(x-2) > 0$.

جدول إشارة التركيب $3x(x-2)$

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
$3x$	$-$ 0 $+$ $+$
$x-2$	$-$ $-$ $-$ 0 $+$
$3x(x-2)$	$+$ 0 $-$ $-$ 0 $+$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي

$S =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

③ يمكن كتابة المتراجحة بالشكل $(x+3)(x-1)-2(x+3) < 0$ وبإخراج $(x+3)$ عامل مشترك نكتب $(x+3)[(x-1)-2] < 0$ وباختزال الطرف الأيسر نجد $(x+3)(x-3) < 0$.

جدول إشارة التركيب $3x(x-2)$

x	$-\infty$ -3 3 $+\infty$
$x-3$	$-$ $-$ 0 $+$
$x+3$	$-$ 0 $+$ $+$ $+$
$(x-3)(x+3)$	$+$ 0 $-$ $-$ 0 $+$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي

$S =]-3, +3[$

④ يمكن كتابة المتراجحة بالشكل $\dfrac{x+3}{1-x} + 5 \geq 0$

لا يكون للمتراجحة معنى في حال كانت $x = 1$ ، إذن سنحلُّ المتراجحة في المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

بتوحيد المقامات نجد $\dfrac{x+3+5(1-x)}{1-x} \geq 0$ أي $\dfrac{8-4x}{1-x} \geq 0$.

جدول إشارة الكسر

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$8-4x$	$+$ $+$ 0 $-$
$1-x$	$+$ 0 $-$ $-$ $-$
$\dfrac{8-4x}{1-x}$	$+$ $\|$ $-$ $-$ 0 $+$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي

$S =]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$

11 حُلَّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ ② $2x^4 - x^2 + 1 = 0$

③ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ ④ $4x^2 - 35 - \dfrac{9}{x^2} = 0$

⑤ $-2x^4 + 12x^2 - 16 = 0$ ⑥ $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

الحل

① نضع $t = x^2$ ومنه $4t^2 - 5t + 1 = 0$. هنا $a = 4\ , b = -5\ , c = 1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$t_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+3}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$ ومنه $x_1 = \sqrt{t_1} = 1$ و $x_2 = -\sqrt{t_1} = -1$

$t_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{8} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$ ومنه $x_3 = \sqrt{t_2} = \dfrac{1}{2}$ و $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\dfrac{1}{2}$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

② نضع $t = x^2$ ومنه $2t^2 - t + 1 = 0$. هنا $a = 2 , b = -1 , c = 1$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(1) = 1 - 8 = -7$ ولمَّا كان $\Delta < 0$ استنتجنا أنَّه ليس لهذه المعادلة حلول.

③ نضع $t = x^2$ ومنه $t^2 - 8t - 9 = 0$. هنا $a = 1 , b = -8 , c = -9$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-8)^2 - 4(1)(-9) = 64 + 36 = 100$ ولمَّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أنَّ لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 - 10}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ ولمَّا كان x^2 لا يساوي عدداً سالباً تماماً استنتجنا أنَّه لا يوجد حلول هنا.

$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 + 10}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ومنه $x_1 = \sqrt{t_2} = 3$ و $x_2 = -\sqrt{t_2} = -3$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{-3, 3\}$.

④ يكون للمعادلة معنى في حال كانت $x \neq 0$ أي أنَّ حلَّ المعادلة في $\mathbb{R} \backslash \{0\}$

بضرب طرفي المعادلة بـ x^2 نجد $4x^4 - 35x^2 - 9 = 0$

نضع $t = x^2$ ومنه $4t^2 - 35t - 9 = 0$

هنا $a = 4 , b = -35 , c = -9$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-35)^2 - 4(4)(-9) = 1225 + 144 = 1369$ ولمَّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{35 - 37}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ ولمَّا كان x^2 لا يمكن أن يساوي عدداً سالباً تماماً استنتجنا أنَّه لا يوجد حلول هنا.

$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{35 + 37}{8} = \frac{72}{8} = 9$ ومنه $x_1 = \sqrt{t_2} = 3$ و $x_2 = -\sqrt{t_2} = -3$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{-3, 3\}$.

⑤ نضع $t = x^2$ ومنه $-2t^2 + 12t - 16 = 0$ وبقسمة طرفي المعادلة على -2 نكتب المعادلة $t^2 - 6t + 8 = 0$

هنا $a = 1 , b = -6 , c = 8$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8) = 36 - 32 = 4$ ولمَّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$ ومنه $x_1 = \sqrt{t_1} = 2$ و $x_2 = -\sqrt{t_1} = -2$

$t_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ ومنه $x_3 = \sqrt{t_2} = \sqrt{2}$ و $x_4 = -\sqrt{t_2} = -\sqrt{2}$

بالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right\}$.

⑥ نضع $t = x^2$ **ومنه** $t^2 + 5t + 4 = 0$. هنا $a = 1 \, , b = 5 \, , c = 4$

نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = \left(5\right)^2 - 4\left(1\right)\left(4\right) = 25 - 16 = 9$ ولمّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-3}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ ولمّا كان x^2 لا يساوي عدداً سالباً تماماً استنتجنا أنَّه لا يوجد حلول هنا.

$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ ولمّا كان x^2 لا يساوي عدداً سالباً استنتجنا أنَّه لا يوجد حلول هنا.

بالتالي لا يوجد للمعادلة حلول. و مجموعة حلول المعادلة هي $S = \phi$.

12 حُلَّ كلاً من المعادلات الآتية:

① $\sqrt{4-x} = x - 2$ ② $\sqrt{x-4} = x + 1$

③ $\sqrt{x^2 - 12} = 2x - 6$ ④ $\sqrt{2x-6} = x - 3$

لاحظ أنّ الشرط $\sqrt{a} = b$ يُكافئ تَحقُّقَ الشرطين: $(b \geq 0)$ و $(a = b^2)$ في آنٍ معاً.

الحل

① استناداً إلى الملاحظة تُكافئ المعادلةُ $\sqrt{4-x} = x - 2$ تحقُّقَ الشرطين

$$x - 2 \geq 0 \quad \text{و} \quad 4 - x = \left(x-2\right)^2$$

معاً، أي أن يكون $x \geq 2$، و $x^2 - 4x + 4 = 4 - x$ أي

$$x \geq 2 \quad \text{و} \quad x\left(x-3\right) = 0$$

أي $x = 3$، وهو الحل الوحيد للمعادلة.

② استناداً إلى الملاحظة تُكافئ المعادلةُ $\sqrt{x-4} = x + 1$ تحقُّقَ الشرطين

$$x + 1 \geq 0 \quad \text{و} \quad x - 4 = \left(x+1\right)^2$$

معاً، أي أن يكون $x^2 + x + 5 = 0$ (لأن الشرط الثاني يقتضي الأوّل)، ولكنّ مميز هذه المعادلة من الدرجة الثانية سالب تماماً، فليس للمعادلة المعطاة حلول.

③ استناداً إلى الملاحظة تكافئ المعادلة $\sqrt{x^2-12}=2x-6$ تَحقُّقَ الشرطين: $(2x-6\geq 0)$ و $x^2-12=(2x-6)^2$ في آنٍ معاً . ومنه $x\geq 3$ و $x^2-12=4x^2-24x+36$ بالنَّقل من طرفٍ إلى طرف نجد أنَّ $3x^2-24x+48=0$ التي تختصر لتكتب على الشكل $x^2-8x+16=0$ أو بالشكل $\left(x-4\right)^2=0$ أي $x=4$ وهو حلٌ مقبولٌ لأنَّ $4>3$ أي $S=\{4\}$.

④ استناداً إلى الملاحظة تكافئ المعادلة $\sqrt{2x-6}=x-3$ تَحقُّقَ الشرطين: $(x-3\geq 0)$ و $2x-6=(x-3)^2$ في آنٍ معاً . ومنه $x\geq 3$ و $2x-6=x^2-6x+9$ بالنَّقل من طرفٍ إلى طرف نجد أنَّ $x^2-8x+15=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية.

هنا $a=1\,,\,b=-8\,,\,c=15$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=\left(-8\right)^2-4\left(1\right)\left(15\right)=64-60=4$ ولمَّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$$ وهو حلٌ مقبولٌ

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8+2}{2}=\frac{10}{2}=5$$ وهو حلٌ مقبولٌ لأنَّ $5>3$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{5\right\}$.

13 حُلَّ كلاً من المعادلتين الآتيتين:

① $\sqrt{x+12}=\sqrt{x^2+2x-8}$ ② $\sqrt{3x+3}=\sqrt{x^2+x-8}$

لاحظ أنّ الشرط $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ يُكافئ تَحقُّقَ الشرطين: $(b\geq 0)$ و $(a=b)$ في آن معاً.

الحل

① استناداً إلى الملاحظة تكافئ المعادلة $\sqrt{x+12}=\sqrt{x^2+2x-8}$ تَحقُّقَ الشرطين: $(x+12\geq 0)$ و $x+12=x^2+2x-8$ في آنٍ معاً . ومنه $x\geq -12$ و $x^2+x-20=0$ وهي معادلة من الدرجة الثانية ، هنا $a=1\,,\,b=1\,,\,c=-20$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(1)^2-4(1)(-20)=1+80=81$ ولمَّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-9}{2}=\frac{-10}{2}=-5$$ وهو حلٌ مقبولٌ لأنَّ $-5>-12$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+9}{2}=\frac{8}{2}=4$$ وهو حلٌ مقبولٌ لأنَّ $4>-12$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{-5,4\right\}$.

② استناداً إلى الملاحظة تكافؤُ المعادلة $\sqrt{3x+3}=\sqrt{x^2+x-8}$ تَحقُّق الشرطين:

$(3x+3\geq 0)$ و $3x+3=x^2+x-8$ في آنٍ معاً . ومنه $x\geq -1$ و $x^2-2x-11=0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية ، هنا $a=1\ ,\ b=-2\ ,\ c=-11$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(-2)^2-4(1)(-11)=4+44=48$

ولمَّا كان $\Delta>0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-\sqrt{48}}{2}=\dfrac{2-4\sqrt{3}}{2}=1-2\sqrt{3}$ وهو حلٌ مرفوضٌ لأنَّ $1-2\sqrt{3}<-1$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2+\sqrt{48}}{2}=\dfrac{2+4\sqrt{3}}{2}=1+2\sqrt{3}$ وهو حلٌ مقبولٌ لأنَّ $1+2\sqrt{3}>-1$

ومنه مجموعة حلول المعادلة $S=\left\{1+2\sqrt{3}\right\}$.

14 أَيوجد عددان طبيعيان متتاليان جداء ضربهما يساوي 4970 ؟

الحل

لنفترض وجود هذين العددين ، فإذا كان العدد الأول يساوي x فإنَّ العدد التالي يساوي $x+1$.

من المعطيات لدينا جداء ضربهما يساوي 4970 أي $x(x+1)=4970$ و بإصلاح المعادلة نجد أنَّ

$x^2+x-4970=0$ هنا $a=1,\ b=1\ ,\ c=-4970$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta=(1)^2-4(1)(-4970)=1+19880=19881$ ولمَّا كان

$\Delta>0$ استنتجنا أنَّ لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-141}{2}=\dfrac{-142}{2}=-71$ وهو حل مرفوض لأن $x\in\mathbb{N}$.

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+141}{2}=\dfrac{140}{2}=70$ وهو حل مقبول

ومنه العددان الطبيعيان المتتاليان هما $70,71$

15 في كل من الحالات الآتية، أَيوجد عددان حقيقيان x و y يحققان $x+y=S$ و $xy=P$؟

احسب هذين العددين في حال وجودهما.

① $S=18,\quad P=65$

② $S=-1,\quad P=-42$

③ $S=4,\quad P=5$

الحل

في كل حالةٍ من الحالات الثلاثة علينا حلُّ المعادلة $x^2-Sx+P=0$.

① تكون المعادلة $x^2 - 18x + 65 = 0$ ، نحسب مميّز ثلاثي الحدود

نجد $\Delta = (-18)^2 - 4(1)(65) = 324 - 260 = 64$ ولمّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ و } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{18+8}{2} = \frac{26}{2} = 13$$

ومنه يوجد عددان حقيقيان هما $\{5,13\}$.

② تكون المعادلة $x^2 + x - 42 = 0$ ، نحسب مميّز ثلاثي الحدود نجد

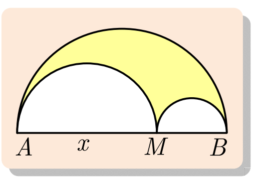
$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-42) = 1 + 168 = 169$ ولمّا كان $\Delta > 0$ استنتجنا أن لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-13}{2} = \frac{-14}{2} = -7 \text{ و } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+13}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

ومنه يوجد عددان حقيقيان هما $\{-7,6\}$.

③ تكون المعادلة $x^2 - 4x + 5 = 0$ ، نحسب مميّز ثلاثي الحدود

نجد $\Delta = (4)^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4$ ولمّا كان $\Delta < 0$ استنتجنا أنّه ليس لثلاثي الحدود أي جذر، ومنه لا يوجد أي عددين حقيقيين .



16 نتأمّل نصف دائرة قطرها $AB = 5$ ، و M نقطةٌ من القطعة $[AB]$.
نرسم نصفي دائرة قطراهما $[AM]$ و $[MB]$ كما في الشكل المجاور. ونضع $AM = x$.

① احسب بدلالة x مساحة السطح المحدَّد بأنصاف الدوائر الثلاث S.

② أثمّةَ تعيينٌ للنقطة M بحيث تكون النسبة بين S ومساحة نصف الدائرة التي قطرها $[AB]$ مساوية للمقدار $\frac{8}{25}$؟

الحل

① لمّا كان $AB = 5$ وكان $AM = x$ استنتجنا أنَّ $MB = 5 - x$.

الدائرة التي قطرها AB نصف قطرها يساوي $\frac{5}{2}$، مساحة نصف الدائرة يساوي $S_{AB} = \frac{25\pi}{8}$.

الدائرة التي قطرها AM نصف قطرها يساوي $\frac{x}{2}$، مساحة نصف الدائرة يساوي $S_{AM} = \frac{x^2\pi}{8}$.

الدائرة التي قطرها MB نصف قطرها يساوي $\frac{5-x}{2}$، مساحة نصف الدائرة يساوي $S_{MB} = \frac{(5-x)^2\pi}{8}$.

السطح المحدَّد بأنصاف الدوائر الثلاث S يساوي $S = S_{AB} - \left(S_{AM} + S_{MB}\right)$

ومنه $S = \frac{25\pi}{8} - \left(\frac{x^2\pi}{8} + \frac{\left(5-x\right)^2\pi}{8}\right)$ أي $S = \frac{\pi}{8}\left(25 - x^2 - \left(5-x\right)^2\right)$

ومنه $S = \frac{\pi}{8}\left(25 - x^2 - 25 - x^2 + 10x\right)$ ومنه نجد $S = \frac{\pi x}{4}\left(5-x\right)$.

② لدينا $\frac{S}{S_{AB}} = \frac{8}{25}$ ومنه $\frac{\frac{\pi x}{4}\left(5-x\right)}{\frac{25\pi}{8}} = \frac{8}{25}$ أي $\frac{8 \cdot \pi \cdot x\left(5-x\right)}{25 \cdot 4 \cdot \pi} = \frac{8}{25}$ ومنه

$x\left(5-x\right) = 4$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $x^2 - 5x + 4 = 0$ أي $\left(x-1\right)\left(x-4\right) = 0$

ومجموعة حلول المعادلة هي $\left\{1,4\right\}$، أي يوجد موضعين للنقطة M. وهما موضعان متناظران بالنسبة لمركز الدائرة التي قطرها AB.

17 أوجدْ جميع ثلاثيّات الأعداد الطبيعيّة المتتالية التي يساوي مجموعُها جداءَ ضربها.

الحل

نفترض وجود هذه الأعداد الثلاثة . نرمز للعدد الأول بـ x فيكون العددان التاليان $x+1$ و $x+2$

من الفرض لدينا $x(x+1)(x+2) = x + (x+1) + (x+2)$

أي $x(x+1)(x+2) = 3x + 3$

$x(x+1)(x+2) - 3(x+1) = 0$

$\left(x+1\right)\left[x\left(x+2\right) - 3\right] = 0$

ومنه $\left(x+1\right) = 0$ أي $x = -1$ وهو حل مرفوض لأنَّ الأعداد المطلوب إيجادها طبيعيَّة

أو $x^2 + 2x - 3 = 0$. هنا $a = 1, b = 2 , c = -3$

نحسب مميِّز ثلاثي الحدود نجد $\Delta = \left(2\right)^2 - 4\left(1\right)\left(-3\right) = 4 + 12 = 16$ ولمَّا كان $\Delta > 0$

استنتجنا أنَّ لثلاثي الحدود جذرين مختلفين هما:

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ وهو حلٌ مقبولٌ

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ وهو حلٌ مرفوضٌ لأنَّ الأعداد المطلوب إيجادها طبيعيَّة

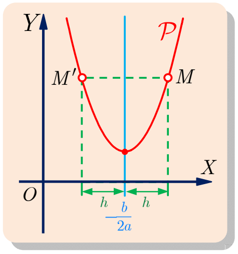
أي أنَّ الأعداد هي $1 , 2 , 3$

4

التّوابع المألوفة

1. التّوابع الحدوديّة من الدرجة الثانية
2. تابع المقلوب
3. المستقيم الحقيقي والدائرة المثلّثية
4. النّسب المثلثيّة لعدد حقيقيّ

فَكِّرْ



من أين جاءت هذه الخاصَّة التناظريَّة للقطع المُكافئ ؟ استعمل الصيغة القانونية لثلاثي الحدود f، ثُمَّ احسب $f\left(\frac{-b}{2a}+h\right)$ و $f\left(\frac{-b}{2a}-h\right)$ حيث h هو عددٌ حقيقيٌّ ما. ماذا تستنتج ؟

الحل

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية معطاة و $a\neq 0$. لقد وجدنا في دراستنا السابقة أنّ f يُكتب بالصيغة القانونيّة :

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}+h\right)=a\left(-\frac{b}{2a}+h+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=ah^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

$$f\left(\frac{-b}{2a}-h\right)=a\left(-\frac{b}{2a}-h+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=ah^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

نلاحظ أنّ $f\left(\frac{-b}{2a}+h\right)=f\left(\frac{-b}{2a}-h\right)$

تَدَرَّبْ

① أكمل جدول الاطِّراد الآتي للتابع التربيعيّ $f: x\mapsto x^2$، ثُمّ اِملأ الفراغ في المتراجحات التالية :

x	$-\infty$		-7		0		$5\sqrt{2}$		$+\infty$
$x\mapsto x^2$		$\searrow$	......	$\searrow$	0	$\nearrow$	......	$\nearrow$	

❶ إذا كان $x<-7$ كان ...... x^2.

❷ إذا كان $x\geq 5\sqrt{2}$ كان ...... x^2.

❸ إذا كان $-7\leq x<5\sqrt{2}$ كان ...... x^2.......

الحل

x	$-\infty$		-7		0		$5\sqrt{2}$		$+\infty$
$x\mapsto x^2$		$\searrow$	49	$\searrow$	0	$\nearrow$	50	$\nearrow$	

❶ إذا كان $x<-7$ كان $x^2>49$.

❷ إذا كان $x\geq 5\sqrt{2}$ كان $x^2\geq 50$.

❸ إذا كان $-7\leq x<5\sqrt{2}$ كان $0\leq x^2<50$.

② علّل لماذا تكون المقولات الآتية خطأ:

❶ إذا كان $x\leq 1$ كان $x^2\leq 1$.

❷ إذا كان $x>-\sqrt{10}$ كان $x^2<10$.

الحل

❶ لأن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2$ متناقص تماماً على المجال $\left]-\infty,0\right]$، مثلاً إذا كان $x=-5<1$ كان $x^2=25>1$.

❷ لأن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2$ متزايد تماماً على المجال $\left[0,+\infty\right[$. مثلاً إذا كان $x=4$ كان $x^2=16>10$.

③ بيّن الصواب من الخطأ فيما يأتي:

❶ إذا كان $x<5$ كان $x^2<25$.

❷ إذا كان $x\geq 2\sqrt{7}$ كان $x^2\geq 28$.

❸ إذا كان $-10^3<x\leq 10^2$ كان $x^2<10^6$.

الحل

❶ خطأ ، لأن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2$ متناقص تماماً على المجال $\left]-\infty,0\right]$. مثلاً $-10<5$ لكن $\left(-10\right)^2=100>25$

❷ صح ، لأن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2$ متزايد تماماً على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ، أي عندما $x>0$ ، ولما كان $x\geq 2\sqrt{7}$ كان $x^2\geq\left(2\sqrt{7}\right)^2=28$.

❸ صح ، لأنه إذا كان $0\leq x\leq 10^2$ كان $0\leq x^2\leq 10^4$، وذلك طبعاً لأنَّ التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2$ متزايد تماماً على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ، أما إذا كان $-10^3<x\leq 0$ كان $0\leq x^2<10^6$ وذلك طبعاً لأنَّ التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f\left(x\right)=x^2$ متناقص تماماً على المجال $\left]-\infty,0\right]$. ومن المتراجحتين الناتجتين نستنتج صحَّة المتراجحة $x^2<10^6$.

④ نتأمّل فيما يلي التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة المعطاة . اِكتبْ جدولَ اطِّراد f، وبيّن ما إذا كان يبلغ أكبر قيمة أو أصغرها وعيّنها إنْ وُجدت. ثُمّ عيّن محور تناظر القطع المُكافئ $\mathcal{P}$ الذي يمثّل f، وارسمه.

❶ $f(x)=-2x^2+4x-3$ ❷ $f(x)=3x^2+3x+1$

❸ $f(x)=x^2-3$ ❹ $f(x)=3-x^2$

❺ $f(x)=x^2-4x+6$ ❻ $f(x)=-4x^2-4x+1$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $f(x)=-2x^2+4x-3$ مكتوبٌ بالصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a=-2$ و $b=-4$ و $c=-3$. ونلاحظ أنّ مُعامل الحدّ الذي يحوي x^2 هو $a=-2$. و لأنّ في حالة $a<0$، تكون فتحة القطع من الأسفل، ويبلغ f أكبر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$ أي $x=\frac{4}{-4}=-1$ ومنه $f(-1)=-1$ أكبر قيمه للتابع.

إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(-1,-1)$.

ونرى أنّ للتابع f جدول الاطّراد الآتي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

محور تناظر القطع هو المستقيم $x=-1$.

❷ نلاحظ أنّ $f(x)=3x^2+3x+1$ هو بالصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a=3$ و $b=3$ و $c=1$. في حالة $a>0$، تكون فتحة القطع من الأعلى، ويبلغ f أصغر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$ ومنه $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ أصغر قيمة للتابع. إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$.

ونرى أنّ التابع f له جدول الاطّراد الآتي :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$

محور تناظر القطع هو المستقيم $x=-\frac{1}{2}$.

❸ نلاحظ أنّ $f(x)=x^2-3$ مكتوبٌ بالصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a=1$ و $b=0$ و $c=-3$. في حالة $a>0$، تكون فتحة القطع من الأعلى، ويبلغ f أصغر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}=0$ ومنه $f(0)=-3$ أصغر قيمة للتابع. إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(0,-3)$.

ونرى أنّ للتابع f جدول الاطّراد الآتي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$

محور تناظر القطع هو المستقيم $x=0$.

❹ نلاحظ أنّ $f(x)=3-x^2$ مكتوبٌ بالصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a=-1$ و $b=0$ و $c=3$. في حالة $a<0$، تكون فتحة القطع من الأسفل، ويبلغ f أكبر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$ أي $x=0$ ومنه $f(0)=3$ أكبر قيمة للتابع.

إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(0,3)$. ونرى أنّ التابع f له جدول الاطّراد الآتي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

محور تناظر القطع هو المستقيم $x=0$.

❺ نلاحظ أنّ $f(x)=x^2-4x+6$ مكتوبٌ بالصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a=1$ و $b=-4$ و $c=6$. في حالة $a>0$، تكون فتحة القطع من الأعلى، ويبلغ f أصغر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$ ومنه $f(2)=2$ أصغر قيمه للتابع. إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(2,2)$.

ونرى أنّ للتا بع f له جدول الاطِّراد الآتي :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

محور تناظر القطع هو المستقيم $x=2$.

❻ نلاحظ أنّ $f(x)=-4x^2-4x+1$ مكتوبٌ بالصيغة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a=-4$ و $b=-4$ و $c=1$. في حالة $a<0$، تكون فتحة القطع من الأسفل، ويبلغ f أكبر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$ أي $x=-\frac{-4}{-8}=-\frac{1}{2}$ ومنه $f(-\frac{1}{2})=2$ أكبر قيمة للتابع.

إذن ذروة القطع $\mathcal{P}$ هي $S(-\frac{1}{2},2)$. ونرى أنّ للتابع f جدول الاطِّراد الآتي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

محور تناظر القطع هو المستقيم $x=-\frac{1}{2}$.

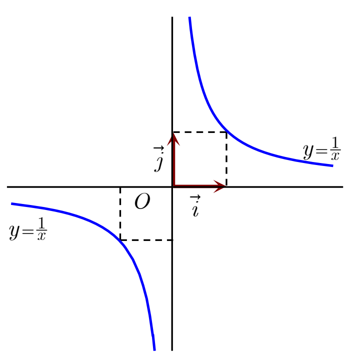
تَدرَّبْ

① حلّ في مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، كلاً من المتراجحات الآتية، ثم ارسم الخط البياني للتابع $x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}$ وتوثَّق من صحّة نتائجك.

❶ $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ ❷ $\frac{1}{x}>-\frac{1}{4}$ ❸ $-2<\frac{1}{x}<2$

❹ $\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ ❺ $\frac{1}{x}>\frac{4}{3}$ ❻ $2\leq\frac{1}{x}\leq 3$

الحل



❶ من المتراجحة $0<\frac{1}{x}$ وجدنا أنَّ $0<x$ أي أنَّ $x\in\,]0,+\infty[$ ، و لما كان التابع $x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]0,+\infty[$ وإذا كتبنا المتراجحة $\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ بالصيغة $f(\frac{1}{x})>f(\frac{1}{4})$ أعطتنا هذه المتراجحة أنَّ $x>4$ ، ومنه $0<\frac{1}{x}<\frac{1}{4}$ تكافئ تحقق العلاقتين $x\in\,]4,+\infty[$ و $x\in\,]0,+\infty[$ أي أن $x\in\,]4,+\infty[$.

❷تكافئ المتراجحة $-\frac{1}{4} < \frac{1}{x}$ تحقق إحدى المتراجحتين :

① $\frac{1}{x} > 0$ التي تعطي أنَّ $x > 0$ ومنه $x \in]0,+\infty[$.

② $-\frac{1}{4} < \frac{1}{x} \leq 0$ ، ولما كان التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]-\infty,0[$ و إذا كتبنا المتراجحة بالصيغة $f(x) > f(-4)$ مع $x < 0$ وجدنا أنَّ $x < -4$ أي $x \in]-\infty,-4[$.

ومنه كانت مجموعة حلول المتراجحة $-\frac{1}{4} < \frac{1}{x} \leq 0$ هي قيم x التي تحقق $x \in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

❸ تكافئ المتراجحة $-2 < \frac{1}{x} < 2$ تحقق المتراجحتين الآتيتين بآنٍ معاً

① $0 \leq \frac{1}{x} < 2$ التي تكتب بالصيغة $\frac{1}{x} < 2$ مع $x > 0$، ولما كان التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]-\infty,0[$ وجدنا أنَّ $x > \frac{1}{2}$ أي $x \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

② $-2 < \frac{1}{x} < 0$ التي تكتب بالصيغة $\frac{1}{x} > -2$ مع $x < 0$، ولمَّا كان التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]-\infty,0[$ وجدنا أنَّ $x < -\frac{1}{2}$ أي $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[$.

ومنه كانت مجموعة حلول المتراجحة $-2 < \frac{1}{x} < 2$ هي قيم x التي تحقق $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

❹لحل المتراجحة $\frac{1}{4} < \frac{1}{x}$ ، و لما كان تابع المقلوب متناقصاً على كل مجال من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ وكان $x \neq 0$ نجزئ المسألة كما يأتي :

① $\frac{1}{4} < \frac{1}{x}$ مع $x < 0$، وهنا المتراجحة محققة من أجل كل قيم x التي تحقق $x \in]-\infty,0[$ لأن الطرف الأيسر يكون سالباً أما الطرف الأيمن فهو موجب.

② $\frac{1}{4} < \frac{1}{x}$ مع $x > 0$، ولما كان التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]0,+\infty[$ وجدنا أنَّ $x > 4$ أي $x \in]4,+\infty[$.

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $\frac{1}{4} < \frac{1}{x}$ هي قيم x التي تحقق $x \in]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$

❺ لحل المتراجحة $\frac{4}{3} > \frac{1}{x}$ ، و لما كان تابع المقلوب متناقصاً على كل مجال من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ و كان $x \neq 0$ نجزئ المسألة كما يأتي :

① $\frac{4}{3} > \frac{1}{x}$ مع $x < 0$، وهنا المتراجحة غير محققة من أجل أي قيمة للمتغير x لأنَّ الطرف الأيسر(الأكبر) يكون سالباً أما الطرف الأيمن (الأصغر) فهو موجب ، وهذا خلفٌ واضح.

② $\frac{4}{3} > \frac{1}{x}$ مع $x > 0$ ، ولما كان التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]0,+\infty[$ وجدنا أنَّ $x > \frac{3}{4}$ أي $x \in \left]\frac{3}{4},+\infty\right[$.

ومنه كانت مجموعة حلول المتراجحة $\frac{4}{3} > \frac{1}{x}$ هي قيم x التي تحقق $x \in \left]\frac{4}{3},+\infty\right[$

❻ لحل المتراجحة $2 \le \frac{1}{x} \le 3$ و لما كان تابع المقلوب متناقصاً على المجال $]0,+\infty[$

ولما كان التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ متناقصاً على المجال $]0,+\infty[$ وجدنا أنَّ $\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2}$

ومنه كانت مجموعة حلول المتراجحة $2 \le \frac{1}{x} \le 3$ هي قيم x التي تحقق $x \in \left]\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right[$.

② ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

❶ لماذا حُذفتْ القيمة $x = 2$ من مجموعة تعريف f .

❷ ادرسْ اطِّراد f على كلٍّ من المجالين $I_1 =]-\infty,2[$ و $I_2 =]2,+\infty[$.

❸ اكتبْ جدول اطِّراد f .

❹ حُلَّ المتراجحتين $f(x) > 1$ و $f(x) < 1$.

❺ نظِّمْ جدولاً بقيم $f(x)$ الموافقة لقيم x من المجموعة $\{-1,0,1,3,4,5\}$، ثم استفد من هذه الدراسة في رسم الخط البياني $\mathcal{C}_f$ لهذا التابع على $[-1,2[\cup]2,5]$.

الحل

❶ حُذفتْ القيمة $x = 2$ من مجموعة تعريف f لأن حساب $f(x)$ غير ممكنٍ عندها.

❷ في المجال $I_1 =]-\infty,2[$

ليكن u و v عددين يُحقِّقان $u < v < 2$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$. ولكن لدينا

$f(u) - f(v) = \frac{u+1}{u-2} - \frac{v+1}{v-2}$ أي

$$f(u) - f(v) = \frac{(u+1)\cdot(v-2) - (v+1)\cdot(u-2)}{(u-2)\cdot(v-2)}$$

ومنه

$$f(u) - f(v) = \frac{-3(u-v)}{(u-2)\cdot(v-2)}$$

وهنا نلاحظ ما يلي :

- إذا كان $u < v < 2$ كان $u - v < 0$ فبسط الكسر المطلوب دراسة إشارته موجب ، و كان $u - 2 < 0$ و $v - 2 < 0$ ومنه $(u-2)\cdot(v-2) > 0$، ومقام الكسر المطلوب دراسة إشارته موجب.

و بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u)-f(v)>0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $I_1=]-\infty,2[$.

✌ في المجال $I_2=]2,+\infty[$

ليكن u و v عددين يُحقّقان $2<u<v$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$. ولكن لدينا $f(u)-f(v)=\dfrac{u+1}{u-2}-\dfrac{v+1}{v-2}$ أي

$$f(u)-f(v)=\frac{(u+1)\cdot(v-2)-(v+1)\cdot(u-2)}{(u-2)\cdot(v-2)}$$

ومنه

$$f(u)-f(v)=\frac{-3(u-v)}{(u-2)\cdot(v-2)}$$

وهنا نلاحظ ما يلي:

- لما كان $2<u<v$ كان $u-v<0$ فبسط الكسر المطلوب دراسة إشارته موجب ، وكان $u-2>0$ و $v-2>0$ ومنه $(u-2)\cdot(v-2)>0$، ومقام الكسر المطلوب إشارته موجب .

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد $f(u)-f(v)>0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $I_2=]2,+\infty[$.

❸ جدول اطّراد f.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x\mapsto\frac{x+1}{x-2}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

❹ ☝ $f(x)>1$ يؤول حل المتراجحة السابقة إلى حل المتراجحة $\dfrac{x+1}{x-2}-1>0$ أي

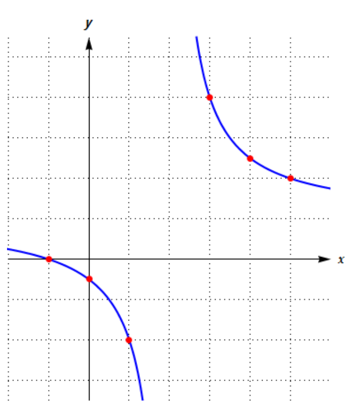
$\dfrac{x+1-x+2}{x-2}>0$ ومنه $\dfrac{3}{x-2}>0$ وتكون هذه المتراجحة محققة عندما $x>2$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $]2,+\infty[$.

✌ $f(x)<1$ يؤول حل المتراجحة السابقة إلى حل المتراجحة $\dfrac{x+1}{x-2}-1<0$ أي

$\dfrac{x+1-x+2}{x-2}<0$ ومنه $\dfrac{3}{x-2}<0$ وتكون هذه المتراجحة محققة عندما $x<2$ ومنه مجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,2[$.

❺

x	-1	0	1	3	4	5
$f(x)$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	4	$\frac{5}{2}$	2



③ ليكن f التابع المعرف على $]0,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

❶ ادرس اطّراد f على كلٍّ من المجالين $I_1=]0,1]$ و $I_2=[1,+\infty[$.

❷ استنتج أصغر قيمة يأخذها التابع f.

الحل

لحل الطلبين الأول و الثاني ، نختار u و v عددين يُحقّقان $0<u<v\leq 1$، والمطلوب هو المقارنة بين $f(u)$ و $f(v)$. ولكن لدينا $f(u)-f(v)=u+\frac{1}{u}-v-\frac{1}{v}$ أي

$$f(u)-f(v)=u-v+\frac{v-u}{uv}$$

ومنه $f(u)-f(v)=(u-v)\left(\frac{uv-1}{uv}\right)$

❶ في المجال $I_1=]0,1]$

لما كان $0<u<v\leq 1$ كان $u-v<0$ و $uv>0$ ، و كان $0<uv\leq 1$ ومنه $-1<uv-1\leq 0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد أنَّ $f(u)-f(v)>0$ أي أنّ f متناقص تماماً على المجال $I_1=]0,1]$.

في المجال $I_2=[1,+\infty[$.

لما كان $1\leq u<v$ كان $u-v<0$ و $uv>0$ ، و كان $uv>1$ ومنه $uv-1>0$.

إذن بناءً على قاعدة الإشارات نجد أنَ $f(u)-f(v)<0$ أي أنّ f متزايد تماماً على المجال $I_2=[1,+\infty[$.

❷ لما كان التابع f متناقص تماماً على المجال $I_1=]0,1]$ و متزايد تماماً على المجال $I_2=[1,+\infty[$ كانت أصغر قيمة يأخذها التابع f عندما $x=1$ وتساوي $f(1)=2$.

تَدرَّبْ

① احسب طول القوس من دائرة نصف قطرها $10\,\text{cm}$ إذا عُلم أنّها تقابل زاوية مركزيّة قياسها :

❶ بالدرجات : $90°$، $120°$، $180°$.

❷ بالراديان : $\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$، 1، 0.2.

الحل

❶ بالدرجات كل زاوية قياسها x درجة تقابل $\frac{\pi}{180}\cdot x$ راديان

إذن $l=r\cdot\alpha=r\cdot\frac{\pi}{180}\cdot x$ من أجل $r=10$ يكون $l=\frac{\pi}{18}\cdot x$

$l = \frac{\pi}{18} \cdot 90 = 5\pi$ ومنه $x = 90$

$l = \frac{\pi}{18} \cdot 120 = \frac{20\pi}{3}$ ومنه $x = 120$

$l = \frac{\pi}{18} \cdot 180 = 10\pi$ ومنه $x = 180$

❷ بالراديان إذا كان l طول قوس من دائرة نصف قطرها r، α قياس الزاوية المقابلة لهذه القوس مقدراً بالراديان فإن $l = r \cdot \alpha$ من أجل $r = 10$ تحقق دوماً : $l = 10 \cdot \alpha$.

$l = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi$ ومنه $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$l = 10 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$ ومنه $\alpha = \frac{\pi}{3}$

$l = 10 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{20\pi}{3}$ ومنه $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

$l = 10 \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{15\pi}{2}$ ومنه $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

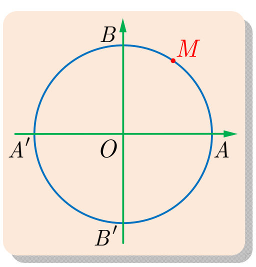
② ارسم دائرة مثلّثية، وعيّن عليها النقاط M الممثّلة للأعداد الحقيقيّة الآتية :

❶ $x = \frac{49\pi}{3}$ ❷ $y = -\frac{29\pi}{4}$ ❸ $z = -\frac{8\pi}{3}$

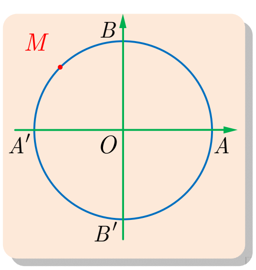
❹ $t = \frac{7\pi}{6}$ ❺ $u = \frac{15\pi}{4}$ ❻ $v = -\frac{17\pi}{4}$

الحل

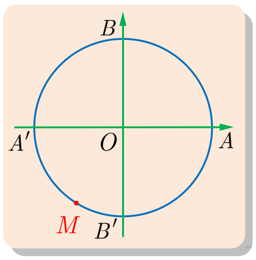
❶ لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{49\pi}{3}$ انطلاقاً من النقطة A، متَّجهين بالاتّجاه الموجب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{49\pi}{3}$ تحوي عدّة دورات. نقسم 49 على 3 فنجد: $49 = 16 \times 3 + 1$، ومن ثَمّ، كان $\frac{49\pi}{3} = 16\pi + \frac{\pi}{3}$. ولكنّ المقدار 16π يمثّل ثمان دوراتٍ . فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل ثمان دوراتٍ ، لوصلنا إلى النقطة A، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{\pi}{3}$ بالاتجاه الموجب فنصل إلى النقطة M. نلاحظ أنّ النقطة M هي أيضاً النقطة الممثَّلة للعدد $\frac{\pi}{3}$.



❷ لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{29\pi}{4}$ انطلاقاً من النقطة A، متَّجهين بالاتّجاه السالب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{29\pi}{4}$ تحوي عدّة دورات. نقسم 29 على 4 فنجد: $29 = 7 \times 4 + 1$، ومن ثَمّ فإنّ $\frac{29\pi}{4} = 7\pi + \frac{\pi}{4}$.

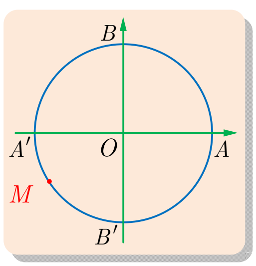


ولكنّ المقدار 7π يمثّل ثلاث دوراتٍ ونصف الدورة. فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل ثلاث دوراتٍ ونصف الدورة بالاتجاه السالب فنصل إلى النقطة A' ، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{\pi}{4}$ بالاتجاه السالب فنصل إلى النقطة M .

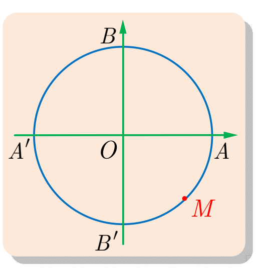


❸ لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{8\pi}{3}$ انطلاقاً من النقطة A ، متَّجهين بالاتّجاه السالب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{8\pi}{3}$ تحوي عدّة دورات. نقسم 29 على 4 فنجد: $8 = 2 \times 3 + 2$ ، ومن ثمّ فإنّ $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$. ولكنّ المقدار 2π يمثّل دورة واحدة. فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل دورة واحدة بالاتجاه السالب فنصل إلى النقطة A ، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{2\pi}{3}$ بالاتجاه السالب فنصل إلى النقطة M .

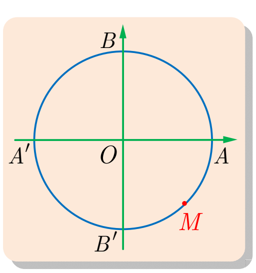
❹ لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{7\pi}{6}$ انطلاقاً من النقطة A ، متَّجهين بالاتّجاه الموجب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{7\pi}{6}$ تحوي عدّة دورات.



نقسم 7 على 6 فنجد: $7 = 6 \times 1 + 1$ ، ومن ثمّ فإنّ $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$.
ولكنّ المقدار π يمثّل نصف دورة . فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل نصف دورة ، لوصلنا إلى النقطة A' ، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{\pi}{6}$ بالاتجاه الموجب فنصل إلى النقطة M.



❺ لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{15\pi}{4}$ انطلاقاً من النقطة A ، متَّجهين بالاتّجاه الموجب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{15\pi}{4}$ تحوي عدّة دورات. نقسم 15 على 4 فنجد: $15 = 3 \times 4 + 3$ ، ومن ثمّ فإنَّ $\frac{3\pi}{4} + 3\pi = \frac{15\pi}{4}$. ولكنّ المقدار 3π يمثّل دورة و نصف الدورة . فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل دورة و نصف الدورة ، لوصلنا إلى A' ، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{3\pi}{4}$ بالاتجاه الموجب فنصل إلى M .



❻ لتمثيل النقطة M على الدائرة علينا قطع مسافة $\frac{17\pi}{4}$ انطلاقاً من النقطة A ، متَّجهين بالاتّجاه السالب للدوران. ومن الواضح أنّ قوساً من الدائرة طولها $\frac{17\pi}{4}$ تحوي عدّة دورات. نقسم 29 على 4 فنجد: $17 = 4 \times 4 + 1$ ، ومن ثمّ فإنّ $\frac{\pi}{4} + 4\pi = \frac{17\pi}{4}$.

ولكنّ المقدار 4π يمثّل دورتين اثنتين . فإذا انطلقنا من النقطة A وقطعنا مسافة تعادل دورتين بالاتجاه السالب فنصل إلى النقطة A، ثمّ نقطع بعد ذلك مسافة $\frac{\pi}{4}$ بالاتجاه السالب فنصل إلى النقطة M .

تَدرَّبْ

① عيِّنْ قيمة جيب وجيب تمام الأعداد الحقيقيّة الآتية. يمكنك البدء بتعيين النقاط الموافقة على دائرة مثلّثيّة.

❶ $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6}$ و $\frac{7\pi}{6}$ و $\frac{11\pi}{6}$ و $\frac{13\pi}{6}$.

❷ $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{81\pi}{4}$ و $-\frac{108\pi}{4}$.

❸ $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{71\pi}{3}$ و $\frac{97\pi}{3}$ و $-\frac{54\pi}{3}$.

الحل

$\frac{13\pi}{6}=2\pi+\frac{\pi}{6}$ إذن $\sin\frac{13\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6}=2\pi-\frac{\pi}{6}$ إذن $\sin\frac{11\pi}{6}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}$

$\frac{7\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$ إذن $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{7\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$ إذن $\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}$

ويمكن تنظيم الجدول التالي:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{81\pi}{4}=20\pi+\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}$, $-\frac{108\pi}{4}=-27\pi$

ويمكن تنظيم الجدول التالي:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{108\pi}{4}$	$\frac{81\pi}{4}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{71\pi}{3}=22\pi+\pi+\frac{2\pi}{3}=22\pi+\frac{5\pi}{3}\ ,\ -\frac{54\pi}{3}=-18\pi\ ,\ \frac{97\pi}{3}=32\pi+\frac{\pi}{3}$$

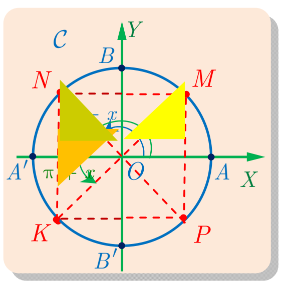
ويمكن تنظيم الجدول التالي:

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{71\pi}{3}$	$-\frac{54\pi}{3}$	$\frac{97\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

② لتكن M النقطة من الدائرة المثلّثية $\mathcal{C}$ الموافقة لعدد x. عيِّن على $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\pi-x$ و $\pi+x$ و $2\pi-x$، ثُمّ اختزل الصيغة :

$f(x)=\cos x+\cos(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(2\pi-x)$.

الحل



لتكن N النقطة من الدائرة المثلّثية $\mathcal{C}$ الموافقة للعدد $\pi-x$ ،

و K النقطة من الدائرة المثلّثية $\mathcal{C}$ الموافقة للعدد $\pi+x$ ، و K

النقطة من الدائرة المثلّثية $\mathcal{C}$ الموافقة للعدد $2\pi-x$.

تتطابق المثلثات القائمة الثلاثة الملونة والموضحة في الرسم

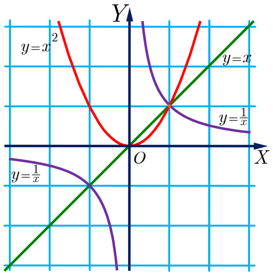
(يتطابق وتر وزاوية حادة من كل منها مع مقابلاتها من البقية).

من تطابق المثلثات الثلاثة نجد أن إحداثيا كل نقطة من النقاط السابقة هي $N(-\text{cosx},\text{sinx})$ و $\text{K}(-\text{cosx},-\text{sinx})$ و $P(\text{cosx},-\text{sinx})$ ومنه

$\cos(2\pi-x)=\cos x$ و $\cos(\pi+x)=-\cos x$ و $\cos(\pi-x)=-\cos x$

إذا عوضنا في الصيغة المعطاة وجدنا أنَّ $f(x)=\cos x-\cos x-\cos x+\cos x=0$

تمرينات ومسائل



1 رسمنا في معلم متجانس المنحنيات الثلاثة للتوابع الآتية :

- التابع f المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق : $f(x) = x$.
- التابع g المعرّف على مجموعة الأعداد الحقيقيّة وفق : $g(x) = x^2$.
- التابع h المعرّف بشرط $x \neq 0$ وفق : $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

بيّن الصواب من الخطأ في المقولات الآتية معلّلاً إجابتك المستوحاة من الرسم البياني:

① إذا كان $x > 2$ كان $x^2 > 4$.

② إذا كان $x^2 > 4$ كان $x > 2$.

③ إذا كان $0 < x < 1$ كان $x^2 < x$.

④ إذا كان $x < -1$ كان $x < \dfrac{1}{x}$.

⑤ إذا كان $-1 < x < 2$ كان $1 < x^2 < 4$.

⑥ إذا كان $\dfrac{1}{x} > -\dfrac{1}{2}$ كان $x < -2$.

الحل

① صح لأن التابع g متزايد على $[0,+\infty[$، $g(2) = 4$ فإذا كان $x > 2$ كان $g(x) > g(2)$.

② خطأ لأن التابع g متناقص على المجال $]-\infty,0]$، فإذا كان $x^2 > 4$ كان $x < -2$.

③ صح لأنه في المجال $]0,1[$ يكون C_g تحت C_f .

④ صح لأنه في المجال $]-\infty,-1[$ يكون C_f تحت C_h .

⑤ خطأ لأن التابع g متناقص على المجال $]-1,0]$، ومتزايد على المجال $[0,2[$.

⑥ صح لأن التابع h متناقص على $]-\infty,0[$، ولما كان $h(x) > h(-2) = -\dfrac{1}{2}$ كان $x < -2$.

2 في كل حالة من الحالات الآتية هناك إجابة واحدة صحيحة فقط، عيّنها

① أياً كان العدد غير المعدوم a، فإنّ $(-2a)^2$ يساوي :

$-4a^2$ $4a^2$ $2a^2$

② إنّ تحليل المقدار $3x^2 + 8x + 4$ هو :

$(3x+2)^2$ $(3x+2)(x+2)$ $3(x+2)^2$

③ إذا كان $-2 < x < 3$ كان :

$x^2 < 9$ $4 < x^2 < 9$ $4 < x^2$

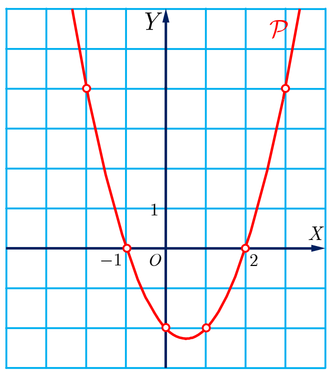
④ التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x)=-3x^2+5$ هو :

- متناقص تماماً على $\mathbb{R}$.
- متزايدٌ على $[5,+\infty[$.
- متزايدٌ على $]-\infty,0]$.

⑤ التابع f المعرّف بالصيغة $f(x)=4-(x-3)^2$ يقبل :

- 3 قيمة صغرى.
- 4 قيمة صغرى.
- 4 قيمة كبرى.

3 فيما يلي، عدّة مقولات، عيّن الصحيحة منها مُعلّلاً إجاباتك. يمثل القطع المكافئ $\mathcal{P}$ في الشكل المجاور تابعاً حدودياً من الدرجة الثانية.



① يمكن تعريف f وفق :

❶ $f(x)=(x-2)(x+1)$

❷ $f(x)=(1-x)(2+x)$

❸ $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$

❹ $f(x)=x^2-x-2$

② يحقّق كثير الحدود ما يأتي :

❶ يبلغ قيمته الصغرى عند $x=0.6$.

❷ قيمته الصغرى هي $f(0.5)$.

❸ أياً كان العدد x من المجال $[0,1]$ كان $f(x)\le -2$.

❹ أياً كان العدد x كان $f(x)+2>0$.

الحل

① ❶ $f(x)=(x-2)(x+1)$ صحيحة لأنَّ منحني التابع يمر بالنقاط

$$\left(-1,0\right)\ ,\ \left(2,0\right)\ ,\ \left(0,-2\right)\ ,\ \left(1,-2\right)\ ,\ \left(-2,4\right)\ ,\ \left(3,4\right)$$

وهنا $f(3)=4$ ، $f(-2)=4$ ، $f(1)=-2$ ، $f(0)=-2$ ، $f(2)=0$ ، $f(-1)=0$.

❷ $f(x)=(1-x)(2+x)$ خاطئة ، لأنَّ خطه البياني يمر بالنقطتين $\left(-1,0\right)$، $\left(2,0\right)$ بينما الخط المعطى لا يمر بأي نقطةٍ منهما .

❸ $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$ صحيحة ، لأن قاعدة الربط تنتج عن الأولى بنشر قاعدة الربط الأولى وفك التربيع ثم التحليل إلى جداء أقواس.

❹ $f(x)=x^2-x-2$ صحيحة ، لأن قاعدة الربط تنتج عن الأولى بنشر قاعدة الربط الأولى وإجراء عملية الضرب.

② ❶ يبلغ قيمته الصغرى عند $x=0.6$.

خاطئة، لأنَّ محور تناظره يمرُّ بالذروة ومعادلته $x=-\dfrac{-1}{2(1)}=\dfrac{1}{2}$.

❷ قيمته الصغرى هي $f(0.5)$.

صحيحة ، لأنَّ ذروة القطع المكافئ $V\left(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})\right)$ وفتحته نحو الأعلى .

❸ أياً كان العدد x من المجال $[0,1]$ كان $f(x) \leq -2$.

صحيحة ، لأنَّ المنحني يقع تحت المستقيم $y = -2$ عندما x من المجال $[0,1]$.

❹ أياً كان العدد x كان $f(x) + 2 > 0$.

خاطئة، لأنَّه، أياً كان العدد x من المجال $[0,1]$ ، كان $f(x) + 2 \leq 0$.

4

① ادرس اطِّراد التابع المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق $f(x) = \frac{4}{x}$ وارسم خطّه البيانيّ في مَعْلَمٍ متجانس.

② أعد السؤال في حالة $f(x) = -\frac{3}{x}$.

الحل

① لندرس التابع f على المجال $]0, +\infty[$.

لمَّا كان التابع $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ متناقصاً تماماً على المجال $]0, +\infty[$ ، وأياً كان العددان u, v الموجبان تماماً ، فإن $u < v$ تقتضي أنَّ $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$ ، ومن ثَمَّ ، وجدنا أنَّ $\frac{4}{u} > \frac{4}{v}$، أي $f(u) > f(v)$، إذن التابع متناقصٌ على المجال $]0, +\infty[$.

ونجد بطريقة مماثلة ، ومن كون التابع $g : x \to \frac{1}{x}$ متناقصاً تماماً على المجال $]0, +\infty[$ ، أنَّ التابعَ متناقصٌ على المجال $]-\infty, 0[$.

② لندرس التابع f على المجال $]0, +\infty[$.

نعلم أنَّ التابع $g : x \to \frac{1}{x}$ متناقصٌ تماماً على المجال $]0, +\infty[$

وأياً كان العددان u, v الموجبان تماماً ، فإنَّ $u < v$ تقتضي أنَّ $\frac{1}{u} > \frac{1}{v}$ ومنه ، ومن ثَمَّ فإنَّ $\frac{-3}{u} < \frac{-3}{v}$، أي $f(u) < f(v)$، إذن التابع متزايدٌ على المجال $]0, +\infty[$.

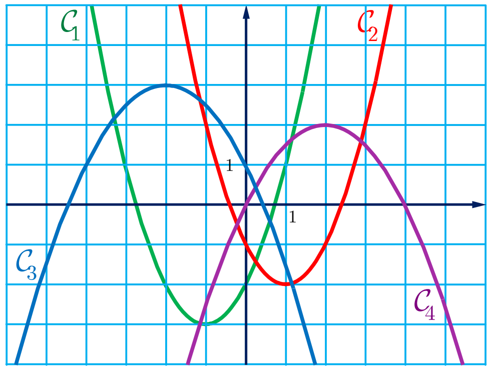
ونجد بطريقة مماثلة ، أنَّ التابع متزايدٌ على المجال $]-\infty, 0[$.

5

التوابع المُشار إليها فيما يأتي معرفة على $\mathbb{R}$. اقرن بكلٍّ منها خطَّه البيانيّ في الشكل الآتي:

① $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$ ② $f_2(x) = -\frac{(x-2)^2}{2} + 2$

③ $f_3(x) = (x-1)^2 - 2$ ④ $f_4(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x + 1$



الحل

① f_1 خطه البياني C_1 ② f_2 خطه البياني C_4

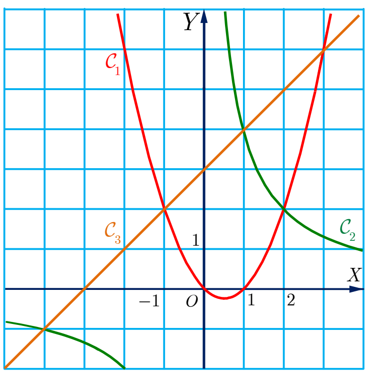
③ f_3 خطه البياني C_2 ④ f_4 خطه البياني C_3

6 رسمنا في معلم متجانس الخطوط البيانيّة الآتية :

$\mathcal{C}_1$ الممثّل للتابع $f : x \mapsto x^2 - x$.

$\mathcal{C}_2$ الممثّل للتابع $g : x \mapsto \dfrac{4}{x}$.

$\mathcal{C}_3$ الممثّل للتابع $h : x \mapsto x + 3$.



① حلّ بيانياً كلاً من المتراجحات الآتية :

❶ $\dfrac{4}{x} \leq x + 3$ ❷ $\dfrac{4}{x} \geq x^2 - x$ ❸ $x + 3 \geq x^2 - x$

② استنتج مجموعة حلول المتراجحة المضاعفة $x^2 - x \leq \dfrac{4}{x} \leq x + 3$.

الحل

① ❶ نلاحظ أن المنحنيين C_2 و C_3 يتقاطعان في النقطتين $M(1,4)$, $N(-4,-1)$

والمتراجحة $\dfrac{4}{x} \leq x + 3$ تعني أن نقاط الخط C_2 تقع تحت نقاط الخط C_3 ومن الشكل نلاحظ أن

المتراجحة محققة عندما تكون x في المجال $[-4,0[\cup]1,+\infty[$

❷ نلاحظ أن المنحنيين C_1 و C_2 يتقاطعان في النقطتين $E(2,2)$, $N(-4,-1)$

والمتراجحة $\dfrac{4}{x} \geq x^2 - x$ تعني أن نقاط الخط C_2 تقع فوق نقاط الخط C_1 ومن الشكل نلاحظ أن

المتراجحة محققة عندما تكون x في المجال $]0,2]$

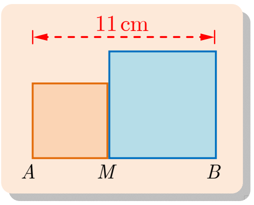
❸ نلاحظ أن المنحنيين C_1 و C_3 يتقاطعان في النقطتين $D(3,6)$, $F(-1,2)$

و المتراجحة $x + 3 \geq x^2 - x$ تعني أن نقاط الخط C_3 تقع فوق نقاط الخط C_1 ومن الشكل نلاحظ

أن المتراجحة محققة عندما تكون x في المجال $[-1,3]$

② إن البحث عن مجموعة حلول متراجحة مضاعفة يعني البحث عن مجموعة الأعداد الحقيقية المحققة للمتراجحتين معاً.

المتراجحة $x^2 - x \le \frac{4}{x} \le x + 3$ محققة عندما تكون x في المجال $]0,2] \cap \left([-4,0[\cup [1,+\infty[\right) = [1,2]$.



7 لتكن $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $11\,\text{cm}$، ولتكن M نقطة من القطعة $[AB]$. نرسم في جهة واحدة من المستقيم (AB) مربّعين طول ضلع الأوّل AM وطول ضلع الثاني BM.

① أتوجد نقطة، أو عدّة نقاط M، من القطعة $[AB]$ بحيث يساوي مجموع مساحتي سطحي المربّعين المرسومين $65\,\text{cm}^2$ ؟

② أتوجد نقطة، أو عدّة نقاط N، من القطعة $[AB]$ تجعل مجموع مساحتي سطحي المربّعين المرسومين أصغر ما يمكن ؟

الحل

①نفترض أن $AM = x$ حيث $0 \le x \le 11$ فيكون $BM = 11 - x$

مساحة المربع الأول تساوي x^2. مساحة المربع الثاني تساوي $(11-x)^2 = 121 - 22x + x^2$.

مجموع مساحتي سطحي المربعين يساوي $f(\text{x}) = 2x^2 - 22x + 121$

ولما كان مجموع مساحتي سطحي المربعين يساوي 65 كان $f(\text{x}) = 2x^2 - 22x + 121 = 65$

ومنه $x^2 - 11x + 28 = 0$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $(x-4)(x-7) = 0$ بحل المعادلة نجد أنه:

إما $x = 4$ أو $x = 7$ ، إذن يوجد نقطتان تحققان المطلوب ، النقطة الأولى تبعد عن النقطة A مسافةً قدرها $4\,cm$ ، والنقطة الثانية تبعد عن النقطة A مسافةً قدرها $7\,cm$.

يمكن كتابة مجموع مساحتي سطحي المربعين $f(x) = 2x^2 - 22x + 121$

بالصيغة القانونية $f(x) = 2(x^2 - 11x + \frac{121}{4} - \frac{121}{4}) + 121$ أي

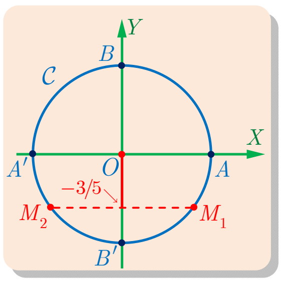
$f(x) = 2(x^2 - 11x + \frac{121}{4} - \frac{121}{4}) + 121$ وبإصلاح هذه العلاقة $f(x) = 2\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{121}{2}$

واضح تماماً أنَّ $f(x) \ge \frac{121}{2}$ من أجل كل قيم x الممكنة . و بالتالي يوجد نقطة تجعل مجموع مساحتي سطحي المربعين أصغر ما يمكن ، وذلك عندما $x = \frac{11}{2}$ ، أي عندما تقع النقطة M في منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

8 ليكن x عدداً حقيقيّاً من المجال $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ يحقّق $\sin x = -\frac{3}{5}$. احسب $\cos x$.

الحل

إن العدد $\sin x=-\frac{3}{5}$ هو ترتيب نقطتين من الدائرة المثلثية $\mathcal{C}$. وضعنا على الرسم النقطتين M_1 و M_2 الموافقتين.



نعلم أنّ $x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$. عند الانتقال على الدائرة $\mathcal{C}$ انطلاقاً من النقطة A متّجهين بالاتّجاه السالب نجد أنّ مجموعة النقط M الموافقة لقيم هذا المجال هي القوس $\overset{\frown}{A'B'}$. فإذا أخذنا بعين الاعتبار الفرضيّتين معاً استنتجنا أنّ النقطة M_2 هي النقطة المناسبة.

إن $\cos x$ هو فاصلة النّقطة M_2 علماً أنها سالبة، نعلم أنّ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ومنه

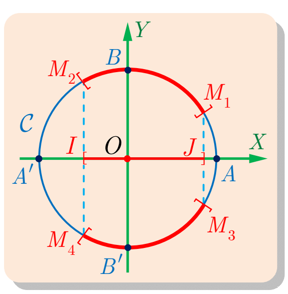
$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$ و منه $\cos x=-\frac{4}{5}$

9 لتكن $\mathcal{C}$ الدائرة المثلثيّة. مثّل على هذه الدائرة مجموعة النقاط $M\left(\cos x,\sin x\right)$ المحقّقة للشرط $-\frac{1}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$. ما الأعداد الحقيقيّة من المجال $\left[-\pi,\pi\right]$ الموافقة لهذه لنقاط M؟

الحل

تعني المتراجحة $-\frac{1}{2}\leq\cos x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ أنّنا نبحث عن النقاط M من الدائرة $\mathcal{C}$ التي تقع فاصلة كل منها في المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

نرسم على $\left[AA'\right]$ القطعة المستقيمة $\left[IJ\right]$ الموافق للمجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ على أن تكون I النقطة التي فاصلتها $-\frac{1}{2}$ و J النقطة التي فاصلتها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



نريد تمثيل النقاط M، من الدائرة $\mathcal{C}$، التي تقع فاصلة كل منها في المجال $\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. نضع على الدائرة النقطة M_1 من القوس $\overset{\frown}{AB}$ والنقطة M_3 من القوس $\overset{\frown}{AB'}$ اللتين يكون J مسقطهما القائم على محور الفواصل، ثمّ ضع النقطتين M_2 من القوس $\overset{\frown}{BA'}$ و M_4 من القوس $\overset{\frown}{A'B'}$ اللتين تكون I مسقطهما القائم على محور الفواصل.

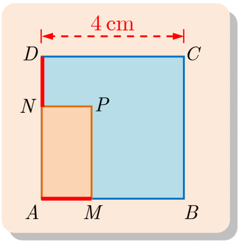
إن نقاط القوسين $\overset{\frown}{M_1M_2}$ و $\overset{\frown}{M_4M_3}$ هي مجموعة النقاط المطلوبة.

إن العدد الحقيقي من المجال $\left[-\pi,\pi\right]$ الموافق للنقطة M_1 هو $\frac{\pi}{6}$.

إن العدد الحقيقي من المجال $\left]-\pi,\pi\right]$ الموافق للنقطة M_2 هو $\frac{2\pi}{3}$.

إذن مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموافقة لنقاط القوس $\widehat{M_1M_2}$ هي $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$.

وبنفس الأسلوب نجد أن مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموافقة لنقاط القوس $\widehat{M_4M_3}$ هي $\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$.



10 ليكن $ABCD$ مربعاً طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ولتكن M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AD]$ بحيث $AM = DN$. ثُمّ لتكن P نقطة تجعل $AMPN$ مستطيلاً.

يطلب تعيين M تجعل مساحة المستطيل $AMPN$ أكبر ما يمكن.

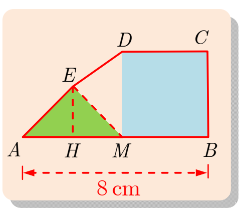
الحل

نفترض $AM = x$ نرمز إلى مساحة المستطيل بالرمز $f(x)$

ولما كانت M نقطة من الضلع $[AB]$ استنتجنا أن مجموعة تعريف التابع f هي $[0,4]$.

إن $AN = 4 - x$ إذن $f(x) = x(4-x) = 4-(x-2)^2$

ولما كان $4-(x-2)^2 \le 4$ كان $f(x) \le 4$ أي أنَّ 4 أكبرُ قيمةٍ يأخذها التابع ويبلغها عندما $x = 2$، أي أنَّ أكبر مساحةٍ للمستطيل تساوي 4 وتتحقَّق المساواة عندما $AM = 2$.



11 لتكن $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها $8\,\text{cm}$، ولتكن M نقطة من $[AB]$. نُنشئ كما في الشكل المربّع $MBCD$ والمثلث القائم المتساوي الساقين AME. نضع $x = AM$، ونرمز بالرمز $f(x)$ إلى مساحة المضلع $ABCDE$.

① احسب بدلالة x مساحة كل من المربع $MBCD$ والمثلث AHE وشبه المنحرف $HMDE$.

② استنتج صيغة $f(x)$.

③ على أيّ مجال I التابع f مُعرّفٌ؟

④ ادرس التابع f على I، وعيّنْ أصغر القيم التي تأخذها مساحة المضلع $ABCDE$.

الحل

① لما كانت $AM = x$ كان طول ضلع المربع $MBCD$ يساوي $8-x$ وكانت مساحة المربع $MBCD$ تساوي $S_1 = (8-x)^2$.

لما كان المثلث AME قائم ومتساوي السّاقين كان EH محور القاعدة AM وكان المثلث AHE مثلث قائم طول ضلعه القائمة $HM = \frac{x}{2}$ وارتفاعه $EH = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}$

ومنه مساحة المثلث AHE تساوي $S_2=\frac{1}{2}(\frac{x}{2})(\frac{x}{2})=\frac{x^2}{8}$.

طولا القاعدتين في شبه المنحرف القائم $HMDE$ على التوالي $EH=\frac{x}{2}$ ، و $DM=8-x$ ،

والارتفاع $HM=\frac{x}{2}$ ومنه مساحة شبه المنحرف تساوي

$$S_3=\frac{x}{2}\cdot\frac{x+(16-2x)}{4}=\frac{x\left(16-x\right)}{8}$$

②

$$f\left(x\right)=S_1+S_2+S_3$$

$$f\left(x\right)=\frac{x\left(16-x\right)}{8}+\frac{x^2}{8}+\frac{8\left(8-x\right)^2}{8}$$

$$f\left(x\right)=\frac{16x-x^2+x^2+512+8x^2-128x}{8}$$

$$f\left(x\right)=\frac{-8x^2+512-112x}{8}=x^2-14x+64$$

③ تتغير قيمة x من الصفر إلى الثمانية ، فالتابع f معرف عندما x تكون في المجال $\left[0,8\right]$.

④ يمكن كتابة $f(x)$ بالصيغة الآتية

$$f\left(x\right)=x^2-14x+64=x^2-14x+49-49+64=\left(x-7\right)^2+15$$

ولمّا كان $\left(x-7\right)^2+15\geq 15$ كان $f\left(x\right)\geq 15$ أي أنّ 15 أصغر قيمة يأخذها التابع ويبلغها عندما $x=7$ ، و بالتالي ، أصغر مساحة للمضلع $ABCDE$ تساوي 15 وتتحقق عندما $AM=7$.

12 إذا علمت أنّ $\sin x=\frac{4}{5}$ وأنّ $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ فأوجد $\cos x$.

الحل

نعلم أنّ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ومنه $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$ ولما كان $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

كان $\cos x$ سالب ومنه $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$.

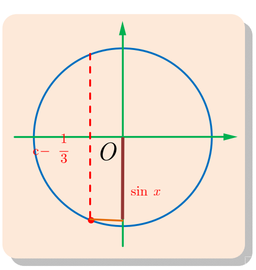
13 إذا علمت أنّ $\cos x=-\frac{1}{3}$ وأنّ $x\in\left[-\pi,0\right]$ فأوجد $\sin x$.

الحل

نعلم أنّ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ومنه $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

ولما كان $x\in\left[-\pi,0\right]$ كان $\sin x$ سالباً

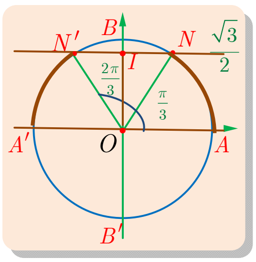
ومنه $\sin x=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



في كل من الحالات الآتية، مثّل على الدائرة المثلّثيّة مجموعة النقاط M الموافقة لمجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تحقّق : **14**

① $0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$ ③ $\sin x > \frac{1}{2}$ ④ $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحل



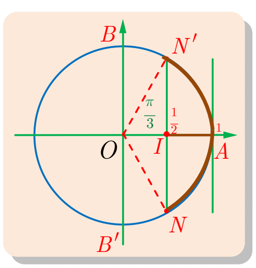
① تعني المتراجحة $0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ أنّنا نبحث عن النقاط M من الدائرة C التي يقع ترتيب كلّ منها في المجال $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

نرسم على $[BB']$ القطعة المستقيمة $[OI]$ الموافق للمجال $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ حيث O مبدأ الإحداثيات و I النقطة من محور التراتيب التي ترتيبها $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

نريد تمثيل النقاط M، من الدائرة C ، التي يقع ترتيب كل منها في المجال $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. نضع على الدائرة النقطة N من القوس $\overset{\frown}{AB}$ والنقطة N' من القوس $\overset{\frown}{BA'}$ اللتين يكون I مسقطهما القائم على محور التراتيب ولدينا النقطتين A و A' التين تكون O مسقطهما القائم على محور التراتيب.

إن مجموعة النقاط المطلوبة هي نقاط القوسين $\overset{\frown}{AN}$ و $\overset{\frown}{N'A'}$.

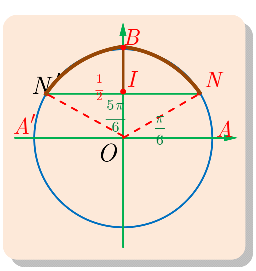
و لما كان $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$ و كان $0 = \sin 0 = \sin\pi$ استنتجنا مجموعة نقاط $\overset{\frown}{AN} \cup \overset{\frown}{N'A'}$ توافق قيماً للمتغير x هي $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$



② $\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$. بنفس الطريقة السابقة نجد أن نقاط القوس $\overset{\frown}{NAN'}$ هي مجموعة النقاط المطلوبة.

ونعلم أنَّ $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos-\frac{\pi}{3}$ و $1 = \cos 0 = \sin\pi$

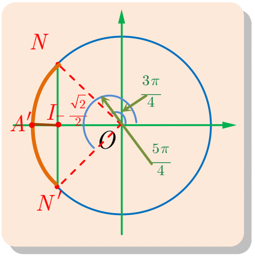
ومنه نجد مجموعة نقاط $\overset{\frown}{NAN'}$ توافق قيماً للمتغير x من $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$



③ $\sin x > \frac{1}{2}$ بنفس الطريقة السابقة نجد أن إن نقاط القوس $\overset{\frown}{NBN'}$ عدا النقطتين N و N' هي مجموعة النقاط المطلوبة.

إن $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$.

ومجموعة نقاط $\overset{\frown}{NBN'}$ عدا النقطتين N و N' تتحقق عندما $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$



④ $\cos x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ بنفس الطريقة السابقة نجد أن إن نقاط القوس $\overset{\frown}{NA'N'}$ هي مجموعة النقاط المطلوبة.

إن $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

مجموعة نقاط $\overset{\frown}{NA'N'}$ تتحقق عندما $x \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

15 احسب في كلٍّ من الحالات الآتية القيم الدقيقة لجيب وجيب تمام الزاوية :

$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{81\pi}{4}$	$\frac{51\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{97\pi}{3}$	$\frac{82\pi}{3}$	$\frac{71\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$

الحل

المجموعة الأولى (الزوايا في السطر الأول):

لما كان $\frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ وجدنا أنَّ $\sin\frac{13\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6}$ و $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6}$

ولما كان $\frac{13\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ وجدنا أنَّ $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

و أنَّ $\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$

ولما كان $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ وجدنا أنَّ $\cos\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6}$

و أنَّ $\sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6}$

ولما كان $\frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$ وجدنا أنَّ $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6}$ و أنَّ $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos-\frac{\pi}{6}$

ويمكن تنظيم الجدول التالي:

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{6}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

المجموعة الثانية (الزوايا في السطر الثاني):

كما في المجموعة الأولى:

$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ و $\frac{51\pi}{4} = 12\pi + \frac{3\pi}{4}$ و $\frac{81\pi}{4} = 20\pi + \frac{\pi}{4}$.

ويمكن تنظيم الجدول التالي:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{51\pi}{4}$	$\frac{81\pi}{4}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

المجموعة الثالثة (الزوايا في السطر الثالث):

كما في المجموعتين السابقتين :

$\frac{97\pi}{3} = 32\pi + \frac{\pi}{3}$ و $\frac{82\pi}{3} = 26\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$ و $\frac{71\pi}{3} = 22\pi + \pi + \frac{2\pi}{3} = 22\pi + \frac{5\pi}{3}$

ويمكن تنظيم الجدول التالي:

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{71\pi}{3}$	$\frac{82\pi}{3}$	$\frac{97\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

16 أثبت صحّة العلاقتين الآتيتين وذلك أياً كان العدد الحقيقيّ x :

① $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$.

② $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \cos x)(1 + \sin x)$.

الحل

① نفك المطابقة التربيعية ونستعمل العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ بين جيب الزاوية وجيب تمامها كما يأتي

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \\ &= 1 + 2\sin x \cos x\end{aligned}$$

② نجمّع المقادير بين قوسين ثمَّ نفك المطابقة التربيعية كما يأتي

$$\left(1+\sin x+\cos x\right)^2 = \left[1+\left(\sin x+\cos x\right)\right]^2$$
$$= 1+\left(\sin x+\cos x\right)^2 + 2\left(\sin x+\cos x\right)$$

نفك المطابقة التربيعيَّة الثَّانية

$$= 1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x+2\sin x+2\cos x$$

نستعمل العلاقة $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ كما يلي

$$= 2+2\sin x\left(1+\cos x\right)+2\cos x$$

نجمِّع المقادير في أقواس لإيجاد عامل مشترك فيما بينها

$$= 2\left(1+\cos x\right)+2\sin x\left(1+\cos x\right)$$

بأخذ العامل المشترك نجد

$$= 2\left(1+\cos x\right)\left(1+\sin x\right)$$

17 في حالة $\cos x \neq 0$ نعرّف $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

① أثبت أنّه أياً كان العدد x الذي يحقّق $\cos x \neq 0$ كان $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

② إذا علمت أنّ x تنتمي إلى $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$ وأنّ $\tan x = -2$ فأوجد $\cos x$ و $\sin x$.

الحل

①نبدأ بالطرف الأيسر فنبدِّل $\tan x$ بالكسر $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ نجد $1+\tan^2 x = 1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

نوحِّد المقامات نجد أنَّ $1+\tan^2 x = \dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

نستعمل العلاقة $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ نحصل على $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. وهو المطلوب

② عندما $\tan x = -2$ نعوِّض بالعلاقة السابقة نجد $1+4 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ومنه $\cos^2 x = \dfrac{1}{5}$ ولما كانت $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ كان $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

بالإفادة من $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ إذا عوّضنا قيمتي $\tan x$ و $\cos x$ وجدنا أنَّ $\cos x \cdot \tan x = \sin x$

ومنه $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times -2$ ، $\sin x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

18 للإجابة عن الأسئلة الآتية، تمكن الاستفادة من الدائرة المثلّثيّة أو من الخطين البيانيّين لتابعي الجيب وجيب التمام.

① أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ التي تحقّق $\cos x=\frac{1}{2}$.

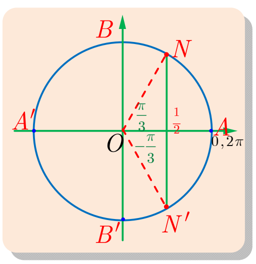
② أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-\pi,2\pi\right]$ التي تحقّق $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

③ أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ التي تحقّق $\cos x\geq 0$.

④ أوجد الأعداد الحقيقيّة x من المجال $\left[-2\pi,3\pi\right]$ التي تحقّق $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

الحل

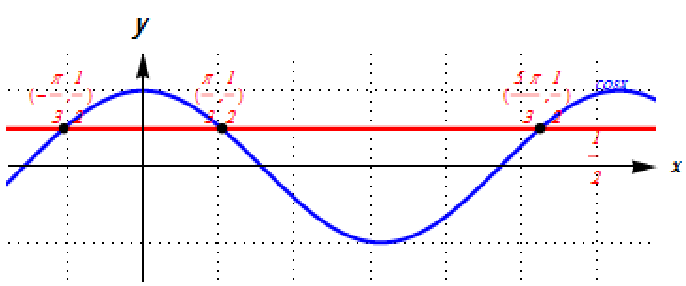
① $\cos x=\frac{1}{2}$ حيث $x\in\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$



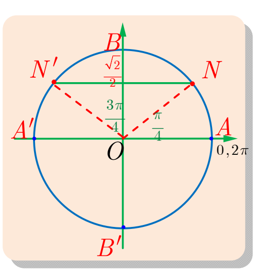
نرسم الدائرة المثلّثيّة ونعيين عليها مستقيم شاقولي على المحور الأفقي عند نقطة فاصلتها تساوي $\frac{1}{2}$ لإيجاد نقطة من الدائرة فاصلتها مساوية $\frac{1}{2}$، يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين N,N'.

في المجال $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ ننتقل على الدائرة المثلّثيّة بالاتّجاه الموجب انطلاقاً من النقطة B' (بداية المجال) فنصل للنقطة N' عندما $x=-\frac{\pi}{3}$ وهو أول حل للمعادلة، نتابع فنصل للنقطة N عندما $x=\frac{\pi}{3}$ وهو الحل الثاني للمعادلة، نتابع فنصل مجدداً للنقطة N' عندها $x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ وهو الحل الثالث للمعادلة، نتابع فنصل لنهاية المجال عند النقطة A فنتوقف، ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$.

توضيح : نرسم الخط البيانيّ لتابع جيب التمام ونرسم المستقيم $y=\frac{1}{2}$. وفي المجال $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ يتقاطع الخط البياني والمستقيم في النقاط التي فواصلها $x=-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}$.



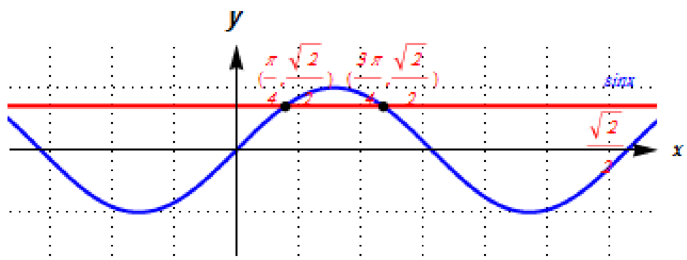
② $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ حيث $x\in\left[-\pi,2\pi\right]$



نرسم الدائرة المثلّثيّة ونعيين عليها مستقيم أفقي عند نقطة ترتيبها يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين N,N'.

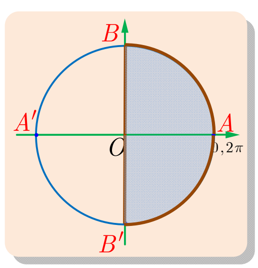
في المجال $\left]-\pi,2\pi\right]$ ننتقل على الدائرة المثلّثيّة بالاتّجاه الموجب انطلاقاً من النقطة A' (بداية المجال) نمر بالنقاط B',A ثم نصل للنقطة N عندما $x=\frac{\pi}{4}$ وهو أول حل للمعادلة، نتابع فنصل للنقطة N' عندما $x=\frac{3\pi}{4}$ وهو الحل الثاني للمعادلة، نتابع فنصل مجدداً للنقطة A' ، نتابع فنصل لنهاية المجال عند النقطة A فنتوقف، ومنه مجموعة حلول المعادلة هي $S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}$.

✌توضيح نرسم الخط البيانيّ لتابع الجيب ونرسم المستقيم $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$. على المجال $\left]-\pi,2\pi\right]$ يتقاطع الخط البياني والمستقيم عند النقاط التي فواصلها $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$.



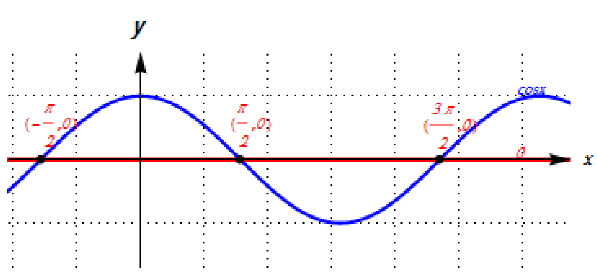
③ $\cos x\geq 0$ حيث $x\in\left]-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$

☝ نرسم الدائرة المثلّثيّة ونمثّل عليها مجموعة النقاط M الموافقة لمجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تحقّق المتراجحة $\cos x\geq 0$ وهي القوس $\overset{\frown}{B'AB}$.



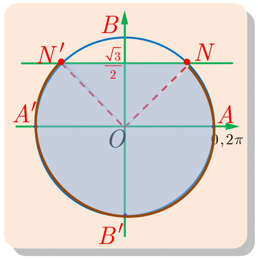
في المجال $\left]-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ ننتقل على الدائرة المثلّثيّة بالاتّجاه الموجب انطلاقاً من النقطة B' (بداية المجال) نمر بالنقاط A,B وتكون في هذا المجال المتراجحة محققة ومجموعة حلولها $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ نتابع الانتقال من النقطة B للنقطة B' مروراً بالنقطة A' وتكون في هذا المجال المتراجحة غير محققة، ننتقل من النقطة B' فنصل لنهاية المجال عند النقطة A فنتوقف وتكون في هذا المجال المتراجحة محققة ومجموعة حلولها $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$، إذا مجموعة حلول المتراجحة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

✌توضيح نرسم الخط البيانيّ لتابع جيب التمام ونرسم المستقيم $y=0$. على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ يقع الخط البياني فوق المستقيم $y=0$ عندما $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$



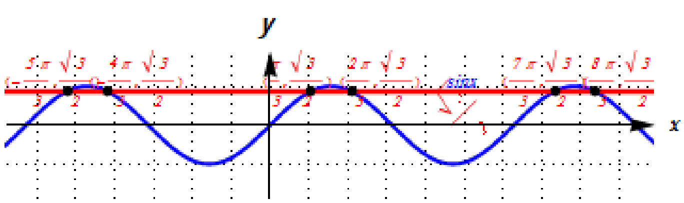
④ $\sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $x\in\left]-2\pi,3\pi\right]$

☝ نرسم الدائرة المثلّثيّة ونمثّل عليها مجموعة النقاط M الموافقة لمجموعة الأعداد الحقيقيّة x التي تحقّق المتراجحة $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ وهي القوس $\overset{\frown}{N'B'N}$.



في المجال $[-2\pi, 3\pi]$ ننتقل على الدائرة المثلّثيّة بالاتّجاه الموجب انطلاقاً من النقطة A (بداية المجال) نصل للنقطة N وتكون في هذا المجال المتراجحة محققة ومجموعة حلولها $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right]$ نتابع الانتقال من النقطة N للنقطة N' مروراً بالنقطة B وتكون في هذا المجال المتراجحة غير محققة، ننتقل من النقطة N' للنقطة N مروراً بالنقطة B' وتكون في هذا المجال المتراجحة محققة ومجموعة حلولها $\left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ ،نتابع الانتقال من النقطة N للنقطة N' مروراً بالنقطة B وتكون في هذا المجال المتراجحة غير محققة، ننتقل من النقطة N' للنقطة N مروراً بالنقطة B' وتكون في هذا المجال المتراجحة محققة ومجموعة حلولها $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$، ننتقل من النقطة N' فنصل لنهاية المجال عند النقطة A' فنتوقف وتكون في هذا المجال المتراجحة محققة ومجموعة حلولها $\left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$، إذا مجموعة حلول المتراجحة $\left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$.

✌توضيح نرسم الخط البيانيّ لتابع الجيب ونرسم المستقيم $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

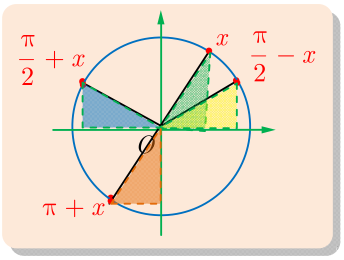


على المجال $[-2\pi, 3\pi]$ يقع الخط البياني تحت المستقيم $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ عندما

$$x \in \left[-2\pi, -\frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, 3\pi\right]$$

19 عيِّن على الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات x و $\frac{\pi}{2}+x$ و $\pi+x$ و $\frac{\pi}{2}-x$، ثُمّ اختزلْ الصيغة: $g(x)=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin\left(\pi+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

الحل



من ملاحظة الدائرة المثلثية وتطابق المثلثات في الرسم المقابل وجدنا

أنَّ $\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ و

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$. ومنه كان

$$g(x)=\sin x+\cos x-\sin x+\cos x$$

و بإجراء عمليات الجمع اللازمة ينتج أنَّ $g(x)=2\cos x$

20 عيِّن على الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ النقاط الموافقة للقياسات $\frac{5\pi}{2}-x$ و $3\pi+x$ و $5\pi-x$ و $x-\frac{\pi}{2}$، ثُمّ اختزلْ الصيغة : $h(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\sin\left(3\pi+x\right)+\cos\left(5\pi-x\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

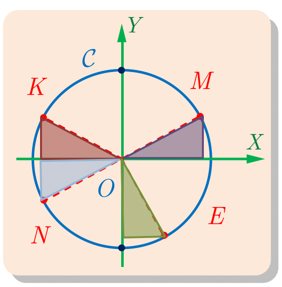
الحل

لمَّا كان $\frac{5\pi}{2}-x=2\pi+\frac{\pi}{2}-x$ وجدنا أنَّ

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

و لمَّا كان $3\pi+x=2\pi+\pi+x$ وجدنا أنَّ

$$\sin\left(3\pi+x\right)=\sin\left(2\pi+\pi+x\right)=\sin\left(\pi+x\right)=-\sin x$$



ولمَّا كان $5\pi-x=4\pi+\pi-x$ وجدنا أنَّ

$$\cos\left(5\pi-x\right)=\cos\left(4\pi+\pi-x\right)=\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$$

ولمَّا كان $5\pi-x=4\pi+\pi-x$ وجدنا أنَّ

$$\cos\left(5\pi-x\right)=\cos\left(4\pi+\pi-x\right)=\cos\left(\pi-x\right)=-\cos x$$

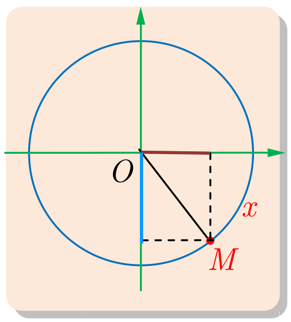
ولمَّا كان $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

وجدنا مما سبق أنَّ $h(x)=\cos x+-\sin x+-\cos x+\sin x=0$

21 عيِّن على الدائرة المثلّثيّة $\mathcal{C}$ النقطة M إذا علمتَ أنّ $\cos x = \frac{3}{5}$ و $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. ثُمّ احسبْ كلاً من : $\sin x$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ و $\cos\left(\pi - x\right)$ و $\sin\left(\pi - x\right)$.

الحل

نعلم أنّ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ومنه $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$ ولما كان $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ كان $\sin x$ سالب ومنه $\sin x = -\frac{4}{5}$.



$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \frac{3}{5}$ ،

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\frac{4}{5}$ ،

$\cos\left(\pi - x\right) = \cos x = \frac{3}{5}$ ،

$\sin\left(\pi - x\right) = \sin x = -\frac{4}{5}$.

5

الاحتمالات

1. مقدمة
2. عناصر الاحتمال
3. قانون الاحتمال

تمرينات ومسائل

1 في حالة قطعة نقود، نرمز إلى الكتابة بالرمز H وإلى الشعار بالرمز T. نتأمّل تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة مرّتين متتاليتين. أيّ المقادير التالية يساوي احتمال ظهور الكتابة مرّتين:

① $\frac{1}{2}$. ② $\frac{1}{3}$. ③ $\frac{1}{4}$. ④ $P(\{TT\})$.

2 يحوي صندوق ثلاث كرات متماثلة الملمس، اثنتان سوداوان وواحدة بيضاء، نسحب كرتين على التتالي مع إعادة الأولى قبل سحب الثانية. أيُّ الأعداد التالية يساوي احتمال سحب كرتين سوداوين ؟

① $\frac{2}{9}$. ② $\frac{4}{9}$. ③ $\frac{4}{6}$. ④ 1.

3 في صندوق ثلاث كرات متماثلة الملمس، اثنتان سوداوان وواحدة بيضاء، نسحب كرتين على التتالي دون إعادة الكرة الأولى. أيّ الأعداد التالية يساوي احتمال سحب كرتين سوداوين ؟

① $\frac{1}{9}$. ② $\frac{3}{9}$. ③ $\frac{1}{6}$. ④ 1.

لنتعلّم البحث معاً

4 الصندوق والكرات (1)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، وننظر إلى رقمها.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحصول على رقم فرديّ ؟

الحل

① المطلوب هو تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائيّة والتي نسميها فضاء العينة.

نلاحظ إنّ نتيجة التجربة هي أحد الأرقام المسجلة على الكرات وأنّ الألوان ليست ذات أهميّة في التجربة. ومنه يكون فضاء العينة:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5\}$$

من الواضح أنّ هذه التجربة متساوية الاحتمال لأنّ كل رقم له فرصة واحدة وأن هذه الفرص متساوية لتماثل الكرات الخمس الموجودة في الصندوق.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	5	4	3	2	1
احتمال وقوعها	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث **"الحصول على رقم فرديّ"**، والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية: $\{1,3,5\}$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث ثلاث فرص للوقوع من أصل 5، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{3}{5}$.

5 الصندوق والكرات (2)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، وننظر إلى لونها.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحصول على لون غير الأزرق ؟

الحل

① المطلوب هو تحديد النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائيّة والتي نسميها فضاء العينة.

نلاحظ إنّ نتيجة التجربة هي أحد الألوان "أبيض"، "أزرق" و"أسود" وأنّ الأرقام ليست ذات أهميّة في التجربة.

إذا رمزنا إلى الكرة السوداء بالرمز b، وإلى الكرة البيضاء بالرمز w، وإلى الكرة الزرقاء بالرمز u، وبالتالي يكون فضاء العينة:

$$\Omega = \{b,w,u\}$$

من الواضح أنّ هذه التجربة غير متساوية الاحتمال لأنّ احتمال b أكبر من احتمال w. ولكن للاستفادة من الحالات متساوية الاحتمال، سيتم الاستفادة من ترقّم الكرات.

يظهر اللون الابيض مرة واحدة فقط، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{w\}$ يساوي $\frac{1}{5}$.

يظهر اللون الاسود مرتين، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{b\}$ يساوي $\frac{2}{5}$.

يظهر اللون الازرق مرتين، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{u\}$ يساوي $\frac{2}{5}$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	u	b	w
احتمال وقوعها	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث **"الحصول على لون غير الأزرق"**، والألوان الموافقة هي المجموعة الجزئية: $\{w,b\}$ وأن عدد الكرات من هذه الألوان هو 3.

نلاحظ أنّ لهذا الحدث ثلاث فرص للوقوع من أصل 5، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{3}{5}$.

6 الصندوق والكرات (3)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق، ثمّ نعيدها إلى الصندوق، ونسحب عشوائيّاً كرةً ثانيةً. نسجّل رقميّ الكرتين المسحوبتين بالترتيب.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحدث D : "الحصول على الرقم نفسه مرّتين" ؟

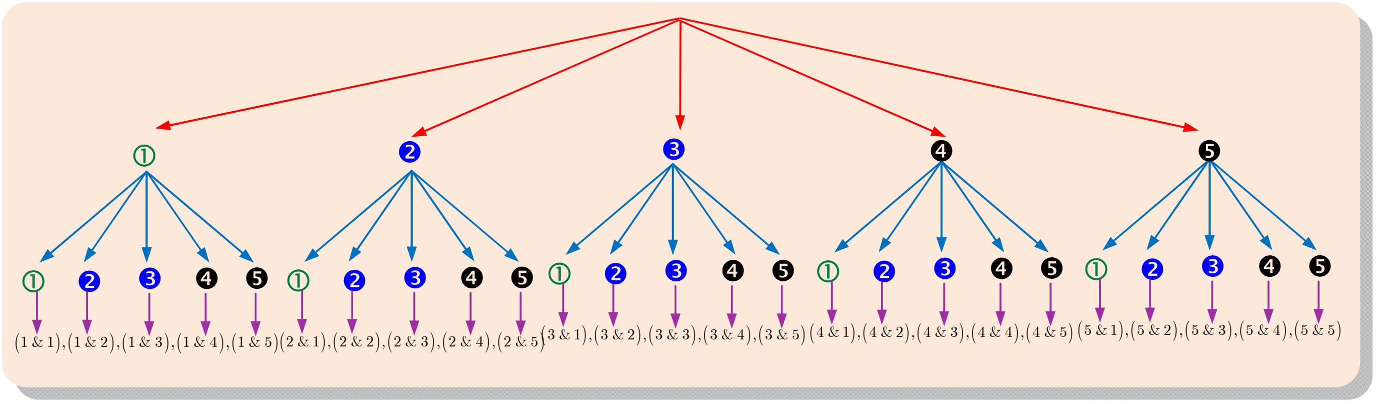
③ ما احتمال الحدث T : "سحب الرقم 3 في المرحلة الثانية" ؟

④ ما احتمال الحدث S : "الرقم الأوّل أكبر تماماً من الرقم الثاني" ؟

الحل

① نلاحظ إنّ نتيجة التجربة هي رقمي الكرتين المسحوبتين وأنّ الألوان ليست ذات أهميّة في التجربة.

وسنعمد إلى تمثيل التجربة المفترضة بمخطّط شجري كما يأتي :



فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

$$\left\{\begin{matrix}(1\,\&\,1),(1\,\&\,2),(1\,\&\,3),(1\,\&\,4),(1\,\&\,5),(2\,\&\,2),(2\,\&\,3),(2\,\&\,4),\\(2\,\&\,5),(3\,\&\,3),(3\,\&\,4),(3\,\&\,5),(4\,\&\,4),(4\,\&\,5),(5\,\&\,5)\end{matrix}\right\}$$

يمكّننا هذا المخطّط من حساب احتمال كلّ حدث بسيط، حيث نقبل بمبدأ تساوي الفرص بالنسبة لكلّ فرع من فروع الشجرة، ونلخّص النتائج على النحو الآتي :

تظهر النتيجة $(1\,\&\,1)$ مرة واحدة، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(1\,\&\,1)\}$ يساوي $\frac{1}{25}$، كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(2\,\&\,2)$ و $(3\,\&\,3)$ و $(4\,\&\,4)$ و $(5\,\&\,5)$.

وتظهر النتيجة $(1\,\&\,2)$ مرتين، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(1\,\&\,2)\}$ يساوي $\frac{2}{25}$. كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(1\,\&\,3)$ و $(1\,\&\,4)$ و $(2\,\&\,3)$ و $(2\,\&\,4)$ و $(3\,\&\,4)$ و $(1\,\&\,5)$ و $(2\,\&\,5)$ و $(3\,\&\,5)$ و $(4\,\&\,5)$ و $(5\,\&\,5)$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	$(1\,\&\,1)$	$(2\,\&\,2)$	$(3\,\&\,3)$	$(4\,\&\,4)$	$(5\,\&\,5)$
احتمال وقوعها	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
النتيجة	$(2\,\&\,1)$	$(3\,\&\,1)$	$(4\,\&\,1)$	$(5\,\&\,1)$	$(3\,\&\,2)$
احتمال وقوعها	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$
النتيجة	$(4\,\&\,2)$	$(4\,\&\,3)$	$(5\,\&\,3)$	$(5\,\&\,4)$	$(5\,\&\,2)$
احتمال وقوعها	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

وبطريقة أخرى يمكن أن نضع نتائج سحب الكرتين في جدول كما يأتي :

الكرة الأوّلى / الكرة الثانية	1	2	3	4	5
1	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$
2	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(5,2)$
3	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$(5,3)$
4	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$(5,4)$
5	$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(4,5)$	$(5,5)$

لمّا كان كلُّ عمود يقابل نتيجة من نتائج سحب الكرة الأوّلى، نستطيع الأخذ بمبدأ تساوي فرص الحصول على أي عمود من الأعمدة.

وكذلك، لمّا كان كلُّ سطر يقابل نتيجة من نتائج سحب الكرة الثانية، نستطيع الأخذ بمبدأ تساوي فرص الحصول على أي سطر من الأسطر. وهكذا، يمكننا القول إنّ أيّ خانة من خانات الجدول لها الفرصة ذاتها في الحدوث، أي فرصة واحدة من بين 25. ونستطيع بهذه الطريقة حساب احتمالات الأحداث البسيطة المختلفة، فنكتب :

النتيجة $(1 \& 1)$ تقابل خانة واحدة، فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{25}$، كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(2 \& 2)$ و $(3 \& 3)$ و $(4 \& 4)$ و $(5 \& 5)$. أمّا النتيجة $(1 \& 2)$ فتظهر في خانتين من الجدول، واحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{2}{25}$. كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(1 \& 3)$ و $(1 \& 4)$ و $(2 \& 3)$ و $(2 \& 4)$ و $(3 \& 4)$ و $(1 \& 5)$ و $(2 \& 5)$ و $(3 \& 5)$ و $(4 \& 5)$ و $(5 \& 5)$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	$(1 \& 1)$	$(2 \& 2)$	$(3 \& 3)$	$(4 \& 4)$	$(5 \& 5)$
احتمال وقوعها	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
النتيجة	$(2 \& 1)$	$(3 \& 1)$	$(4 \& 1)$	$(5 \& 1)$	$(3 \& 2)$
احتمال وقوعها	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$
النتيجة	$(4 \& 2)$	$(4 \& 3)$	$(5 \& 3)$	$(5 \& 4)$	$(5 \& 2)$
احتمال وقوعها	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث "الحصول على الرقم نفسه مرّتين" والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية:

$$D = \{(1 \& 1),(2 \& 2),(3 \& 3),(4 \& 4),(5 \& 5)\}$$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث خمس فرص للوقوع من أصل 25، فاحتمال وقوعه يساوي $P(\mathrm{D}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب الرقم 3 في المرحلة الثانية " والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية:

$$T = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3)\}$$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث خمس فرص للوقوع من أصل 25، فاحتمال وقوعه يساوي $P(T) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

④ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث "الرقم الأوّل أكبر تماماً من الرقم الثاني" والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية:

$$S = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث خمس فرص للوقوع من أصل 25، فاحتمال وقوعه يساوي $P(S) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

7 الصندوق والكرات (4)

في صندوق كرةٌ بيضاء تحمل الرقم 1، وكرتان زرقاوان تحمل إحداهما الرقم 2 وتحمل الثانية الرقم 3، وكرتان سوداوان تحمل إحداهما الرقم 4 وتحمل الثانية الرقم 5. نسحب عشوائياً كرةً عشوائيّ من الصندوق، **ولا نعيدها إلى الصندوق**، ثمّ نسحب عشوائيّاً كرةً ثانيةً. نسجّل رقميّ الكرتين المسحوبتين حسب الترتيب.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال الحدث D : "الحصول على الرقم نفسه مرّتين" ؟

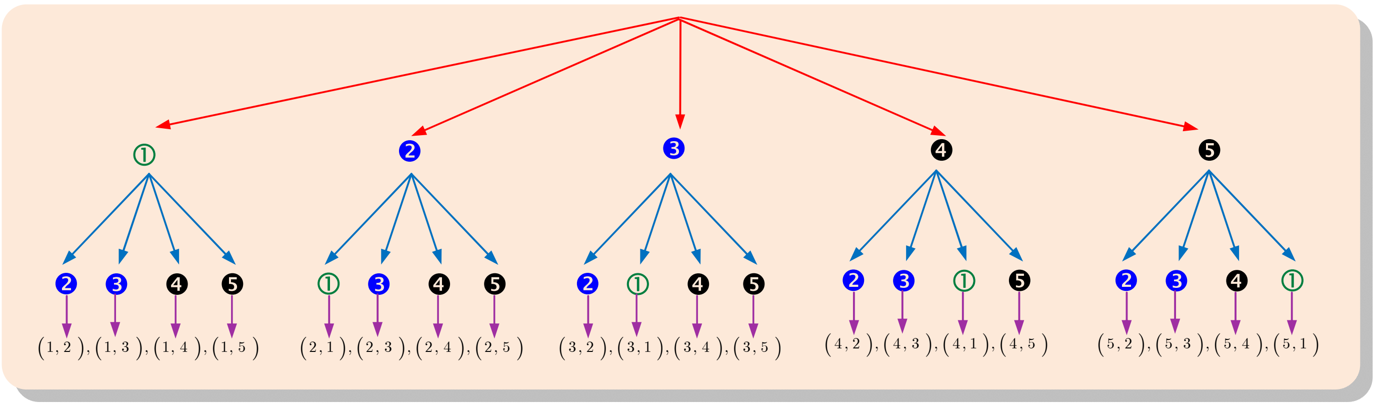
③ ما احتمال الحدث T : "سحب الرقم 3 في المرحلة الثانية" ؟

④ ما احتمال الحدث S : "الرقم الأوّل أكبر تماماً من الرقم الثاني" ؟

الحل

① نلاحظ إنّ نتيجة التجربة هي رقمي الكرتين المسحوبتين وأنّ الألوان ليست ذات أهميّة في التجربة.

وسنعمد إلى تمثيل التجربة المفترضة بمخطّط شجري كما يأتي :



فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة:

$$\{(1\ \&\ 2),(1\ \&\ 3),(1\ \&\ 4),(1\ \&\ 5),(2\ \&\ 3),(2\ \&\ 4),(2\ \&\ 5),(3\ \&\ 4),(3\ \&\ 5),(4\ \&\ 5)\}$$

يمكّننا هذا المخطّط من حساب احتمال كلّ حدث بسيط، حيث نقبل بمبدأ تساوي الفرص بالنسبة لكلّ فرع من فروع الشجرة، ونلخّص النتائج على النحو الآتي :

تظهر النتيجة $(1\ \&\ 2)$ مرتين، فاحتمال وقوع الحدث البسيط $\{(1\ \&\ 2)\}$ يساوي $\frac{1}{10}=\frac{2}{20}$. كذلك الأمر بالنسبة إلى كل من النتائج $(1\ \&\ 3)$ و $(1\ \&\ 4)$ و $(2\ \&\ 3)$ و $(2\ \&\ 4)$ و $(3\ \&\ 4)$ و $(1\ \&\ 5)$ و $(2\ \&\ 5)$ و $(3\ \&\ 5)$ و $(4\ \&\ 5)$ و $(5\ \&\ 5)$.

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	$(2\ \&\ 1)$	$(3\ \&\ 1)$	$(4\ \&\ 1)$	$(5\ \&\ 1)$	$(3\ \&\ 2)$
احتمال وقوعها	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$
النتيجة	$(4\ \&\ 2)$	$(4\ \&\ 3)$	$(5\ \&\ 3)$	$(5\ \&\ 4)$	$(5\ \&\ 2)$
احتمال وقوعها	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث "الحصول على الرقم نفسه مرّتين" والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية:

$$D=\{\quad\}$$

نلاحظ أنّ ليس لهذا الحدث فرص للوقوع من أصل 20، فاحتمال وقوعه يساوي $P(D) = 0$.

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب الرقم 3 في المرحلة الثانية " والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية:

$$T = \{(1,3),(2,3),(4,3),(5,3)\}$$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث أربع فرص للوقوع من أصل 20، فاحتمال وقوعه يساوي $P(T) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

④ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث "الرقم الأوّل أكبر تماماً من الرقم الثاني" والحدث الموافق هو المجموعة الجزئية:

$$S = \{(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3),(5,4)\}$$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث خمس فرص للوقوع من أصل 25، فاحتمال وقوعه يساوي $P(S) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

8 نسحب عشوائيّاً ورقة لعب (من لعبة ورق فيها 52 ورقة).

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال سحب ورقة عليها رقم فرديّ ؟

③ ما احتمال سحب صورة ؟

الحل

① إنّ التجربة متساوية الاحتمال، فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

$$\left\{\begin{matrix}1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,\\30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52\end{matrix}\right\}$$

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	52	.....	3	2	1
احتمال وقوعها	$\frac{1}{52}$	....	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{52}$

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب ورقة عليها رقم فرديّ "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 26 فرصة للوقوع من أصل 52، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$.

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب صورة "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 12 فرصة للوقوع من أصل 52، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{3}{13}=\frac{12}{52}$.

9 نسحب عشوائيّاً، ورقة لعب (من لعبة ورق فيها 52 ورقة)، ثمّ نسحب ورقةً أخرى دون إعادة الأولى.

① عيّن فضاء العيّنة، وقانون الاحتمال لهذه التجربة العشوائيّة.

② ما احتمال سحب العشرتين الحمراوين ؟

③ ما احتمال سحب عشرتين ؟

الحل

① إنّ التجربة متساوية الاحتمال، فتكون مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة :

$$\{(1,2),(1,3),(1,4),\ldots\ldots,(2,3),(2,4),(2,5),\ldots\ldots,(51,52)\}$$

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

النتيجة	$(51,52)$	.....	$(1,4)$	$(1,3)$	$(1,2)$
احتمال وقوعها	$\frac{1}{2652}$	....	$\frac{1}{2652}$	$\frac{1}{2652}$	$\frac{1}{2652}$

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب العشرتين الحمراوين "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث فرصة للوقوع من أصل 52، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{1}{52}$.

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب عشرتين "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث ثلاث3 فرص للوقوع من أصل 52، فاحتمال وقوعه $\frac{3}{52}$.

10 نلقي حجر نرد مكعب الشكل وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6 وهو مصنوع بحيث يكون احتمال **غير متوازن** ظهور أيّ وجه متناسباً مع رقمه.

① ما هو فضاء العيّنة ؟ هل التجربة متساوية الاحتمال ؟

② عيّن قانون الاحتمال لهذه التجربة.

الحل

① إنّ مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هي : $\{6,5,4,3,2,1\}$، ولمّا كان النرد غير متوازن توازناً، فالتجربة غير متساوية الاحتمال.

② يعبّر الجدول الآتي عن كل نتيجة واحتمالها :

الحدث البسيط	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
احتماله	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6

ولما كان احتمال ظهور أيّ وجه متناسباً مع رقمه كان:

$$\frac{P_1}{1}=\frac{P_2}{2}=\frac{P_3}{3}=\frac{P_4}{4}=\frac{P_5}{5}=\frac{P_6}{6}=\frac{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6}{1+2+3+4+5+6}$$

$$\frac{P_1}{1}=\frac{P_2}{2}=\frac{P_3}{3}=\frac{P_4}{4}=\frac{P_5}{5}=\frac{P_6}{6}=\frac{1}{21}$$

وبالتالي $P_1=\frac{1}{21}, P_2=\frac{2}{21}, P_3=\frac{3}{21}, P_4=\frac{4}{21}, P_5=\frac{5}{21}, P_6=\frac{6}{21}$

وعليه يمكننا تمثيل قانون احتمال هذه التجربة كما يأتي :

الحدث البسيط	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
احتماله	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

11 في صندوق ثلاث كرات بيضاء مرقّمة من 1 إلى 3، وأربع كرات حمراء مرقّمة من 1 إلى 4، وخمس كرات سوداء مرقّمة من 1 إلى 5. نسحب عشوائياً كرةً من الصندوق.

① ما احتمال سحب كرةٍ حمراء ؟

② ما احتمال سحب كرة رقمها أكبر تماماً من 2 ؟

الحل

① إنّ مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة هي : {①,②,③,❶,❷,❸,❹,❶,❷,❸,❹,❺}

إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب كرةٍ حمراء "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث أربع فرص للوقوع من أصل 12، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$.

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " سحب كرة رقمها أكبر تماماً من 2 "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث ست فرص للوقوع من أصل 12، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$.

12 لدى عائلة ثلاثة أطفال. نفترض أنّ هناك فرصاً متساوية لأن يكون الطفل صبيّاً أو بنتاً.

① ما احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة صبياناً ؟

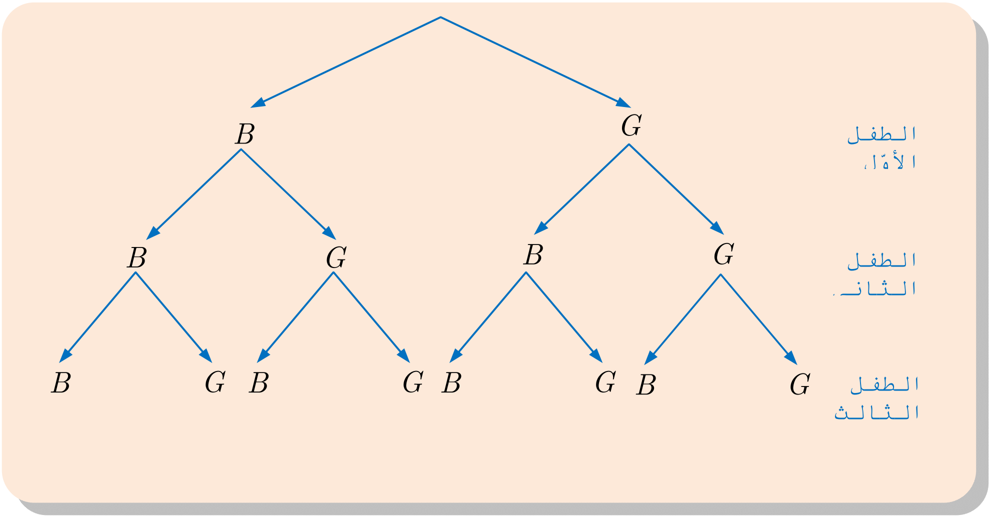
② ما احتمال أن يكون لدى العائلة صبيّان وبنت ؟

③ ما احتمال أن يكون لدى العائلة بنت واحدة على الأقلّ ؟

④ ما احتمال أن يكون الطفل الثالث بنتاً ؟

الحل

إذا رمزنا إلى الصبي بالرمز B، وإلى البنت بالرمز G، وسنعمد إلى التمثيل بمخطّط شجري كما يأتي :



من المخطط نجد إنّ مجموعة النتائج الممكنة هي :

$$\Omega = \{(B,B,B),(B,G,B),(B,B,G),(G,B,B),(G,G,B),(G,B,G),(B,G,G),(G,G,G)\}$$

ويمكّننا هذا المخطّط من حساب احتمال كلّ حدث بسيط، حيث نقبل بمبدأ تساوي الفرص بالنسبة لكلّ فرع من فروع الشجرة.

① إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون الأطفال الثلاثة صبياناً "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث فرصة واحدة للوقوع من أصل 8، فاحتمال وقوعه $\frac{1}{8}$.

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون لدى العائلة صبيّان وبنت "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 3 فرص للوقوع من أصل 8، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{3}{8}$.

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون لدى العائلة بنت واحدة على الأقلّ "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 7 فرص للوقوع من أصل 8، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{7}{8}$.

④ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون الطفل الثالث بنتاً "

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 4 فرص للوقوع من أصل 8، فاحتمال وقوعه $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$.

13 نلقي حجر نرد مكعب الشكل متوازن وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6 ثلاث مرات متتالية، ونسجّل الأرقام الظاهرة.

① ما احتمال الحصول على الرقم 6 في المرّات الثلاث ؟

② ما احتمال الحصول على 4 و 2 و 1 ؟

الحل

إن عدد النتائج الممكنة للرقم الظاهر في المرة الأولى هو 6 والثانية 6 والثالثة 6 فيكون عدد عناصر فضاء العينة هو : $6 \times 6 \times 6 = 216$.

① إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على الرقم 6 في المرّات الثلاث "

توافق النتيجة $(6,6,6)$ فرصة واحدة من أصل 216، فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{216}$.

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على 4 و 2 و 1 "

نلاحظ ان الحدث الموافق هو: $\{(1,2,4),(1,4,2),(4,2,1),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2)\}$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 6 فرص للوقوع من أصل 216، فاحتمال وقوعه $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

14 في صندوق 15 كرةٍ متماثلة الملمس ومرقّمة من 1 إلى 15. نسحب كرةً ثمّ نسحب كرة ثانية دون إعادة الأولى، ثمّ نسحب ثالثة دون إعادة الكرتين السابقتين. نسجّل الأعداد التي حصلنا عليها حسب ترتيب السحب.

① ما احتمال الحصول على الثلاثيّة المرتّبة $(1,2,3)$ ؟

② ما احتمال الحصول على 1 و 2 و 3 بأيّ ترتيب كان ؟

الحل

إن عدد النتائج الممكنة للرقم الظاهر في السحب الأول هو 15 والثاني 14 والثالث 13 فيكون عدد عناصر فضاء العينة هو : $15 \times 14 \times 13 = 2730$.

① إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على الثلاثيّة المرتّبة $(1,2,3)$ "

توافق النتيجة $(1,2,3)$ فرصة واحدة من أصل 2730، فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{2730}$.

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على 1 و 2 و 3 "

نلاحظ ان الحدث الموافق هو: $\{(1,2,3),(1,3,2),(3,2,1),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$

نلاحظ أنّ لهذا الحدث 6 فرص للوقوع من أصل 2730، فاحتمال وقوعه يساوي $\frac{6}{2730} = \frac{1}{455}$.

15 في إحدى مسابقات التوظيف، يتضمّن اختبار ثلاثة أسئلة كلّ منها مزوّد بأربعة إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط. يُقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائيّاً عن الأسئلة الثلاثة.

① ما احتمال الحصول على ثلاث إجابات صحيحة ؟

② ما احتمال الحصول على إجابتين صحيحتين فقط ؟

الحل

إن عدد الخيارات الممكنة للإجابة على السؤال الاول هو 4 والثاني 4 والثالث 4 فيكون عدد عناصر فضاء العينة هو : $4 \times 4 \times 4 = 64$.

نرمز إلى للإجابة الصحيحة بالرمز T، وإلى للإجابة الخاطئة بالرمز F

① إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على ثلاث إجابات صحيحة "

توافق النتيجة $(\mathrm{T,T,T})$ فرصة واحدة من أصل 64، فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{64}$.

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على إجابتين صحيحتين فقط "

توافق النتيجة (F,T,T) وفق هذا الترتيب ثلاث فرص من أصل 64، بسبب وجود ثلاث إجابات خاطئة. فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{3}{64}$

توافق النتيجة (T,F,T) وفق هذا الترتيب ثلاث فرص من أصل 64. فاحتمال الحصول عليها $\frac{3}{64}$.

توافق النتيجة (T,T,F) وفق هذا الترتيب ثلاث فرص من أصل 64. فاحتمال الحصول عليها $\frac{3}{64}$.

وبالتالي الحدث الموافق هو: $\{(T,T,F),(T,F,T),(F,T,T)\}$

فاحتمال الحصول عليه يساوي $\frac{9}{64} = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64}$.

16 في إحدى مسابقات التوظيف، يتضمّن اختبار عشرة أسئلة كلّ منها مزوّد بأربعة إجابات مقترحة منها واحدة صحيحة فقط. يُقرّر أحد المتقدّمين الإجابة عشوائيّاً عن هذه الأسئلة.

① ما احتمال الحصول على عشرة إجابات صحيحة ؟

② ما احتمال الحصول بالضبط على تسعة إجابات صحيحة ؟

الحل

إن عدد الخيارات الممكنة للإجابة على السؤال الاول هو 4 والثاني 4 والثالث 4 وهكذا فيكون عدد عناصر فضاء العينة هو : $\underbrace{4 \times 4 \times .... \times 4}_{10} = (4)^{10} = 1048576$.

نرمز إلى للإجابة الصحيحة بالرمز T، وإلى للإجابة الخاطئة بالرمز F.

① إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول على عشرة إجابات صحيحة "

توافق النتيجة $(\mathrm{T,T,T})$ فرصة واحدة من أصل 1048576، فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{1}{1048576}$.

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " الحصول بالضبط على تسعة إجابات صحيحة "

توافق النتيجة (F,T,T,T,T,T,T,T,T,T) وفق هذا الترتيب ثلاث فرص من أصل 1048576، بسبب وجود ثلاث إجابات خاطئة. فاحتمال الحصول عليها يساوي $\frac{3}{1048576}$

توافق النتائج $(F\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T\,\&\,T)$ ثلاث فرص من أصل 1048576،. وبالتالي احتمال الحدث الموافق لهذه النتائج الحصول عليها يساوي:

$$\underbrace{\frac{3}{1048576}+\frac{3}{1048576}+....+\frac{3}{1048576}}_{10}=\frac{30}{1048576}$$

17 نزل في أحد الفنادق عائلةٌ قوامها أبٌ وأمٌّ وثلاثة أطفال؛ صبيّان والصغيرة ليلى. وضع صاحب الفندق بطاقات تعريفهم في سلة واحدة. وعندما رغب الأبوان مغادرة الفندق لجلب بعض اللوازم، أرسل الأب ابنته إلى صاحب الفندق كي تأتي ببطاقتيهما. وعندما طلبت ليلى من صاحب الفندق بطاقتين، مدَّ الأخير يده إلى السلة التي تحوي البطاقات الخمس وأعطاها عشوائياً اثنتين منها.

① ما هو عدد النتائج المختلفة التي نحصل عليها عند سحب بطاقتين في آنٍ معاً من السلة ؟

② احسب احتمال كلٍّ من الأحداث الآتية:

❶ الحدث A : " تعود البطاقتان إلى الزوجين ".

❷ الحدث B : " تعود البطاقتان إلى الصبيين ".

❸ الحدث C : " تعود البطاقتان إلى شخصين من جنس واحد ".

❹ الحدث D : " تعود البطاقتان إلى شخصين من جنسين مختلفين ".

الحل

① اذا رمزنا (F للأب ، M للأم ، B_1 للصبي الاول ، B_2 للصبي الثاني ، G للبنت) لبطاقات العائلة وبما انه لدينا بطاقتين للسحب معا في آن واحد فان فضاء العينة هو :

$$\Omega=\{(F,M),(F,B_1),(F,B_2),(F,G),(B_1,M),(B_2,M),(G,M),(B_1,B_2),(B_1,G),(B_2,G)\}$$

وبالتالي عدد النتائج الممكنة هو : 10.

②

❶ لنتأمّل الحدث A " تعود البطاقتان إلى الزوجين " الموافق للمجموعة الجزئية

$$A=\{(F,M)\}$$

من Ω. نلاحظ أنّ لهذا الحدث فرصة واحدة للوقوع من أصل 10، فاحتمال وقوعه يساوي $P(A)=\frac{1}{10}$

❷ لنتأمّل الحدث B " تعود البطاقتان إلى الصبيين " الموافق للمجموعة الجزئية

$$B=\{(B_1,B_2)\}$$

من Ω. نلاحظ أنّ لهذا الحدث فرصة واحدة للوقوع من أصل 10، فاحتمال وقوعه يساوي $P(B)=\frac{1}{10}$

❸ لنتأمّل الحدث C " تعود البطاقتان إلى شخصين من جنس واحد " الموافق للمجموعة الجزئية

$$C=\{(F,B_1),(F,B_2),(G,M),(B_1,B_2)\}$$

من Ω. نلاحظ أنّ لهذا الحدث أربع فرص للوقوع من أصل 10، فاحتمال وقوعه يساوي

$$P(C)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

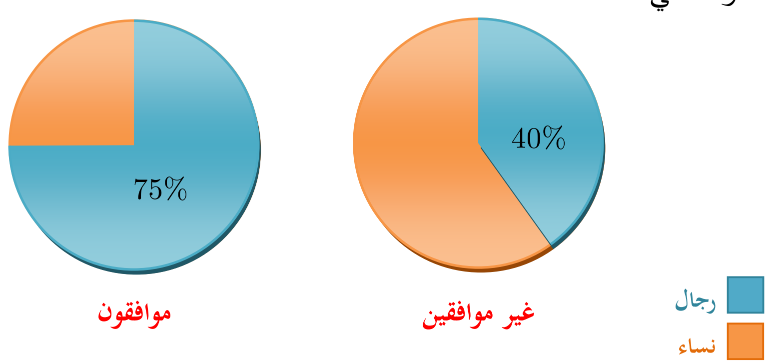
❹ لنتأمّل الحدث D " تعود البطاقتان إلى شخصين من جنسين مختلفين " الموافق للمجموعة الجزئية

$$D=\{(F,M),(F,G),(B_1,M),(B_2,M),(B_1,G),(B_2,G)\}$$

من Ω. نلاحظ أنّ لهذا الحدث ست فرص للوقوع من أصل 10، فاحتمال وقوعه يساوي

$$P(D)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

18 أُجريَ بواسطة الهاتف استطلاع للرأي شمل 900 شخصاً، حول أحد القوانين الصادرة حديثاً، فكانت النتيجة على النحو التالي:



① أكمل الجدول الآتي :

النوع \ الرأي	موافقون	غير موافقين	رفضوا الإجابة	المجموع
رجال			0	
نساء	90	174		
المجموع				900

أراد صحفيٌّ كتابة تقرير عن الموضوع فأخذ رقم هاتف أحد الأشخاص المستطلَعين واتّصل به.

② ما احتمال أن يكون هذا الشخص موافقاً على القانون ؟

③ ما احتمال أن يكون قد رفض الإجابة ؟

④ ما احتمال أن يكون رجلاً موافقاً على القانون ؟

الحل

① في الدائرة التي تقابل الاشخاص الموافقون لدينا % 25 من النساء موافقات يقابلهن 90 امرأة فيكون % 75 من الرجال موافقون ويقابل ذلك $3 \times 90 = 270$ رجل .

في الدائرة التي تقابل الاشخاص غير الموافقون لدينا % 60 من النساء غير موافقات يقابل ذلك 174 امرأة ولدينا % 40 من الرجال غير موافقين فيقابل ذلك $\frac{174 \times 40}{60} = 116$ رجل.

فنجد عدد الرجال الكلي : $116 + 270 = 386$

وعدد الاشخاص الموافقون $90 + 270 = 360$

وعدد الاشخاص غير الموافقين $116 + 174 = 290$

وعدد النساء الكلي $900 - 386 = 514$

وعدد النساء الرافضات للإجابة $514 - (174 + 90) = 250$

يصبح الجدول كالآتي :

الرأي / النوع	موافقون	غير موافقين	رفضوا الإجابة	المجموع
رجال	270	116	0	386
نساء	90	174	250	514
المجموع	360	290	250	900

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون الشخص موافقاً على القانون "

وعدد الأشخاص الموافقين على الاجابة هو 360 من أصل 900. فاحتمال هذا الحدث يساوي $\frac{360}{900} = \frac{2}{5}$

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون قد رفض الإجابة "

وعدد الأشخاص الرافضين للإجابة هو 250 من أصل 900. فاحتمال هذا الحدث يساوي $\frac{250}{900} = \frac{5}{18}$

④ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون رجلاً موافقاً على القانون "

وعدد الأشخاص الموافقين هو 270 من أصل 900. فاحتمال هذا الحدث يساوي $\frac{270}{900} = \frac{3}{10}$

19 أجرت شركةٌ للاتّصالات تحقيقاً إحصائيّاً في محافظة عدد سكّانها 40 000 نسمة، للوقوف على مدى رضا السكّان عن خدماتها. قُسّمت المحافظة إلى ثلاث مناطق : مركز المحافظة والضواحي والريف.

أظهر التحقيق المعلومات الآتية :

- يقطن 10% من السكّان في مركز المحافظة.
- من أصل نسبة 60% القاطنين في الضواحي هناك 6.25% غير راضين عن الخدمات.

- في الريف، يبلغ عدد السكّان الراضين عن الخدمات خمسة أضعاف عدد غير الراضين عنها.
- تبلغ النّسبة المئويّة لغير الراضين في مجمل المحافظة 10%.

① أكمل الجدول الآتي:

	المركز	الضواحي	الريف
راض			
غير راض			

سألنا أحد سكّان المحافظة.

② ما احتمال أن يكون هذا الشخص من سكّان الريف ؟

③ ما احتمال أن يكون راضياً عن خدمات الشركة ؟

الحل

① عدد سكان المحافظة $40\,000$

عدد القاطنين في المركز هو : $\frac{10}{100} \times 40\,000 = 4000$

عدد القاطنين في الضواحي هو : $\frac{60}{100} \times 40000 = 24000$

عدد القاطنين في الريف هو : $40000 - (4000 + 24000) = 12000$

ان عدد غير الراضين في الضواحي هو : $\frac{6.25}{100} \times 40000 = 1500$

ان عدد غير الراضين في المحافظة هو : $\frac{10}{100} \times 40000 = 4000$

في الريف، يبلغ عدد السكّان الراضين عن الخدمات خمسة أضعاف عدد غير الراضين عنها. نفترض أن عدد غير الراضين n ومنه $n + 5n = 12000$ وبالتالي $6n = 12000$ أي $n = 2000$

ومنه عدد غير الراضين في المركز هو: $4000 - (1500 + 2000) = 500$

	المركز	الضواحي	الريف	المجموع
راض	3500	22500	10000	36000
غير راض	500	1500	2000	4000
المجموع	4000	24000	12000	40 000

② إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون هذا الشخص من سكّان الريف "

وعدد الأشخاص في الريف هو 12000 من أصل $40\,000$. فاحتمال هذا الحدث يساوي $\frac{3}{10} = \frac{12000}{40\,000}$

③ إنّ المطلوب هو حساب احتمال وقوع الحدث " أن يكون راضياً عن خدمات الشركة "

وعدد الأشخاص في الريف هو 36000 من أصل $40\,000$. فاحتمال هذا الحدث يساوي $\frac{9}{10} = \frac{36000}{40\,000}$

1

التحويلات الهندسيّة في المستوي

1. التّحويلات المألوفة في المستوي
2. أثر التّحويلات الهندسيّة على الأشكال المألوفة
3. الخواصّ المشتركة للتّحويلات المألوفة

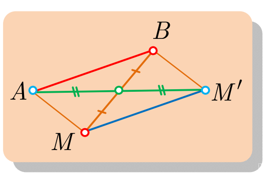
فكّر - صفحة 25

- إذا كانت النّقطة M' صورةَ نقطة M وفق انعكاسٍ محوره d، فما هي صورةُ النّقطة M' وفق هذا الانعكاس ؟
- إذا كان Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ I وكانا متناظرين بالنسبة إلى مستقيمٍ d، فلماذا تقع النّقطة I على المستقيم d ؟

الحل

- إنّها النقطة M نفسها. لأنّه إذا كانت النقطة M غير واقعة على المستقيم d، كان هذا المستقيم محور القطعة المستقيمة $[MM']$ وكانت M صورةَ النقطة M' وفق الانعكاس الذي محوره d.
- لأنّ صورة نقطة تقاطع هذين المستقيمين I هي نقطة تقاطع صورتيهما وفق الانعكاس المعطى، فهي إذن النقطة I نفسها. إذن تنطبق I على صورتها وفق هذا الانعكاس ولا بُد أن تقع على محوره d

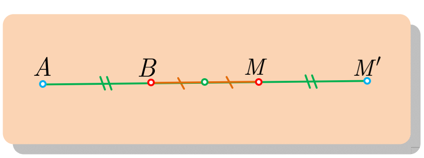
فكّر - صفحة 26



في التعريف السابق افترضنا أنّ النقاط A و B و M لا تقعُ على استقامة واحدة. يمكننا أن نضع تعريفاً يأخذ هذه الحالة في الحسبان بأن نقول أنّ M' هي نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، علّل ذلك ؟

الحل

إذا افترضنا أنّ النّقاط A و B و M لا تقعُ على استقامة واحدة وكانت M' نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، كان الرباعي $AMM'B$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه. وهو التعريف السابق نفسه.



أمّا إذا وقعت النقاط الثلاث A و B و M على استقامةٍ واحدةٍ و كانت M' نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، كان $AB = MM'$ وكانت M' صورة M وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B في هذه الحالة أيضاً.

تدرّب - صفحة 27

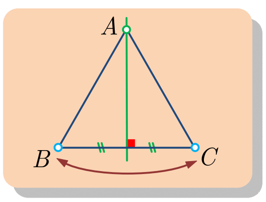
① عيّن المقولات الصحيحة فيما يأتي وعلل إجاباتك:

❶ للمثلّث المتساوي الأضلاع ثلاثة محاور تناظر.

❷ إذا كانت صورة نقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{I\to J}$ هي النقطة C، كانت القطعتان المستقيمتان $[BJ]$ و $[IC]$ متناصفتين.

❸ إذا كانت $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتين مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ولهما نصف القطر نفسه وكانتا متقاطعتين في نقطتين A و B، كان المستقيمان (OO') و (AB) محوري تناظر للشّكل المكوّن من الدّائرتين.

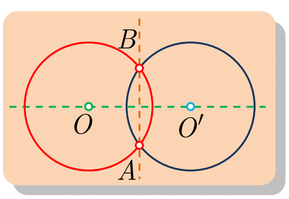
❹ إذا كانت N صورة نقطة M وفق دورانٍ مركزه O وزاويته $60°$ كان المثلّث MON متساوي الأضلاع.



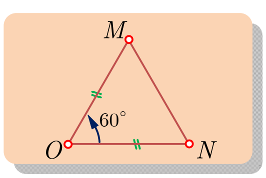
❶ للمثلّث المتساوي الأضلاع ثلاثة محاور تناظر، هي محاور أضلاع المثلث، إذ يمر محور كل ضلع بالرأس المقابلة فصورة المثلث وفق التناظر الذي محوره محور هذه الضلع هي المثلث نفسه.

❷ صحيحة، خاصة قطرا متوازي الأضلاع متناصفان.

❸ الدائرة متناظرة بالنسبة إلى كل قطر من أقطارها، وعليه يكون خط المركزين (OO') محور تناظر للشكل المكوّن من الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$.



ومن ناحية أخرى، نظراً إلى كون $OA = O'A$ و $OB = O'B$ استنتجنا أنّ (AB) هو محور القطعة المستقيمة $[OO']$، والنقطة O' هي صورة O وفق الانعكاس الذي محوره (AB) فالدائرة $\mathcal{C}'$ هي صورة $\mathcal{C}$ وفق هذا الانعكاس المحوري. هذا يبرهن أنّ (AB) هو أيضاً محور تناظر للشكل المكوّن من الدائرتين $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$.



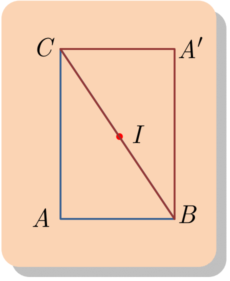
❹ هذا صحيح، لأنّ المثلث OMN مثلث متساوي الساقين فيه زاوية قياسها $60°$.

② ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A، ولتكن I منتصف القطعة $[BC]$. نرمز بالرّمز S_I إلى التّناظر الذي مركزه I.

❶ أنشئ صورة المثلّث ABC وفق التّحويل S_I.

❷ لتكن A' صورة A وفق S_I. ما طبيعة الرباعي $ABA'C$ ؟

الحل



❶ I منتصف القطعة $[BC]$، إذن $\mathcal{S}_I(B) = C$ و $\mathcal{S}_I(C) = B$. يكفي إذن أن ننشئ A' نظيرة A بالنسبة إلى I.

❷ الرباعي $ABA'C$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه، وهو في الحقيقة مستطيل لأنّ فيه زاوية قائمة هي A.

تدرّب - صفحة 30

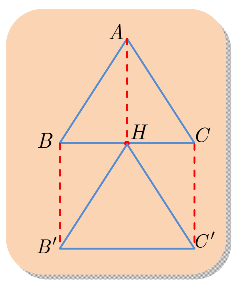
① ليكن المثلّث ABC. أنشئ النقطة C' صورة النقطة C وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to B}$ أي الذي ينقل A إلى B. لماذا تكون أيضاً النقطة C' صورةَ النقطة B وفق الانسحاب $T_{A\to C}$؟

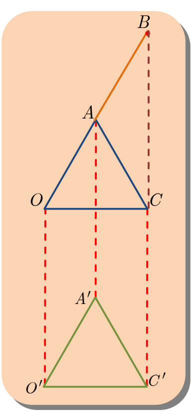
الحل

لأنّ I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ هو نفسه I' منتصف القطعة $[CB]$! فنظيرة A بالنسبة إلى I وهي $\mathcal{T}_{A\to B}(C)$ هي نفسها نظيرة A بالنسبة إلى I' وهي $T_{A\to C}(B)$.

② ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع. وليكن H المسقط القائم للنقطة A على القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to H}$.

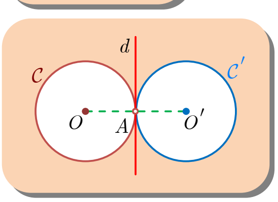
الحل





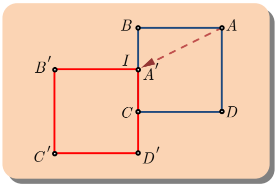
③ ليكن AOC مثلّثاً متساوي الأضلاع، طول ضلعه $2\,\text{cm}$. ولتكن B نظيرة النقطة O بالنسبة إلى النقطة A. أنشئ صورة المثلّث AOC وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$.

المثلث المتساوي الأضلاع $A'O'C'$ هو صورة المثلث AOC وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$.



④ لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، وليكن d مستقيماً مماسّاً لها في النقطة A. أنشئ الدّائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق الانعكاس الذي محوره d.

تدرّب- صفحة 33



① ليكن المربّع $ABCD$، ولتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المربّع $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to I}$ الذي ينقل A إلى I.

الحل

الانسحاب يحافظ على الأطوال والزوايا والتوازي، فصورة المربع وفق انسحاب هي مربعٌ أضلاعه توازي أضلاع المربع الأصلي. يكفي إذن أن نُنشئ المربع المنشود انطلاقاً من $\mathcal{T}_{A\to I}(A) = I = A'$ كما في الشكل.

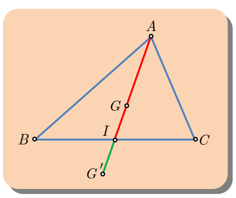
② ليكن المثلّث ABC، وليكن G مركز ثقله.

❶ أنشئ G' صورة النقطة G وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to G}$ الذي ينقل A إلى G.

❷ ▲ لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أَتكون I منتصف القطعة $[GG']$؟

▲ استنتج طبيعة الرباعي $BGCG'$.

الحل



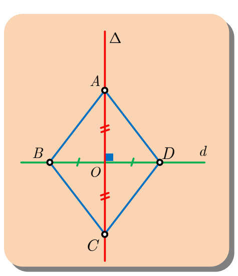
❶ نمدِّد $[AG]$ إلى النقطة G' وبحيث $AG = GG'$. فنحصل على النقطة G' صورة النقطة G وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to G}$.

❷ ▲ لمّا كانت G هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC استنتجنا أنّ (AG) يلاقي (BC) في I فالنقاط A و G و I و G' تقع على استقامة واحدة. ولما كان $IG = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{2}GG'$ استنتجنا أنّ I تقع في منتصف $[GG']$.

▲ الشكل الرباعي $BGCG'$ متوازي أضلاع بسبب تناصف قطريه.

③ ليكن d و Δ مستقيمين متعامدين، ولتكن A نقطةً واقعةً على المستقيم Δ. أنشئ رباعياً $ABCD$ يكون المستقيمان d و Δ محوري تناظر له.

الحل



نفترض أنّ A مختلفة عن O نقطة تقاطع المستقيمين d و Δ. نختار بالمثل نقطة واقعة على d ومختلفة عن O. ثُم نعين C صورة A وفق الانعكاس المحوري بالنسبة إلى d، ونعين D صورة B وفق الانعكاس المحوري بالنسبة إلى Δ. فنحصل بذلك على الرباعي $ABCD$ المنشود.

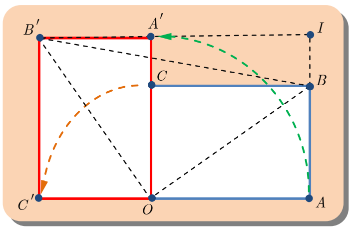
④ ليكن $OABC$ مستطيلاً فيه OA يساوي $8\,\text{cm}$ و OC يساوي $6\,\text{cm}$. وليكن $\mathcal{R}$ ربع دورة مباشرة مركزها O.

❶ أنشئ النقاط C' و A' و B' صور النقاط C و A و B وفق التّحويل $\mathcal{R}$ بالتّرتيب.

❷ ▲ بيّن أنّ المثلّث OBB' قائم ومتساوي الساقين.

▲ استنتج أنّ طول BB' يساوي $10\sqrt{2}$ سنتيمتراً.

الحل



❶ نعلم أنّ $OA'B'C'$ هو مستطيل لأنّه صورة المستطيل $OABC$. لذلك نُنشئ A' و C' صورتي A و C وفق $\mathcal{R}$ ثُمّ نتمم الشكل بإنشاء B' ليصبح $OA'B'C'$ مستطيلاً.

❷ ▲ إنّ B' هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول O، وهذا يقتضي أن يكون BOB' مثلثاً قائماً في O ومتساوي الساقين.

▲ لحساب طول BB' يمكن أن نستفيد من أحد المثلثين القائمين BOB' أو BIB'. فمثلاً من الأخير نجد اعتماداً على مبرهنة فيثاغورث :

$$BB'^2 = (8+6)^2 + (8-6)^2 = 2(64+36) = 2\times 100$$

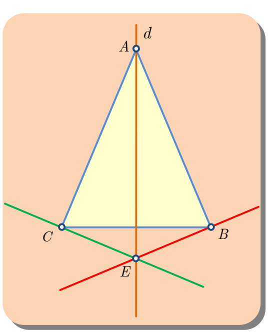
ومنه $BB' = 10\sqrt{2}$.

⑤ ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين رأسه A، وليكن d محور تناظره. نرسم من B العمود على المستقيم (AB) فيقطع d في نقطة E.

❶ ما هي صورة المستقيم (BE) وفق الانعكاس الذي محوره d ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمين (EC) و (AC) متعامدان.

الحل



❶ لنرمز بالرمز $\mathcal{S}_d$ إلى الانعكاس الذي محوره d.
لمّا كان $\mathcal{S}_d(E) = E$، و $\mathcal{S}_d(B) = C$، استنتجنا أنّ المستقيم (CE) هو صورة (BE) وفق $\mathcal{S}_d$.

❷ وكذلك نرى أنّ المستقيم (AC) هو صورة المستقيم (AB) وفق $\mathcal{S}_d$.
ولكنّ الانعكاس المحوري يحافظ على التعامد، إذن $(AC)\perp(CE)$ لأنّ كان $(AB)\perp(BE)$.

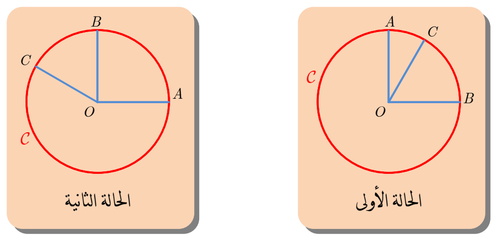
⑥ لتكن A و B نقطتين على الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O، تُحقّقان $\angle AOB = 90°$. ليكن $\mathcal{R}$ دوراناً مباشراً مركزه O وزاويته $60°$.

❶ أنشئ النقطة C صورة النقطة B وفق $\mathcal{R}$.

❷ احسب قياسات زوايا المثلّث ABC.

ملاحظة : في هذا التمرين هناك حالتان.

الحل



❶ نرسم النقطة C على الدائرة بحيث يكون $\widehat{BOC} = 60°$ والانتقال من A إلى C دوران مباشرٌ (عكس جهة دوران عقارب الساعة)، فتكون C صورة B وفق $\mathcal{R}$. ويمكن أنْ نكتب ذلك كما يأتي $\mathcal{R}_{O,60°}(A) = C$. فنحصل على حالتين كما في الشكل.

❷ نناقش كلَّ حالة على حدتها :

الحالة الأولى:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2}(90° - 60°) = 15°$$
$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 30°$$
$$\widehat{ACB} = 180° - \left(30° + 15°\right) = 135°$$

الحالة الثانية:

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}(90°) = 45°$$
$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = 30°$$
$$\widehat{CBA} = 180° - \left(30° + 45°\right) = 105°$$

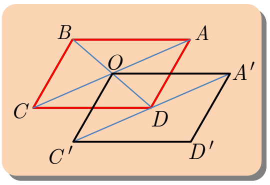
تمرينات ومسائل

1 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.

❶ أنشئ صورة $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ الذي ينقل O إلى D.

❷ إنّ صورة $ABCD$ وفق $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي متوازي أضلاع، أثبت أنّ D مركزه.

الحل



❶ لمّا كان الانسحاب يحافظ على التوازي وعلى قياسات الزوايا، كانت صورة متوازي الأضلاع $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي متوازي الأضلاع $A'OC'D'$ كما هو موضَّحٌ في الرسم. حيث أنَّ صورة النقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي O.

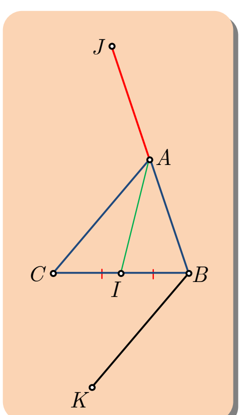
❷ لمّا كانت O هي منتصف $[BD]$ استنتجنا أنّ صورتها D وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي منتصف $[OD']$، فهي إذن مركز متوازي الأضلاع $A'B'C'D'$.

2 ليكن لدينا المثلّث ABC، والنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. لتكن J نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A.

❶ أنشئ النقطة K صورة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$ الذي ينقل A إلى C.

❷ ما هي صورة النقطة J وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{C\to K}$ ؟

الحل



❶ نمدد $(BA]$ باتجاه A ونحدد على الجزء الممدد النقطة J بحيث تكون النقطة A منتصف القطعة المستقيمة $[BJ]$ فتكون J نظيرة النقطة B بالنسبة إلى النقطة A، كما هو موضح في الرسم.

نكمل رسم متوازي الأضلاع $ABKC$ فتكون النقطة K صورة النقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$.

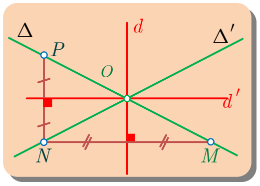
❷ لمّا كان $AC = BK$ وكان الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع وجدنا أنَّ $CK = AB$ وبالتالي $CK = JA$ ومنه فإنَّ النقطة A صورةالنقطة J وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{C\to K}$ لأنَّ الرباعي $CKAB$ متوازي الأضلاع.

3 ليكن Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ O، وليكن d و d' منصّفي الزاويتين المكوّنتين بهذين المستقيمين، وأخيراً لتكن M نقطة واقعة على المستقيم Δ.

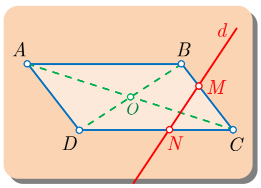
❶ أنشئ النقطة N صورة النقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d، والنقطة P صورة النقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d'.

2. علّل كون المثلّث PMN قائم الزّاوية.

الحل



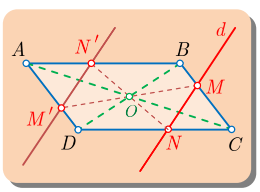
1. المستقيم d منصّف إحدى الزاويتين بين Δ و Δ' ، إذن المستقيم Δ' صورة المستقيم Δ وفق انعكاس محوره d. و لمّا كانت $M \in \Delta$ استنتجنا أنّ $N \in \Delta'$. ونجد بالمثل أنّ $P \in \Delta$. فالنقاط M و O و P تقع على استقامة واحدة.
2. إنّ $OM = ON$ (لأنَّ d محور $[MN]$). وكذلك $OP = ON$ (لأنَّ d' محور $[PN]$)، نستنتج إذن منتصف الضلع $[MP]$ في المثلث PMN هو مركز الدائرة المارة بروؤسه، فهو مثلث قائم في N.



4 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. d مستقيمٌ متوضّعٌ كما في الشّكل المجاور، ويقطع القطعة المستقيمة $[CD]$ في N، كما يقطع القطعة المستقيمة $[BC]$ في M. ليكن $\mathcal{S}_O$ التناظر الذي مركزه O.

1. أنشئ النقطتين M' و N' صورتي النقطتين M و N وفق $\mathcal{S}_O$ بالتّرتيب.
2. استنتج أنّ المستقيم $(M'N')$ يوازي المستقيم d.

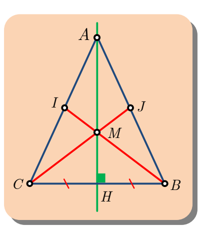
الحل



1. لتكن M' نقطة تقاطع (MO) مع $[AD]$. لما كانت القطعة المستقيمة $[AD]$ صورة $[CB]$ وفق $\mathcal{S}_O$، استنتجنا أنّ صورة M وفق $\mathcal{S}_O$ تقع في آن معاً على كل من (OM) و (AD) فهي إذن M'. أي $\mathcal{S}_O(M) = M'$. ونجد بالمثل أنّ $N' = \mathcal{S}_O(N)$ هي نقطة تقاطع ON مع $[AB]$.
2. الشكل $NMN'M'$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه، وعلى الخصوص $(MN) \parallel (M'N')$ وهي الخاصة المطلوبة.

5 ليكن ABC مثلّثاً متساوي السّاقين رأسه A، وليكن H المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$، ولتكن M نقطة من $[AH]$ مختلفة عن A وعن H. يقطع المستقيمُ (BM) المستقيمَ (AC) في I، ويقطع المستقيمُ (CM) المستقيمَ (AB) في J. ليكن $\mathcal{S}$ الانعكاس الذي محوره (AH).

1.
   - علّل كون المستقيم (CJ) صورة المستقيم (BI) وفق الانعكاس $\mathcal{S}$.
   - ما صورة المستقيم (AC) وفق $\mathcal{S}$ ؟
   - استنتج أنّ $\mathcal{S}(I) = J$.
2. علّل كون الرّباعي $BJIC$ شبه منحرف متساوي السّاقين.



الحل

1. لمّا كان الارتفاع المتعلق بالقاعدة محوراً للقاعدة في المثلث المتساوي الساقين، وجدنا أنَّ C صورة B وفق الانعكاس $\mathcal{S}$، أي إنّ $\mathcal{S}(B) = C$، والنقطة M تقع على محور التناظر (AH)

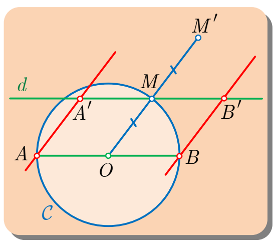
إذن $\mathcal{S}(M) = M$ ، وعليه صورة المستقيم $(BM) = (BI)$ ، وفق $\mathcal{S}$ ، هي المستقيم $(CM) = (CJ)$.

▲ صورة النقطة A وفق الانعكاس $\mathcal{S}$ هي A نفسها وصورة النقطة C هي النقطة B ومنه نستنتج أنَّ صورة المستقيم (AC) وفق $\mathcal{S}$ هي المستقيم (AB) .

▲ لمّا كانت النقطة I هي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BM) وجب أن تكون صورتها وفق $\mathcal{S}$ نقطة تقاطع صورتيهما وفق $\mathcal{S}$ أي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (CM) وهي J إذن $\mathcal{S}(I) = J$.

❷ لمّا كان $\mathcal{S}(I) = J$ و $\mathcal{S}(C) = B$ كان $(BC) \parallel (IJ)$ لأنّ هذين المستقيمين عموديان على (AH) . فالرباعي $BJIC$ شبه منحرف. وهو متساوي الساقين لأن المستقيم (AH) محور تناظر له. حيث إنّ الانعكاس المحوري $\mathcal{S}$ يحافظ على الرباعي $BJIC$.

6 تعرّفُ التحويلات



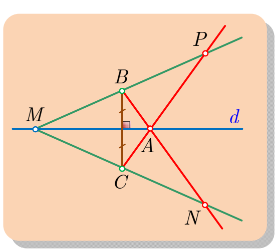
$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O و $[AB]$ أحد أقطارها. M نقطة واقعة على $\mathcal{C}$ مختلفة عن A وعن B . d مستقيمٌ يمر بالنقطة M موازياً المستقيم (AB) . نرسم من A و B مستقيمين يوازيان المستقيم (OM) فيقطعان المستقيم d في A' و B' بالترتيب. لتكن M' صورة O وفق التّناظر الذي مركزه M .

أثبت أنّ المثلّث $A'M'B'$ مثلّثٌ قائم.

الحل

ليكن $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{O \to M}$ الانسحاب الذي ينقل O إلى M . لما كان كل من $OAA'M$ و $OBB'M$ متوازي الأضلاع، استنتجنا أنّ $\mathcal{T}(A) = A'$ و $\mathcal{T}(B) = B'$. ولدينا إنشاءً $\mathcal{T}(M) = M'$. إذن المثلث $A'B'M'$ هو صورة المثلث ABM وفق الانسحاب $\mathcal{T}$. ولكن هذا الأخير مثلث قائم في M (لأن الزاوية $\widehat{AMB}$ تقابل قوس نصف الدائرة)، فلابد أن يكون $A'B'M'$ أيضاً قائماً في M' .

7 صورة تقاطع مستقيمات



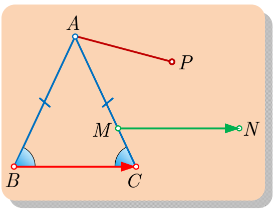
d محور قطعة مستقيمة $[BC]$. A و M نقطتان واقعتان على d نفترض أنّ المستقيمين (AB) و (CM) يتقاطعان في N ، وأنّ المستقيمين (AC) و (BM) يتقاطعان في P . أثبت أنّ النقطة P هي صورة النقطة N وفق الانعكاس الذي محوره d .

الحل

لنرمز بالرمز $\mathcal{S}$ إلى التناظر الذي محوره d . لمّا كان d محور القطعة المستقيمة $[BC]$ استنتجنا أنّ $\mathcal{S}(B) = C$ و $\mathcal{S}(C) = B$. ومن ناحية أخرى، لمّا كانت النقطتان A و M تنتميان إلى محور التناظر d استنتجنا أيضاً أنّ $\mathcal{S}(A) = A$ و $\mathcal{S}(M) = M$.

إذن صورة المستقيم (MC) وفق $\mathcal{S}$ هي المستقيم (MB)، وصورة المستقيم (BA) وفق $\mathcal{S}$ هي المستقيم (CA)، عليه تكون صورة N (نقطة تقاطع المستقيمين (MC) و (AB)) هي نقطة تقاطع الصورتين (MB) و (CA) أي النقطة P: $\mathcal{S}(N) = P$. وهي النتيجة المنشودة.

8 استعمال التعاريف

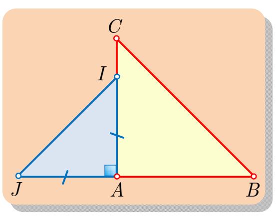


ABC مثلّثٌ متساوي السّاقين، M نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، N صورة النقطة M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$ الذي ينقل B إلى C، و P صورة النقطة M وفق الدوران المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه A والذي ينقل النقطة B إلى C. أثبت أنّ المثلّث PCN متساوي السّاقين.

الحل

لمّا كان $\mathcal{R}(B) = C$ و $\mathcal{R}(M) = P$ استنتجنا أنّ صورة القطعة المستقيمة $[BM]$ وفق $\mathcal{R}$ هي $[CP]$ وبوجه خاص $CP = BM$. ولمّا كان $MBCN$ متوازي الأضلاع لأن $\mathcal{T}_{B\to C}(M) = N$ استنتجنا أيضاً أنّ $CN = BM$. وعليه نرى أنّ $CN = CP$ والمثلث PCN متساوي السّاقين.

9 استعمال ربع الدورة



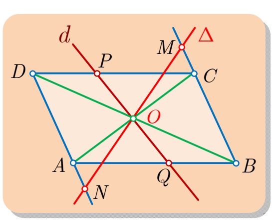
ABC مثلّثٌ قائمٌ ومتساوي السّاقين رأسه A، I نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، IAJ مثلّثٌ قائمٌ ومتساوي السّاقين في A والنقطة J تقع خارج القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمين (BI) و (CJ) متعامدان.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران المباشر ربع دورة الذي مركزه A، إنّ C هي صورة B وفق $\mathcal{R}$ وكذلك تكون J صورة I وفق $\mathcal{R}$، إذن المستقيم (CJ) هو صورة (BI) وفق $\mathcal{R}$، وعليه $(BI) \perp (CJ)$.

ونترك لكم استكشاف طرائق أخرى لحل هذه المسألة دون استعمال التحويلات الهندسية، ولكن هذا ليس موضوع البحث.

10 تعرُّف التّناظر المركزيّ



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، d مستقيمٌ مارّ بالنقطة O ويقطع المستقيم (DC) في P ويقطع المستقيم (AB) في Q، Δ مستقيمٌ مار بالنقطة O ويقطع المستقيم (AD) في N ويقطع المستقيم (BC) في M. أثبت أنّ الرّباعي $MPNQ$ متوازي الأضلاع.

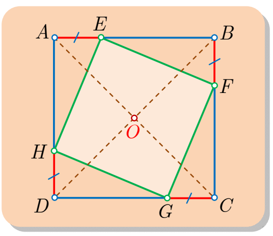
الحل

ليكن $\mathcal{S}_O$ التناظر المركزي حول O. الذي هو مركز تناظر متوازي الأضلاع $ABCD$. لمّا كان

$$\mathcal{S}_O(d) = d \text{ و } \mathcal{S}_O\big((CD)\big) = (AB)$$

استنتجنا أنّ صورة P، (التي هي نقطة تقاطع (CD) و d)، وفق $\mathcal{S}_O$ هي نقطة تقاطع (AB) و d وهي Q. أي $\mathcal{S}_O(P) = Q$. ونبرهن بأسلوب مماثل أنّ $\mathcal{S}_O(M) = N$. إذن O هي منتصف كل من القطعتين المستقيمتين $[PQ]$ و $[MN]$، والرباعي $MPNQ$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه.

11 استعمال الدوران



ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. نتأمّل على القطعة المستقيمة $[AB]$ نقطة E، وعلى القطعة المستقيمة $[BC]$ نقطة F، ونقطة G على القطعة المستقيمة $[CD]$، ونقطة H على القطعة المستقيمة $[AD]$ بحيث يكون $AE = BF = CG = DH$. أثبت أنّ $EFGH$ مربّع.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران المباشر ربع دورة حول O. لمّا كان $\mathcal{R}([BA]) = [AD]$ والدوران يحافظ على الأطوال استنتجنا أنّ صورة E (الواقعة على $[BA]$) وفق $\mathcal{R}$، هي نقطة من $[AD]$ تبعد عن $D = \mathcal{R}(A)$ بمقدار AE (أي بُعد A عن E)، فهي إذن H. أي $\mathcal{R}(E) = H$. ونبرهن بالمثل أنّ

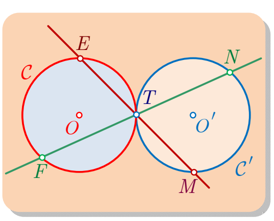
$$\mathcal{R}(F) = H \text{ و } \mathcal{R}(G) = F \text{ و } \mathcal{R}(H) = G$$

هذا يبرهن أنّ الرباعي $EFGH$ مربعٌ، مثلاً لأنّ

$$\mathcal{R}([GF]) = [FH] \text{ و } \mathcal{R}([HG]) = [GF] \text{ و } \mathcal{R}([EH]) = [HG]$$

فالأضلاع متساوية الطول ومتعامدة.

12 استعمال التّناظر المركزيّ



$\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان متماسّتان خارجاً في T، مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ونصفا قطريهما متساويان. E و F نقطتان من الدائرة $\mathcal{C}$، مختلفتان عن T. المستقيم (ET) يقطع الدّائرة $\mathcal{C}'$ في نقطة M، ويقطع المستقيم (FT) الدّائرة $\mathcal{C}'$ في نقطة N. برهن أنّ الرّباعيّ $ENMF$ متوازي الأضلاع.

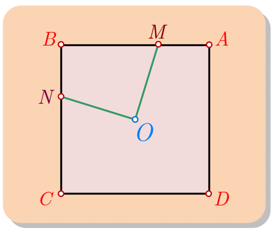
الحل

ليكن $\mathcal{S}_T$ التناظر المركزي حول T. نقطة التماس تقع على خط المركزين (OO') ولدينا استناداً إلى الفرض $TO = TO'$. نستنتج إذن أنّ $\mathcal{S}_T(O) = O'$ و $\mathcal{S}_T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

النقطة $\mathcal{S}_T(F)$ نقطة مشتركة بين المستقيم $(FT) = \mathcal{S}_T\big((FT)\big)$ والدائرة $\mathcal{C}' = \mathcal{S}_T(\mathcal{C})$ فهي إذن N أي $\mathcal{S}_T(F) = N$.

ونرى بالمثل أنّ النقطة $\mathcal{S}_T(E)$ هي نقطة مشتركة بين المستقيم $(ET) = \mathcal{S}_T\big((ET)\big)$ والدائرة $\mathcal{C}' = \mathcal{S}_T(\mathcal{C})$ فهي إذن M أي $\mathcal{S}_T(E) = M$. إذن T هي منتصف كل من القطعتين المستقيمتين $[FN]$ و $[EM]$، والرباعي $ENMF$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه.

13 استعمال الدوران بربع دورة



$ABCD$ مربّعٌ مركزه O، M نقطة واقعة على القطعة المستقيمة $[AB]$، و N نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ تُحقِّق $\angle MON = 90°$.

برهن أنّ المثلث MON قائمٌ متساوي السّاقين.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة حول O الذي ينقل A إلى B. فيكون $\mathcal{R}([AB]) = [BC]$. لتكن M' صورة M وفق $\mathcal{R}$. إنّ M' نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ وهي تقع أيضاً على المستقيم الذي يصنع مع (OM) زاوية قائمة فهي إذن N. أي $\mathcal{R}(M) = N$. ومنه $ON = OM$، والمثلث MON قائمٌ متساوي السّاقين.

14 ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O، وليكن ABI و ADJ مثلّثين متساويَي الأضلاع مرسومين خارج المربّع $ABCD$. ليكن $\mathcal{S}$ الانعكاس الّذي محوره (AC).

① ❶ برهن أنّ $\angle JAC = \angle IAC = 105°$.

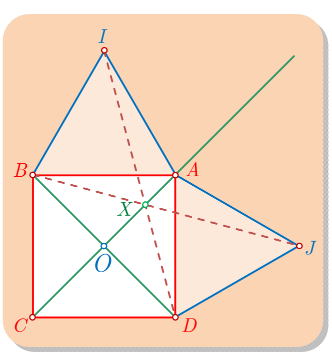
❷ استنتج أنّ المستقيم (AC) ينصّف الزَّاوية $\angle JAI$ وأنّه عمودي على (JI).

❸ برهن أنّ $\mathcal{S}(I) = J$.

② ❶ ما هي صورة المستقيم (DI) وفق الانعكاس $\mathcal{S}$ ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمات (DI) و (BJ) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل



① ❶ من الواضح أنّ

$$\angle JAC = \angle JAD + \angle DAC = 60° + 45° = 105°$$

ونجد بالمثل $\angle IAC = 105°$.

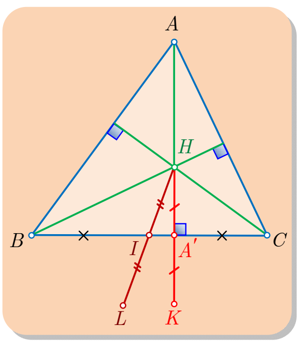
❷ نستنتج مما سبق أنّ (AC) منصف لزاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين IAJ (لأنّ $AJ = AD = AB = AI$)، فهو إذن محور القطعة المستقيمة $[IJ]$، وبوجه خاص $(AC) \perp (IJ)$.

❸ وجدنا أنّ (AC) هو محور القطعة المستقيمة $[IJ]$، إذن $\mathcal{S}(I) = J$.

② ❶ لمّا كان (AC) محور القطعة المستقيمة $[BD]$ (لأنّ A متساوية البعد عن B و D وكذلك بالنسبة إلى C)، استنتجنا أنّ $\mathcal{S}(D) = B$ ورأينا أنّ $\mathcal{S}(I) = J$، إذن $\mathcal{S}\big((ID)\big) = (JB)$.

❷ لتكن X نقطة تقاطع المستقيمين (ID) و (JB). إنّ النقطة $\mathcal{S}(X)$ نقطة مشتركة بين صورتي المستقيمين (ID) و (JB) وفق $\mathcal{S}$، أي بين المستقيمين (ID) و (JB) نفسيهما، فهي إذن النقطة X ذاتها، أي $\mathcal{S}(X) = X$، فالنقطة X تقع على محور التناظر (AC) والمستقيمات (DI) و (BJ) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

15 ليكن ABC مثلّثاً. ولتكن I منتصف الضلع $[BC]$، و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC. نسمّي K نظيرة النقطة H بالنّسبة إلى المستقيم (BC)، ونسمّي L نظيرة H بالنسبة إلى I.



① ❶ أثبت أنّ $BHCL$ متوازي أضلاع.

❷ استنتج أنّ المثلّثين ABL و ACL قائمان.

② ❶ أثبت أنّ (KL) يوازي (BC).

❷ استنتج أنّ المثلّث AKL قائم.

③ أثبت أنّ النقاط A و B و C و K تقع على الدّائرة التي قطرها $[AL]$.

④ أثبت صحّة الخاصّة : «إذا كانت H هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث ABC، وقعت نظائر النقطة H بالنسبة إلى أضلاع المثلّث على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث».

الحل

① ❶ لمّا كانت I منتصف كل من $[BC]$ و $[HL]$ استنتجنا أنّ الرباعي $BHCL$ متوازي الأضلاع لتناصف قطريه.

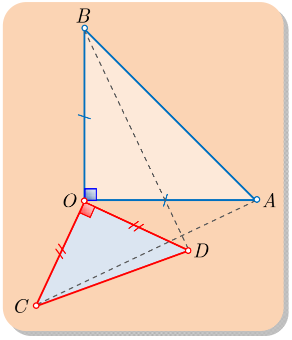
❷ استناداً إلى تعريف H لدينا $(AB) \perp (HC)$ ولكن $(BL) \parallel (HC)$ لأن $BHCL$ متوازي الأضلاع إذن $(AB) \perp (LB)$. ونبرهن بالمثل أنّ $(AC) \perp (LC)$. فالمثلثان ABL و ACL قائمان.

② ❶ لتكن A' نقطة تقاطع $[HK]$ مع $[BC]$. لما كان (BC) محور القطعة $[KH]$ استنتجنا أنّ A' منتصف $[KH]$. إذن في المثلث AKL المستقيم (IA') يصل بين منتصفي الضلعين $[HL]$ و $[HK]$، فهو يوازي الثالثة أي $(LK) \parallel (BC)$.

❷ لما كان (BC) عمودي على (AK) وهو يوازي (KL) استنتجنا أن $(AK) \perp (KL)$ فالمثلث AKL قائم في K.

③ إنَّ $[AL]$ وترٌ مشتركٌ في المثلثات القائمة ABL و AKL و ACL، فالدائرة التي $[AL]$ قطر فيها، تمر برؤوس هذه المثلثات. والنقاط A و B و C و K تقع على هذه الدائرة.

④ أثبتنا فيما سبق أن النقطة K نظيرة النقطة H بالنسبة إلى (BC) تقع على الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. وبأسلوب مماثل نجد أنَّ نظيرة النقطة H بالنسبة إلى كل من الضلعين (AB) و (CA) تقع أيضاً على هذه الدائرة.



16 OAB و OCD مثلّثان قائمان ومتساويا السّاقين يشتركان بالرأس O. ليكن الدوران ربع الدورة المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه O.

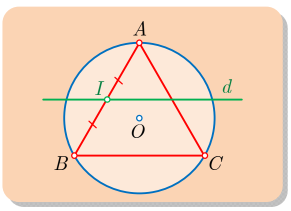
① ما هي صورة النقطة A وفق $\mathcal{R}$ ؟ ما صورة النقطة C ؟

② استنتج أنّ $AC = BD$، وأنّ $(AC) \perp (BD)$.

الحل

① وضوحاً لدينا $\mathcal{R}(A) = B$ و $\mathcal{R}(C) = D$.

② مما سبق نجد أنَّ $\mathcal{R}\big([AC]\big) = [BD]$، إذن $AC = BD$ و $\big(AC\big) \perp \big(BD\big)$.



17 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلّث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و d مستقيمٌ يمرُّ بالنقطة I موازياً (BC). نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدوران المباشر الذي مركزه O وزاويته $120°$.

① ❶ ما صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة النقطة I وفق $\mathcal{R}$ هي النقطة J منتصف $[BC]$.

② ❶ ما صورة المستقيم (BC) وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة المستقيم d وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (IJ).

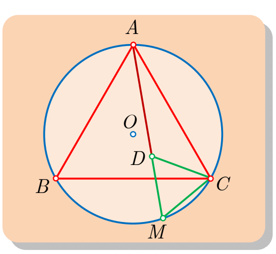
الحل

① ❶.وضوحاً لدينا $\mathcal{R}([AB]) = [BC]$ استناداً إلى خواص المثلث المتساوي الأضلاع.

❷ الدوران يحافظ على منتصف قطعة مستقيمة، إذن صورة I منتصف $[AB]$ وفق $\mathcal{R}$ هي النقطة J منتصف $[BC]$.

② ❶ صورة المستقيم (BC) وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (CA).

❷ المستقيم d يوازي (BC)، ويمر بالنقطة I منتصف $[AB]$، فصورته $\mathcal{R}(d)$ مستقيم يمر بالنقطة $J = \mathcal{R}(I)$ منتصف $[BC]$ موازياً $(CA) = \mathcal{R}\big((BC)\big)$، فهو إذن (IJ) المار بمنتصفي الضلعين $[BC]$ و $[BA]$. إذن $\mathcal{R}(d) = (IJ)$.



18 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن M نقطة من القوس $\overset{\frown}{BC}$ الذي لا يحوي A. D هي نقطة من $[AM]$ تُحقّق $MD = MC$.

① أثبت أنّ المثلّث DMC متساوي الأضلاع ؟

② نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدّوران المباشر الذي مركزه C وينقل A إلى B.

❶ما صورة المثلّث ADC وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷استنتج أنّ $BM = AD$ وأنّ $MB + MC = MA$.

الحل

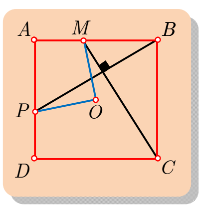
① لمّا كان $\angle AMC = \angle ABC = 60°$، لأنّ كان ABC مثلث متساوي الأضلاع والزوايا المحيطية في الدائرة التي تقابل القوس نفسه متساوية في قياساتها، استنتجنا أنّ المثلث المتساوي الساقين MDC متساوي الأضلاع لأن قياس إحدى زواياه يساوي $60°$.

② ❶ لدينا $\mathcal{R}(A) = B$ و $\mathcal{R}(D) = M$. ومنه صورة المثلث ADC وفق الدوران $\mathcal{R}$ هي المثلث BMC.

❷ نستنتج من كون $\mathcal{R}([AD]) = [BM]$ أنّ $AD = BM$. ولدينا $MD = MC$ إذن

$$MB + MC = AD + DM = AM$$

وهي النتيجة المطلوبة.

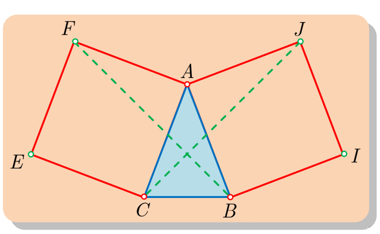


19 $ABCD$ مربّع مركزه O. M نقطة من الضّلع $[AB]$. يقطع المستقيمُ المار بالنقطة B عمودياً على المستقيمَ (CM) في (AD) في P. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ المثلّث POM مثلّث قائم ومتساوي الساقين.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة حول O وينقل B إلى A. إنّ المستقيم $\mathcal{R}\big((CM)\big)$ هو المستقيم العمودي على (CM) والمار بالنقطة $\mathcal{R}(C) = B$، فهو إذن (BP).

النقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين (CM) و (AB) فصورتها وفق $\mathcal{R}$ هي نقطة تقاطع صورتيهما وفق $\mathcal{R}$ أي (BP) و (AD) فهي إذن النقطة P. أي $\mathcal{R}(M) = P$. وهذا يبرهن أن المثلث POM متساوي الساقين وقائم في O.



20 ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين، رأسه A. ننشئ خارجه مربّعين $ABIJ$ و $ACEF$. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ $JC = BF$، وأنّ المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

الحل

ليكن $\mathcal{R}$ الدوران ربع دورة الذي مركزه A وينقل F إلى C، إنَّ الدوران $\mathcal{R}$ ينقل B إلى J. نستنتج إذن أنّ $\mathcal{R}([FB]) = [CJ]$ ومنه $FB = CJ$ و $(FB) \perp (CJ)$، وهي النتيجة المرجوة.

2

الهندسة الفراغيّة

1 رسم المجسّمات بالمنظور

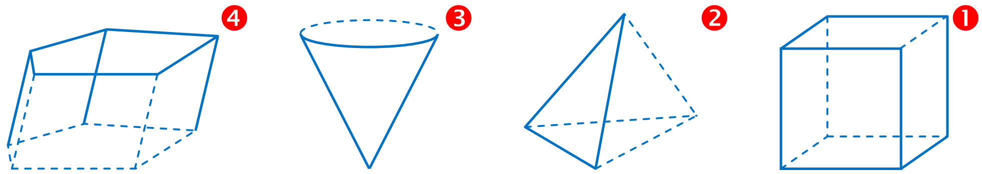
2 قواعد التّلاقي

3 التّوازي في الفراغ

4 التّعامد في الفراغ

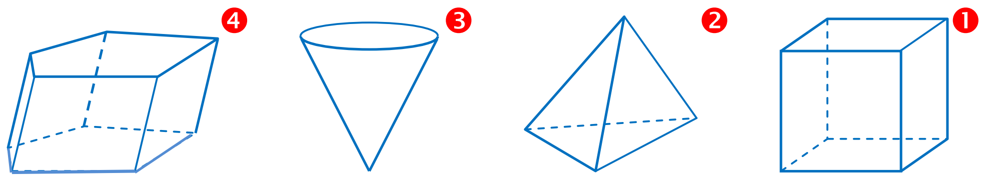
تدرّب – صفحة 7

① بيِّن أيَّ الرُّسوم التالية، لا يمثّل مجسّماً تمثيلاً منظوريّاً، وأعدْ رسمه مُصحّحاً في دفترك.

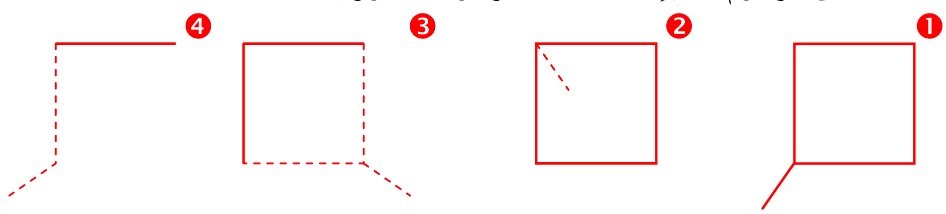


الحل

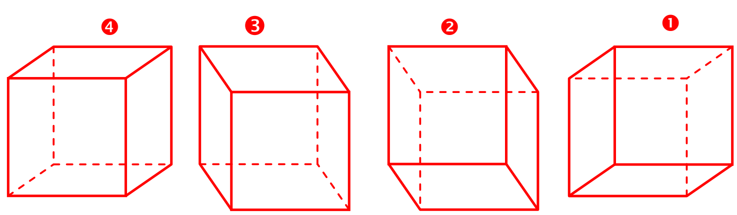
جميع الأشكال المعطاة لا تمثل مجسمات تمثيلاً منظورياً صحيحاً. لنصحّحها كما يأتي:



② أكملْ كلاً من الرّسوم التّاليةِ لتمثّل مكعّباً مرسوماً منظوريّاً.

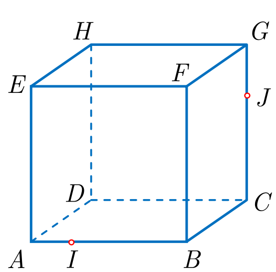


الحل



تدرّب – صفحة 9

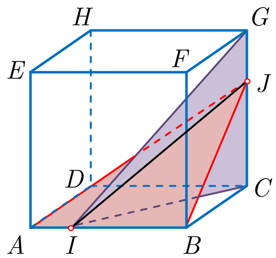
① ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً. ولتكن I نقطةً من الحرف $[AB]$ و J نقطة من الحرف $[CG]$.



❶ بالاستفادة من قواعد التّلاقي، أثبت أنّ النّقطتين I و J تنتميان في آن معاً إلى المستويين (ABJ) و (CGI).

❷ ما هو إذن تقاطعُ المستويين (ABJ) و (CGI)؟

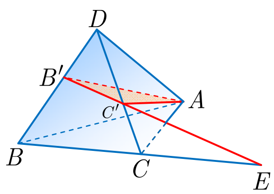
الحل



❶ I نقطة من المستقيم (AB) المحتوى في المستوي (ABJ) فهي نقطة من المستوي (ABJ)، وهي وضوحاً تنتمي إلى المستوي (CGI)، فهي تنتمي إذن إلى تقاطع المستويين (ABJ) و (CGI). ونبرهن بالمثل أنّ النقطة J تنتمي إلى تقاطع المستويين (ABJ) و (CGI).

❷ المستويان (ABJ) و (CGI) غير منطبقين، لأنّ G لا تنتمي إلى المستوي (ABC)، وهما يشتركان بالنقطتين I و J ، فتقاطعهما هو المستقيم (IJ).

② ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. ولتكن B' نقطةً من الحرف $[BD]$ مختلفة عن B و D، و C' نقطةً من الحرف $[CD]$ مختلفةً عن C و D. نفترض أنّ المستقيمين $(B'C')$ و (BC) يتقاطعان في نقطة E. عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.



الحل

من جهة أولى النقطة A تنتمي إلى كلٍّ من المستويين (ABC) و $(AB'C')$. ومن جهة ثانية تنتمي النقطة E إلى المستوي (ABC) لأنّها نقطة من المستقيم (BC) المحتوى فيه، وهي تنتمي كذلك إلى المستوي $(AB'C')$ لأنّها نقطة من المستقيم $(B'C')$. إذن يتقاطع المستويان (ABC) و $(AB'C')$ بالفصل المشترك (AE).

تدرّب - صفحة 12

① في رباعيّ الوجوه $ABCD$، لتكن I منتصفَ $[AB]$، و J منتصفَ $[BC]$، و K منتصفَ $[CD]$، وأخيراً L منتصفَ $[AD]$.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (IL) و (JK) متوازيان، وأنّ المستقيمين (IJ) و (KL) متوازيان.

❷ ما نوعُ الرّباعي $IJKL$ ؟

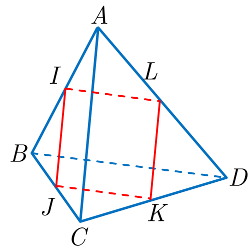
الحل

الخاصة الأساسية التي علينا أن نتذكرها هي أنّ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة، ولها نصف طولها.

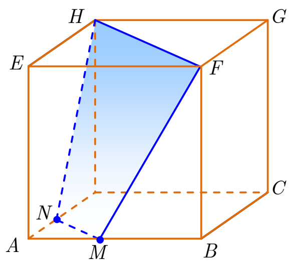
❶ من المثلث ABD ، نستنتج أنّ $(BD) \parallel (IL)$، ومن المثلث CBD نستنتج أنّ $(BD) \parallel (JK)$، إذن $(IL) \parallel (JK)$، لأنّ كلاً منهما يوازي (BD).

وبالمثل نجد أن $(LK) \parallel (IJ)$ لأن كلاً منهما يوازي (AC).

❷ الرباعي $IJKL$ متوازي أضلاع لتوازي كل ضلعين متقابلين فيه.



② ليكن لدينا المكعّب $ABCDEFGH$. ولتكن M نقطةً من $[AB]$، ولتكن N نقطةَ تقاطعِ المستوي (FHM) مع المستقيم (DA). أثبت توازي المستقيمين (FH) و (MN).



الحل

الفصل المشترك للمستويين $\left(HFMN\right)$ و $\left(ABCD\right)$ هو المستقيم $\left(MN\right)$. والفصل المشترك للمستويين $\left(HFMN\right)$ و $\left(EFGH\right)$ هو المستقيم $\left(HF\right)$. ولمّا كان المستوي $\left(HFMN\right)$ قاطعاً لمستويين متوازيين، كان الفصلان المشتركان لهذين المستويين $\left(ABCD\right)$ و $\left(EFGH\right)$ مع المستوي القاطع $\left(HFMN\right)$ متوازيين، أي $(HF) \parallel (MN)$.

③ ليكن لدينا الهرمُ $SABCD$ الّذي رأسه S وقاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$. ولتكن M نقطةً من $[SC]$ ولتكن N نقطةً من $[SB]$. نفترض أنّ (MN) يوازي (BC).

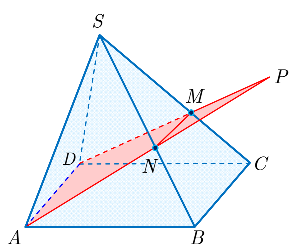
❶ أثبت أنّ المستقيمين (AD) و (NM) متوازيان.

❷ في المستوي $(ADMN)$، يتقاطع المستقيمان (AN) و (DM) في النّقطة P.

☝ أثبت أنّ P تنتمي إلى كلٍّ من المستويين (SAB) و (SDC).

✌ أثبت أنّ المستقيم (SP) هو الفصل المشترك للمستويين (SAB) و (SDC).

👌 استنتج أنّ (SP) يوازي (AB).



الحل

❶ في متوازي الأضلاع $ABCD$ كل ضلعين متقابلين متوازيان، أي $(BC) \parallel (AD)$، ولدينا فرضاً أنّ $(BC) \parallel (MN)$، إذن $(AD) \parallel (MN)$ **(لماذا ؟)**

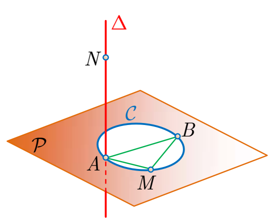
❷ المستقيم (AN) محتوى في المستوي (SAB) والنقطة P نقطة من هذا المستقيم، إذن P تنتمي إلى المستوي (SAB). وبالمماثلة، المستقيم (DM) محتوى في المستوي (SDC) والنقطة P نقطة من هذا المستقيم إذن P تنتمي إلى المستوي (SDC)

لمّا كانت النقطتان S و P نقطتين مشتركتين بين المستويين (SAB) و (SDC)، استنتجنا أنّ (SP) هو الفصل المشترك لهذين المستويين (SAB) و (SDC).

لما كان $ABCD$ متوازي الأضلاع، كان $(AB) \parallel (DC)$، ولكن المستقيم (AB) محتوى في المستوي (SAB) والمستقيم (DC) ومحتوى في المستوي (SDC)، فالفصل المشترك لهذين المستويين يوازي كلاً من المستقيمين (AB) و (DC)، إذن $(AB) \parallel (SP)$.

تدرّب - صفحة 15

لتكن $\mathcal{C}$ دائرةً في المستوي P قطرها $[AB]$، وليكن Δ المستقيم العموديّ في A على المستوي P. نتأمّل نقطة M من $\mathcal{C}$، ونقطة N من Δ.



❶ أثبت أنّ المستقيمين (MA) و (MB) متعامدان.

❷ أثبت أنّ المستقيم (MB) عموديٌّ على المستوي (AMN).

❸ استنتج أنّ المستقيمين (MB) و (MN) متعامدان.

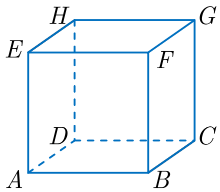
الحل

❶ الزاوية AMB محيطية تحصر قوس نصف الدائرة فهي قائمة في M إذن $(MB) \perp (MA)$.

❷ (MB) عمودي على كل من (MA) و (AN) إذن (MB) عمودي على المستوي (AMN).

❸ (MB) عمودي على (AMN) و (MN) محتوى في المستوي (AMN) إذن $(MB) \perp (MN)$.

تمرينات ومسائل



1 نتأمّل المكعّب $ABCDEFGH$. بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي:

♣ المستقيم (EA) يوازي :

① المستوي (HFB). ☑ ② المستقيم (HB). ③ المستقيم (CG). ☑

♣ المستوي (EAB) يوازي :

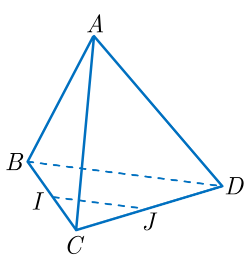
① المستقيم (HD). ☑ ② المستوي (HGC). ☑ ③ المستوي (HGB).

♣ المستقيم (HG) عمودي على :

① المستوي (FGC). ☑ ② المستوي (EAD). ☑ ③ المستقيم (AE). ☑

♣ إذا كان $AB = 2$ فطول القطعة المستقيمة $[HB]$ يساوي :

① $2\sqrt{3}$. ☑ ② $\sqrt{3}$. ③ $\sqrt{12}$. ☑



2 نتأمّل رباعيّ وجوه منتظم $ABCD$، أي وجوهه مثلّثات متساوية الأضلاع. لتكن النّقطة I منتصفَ $[BC]$ والنّقطة J منتصفَ $[CD]$.
بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ المستقيم (IJ) يوازي :

① المستقيم (BD). ☑ ② المستوي (BAD). ☑ ③ المستقيم (AB).

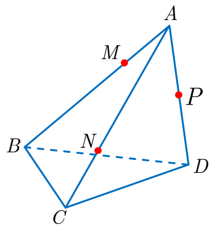
♣ تقاطع المستويين (AIJ) و (ABC) هو :

① المستقيم (AB). ② المستقيم (AI). ☑ ③ المستقيم (IJ).

♣ في رباعي الوجوه $ABCD$ يكون :

① $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$. ☑ ② AIJ متساوي السّاقين. ☑ ③ AIJ متساوي الأضلاع.

3 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. النّقطة M هي النّقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ التي تُحقِّق المساواة $AM = \frac{1}{4}AB$، والنّقطة N هي النّقطة من $[AC]$ التّي تُحقق المساواة $AN = \frac{3}{4}AC$، وأخيراً، النّقطة P هي منتصف $[AD]$.



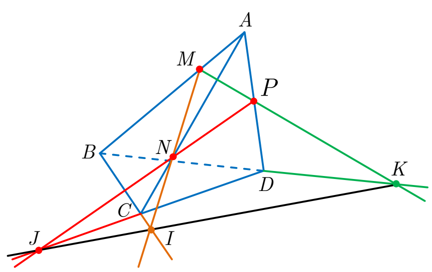
① أثبت أنّ (MN) يقطع (BC)، وأنّ (NP) يقطع (CD)، وأنّ (MP) يقطع (BD).

② نسمّي I و J و K نقاط التّقاطع السّابقة بالتّرتيب. أثبت وقوعَ هذه النّقاط على استقامةٍ واحدة.

الحل

① يقع المستقيمان (MN) و (BC) في المستوي (ABC)، ولدينا $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ و $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$ إذن $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$، فهما غير متوازيين ولا بُدّ أن يتقاطعا في نقطة نسميها I.

ونبرهن بالمثل أنّ المستقيمين (MP) و (BD) يتقاطعان في نقطة نسميها K، و أنّ المستقيمين (NP) و (CD) يتقاطعان نقطة نسميها J.

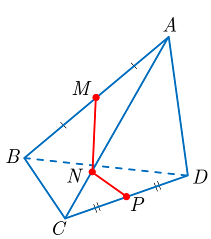


② النقطة I تقع على المستقيم (BC) فهي نقطة من المستوي (BCD)، وكذلك نجد أنّ النقطتين J و K تنميان إلى المستوي (BCD). وبالمثل نرى أنّ النقطة I تقع على المستقيم (MN) فهي نقطة من المستوي (MNP)، وكذلك تنتمي النقطتان J و K تنميان إلى المستوي (MNP).

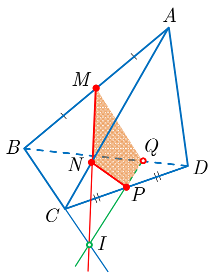
إذن تنتمي النقاط I,J,K إلى الفصل المشترك للمستوين (BCD) و (MNP) فهي تقع على استقامة واحدة.

4 نتأمّل رباعيّ وجوهٍ $ABCD$. لتكن M منتصفَ $[AB]$، ولتكن P منتصفَ $[CD]$، وأخيراً لتكن N نقطةً من $[AC]$ تُحقِّق $AN = \frac{3}{4}AC$.

المطلوب هو رسم تقاطع المستوي (MNP) مع وجوه رباعيّ الوجوه $ABCD$.



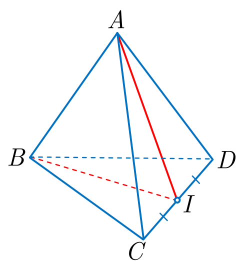
الحل



M و N نقطتان مشتركتان بين الوجهين (ABC) و (MNP) إذن (MN) هو الفصل المشترك لهذين المستويين، وبالمثل نجد أن (NP) هو الفصل المشترك للمستويين (ACD) و (MNP).

من جهة أخرى يقع المستقيمان (MN) و (BC) يقعان في المستوي (ABC) وهما غير متوازيين لأنّ $\frac{AN}{CN} \neq \frac{AM}{BM}$. لتكن I نقطة تقاطعهما.

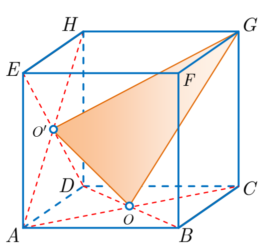
I و P نقطتان مشتركتان بين الوجهين (BCD) و (MNP)، إذن المستقيم (IP) هو الفصل المشترك لهذين المستويين. لتكن Q نقطة تقاطع المستقيم (IP) مع (BC)، فتكون القطعة المستقيمة $[PQ]$ هي تقاطع الوجه BCD مع المستوي (MNP). وأخيراً نرى أنّ القطعة المستقيمة $[QM]$ هي تقاطع الوجه ABD مع المستوي (MNP). بالنتيجة: تقاطع المستوي (MNP) مع رباعي الوجوه $ABCD$ هو الشكل الرباعي $MNPQ$.



5 نتأمّل رباعيَّ وجوهٍ منتظماً $ABCD$. ونضعُ عليه النقطة I منتصف $[CD]$. نرسم القطعتين المستقيمتين $[AI]$ و $[BI]$. المطلوب إثباتُ أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

الحل

كل وجه من رباعي الوجوه المنتظم هو مثلث متساوي الأضلاع. $[AI]$ متوسط في المثلث ACD فهو محور القطعة $[CD]$ إذن $(CD) \perp (AI)$، وبالمثل نجد أن $(CD) \perp (BI)$. إذن (CD) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (ABI)، فهو إذن عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوي وخصوصاً على المستقيم (AB).



6 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. فيه O و O' مركزا الوجهين $ABCD$ و $ADHE$ بالترتيب. احسب أطوال أضلاع المثلّث OGO'.

الحل

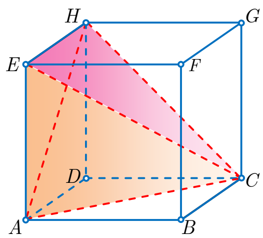
عندما نريد حساب أطوال أو زوايا في الفراغ نبحث عن أشكال مستوية حتى نتمكن من الاستفادة من المبرهنات المعروفة مثل مبرهات تالس، وفيثاغورث وغيرهما.

في المثلث AHC، تصل القطعة المستقيمة $[OO']$ بين منتصفي الضلعين $[AC]$ و $[AH]$، فهي توازي الضلع الثالثة، وطولها يساوي نصف طول الضلع الثالثة $[HC]$، التي هي قطر المربع $CGHD$. إذن $HC = 4\sqrt{2}$ و $OO' = 2\sqrt{2}$.

$[OG]$ هو وتر في المثلث القائم OGC القائم في C. إذن استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث نجد

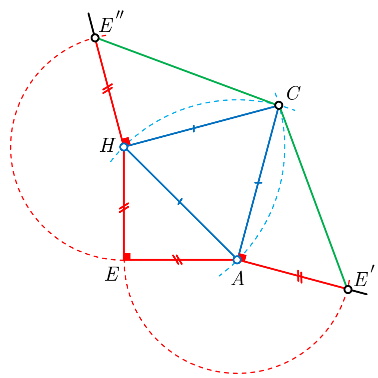
$$OG^2 = OC^2 + CG^2 = 8 + 16 = 24$$

ومنه $OG = 2\sqrt{6}$. وأخيراً، $O'G = OG = 2\sqrt{6}$، لتطابق المثلثين OCG و OHG.



7 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ارسم مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الممثّل لسطح رباعيّ الوجوه $EACH$.

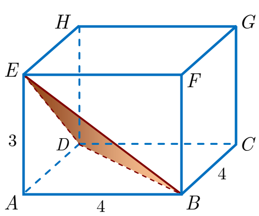
الحل



1. أسهل الوجوه رسماً هو المثلث AEH لأنه قائم في E وطول ضلعه القائمة $4\,\text{cm}$ فنرسمه أولاً.
2. المثلث HAC مثلث متساوي الأضلاع، ولقد أنشأنا الضلع $[HA]$ فهذا ما يسمح لنا برسم النقطة C.
3. المثلث CAE مثلث قائم في A، فنقوم بإنشائه على $[AC]$.
4. المثلث CHE مثلث قائم في H، فنقوم بإنشائه على $[HC]$.

انظر الشكل المجاور.

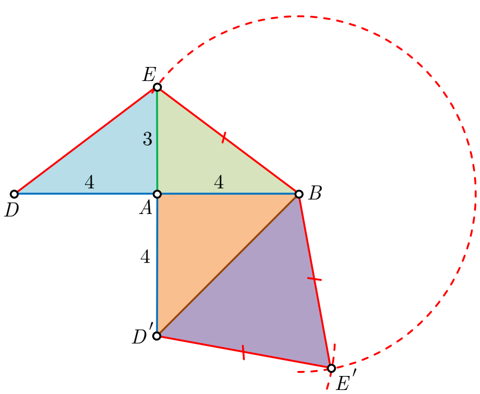
8 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه : $AB = BC = 4\,\text{cm}$ و $AE = 3\,\text{cm}$.



① أثبت أنّ المثلّث EBD مثلّثٌ متساوي السّاقين.

② ارسم بالقياس الحقيقيّ مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الموافق لسطح $EABD$.

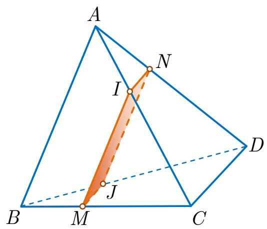
الحل



① المثلثان EAB و EAD، القائمان في A، طبوقان، لأنّ $AB = AD = 4\text{cm}$، و $[EA]$ ضلع مشتركة. إذن $EB = ED$.

② انظر الشكل المجاور.

9 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن M نقطة من $[BC]$.
نرسمُ من M مستقيماً موازياً للمستقيم (AB) فيقطعُ (AC) في I،
ونرسمُ كذلك مستقيماً موازياً للمستقيم (CD) فيقطعُ (BD) في J،
المستوي (MIJ) يقطع المستقيم (AD) في N.



① أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (IN) و (MJ) يوازي المستقيم (CD).

② أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (JN) و (IM) يوازي المستقيم (AB).

③ ما نوع الرباعيّ $IMJN$؟

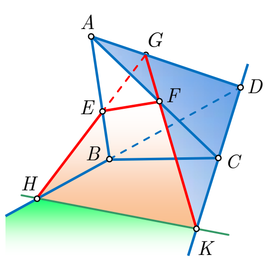
الحل

① لما كان $(MJ) \parallel (CD)$، والمستقيم (MJ) محتوى في (MIJ)، و (CD) محتوى في (ACD) استنتجنا أن الفصل المشترك (IN) لهذين المستويين مستقيم يوازي (CD).

② وكذلك لما كان $(MI) \parallel (AB)$، والمستقيم (MI) محتوى في (MIJ)، و (AB) محتوى في (ABD) استنتجنا أن الفصل المشترك (NJ) لهذين المستويين مستقيمٌ يوازي (AB).

③ وجدنا أنّ $(MJ) \parallel (IN)$ و $(MI) \parallel (JN)$ فالرباعي $IMJN$ متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين فيه فمتوازيان.

10 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن E نقطةً من $[AB]$، و F نقطةً من $[AC]$، و G نقطةً من $[AD]$. نفترض أنّ المستقيمين (EF) و (BC) غير متوازيين. وكذلك الأمر بالنِّسبة إلى المستقيمين (FG) و (CD) والمستقيمين (EG) و (BD).



① عيّن تقاطع المستوي (EFG) مع كلٍّ من المستويات (ABC) و (ACD) و (ABD).

② لإنشاء تقاطع المستوي (EFG) مع المستوي (BCD) فعلنا ما يأتي :

" عرّفنا K نقطة تقاطع (GF) مع (CD)، وعرّفنا H نقطة تقاطع (GE) مع (BD).
فيكون المستقيم (HK) هو تقاطع المستويين (EFG) و (BCD). "

أثبت صحّة هذا الإنشاء.

③ لتكن I نقطة تقاطع (EF) مع (BCD). هل تتقاطعُ المستقيماتُ (BC) و (HK) و (EF) في I؟

الحل

① وضوحاً لدينا

$$(EFG)\cap(ABD)=(EG) \text{ و } (EFG)\cap(ACD)=(FG) \text{ و } (EFG)\cap(ABC)=(EF)$$

② K هي نقطة تقاطع المستقيم (GF) المحتوى في المستوي (EFG) مع المستقيم (CD) المحتوى في المستوي (BCD) ، فالنقطة K تنتمي إلى الفصل المشترك لهذين المستويين. وكذلك نرى أنّ النقطة H تنتمي إلى الفصل المشترك للمستويين (EFG) و (BCD). إذن (HK) هو الفصل المشترك للمستويين المذكورين.

③ تنتمي النّقطة I إلى المستقيم (EF) وتنتمي كذلك إلى المستوي (BCD). ولما كان (EF) هو الفصل المشترك للمستويين (EFG) و (ABC) وجدنا أنّ النّقطة I تنتمي إلى المستوي (ABC)، إذن تنتمي I تنتمي إلى الفصل المشترك (BC) للمستويين (ABC) و (BCD).

ولما كان (HK) هو الفصل المشترك للمستويين (EFG) و (BCD) وجدنا أنّ النّقطة I تنتمي إلى المستقيم (HK)، ونعلم أنّ I تقع على (EF)، إذن I هي نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة (BC) و (HK) و (EF).

11 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\mathrm{cm}$، وليكن O مركز المربّع $EFGH$.

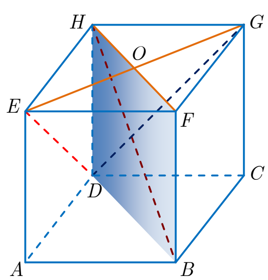
① أثبت أنّ المستقيم (OD) هو الفصل المشترك للمستويين (EDG) و $(HDBF)$.

② ارسم بالقياس الحقيقيّ المستطيل $HFBD$ وعيِّن عليه النّقطة O.

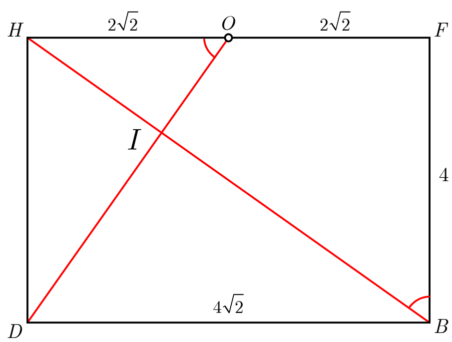
③ أثبت أنّ المستقيمين (HB) و (OD) متعامدان.

④ أثبت كذلك تعامد المستقيمين (HD) و (EG). واستنتج أنّ (EG) عموديٌّ على المستوي $(HFBD)$، وأنّه عموديٌّ على (HB).

⑤ أثبت أنّ (HB) عموديٌّ على المستوي (DEG).



الحل

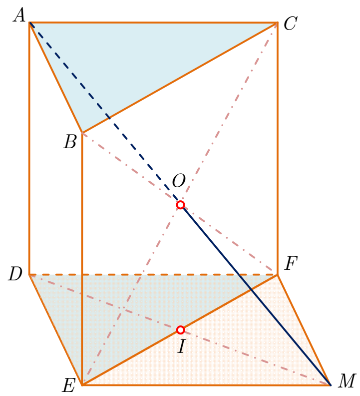


① تقع النقطة O على المستقيم (EG)، فهي تنتمي إلى المستوي (EDG)، وهي تقع أيضاً على المستقيم (HF) فهي تنتمي إلى المستوي $(HDBF)$. فالنقطتان O و D نقطتان مشتركتان بين المستويين (EDG) و $(HDBF)$، فالمستقيم (OD) هو الفصل المشترك لهذين المستويين.

③ لمّا كان $\tan\widehat{FBH}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\tan\widehat{HOD}$ استنتجنا أنّ $\widehat{HOD}=\widehat{FBH}$ لأنّ هاتين الزاويتين حادتان، فالرباعي $OIBF$ دائري ومن ثَمّ $\widehat{OIB}=\widehat{OFB}=\dfrac{\pi}{2}$ أو $(OD)\perp(HB)$.

④ المستقيم (HD) عمودي على المستوي $(EFGH)$ فهو عمودي على جميع المستقيماتالمحتواة فيه، وعلى $(EG) \perp (HD)$؛ وفي الوقت نفسه $(EG) \perp (HF)$ لأنّ قطري المربع متعامدان. إذن (EG) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي $(HFBD)$ فهو عمودي على المستوي، ومنه (EG) يعامد أي مستقيم محتوى في هذا المستوي. وبوجه خاص $(EG) \perp (HB)$.

⑤ وجدنا أنّ $(HB) \perp (OD)$ وأنّ $(HB) \perp (EG)$، إذن (HB) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (DEG)، فهو عمودي على هذا المستوي.



12 ليكن $ABCDEF$ موشوراً قائماً قاعدتاه ABC و DEF. ولتكن النّقطة I منتصف (EF) و O مركز المستطيل $BCFE$. وأخيراً لتكن M نقطة تقاطع (AO) مع المستوي (DEF). أثبت أنّ الرباعي $EDFM$ متوازي الأضلاع.

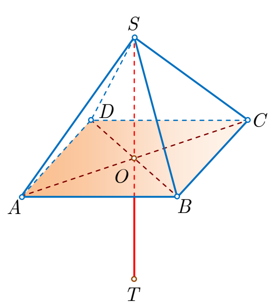
الحل

F و M نقطتان مشتركتان بين المستويين (OAB) و (DEF)، إذن (FM) هو الفصل المشترك لهذين المستويين. ولكن (AB) مستقيم من (OAB) و (DE) مستقيم من (DEF) وهذان المستقيمان متوازيان لأنّ $ABED$ مستطيل، إذن الفصل المشترك (FM) يوازي (DE).

وبالمثل E و M نقطتان مشتركتان بين المستويين (OAC) و (DEF)، إذن (EM) هو الفصل المشترك لهذين المستويين. ولكن (AC) مستقيم من (OAC) و (DF) مستقيم من (DEF) وهذان المستقيمان متوازيان لأنّ $ACFD$ مستطيل، إذن الفصل المشترك (EM) يوازي (DF).

نستنتج مما سبق أنّ $EDFM$ متوازي الأضلاع لأنّ $(FM) \parallel (DE)$ و $(EM) \parallel (DF)$.

13 ليكن $SABCD$ هرماً منتظماً قاعدته المربّع $ABCD$ الذي مركزه O. نفترض أنّ:



$$OS = OA = OB = OC = OD = a$$

ونعرّف T نظيرة S بالنّسبة إلى O.

① أثبت أنّ $\widehat{SAC} = 45^\circ$ و $\widehat{SBD} = 45^\circ$.

② أثبت أنّ الرباعيّين $SATC$ و $SBTD$ مربّعان.

③ أثبت أنّ الوجوه الثمانية للمجسّم $SABCDT$ مثلّثاتٌ متساويةُ الأضلاع. ما اسم هذا المجسّم؟

الحل

① لما كان $SABCD$ هرماً منتظماً استنتجنا أنّ SOA قائم في O ومن ثمّ

$$\tan \widehat{SAO} = \frac{OS}{OA} = 1$$

وعليه $\widehat{SAC} = 45°$. ونجد بالمثل أنّ $\widehat{SBD} = 45°$.

② قطرا الرباعي $SATC$ متعامدان ومتناصفان ومتساويان. إذن $SATC$ مربّع، وكذلك نجد أنّ $SBTD$ مربّع أيضاً.

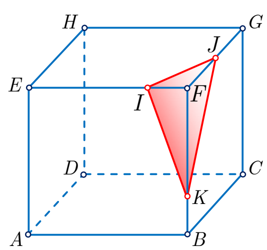
③ لاحظ أنّ كل حرف من حروف هذا المجسم هو وتر مثلث قائم ومتساوي الساقين طول ضلعه يساوي a، فطول كل حرف يساوي $a\sqrt{2}$، وجميع وجوه المجسم مثلثات متساوية الأضلاع. يسمى هذا المجسم ثماني وجوه منتظم.

14 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ولتكن I نقطة من $[FE]$، و K نقطة من $[FB]$ و J نقطة من $[FG]$ تُحقّق الشروط:

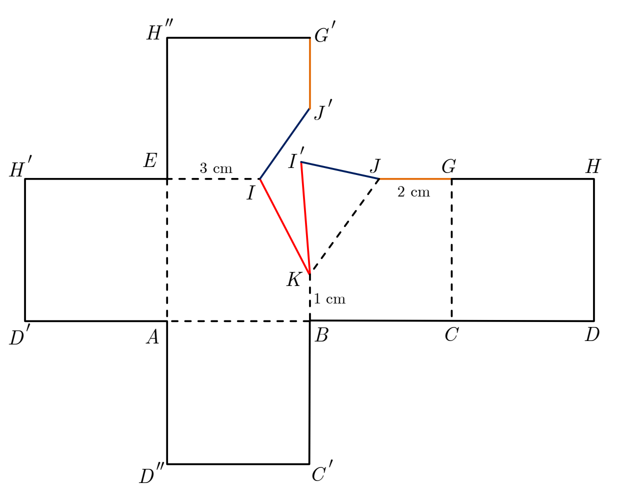
$$FI = 1\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FJ = 2\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FK = 3\,\text{cm}$$

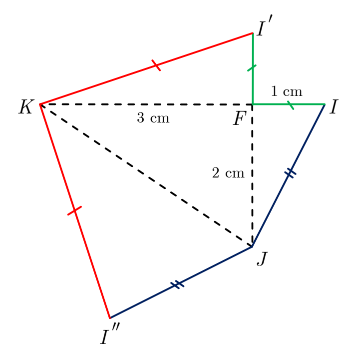
ارسم بالقياس الحقيقي مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً لسطحَيْ جزأيْ المكعّب بعد قطعه وفق المستوي (IJK).

مساعدة : استعمل الفرجار لتتجنّب حساب IJ و JK و KI.



الحل

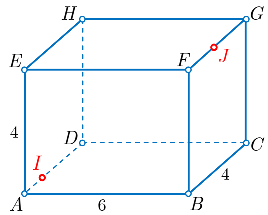




15 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه:

$AE = BC = 4\,\text{cm}$ و $AB = 6\,\text{cm}$.

لتكن النقطة J منتصف $[FG]$، والنقطة I من $[AD]$ التي تحقّق الشّرط $AI = 1\,\text{cm}$.

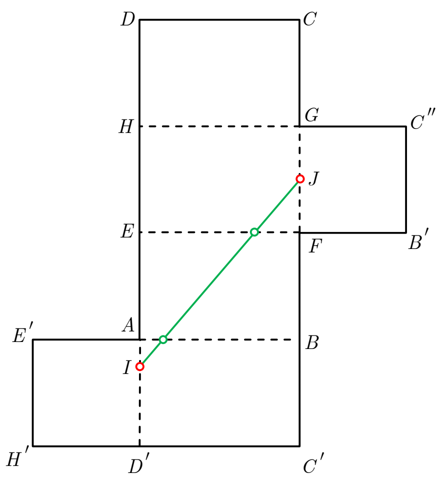


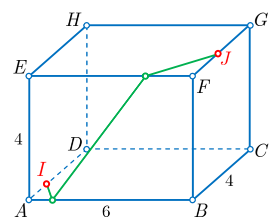
ارسم، على سطح متوازي المستطيلات هذا، أقصر طريق يصل بين I و J .

مساعدة : ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً مناسباً لسطح $ABCDEFGH$.

الحل

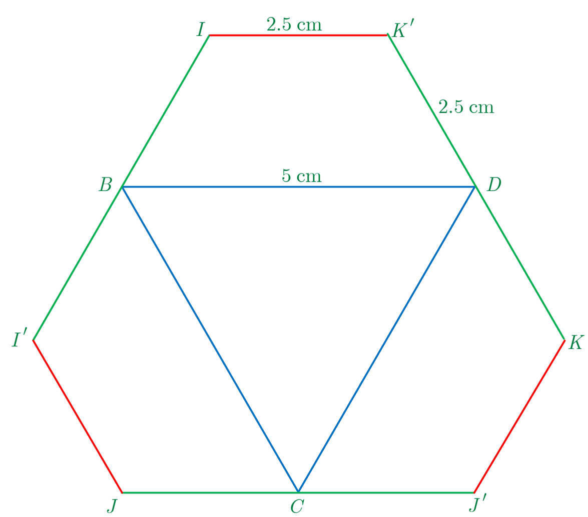
تجب مناقشة الحلول المختلفة الممكنة، وتعيين أقصر الطرق بين I و J. الشكل المجاور يبين أنّ طول أقصر طريق يساوي $\sqrt{85}$، ولقد رسمناه على متوازي المستطيلات كما يلي :



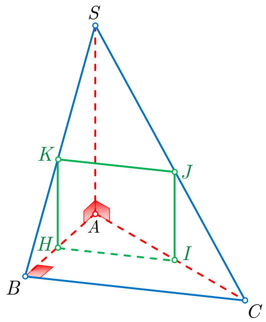


16 ليكن لدينا رباعيّ الوجوه المنتظم $ABCD$، نفترض أنّ $AB = 5\,\text{cm}$. ولتكن I و J و K منتصفات حروفه $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ بالترتيب. ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً يمثّل سطح المجسّم الذي نحصل عليه بعد حذف رباعيّ الوجوه $AIJK$ من رباعيّ الوجوه $ABCD$.

الحل



17 ليكن رباعيّ الوجوه $SABC$ الذي نفترض فيه أنّ (SA) عموديٌّ على (ABC) وأنّ المثلّث ABC قائمٌ في B.



① ❶ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (SA) متعامدان.

❷ أثبت أنّ المثلّث SBC قائم في B.

② لتكن H نقطة من $[AB]$، نرسم المستوي المارّ بالنّقطة H عمودياً على (AB)، فيقطع (AC) في النّقطة I، ويقطع (SC) في J، ويقطع (SB) في K.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (HI) متوازيان.

❷ أثبت أنّ المستقيمين (HI) و (KJ) متوازيان.

❸ أثبت كذلك أنّ المستقيمين (KH) و (SA) متوازيان. واستنتج توازي (KH) و (IJ).

❹ أثبت أنّ $HIJK$ مستطيل.

③ نفترض أنّ $AB = 1$ وأنّ $SA = BC = 2$ وأنّ $AH = x$.

❶ أثبت أنّ $HI = 2x$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث ABC.

❷ أثبت أنّ $HK = 2(1-x)$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث SAB.

❸ احسب $\mathcal{A}(x)$: مساحة المستطيل $HIJK$ بدلالة x.

④ ❶ أثبت أنّ $4x(1-x) = 1-(1-2x)^2$.

❷ ما هي قيمة x الّتي تجعل $\mathcal{A}(x)$ أكبر ما يمكن؟ عيِّن عندئذ موضع H على $[AB]$ وبيِّن طبيعةَ الرّباعيّ $HIJK$ في هذه الحالة.

الحل

① ❶ (SA) عمودي على المستوي (ABC) الذي يحوي المستقيم (BC) إذن $(SA) \perp (BC)$.

❷ المستقيم (BC) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (AB) و (SA) فهو عمودي على المستوي (SAB)، فهو عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوي وخصوصاً المستقيم (SB). المثلث SBC قائم في B.

② ❶ لما كان $(AB) \perp (HIJK)$ ، كان $(AB) \perp (HI)$. و لدينا فرضاً أنّ $(AB) \perp (BC)$ لأن المثلث ABC قائم في B. وهكذا يكون المستقيمان (BC) و (HI) من المستوي (ABC) عموديين على المستقيم (AB) فهما متوازيان.

❷ يتقاطع المستويان (SBC) و $(HIJK)$ بالفصل المشترك (JK). والمستقيم (BC) من المستوي (SBC) يوازي المستقيم (HI) من المستوي $(HIJK)$ ففصلهما المشترك (JK) يوازي كلاً من المستقيمين (BC) و (HI).

❸ لما كان $(AB)\perp(AS)$ و $(AB)\perp(KH)$، كان المستقيمان (AS) و (HK) من المستوي (SAB) عموديين على المستقيم (AB) فهما متوازيان.

يتقاطع المستويان (SAC) و $(HIJK)$ بالفصل المشترك (IJ). والمستقيم (AS) من المستوي (SAC) يوازي المستقيم (HK) من المستوي $(HIJK)$ ففصلهما المشترك (IJ) يوازي كلاً من المستقيمين (AS) و (HK).

❹ الرباعي $HIJK$ متوازي أضلاع فيه $(AS)\perp(HI)$ فهو مستطيل.

③❶ في المثلث ABC لدينا $\left(BC\right)\parallel\left(HI\right)$، نجد حسب المبرهنة الأساسية في التشابه:

$$\frac{HI}{BC}=\frac{AH}{AB} \text{ أو } \frac{HI}{2}=\frac{x}{1} \text{ ومنه } HI=2x .$$

❷ في المثلث SAB لدينا $\left(AS\right)\parallel\left(KH\right)$، إذن حسب المبرهنة الأساسية في التشابه نجد

$$\frac{HK}{SA}=\frac{BH}{AB} \text{ أو } \frac{HK}{2}=\frac{1-x}{1} \text{ و منه } HK=2\left(1-x\right)$$

❸ مساحة المستطيل $HIJK$ تساوي:

$$\mathcal{A}(x)=HI\cdot HK=2x\cdot 2(1-x)=4x\cdot(1-x)$$

④❶ وضوحاً.

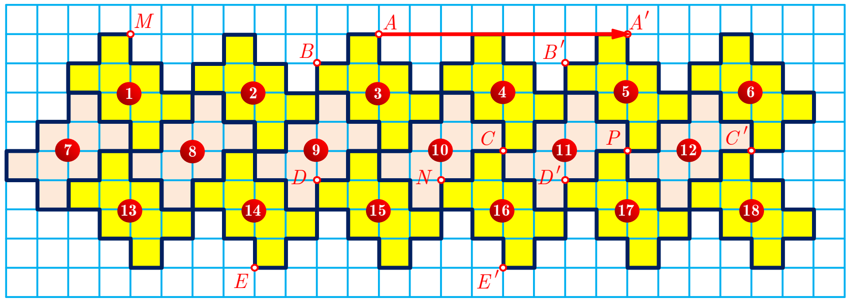
❷ يبلغ المقدار $\mathcal{A}(x)=1-(1-2x)^2$ أكبر قيمة له عندما يبلغ المقدار $\left(1-2x\right)^2$ أصغر قيمة له وهي 0، عندما $x=\dfrac{1}{2}$، وعندها تكون مساحة المستطيل $\mathcal{A}\left(\frac{1}{2}\right)=1-0=1$، حيث تقع H في منتصف $[AB]$ ويكون $HK=HI=1$ والرباعيُّ $HIJK$ مربّعاً.

3

الأشعّة والهندسة التّحليليّة

1. مقدّمة عامّة
2. الأشعّة والمساواة الشّعاعيّة
3. جمع الأشعّة وطرحها
4. ضرب شعاع بعدد حقيقيّ
5. الارتباط الخطيّ لشعاعين
6. مقدّمة في الهندسة التّحليليّة

لنتأمّل الشّكل الآتي النّاتج عن رصف مقاطع زخرفيّة متماثلة، ولنحاول الإجابة عن الأسئلة الآتية :



① انسحاباتٌ مختلفة

1 في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقطعين 3 و 4 وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{A\to P}$ الّذي ينقل A إلى P.
- $T_{A\to M}$ الّذي ينقل A إلى M.
- $T_{D\to N}$ الّذي ينقل D إلى N.

2 لنحاول فهم لماذا كان لهذه الانسحابات تأثيرات مختلفة على المقاطع الزخرفية.

- أيَكون للمستقيمين (AA') و (AP) **المنحى** نفسه ؟ أي هل هما متوزيان ؟
- للمستقيمات (AA') و (AM) و (DN) المنحى نفسه. قارن **جهة** الانتقال، من A إلى A'، ومن A إلى M، ومن D إلى N.
- قارن **طولَي** AA' و DN.

الحل

1

- $T_{A\to A'}(3)=5$ و $T_{A\to A'}(4)=6$.
- $T_{A\to P}(3)=17$ و $T_{A\to P}(4)=18$.
- $T_{A\to M}(3)=1$ و $T_{A\to M}(4)=2$.
- $T_{D\to N}(3)=4$ و $T_{D\to N}(4)=5$.

2

- لا ليس للمستقيمين (AA') و (AP) المنحى نفسه، فهما غير متوازيين.
- نعم للمستقيمات (AA') و (AM) و (DN) المنحى نفسه.

جهة الانتقال من A إلى A' هي نفسه جهة الانتقال من D إلى N ، أما جهة الانتقال من A إلى M فهي جهة معاكسة لجهة الانتقال من A إلى A'.

- طولُ AA' لا يساوي طولَ DN.

② انسحابات متماثلة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقاطع ❷ و ❸ و ❹ و ❼ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{B\to B'}$ الّذي ينقل B إلى B'.
- $T_{C\to C'}$ الّذي ينقل C إلى C'.
- $T_{D\to D'}$ الّذي ينقل D إلى D'.
- $T_{E\to E'}$ الّذي ينقل E إلى E'.

❷ اشرح لماذا كان لهذه الانسحابات التأثير نفسه على المقاطع الزخرفيّة.

❸ باستعمال نقاط أخرى من الشّكل، اذكر انسحاباً آخر تأثيره على المقاطع الزخرفية يماثل تأثير الانسحاب $T_{A\to A'}$.

الحل

- $T_{A\to A'}(❷) = ❹$ و $T_{A\to A'}(❸) = ❺$ و $T_{A\to A'}(❹) = ❻$ و $T_{A\to A'}(❼) = ❾$.
- ونحصل على النتائج نفسها في حالة الانسحابات $T_{B\to B'}$ و $T_{C\to C'}$ و $T_{D\to D'}$ و $T_{E\to E'}$.

❷ لأنها تشترك بالمنحى والجهة ومسافة الانتقال.

❸ الانسحاب $T_{M\to A}$ مثلاً.

③ الأشعّة

❶ يقول ساطع "الشّعاعان $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متماثلان". اشرح لماذا جافاه الصواب.

❷ باستعمال النّقاط في الشّكل، اذكر أشعة أخرى تمثّل كلاً من الشّعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ED}$.

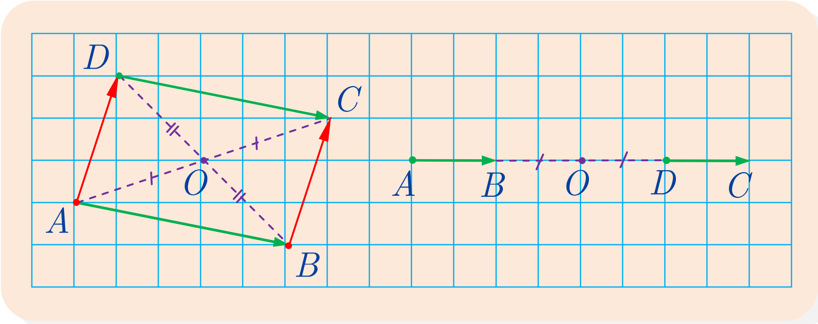
الحل

❶ لأن مبدأ الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ هو النّقطة A و نهايته النّقطة A'، في حين أنّ مبدأ الشعاع $\overrightarrow{A'A}$ هو النّقطة A' و نهايته النّقطة A، فليس لهما الجهة نفسها.

❷ أشعة أخرى تمثّل الشعاع $\overrightarrow{BC}$ هي $\overrightarrow{B'C'}$ و $\overrightarrow{DE'}$، أشعة أخرى تمثّل الشعاع $\overrightarrow{ED}$ هي $\overrightarrow{E'D'}$ و $\overrightarrow{CB'}$.

فكّر - صفحة 47

أصحيح أنّ الشّرط اللازم والكافي لتحقُّق المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ هو أن تكون القطعتان المستقيمتان $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين، أي أن يكون منتصف $[AC]$ منطبقاً على منتصف $[BD]$ ؟



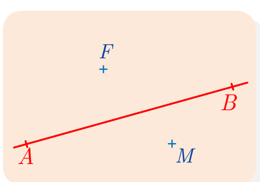
الحل

لقد رأينا سابقاً أن كون C صورة D وفق الانسحاب $T_{A \to B}$ الذي ينقل A إلى B يُكافئ كون C نظيرة A بالنسبة إلى منتصف $[DB]$ وهذا بدوره يُكافئ كون القطعتين المستقيمتين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين. ومن جهة أخرى القول $T_{A \to B}(D) = C$ يُكافئ المساواة الشعاعية $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. إذن المقول المشار إليها صحيحة:

$$\left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right) \Leftrightarrow \left(\text{القطعتان المستقيمتان } [AC] \text{ و } [BD] \text{ متناصفتان}\right)$$

تدرّب - صفحة 48

① ليكن $\vec{u}$ الشّعاع الذي منحاه (AB) وجهته من A إلى B وطوله $3\,\text{cm}$.

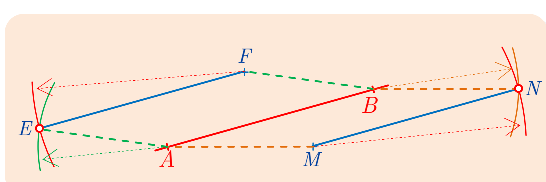


❶ ارسم الشّكل المجاور في دفترك.

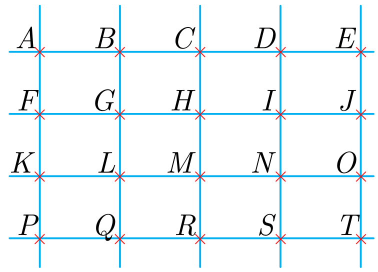
❷ أنشئ الشّعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{EF}$ بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$.

الحل

نتمّم بواسطة الفرجار المثلث ABF إلى متوازي الأضلاع $ABFE$، وكذلك مع BAM فنُنشئ متوازي الأضلاع $BAMN$، كما في الشكل الآتي :



② تأمّل الشّكل التالي، ثُم املأ الفراغات $\square$ فيما يلي.



❶ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{M\square}$، ❷ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{M\square}$، ❸ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{\square O}$.

❹ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{\square L}$، ❺ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{H\square}$، ❻ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{G\square}$.

❼ النّقطة I هي صورة $\square$ وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{KC}$.

❽ النّقطة $\square$ هي صورة P وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

❾ النّقطة T هي صورة G وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{\square S}$.

❿ النّقطة N هي صورة C وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{G\square}$.

الحل

❶ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MT}$، ❷ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MJ}$، ❸ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{RO}$.

❹ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{HL}$، ❺ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{HR}$، ❻ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{GJ}$.

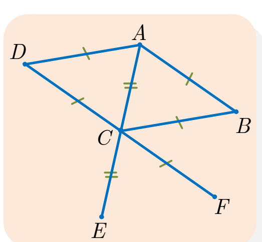
❼ النّقطة I هي صورة Q وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{KC}$.

❽ النّقطة M هي صورة P وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

❾ النّقطة T هي صورة G وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{FS}$.

❿ النّقطة N هي صورة C وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GR}$.

③ نتأمّل في الشّكل المجاور معيّناً $ABCD$. لتكن E و F نظيرتي A و D بالنّسبة إلى C بالترتيب. علّل ما يأتي:



❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$

❷ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

❸ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE}$

الحل

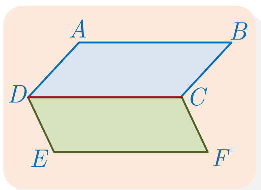
❶ لمَّا كان الرباعي $ABCD$ معيّناً استنتجنا أن $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$، ولمَّا كانت F نظيرة D بالنّسبة إلى C كان $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$.

❷ لما كان $ABCD$ معيّناً استنتجنا أن $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$، و لمَّا كانت E و F نظيرتي A و D بالنّسبة إلى C كان $ADEF$ متوازي أضلاع ومنه $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$.

❸ من ❶ لدينا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$ ومنه $ABCF$ متوازي أضلاع، ومنه $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF}$. ولما كانت E نظيرة A بالنّسبة إلى C كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$.

④ $ABCD$ و $CDEF$ هما متوازيا أضلاع بحيث لا تقع النّقاط A و B و E و F على استقامة واحدة.

أثبت أنّ الرّباعيّ $ABFE$ متوازي أضلاع.



الحل

لمّا كان $ABCD$ متوازي أضلاع كان ① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

لمّا كان $CDEF$ متوازي أضلاع كان ② $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.

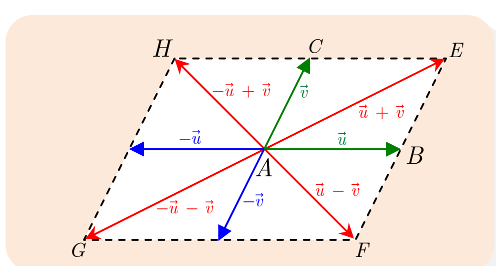
من ① و ② نجد أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$، فالرّباعيّ $ABFE$ متوازي الأضلاع لأن النّقاط A و B و E و F لا تقع على استقامة واحدة.

تدرّب-صفحة 50

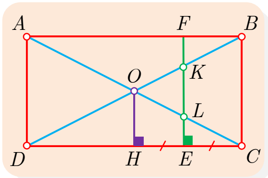
① لتكن A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. نضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. أنشئ النّقاط E و F و G و H التي تُحقّق

$$\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}, \quad \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}, \quad \overrightarrow{AG} = -\vec{u} - \vec{v}, \quad \overrightarrow{AH} = -\vec{u} + \vec{v}$$

الحل



تدرّب-54



① تأمّل الشّكل المجاور، ثُمّ املأ الفراغات فيما يأتي بالأعداد المناسبة

❶ $\overrightarrow{AC} = \cdots\cdots \overrightarrow{OC}$ ❷ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots \overrightarrow{FB}$ ❸ $\overrightarrow{HD} = \cdots\cdots \overrightarrow{DC}$

❹ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots \overrightarrow{HE}$ ❺ $\overrightarrow{FB} = \cdots\cdots \overrightarrow{ED}$ ❻ $\overrightarrow{CB} = \cdots\cdots \overrightarrow{KE}$

الحل

❶ $\overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{OC}$ ❷ $\overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{FB}$ ❸ $\overrightarrow{HD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

❹ $\overrightarrow{AB} = 4\,\overrightarrow{HE}$ ❺ $\overrightarrow{FB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$ ❻ $\overrightarrow{CB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{KE}$

② بيّن الصواب من الخطأ في العبارات الآتية مُعلِّلاً إجابتك :

❶ إذا كان ABC مثلّثاً متساوي السّاقين كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

❷ إذا كان $ABCD$ متوازي الأضلاع كان $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

❸ إذا كان $[AI]$ متوسّطاً في المثلّث ABC كان $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

❹ إذا كان $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ كان $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

❺ إذا كانت C نظيرة A بالنّسبة إلى منتصف $[BD]$ كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

الحل

❶ خطأ لأن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ تقتضي أن يكون $AB \parallel AC$.

❷ صح استناداً إلى طريقة متوازي الأضلاع.

❸ صح إذ لدينا

$$① \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \quad \text{و} \quad ② \quad \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$$

بجمع المساواتين ① و② نجد $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}$ ولما كانت النّقطة I منتصفَ $[BC]$ كان الشّعاعان $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعاكسين أي $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$. إذن

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

❹ خطأ، فإذا كان $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ كان $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB}$.

❺ صح، استناداً إلى طريقة متوازي الأضلاع.

تدرّب - صفحة 56

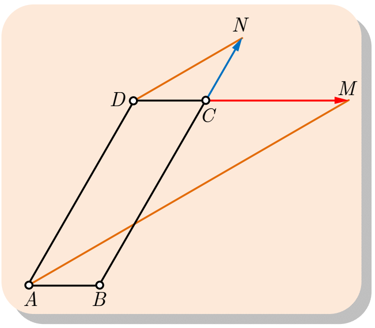
① نتأمّل متوازي أضلاع $ABCD$. ونعرّف النّقطتين M و N بالعلاقتين

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$$

❶ ارسم شكلاً مناسباً.

❷ استنتج أنّ المستقيمين (AM) و (DN) متوازيان.

الحل



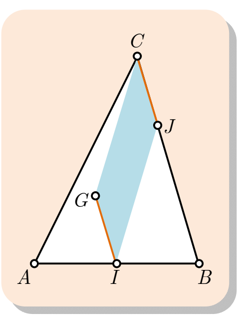
❶ الرسم.

❷ نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CN}$ معرّفين بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ إذن لنحاول التعبير عن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{DN}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ أيضاً مستفيدين من علاقة شال.فنجد

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB}\\ &= 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DN}\end{aligned}$$

إذن، نستنتج أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{DN}$ مرتبطان خطياً فالمستقيمان (AM) و (DN) متوازيان.

② ليكن ABC مثلّثاً. لتكن I منتصف $[AB]$، و J النّقطة المُعرّفة بالمساواة $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. وأخيراً لتكن G النّقطة التي تجعل الرّباعيّ $JCGI$ متوازي الأضلاع.



❶ أثبت أنّ النّقطة G هي منتصف $[AJ]$.

يكفي أن نبرهن أنّ G تحقّق إحدى الخواص المميّزة لنقطة المنتصف كأن نبرهن أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ باستعمال علاقة شال.

❷ أثبت أنّ النّقطة G هي مركز ثقل المثلّث ACI.

الحل

❶ لنبدأ باختيار شعاعين مستقلين خطياً مثل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ولنحاول التعبير عن الأشعة التي تهمنا بدلالة هذين الشعاعين. مثلاً: لأن I منتصف $[AB]$، نجد $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

وبالاستفادة من علاقة شال ومن كون $JCGI$ متوازي الأضلاع، نجد

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

ومن جهة أخرى

$$\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BC}$$
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

نستنتج إذن أنّ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GJ}$، فالنقطة G هي منتصف $[AJ]$.

❷ لنحسب المقدار $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}$:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}$$
$$=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GJ}+\cancel{\overrightarrow{JC}}+\cancel{\overrightarrow{CJ}}=\vec{0}$$

إذن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$، وهذا يبرهن على أنّ G هي مركز ثقل المثلث ACI.

فكّر - 62

لماذا لا يمكن استعمال علاقة المسافة بين نقطتين في مَعْلَم غير متجانس ؟

الحل

لأننا استندنا عند إثبات العلاقة على مبرهنة فيثاغورث، وعلى أنّ واحدة الأطوال على محوري الإحداثيات هي نفسها.

تدرّب - 62

① ادرس، في الحالات الآتية، ارتباط الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

❶ $\vec{u}\left(2,-3\right)$ و $\vec{v}\left(-6,9\right)$.

❷ $\vec{u}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

❸ $\vec{u}\left(3,-2\right)$ و $\vec{v}\left(6,-1\right)$.

❹ $\vec{u}\left(10,-5\right)$ و $\vec{v}\left(-4,2\right)$.

الحل

❶ يمكننا بسهولة ملاحظة التّناسب بين مركّبات الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

$\vec{u}$	2	-3
$\vec{v}$	-6	9

$\times(-3)$

نستنتج إذن أنّ $\vec{v}=-3\vec{u}$ والشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

❷ هنا لا نرى تناسباً واضحاً بين مركّبات الشّعاع $\vec{u}$ ومركّبات الشّعاع $\vec{v}$. نلجأ إذن إلى شرط الارتباط وهنا لدينا :

$$xy'-x'y=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=0$$

فالشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.

❸ انطلاقاً من شرط الارتباط الخطي نلاحظ أنّ:

$$x'y-xy'=(6\times -2)-(-1\times 3)=-9\neq 0$$

فالشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقلان خطياً.

❹ نجد بأسلوب مماثل لما سبق أنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً في هذه الحالة.

② نتأمّل في مَعْلَم النّقاط $A(-2,4)$ و $B(4,2)$ و $C(0,-1)$ و $D(-3,0)$. لتكن E منتصف $[AB]$.

عيّن طبيعة الرّباعييَّن $ABCD$ و $AECD$.

الحل نلاحظ أنّ

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}4-(-2)\\2-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{DC}=\begin{bmatrix}0-(-3)\\-1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

إذن، $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$ والرباعي، $ABCD$ شبه منحرف لأنّ فيه $(AB)\parallel(DC)$.

من جهة أخرى، لأنّ E منتصف $[AB]$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$، فالرباعي $AECD$ متوازي الأضلاع.

③ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-1,2)$ و $B(2,1)$ و $C(-2,-1)$ احسب أطوال أضلاع المثلّث ABC واستنتج نوعه.

الحل

تعطى المسافة بين نقطتين U و V بالعلاقة $UV=\sqrt{(x_v-x_u)^2+(y_v-y_u)^2}$. بالتعويض نجد

$$AB=\sqrt{(2+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(-2+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$
$$BC=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$

ولما كان $AB=AC$ و $BC^2=AC^2+AB^2$ استنتجنا أن ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

④ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-2,3)$ و $B(4,5)$ و $C(0,5)$ و $D(5,1)$.

❶ احسب محيط المثلّث ABC.

❷ احسب إحداثيتي N منتصف القطعة CB ثم استنتج طول المتوسّط AN.

❸ احسب مركّبات الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.

❹ أثبت أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان.

فيما يلي، نفترض k عدداً حقيقياً.

❺ اكتب، بدلالة k، إحداثيّتي النّقطة M التي تحقّق $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$.

❻ احسب، بدلالة k، مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{CM}$.

❼ عيّن k كي يكون الشّعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطّياً. واستنتج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD).

الحل

❶ تعطى المسافة بين نقطتين U و V بالعلاقة $UV=\sqrt{(x_v-x_u)^2+(y_v-y_u)^2}$. بالتعويض نجد

$$AB = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$AC = \sqrt{(0+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(0-4)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

وعليه يعطى محيط المثلّث ABC بالعلاقة

$$AB + AC + BC = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{2} + 4$$

❷ إحداثيتا النّقطة N هما: $x_N = \dfrac{x_C + x_B}{2}$ ، $y_N = \dfrac{y_C + y_B}{2}$ إذن $N(2,5)$

وعليه يحسب طول المتوسّط AN بالصيغة

$$AN = \sqrt{(2+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

❸ لإيجاد مركبتي كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نكتب

$$\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 5-0 \\ 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-(-2) \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

❹ لإثبات أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان نكتفي بإثبات عدم الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ فنحسب

$$x'y - xy' = (6 \times -4) - (5 \times 2) = -24 - 20 = -44 \neq 0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقلان خطياً، والمستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان.

❺ لاحظ أنّ إحداثيتي النقطة M هما مركّبتا الشعاع $\overrightarrow{OM}$. ولكن العلاقة $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ تقتضي أنّ

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$$

وعليه

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+6k \\ 3+2k \end{bmatrix}$$

❻ لحساب مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{CM}$، بدلالة k، نكتب

$$\overrightarrow{CM} = \begin{bmatrix} x_M - x_C \\ y_M - y_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+6k-0 \\ 3+2k-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+6k \\ -2+2k \end{bmatrix}$$

❼ كي يكون الشّعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطّياً يجب أن يتحقق شرط الارتباط الخطي أي

$$x'y - xy' = (-4)(6k-2) - 5(2k-2) =$$
$$= -24k + 8 - 10k + 10 = -34k + 18 = 0$$

وحلُّ هذه المعادلة يعطي قيمة k الآتية $k = \dfrac{18}{34} = \dfrac{9}{17}$، وتكون النقطة $M\left(\frac{20}{17}, \frac{69}{17}\right)$ الموافقة هي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD).

تمرينات ومسائل

1 بيّن الإجابات الصّحيحة من بين الإجابات المقترحة في كلّ من الحالات الآتية:

- ليكن ABC مثلّثاً، مركز ثقله G، ومنتصف القطعة $[AC]$ هو J، عندئذ :

❶ $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ ❷☑ $\overrightarrow{GJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ ❸ $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{AB}$

- في المَعْلَم $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$، نفترض أنّ $\overrightarrow{OM}=-2\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$ و $\overrightarrow{ON}=\vec{\imath}-1.5\vec{\jmath}$، عندئذ :

❶ OMN مثلّث. ❷☑ O و M و N على استقامة واحدة. ❸☑ $\overrightarrow{MN}=3\vec{\imath}-4.5\vec{\jmath}$.

- لنتأمّل في المَعْلَم المتجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ النّقاط $A(4,5)$ و $B(2,1)$ و $C(8,3)$. عندئذ :

❶ $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان. ❷ $\overrightarrow{BC}=\sqrt{2}\ \overrightarrow{AB}$. ❸☑ ABC قائم ومتساوي السّاقين.

- لنتأمّل في المَعْلَم $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ النّقاط $A(2,0)$ و $B(6,2)$ و $C(3,5)$ و $D(1,4)$. عندئذ :

❶ (AB) و (CD) متقاطعان. ❷☑ $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ❸☑ $ABCD$ شبه منحرف.

- لنتأمّل في المَعْلَم $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ النّقطة $A(2,0)$، والشعاع $\vec{u}=3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$. ولتكن النّقطة $M\left(x,y\right)$ المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ عندئذٍ :

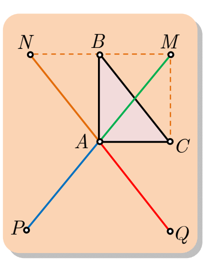
❶ $x=1$ و $y=-7$. ❷ $x=1$ و $y=3$. ❸☑ M هي صورة A وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\vec{u}$.

2 ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A. عيّن النّقاط M و N و P و Q المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\ ,\qquad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ ,\qquad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}$$

الحل

- النقطة M هي النقطة التي تجعل $BACN$ متوازي الأضلاع.
- النقطة N تحقّق $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CB}$، فهي صورة A وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CB}$.
- النقطة Q تحقّق $\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AN}$، فالنقطة Q نظيرة N بالنسبة إلى A.
- النقطة P تحقّق $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AM}$، فالنقطة P نظيرة M بالنسبة إلى A.



3 لتكن A و B و C و D أربع نقاط في المستوي. أثبت أنّ :

- $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{DA}$.

- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

الحل

- لنرمز بالرمز $\mathcal{L}$ إلى الطرف الأيسر من العلاقة المعطاة $\mathcal{L}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA})$. إنّ

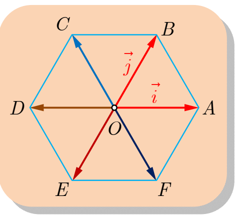
$$\begin{aligned}\mathcal{L}&=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}\\&=\vec{0}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\end{aligned}$$

- لنرمز بالرمز $\mathcal{D}$ إلى الفرق بين طرفي المساواة المطروحة $\mathcal{D}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}-(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\\&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\end{aligned}$$

فالمساواة المقترحة صحيحة.

4 ليكن $ABCDEF$ مسدّساً منتظماً مركزه O. نضع $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. اكتب الأشعّة $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{DB}$ بدلالة الشّعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

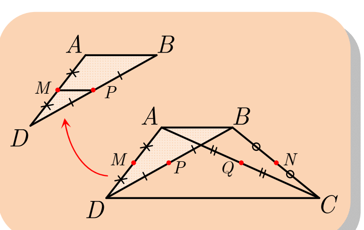


الحل

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}=-\vec{j}\\&\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}=-\vec{i}\\&\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{j}-\vec{i}\\&\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OB}=\vec{j}\\&\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\vec{i}\ .\\&\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}\\&\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}=\vec{i}-2\vec{j}\\&\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OF}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BA}=\vec{j}-2\vec{i}\\&\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}=\vec{j}+\vec{i}\end{aligned}$$

5 الوقوع على استقامة واحدة

الفرْض : ليكن $ABCD$ رباعيّاً فيه $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$، ولتكن M منتصف $[AD]$، و N منتصف $[BC]$، و P منتصف $[BD]$، وأخيراً Q منتصف $[AC]$.



الطلب : إثبات أنّ النّقاط M و N و P و Q تقع على استقامة واحدة.

الحل

- نستنتج من العلاقة $\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{AB}$ أن $(DC)\parallel(AB)$ والرباعي $ABCD$ شبه منحرف.
- في المثلث ABD، النّقطة M منتصف $[AD]$، و P منتصف $[BD]$ إذن $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- في المثلث ADC، النّقطة M منتصف $[AD]$، و Q منتصف $[AC]$ إذن $\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

إذن $(MP)\parallel(AB)\parallel(DC)\parallel(MQ)$، والنقاط M و P و Q تقع على استقامة واحدة. وكذلك

- في المثلث BDC، النّقطة P منتصف $[BD]$، و N منتصف $[BC]$ إذن $\overrightarrow{PN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.
- في المثلث ABC، النّقطة Q منتصف $[AC]$، و N منتصف $[BC]$ إذن $\overrightarrow{QN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

إذن $(NQ)\parallel(AB)\parallel(DC)\parallel(NP)$، والنقطة N تقع أيضاً على المستقيم (PQ). والنقاط الأربع M و N و P و Q تقع على استقامة واحدة.

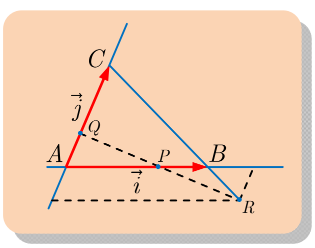
6 ترجمة العلاقات الشّعاعيّة

الفرْض : ليكن ABC مثلّثاً. نعرّف $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$، والنّقاط P و Q و R بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{i},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{j},\quad \overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

الطلب : إثبات أنّ النّقطة P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

الحل



- نتعرّف مباشرة الشّكل المفتاحي 4. ولدينا فرضاً عبارتا الشّعاعين $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

إذن في المعلم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ لدينا $P(\frac{2}{3},0)$ و $Q(0,\frac{1}{3})$.

- في المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$، إحداثيّات B و C معروفة، إذن يمكننا منها استنتاج إحداثيّتي R في المَعْلَم نفسه، فنكتب :

$$\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

ومنه
$$\overrightarrow{AR}=\vec{i}-\frac{1}{3}(\vec{j}-\vec{i})=\frac{4}{3}\vec{i}-\frac{1}{3}\vec{j}$$

إذن في المعلم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ لدينا $R(\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$.

- إنّ إحداثيتي النقطة M منتصف القطعة $[QR]$ في المعلم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ هما

$$y_M = \frac{y_Q + y_R}{2} = 0 \text{ و } x_M = \frac{x_Q + x_R}{2} = \frac{2}{3}$$

وهما إحداثيّتا النقطة P نفسها. فالنقطة P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

7 نقاط معرّفة بعلاقات شعاعيّة

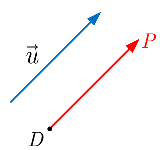
ليكن المثلّث ABC. أنشئ النّقطتين M و N المعرّفتين بالعلاقتين الشّعاعيّتين الآتيتين :

$$\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

الحل

بوجه عام، إذا كانت النّقطة D معطاة، وكان الشّعاع $\vec{u}$ معلوماً، أمكننا تعيين النّقطة P المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{DP} = \vec{u}$. ومن هنا تأتي فكرة تحويل كلّ من العلاقتين (1) و (2) إلى هذه الحالة.



- في العلاقة (1) تظهر النّقطة M، المراد تعيينها، مرّة واحدة وهذا يدعونا إلى كتابة العلاقة بالصِّيغة $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$. أو

$$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$$

وبجمع الشعاع $\overrightarrow{BC}$ إلى طرفي المساواة السابقة واستعمال علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{BM} = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$$

ومنه الإنشاء المبين في الشكل.

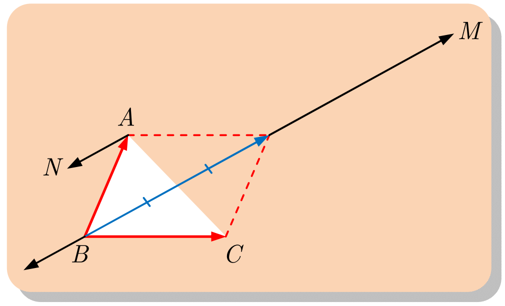
- في العلاقة (2) تظهر النّقطة المراد تعيينها مرّتين فعلينا إذن تحويل العلاقة (2) باستعمال علاقة شال.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + 2(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB})$$
$$= 3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AB}$$

إذن

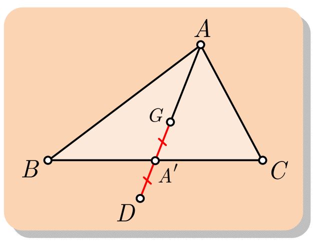
$$3\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

ومنه الإنشاء المبين في الشكل.



8 إثبات شعاعي

لنتأمّل مثلّثاً ABC مركز ثقله G، ولتكن A' منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، و D نظيرة G بالنِّسبة إلى النّقطة A'. أثبت شعاعيّاً أنّ G منتصف القطعة $[AD]$.



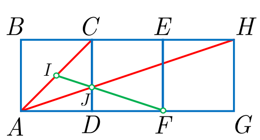
الحل

- لنرسم مثلّثاً ABC ولنعيّن عليه النّقاط A' و G و D.
- لمّا كان G مركز ثقل المثلّث ABC استنتجنا أنّ

$$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$$

- ومن ناحية أخرى، لأنّ D نظيرة G بالنسبة إلى A' استنتجنا أنّ $\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GA'}$. مما سبق نستنتج أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$، وهذا يعني أنّ G هي منتصف $[AD]$.

9 ثلاثة مربعات



$ABCD$ و $DCEF$ و $FEGH$ ثلاثة مربّعات طولُ ضلع كلّ منها يساوي 1. النقطة I منتصف القطعة $[AC]$، و J نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و (AH). مستعيناً بمَعْلَم مناسب أثبت أنّ النّقاط I و F و J تقع على استقامة واحدة.

الحل

- لنرسم أوّلاً الشّكل رسماً دقيقاً ولنختر المَعْلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\overrightarrow{AD} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AB} = \vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المربّعات أعداداً صحيحة. ونجد أن

$$A(0,0), F(2,0), C(1,1), H(3,1), I(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

- نريد إثبات وقوع النّقاط I و J و F على استقامة واحدة، علينا إذن البحث عن إحداثيّتي النّقطة J. ولكن $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AH}$، إذن $J(1,\frac{1}{3})$.
- لنحسب إذن مركّبات كل من الشعاعين $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{FJ}$ فنجد

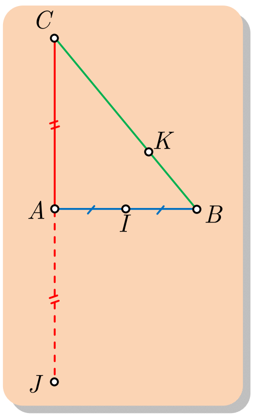
$$\overrightarrow{JI} = (\tfrac{1}{2} - 1, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6})$$
$$\overrightarrow{FJ} = (1 - 2, \tfrac{1}{3} - 0) = (-1, \tfrac{1}{3})$$

إذن $\overrightarrow{FJ}=2\overrightarrow{JI}$، و $\overrightarrow{JI}$ و $\overrightarrow{FJ}$ مرتبطان خطياً، فالنقاط I و F و J واقعة على استقامة واحدة.

10 الوقوع على استقامة واحدة بطريقتين

لنتأمّل مثلّثاً ABC قائم الزّاوية في A، وليكن I منتصف القطعة $[AB]$، و J نظير C بالنسبة إلى النّقطة A، وأخيراً لتكن K النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{BK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

أثبت أنّ النّقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.



الحل

- لنعبّر أولاً عن $\overrightarrow{AJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$. لمّا كانت J نظيرة C بالنسبة إلى A استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$. ولأنّ I منتصف $[AB]$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BI}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
- لإثبات وقوع النّقاط I و J و K على استقامة واحدة، علينا إثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$. هناك طريقتان:

▪ الطريقة الأولى

لنختر المَعْلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المثلّث ABC أعداداً صحيحة، كما يجعل من السهل تحديد إحداثيّات باقي النّقاط. فنجد أنّ

$$A(0,0),B(1,0),C(0,1),I(\tfrac{1}{2},0),J(0,-1)$$

لتعيين (x,y) إحداثيّتي K نلاحظ أنّ المساواة الشعاعية $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ تكتب كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0-1 \\ 1-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

فإحداثيّتا النقطة K هما $(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. وهكذا يمكننا حساب مركّبات الشعاعين $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{IJ}$ فنجد

$$\overrightarrow{IK}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3}-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ}=\begin{bmatrix} 0-\frac{1}{2} \\ -1-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً والنقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

▪ الطريقة الثانية

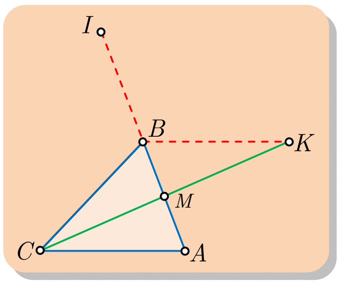
لإثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ نفرّق كلاً منهما إلى مجموعٍ شعاعيّ. فنعلم أنّ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ فنستنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

للتعبير عن $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نكتب ما يلي :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ مجدداً أنّ $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$ ، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً والنقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

11 لنتأمّل مثلّثاً ABC ، ولتكن I نظيرة A بالنّسبة إلى النّقطة B ، و K صورة B وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CA}$ ، و M نقطة تقاطع المستقيمين (CK) و (AB).



① أثبت أنّ النّقطة M هي منتصف القطعة $[KC]$.

② ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BM}$ ؟ استنتج أنّ B هي مركز ثقل المثلّث CKI.

الحل

① لما كانت K صورة النّقطة B وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CA}$ كان $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BK}$ و الرباعي $ACBK$ متوازي أضلاع قطراه $[AB]$ و $[KC]$، ولما كان قطرا متوازي الأضلاع متناصفان كانت النّقطة M منتصف كل من $[KC]$ و $[AB]$. وبوجه خاص $[IM]$ متوسّط في المثلث ICK.

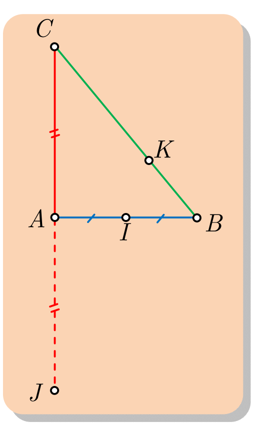
② لما كانت النّقطة I نظيرة A بالنسبة إلى B كانت B منتصف القطعة المستقيمة $[AI]$ أي $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IB}$. ولقد رأينا أنّ M هي منتصف $[AB]$ إذن $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BM}$ ، ومنه $\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{BM}$. فالنقطة B هي نقطة من المتوسط $[IM]$ في المثلث ICK تبعد عن الرأس I مثلي بعدها عن منتصف الضلع المقابلة، فهي إذن نقطة تلاقي متوسطات المثلث ICK ، أو مركز ثقله.

ويمكن بأسلوب آخر أن نلاحظ أنّ

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

فالنقطة B هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ICK .

12 نتأمّل مثلّثاً ABC ، ونسمّي I منتصف القطعة $[AB]$.



① ❶ أنشئ النّقطة J التي تحقق $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

② لتكن النّقطة K المحقّقة للعلاقة $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

❶ اكتب $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ ثمّ أنشئ النّقطة K .

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ وأن $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$. ماذا يمكنك القول عن النّقاط I و J و K في هذه الحالة ؟

الحل

① نعلم أنّ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ فنستنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

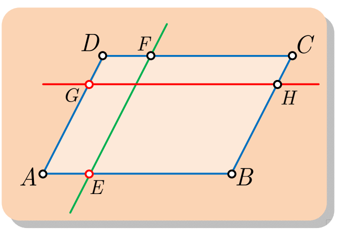
② ❶ من العلاقة $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ نستنتج أنّ $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$، ومنه $3\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BC}$.

② ❷ للتعبير عن $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ نكتب ما يلي :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK}&=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

وهنا نلاحظ أنّ $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$، فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً والنقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

13 ليكن متوازي الأضلاع $ABCD$، ولتكن E النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و G النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. نرسم من E مستقيماً يوازي المستقيم (AD) فيقطع المستقيم (CD) في النّقطة F، ونرسم من G مستقيماً يوازي المستقيم (AB) فيقطع المستقيم (BC) في النّقطة H.



① أثبت أنّ $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ وأنّ $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

② أثبت أنّ المستقيمات (FG) و (EH) و (AC) متوازية.

الحل

① نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GF}&=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

وأن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EH}&=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}\\&=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

② نستنتج من المساواتين الشعاعيتين $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ أنّ المستقيمات (FG) و (EH) و (AC) متوازية.

14 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. بيّن في كلٍّ من الحالات التالية إذا كانت النّقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.

- $P(-5,5)$ ، $N(7,-3)$ ، $M(4,-1)$
- $P(-5,14)$ ، $N(-3,7)$ ، $M(-2,3)$.
- $P(0,1)$ ، $N(3,-1)$ ، $M\left(2,-\frac{1}{3}\right)$

الحل

- في الحالة الأولى $\overrightarrow{PN}=\begin{bmatrix}12\\-8\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{PM}=\begin{bmatrix}9\\-6\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً والنقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.
- في الحالة الثانية $\overrightarrow{PN}=\begin{bmatrix}2\\-7\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{PM}=\begin{bmatrix}3\\-11\end{bmatrix}$ فالشعاعان مستقلان خطياً $\left(\frac{3}{2}\neq\frac{11}{7}\right)$ والنقاط M و N و P لاتقع على استقامة واحدة.
- وأخيراً $\overrightarrow{PN}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{PM}=\begin{bmatrix}2\\-4/3\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\overrightarrow{PN}$ فالشعاعان مرتبطان خطياً والنقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.

15 لتكن النّقاط $A(3,7)$ و $B(8,2)$ و $C(-4,-2)$ والشّعاع $\vec{u}\left(2,5\right)$. نقرن بكلّ عدد حقيقيّ k النّقطة M المحقّقة للعلاقة : $\overrightarrow{CM}=k\vec{u}$.

① احسب إحداثيّتي النّقطة M بدلالة k واستنتج مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{AM}$.

② باستعمال الشرط التحليليّ لارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ احسب العدد الحقيقيّ k الّذي يجعل M نقطة من المستقيم (AB).

الحل

① إذا رمزنا (x,y) إلى إحداثيتي النقطة M استنتجنا من المساواة $\overrightarrow{CM}=k\vec{u}$ أنّ

$$\begin{bmatrix}x+4\\y+2\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k\\5k\end{bmatrix}$$

ومنه $M(2k-4,5k-2)$ ، ومركّبتا الشعاع $\overrightarrow{AM}$ تعطى بالصيغة $\overrightarrow{AM}=\begin{bmatrix}2k-4-3\\5k-2-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k-7\\5k-9\end{bmatrix}$.

② لمّا كان $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}8-3\\2-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ استنتجنا أنّ الشرط اللازم والكافي لارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ هو $2k-7+5k-9=0$ أو $k=\frac{16}{7}$. وهي قيمة k التي تجعل M نقطة من (AB).

16 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ونتأمّل النّقاط $A\left(-3,0\right)$ و $B\left(6,3\right)$ و $C\left(1,8\right)$.
نهدف إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC.

① القول إنّ K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، يكافئ القول إنّ K متساوية البعد عن رؤوس المثلّث، إذن $KA = KC$ و $KA = KB$. احسب المقادير KA^2 و KB^2 و KC^2 بدلالة x و y ثمّ اكتب العلاقات النّاتجة من الشّرط السّابق.

② استنتج أنّ $x + 2y = 7$ و $3x + y = 6$.

③ احسب إحداثيّتي النقطة K.

الحل

① اعتماداً على صيغة المسافة بين نقطتين لدينا

$$\begin{aligned} KA^2 &= (x+3)^2 + y^2 \\ KB^2 &= (x-6)^2 + (y-3)^2 \\ KC^2 &= (x-1)^2 + (y-8)^2 \end{aligned}$$

② بإصلاح المساواة $KA^2 = KC^2$ و $KA^2 = KB^2$ نجد $x + 2y - 7 = 0$، و $3x + y = 6$.

③ بالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 3x + y &= 6 \end{aligned}$$

نجد $x = 1$ و $y = 3$. فإحداثيّتا النقطة K هما $(1,3)$.

17 ليكن متوازي الأضلاع $OIJK$، ولتكن النّقاط A و B و G المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OK}, \quad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

اختر مَعْلَماً مناسباً وأثبت أنّ النّقاط O و G و J على استقامة واحدة.

الحل

لنختر المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$. فيكون

$$\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG} = \vec{i} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{i} + \frac{3}{5}(\vec{j} - \vec{i}) = \frac{2}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j} \end{aligned}$$

إذن $\overrightarrow{OJ} = 5\overrightarrow{OG}$، فالشعاعان $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OG}$ مرتبطان خطياً والنّقاط O و G و J واقعة على استقامة واحدة.

18 لتكن النّقاط $A(1,2)$ و $B(6,0)$ و $C(2,5)$. احسب إحداثيّتي النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

الحل

هذا تطبيق مباشر للعلاقتين : $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$ و $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$، فنجد $G(3, \frac{7}{3})$.

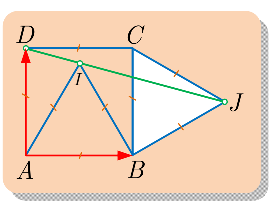
19 ليكن المربّع $ABCD$. AIB و BJC مثلّثان متساويا الأضلاع ومتوضّعان كما هو مبيّن في الشّكل المجاور. يهدف التّمرين إلى إثبات أنّ النقط D و I و J تقع على استقامة واحدة بأسلوبين مختلفين.

① الطريقة الأولى. استعمال الزّوايا.

❶ احسب قياس كلٍّ من الزّوايا $\angle DIA$ و $\angle AIB$ و $\angle BIJ$.

❷ بيّن أنّ $\angle DIJ = 180°$. ماذا تستنتج؟

② الطريقة الثانية. اختيار مَعْلَم مناسب.اختر مَعْلَماً مناسباً، ثُمّ احسب إحداثيّات النّقاط D و I و J ثمّ أثبت أنّها تقع على استقامة واحدة.



الحل

① الطريقة الأولى.

❶ المثلث AIB متساوي الأضلاع إذن $\angle IAB = 60°$، و منه

$$\angle DAI = \angle DAB - \angle IAB = 90° - 60° = 30°$$

ولكن المثلث AID متساوي الساقين رأسه A. فقياس كل من زاويتي القاعدة يساوي $75°$. أي إنَّ $\angle AID = 75°$.

وكذلك فإن المثلث IBJ مثلث متساوي قياس زاوية الرأس فيه $\angle IBJ = 30° + 60° = 90°$، فقياس كل من زاويتي قاعدته يساوي $45°$ أي إنَّ $\angle BIG = 45°$.

❷ لمّا كان $\angle AIB = 60°$ استنتجنا أنّ

$$\angle DIJ = \angle DIA + \angle AIB + \angle BIJ = 75° + 60° + 45° = 180°$$

فالنقاط الثلاث D و I و J تقع على استقامة واحدة.

② الطريقة الثانية.

لنختر المَعْلَم $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$. فيكون لدينا

$A(0,0)$ و $B(1,0)$ و $C(1,1)$ و $D(0,1)$ و $I\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $J\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

ومن ثمّ $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{2}\vec{i}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\vec{j}$ و $\overrightarrow{DJ}=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$

نطبق شرط الارتباط الخطي لشعاعين لإثبات ارتباط الشعاعين $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DI}$ فنجد

$$xy'-yx'=\left(\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)$$
$$=-\frac{1}{4}-\left(\frac{3}{4}-1\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

فالشعاعان $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DI}$ مرتبطان خطياً والنقاط D و I و J واقعة على استقامةٍ واحدةٍ.

20 ليكن ABC مثلثاً. ولتكن A' و B' و C' منتصفات الأضلاع $[BC]$، $[CA]$ و $[AB]$ بالتّرتيب، ولتكن النّقطة O مركز الدائرة المارة بروؤس المثلث ABC. ثمّ لنتأمّل النّقطة H التي تحقق

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

① ❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

❷ استنتج أنّ (AH) هو الارتفاع النازل من الرأس A في المثلّث ABC.

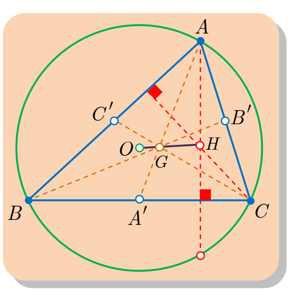
❸ أثبت بأسلوب مماثل أنّ (BH) هو الارتفاع النازل من الرأس B في المثلث ABC. ماذا تمثّل النّقطة H بالنّسبة إلى المثلّث ABC ؟

② لتكن النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

❶ أثبت أنّه أياً كانت النّقطة M من المستوي كان $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

❷ أثبت بالاستفادة من الفقرة السابقة أنّ $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$. ماذا تستنتج بشأن النّقاط O و G و H ؟

الحل



① ❶ لمّا كانت A' منتصف $[BC]$ استنتجنا أنّ

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}$$
$$=2\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{OA'}+\vec{0}=2\overrightarrow{OA'}$$

وعليه نستنتج من $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ أنّ

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$$

❷ لمّا كانت A' منتصف الوتر $[BC]$ استنتجنا أنّ (OA') هو محور $[BC]$، فهو عمودي على $[BC]$، ونستنتج من المساواة $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$ أنّ $(AH)\parallel(OA')$ إذن $(AH)\perp(BC)$، فالمستقيم (AH) هو الارتفاع النازل من A في المثلث ABC.

❸ نستنتج بأسلوب مماثل أنّ (HB) عمودي على (AC) فالمستقيم (BH) هو الارتفاع النازل من B في المثلث ABC. فالنقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

② ❶ انطلقاً من المساواة $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ نستنتج أنّ

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}=\vec{0}$$

وهذا يُكافئ $3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

❷ باختيار M منطبقة على O نستنتج أنّ

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$$

فالنقاط O و H و G تقع على استقامة واحدة. يسمّى هذا المستقيم، في حالة مثلث غير متساوي الأضلاع، مستقيم أويلر.

4

معادلة مستقيم وجمل المعادلات الخطيّة

تدرّب

① تأمّل المعادلة $(\mathcal{E})$ التالية : $-2x+3y=5$. عيّن، من بين الثنائيّات الآتية ، تلك التي تمثّل حلولاً للمعادلة $(\mathcal{E})$:

❶ $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$ ❷ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ ❸ $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$

❹ $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ ❺ $\left(\frac{1}{2},2\right)$ ❻ $\left(-2,1\right)$

الحل

❶ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{7}{4}=\frac{19}{4}\neq 5$.

❷ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(\frac{1}{3},2\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$ ، لأنّ $-2\times\frac{1}{3}+3\times 2=\frac{16}{3}\neq 5$.

❸ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$ ، لأنّ $-2\times -3+3\times\frac{1}{3}=7\neq 5$.

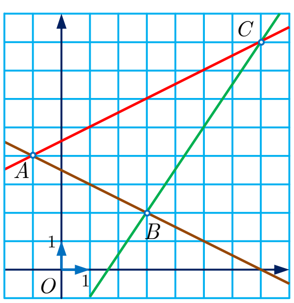
❹ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times 0+3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}\neq 5$.

❺ تمثّل الثّنائيّة $\left(\frac{1}{2},2\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times\frac{1}{2}+3\times 2=5$.

❻ لا تمثّل الثّنائيّة $\left(-2,1\right)$ حلاً للمعادلة $(\mathcal{E})$، لأنّ $-2\times -2+3\times 1=7\neq 5$.

② مثّلنا في مَعْلَم متجانس ، التوابع التآلفيّة ، (من الدّرجة الأولى) الآتية :

☝ $f: x\to\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ ✌ $g: x\to\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ 👌 $h: x\to-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$



❶ تنتمي النّقطة $A(-1,4)$ إلى مستقيمين، دلَّ عليهما ؟

❷ استنتج جملةَ معادلتين خطيّتين تكون إحداثيّات A حلاً لها.

❸ أعد حلّ الطّلبين السّابقين في حالة $B(3,2)$ ثُمّ $C(7,8)$.

الحل

❶ لنحسب قيمة كل من التوابع المعطاة عند $x=-1$ فنجد $f(-1)=4$ و $g(-1)=-4$ و $h(-1)=4$. نستنتج أنّ النقطة $A(-1,4)$ تحقق معادلة كل من الخطين البيانيين للتابعين f و h ولا تحقق معادلة الخط البياني للتابع g. فهي إذن تقع على المستقيمين اللذين معدلتاهما :

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \quad \text{و} \quad y=h(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

❷ نستنتج أنّ $A(-1,4)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2y = \quad x+9 \\ 2y = -x+7 \end{cases}$$

❸ ونجد بالمثل أنّ $f(3)=6$ و $g(3)=2$ و $h(3)=2$. نستنتج أنّ النّقطة $B(3,2)$ تحقق معادلة كل من الخطين البيانيين للتابعين g و h ولا تحقق معادلة الخط البياني للتابع f . فهي إذن تقع على المستقيمين اللذين معدلتاهما :

$$y=h(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2} \quad \text{و} \quad y=g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$$

نستنتج أيضاً أنّ $B(3,2)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2y = \ 3x-5 \\ 2y = -x+7 \end{cases}$$

وكذلك نجد أنّ $f(7)=8$ و $g(7)=8$ و $h(7)=0$. نستنتج أنّ النّقطة $C(7,8)$ تحقق معادلة كل من الخطين البيانيين للتابعين f و g ولا تحقق معادلة الخط البياني للتابع h . فهي إذن تقع على المستقيمين اللذين معدلتاهما :

$$y=g(x)=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad y=f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$$

نستنتج أيضاً أنّ $C(7,8)$ هي الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 2y = \ \ x+9 \\ 2y = 3x-5 \end{cases}$$

مثال

ليكن f التابع التآلفي المعرف بالصيغة $f(x)=2x-3$.

① ❶ احسب المقادير $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$. ثم ارسم بدقة النّقاط $A(0,f(0))$ و $B(1,f(1))$ و $C(2,f(2))$.

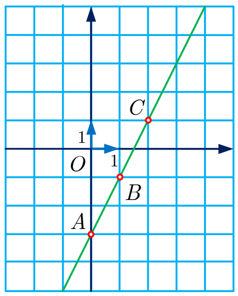
❷ أتقع النّقاط A و B و C على استقامة واحدة ؟

② ❶ ارسم المستقيم Δ المارّ بالنّقطتين A و B ، واختر عليه نقطةً M واحسب من الشكل إحداثيتيها (u,v) مراعياً الدقة.

❷ أتتحقّق المساواة $v=f(u)=2u-3$ ؟

③ ماذا تستنتج من ① و ② ؟

الحل



① ❶ نجد مباشرة أنّ $f(0) = -3$ و $f(1) = -1$ و $f(2) = 1$.

❷ ونلاحظ من الشكل أنّ النقاط $A(0,-3)$ و $B(1,-1)$ و $C(2,1)$ تقع على استقامة واحدة.

② نلاحظ من الشكل أنّ المستقيم يمر بالنقطة $M(3,3)$، ونلاحظ أيضاً أنّ إحداثيّتيها (u,v) تحققان $v = f(u) = 2u - 3$.

③ نستنتج أنّ المستقيم (AB) هو التمثيل البياني للتابع f.

فكّر

لتكن d_1 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $2y + 3x = -1$، ولتكن d_2 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. قارن بين d_1 و d_2. ماذا تستنتج بشأن معادلة مستقيم بوجه عام ؟ هل هي وحيدة ؟

الحل

نلاحظ أن المعادلتين $2y + 3x = -1$ و $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ متكافئتان، فلهما مجموعة الحلول نفسها. أي إنّ $d_1 = d_2$. ونستنتج أنّه بوجه عام لا تكون معادلة المستقيم وحيدة.

تدرّب - صفحة 80

① نزوّد المستوي بمعلَم. بيّن الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة فيما يأتي:

- $y = \frac{3}{2}x - 1$ هي معادلة d. شعاعٌ موجّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$ ☑. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}-1\\1.5\end{bmatrix}$.

- $y = -\frac{1}{2}x + 4$ هي معادلة d. شعاعٌ موجّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}-0.5\\4\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}$ ☑.

- $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ هو شعاع موجّه للمستقيم الذي معادلته:

❶ $y = 3x + 2$. ❷ $y = -\frac{3}{2}x + 1$. ❸ $y = \frac{3}{2}x$ ☑.

- معادلة المستقيم d المارّ بالنّقطة $A(2,1)$ موازياً المستقيم Δ الذي معادلته $y = 3x - 1$ هي :

❶ $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. ❷ $y = 3x - 5$ ☑. ❷ $y = 3x$.

② ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}$. عيِّن العدد t كي تقع النّقطة $M(t,3)$ على d .

الحل

تقع النّقطة $M(t,3)$ على المستقيم d إذا وفقط إذا حققت إحداثيتا M معادلة المستقيم d، أي إذا تحققت المساواة $3 = \frac{3}{2}(t) - \frac{2}{5}$ أي $t = \frac{34}{15}$.

③ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً في الحالتين الآتيتين:

❶ $A(-4,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ ❷ $A(5,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

الحل

نعلم بوجه عام أن معادلة المستقيم المار بالنقطة (a,b) وشعاع توجيهه $\vec{u}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ هي

$$\alpha(y-b) - \beta(x-a) = 0$$

❶ في هذه الحالة المعادلة المطلوبة هي $5(y-3) + 3(x+4) = 0$ أو $5y + 3x - 3 = 0$.

❷ هنا المعادلة المطلوبة $0(y-3) - 2(x-5) = 0$ أو $x = 5$.

④ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطتين A و B في الحالتين الآتيتين :

❶ $A(2,1)$ و $B(3,-1)$ ❷ $A(-5,0)$ و $B(2,-3)$

الحل

❶ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية : $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$ أي $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-1-1}$ أو $y = -2x + 3$.

❷ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية : $\frac{x+5}{2+5} = \frac{y-0}{-3-0}$ أي $7y + 3x + 15 = 0$.

⑤ نتأمّل المثلّث ABC حيث $A(1,3)$ و $B(-3,5)$ و $C(-1,-1)$.

❶ عيّن إحداثيتي النّقطة A' منتصف $[BC]$، وإحداثيتي النّقطة B' منتصف $[AC]$.

❷ اكتب معادلة المتوسط d_1 المتعلق بالرأس A .

❸ اكتب معادلة المستقيم Δ المار بالنّقطتين A و B .

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ' المار بالنّقطتين A' و B' . ماذا تقول عن المستقيمين Δ و Δ' .

الحل

❶ لما كانت إحداثيّات النّقطة A' منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ تُعْطَى بالعلاقتين :

$$x_{A'} = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{و} \quad y_{A'} = \frac{y_B + y_C}{2}$$

كانت

$$x_{A'} = \frac{-3-1}{2} = -2 \quad \text{و} \quad y_{A'} = \frac{5-1}{2} = 2$$

ومنه $A'\left(-2,2\right)$ ، ونجد بالمثل أنّ

$$x_{B'} = \frac{1-1}{2} = 0 \quad \text{و} \quad y_{B'} = \frac{3-1}{2} = 1$$

ومنه $B'\left(0,1\right)$.

❷ المتوسط d_1 هو المستقيم المار بالنقطتين $A(1,3)$ و $A'(-2,2)$. وهو يقبل المعادلة

$$\frac{x-x_A}{x_{A'}-x_A} = \frac{y-y_A}{y_{A'}-y_A} \quad \text{أي} \quad \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{2-3}$$

ومنه $3y - x - 8 = 0$.

❸ Δ هو المستقيم المار بالنقطتين $A(1,3)$ و $B(-3,5)$. وهو يقبل المعادلة

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \quad \text{أي} \quad \frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-3}{5-3}$$

ومنه $2y + x - 7 = 0$.

❹ Δ' هو المستقيم المار بالنّقطتين $A'(-2,2)$ و $B'(0,1)$ وهو يقبل المعادلة

$$\frac{x-x_{B'}}{x_{A'}-x_{B'}} = \frac{y-y_{B'}}{y_{A'}-y_{B'}} \quad \text{أي} \quad \frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-1}{2-1}:$$

ومنه $2y + x - 2 = 0$.

نلاحظ أن للمستقيمين Δ و Δ' الميل نفسه $\left(-\frac{1}{2}\right)$، فهما متوزيان. وهذه المسألة توضح خاصة هندسيَّة معروفة : المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالثة.

تمرينات ومسائل

1 نزوّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ونتأمّل النّقاط $A(5,-2)$ و $B(11,0)$ و $C(-1,6)$، أوجد معادلة لكلٍّ من متوسطات المثلّث ABC.

الحل

☝ تعطى إحداثيّتا النّقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ تعطى بالعلاقتين :

$$x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{و} \quad y_I = \frac{y_B + y_C}{2}$$

ومنه $I\left(5,3\right)$.

المتوسط المتعلق بالرأس A هو المستقيم المار بالنّقطتين $A(5,-2)$ و $I(5,3)$. للنّقطتين A و I الفاصلة 5 نفسها. إذن $[AI]$ يوازي محور التراتيب ويقبل $x = 5$ معادلةً.

✌ نحسب بالمثل إحداثيّتي النّقطة J منتصف القطعة $[AC]$، فنجد $J(2,2)$. المتوسط المتعلق بالرأس B هو المستقيم المار بالنّقطتين $B(11,0)$ و $J(2,2)$. فهو يقبل المعادلة :

$$\frac{x - x_J}{x_B - x_J} = \frac{y - y_J}{y_B - y_J} \quad \text{أي} \quad \frac{x-2}{11-2} = \frac{y-2}{0-2}$$

ومنه $9y + 2x - 22 = 0$.

👌 وكذلك نحسب إحداثيّتي النّقطة K منتصف القطعة $[AB]$، فنجد $K(8,-1)$. المتوسط المتعلق بالرأس C هو المستقيم المار بالنّقطتين $C(-1,6)$ و $K(8,-1)$. فهو يقبل المعادلة :

$$\frac{x - x_K}{x_C - x_K} = \frac{y - y_K}{y_C - y_K} \quad \text{أي} \quad \frac{x-8}{-1-8} = \frac{y+1}{6+1}$$

ومنه $9y + 7x - 47 = 0$.

2 نزوّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ونتأمّل النّقاط $A\left(1,5\right)$ و $B\left(-1,-1\right)$ و $C\left(5,2\right)$، ونعرّف النقاط I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$، و K منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، أوجد معادلةً لكلٍّ من المستقيمات (IJ) و (IK) و (KJ).

الحل

☝ نجد مباشرة أنّ $I(0,2)$ و $J(3,\frac{7}{2})$ و $K(2,\frac{1}{2})$.

✌ وأنّ (IJ) يقبل معادلة $6y + 11x - 12 = 0$.

و (IK) يقبل معادلة $4y + 3x - 8 = 0$.

و (JK) يقبل معادلة $2y - 6x + 11 = 0$.

3 حلّ جمل المعادلات الآتية ، واشرح النتيجة هندسيّاً.

① $\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 5 \\ 2x & - & 3y & = & 2 \end{array}\right\}$ ② $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 4 \\ 5x & - & 5y & = & -1 \end{array}\right\}$

③ $\left.\begin{array}{rcrcr} 6x & - & y & = & -7 \\ x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right\}$ ④ $\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ 6x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right\}$

⑤ $\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{3}{2}x & + & \frac{9}{4}y & = & 0 \\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{17}{36} \end{array}\right\}$ ⑥ $\left.\begin{array}{rcrcr} \frac{5}{3}x & - & \frac{1}{4}y & = & \frac{35}{8} \\ \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{20}y & = & \frac{7}{8} \end{array}\right\}$

⑦ $\left.\begin{array}{rcrcr} 2\sqrt{2}\,x & - & y & = & 4-\sqrt{3} \\ 2y & - & x\sqrt{6} & = & 0 \end{array}\right\}$ ⑧ $\left.\begin{array}{rcr} \left(1-\sqrt{2}\right)x-y & = & 1 \\ x+\left(1+\sqrt{2}\right)y & = & -1-\sqrt{2} \end{array}\right\}$

الحل

① $\left.\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 5 \\ 2x & - & 3y & = & 2 \end{array}\right\}$

نجمع المعادلتين طرفاً مع طرف فنجد $7x = 7$ ومنه $x = 1$. نعوّض قيمة x في المعادلة الأولى لنحسب y فنجد $y = 0$. فلهذه الجملة حلٌ وحيد هو $(1,0)$.

المستقيمان : $d : 5x + 3y = 5$ و $d' : 2x - 3y = 2$ متقاطعان في النّقطة $(1,0)$.

② $\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 4 \\ 5x & - & 5y & = & -1 \end{array}\right\}$

بطرح خمسة أمثال المعادلة الأولى من الثانية نصل إلى التناقض $-21 = 0$، هذا التناقض يبرهن أنه لا يوجد أي حل لهذه الجملة.

المستقيمان : $d : x - y = 5$ و $d' : 5x - 5y = -1$ متوازيان وغير منطبقين.

③ $\left.\begin{array}{rcrcr} 6x & - & y & = & -7 \\ x & + & 2y & = & 1 \end{array}\right\}$

من المعادلة الأولى نحسب $y = 6x + 7$، ثُمّ نعوّض في الثانية فنجد $x + 2(6x + 7) = 1$، ومنه $x = -1$، وبالعودة إلى قيمة y نجد $y = 1$. فلهذه الجملة حلٌ وحيد هو $(-1,1)$.

المستقيمان : $d : 6x - y = -7$ و $d' : x + 2y = 1$ متقاطعان في النّقطة $(-1,1)$.

④ $\left.\begin{array}{rcrcr} 3x & + & y & = & 5 \\ 6x & + & 2y & = & 10 \end{array}\right\}$

نلاحظ أن المعادلة الثانية تنتج من الأولى بضرب طرفيها بالعدد 2، فالمعادلتان متكافئتان، وهناك عدد لا نهائي من الحلول لهذه الجملة : $\mathcal{S} = \{(x,5-3x) : x \in \mathbb{R}\}$.

المستقيمان : $d : 3x + y = 5$ و $d' : 6x + 2y = 10$ منطبقان.

$$\left.\begin{array}{rcrcl}\frac{3}{2}x & + & \frac{9}{4}y & = & 0\\ \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{2}y & = & \frac{17}{36}\end{array}\right\}$$ ⑤

من المعادلة الأولى نستنتج أن $x=-\frac{3}{2}y$، وبالتعويض في الثانية نصل إلى التناقض $\frac{17}{36}=0$، إذن ليس هناك أي حل لهذه الجملة.

المستقيمان : $d:\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}y=0$ و $d':\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=\frac{17}{36}$ متوازيان وغير منطبقين.

$$\left.\begin{array}{rcrcl}\frac{5}{3}x & - & \frac{1}{4}y & = & \frac{35}{8}\\ \frac{1}{3}x & - & \frac{1}{20}y & = & \frac{7}{8}\end{array}\right\}$$ ⑥

نلاحظ أن المعادلة الثانية تنتج من الأولى بضرب طرفيها بالعدد $\frac{1}{5}$، فالمعادلتان متكافئتان، وهناك عدد لا نهائي من الحلول لهذه الجملة.

المستقيمان : $d:\frac{5}{3}x-\frac{1}{4}y=\frac{35}{8}$ و $d':\frac{1}{3}x-\frac{1}{20}y=\frac{7}{8}$ منطبقان.

$$\left.\begin{array}{rcrcl}2\sqrt{2}\,x & - & y & = & 4-\sqrt{3}\\ 2y & - & x\sqrt{6} & = & 0\end{array}\right\}$$ ⑦

من المعادلة الثانية نجد $y=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$، وبالتعويض في الأولى نجد: $\left(2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)x=4-\sqrt{3}$، أو بصيغة مُكافئة $\left(4-\sqrt{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}x=4-\sqrt{3}$، أي $x=\sqrt{2}$، وبالعودة إلى y نجد $y=\sqrt{3}$. فللجملة حلّ وحيد هو $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

والمستقيمان $d:2\sqrt{2}x-y=4-\sqrt{3}$ و $d':2y-\sqrt{6}x=0$ متقاطعان في النّقطة $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$.

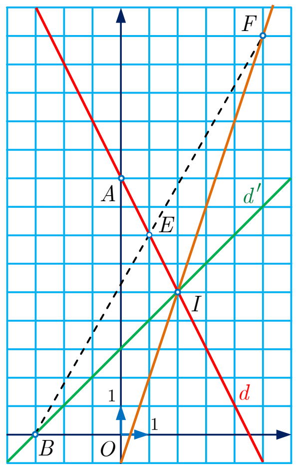
$$\left.\begin{array}{rcl}\left(1-\sqrt{2}\right)x-y & = & 1\\ x+\left(1+\sqrt{2}\right)y & = & -1-\sqrt{2}\end{array}\right\}$$ ⑧

بملاحظة أنّ $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=-1$ نستنتج أنّ ضرب المعادلة الثانية بالمقدار $1-\sqrt{2}$ يعطي المعادلة الأولى ذاتها. فللجملة عددٌ لا نهائي من الحلول. ومجموعة الحلول هي نقاط المستقيم الذي معادلته $\left(1-\sqrt{2}\right)x-y=1$.

4 إيجاد معادلة مستقيم

نزوِّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=-2x+9$، وليكن d' المستقيم الذي معادلته $y=x+3$. يتقاطع المستقيمان d و d' في I. ويقطع d محور التراتيب في A، كما يقطع d' محور الفواصل في B. لتكن E منتصف $[AI]$، ولتكن F نظيرة النّقطة B بالنسبة إلى E. أوجد معادلة للمستقيم (IF).

الحل



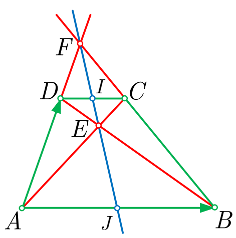
إحداثيّتا نقطة التقاطع I هما الحل المشترك لجملة معادلتي المستقيمين d و d' أي

$$\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = \quad x + 3 \end{cases}$$

فنجد $I(2,5)$ وهذا ما يتفق مع الشكل.

إنّ F هي نظيرة B بالنسبة إلى منتصف $[IA]$، فهي إذن صورة I وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BA}$ أي $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IF}$. المستقيم (IF) هو المستقيم المار بالنقطة I ويقبل الشعاع $\overrightarrow{BA}$ شعاعَ توجيه. ولكن $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$، فالمستقيم (IF) مستقيم يمر بالنقطة I وميله m يساوي 3، فهو يقبل معادلة : $y - y_I = m(x - x_I)$ أو $y - 5 = 3(x-2)$ التي تأخذ بعد الاختصار الصيغة $y = 3x - 1$.

5 معادلة مستقيم والوقوع على استقامة واحدة



ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. ولتكن E نقطة تقاطع قطري شبه المنحرف، و F نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC).

أثبت، باستعمال مَعْلَم من اختيارك ، أنّ المستقيم (EF) يمر بالنّقطة I منتصف $[DC]$ ، وبالنّقطة J منتصف $[AB]$.

الحل

نختار معلماً $(A;\vec{i},\vec{j})$ للمستوي فيه $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$، فيكون $A(0,0)$ و $B(1,0)$ و $D(0,1)$. ولما كان

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{j} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \vec{j} + \tfrac{1}{3}\vec{i}$$

كان $C(\frac{1}{3},1)$. نكتب معادلةً للمستقيم (AC) ومعادلةً للمستقيم (BD) في المعلم $(A,\vec{i},\vec{j})$.

- المستقيم (AC) يمرُّ بالمبدأ $A(0,0)$ وبالنقطة $C(\frac{1}{3},1)$، فهو يقبل ❶ $y = 3x$ معادلةً.
- المستقيم (BD) يمر بالنّقطتين $B(1,0)$ و $D(0,1)$، فهو يقبل ❷ $y + x = 1$ معادلةً.

بحل جملة المعادلتين ❶ و ❷ نجد : $x = \frac{1}{4}$، $y = \frac{3}{4}$، إذن إحداثيتا النّقطة E هما $E(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$.

- المستقيم (BC) يمر بالنقطتين $B(1,0)$ و $C(\frac{1}{3},1)$. ولأنّه يمر بالنقطة B فهو يقبل معادلة من الشكل $y = m(x-1)$، حيث تتعين m بشرط مروره بالنقطة $C(\frac{1}{3},1)$ فنجد $m = -\frac{3}{2}$.

إذن $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$ هي معادلة للمستقيم (BC). وهو محور التراتيب عند النّقطة $F(0,\frac{3}{2})$.

- المستقيم (EF) يمر بالنقطتين $E(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ و $F(0,\frac{3}{2})$. ولأنّه يمر بالنقطة F فهو يقبل معادلة من الصيغة $y=mx+\frac{3}{2}$، حيث تتعين m بشرط مروره بالنقطة $E(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$ فنجد $m=-3$.
إذن $y=-3x+\frac{3}{2}$ هي معادلة للمستقيم (EF).
- منتصف القطعة المستقيمة $[DC]$ هو النقطة $I(\frac{1}{6},1)$، وإحداثيّتاها تحققان معادلة المستقيم (EF) وضوحاً، إذن تقع I على (EF).
- منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هو النقطة $J(\frac{1}{2},0)$، وإحداثيّتاها تحققان معادلة المستقيم (EF) وضوحاً، إذن تنتمي النقطة J أيضاً إلى المستقيم (EF). وهي النتيجة المطلوب إثبات صحتها.

6 معادلة مستقيم والتناظر بالنسبة إلى نقطة

نزوّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}x+6$، ولتكن النّقطة $A(2,2)$. أعطِ معادلةً للمستقيم d' نظير المستقيم d بالنّسبة إلى النّقطة A.

الحل

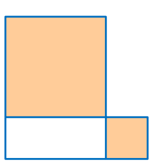
تكون $M'(x',y')$ نظيرة $M(x,y)$ بالنسبة إلى $A(2,2)$، إذا وفقط إذا كانت A منتصف القطعة $[MM']$، وهذا يُكافئ قولنا $x'=4-x$ و $y'=4-y$.

الآن، تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d'، إذا وفقط إذا انتمت نظيرتها $M'(4-x,4-y)$ إلى المستقيم d، أي إذا حققت إحداثيّتا هذه الأخيرة معادلة المستقيم d، وهذا الشرط يُكافئ

$$4-y=\frac{3}{2}(4-x)+6$$

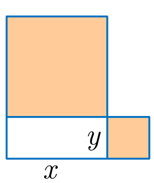
أو $y=\frac{3}{2}x-8$. إذن المعادلة $y=\frac{3}{2}x-8$ هي معادلةٌ للمستقيم d'.

7 مساحات السطوح ، وحلّ المعادلات



مساحة المستطيل في الشكل المجاور 60 سنتيمتراً مربّعاً، ومجموع مساحتي المربّعين 169 سنتيمتراً مربّعاً. أوجد بُعدي المستطيل.

الحل



نفترض أحد بُعدَي المستطيل x وبعدَه الآخر y. فتكون مساحة المستطيل :

$$x\cdot y=60 \quad ❶$$

ومجموع مساحتي المربعين

$$x^2+y^2=169 \quad ❷$$

نضرب طرفي المعادلة ❷ بالعدد (غير المعدوم) x^2، ونعوّض $x^2y^2=(xy)^2$ بقيمتها 3600 من ❶ فنجد

$$x^4-169x^2+3600=0 \quad ❸$$

ولكن

$$x^4 - 169x^2 + 3600 = (x^2 - 25)(x^2 - 144) = (x-5)(x+5)(x-12)(x+12)$$

فإذا تذكّرنا أنّ أبعاد المستطيل أعداد موجبة استنتجنا أنّ x هي 5، أو 12. وعندئذ نستنتج قيمة y من المعادلة ❶. وهكذا نرى أنّ بُعدا المستطيل المنشود هما 12 و 5.

8 المستقيمات المتلاقية

نزوّد المستوي بمَعْلَم $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. ونتأمّل النّقاط $A(3,0)$ و $B(3,4)$ و $C(0,4)$، ثُمّ نعرّف I منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمات (AC) و (IB) و (OJ) تتلاقى في نقطة واحدة.

الحل

طريقة أولى:

إحداثيّا I منتصف $[OA]$ هما $I\left(\frac{3}{2},0\right)$، وإحداثيّتا J منتصف $[AB]$ هما $J(3,2)$.

- المستقيم (OJ) يمر بالمبدأ O وبالنقطة $J(3,2)$ فيقبل معادلةً $3y - 2x = 0$.
- يقبل المستقيم (IB) المعادلة الآتية :

$$\frac{y - y_I}{y_B - y_I} = \frac{x - x_I}{x_B - x_I} \quad \text{أو} \quad \frac{y-0}{4-0} = \frac{x - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}}$$

أي $3y - 8x + 12 = 0$، وهي معادلةٌ للمستقيم (IB).

بحلّ جملة معادلتي المستقيمين (OJ) و (IB) نحصل على إحداثيّتي نقطة تقاطعهما : $M\left(2,\frac{4}{3}\right)$.

- يقبل المستقيم (AC) المعادلة الآتية : $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ أو $3y + 4x = 12$. تحقّق إحداثيّتا النقطة $M\left(2,\frac{4}{3}\right)$ معادلة المستقيم (AC) فهي تقع أيضاً على (AC) والمستقيمات (OJ) و (IB) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

طريقة ثانية:

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ فالشكل $OABC$ متوازي الأضلاع، ولأنّ قطريه متناصفان استنتجنا أنّ (AC) متوسط في المثلث OAB. واستناداً إلى التعريف (OJ) و (BI) هما أيضاً متوسطان في المثلث نفسه، ولكن نعلم أن المتوسطات في مثلث تتلاقى في نقطة واحدة. فالمستقيمات (OJ) و (IB) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

9 الفرق بين عددين x و y يساوي 14، أمّا الفرق بين مربّعيهما فيساوي 616. احسب هذين العددين.

الحل

لنوضّح في البداية أنّ مقولة الفرق بين عددين تعني الكبير مطروحاً منه الصغير، وهي من ثَم المسافة التي تفصل بينهما على محور الأعداد.

يمكننا دون الإقلال من عمومية المسألة أن نفترض إذن أنّ x هو أكبر العددين وأنّ y هو أصغرهما، وهنا علينا أن نناقش حالتين :

- حالة $x^2 > y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث

$$x^2 - y^2 = 616 \quad \text{و} \quad x - y = 14$$

ولكن

$$616 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 14(x+y)$$

إذن $x + y = 44$. بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x - y = 14$ و $x + y = 44$ نستنتج أنّ $x = 29$ ومن ثَمّ نجد $y = 15$، فالعددان هما 29 و 15 في هذه الحالة.

- حالة $x^2 < y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث $x - y = 14$ و $y^2 - x^2 = 616$

وبأسلوب مماثل للحالة السابقة نستنتج أنّ $x + y = -44$.

ومجدداً بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x - y = 14$ و $x + y = -44$ نستنتج أنّ $x = -15$ ومن ثَمّ نجد $y = -29$، فالعددان هما -29 و -15 في هذه الحالة.

10 x و y عددان. الفرق بين مقلوبيهما 6، والفرق بين مربّعي مقلوبيهما يساوي 12. احسب هذين العددين.

الحل

كما في المسألة السابقة، لنرمز إلى **مقلوبَي** العددين المطلوبين بالرمزين x و y ولنفترض أن $x > y$.
هنا علينا أن نناقش حالتين :

- حالة $x^2 > y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث

$$x^2 - y^2 = 12 \quad \text{و} \quad x - y = 6$$

ولكن
$$12 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 6(x+y)$$

إذن $x + y = 2$. بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x - y = 6$ و $x + y = 2$ نستنتج أنّ $x = 4$ ومن ثَمّ نجد $y = -2$، فالعددان هما $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{2}$ في هذه الحالة.

- حالة $x^2 < y^2$. فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث $x - y = 6$ و $y^2 - x^2 = 12$

وبأسلوب مماثل للحالة السابقة نستنتج أنّ $x + y = -2$.

ومجدداً بأخذ نصف مجموع المعادلتين $x-y=6$ و $x+y=-2$ نستنتج أنّ $x=2$ ومن ثَمّ نجد $y=-4$، فالعددان هما $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ في هذه الحالة.

11 الفرق بين عددين x و y يساوي 6، أمّا جداء ضربهما فيساوي 216. احسب هذين العددين.

الحل

يمكننا دون الإقلال من عمومية المسألة أن نفترض أنّ x هو أكبر العددين وأنّ y هو أصغرهما، فتصبح المسألة تعيين x و y بحيث $x-y=6$ و $xy=216$

أو إذا رمزنا $z=-y$ نجد $x+z=6$ و $xz=-216$

إذن x و z هما جذرا المعادلة $T^2-6T-216=0$ أو $(T-3)^2=225$. إذن x و z هما العددان 18 و -12. فإذا كان $x=18$ كان $y=12$ وهو الحل الأوّل، وإذا كان $x=-12$ كان $y=-18$ وهو الحل الثاني.

12 احسب بُعدَي حقل مستطيل مساحته 120 متراً مربّعاً، ومحيطه 44 متراً.

الحل

نفترض أنّ طول بُعدَي الحقل x و y فيكون $x\cdot y=120$ و $2x+2y=44$ أو $x+y=22$. إذن x و y عددان مجموعهما 22 وجداء ضربهما 120 فهما جذرا المعادلة $T^2-22T+120=0$.

وبالحل نجد أن x و y هما 10 و 12.

13 احسب أطوال أضلاع مثلّث متساوي السّاقين ABC رأسه A، ومحيطه 36 سنتيمتراً، وطول ارتفاعه النازل من A يساوي 12 سنتيمتراً.

الحل

لنرمز بالرمز x إلى **نصف** طول وتر المثلث. فيكون $\sqrt{x^2+12^2}$ طول الضلع القائمة في المثلث. أمّا محيطه فيساوي إذن $2x+2\sqrt{x^2+144}=36$

أو $\sqrt{x^2+144}=18-x$. بتربيع الطرفين نرى أنّ أي حلّ x لهذه المعادلة يجب أن يحقق

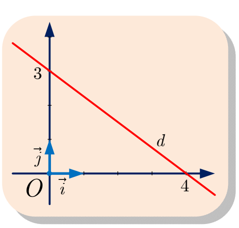
$$x^2+144=324-36x+x^2$$

أو بعد الإصلاح $x=5$. وبالعكس نتحقّق مباشرة أنّ $x=5$ هو حلٌّ للمعادلة

$$\sqrt{x^2+144}=18-x$$

فهو إذن حلها الوحيد. وأطوال أضلاع المثلث هي 13,13,10.

14 نزوِّد المستوي بمَعْلَم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تأمّل الشّكل المجاور ثُمّ أجب عمّا يأتي :



① أوجد معادلة للمستقيم d.

② أوجد معادلة للمستقيم d_1 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور الفواصل.

③ أوجد معادلة للمستقيم d_2 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور التراتيب.

④ أوجد معادلة للمستقيم d_3 نظير المستقيم d بالنسبة إلى المبدأ O.

الحل

① المستقيم d يمر بالنّقطتين $B(0,3)$ و $A(4,0)$ فمعادلته $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$، أو $3x+4y=12$.

② إنّ نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى محور الفواصل هي $M'(x,-y)$، وعليه تقع $M(x,y)$ على d_1 إذا وفقط إذا وقعت نظيرتها $M'(x,-y)$ على d أي إذا كان $3x+4(-y)=12$، فالمستقيم d_1 يقبل $3x-4y=12$ معادلة.

③ إنّ نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى محور التراتيب هي $M'(-x,y)$، وعليه تقع $M(x,y)$ على d_2 إذا وفقط إذا وقعت نظيرتها $M'(-x,y)$ على d أي إذا كان $3(-x)+4y=12$، فالمستقيم d_2 يقبل $-3x+4y=12$ معادلة.

④ إنّ نظيرة النقطة $M(x,y)$ بالنسبة إلى المبدأ O هي $M'(-x,-y)$، وعليه تقع $M(x,y)$ على d_3 إذا وفقط إذا وقعت نظيرتها $M'(-x,-y)$ على d أي إذا كان $3(-x)+4(-y)=12$، فالمستقيم d_3 يقبل $3x+4y=-12$ معادلة.

15 سأل رجلٌ صديقَه عن عمره فأجابه : «عمري بقدر ضعفي عمرك الذي كنتَ فيه عندما كان عمري بقدر عمرك، وعندما يصبح عمرك بقدر عمري يصبح مجموع عمرينا 63 سنة». فكم عمر كلٍّ من الصّديقين؟

الحل

تدل المقولة الثانية على أنَّ عُمر الصديق أكبر من عُمر الرجل. لنرمز إذن إلى عمر الصديق بالرمز x وبالرمز y إلى عمر الرجل. فيزيد عمر الصديق عن عمر الرجل بمقدار $x-y$.

	قبل $x-y$ سنة	الآن	بعد $x-y$ سنة
عمر الصديق	y	x	$2x-y$
عمر الرجل	$2y-x$	y	x

"عمري بقدر ضعفي عمرك الذي كنتَ فيه عندما كان عمري بقدر عمرك" أي $x=2(2y-x)$ أو

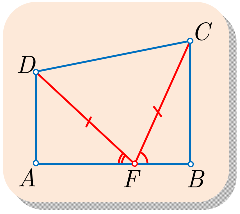
$$3x=4y \quad ❶$$

"عندما يصبح عمرك بقدر عمري يصبح مجموع عمرينا 63 سنة" أي $(2x-y)+x=63$ أو

$$3x-y=63 \quad ❷$$

بحل جملة المعادلتين ❶ في ❷ نجد $y=21$ و $x=28$.

16 ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه الزاويتان $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ قائمتان. نفترض أنّ $AD = 3$ و $BC = 4$ و $AB = 5$ وجميع الأطوال مُقاسة بالمتر. نختار نقطة F من القطعة المستقيمة $[AB]$ تُحقّق $DF = FC$. احسب AF.



الحل

نختار معلماً متجانساً $(A;\vec{i},\vec{j})$ بحيث يكون $B(5,0)$ و $D(0,3)$، ويكون من ثَمّ $C(5,4)$، $F(x,0)$، والمطلوب عيين x. أمّا الشرط $DF^2 = FC^2$ فيُطتب بالشكل $x^2 + 9 = (5-x)^2 + 4^2$ وبالتربيع والإصلاح نجد $x = \frac{16}{5}$.

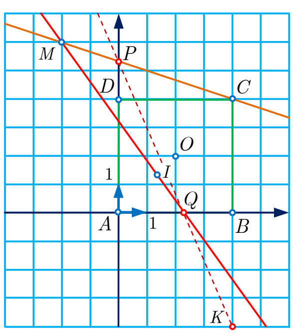
17 ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. ولتكن M نظيرة النّقطة O بالنّسبة إلى D، و K نظيرة C بالنّسبة إلى B. وأخيراً نرمز بالرّمز I إلى مركز ثقل المثلّث ADB.

① ليكن $(A;\vec{i},\vec{j})$ المَعْلَم المتجانس الذي فيه $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$. أوجد إحداثيّات النقاط A و B و C و D و O و M و K و I.

② يقطع المستقيمُ (MI) المستقيمَ (AB) في Q، ويقطع المستقيمُ (MC) المستقيمَ (AD) في P.

نريد إثبات وقوع النقاط K و Q و P على استقامة واحدة.

- اكتب معادلة للمستقيم (MI) واستنتج إحداثيّتي النّقطة Q.
- اكتب معادلة للمستقيم (MC) واستنتج إحداثيّتي النّقطة P.
- أثبت أنّ النقاط K و Q و P تقع على استقامة واحدة.



الحل

① الرسم الدقيق يساعد، ونجد $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(4,4)$ و $D(0,4)$ و $M(-2,6)$ و $K(4,-4)$ وأخيراً $I(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

② يقبل المستقيم (MI) المار بالنقطتين $M(-2,6)$ و $I(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$. المعادلة الآتية : $(x_I - x_M)(y - y_M) - (y_I - y_M)(x - x_M) = 0$

التي تُكافئ $5y + 7x = 16$. يقطع هذا المستقيم محور الفواصل في النقطة $Q(\frac{16}{7},0)$.

يقبل المستقيم (MC) المار بالنقطتين $M(-2,6)$ و $C(4,4)$. المعادلة

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x+2)$$

التي تُكافئ $3y + x = 16$. يقطع هذا المستقيم محور التراتيب في النقطة $P(0,\frac{16}{3})$.

يقبل المستقيم (PQ) المعادلة $\frac{x}{16\,/\,7} + \frac{y}{16\,/\,3} = 1$ أو $7x + 3y = 16$. ونتحقّق مباشرة أنّ النقطة $K(4,-4)$ تُحقّق معادلة هذا المستقيم. فالنقاط K و Q و P تقع على استقامة واحد.