منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

أسس التحليل التابعي 1

الدكتور
شحادة الأسدي
أستاذ في قسم الرياضيات

السنة الرابعة
شعبة التحليل رياضي

مديرية الكتب و المطبوعات الجامعية
١٤٢٧ هـ - ٢٠٠٦ م

منشورات جامعة حلب
كلية العلوم

أُسُسُ التَّحليلِ التَّابعيِّ (١)

الدكتور
شحادة الأسدي
أستاذ في قسم الرياضيات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

٢٠٠٦ م – ١٤٢٧ هـ

الفهرس

الفصل الأول

الفضاءات المترية

الفصل الثاني
الفضاءات الخطية المنظمة

الفصل الثالث
المؤثرات الخطية

الفصل الرابع

الداليات الخطية

الفصل الخامس

المجموعات المتراصة في الفضاءات المترية والخطية المنظمة

مفردات مقرر التحليل التابعي (١)

الفضاءات المترية

١. التعريف – أمثلة متنوعة من الفضاءات المترية – التقارب في الفضاءات المترية .

٢. الفضاءات المترية التامة – الإيزومترية وإتمام فضاء متري – التراص في فضاء متري .

٣. مبدأ المؤثرات الضاغطة وتطبيقاته .

الفضاءات الخطية المنظمة

١. الفضاءات الخطية

٢. الفضاءات الخطية المنظمة

٣. فضاء هيلبرت المجرد

المؤثرات الخطية

١. المؤثرات الخطية

٢. المؤثرات الخطية في الفضاءات الخطية المنظمة .

٣. فضاء المؤثرات الخطية المحدودة

٤. مقلوب المؤثرات .

الداليات الخطية

١. مبرهنة هان – باناخ ونتائجها .

٢. الشكل العام للداليات الخطية في بعض الفضاءات التابعية

٣. الفضاءات المرافقة والمؤثرات المرافقة .

٤. التقارب الضعيف لمتتالية داليات ولمتتالية عناصر .

المجموعات المتراصة في الفضاءات الخطية المنظمة

١. المفاهيم العامة في التراص .

٢. معايير التراص في بعض الفضاءات التابعية .

٣. شمولية الفضاء $C[0,1]$

المقدمة

لقد قاد تعميم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي إلى نظرية موحدة ، وأكثر شمولية تعرف باسم التحليل التابعي .

دون التعرض إلى تاريخ ظهور التحليل التابعي وتطوره ، علينا أن نشير إلى أن جميع المسائل ، التطبيقية والمختلفة المنشأ ، الرياضية قد أدت إلى ظهور التحليل التابعي ويمكننا التأكيد الآن أن التحليل التابعي قد نفذ تقريباً إلى جميع العلوم الرياضية ويستخدم في حل مختلف المسائل التطبيقية .

من ذلك جاءت ضرورة التعرف على المفاهيم الأساسية للتحليل التابعي وأهمية معرفة أسسه العامة .

تناولنا في هذا الكتاب ، والذي يغطي مفردات منهاج التحليل التابعي (١) ، أسس التحليل التابعي ، فقد درسنا في الفصل الأول الفضاءات المترية ومسألة التقارب فيها وكذلك مسألة إتمام الفضاءات غير التامة كما استعرضنا مبدأ المؤثرات الضاغطة وتطبيقاته .

في الفصل الثاني درست الفضاءات الخطية المنظمة وخصص جزء وافر لفضاء هيلبرت . في الفصلين الثالث والرابع درست المؤثرات الخطية والداليات الخطية في الفضاءات الخطية المنظمة ومسألة التقارب ، تقارب متتالية مؤثرات ، كما أعطي الشكل العام للداليات الخطية في بعض الفضاءات التابعية ودرست مسألة تمديد دالي خطي من فضاء جزئي من فضاء خطي منظم على الفضاء بأكمله مبرهنة (هان – باناخ) .

في الفصل الخامس درست المجموعات المتراصة في الفضاءات المترية بشكل عام ، وكذلك في بعض الفضاءات التابعية باستعراض معايير التراص في تلك الفضاءات .

من المعلوم أن إحدى الوسائل الأكثر عملية في ترسيخ الأفكار النظرية

وتوضيحها وكذلك المعرفة المعمقة للتحليل التابعي ، هي حل المسائل حيث تستخدم المعلومات النظرية المدروسة : لتحقيق هذا الهدف أوردنا ، في نهاية كل فصل ، مجموعة من المسائل والتمارين المختلفة في درجة صعوبتها ، كما قمنا في نهاية الكتاب بحل المسائل ذات الأرقام الزوجية بغية إعطاء الطالب أسس حل مسائل التحليل التابعي .

إن مواضيع الكتاب منسجمة تماماً مع منهاج التحليل التابعي (١) الذي يدرس في الفصل الأول لطلاب السنة الرابعة (شعبة التحليل) في كلية العلوم . ويمكن لطلاب الرياضيات التطبيقية وللفيزيائيين الاستفادة من الجوانب التطبيقية للمواضيع المدروسة .

أخيراً أرجو أن يحقق هذا الكتاب الغاية المرجوة منه والله ولي التوفيق

حلب / / ٢٠٠٦ المؤلف

لمحة تاريخية

في بدايات القرن العشرين ظهر فرع تحليلي جديد في التحليل الرياضي وهو ما يسمى بالتحليل التابعي .

لقد توضعت المفاهيم والطرائق الأساسية للتحليل التابعي تدريجياً في جوف الفروع الأكثر قدماً في التحليل : في حساب التحولات ، في نظرية المعادلات التفاضلية ، في نظرية تمثيل وتقريب التوابع ، في الطرائق العددية للتحليل ، وبشكل خاص في نظرية المعادلات التكاملية.

إن جوهر التحليل التابعي ينحصر في الانتقال من مجموعة المفاهيم والطرائق الابتدائية في التحليل الرياضي (وفي الساحات المشتركة بين الجبر و الهندسة) إلى مواضيع أكثر شمولية وذات طبيعية أكثر تعقيداً ، إضافة إلى استخدام أوسع للطرائق الهندسية والجبرية . لقد ارتبط هذا الانتقال بتعميم المفاهيم الأساسية للتحليل ، الأمر الذي سمح بالنظر إلى المسائل ، التي استعرضت سابقاً وبشكل منفصل في فروع التحليل المختلفة ، بنظرة موحدة إن إقامة الصلة بين مابدا بعيداً في النظريات الرياضية قد ساعد في اكتشاف حقائق رياضية جديدة ويكفي الإشارة هنا إلى مجموعة نظريات الوجود لحلول المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية وغيرها من المعادلات الناتجة عن استخدام طرائق التحليل التابعي في السنوات الأخيرة .

لقد أصبح ممكناً تعميم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي وذلك لأنه في تطوير الفروع المختلفة قد وجد العديد من الأمور المشتركة بين المفاهيم والطرائق المستخدمة هناك ، كما وجدت تلك المفاهيم والطرائق مثيلاً لها في الجبر والهندسة كطريقة التقريب المتتالي المستخدمة في حل المسائل المختلفة في الجبر وفي التحليل . وهكذا كان تعريف الدالي والقيم الحدية للدالي وشروط وجود الحديات في حساب التحولات مماثلاً لتعريف التابع (لمتحول واحد أو عدة متحولات) والقيم الحدية للتابع وشرط وجودها في الحساب التفاضلي .

إن التماثلات العامة والمعروفة بين نظرية المعادلات التفاضلية الخطية والمعادلات الفرقية الخطية من جهة والمعادلات الجبرية الخطية من جهة أُخرى قد ظهرت وبشكل أكثر تتابعاً في نظرية المعادلات التكاملية الخطية التي ظهرت تاريخياً في وقت لاحق . إلى جانب تعميم مفاهيم التحليل تم في الرياضيات تعميم للمفاهيم الهندسية بداية من اكتشاف هندسة لوباتشفسكي غير الإقليدية . لقد سمح بناء هندسة الفضاء ذي الـ n بعداً بإعطاء تفسير هندسي للتوابع لعدة متحولات كصورة هندسية متعددة الأبعاد . إلى جانب ذلك بدأت تماثلات جديدة بالظهور بين التحليل والهندسة كما ظهرت إمكانيات جديدة في هندسة التحليل الأمر الذي تطلب تعميمات لاحقة للمفاهيم الهندسية . سنذكر هنا بعض الأمثلة .

إن مجموعة الحلول لمعادلة تفاضلية عادية خطية متجانسة من المرتبة n ايزومورفية للفضاء الشعاعي ذي الـ n بعداً ، ومن أجل مجموعة الحلول لمعادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة n يكون المثيل الهندسي هو الفضاء اللانهائي البعد كتعميم للفضاء الشعاعي ذي الـ n بعداً . إن المثال الرائع للتماثل الرئسي والعميق بين مفاهيم التحليل والهندسة تعطيه نظرية النشر بدلالة جمل التوابع المتعامدة إن هذه الجمل متوافقة كثيراً مع جمل الأشعة المتعامدة في الفضاء الإقليدي . وهو ما تؤكده التسمية ذاتها .إن نشر شعاع بدلالة المحاور يقابل نشر تابع في سلسلة فورييه ، كما أن مبرهنة فيثاغورث تقابل بمبرهنة بارسيفال – ستيكلوف . وهكذا . وفقاً لذلك ومن أجل التمثيل الهندسي لجملة لانهائية من التوابع المتعامدة يتطلب الأمر مجدداً تعميم الفضاء الإقليدي إلى فضاء لانهائي البعد . مع تطور التحليل الرياضي وتطور الهندسة لم يرتفع عدد التماثلات بين المفاهيم في مجالات التحليل المختلفة وبين مفاهيم التحليل والهندسة وإنما أصبح أيضاً من الواضح أن التماثلات في النظريات المتقدمة غدت نتائج للتقارب في المفاهيم المتوضعة في أساس تلك النظريات . مثل هذه المفاهيم هي مفاهيم الارتباط التابعي ، الانتقال إلى النهاية ، الاقتراب ، المسافة والتي استخدمت باشكال مختلفة ، مباشرة أو غير مباشرة ، في تلك النظريات .

إن مايميز التحليل التابعي ، كما بينا ، ليس فقط تعميم المفاهيم وإنما أيضاً إعطاء التأويل الهندسي للمفاهيم والطرائق الأساسية للتحليل الكلاسيكي . سنعتبر توابع

صف ما تقاطاً أو أشعة في فضاءات تابعية . وكما ذكرنا أعلاه أن هذا الاعتبار يتطلب تعميماً لاحقاً للمفاهيم الهندسية للفضاءات الشعاعية اللانهائية البعد الإقليدي وغيرها من الفضاءات . وقد أدى هذا الأمر أخيراً إلى بناء مفاهيم عامة للفضاءات المترية والفضاءات الخطية المنظمة والفضاءات التوبولوجية والتي تشتمل ، كما سبق ، على المواضيع الهندسية المدروسة وكذلك على الفضاءات التابعية .

إن تعريف الفضاءات المجردة قد سمح بمعالجة العديد من مسائل التحليل باستخدام المفاهيم الهندسية ، وقد استخدم هذا العرض الهندسي للنظريات التحليلية ليس فقط في المراجع الرياضية وإنما أيضاً في الأعمال الفيزيائية والميكانيكية . تبعاً لذلك فإن العديد من الحقائق العلمية قد ضمن بنتيجة التماثل مع الحقائق الأُخرى من الهندسة ذي الـ n بعداً ، كما أن العديد من البراهين لأمور أُخرى قد أنجز بطرائق هندسية . بهذه الصورة وجدت طريقة جديدة هندسية في التحليل . وإلى جانب تعميم المفاهيم الهندسية وفي الوقت نفسه جرت عملية تعميم المفاهيم الجبرية .

من ناحية أولى ، نقلت العمليات الجبرية المعرفة على الأعداد إلى مواضع ذات طبيعة أكثر اتساعاً (المصفوفات ، المؤثرات وغير ذلك) ، كما ظهرت وتأصلت في فروع رياضية مختلفة مفاهيم الزمرة ، الحلقة ، الحقل وغير ذلك . وبنتيجة تطبيق المفاهيم الجبرية على التحليل بدأت دراست التحويلات الجبرية والتي عرفت فيها الانتقال إلى النهاية . من ناحية ثانية وبشكل أكثر اتساعاً بدأت دراسة تلك الحقيقة التي تعتبر فيها عمليات التحليل نهايات للعمليات الجبرية .

لقد لعبت تعميمات المفاهيم الجبرية في التحليل التابعي الدور نفسه الذي لعبته بالمقابل الفصول الأولية في الجبر في التحليل الكلاسيكي .

هكذا فقد قوبل الجبر الخطي بنظرية المؤثرات الخطية والتي كرس لها قسم كبير من هذا الكتاب .

بالرغم من التطور الكبير والمستقبل الذي بلغه التحليل التابعي كعلم رياضي يتابع ، حتى هذا اليوم ، التماثل وتعميم طرائق العلوم الرياضية الأُخرى الجديدة ونشير هنا إلى التطور الكبير الذي تم في السنوات الأخيرة في نظرية الفضاءات

الخطية التبولوجية ونظرية تمثيل الزمر وغيرها من المواضيع المعاصرة في التحليل التابعي .

الفصل الأول

الفضاءات المترية

Metric Spaces

§ ١- الارتباط التابعي . الفضاء . الترتيب

Functional dependence . Space . ordered

يعتبر مفهوم الارتباط التابعي أحد المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي . ولنذكّر هنا بتعريف الارتباط التابعي المدرج في التحليل : لتكن X و Y مجموعتين من الأعداد الحقيقية ، إذا قابلنا كل عنصر $x \in X$ وفق قاعدة معينة بعنصر واحد $y \in Y$ ، فإننا نقول إنه معرف لدينا تابع وحيد القيمة $y = f(x)$ على المجموعة X وساحة قيمه متوضعة في المجموعة Y ، وتسمى المجموعة X أيضاً بساحة تعريف التابع .

لنلاحظ أنه في مفهوم الارتباط التابعي ليس ضرورياً أن تكون المجموعتان X و Y مجموعتين من الأعداد الحقيقية ، وباعتبار X و Y مجموعتان من العناصر ذات طبيعة متباينة نأتي إلى مفهوم أعم للارتباط التابعي ، والأمثلة على ذلك كثيرة في مختلف فروع التحليل الرياضي .

مثال ١ . ليكن $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ تابعاً حقيقياً لـ n متحولاً حقيقياً . عندئذ تكون X هي مجموعة الجمل المرتبة من n عدداً حقيقياً وتكون Y هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

مثال ٢ . ليكن $\overrightarrow{y} = f(x)$ تابعاً شعاعياً يقابل الأعداد الحقيقية x بالأشعة ذات الـ n بعداً . هنا تكون X هي مجموعة الأعداد الحقيقية أما Y فتكون مجموعة الأشعة ذات الـ n بعداً .

مثال ٣ . تستعرض في حساب التحولات داليات من الشكل :

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

حيث إن γ منحني معطى بالعلاقة $y = f(x)$ وأما $f(x)$ فهو تابع ينتمي إلى C_1 صف التوابع القابلة للاشتقاق والتي مشتقاتها مستمرة ، كما أن γ يمر بالنقطتين المعلومتين $A(a, y_a)$ و $B(b, y_b)$. في هذه الحالة تكون X هي مجموعة المنحنيات المتمتعة بالخواص المذكورة وتكون Y مجموعة الأعداد الحقيقية .

مثال ٤ . في نظرية المعادلات التكاملية تستعرض عبارة من الشكل :

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds$$

بفرض أن النواة $K(t, s)$ معرفة ومستمرة في المربع $a \leq t, s \leq b$ عندئذ يمكننا النظر إلى تلك المساواة كقاعدة يرتبط وفقها كل تابع $x(t)$ مستمر على المجال $[a, b]$ بتابع آخر مستمر على نفس المجال ، وتكون هنا كل من X وY مجموعة التوابع المستمرة .

سنعطي الآن **التعريف العام للارتباط التابعي** . لتكن X و Y مجموعتين ما ولتكن لدينا قاعدة معلومة نقابل وفقها كل عنصر $x \in X$ بعنصر وحيد معرف تماماً $y \in Y$ ، عندئذ نقول **إنه لدينا مؤثر $y = f(x)$ معرف على المجموعة X ومجموعة قيمه متوضعة في المجموعة Y** [*] . **ونقول أيضا إنه لدينا تطبيق للمجموعة X في المجموعة Y . في الحالة الخاصة ، عندما تكون قيم المؤثر حقيقية فإن المؤثر يسمى دالياً .**

يسمى العنصر $y \in Y$ الموافق للعنصر $x \in X$ بالتطبيق $y = f(x)$ **صورة العنصر** x كما يسمى x **بالصورة العكسية** للعنصر $y \in Y$.

إذا طبق $y = f(x)$ المجموعة X على المجموعة Y فإنه ، من الواضح ، من أجل كل عنصر $y \in Y$ يوجد على الأقل صورة عكسية واحدة x . في الحالة التي يوجد فيها من أجل كل عنصر $y \in Y$ فقط صورة عكسية واحدة $x \in X$ فإن التطبيق x على y المحقق بالعلاقة $y = f(x)$ يسمى **تطبيقاً غامراً ومتبايناً(وحيد**

---

[*] نصطلح بأن نقول إن خاصة (ظرفاً) ما تتحقق على المجموعة إذا تحقق من أجل جميع عناصر تلك المجموعة وإنها تتحقق في المجموعة إذا تحققت ، من الممكن ، ليس من أجل جميع عناصر المجموعة

القيمة بالتبادل) .

بالنسبة للمؤثرات المعرّفة بشكل عام لا يمكننا التحدث تقريباً عن خواصها بشيء ولذلك سنعطي افتراضات إضافية .

إلى جانب مفهوم الارتباط التابعي يعتبر مفهوم النهاية و مفهوم الاستمرار المرتبط به من المفاهيم الهامة في التحليل . **تسمى المجموعة التي عرفت فيها بشكل أو بآخر مفهوم نهاية متتالية بفضاء.** وتسمى الفضاءات التي عناصرها توابع أو متتاليات عددية **بفضاءات تابعية ، وتشكل دراسة بعض صفوف المؤثرات المعرفة في الفضاءات التابعية المحتوى الأساسي للتحليل التابعي .**

لنستعرض هنا بعض المفاهيم المستخدمة في التحليل التابعي .

لنفرض أنه في المجموعة X قد عرفت علاقة ترتيب من أجل بعض أزواج عناصرها $a , b , c , \ldots$

$$a < b$$

ولنفرض أيضاً أن هذه العلاقة تحقق الشروط الآتية :

١) من $a < b$ و $b < c$ ينتج أن $a < c$

٢) $a < a$

٣) من $a < b$ و $b < a$ ينتج أن $a = b$

عندئذ نقول إن المجموعة X **مرتبة جزئياً** (*partially ordered*) ويسمى العنصران a ، b واللذان من أجلهما تتحقق العلاقة $a < b$ أو $b < a$ **بعنصرين مقارنين** . تسمى المجموعة X **مرتبة** (أو مرتبة خطياً)(أو مرتبة كلياً *totally ordered*) إذا كان من أجل أي عنصرين مختلفين منها a , b إما $a < b$ أو $b < a$.

نقول عن مجموعة جزئية Y من مجموعة مرتبة جزئياً إنها **محدودة من الأعلى** إذا وجد عنصر مثل b بحيث إن $y < b$ من أجل جميع العناصر $y \in Y$ ، ويسمى العنصر b **حداً أعلى للمجموعة** Y ويسمى أصغر حد أعلى للمجموعة **بالحد الأعلى الأصغري أوالحد الأعلى للمجموعة .**

بالمثل تماماً تعرف المجموعة **المحدودة من الأدنى والحد الأدنى والحد الأدنى**

الأعظمي أو الحد الأدنى للمجموعة .

أخيرا يسمى العنصر $z_0 \in X$ **عنصراً أعظمياً** إذا لم يوجد في X عنصر مثل ($x \neq z_0$) محقق للعلاقة $z_0 < x$.

نذكر هنا توطئة زورن الهامة .

توطئة زورن (*Zorn's Lemma*) :

إذا وجد في كل مجموعة جزئية مرتبة Y من المجموعة المرتبة جزئياً X حد أعلى فإنه يوجد في X عنصر أعظمي z_0 .

نقول عن مجموعة مرتبة إنها **مرتبة تماماً** إذا وجد في أية مجموعة جزئية منها غير خالية عنصر أصغري أي عنصر يسبق جميع عناصر المجموعة الجزئية .

مثال ١ . لتكن X هي مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن العلاقة $<$ هي العلاقة $\leq$ عندئذ من الواضح أنه أيا كانت الأعداد الحقيقية a , b , c فإن :

١) $a \leq a$

٢) إذا كان $a \leq b$ وكان $b \leq c$ فإن $a \leq c$

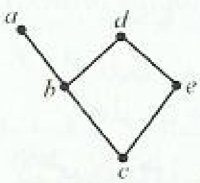
٣) إذا كان $a \leq b$ وكان $b \leq a$ فإن $a = b$

بالتالي فإن العلاقة $\leq$ هي علاقة ترتيب جزئي من أجل الأعداد الحقيقية . وفي هذه الحالة نلاحظ أن الأعداد الحقيقية فعلياً مرتبة كلياً .

مثال ٢ . لتكن X مؤلفة من مجموعة النقاط في الشكل (١) .

من أجل أي عنصرين x , y من X

سنقول إن $x < y$ إذا أمكننا الوصول إلى y من x تماماً بطريق **صاعدة** أو بشكل ثابت . بالعودة إلى الشكل (١) نجد $c < a$ ، $c < d$. من السهل التأكد من أن المتطلبات ١) – ٣) محققة . وأن b , e غير مقارنين بالنسبة لـ $<$ فليس $e < b$ ولا $b < e$ وبالتالي فإن المجموعة X ليست مرتبة تماماً بالنسبة للعلاقة $<$.



الشكل (١)

مثال ٣ . لتكن M مجموعة ما غير خالية ولتكن $T = \{ t \}$ أسرة المجموعات الجزئية t فيها . سنعتبر أن $t_1 < t_2$ إذا كان $t_1 \subset t_2$. من الواضح

أن علاقة الترتيب المعرفة تحقق جميع الشروط المـذكورة أعـلاه . ومـن الواضـح أيضاً ، أنه إذا احتوت M على أكثر من عنصرين فإنه تبعاً لـذلك الترتيـب تكـون المجموعة T غير مرتبة (وغير مرتبة تماماً) .

إذا كانت S أية مجموعة جزئية من T فإن هذه المجموعة تكون محدودة مـن الأعلى وأن حدها الأعلى الأصغري سيكون المجموعة :

$$s = \bigcup_{t \in S} t$$

في المجموعة T يوجد عنصر أعظمي وهو المجموعة M نفسها والتي ينظر إليهـا وكأنها مجموعة جزئية وفي هذه الحالة تكون توطئة زورن محققة وضوحاً .

§ ٢- الفضاءات المترية

Metric Spaces

يقابلنا في التحليل الرياضي عدد من مفاهيم النهاية ، إضافة إلى أنه في بعـض الحالات ومن أجل متتالية ما ، **وبالرغم من أن** لعناصرها نفس الطبيعة الرياضـية ، تعطى مفاهيم مختلفة للنهاية وذلك تبعاً للمسألة المطروحة . كنا قد تعرفنا قبل كل شيء إلى مفهوم نهاية متتالية من الأعداد الحقيقية ووجدنا أن هذا المفهوم يعمم بشكل مباشر على متتاليات الأعداد المركبة وكذلك متتاليات المتجهات ذات الـ n بعداً . من ثـم توصلنا إلى متتاليات التوابع ، ووجدنا أن هناك مجموعة من مفاهيم التقارب : النقطي (غير المنتظم) ، التقارب المنتظم ، التقارب الوسطي ، وهكذا .

إن جميع مفاهيم التقارب تلك تشترك بـشيء عـام هـو أن تقـارب متتاليـة العناصر x_n (أعداد أو أشعة أو توابع) إلى العنصر x يعني الاقتراب غير المحـدود لـ x_n من x . أي إن المسافات بين x_n و x تصغر بشكل غير محدود بين كـل العناصر وذلك عندما تزداد n بشكل غير محدود . هكذا **ووفقاً لفهمنا للمسافة** بـين x_n و x **نحصل على التعاريف المختلفة للنهاية** . ومن المفيد إعطاء تعريـف عـام للمسافة بين عناصر مجموعة مجردة وبشكل يشتمل على جميـع الحـالات الخاصـة المعروضة ومن ثم **وبدلالة هذه المسافة نعرف في المجموعة عملية الانتقـال إلـى النهاية وتحويل تلك المجموعة إلى فضاء .**

الفضاء المتري :

لتكن X مجموعة غير خالية . نسمي التطبيق $d : X \times X \to \mathbb{R}$ مسافة على X إذا حقق من أجل جميع العناصر x , y , z و X الموضوعات الآتية :

$$
\begin{array}{ll}
i. & d(x, x) = 0 \\
ii. & d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \\
iii. & d(x, y) = d(y, x) \\
iv. & d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)
\end{array}
$$

نسمي المجموعة X مع المسافة المعرفة عليها d **فضاءً متريا** ونرمز لذلك بـ (X, d) وعادة نحذف d ونكتب فقط X كرمز للفضاء المتري . تسمى الخاصة(iii) **بخاصة التناظر** أما المتراجحة (iv) فتسمى **بمتراجحة المثلث** .

نسمي التابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ والمحقق لـ (i) , (iii) , (iv) **بنصف مسافة** ($semi - metric$) ونسمي (X, d) فضاء نصف متري ($semi - metric\ space$) في هذه الحالة .

ملاحظات

1) المسافة d ، بشكل دائم ، ليست سالبة . في الواقع ، من أجل x , y و X ينتج أن

$$d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x)$$

أي إن

$$2\, d(x, y) \geq 0$$

و بالتالي فإن

$$0 \leq d(x, y)$$

2) إذا كانت x , y ، x' ، y' عناصر من X فإن :

$$| d(x, y) - d(x', y') | \leq d(x, x') + d(y, y')$$

في الواقع ، بما أن

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\leq d(x,x') + d(x',y) \leq \\
&\leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)
\end{aligned}
$$

فإننا نجد أن :

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y,y')$$

وبمبادلة مواضع x و y بمواضع y', x' نجد :

$$d(x', y') - d(x, y) \leq d(x, x') + d(y, y')$$

ومن المتراجحتين الأخيرتين نحصل على العلاقة المطلوبة .

3) كل مجموعة غير خالية X يمكن تحويلها إلى فضاء متري . (بطريقة بديهية) بتعريف مسافة d على النحو :

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \neq y \\ 0 & ; \quad x = y \end{cases}$$

بسهولة يمكن التأكد من أن d مسافة على X . وتسمى d في هذه الحالة مسافة تافهة (trivial metric) ويسمى الفضاء (X, d) فضاءً مترياً منفصلاً (discrete metric space) . لاحقاً سنسمي **عناصر الفضاء المتري نقاطاً** .

ونشير أخيراً إلى أن كل مجموعة Y متوضعة في الفضاء المتري X و مقرونة بنفس المسافة المعرفة بين عناصر X تكون هي نفسها فضاءً مترياً وتسمى **فضاء جزئياً** من الفضاء X .

نهاية متتالية

يسمى العنصر x من الفضاء المتري X **نهاية** لمتتالية العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ من X إذا كان $d(x_n, x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ وفي هذه الحالة سنكتب :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad \text{أو} \qquad x_n \to x$$

بالنسبة للمتتاليات المتقاربة يمكننا ذكر عدد من المبرهنات العامة .

مبرهنة ١ . إذا كانت متتالية النقاط $\{x_n\}$ من الفضاء المتري X متقاربة إلى النقطة $x \in X$ فإن أية متتالية جزئية منها $\{x_{n_k}\}$ تتقارب إلى نفس النقطة .

البرهان واضح .

مبرهنة ٢ . إذا كانت متتالية النقاط $\{x_n\}$ من الفضاء المتري X متقاربة فإن نهايتها وحيدة .

البرهان . لنفرض أن $x_n \to x$ و $x_n \to y$ ، عندئذ مهما يكن العدد $\varepsilon > 0$

يكون

$$d(x,y) \le d(x_n,x) + d(x_n,y) < \varepsilon$$

وذلك من أجل n كبير بقدرٍ كاف . بما أن x , y ثابتان و ε عدد موجب كيفي فإن المتراجحة الأخيرة ممكنة فقط إذا كان $d(x,y) = 0$ أي إن $x = y$.

مبرهنة ٣ . إذا كانت متتالية النقاط $\{x_n\}$ من X متقاربة **إلى** النقطة $x \in X$ فإن الأعداد $d(x_n, \theta)$ تكون محدودة من أجل أي نقطة مثبتة θ من الفضاء X .

في الواقع ، استناداً إلى موضوعة المثلث ومن أجل أي عدد n يكون لدينا :

$$d(x_n, \theta) \le d(x_n, x) + d(x, \theta) \le L + d(x, \theta) = k$$

و ذلك لأن المتتالية العددية $\{d(x_n, x)\}$ المتقاربة تكون محدودة وبالتالي فإن الأعداد $d(x_n, x)$ لا يمكن أن تزيد عن L .

نسمي مجموعة النقاط x من X والمحققة للمتراجحة $d(x,a) < r$ ($d(x,a) \le r$) **بكرة** (كرة مغلقة) مركزها النقطة a و نصف قطرها r وسنرمز لتلك الكرة بـ $S(a,r)$ (بالمقابل $\overline{S}(a,r)$) **ونسمي أية كرة مركزها النقطة x جواراً للنقطة x .**

بسهولة نرى أن النقطة x تكون نهاية للمتتالية $\{x_n\}$ فقط وفقط عندما يحتوي أي جوار للنقطة x على جميع حدود المتتالية بدءاً من رقم معين .

نسمي مجموعة النقاط المحتواة كلياً داخل كرة ما **بمجموعة محدودة .**

في بعض الأحيان يكون مفهوم نهاية متتالية من العناصر في فضاء ما معرفاً فإذا أمكن تعريف مسافة في ذلك الفضاء بحيث يتطابق مفهوم نهاية المتتالية المعرف وفقها مع المفهوم المعطى سابقاً ، فإننا نقول إنه **يمكن تمتير هذا الفضاء .**

اللصاقة :

من الممكن في الفضاء المتري إعطاء عدد كبير من المفاهيم العامة والتي واجهتنا في نظرية المجموعات النقطية المتوضعة على المحور الحقيقي . هكذا إذا كانت المجموعة $M \subset X$ ، فإن النقطة $a \in X$ تسمى **نقطة تجمع** لهذه المجموعة إذا احتوى أي جوار للنقطة a ، على الأقل ، على نقطة من المجموعة $M \setminus a$ أي إذا كان

$$S(a,r) \cap (M \setminus a) \neq \emptyset$$

من أجل أي عدد r . تسمى المجموعة $\overline{M}$ الناتجة عن المجموعة M بإضافة نقاط تجمعها إليها بلصاقة المجموعة M .

بسهولة يمكن التأكد من أن لصاقات المجموعات النقطية في الفضاء المتري تتمتع بنفس الخواص التي تتمتع بها لصاقات المجموعات العددية النقطية ، وعلى وجه التحديد :

1) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$

2) $M \subseteq \overline{M}$

3) $\overline{(\overline{M})} = \overline{\overline{M}} = \overline{M}$

كما أن لصاقة المجموعة الخالية هي المجموعة الخالية .

تسمى المجموعة M **مجموعة مغلقة** إذا كانت $\overline{M} = M$. بينما تسمى M **مجموعة مفتوحة** إذا كانت متممتها $X \setminus M$ مغلقة . ونقول إن المجموعة **كثيفة في G** إذا كانت $G \subseteq \overline{M}$. في حالة خاصة نقول إن المجموعة **M كثيفة في كل مكان** في الفضاء X أو اختصاراً كثيفة في كل مكان ،إذا كانت $\overline{M}=X$. ونقول أخيراً إن المجموعة M **ليست كثيفة في أي مكان في الفضاء X إذا احتوت أية كرة في داخلها من هذا الفضاء على كرة خالية من نقاط المجموعة M** (*).

التوابع المستمرة

ليكن X و Y فضاءين متريين ، وليكن $y = f(x)$ تابعاً معرفاً على مجموعة ما M من الفضاء X وقيمه متوضعة في الفضاء Y . نقول إن التابع $f(x)$ مستمر في النقطة $x_0 \in M$ إذا وجد من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ عدد $o < \delta$ بحيث إن $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ تكون محققة من أجل أية نقطة $x \in M$ محققة للمتراجحة :

$$d_X(x, x_0) < \delta$$

من تعريف الاستمرار للتابع $f(x)$ ينتج أنه إذا كانت $x_n \to x_0$ ، $(x_n , x_0 \in M)$ فإن :

(*) للاطلاع على موضوع المجموعات المغلقة والمفتوحة في الفضاءات المترية يمكن العودة إلى [1] .

$f(x_n) \to f(x_0)$ والعكس أيضاً صحيح أي إنه إذا كان $f(x_n) \to f(x_0)$ من أجل أية متتالية $\{x_n\} \subseteq M$ متقاربة إلى $x_0 \in M$ فإن التابع $f(x)$ يكـون مستمراً في x_0 .

برهان هذه الخاصة يمكن تحقيقه تماماً كما في التوابع الحقيقية لمتغير حقيقي .

كنتيجة للمتراجحة :

$$|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$$

نحصل مباشرة على أن تابع المسافة $d(x, y)$ هو تابع مستمر بالنسبة لمتغيريه x و y بمفهوم أنه إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ فإن :

$$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$$

في الواقع ، استناداً للمتراجحة المذكورة يكون لدينا :

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \to 0$$

الهوميومورفيزم

ليكن X و Y فضاءين متريين ولنفرض وجود تطبيق وحيد القيمـة بالتبـادل للفضاء X على الفضاء Y إذا كان هذا التطبيق مـستمراً بالتبـادل [*] فـإن هـذا التطبيق يسمى هوميومورفيزماً بين X و Y كما أن الفضاءين X و Y يسميان هوميومورفيين .

قبل أن نأتي لاستعراض أمثلة عن الفضاءات المترية نذكر أولاً بعـض المتراجحـات الضرورية والتي سنستخدمها لاحقاً في دراستنا .

§ ٣- متراجحات أساسية

Main Inqualities

١. الفضاء $L^p(E)$

لتكن X مجموعة غير خالية ولـيكن μ قياسـاً معرفـاً ومنتهيـاً علـى $\mathfrak{S}$ ، σ - جبر المجموعات القيوسة في X . ولتكن E مجموعة قيوسة ما مـن X و p عدداً معطى و $1 < p$ لنرمز بـ L^p لمجموعة جميع التوابع القيوسة f والمحدودة

---

[*] نقصد بذلك أن التطبيق العكسي موجود ومستمر

تقريباً في كل مكان على E والتي من أجلها يتقارب التكامل :

$$\int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \qquad ^{(*)}$$

سنعتبر في الفضاء L^p أن **التابعين المتكافئين متطابقان** . بسهولة يمكن التأكـد أن L^p فضاء خطي . في الواقع ، إذا كان f د L^p فإنه من أجـل أي ثابـت c يكـون cf د L^p .

$$\int_E |cf|^p d\mu = |c|^p \int_E |f|^p d\mu < \infty$$

ليكن الآن f ، g د L^p ولنضع :

$$E_1 = E\,[\,|f(x)| \le |g(x)|\,] \;,\; E_2 = E \setminus E_1$$

عندئذٍ من أجل x د E_1 يكون لدينا

$$|f(x)+g(x)|^p \le \big(|f(x)|+|g(x)|\big)^p \le 2^p \, |g(x)|^p$$

و بالتالي فإن

$$\int_{E_1} |f+g|^p \, d\mu \le 2^p \int_{E_1} |g|^p \, d\mu < +\infty$$

وبالمثل نجد أن

$$\int_{E_2} |f+g|^p \, d\mu \le 2^p \int_{E_2} |f|^p \, d\mu < +\infty$$

$$\int_E = \int_{E_1} + \int_{E_2}$$

وتبعاً لذلك يكون

$$\int_E |f+g|^p \, d\mu < +\infty$$

أي إن $f+g$ د L^p .

إن دراسة الفضاء L^p ذات صلة وثيقة بفضاء آخر من النمط نفسه هـو الفـضاء L^q (على نفس المجموعة E) حيث إن p و q مرتبطان بالعلاقة :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad (1.3.1)$$

يسمى هذان الأسان **بالمترافقين** . من $(1.3.1)$ ينتج أن $1 < q = \dfrac{p}{p-1}$.

(*) قيوسية التابع $|f|^p$ تنتج من قيوسية f

ونلاحظ بأنه إذا كان $p = 2$ فإن $q = 2$ و إذا كان أيضاً $p \neq 2$ فإن $p \neq q$.

لنبرهن أولاً المتراجحة العددية :

$$(1.3.2) \qquad a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

المحققة من أجل جميع a و $0 \leq b$ (p و q مرتبطان بالعلاقة ($(1.3.1)$)) .

إذا كان أحد العددين a أو b معدوماً فإن المتراجحة($1.3.2$) محققة وضوحاً ،

لذلك سنعتبر أن $a > 0$ و $b > 0$ ، ولنضع $m = \frac{1}{p}$ (عندئذ يكون $0 < m < 1$)

لأن $p > 1$ دوماً

ولنستعرض التابع

$$\varphi(t) = t^m - mt \quad ; \quad (t > o)$$

عندئذ نجد أن

$$\varphi'(t) = m\,(t^{m-1} - 1)$$

بالتالي فإن : $\varphi'(t) > 0$ من أجل $t < 1$ و $\varphi'(t) < 0$ من أجل $t > 1$ وفقاً لذلك يكون التابع $\varphi(t)$ متزايداً في المجال $]0 , 1]$ ومتناقصاً في المجال $[1 , +\infty)$ ، و يأخذ قيمة أعظمية عندما $t = 1$ ، بذلك يكون $\varphi(t) \leq \varphi(1)$ من أجل جميع قيم $t > 0$. أي إن

$$t^m - mt \leq 1 - m$$

أو

$$t^m - 1 \leq m(t - 1)$$

لنضع الآن $t = \frac{a}{b}$. عندئذ تأخذ المتراجحة الأخيرة الشكل :

$$\frac{a^m}{b^m} - 1 \leq m\left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

وبالضرب بـــ b نجد :

$$a^m\, b^{1-m} \leq m\,a + (1-m)\,b$$

وبما أن $m = \frac{1}{p}$ ، $1 - m = \frac{1}{q}$ فإن المتراجحة ($1.3.2$) تتحقق .

متراجحة هولدر[*]

ليكن لدينا f و L^p ، g و L^q تابعين كيفيين . ولنفرض أولاً أن كلاً من التكاملين :

$$I_2 = \int_E |g|^q \, d\mu \quad , \quad I_1 = \int_E |f|^p \, d\mu$$

أكبر من الصفر . ولنضع في المتراجحة (1 . 3 . 2)

$$b = \frac{1}{I_2} |g(x)|^q \quad , \quad a = \frac{1}{I_1} |f(x)|^p$$

عندئذ من المتراجحة (1 . 3 . 2) ينتج أن :

$$|f(x)\ g(x)| \le I_1^{1/p}\ I_2^{1/q} \left\{ \frac{|f(x)|^p}{p\,I_1} + \frac{|g(x)|^q}{q\,I_2} \right\}$$

وبما أن الطرف الأيمن تابع جمعي على المجموعة E فإنه استناداً إلى خواص التوابع يكون الجداء $f . g$ أيضاً تابعاً جمعياً ووفقاً لذلك نجد أن :

$$\left| \int_E f\,g\,d\mu \right| \le I_1^{1/p}\ I_2^{1/q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = I_1^{1/p}\ I_2^{1/q}$$

وهذه المتراجحة تتحقق أيضاً في الحالة التي يكون فيها أحد التكاملين I_1 أو I_2 معدوماً وذلك لأنه في هذه الحالة يكون f أو g مكافئاً للصفر .

بذلك نجد أنه من أجل أي تابعين f و L^p و g و L^q يكون الجداء $f . g$ تابعاً جمعياً وتتحقق المتراجحة :

$$\left| \int_E f\,g\,d\mu \right| \le \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q \, d\mu \right)^{1/q} \qquad (1 . 3 . 3)$$

والتي تسمى بمتراجحة هولدر .

كحالة خاصة من متراجحة هولدر تنتج **متراجحة بونياكوفسكي** [**] ($p = q = 2$)

---

[*] *O . L . Hölder* *(1859 - 1937)* رياضي ألماني

[**] *V . I . Boniakovcky* *(1804 - 1889)* رياضي روسي

$$\left(\int_E f\, g\; d\mu\right)^2 \leq \left(\int_E f^2\; d\mu\right)\left(\int_E g^2\; d\mu\right) \qquad (1.3.4)$$

متراجحة مينكوفسكي (*)

ليكن f و g تابعين كيفيين من L^p ولنضع :

$$I = \int_E |f+g|^p\; d\mu \quad , \quad I_2 = \int_E |g|^p\; d\mu \quad , \quad I_1 = \int_E |f|^p\; d\mu$$

ولنبرهن على أن :

$$I^{1/p} \leq I_1^{1/p} + I_2^{1/p} \qquad (1.3.5)$$

في الحالة التي يكون فيها $I = 0$ تكون المتراجحة $(1.3.5)$ تافهة لذا سنفرض أن $I \neq 0$.

ولنفرض أن q هو العدد المترافق مع p . بما أن التابع $|f+g|^p$ جمعي فإن التابع $|f+g|^{p/q}$ دِ L^q . ولنلاحظ أن $p-1 = \dfrac{p}{q}$ وبالتالي فإن :

$$\begin{aligned} &|f(x)+g(x)|^p \leq \\ &\leq (|f(x)|+|g(x)|)\,|f(x)+g(x)|^{p-1} \end{aligned} \qquad (1.3.6)$$

بتطبيق متراجحة هولدر على الجداء $|f|\,|f+g|^{p-1}$ وبالأخذ بعين الاعتبار أن

$$(p-1)q = p$$

نجد

$$\int_E |f|\,|f+g|^{p-1}\; d\mu \leq I_1^{1/p}\; I^{1/q}$$

وبالمثل أيضاً

$$\int_E |g|\,|f+g|^{p-1}\; d\mu \leq I_2^{1/p}\; I^{1/q}$$

عندئذ من $(1.3.6)$ ينتج أن

$$I \leq (I_1^{1/p} + I_2^{1/p})\; I^{1/q}$$

(*) G. Minkowski (1864 - 1909) رياضي ألماني

وهذا بدوره يؤدي إلى المتراجحة $(1.3.5)$.

هكذا من أجل أي تابعين f , g و L^p تتحقق المتراجحة :

$$\left(\int_E |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \qquad (1.3.5)$$

والتي تسمى بمتراجحة مينكوفسكي .

الفضاء l_p $(1 \le p)$

لتكن X مجموعة متتاليات الأعـداد الحقيقيـة $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ والتي من أجلها :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$$

والى جانب هذا الفضاء يـدرس الفـضاء l_q $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ وهـو مجموعـة المتتاليات العددية $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ والتي من أجلها

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q < \infty$$

نأتي الآن لاستنتاج متراجحة هولدر من أجل المجاميع .

بتعويض a , b في المتراجحة $(1.3.2)$ على الترتيب بـ :

$$a = \frac{|\xi_i|^p}{\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p} \quad , \quad b = \frac{|\eta_i|^q}{\sum_{i=1}^{\infty} |\eta_i|^q}$$

نجد :

$$\frac{|\xi_i|\,|\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}} \le \frac{|\xi_i|^p}{p\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p} + \frac{|\eta_i|^q}{q\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q}$$

بالجمع على i نجد

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\,|\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q} \qquad (1.3.6)$$

وهذه هي متراجحة هولدر من أجل المجاميع . في الحالة الخاصة $p = q = 2$ نحصل على متراجحة بونياكوفسكي من أجل المجاميع:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|\,|\eta_i| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\right)^{1/2} \qquad (1.3.7)$$

لنبرهن الآن متراجحة مينكوفسكي من أجل المجاميع . لتكن $x = \{\xi_i\}$ من l_p وكذلك $y = \{\eta_i\}$ ولنبرهن على صحة المتراجحة

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1.3.8)$$

لنلاحظ قبل كل شيء أنه إذا كانت :

$$z = \{\xi_i\} \in l_p$$

فإن

$$z_1 = \{\,|\xi_i|^{p-1}\,\} \in l_q$$

لنستعرض

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p \quad .$$

وبتطبيق متراجحة هولدر مرتين على المتتاليات

$$\{|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\} \in l_q \quad , \quad \{\xi_i\} \in l_p \quad . \quad \{\eta_i\} \in l_p$$

نجد أن :

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p \le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\,|\xi_i| + \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^{p-1}\,|\eta_i|\right) \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{1/p}\right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{1/p}\right]$$

بقسمة الطرفين على

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i + \eta_i |^p \right)^{1/q}$$

وبملاحظة أن :

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$$

نحصل على متراجحة مينكوفيسكي من أجل المجاميع .

لاحقاً سنكون بحاجة للمتراجحة العددية :

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \qquad (1.3.9)$$

للبرهان سنفرض أولاً أن a ، b من إشارة واحدة ويمكننا أن نعتبر أن $a > 0$ و $0 < b$ فنجد

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} = \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$$

من إشارتين مختلفتين ، b ، a وفي هذه الحالة تتحقق المتراجحة . لنفرض الآن أن ولنعتبر أن $|a| \geq |b|$ عندئذٍ يكون :

$$|a+b| \leq |a|$$

لنستعرض التابع

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

فنجد أن

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

أي إن التابع $f(x)$ متزايد . وهذا يعني أن $f(|a+b|) < f(|a|)$

و بالتالي فإن
$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

§ ٤- أمثلة من الفضاءات المترية
والتقارب فيها

١- المحور الحقيقي (*The Real Number Axis*)

ليكن $X = R$ حيث إن R مجموعة الأعداد الحقيقية . إذا كان x ، $y \in R$

فنضع :

$$d(x, y) = |x - y|$$

إن موضوعات المسافة واضحة ، كما أن التقارب في هذا الفضاء هو التقارب العادي المعروف بالنسبة للمتتاليات العددية .

٢- الفضاء الإقليدي (*Euclidean Space*)

لتكن X الفضاء العددي ذي الـ n بعداً . أي إن مجموعة جميع الجمل المرتبة و المؤلفة من n عدداً حقيقياً . إذا كان :

$$y = \{ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n \} \qquad , \qquad x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \}$$

فنضع

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}$$

وبسهولة يمكن التأكد من تحقق موضوعات المسافة . ليكن

$$x_k = \{ \xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)} \} \qquad ; \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

و

$$d(x_k, x) \to 0 \qquad \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i^{(k)} - \xi_i)^2} \to 0 \right) \quad \text{for} \quad k \to \infty$$

وهذا مكافئ للشرط $\xi_i^{(k)} \to \xi_i$ مع $i = 1, 2, \ldots, n$ و من أجل $k \to \infty$

بذلك نجد أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب بالإحداثيات .

يسمى الفضاء X والمقرون بهذه المسافة بالفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً وسنرمز له بـ E_n

٣– فضاء التوابع المستمرة ذو المسافة التشبيشيفية

(The Space of Continuos Functions With Chebyshev Metric)

لتكن X مجموعة جميع التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[\,0\,,\,1\,]$ (*)

لنعرف مسافة على هذه المجموعة بالعلاقة :

$$d(x,y) \;=\; \max_t \left|x(t)-y(t)\right|$$

لنتأكد من تحقق موضوعات المسافة . ذلك أن $0 \le d(x,y)$ و $d(x,y)=0$ إذا و فقط إذا كان $x(t) = y(t)$ وكذلك $d(x,y)=d(y,x)$ واضـــح . يتبقى أن نتأكد من فرضية المثلث . من أجل أية نقطة t د $[\,0\,,\,1\,]$ لدينا

$$\left|x(t)-z(t)\right| = \left|[x(t)-y(t)] + [y(t)-z(t)]\right| \le$$

$$\le \left|x(t)-y(t)\right| + \left|y(t)-z(t)\right| \le$$

$$\le \max_t \left|x(t)-y(t)\right| + \max_t \left|y(t)-z(t)\right| =$$

$$= d(x,y) + d(y,z)$$

ولذلك فإن :

$$d(x,z) = \max_t \left|x(t)-z(t)\right| \le d(x,y)+d(y,z)$$

تسمى مجموعة التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[\,0\,,\,1\,]$ والتي عُرِّفت عليها المسافة المذكورة أعلاه فضاء التوابع المستمرة ونرمز له بـــ $C\,[0\,,\,1]$ ويطلق عليه أيضاً فضاء التوابع المستمرة والمسافة التشبيشيفية وذلك لأن المـــسافة بـــين التوابـــع تتطابق مع الانحراف التشبيشيفي .

لنستعرض التقارب في الفضاء $C\,[0\,,\,1]$. لتكن $\{\,x_n(t)\,\}$ متتالية من عناصر الفضاء $C\,[\,0\,,\,1]$ متقاربة إلى العنصر $x(t)$ ($n \to \infty$ $d(x_n\,,x) \to 0$) .

(*) إذا كان مجال تحول t هو $[\,a\,,\,b\,]$ فإنه بنتيجة التحويل $\tau = \dfrac{t-a}{b-a}$ يؤول ذلك المجال إلى المجال $[\,0\,,\,1\,]$.

هذا يعني أن

$$\max_t \left| x_n(t) - x(t) \right| \to 0 \quad , \quad n \to \infty$$

أي إنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $n_0(\varepsilon)$ وبحيث يكون :

$$\max_t \left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon) \leq n$ وبالتالي فإن

$$\left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon) \leq n$ ومن أجل جميع $t \in [0, 1]$. إن هذا يعني أن المتتالية $\{ x_n(t) \}$ تتقارب بانتظام إلى $x(t)$.

بسهولة يمكن التأكد من العكس ، أي إنه إذا كانت المتتالية $\{ x_n(t) \}$ متقاربة بانتظام إلى $x(t)$ فإن $d(x_n, x) \to 0$.

٤ – فضاء المتتاليات العددية المحدودة

(*The Space of Bounded Sequences of Numbers*)

لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية المحدودة

$$x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \}$$

هذا يعني أنه من أجل كل عنصر x يوجد ثابت K_x وبحيث إن $|\xi_i| \leq K_x$ من أجل جميع الأعداد i . لتكن $x = \{\xi_i\}$ ، $y = \{\eta_i\}$ من المجموعة X ولنعرف المسافة على X بالعلاقة

$$d(x, y) = \sup_i \left| \xi_i - \eta_i \right|$$

من الواضح ، أنه يكفينا التأكد من تحقق موضوعة المثلث . أياً كانت العناصر $x = \{\xi_i\}$ ، $y = \{\eta_i\}$ ، $z = \{\zeta_i\}$ من X لدينا

$$\begin{aligned} |\xi_i - \zeta_i| &\leq |\xi_i - \eta_i| + |\eta_i - \zeta_i| \leq \\ &\leq \sup_i |\xi_i - \eta_i| + \sup_i |\eta_i - \zeta_i| = \\ &= d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

بالتالي فإن :

$$\sup_i |\xi_i - \zeta_i| = d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

يسمى الفضاء الناتج بفضاء المتتاليات العددية المحدودة ويرمز له عادة بـ m .

ليكن x_n و x عناصر من m و $x_n = \{ \xi_i^{(n)} \}$ و $x = \{ \xi_i \}$ ولنفرض أن المتتالية $\{ x_n \}$ متقاربة إلى x أي إن $d(x_n, x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ ، هذا يعني أنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $n_0 = n_0(\varepsilon)$ بحيث إن

$$d(x_n, x) = \sup_i \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| < \varepsilon \;\; ; \;\; n \geq n_0(\varepsilon)$$

ومنه فإن

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| < \varepsilon \;\; ; \;\; n \geq n_0(\varepsilon) \; , \;\; \forall i$$

بسهولة نرى أنه وبالعكس ، إذا كان $\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| < \varepsilon$ من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ وجميع i فإن $d(x_n, x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ ، وبالتالي فإن التقارب **في الفضاء m هو تقارب بالإحداثيات ومنتظم بالنسبة لدليل الإحداثيات .**

٥ – فضاء التوابع المحدودة و القابلة للقياس

(*The Space of Bounded Mesurable Functions*)

قبل البحث في هذا الفضاء سنستعرض المفهوم الآتي . ليكن $\alpha(t)$ تابعاً قابلاً للقياس على المجال $[0, 1]$ ولنرمز بـ $\mathscr{E}$ لصف جميع المجموعات E التي قياسها معدوم المتوضعة في المجال $[0, 1]$ ولنستعرض على الصف $\mathscr{E}$ التابع الآتي :

$$\sup_{[0,1] \setminus E} \alpha(t) = \mu(E)$$

ولنبين بأنه إذا كان هذا التابع محدوداً من أجل كل مجموعة $E \in \mathscr{E}$ ، فإنه يأخذ قيمة أصغرية على مجموعة ما E_α . ليكن :

$$\mu_0 = \inf_{E \in \mathscr{E}} \mu(E)$$

وفقاً لتعريف الحد الأدنى الأعظمي ، يمكننا إيجاد متتالية من المجموعات مثل $\{ E_n \}$ $(\mathscr{E} \supset \{ E_n \})$ بحيث إن :

$$\mu_0 \leq \sup_{[0,1] \setminus E_n} \alpha(t) < \mu_0 + \frac{1}{n}$$

ليكن : $E_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ عندئذ يكون $m\ E_\alpha = 0$ و

$$\mu_0 \leq \sup_{[0,1]\setminus E_\alpha} \alpha(t) \leq \sup_{[0,1]\setminus E_n} \alpha(t) < \mu_0 + \frac{1}{n}$$

بما أن هذه المتراجحة صحيحة من أجل أي عدد n ، فإنه ينتج أن $\mu_0 = \mu_0(E_\alpha)$.

يسمى العدد μ_0 بالقيمة العظمى الأساسية للتابع $\alpha(t)$ على المجال $[0, 1]$ ونرمز لذلك بـ

$$\text{Vrai}\max_{[0,1]} \alpha(t) = \min_{E\in \mathcal{E}} \{ \sup_{[0,1]\setminus E} \alpha(t) \}$$

لتكن X مجموعة جميع التوابع القيوسة على المجال $[0, 1]$: $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$..... و التي قيمها العظمى الأساسية محدودة . سنعتبر أن التابعين $x(t)$ ، $y(t)$ من X متطابقان إذا كانا متساويين تقريباً في كل مكان . لنعرف المسافة بين أي تابعين $x(t)$ ، $y(t)$ من X بالعلاقة :

$$d(x, y) = \text{Vrai}\max_{[0,1]} \left| x(t) - y(t) \right|$$

لنتأكد من صحة موضوعات المسافة .

١) بما أن

$$\sup_{[0,1]\setminus E} \left| x(t) - y(t) \right| \geq 0$$

فإن $d(x_n, x) \geq 0$ وإضافة إلى ذلك فإنه من الواضح أن $d(x, y) = 0$ إذا كان $x(t) = y(t)$ تقريباً في كل مكان . بالعكس إذا كان $d(x, y) = 0$ فإنه من أجل مجموعة ذات قياس معدوم مثل E_{xy} يكون :

$$\sup_{[0,1]\setminus E_0} \left| x(t) - y(t) \right| = 0$$

أي إن $x(t) = y(t)$ خارج المجموعة E_{xy} وبالتالي فإن $x(t) = y(t)$ تقريباً في كل مكان .

٢) $d(x, y) = d(y, x)$ وضوحاً

٣) لتكن $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$ توابع من المجموعة X ولتكن E_{xz} ، E_{yz} مجموعتين قياس كل منهما معدوم و بحيث إن :

$$d(x,z) = \sup_{[0,1]\setminus E_{xz}} |x(t)-z(t)|$$

$$d(y,z) = \sup_{[0,1]\setminus E_{yz}} |y(t)-z(t)| \cdot$$

لنضع $E_{xy} = E_{xz} \cup E_{yz}$ عندئذ يكون :

$$\sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t)-y(t)| \le$$

$$\le \sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |x(t)-z(t)| + \sup_{[0,1]\setminus E_{xy}} |z(t)-y(t)| \le$$

$$\le \sup_{[0,1]\setminus E_{xz}} |x(t)-z(t)| + \sup_{[0,1]\setminus E_{yz}} |z(t)-y(t)| =$$

$$= d(x,z) + d(z,y)$$

أكثر من ذلك فإن

$$d(x,y) = \underset{[0,1]}{\text{Vrai max}} |x(t)-y(t)| \le d(x,z) + d(z,y)$$

وهو المطلوب .

يرمز عادة لفضاء التوابع المحدودة والقابلة للقياس على المجال $[0,1]$ بـــــ $\widetilde{M}\,[0,1]$. لنبين طبيعة التقارب في هذا الفضاء . لتكن $x_n(t)$ و $x(t)$ توابع من الفضاء $\widetilde{M}\,[0,1]$ ولتكن $d(x_n,x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ إن ذلك يعني أنه من أجل $0 < \varepsilon_k$ معطى يكون

$$d(x_n,x) = \min_E \{ \sup_{[0,1]\setminus E} |x_n(t)-x(t)| \} < \varepsilon_k$$

من أجل $n_0(\varepsilon_k) \le n$. عندئذ توجد مجموعة مثل E_k وقياسها معدوم وبحيث إن :

$$\sup_{[0,1]\setminus E_k} |x_n(t)-x(t)| < \varepsilon_k$$

من أجل $n_0(\varepsilon_k) \le n$.

ولذلك فإن $|x_n(t)-x(t)| < \varepsilon_k$ من أجل $n_0(\varepsilon_k) \le n$ من أجل أية نقطة $t \ni [0,1] \setminus E_k$.

لنأخـذ الآن متتاليــة $\{\varepsilon_m\}$ حيـث إن $\varepsilon_m \to 0$ عـندما $m \to \infty$ ولــتكن E_m المجموعات الموافقة للمتتالية المذكورة ، وليكن $0 < \varepsilon$ كيفياً عندئذ يكون لدينا :

$$\left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon_k < \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon_k)$ وجميع $t \in [0,1] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ بذلك نجد أن $x_n(t) \to x(t)$ تقريباً في كل مكان على المجال $[0, 1]$.وبانتظام على المجموعة ذات القياس التام المشار إليها .

بالعكس ، لتكن المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة بانتظام تقريباً في كل مكان إلى $x(t)$ ، بالتالي فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $n_0(\varepsilon)$ ومجموعة E_ε قياسها معدوم وبحيث إن

$\left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon$ من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ وأية نقطة $t \in [0, 1] \setminus E_\varepsilon$

ويكون عندئذ :

$$\sup_{t \in [0,1] \setminus E_\varepsilon} \left| x_n(t) - x(t) \right| \leq \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ ومن هذا ينتج بدوره أن

$$\min_E \left\{ \sup_{t \in [0,1] \setminus E} \left| x_n(t) - x(t) \right| \right\} \leq \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$. أي إن $d(x_n, x) \to 0$ عندما $n \to \infty$.

بالتالي فإن التقارب في الفضاء $\tilde{M}[0, 1]$ هو تقارب بانتظام تقريباً في كل مكان .

٦ – فضاء المتتاليات العددية المتقاربة

(The Space of Convergent Sequences of Numbers)

لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية المتقاربة :

$$x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \}$$

علماً بأن $\lim_i \xi_i = \xi$. ليكن

$$y = \{ \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots \}, \quad x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \}$$

ولنضع

$$d(x, y) = \sup_i \left| \xi_i - \eta_i \right|$$

يرمز لهذا الفضاء بـ c . من الواضح أن c فضاء المتتاليات العددية المتقاربة هو فضاء جزئي من الفضاء m فضاء المتتاليات العددية المحدودة .

٧– فضاء التوابع الحقيقية المحدودة

(*The space of Rael bounded Functions*)

لنستعرض مجموعة جميع التوابع المحدودة $x(t)$ للمتحول الحقيقي t والمعرفة على المجال $[0,1]$. لنعرف مسافة على هذه المجموعة بالعلاقة :

$$d(x,y) = \sup_{t} \left| x(t) - y(t) \right|$$

بسهولة يمكن التأكد من أن جميع موضوعات المسافة محققة و يرمز لفضاء التوابع الحقيقية المحددة مقرونا بالمسافة المعرفة أعلاه بـ $M[0,1]$. وبسهولة نجد أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب بانتظام كما أن $M[0,1] \supset C[0,1]$.

٨– فضاء جميع المتتاليات العددية

(*The Space of all Sequences of Numbers*)

لنستعرض مثالاً عن فضاء قابل للتمتير . لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية الحقيقية ، لنعرف في هذه المجموعة مفهوم الانتقال إلى النهاية . بفرض أن $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ تتقارب إلى $x = \{\xi_i\}$ إذا كان $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ من أجل جميع $i = 1, 2, 3, \ldots$ (في الحالة العامة ليس بانتظام بالنسبة لـ i) بذلك نحصل على فضاء غير متري والذي نرمز له بـ S . ولنبين أنه يمكن تمتير الفضاء S .

لتكن $S \ni x = \{\xi_i\}$ و $y = \{\eta_i\} \in S$ ولنضع :

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|}$$

بسهولة يمكن التأكد من أن موضوعات المسافة $(i) - (iii)$ محققة ولنتأكد من موضوعة المثلث . استناداً إلى المتراجحة $(1.3.9)$ نجد أن :

$$d(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \zeta_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i + \eta_i - \zeta_i|} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{1 + |\xi_i - \eta_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\eta_i - \zeta_i|}{1 + |\eta_i - \zeta_i|} = d(x,y) + d(y,z)$$

وهو المطلوب .

لنبين أن التقارب بمفهوم المسافة المعرفة هو تقارب بالإحداثيات (إلا أنه في الحالة العامة ليس بانتظام بالنسبة لدليل الإحداثيات) . في الحقيقة لتكن

$x_n = \{ \xi_i^{(n)} \}$ و $x = \{\xi_i\}$ و $x_n \to x$ ، هذا يعني أن

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|} < \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ ، وبشكل خاص يكون من أجل كل عدد مثبت i

$$\frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|} < \varepsilon \Rightarrow \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| < \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0(\varepsilon)$ ، وبما أن i مثبت و ε كيفي فإن ذلك يعني أن

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

لنفرض العكس :

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

من أجل كل عدد i . لنأخذ عدداً ε كيفياً موجباً ($0 < \varepsilon$) . ولنختر أولاً عدداً m بحيث إن

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

عندئذٍ يكون :

$$d(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|} <$$

$$< \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right|} + \frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أن عدد الحدود في المجموع المتبقي منته و مثبت فإنه يمكننا اختيار $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \frac{\left| \xi_i^{(m)} - \xi_i \right|}{1 + \left| \xi_i^{(m)} - \xi_i \right|} < \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل $n \le n_0(\varepsilon)$. وعندئذ ومن أجل $n_0(\varepsilon) \le n$ يكون لدينا

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

وهو المطلوب .

مما برهناه ينتج أن التقارب بمفهوم المسافة المعرفة يتطابق مع التقارب السابق المعرف في الفضاء S وبالتالي فإن تعريف المسافة هذه يؤدي إلى تمتير الفضاء S .

٩- فضاء التقارب بالقياس

(The Space of Convergence in Measure)

لتكن X مجموعة جميع التوابع $x(t)$ القيوسة والمعرفة على المجال $[0, 1]$ سنعتبر أن التابعين المتساويين تقريباً في كل مكان متطابقان . لنعرف مسافة بالمساواة

$$d(x, y) = \int_0^1 \frac{\left| x(t) - y(t) \right|}{1 + \left| x(t) - y(t) \right|} dt$$

كما في المثال السابق يمكننا التأكد من تحقق موضوعات المسافة . نرمز للفضاء الناتج عن هذه المسافة بـ $S[0, 1]$ ويمكن البرهان على أن التقارب في $S[0, 1]$ هو تقارب بالقياس (انظر على سبيل المثال [9]) .

١٠- فضاء التوابع القابلة للمكاملة من الدرجة P :

(The Space of The Functions with Integrat p^{th} power)

لتكن X مجموعة جميع التوابع $x(t)$ المنتمية لـ $L^p[0,1]$

(انظر الفقرة § ٣) . إذا كان $x(t) \in L^p[0,1]$ و $y(t) \in L^p[0,1]$

فإننا نضع : $(i)-(iii)$

$$d(x, y) = \left(\int_0^1 \left| x(t) - y(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

بسهولة يمكن التحقق من صحة موضوعات المسافة $(i)-(iii)$ أما موضوعة المثلث

فنتتج من متراجحة مينكوفسكي من أجل التكاملات ($1.3.5$) . يسمى الفضاء $L^2[0,1]$ **بفضاء هيلبرت التابعي** .

لتكن المتتالية $\{x_n(t)\}$ ∋ $L^p[0,1]$ متقاربة إلى التابع $x(t) \in L^p[0,1]$ أي إن :

$$\int_0^1 | x_n(t) - x(t) |^p \, dt \to 0$$

عندما $n \to \infty$ ، عندئذ نقول إن المتتالية $\{x_n(t)\}$ تتقارب وسطياً من الدرجة p إلى التابع $x(t)$. في الحالة $p = 2$ نقول ببساطة تتقارب وسطياً .

١١- فضاء المتتاليات العددية l_p $(p \geq 1)$

(*The Space* l_p *of Number Sequences*)

لتكن X مجموعة جميع المتتاليات العددية الحقيقية :

$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ المنتمية إلى l_p (انظر الفقرة § ٣) .إذا كانت

$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ و $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$

من l_p فإننا نعرف المسافة بالعلاقة :

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i - \eta_i |^p \right)^{1/p}$$

بسهولة يمكن التأكد من صحة موضوعات المسافة (i) - (iii) أما موضوعة المثلث فنتتج من متراجحة مينكوفسكي للمجاميع ($1.3.8$) . **يسمى الفضاء** l_2 **بفضاء هيلبرت الإحداثي** .

يمكن البرهان (*) على أن تقارب المتتالية $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ إلى العنصر $x = \{\xi_i\}$ في الفضاء l_p يعني أن :

١) - $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ من أجل $n \to \infty$ ومن أجل جميع i .

٢) - من أجل كل عدد $\varepsilon > o$ يوجد عدد مثل $N_0(\varepsilon)$ بحيث إن :

(*) انظر اختبار التراص في الفضاء l_p في كتاب :

Liusternik . L . A and Sobolev . V . J . " Elements Of Functional Analysis " Redrick Ungar publishing com . New York 1965 . P . 45

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n)} \right|^p < \varepsilon^p \quad , \quad \forall N > N_o(\varepsilon) \quad , \quad \forall n$$

١٢- الفضاء $l_p^{(n)}$

ليكن X الفضاء العددي ذا الـ n بعداً . أي مجموعة جميع الجمل المرتبة والمؤلفة من n عدداً حقيقياً ، وليكن :

$$y = \{ \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n \} , \quad x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \}$$

لنضع

$$d(x , y) = (\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i - \eta_i |^p)^{1/p}$$

لنرمز للفضاء الناتج بـ $l_p^{(n)}$ في حالة خاصة $l_2^{(n)}$ يكون الفضاء الإقليدي ذو الـ n بعداً .

يمكننا اعتبار $l_p^{(n)} \subset l_p$ إذا طابقنا كل عنصر $\{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \} \ni l_p^{(n)}$ مع العنصر $\{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , 0 , \ldots \} \ni l_p$. من هنا ينتج مباشرة تحقق موضوعات المسافة في $l_p^{(n)}$. إن التقارب في الفضاء $l_p^{(n)}$ هو تقارب بالإحداثيات .

الفضاءات العقدية (*The Complex Spaces*)

إلى جانب الفضاءات $C[0,1]$ ، $L^p[0,1]$ و c و l_p يمكن دراسة الفضاءات التي تحتويها والتي تسمى على الترتيب بالفضاءات $C[0,1]$ ، $L^p[0,1]$ و l_p العقدية . إن عناصر الفضاء العقدي $C[0,1]$ هي التوابع للمتحول الحقيقي وذات القيم المركبة(العقدية) و المستمرة أما عناصر $L^p[0,1]$ فهي التوابع ذات القيم المركبة و التي طويلتها مرفوعة للأس p توابع جمعية . وعناصر الفضاء العقدي c (بالمقابل l_p) هي المتتاليات من الأعداد المركبة المتقاربة (بالمقابل سلسلة الأس P لطويلاتها متقاربة) إن جميع التعاريف المعطاة من أجل الفضاءات الحقيقية يمكن نقلها إلى الفضاءات المركبة .

الفضاءات غير القابلة للتمتير (*Non – metrizable Spaces*)

سنذكر هنا مثالاً عن **مجموعة يمكن تعريف تقارب متتالية فيها ، إلا أنه في الوقت نفسه لا يمكن تعريف مسافة تعرف ذلك التقارب** لنستعرض $F[0,1]$

مجموعة جميع التوابع الحقيقية المعرفة على المجال $[0\ ,\ 1]$. سنعتبر أن المتتالية $\{ x_n(t) \} \subset F[0\ ,1]$ متقاربة إلى $x(t) \in F[0\ ,1]$ إذا كان من أجل كل نقطة مثبتة t :

$$x_n(t) \to x(t)$$

بذلك يكون تقارب متتالية التوابع في المجموعة $F[0\ ,\ 1]$ **هو تقارب نقطي** . إن هذا التقارب غير قابل للتمتير . في الواقع ، لنفرض أنه يمكن تعريف مسافة في $F[0\ ,1]$ بحيث يكون التقارب المعرف بهذه المسافة تقارباً نقطياً لمتتالية التوابع .

لتكن M مجموعة جميع التوابع المستمرة من الفضاء المتري $F[0\ ,1]$. من ناحية أولى واعتماداً على خواص اللصاقة في الفضاء المتري يكون $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$. من ناحية ثانية $\overline{\overline{M}} \neq \overline{M}$ وذلك لأن $\overline{M}$ هي مجموعة التوابع المستمرة مضافاً إليها نهاياتها بمفهوم التقارب النقطي ، أي مجموعة التوابع من صف بير الأول $(Bair)$. (*)

§ ٥– الفضاءات المترية التامة

Complete Metric Spaces

في التحليل الرياضي يعتبر الدور الذي يلعبه اختبار التقارب لكوشي في مجموعة الأعداد الحقيقية هو الدور الأهم لكونه اختباراً لازماً وكافياً . وهذا الاختبار يمكن نقله كلياً إلى الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً E_n .

الشرط اللازم والكافي كي توجد نهاية محدودة لمتتالية النقاط $\{ x_m \}$ من E_n هو أن

$$d(x_m\ ,\ x_k) \to 0 \quad \text{عندما} \quad m\ ,k \to \infty \ .$$

في الواقع لتكن

$x_k = \{ \xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots\ldots, \xi_n^{(k)} \}$ ، $x_m = \{ \xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \ldots\ldots, \xi_n^{(m)} \}$ وليكن

$d(x_m\ , x_k) \to 0$ عندما $m\ , k \to \infty$. من هنا ينتج أن :

$\xi_i^{(m)} - \xi_i^{(k)} \to 0$ من أجل كل عدد i .

لذلك واعتماداً على اختبار كوشي لوجود نهاية محدودة للمتتالية العددية ، فإن :

(*) حول تصنيف بير انظر [9]

$\lim\limits_{m} \xi_i^{(m)} = \xi_i$ وعندئذٍ فإن $x_m \to x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n \}$ ونترك برهان لزوم الشرط للطالب . لاحقاً سنبرهن هذا الجزء من الاختبار من أجل أي فضاء متري.

في خلاف ذلك **قد يكون تطبيق كفاية الشرط في اختبار كوشي ، في فضاء متري كيفي ، غير ممكن** . على سبيل المثال ، إذا عرفنا في مجموعة الأعداد العادية المسافة كما هي معرفة في R ، أي إن $d(x, y) = |x - y|$ ، فإننا نحصل على فضاء متري ، إلا أنه لمتتالية مشكلة من أعداد عادية يمكن أن لا توجد لها نهاية في ذلك الفضاء وفي الوقت نفسه تحقق شرط اختبار كوشي ، يكون الأمر كذلك إذا كانت نهاية المتتالية منتمية إلى R و عدداً حقيقياً (ليس عادياً) . في هذه الفقرة سنستعرض **صفاً من الفضاءات المترية التي يكون من أجلها اختبار كوشي محققاً** .

تعريف تسمى متتالية العناصر $\{ x_n \}$ من الفضاء المتري X متتالية أساسية (أو متقاربة في نفسها) إذا وجد مقابل كل عدد موجب ε عدد $n_0(\varepsilon)$ بحيث إن من أجل جميع قيم n , m و التي هي أكبر من $n_0(\varepsilon)$ ($n_0(\varepsilon) \le n , m$) يكون $d(x_n , x_m) < \varepsilon$.

إذا كانت المتتالية $\{ x_n \}$ متقاربة إلى x_0 فإنها تكون متقاربة في نفسها . في الواقع ، ليكن $\boldsymbol{x_0} = \lim\limits_{n} x_n$ عندئذ من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $n_0(\varepsilon)$ بحيث إن

$$d(x_n , x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل جميع $n_0(\varepsilon) \le n$ وبالتالي فإن :

$$d(x_n , x_m) \le d(x_n , x_0) + d(x_m , x_0) < \varepsilon$$

من أجل $n_0(\varepsilon) \le n , m$. وهو المطلوب .

لنلاحظ أن العكس غير صحيح من أجل فضاء متري كيفي وذلك لأنه توجد فضاءات مترية تكون فيها متتاليات متقاربة في نفسها إلا أنها غير متقاربة إلى أية نهاية .

مثال (١) لتكن X مجموعة من الأعداد العادية ، ولتكن المسافة بين r_1 ، r_2 معرفة بالعلاقة :

$$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$$

عندئذ بسهولة يمكن التأكد من أن X فضاء متري .

لنأخذ المتتالية .... $r_1 = \frac{1}{2}\ ,\ r_2 = \frac{1}{4}\ ,\ .....,r_n = \frac{1}{2^n}$ إن هذه المتتالية تتقارب في نفسها ، كما أنها متقاربة إلى $r_0 = 0$. لنأخذ الآن المتتالية :

$$r_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

هذه المتتالية متقاربة في نفسها إلا أنه لا توجد لها نهاية في الفضاء X وذلك لأن :

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

والعدد e ليس عادياً .

مثال (٢) ليكن X فضاء كثيرات الحدود $P(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ ذو المسافة التشبيشيفية أي إنه إذا كان $Q(t) \ni X$ و $P(t) \ni X$ فإن :

$$d(P, Q) = \max_t |P(t) - Q(t)|$$

لتكن $\{P_n(t)\}$ متتالية من كثيرات الحدود ومتقاربة بانتظام إلى تابع مستمر إلا أنه ليس كثير حدود . من الواضح أن المتتالية $\{P_n(t)\}$ أساسية إلا أن نهايتها لا تنتمي إلى X .

تعريف . إذا كانت كل متتالية متقاربة في نفسها في الفضاء المتري X ، متقاربة إلى نقطة من الفضاء فإن الفضاء X يسمى فضاءً تاماً .

نشير هنا إلى أن المجموعة المغلقة في فضاء تام هي بحد ذاتها فضاء تام .

لندرس الآن تمامية بعض الفضاءات المترية تحديداً .

الفضاء E_n

إن تمامية الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً E_n تنتج من اختبار كوشي في وجود نهاية لمتتالية من نقاط هذا الفضاء .

الفضاء $C[0, 1]$

لتكن $\{x_n(t)\}$ متتالية من الفضاء $C[0, 1]$ ، ولنفرض أن :

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad . \quad n, m \to \infty$$

هذا يعني أنه من أجل المتتالية $\{ x_n (t) \}$ يتحقق شرط كوشي للتقارب المنتظم على المجال [0 , 1] . لنفرض أن $x_0 (t)$ هو نهاية المتتالية $\{ x_n (t) \}$ ، بما أن نهاية متتالية من التوابع المستمرة و المتقاربة بانتظام هو تابع مستمر على المجال $[0 , 1]$ فإن: $x_0 (t) \in C [0 , 1]$ و $d (x_n , x_0) \to 0$ بالتالي فإن $C [0 , 1]$ تـام بمفهوم المسافة التشبيشيفية .

لاحقاً وفي نهاية هذه الفقرة سنبين بأن هذا الفضاء ليس تاماً بالنسبة لمسافة أُخرى .

الفضاء m (فضاء المتتاليات المحدودة)

لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر الفضاء m ومتقاربـة فـي نفـسها ، ولـتكن $x_n = \{ \xi_i^{(n)} \}$ ، بمـا أن $x_n \in m$ فـإن $\left| \xi_i^{(n)} \right| \le K_n$ مـن أجـل $i = 1, 2, \ldots$ ، وبما أنه أيضاً ، $\{ x_n \}$ متقاربة في نفسها ، فإنه مقابل كل عدد $0 < \varepsilon$ معطى يوجد عدد مثل $n_0 (\varepsilon)$ بحيث إن المتراجحـة $d (x_n , x_k) < \varepsilon$ تتحقق من أجل جميع $n_0 (\varepsilon) \le n , k$ أي إن :

$$\sup_i \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)} \right| < \varepsilon \qquad ; \quad n , k \ge n_0 (\varepsilon)$$

من ذلك ينتج أن

$$\sup_i \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(k)} \right| < \varepsilon \qquad (1 . 5 . 1)$$

من أجل $n_0 (\varepsilon) \le n , k$ بانتظام بالنسبة لــ i .

لنثبـت i ، عندئـذ اسـتناداً للعلاقـة (1 . 5 . 1) تحقـق المتتاليـة $\{ \xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \ldots , \xi_i^{(n)}, \ldots \}$ شرط كوشي في وجود النهايـة وبالتـالي فإنهـا تتقارب إلى العدد ξ_i وبذلك نحصل على متتالية الأعداد $\{ \xi_1, \xi_2, \ldots , \xi_n, \ldots \}$. لنجعل الآن k في العلاقة (1 . 5 . 1) يسعى إلـى اللانهايـة عندئـذ نجـد أن المتراجحة :

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \le \varepsilon \qquad (1 . 5 . 2)$$

تتحقق من أجل $n_0 (\varepsilon) \le n$ ومن أجل جميع i . ومنه نجد أن

$$\left| \xi_i \right| \le \left| \xi_i^{(n_0)} - \xi_i \right| + \left| \xi_i^{(n_0)} \right| \le \varepsilon + K_{n_0}$$

إضافة إلى أن المتراجحة تتحقق من أجل جميع i وهــذا يعنــي أن $\{\xi_i\}$ متتاليــة محدودة . أي إن $x_0 = \{\xi_i\} \in m$. من $(1.5.2)$ نجد :

$$\sup_i \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \leq \varepsilon \quad \forall \ n \geq n_0(\varepsilon)$$

أي إن $d(x_n, x_0) \leq \varepsilon$ من أجل $n_0(\varepsilon) \leq n$. وبما أن $0 < \varepsilon$ كيفي فإنــه من ذلك ينتج أن $x_n \to x_0$ عندما $n \to \infty$ وهذا ما يبرهن علــى أن الفــضاء m تام .

الفضاء c (فضاء المتتاليات المتقاربة)

لنبين أن الفضاء c المُستعرض كمجموعة جزئية من m هو مجموعة مغلقــة في m و استناداً إلى ما ذكرنا أعلاه يكون c تاماً .

لتكن $\{x_n\}$ حيث $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_i^{(n)}, \ldots\}$ متتاليــة مــن عناصــر الفضاء c ، لنفــرض أن $x_n \to x_0$ حيــث $x_0 = \{\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_i^{(0)}, \ldots\}$ ولنبرهن على أن $\{\xi_i^{(0)}\}$ متتالية متقاربة . في الحقيقة

$$\left| \xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)} \right| \leq \left| \xi_i^{(0)} - \xi_i^{(n)} \right| + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)} \right| + \left| \xi_j^{(n)} - \xi_j^{(0)} \right| \leq$$

$$\leq 2d(x_n, x_0) + \left| \xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)} \right|$$

ليكن $0 < \varepsilon$ عدداً معطى ولنختــر أولاً n كبيــراً بقــدرٍ كــافٍ وبحيــث يكــون $d(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{4}$ ولنثبت ذلك العدد n . بما أن $\{\xi_i^{(n)}\}$ متتاليــة متقاربــة فإنــه يوجد عدد مثل n_0 وبحيث إنه من أجل $n_0 \leq i, j$ يكون :

$$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_j^{(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

عندئذٍ يكون :

$$\left| \xi_i^{(0)} - \xi_j^{(0)} \right| < \varepsilon$$

من أجل $n_0 \leq i, j$. أي إن $\{\xi_i^{(0)}\}$ متتالية متقاربة وهكذا فإن $x_0 \in c$ وهو المطلوب .

الفضاء $L^p[0,1]$ والفضاء l_p . في نظرية التوابع لمتحول حقيقــي(انظــر على سبيل المثال [9]) يبرهن على أن الفــضاءين $L^p[0,1]$ ، l_p فــضاءان

تاماً ولن نورد هنا خطوات مماثلة للبرهان على ذلك وسندع ذلك لحين معالجة الفضاءات الانعكاسية إذ إن المطلوب سيكون نتيجة لإحدى المبرهنات العامة في التحليل التابعي .

في نهاية هذه الفقرة ، سنبين أن فضاء التوابع المستمرة $C[0,1]$ بالنسبة للمسافة

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|\, dt$$

هو فضاء غير تام .

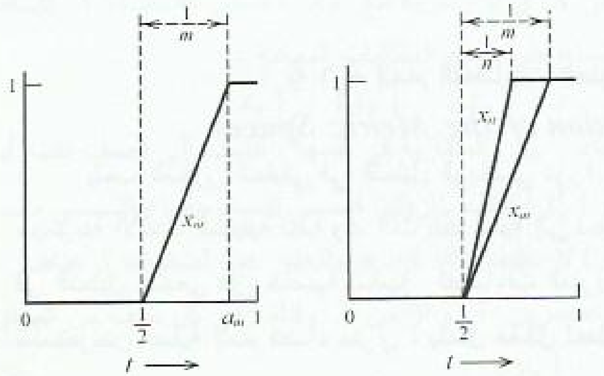
بسهولة يمكن التأكد من أن تابع المسافة المعرف أعلاه يحقق جميع موضوعات المسافة . لتكن $\{x_m(t)\}$ متتالية من التوابع من هذا الفضاء معرفة بالعلاقة :

$$x_m(t) = \begin{cases} 0 & ; \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ m\left(t - \frac{1}{2}\right) & ; \ \frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \\ 1 & ; \ \frac{1}{2} + \frac{1}{m} \le t \le 1 \end{cases}$$

إن هذه المتتالية هي متتالية أساسية ، بمفهوم المسافة المعرفة أعلاه . في الواقع من أجل أي عدد معطى $\varepsilon > 0$ يكون

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

من أجل $m, n > \frac{1}{\varepsilon}$ وتمثل المسافة في هذه الحالة مساحة المثلث المبين في الشكل (٢)



الشكل (٢)

لنبين أن هذه المتتالية ليست متقاربة إلى تابع من الفضاء $C[0,1]$.

لنفرض أن $\{x_m(t)\}$ متقاربة إلى عنصر $x(t)$ من $C[0,1]$ عندئذ يكون

$$d(x_m, x) = \int_0^1 |x_m(t) - x(t)|\, dt =$$

$$= \int_0^{1/2} |x(t)|\, dt + \int_{1/2}^{1/2+\frac{1}{m}} |x_m(t) - x(t)|\, dt + \int_{1/2+\frac{1}{m}}^{1} |1 - x(t)|\, dt$$

وبما أن التوابع المستكملة غير سالبة ، فإن كلاً من التكاملات في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة يكون كذلك ، أي غير سالب ، وبالتالي فإن العلاقة $d(x_m, x) \to 0$ تقتضي أن يقترب كل من التكاملات إلى الصفر وبما أن $x(t)$ تابع مستمر فيجب أن يكون

$$\begin{cases} x(t) = 0 & ; \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ x(t) = 1 & ; \quad t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

وهذا غير ممكن من أجل تابع مستمر وبالتالي فإن $\{x_m(t)\}$ لا يمكن لها أن تتقارب إلى تابع منتم إلى $C[0,1]$ ، وهذا بدوره يؤدي إلى أن الفضاء $C[0,1]$ غير تام بالنسبة للمسافة المعرفة أعلاه .

§ ٦ – إتمام الفضاءات المترية

Completion of the Metric Spaces

يلعب المحور الحقيقي في التحليل الرياضي دوراً كبيراً نتيجة لكون بنية مجموعة الأعداد الحقيقية تامة وقد أدت تلك البنية إلى دعم التحليل الرياضي ، وأما في التحليل التابعي فإن خاصية تمامية الفضاءات المترية تلعب دوراً هاماً ، لذلك سنستعرض عملية إتمام فضاء متري ، **بشكل مماثل لعملية إتمام مجموعة الأعداد**

العادية بمجموعة الأعداد الصماء . وسنمهد لذلك بواحد من المفاهيم التي سنحتاجها لاحقاً في دراستنا .

ليكن X ، Y فضاءين متريين ولتكن $d_X(x_1, x_2)$ المسافة بين العنصرين x_1 ، x_2 من الفضاء X و $d_Y(y_1, y_2)$ المسافة بين العنصرين y_1 ، y_2 من الفضاء Y . إذا وجد تطبيق وحيد القيمة بالتبادل (غامر ومتباين) بين عناصر الفضاءين X ، Y وبحيث تكون المسافة بين كل عنصرين من أحد الفضاءين مساوية للمسافة بين (صورتيهما) في الفضاء الآخر فإننا نقول إن الفضاءين X ، Y **ايزومتريان** (متساويا المسافة) .

بسهولة نرى أنه من وجهة نظر تلك المسائل والمرتبطة فقط بالمسافة بين العناصر ، على سبيل المثال ، من وجهة نظر عملية التقارب ، التمامية وغيرها ، يمكننا اعتبار أن الفضاءين الايزومتريين متطابقان .

من الممكن التحدث ليس فقط عن الايزومترية بين فضاءين X ، Y ، وإنما عن الايزومترية بين المجموعات المتوضعة في هذين الفضاءين ، وفي المسائل المرتبطة فقط بالمسافة تكون النتائج المحققة من أجل إحدى المجموعتين محققة من أجل المجموعة الأخرى وكذلك من أجل جميع المجموعات الايزومترية معها .

ليكن X_0 فضاء مترياً معلوماً وغير تام ، أي إنه في هذا الفضاء توجد متتالية متقاربة في نفسها (أساسية) إلا أنها لا تملك نهاية في X_0 .

لنبين أنه في هذه الحالة يوجد فضاء متري آخر X تام ويحتوي على مجموعة جزئية X' كثيفة في كل مكان في X و ايزومترية مع X_0 . يسمى الفضاء X **بفضاء الإتمام** للفضاء X_0 . لنستعرض جميع المتتاليات الممكنة :

$$\{x_n\} , \{y_n\} , \{z_n\} , \ldots$$

المشكلة من عناصر الفضاء X_0 والمتقاربة في نفسها . لننسب إلى الصف نفسه أية متتاليتين $\{x_n\}$ و $\{x'_n\}$ متقاربتين في نفسيهما والتي من أجلهما $d(x_n, x'_n) \to 0$ عندما $n \to \infty$ ولنعتبر هذه الصفوف $\tilde{x}$ عناصر من فضاء جديد X . لنأخذ عنصرين $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ من X ولنأخذ في كل صف من الصفوف $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$ متتالية $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$.

ولنبين وجود النهاية $\lim_{n} d(x_n, y_n)$. في الحقيقة لدينا :

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(y_m, y_n)$$

ومنه نجد

$$d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m) \leq d(x_n, x_m) + d(y_m, y_n) \quad (1.6.1)$$

بمبادلة دور كل من n و m نجد :

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \quad (1.6.2)$$

من $(1.6.1)$ و $(1.6.2)$ نجد :

$$\left| d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \right| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$

إن الطرف الأيمن من هذه المتراجحة يسعى إلى الصفر عندما $n, m \to \infty$. لذا فإن المتتالية العددية $\{ d(x_n, y_n) \}$ تحقق شرط كوشي وبالتالي تكون النهاية $\lim_{n} d(x_n, y_n)$ موجودة .

لنعرف الآن مسافة في X بالعلاقة :

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n} d(x_n, y_n)$$

ولنبين أن هذه المسافة المعرفة لا تتعلق باختيارنا للمتتاليتين $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ في الصفين الموافقين . لنأخذ متتاليتين أخريتين $\{x'_n\}$, $\{y'_n\}$ من نفس الصفين $\tilde{x}$ و $\tilde{y}$. عندئذ يكون

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$$

ومنه نجد أن

$$\lim_{n} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n} d(x'_n, y'_n)$$

وبالمثل نجد العكس

$$\lim_{n} d(x'_n, y'_n) \leq \lim_{n} d(x_n, y_n)$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{n} d(x_n, y_n) = \lim_{n} d(x'_n, y'_n) .$$

لنتأكد الآن من تحقق موضوعات المسافة$(i - ii)$ بما أن $0 \leq d(x_n, y_n)$ فإن

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n} d(x_n, y_n) \geq 0$$

وبالتالي فإن المساواة $d(\tilde{x},\tilde{y}) = \lim\limits_{n} d(x_n , y_n) = 0$ تعني بالفرض أن المتتاليتين $\{x_n\}$ ، $\{y_n\}$ تنتميان إلى الصف نفسه .

وبما أن $\{x_n\}$ متتالية كيفية من الصف $\tilde{x}$ و $\{y_n\}$ متتالية كيفية من الصف $\tilde{y}$ فإن $\tilde{y} = \tilde{x}$.

iii) $d(\tilde{x},\tilde{y}) = d(\tilde{y},\tilde{x})$ محققة وضوحاً .

iv) إذا كانت $\{x_n\} \in \tilde{x}$ و $\{y_n\} \in \tilde{y}$ و $\{z_n\} \in \tilde{z}$ فإنه من الواضح أن

$$
\begin{aligned}
d(\tilde{x},\tilde{z}) = \lim_{n} d(x_n , z_n) &\leq \\
&\leq \lim_{n} d(x_n , y_n) + \lim_{n} d(y_n , z_n) = \\
&= d(\tilde{x},\tilde{y}) + d(\tilde{y},\tilde{z})
\end{aligned}
$$

لنبرهن على أن X فضاء تام . لنأخذ متتالية $\{\tilde{x}_1 , \tilde{x}_2 , \ldots , \tilde{x}_n , \ldots\}$ من العناصر من X ومتقاربة في نفسها . أي إن :

$$d(\tilde{x}_n , \tilde{x}_m) \to 0 \quad ; \quad n , m \to \infty$$

في كل صف $\tilde{X}_n$ نأخذ متتالية ما $\{x_1^{(n)} , x_2^{(n)} , \ldots , x_k^{(n)} , \ldots\}$

وبما أن هذه المتتالية متقاربة في نفسها فإنه يمكننا اختيار مثل k_n بحيث إن

$$d(x_p^{(n)} , x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} \quad ; \quad p > k_n$$

لنستعرض الآن المتتالية $\{x_{k_1}^{(1)} , x_{k_2}^{(2)} , \ldots , x_{k_n}^{(n)} , \ldots\}$ ولنبين أنها متقاربة في نفسها . لدينا

$$d(x_{k_n}^{(n)} , x_{k_m}^{(m)}) \leq d(x_{k_n}^{(n)} , x_p^{(n)}) + d(x_p^{(n)} , x_p^{(m)}) + d(x_p^{(m)} , x_{k_m}^{(m)}) \quad (1.6.3)$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً معطى . بما أن :

$$d(\tilde{x}_n , \tilde{x}_m) \to 0 \quad ; \quad n , m \to \infty$$

فإنه يوجد عدد مثل n_0 بحيث إنه من أجل m و $n \leq n_0$ يكون :

$$d(\tilde{x}_n , \tilde{x}_m) = \lim_{p} (x_p^{(n)} , x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

لذلك من أجل $n \geq n_0$ و m و من أجل p كبير بقدر كاف يكون لدينا

$$d(x_p^{(n)} , x_p^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.6.4)$$

وفقا لذلك يمكننا اعتبار n_0 بحيث إن : $\frac{\varepsilon}{4} > \frac{1}{n_0}$ بتثبيت m و n مع تحقيقهما

للشرط $n_0 \leq m , n$ وباعتبار p كبيراً و بحيث إن $k_m < p$ و $k_n < p$ عندئذ

و تبعاً لاختيار الأعداد k_n ، k_m نجد

$$d(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad d(x_p^{(m)}, x_{k_m}^{(m)}) < \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.6.5)$$

من $(1.6.3)$ و $(1.6.4)$ و $(1.6.5)$ ينتج أنه من أجل

m و $n_0 \leq n$ يكون :

$$d(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_m}^{(m)}) < \varepsilon$$

أي إن المتتالية $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ متقاربة في نفسها .

لنرمز للصف الحاوي على المتتالية $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ بـــ $\widetilde{x}$. ولنبين أنه $\widetilde{x}_n \to \widetilde{x}$

وضوحاً لدينا :

$$d(\widetilde{x}_n , \widetilde{x}) = \lim_n d(x_p^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \leq$$

$$\leq \lim_p d(x_p^{(n)}, x_{k_n}^{(n)}) + \lim_p d(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) <$$

$$< \frac{1}{n} + \lim_p d(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) \qquad (1.6.6)$$

بما أن المتتالية $\{x_{k_n}^{(n)}\}$ متقاربة في نفسها ، فإنه من أجل $\varepsilon > 0$ معطى يوجد عدد

مثل n_0 بحيث إنه

$$d(x_{k_n}^{(n)}, x_{k_p}^{(p)}) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.6.7)$$

من أجل $n_0 \leq n$. وفقاً لذلك ودون المس بعمومية المسألة يمكننا اعتبار

$\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{n_0}$. من $(1.6.6)$ و $(1.6.7)$ ينتج أنه من أجل $n_0 \leq n$

يكون

$$d(\widetilde{x}_n , \widetilde{x}) < \varepsilon$$

أي إن المتتالية $\{\widetilde{x}_n\}$ متقاربة إلى العنصر $\widetilde{x}$ وبذلك نكون قد برهنا على أن الفضاء X تام.

لنستعرض الآن المتتاليات **التوقفية** أي المتتاليات من الشكل $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$ والمتقاربة في نفسها وضوحاً وبالتالي فإن كلاً منها تنتمي إلى صف ما والذي بدوره عنصر من X. من الواضح أنه لصف واحد وفقط لذلك الصف تنتمي متتالية واحدة فقط توقفية. إذا كان الآن

$$\{x, x, \ldots, x, \ldots\} \in \widetilde{x} \quad , \quad \{y, y, \ldots, y, \ldots\} \in \widetilde{y}$$

فإنه من الواضح أن :

$$d(x,y) = d(\widetilde{x}, \widetilde{y})$$

لنبين الآن أن X_0 ايزومتري مع فضاء جزئي X'، من الفضاء X، وكثيف في كل مكان في X. لننسب إلى X' جميع الصفوف $\widetilde{x}$ والتي ضمن المتتاليات التي تنتمي إليها توجد متتالية توقفية $\{x, x, \ldots, x, \ldots\}$. وبين الصفوف $\widetilde{x} \in X'$ والعناصر x والتي منها تتشكل المتتالية التوقفية المنسوبة إلى $\widetilde{x}$ يوجد تقابل وحيد القيمة بالتبادل، وإضافة إلى ذلك إذا كان $\{x\} \in \widetilde{x}$ و $\{y\} \in \widetilde{y}$ فإن : $d(x,y) = d(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ وبالتالي فإن هذا التقابل بين X_0 و X' هو تقابل ايزومتري (متساوي المسافة).

بسهولة نرى أن X' كثيف في كل مكان في X، أي إنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ وأي عنصر $\widetilde{x} \in X$ يوجد عنصر مثل $\widetilde{x}_\varepsilon \in X'$ بحيث إن : $d(\widetilde{x}, \widetilde{x}_\varepsilon) \le \varepsilon$. في الواقع ليكن $\widetilde{x}$ صفاً يحتوي داخله متتالية متقاربة في نفسها $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. ولنأخذ عدداً مثل n بحيث يكون $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ من أجل $n < m$، ولنبن المتتالية التوقفية $\{x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots\}$ ولنرمز بـ $\widetilde{x}_\varepsilon$ للصف الذي يحتوي على هذه المتتالية

من الواضح أن $\widetilde{x}_\varepsilon \in X'$ كما أن :

$$d(\widetilde{x}, \widetilde{x}_\varepsilon) = \lim_{m} d(x_m, x_n) \le \varepsilon$$

وهو المطلوب .

لنبين الآن أن فضاء الاتمام لـ X_0 وحيد بغض النظر عن ايزومترية. أي إنه يوجد فقط فضاء واحد X بغض النظر عن ايزومترية (مع فضاء آخر) ، تام ويحتوي على مجموعة جزئية كثيفة ايزومترية مع X_0 . في الحقيقة ليكن Y فضاءً تاماً آخر يحتوي داخله X_0 الكثيف في كل مكان .عندئذ كل نقطة $\tilde{y}$ و Y تكون نهاية لمتتالية ما $\{ x_1 , x_2 , ... , x_n , . . . \} \subset X_0$. وبما أن هذه المتتالية متقاربة في نفسها فإنها تعرف عنصراً $\tilde{x}$ و X ولنضع هذا العنصر في تقابل مع العنصر $\tilde{y}$. لنفرض.

الآن العكس . لتكن العنصر $\tilde{\xi}$ و X معطى ولتكن $\{ \xi_1 , \xi_2 , ... , \xi_n , . . . \}$ متتالية ما أساسية من الصف $\tilde{\xi}$. بما أن هذه المتتالية الأساسية تقع في الفضاء التام Y فإنها تعرف عنصراً ما $\tilde{\eta}$ و Y ولنقابل هذا العنصر بالعنصر $\tilde{\xi}$. بذلك نحصل على تقابل بين عناصر الفضاءين Y و X وحيد القيمة . وبما أنه ، بالإضافة إلى ذلك ، لدينا

$$d(\tilde{x} , \tilde{\xi}) = \lim_{n} d (x_n , \xi_n) = d(\tilde{y} , \tilde{\eta}) \qquad (*)$$

فإن التقابل هو تقابل ايزومتري .

مثال ١. لنأخذ الفضاء l'_p المشكل من جميع الجمل المرتبة $\{ \xi_1 , \xi_2 , ... , \xi_{k_1} , 0 , 0 , . . . \}$ حيث ξ_i أعداد حقيقية أما k_1 فعدد طبيعي .إذا كان

$$x = \{ \xi_1 , \xi_2 , . . . , \xi_{k_1} , 0 , 0 , . . . \} \quad , \quad y = \{ \eta_1 , \eta_2 , . . . , \eta_{k_2} , 0 , 0 , . . . \}$$

وكان $k_1 \leq k_2$ فإننا نضع

$$d(x , y) = \left(\sum_{i=1}^{k_1} \left| \xi_i - \eta_i \right|^p + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \left| \eta_i \right|^p \right)^{1/p}$$

إن l'_p فضاء جزئي من l_p ، كما أنه غير تام ، وذلك لأنه على سبيل المثال المتتالية :

$$x_1 = \{ 1 \} , x_2 = \{ 1 , \frac{1}{2} \} , . . . , x_n = \{ 1 , \frac{1}{2} , . . . , \frac{1}{2^{n-1}} \} , . . .$$

(*) بسهولة يمكن التأكد بأنه إذا كان $x_n \to x$ ، $y_n \to y$ في فضاء متري فإن $d(x_n , y_n) \to d(x , y)$

متقاربة في نفسها :

$$d(x_n, x_m) = \left(\sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^{ip}} \right)^{1/p} \to 0 \ ; \ m, n \to \infty \ ; \ m < n$$

إلا أنه لا توجد لها نهاية في l'_p . لنرمز بـ X لفضاء الإتمام للفضاء l'_p وبما أنه من ناحية أُخرى ، من الواضح ، أن l'_p محتوى في l_p وكثيف في كل مكان فيه فإن X ايزومتري مع l_p بذلك نجد أن فضاء الإتمام للفضاء l_p يقود إلى فضاء ايزومتري مع l_p .

مثال ٢ . ليكن $C_0 [\, 0 \,, 1 \,]$ فضاء كثيرات الحدود المعرفة على المجال $[0 \,, 1]$ ولنفرض أنه في هذا الفضاء قد عرفت المسافة بالعلاقة

$$d(p,q) = \max_t | p(t) - q(t) |$$

من الواضح أن الفضاء $C_0 [\, 0 \,, 1]$ غير تام . وبما أن $C_0 [\, 0 \,, 1]$ محتوى وكثيف في كل مكان في الفضاء $C [\, 0 \,, 1]$ ، فإن فضاء الإتمام للفضاء $C_0 [\, 0 \,, 1]$ يؤدي إلى فضاء ايزومتري مع $C [\, 0 \,, 1]$.

مثال ٣ . ليكن $L'^p [\, 0 \,, 1 \,]$ فضاء التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[\, 0 \,, 1]$ والمزود بالمسافة :

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 | x(t) - y(t) |^p \, dt \right)^{1/p}$$

إن $L'^p \, [0 \,, 1 \,]$ فضاء غير تام ، وذلك لأن متتالية التوابع المستمرة المتقاربة وسطياً بالأس p إلى تابع منقطع هي متتالية أساسية في $L'^p \, [0 \,, 1]$ إلا أنه لا توجد لها نهاية في هذا الفضاء . بإتمام الفضاء $L'^p \, [0 \,, 1 \,]$ نحصل على فضاء ايزومتري مع $L^p \, [0 \,, 1 \,]$.

§ ٦ – مبرهنات حول الفضاءات التامة
The Theorems on Complete Spaces

سنستعرض أولاً مبرهنة مماثلة لمبرهنة كانتور المتعلقة بالمجالات المغلقة .

مبرهنة (١) . ليكن X فضاءً مترياً تاماً ولنفرض أنه في هذا الفضاء توجد متتالية من الكرات المغلقة المتوضعة كل منها في الأُخرى (أي الكرة التي تلي محتواة داخل الكرة السابقة) والتي أنصاف أقطارها تسعى إلى الصفر ، عندئذ توجد نقطة واحدة وواحدة فقط تنتمي إلى جميع هذه الكرات .

البرهان . لتكن الكرات هي

$$\overline{S}(a_1,\varepsilon_1),\overline{S}(a_2,\varepsilon_2),\ldots,\overline{S}(a_n,\varepsilon_n),\ldots$$

حسب الفرض لدينا :

$$\overline{S}_1\supset\overline{S}_2\supset\ldots\supset\overline{S}_n\supset\ldots\quad;\ \left(\overline{S}_n=\overline{S}(a_n,\varepsilon_n)\right)$$

ولنستعرض متتالية مراكز هذه الكرات :

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

بما أن $\overline{S}_n\supset\overline{S}_{n+p}$ فإن $a_{n+p}\in\overline{S}(a_n,\varepsilon_n)$ ولذلك فإن

$$d(a_{n+p},a_n)\le\varepsilon_n$$

وبالتالي فإن :

$$d(a_{n+p},a_n)\to 0\ ;\ n\to\infty$$

أي إن متتالية المراكز متقاربة في نفسها . وبما أن الفضاء X تام فإن هذه المتتالية تتقارب إلى عنصر $a\in X$. لنأخذ كرة ما $\overline{S}_k$ (k عدد مثبت) عندئذ تكون النقاط $a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+n},\ldots$ منتمية إلى تلك الكرة ونتيجة لكون الكرات $\overline{S}_k$ مغلقة فإن النهاية a للمتتالية $a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m},\ldots$ تنتمي أيضاً إلى $\overline{S}_k$ ، بذلك يكون :

$$a=\lim_n a_n$$

أي إن a تنتمي إلى جميع الكرات .

لنفرض الآن أنه توجد نقطة أُخرى b مختلفة عن a وتنتمي إلى جميع الكرات أي إن

$$d(a,b) = \delta > 0$$

بما أن النقطتين a , b ∋ $\bar{S}_n$ مع $n = 1, 2, \ldots$ فإنه يكون لدينا

$$\delta = d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b) \leq 2\varepsilon_n$$

وهذا غير ممكن و ذلك لأن $\varepsilon_n \to 0$ عندما $n \to \infty$.

ملاحظة . من الممكن تعميم المبرهنة أعلاه . نسمي العدد

$$d(F) = \sup_{x,y \in F} d(x,y)$$

قطراً للمجموعة المغلقة والمحدودة F من الفضاء المتري X .

مبرهنة (1) . ليكن X فضاءً مترياً تاماً ولنفرض أنه توجد في هذا الفضاء متتالية من المجموعات المغلقة المتوضعة كل منها في الأُخرى و أقطارها تسعى إلى الصفر .عندئذٍ توجد نقطة واحدة و واحدة فقط تنتمي إلى جميع تلك المجموعات .

إن البرهان مماثل في واقع الحال ، للبرهان المذكور أعلاه للمبرهنة (١) .

من المعلوم أن خاصة المحور الحقيقي المثبتة في مبرهنة كانتور يمكن اعتمادها كتعريف لتمامية أو استمرار مجموعة الأعداد الحقيقية . وبالمثل فإن المبرهنة (١) المتعلقة بتوضع الكرات تميز تمامية الفضاء المتري .

مبرهنة(٢). إذا كان تقاطع أية متتالية من الكرات المغلقة و المتوضعة واحدة في الأُخرى والتي أقطارها تسعى للصفر غير خال في فضاء متري X ، فإن الفضاء X يكون تاماً .

البرهان . لتكن $\{x_n\}$ متتالية أساسية . ولنختر n_k بحيث يكون :

$$d(x_{n_{k+p}}, x_{n_k}) < \frac{1}{2^k}$$

من أجل أي عدد $0 < p$. لتكن $\bar{S}_k$ كرة مغلقة نصف قطرها $\frac{1}{2^{k-1}}$ و مركزها في النقطة x_{n_k} . في هذه الحالة يكون لدينا : $\bar{S}_{k+1} \subset \bar{S}_k$. في الواقع إذا كان $x \in \bar{S}_{k+1}$ فإن

$$d(x,x_{n_k}) \leq d(x,x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}},x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

أي إن $x \in \bar{S}_k$.

إن أنصاف أقطار الكرات $\bar{S}_k$ تسعى إلى الصفر ، وبالفرض توجد نقطة x_0 تنتمي إلى جميع الكرات $\bar{S}_k$ لنبين أن x_0 هي نهاية المتتالية $\{ x_n \}$.

إن المتتالية الجزئية $\{x_{n_k}\}$ تتقارب إلى النقطة x_0 وذلك لأن x_{n_k} و x_0 تنتمي إلى $\bar{S}_k$ وبالتالي فإن :

$$d(x_{n_k} , x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \to 0$$

وبالتالي فإن المتتالية $\{ x_n \}$ ككل تتقارب إلى x_0 ، ذلك لأن :

$$d(x_n , x_0) \leq d(x_n , x_{n_k}) + d(x_{n_k} , x_0)$$

ولأنه يمكننا جعل الحدين في الطرف الأيمن صغيرين بالقدر الذي نريد و ذلك إذا اخترنا n و n_k كبيرين بقدر كاف ، وهذا ما يثبت المبرهنة ...

تعريف . نقول عن مجموعة M إنها مجموعة من الشريحة الأولى (*set of the first category*) إذا أمكن تمثيلها في شكل مجموع ليس بأكثر من قابل للعد لمجموعات غير كثيفة في أي مكان . ونقول عن مجموعة ليست من الشريحة الأولى إنها مجموعة من الشريحة الثانية (*set of the second category*) على سبيل المثال مجموعة الأعداد العادية هي مجموعة من الشريحة الأولى بينما مجموعة جميع الأعداد الصماء هي مجموعة من الشريحة الثانية وهذا ينتج من المبرهنة التالية .

مبرهنة (٣). الفضاء التام هو مجموعة من الشريحة الثانية .

البرهان . لنفرض العكس وأن الفضاء التام X : $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ حيث M_n ($n = 1 , 2 , . . .$) ليست كثيفة في أي مكان . لنأخذ الكرة $\bar{S}(a , 1)$ والتي مركزها النقطة a ونصف قطرها يساوي الواحد . بما أن M_1 غير كثيفة في أي مكان فإنه توجد كرة $\bar{S}(a , r_1)$ نصف قطرها $r_1 < \frac{1}{2}$ داخل $\bar{S}(a , 1)$ ولا تحتوي على أية نقطة من نقاط المجموعة M_1 . وبما أن المجموعة M_2 غير كثيفة في أي مكان

فإنه داخل الكرة $\bar{S}(a_1, r_1)$ توجد كرة $\bar{S}(a_2, r_2)$ نصف قطرها $r_2 < \frac{1}{2^2}$ ولا تحتوي على أية نقطة من نقاط المجموعة M_2 وهكذا . فإننا نحصل على متتالية الكرات المغلقة :

$$\bar{S}(a_1, r_1) \quad ، \quad \bar{S}(a_2, r_2)\ ,\ \ldots \quad ، \quad \bar{S}(a_n, r_n)\ ,\ \ldots$$

والتي كل كرة منها متوضعة في سابقتها وأنصاف أقطارها تسعى إلى الصفر. وفقاً لذلك فإن الكرة $\bar{S}(a_n, r_n)$ لاتحتوي على أية نقطة من المجموعات $M_1, M_2, \ldots, M_n$. واستناداً إلى المبرهنة (١) توجد نقطة $a_0 \in X$ تنتمي لجميع الكرات . من جهة ثانية إن هذه النقطة لا تنتمي إلى أية مجموعة من المجموعات M_n ولذلك فإن :

$$a_0 \bar{\in} X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

وهكذا نحصل على تناقض وهو ما يثبت صحة المبرهنة .

§ ٧ – مبدأ المؤثرات الضاغطة

The Principle of Contraction Mapping

إن طريقة التقريب المتتالي معروفة جيداً باستخداماتها الواسعة في إثبات مبرهنات وجود حلول للمعادلات الجبرية والمعادلات التفاضلية العادية والجزئية منها وكذلك المعادلات التكاملية وغيرها من المعادلات . إن الأهمية الكبيرة لهذه الطريقة لا تعود فقط إلى تطبيقاتها الواسعة و إنما أيضاً لإمكانية الحصول على تقريبات لحلول المعادلات. إن طريقة التقريب المتتالي من أجل مختلف المعادلات تتوضع في أطر التحليل التابعي ، وفي مخطط عام يؤدي إلى ما يسمى بمبدأ المؤثرات الضاغطة ، و الذي صيغ من قبل الرياضي البولوني باناخ (*)

(*) *C. Banach (1892 – 1945)* رياضي بولوني من مؤسسي التحليل التابعي .

مبرهنة (١) [*] . ليكن X فضاءً مترياً تاماً ، وليكن A مؤثراً يطبق الفضاء X في نفسه وبحيث إنه من أجل جميع y , x ∋ X يكون :

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y) \qquad (1.8.1)$$

حيث $\alpha < 1$ ، و لا يتعلق بـ y , x ، عندئذ توجد نقطة وحيدة x_0 بحيث ان : $A\ x_0 = x_0$.

تسمى النقطة x_0 **بالنقطة الثابتة** (*fixed point*) للمؤثر A .

البرهان . لنأخذ نقطة مثبتة x ∋ X ، ولنضع

$$x_1 = A x \quad , \quad x_2 = A x_1 , \ . \ . \ . \ . \ , x_n = A x_{n-1} , \ . \ . \ .$$

ولنبرهن على أن المتتالية $\{ x_n \}$ متقاربة في نفسها . بغية ذلك نلاحظ ان :

$$d(x_1 ,x_2) = d(Ax , Ax_1) \leq \alpha d(x,x_1) = \alpha d(x, Ax)$$

$$d(x_2 ,x_3) = d(Ax_1 ,Ax_2) \leq \alpha d(x_1 , x_2) \leq \alpha^2 d(x ,Ax)$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$d(x_n ,x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x, Ax)$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

وبالتالي فإن :

$$d(x_n ,x_{n+p}) \leq$$

$$\leq d(x_n , x_{n+1}) + d(x_{n+1} , x_{n+2}) + . . . + d(x_{n+p-1} , x_{n+p}) \leq$$

$$\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + . . . + \alpha^{n+p-1}) d(x,Ax) =$$

$$= \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1-\alpha} d(x,Ax) \qquad (1.8.2)$$

وبما أن $\alpha < 1$ فإن :

$$d(x_n , x_{n+p}) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x,Ax)$$

---

[*] تسمى هذه المبرهنة بمبرهنة النقطة الثابتة (مبرهنة باناخ)

من ذلك ينتج أن : $d(x_n , x_{n+p}) \to 0$ وذلك عندما $n \to \infty$ و $0 < p$ ، وهذا يعني أن المتتالية $\{ x_n \}$ متقاربة في نفسها . وبما أن الفضاء X تـــام فإنـــه يوجـــد عنصر مثل x_0 ∍ X يكون نهاية لتلك المتتالية :

$$x_0 = \lim_n x_n$$

لنبرهن على أن $A x_0 = x_0$. في الحقيقة

$$d(x_0 , Ax_0) \le d(x_0 , x_n) + d(x_n , Ax_0) =$$

$$= d(x_0 , x_n) + d(Ax_{n-1} , Ax_0) \le$$

$$\le d(x_0 , x_n) + \alpha d(x_{n-1} , x_0)$$

وبالتالي فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ ومن أجل n كبير بقدر كاف يكون :

$$d(x_0 , x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad d(x_0 , x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي فإن

$$d(x_0 , Ax_0) < \varepsilon$$

و بما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فإن $d(x_0 , Ax_0) = 0$. أي إن $A x_0 = x_0$.

لنبرهن الوحدانية . لنفرض وجود عنصرين x_0 , y_0 ∍ X بحيث إن :

$$Ax_0 = x_0 \quad , \quad Ay_0 = y_0$$

عندئذ يكون :

$$d(x_0 , y_0) = d(Ax_0 , Ay_0) \le \alpha d(x_0 , y_0)$$

وبما أنه إذا فرضنا أن $0 < d(x_0 , y_0)$ فإنه مما سبق نستنتج $1 \le \alpha$ وهذا غير ممكن بنتيجة الفرض .

بالانتقال إلى النهاية في العلاقة $(1 . 8 . 2)$ عندما $p \to \infty$ نأتي إلى تقدير الخطـــأ في التقريب النوني :

$$d(x_n , x_0) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x , Ax) \qquad (1.8.3)$$

ملاحظة١ . إن بناء متتالية التقريبات المتتالية والمتقاربة إلى نقطة ثابتة x_0 ، يمكن أن يتم انطلاقاً من أي عنصر $x \in X$ ، إلا أن اختيار العنصر يمكن أن يؤثر فقط على سرعة تقارب المتتالية $\{x_n\}$ الى نهايتها .

ملاحظة ٢ . في بعض الأحيان نكون مضطرين لدراسة مؤثرات A تحقق الشرط ($1.8.1$) في جوار مغلق $\bar{S}(\bar{x},r)$ حيث $\bar{x}$ نقطة ما من الفضاء كما أنها لا تحققه في النقاط الأُخرى . في هذه الحالة يمكن تطبيق مبدأ المؤثرات الضاغطة **بشرط إضافي يفرض هو أن المؤثر A يطبق الكرة في نفسها . تبعاً لذلك لا تتعدى التقريبات المتتالية ذلك الجوار** . لنفرض على سبيل المثال وإضافة للشرط ($1.8.1$) تحقق المتراجحة :

$$d(\bar{x},A\bar{x}) \leq (1-\alpha)\, r$$

إذا كان $x \in \bar{S}(\bar{x},r)$ فإن $Ax \in \bar{S}(\bar{x},r)$ وذلك لأن :

$$d(Ax,\bar{x}) \leq d(Ax,A\bar{x}) + d(A\bar{x},\bar{x}) \leq$$

$$\leq \alpha d(x,\bar{x}) + d(\bar{x},A\bar{x}) \leq$$

$$\leq \alpha r + (1-\alpha)\, r = r$$

تبعاً لذلك يمكننا اعتبار أن المؤثر A يطبق الفضاء المتري التام $\bar{S}(\bar{x},r)$ في نفسه ويحقق الشرط ($1.8.1$) . عندئذ ، واستناداً لما برهنا أعلاه ، توجد نقطة ثابتة وحيدة في $\bar{S}(\bar{x},r)$ لهذا المؤثر .

سنستعرض الآن عدداً من تطبيقات مبدأ المؤثرات الضاغطة .

حل جملة معادلات جبرية خطية . لنستعرض الفضاء العددي ذا الـ n بعداً $\mathbb{R}^n$ ولنفرض أن المسافة فيه معرفة بالعلاقة :

$$d(x,y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|$$

حيث :

$$x = \{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\} \qquad , \qquad y = \{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n\}$$

بسهولة يمكن التأكد ، كما في الفضاء المتري m ، أن $\mathbb{R}^n$ فضاء متري تام .

ولنستعرض في هذا الفضاء المؤثر $y = Ax$ المعرف بدلالة العلاقات :

$$\eta_i = \sum_j^n a_{ij} \; \xi_j + b_i \qquad ; \qquad i = 1 , 2 , \ldots , n$$

لدينا :

$$d\,(y_1 , y_2) = d\,(Ax_1 , Ax_2) = \max_i \left| \eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)} \right| =$$

$$= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \, (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right| \qquad \leq$$

$$\leq \max_i \sum_{j=1}^n \left| a_{ij} \right| \; \max_j \left| \xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)} \right| \; =$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^n \left| a_{ij} \right| d\,(x_1 , x_2)$$

إذا فرضنا الآن أن :

$$\sum_{j=1}^n \left| a_{ij} \right| < 1$$

من أجل جميع i ، فإنه يمكننا تطبيق مبدأ المؤثرات الضاغطة ، ويكــون للمــؤثر A نقطة وحيدة ثابتة . بذلك نجد المبرهنة التالية

مبرهنة ٢ . إذا كانت المصفوفة (a_{ij}) بحيث إن $\sum_{j=1}^n \left| a_{ij} \right| < 1$ من أجــل جميع i فإنه لجملة المعادلات :

$$\eta_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \; \xi_j = b_i \qquad ; \qquad i = 1 , 2 , \ldots , n$$

يوجد حل وحيد $x_0 = \{ \xi_1^{(0)} , \xi_2^{(0)} , \ldots , \xi_n^{(0)} \}$ ويمكن الحصول على هذا الحل بطريقة التقريب المتتالي انطلاقاً من أي عنصر $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \}$

إن الشرط $(1.8.4)$ هو شرط كاف لتقارب طريقة التقريب المتتالي للجملة المدروسة . إذا عرفنا في الفضاء $\mathbb{R}^n$ مسافة أخرى فإننا نحصل على شرط آخر للتقارب . لنفرض على سبيل المثال أننا أخذنا المسافة :

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2}$$

وعندئذ نجد :

$$d(y_1, y_2) = d(Ax_1, Ax_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right\}^2}$$

وبتطبيق متراجحة بونياكوفسكي نجد أن :

$$d(y_1, y_2) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2 \right\}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \, d(x_1, x_2)$$

وبالتالي فإن شرط تقارب طريقة التقريب المتتالي يكون :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 < 1$$

وجود ووحدانية حل معادلة تكاملية . لنستعرض الآن معادلة فريدهولم الخطية غير المتجانسة من النوع الثاني

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\, \varphi(s)\, ds + f(t) \qquad (1.8.5)$$

حيث إن النواة $K(t,s)$ تابع مستمر في المربع $Q = \{ a \leq t, s \leq b \}$ وبالتالي فهو محدود فيه :

$$| K(t,s) | \leq M \quad , \quad \forall\ t,s \in Q$$

وأما التابع $f(t)$ فهو مستمر على المجال $[a, b]$ ، أي إنه ينتمي إلى الفضاء $C[a, b]$.سنبين الآن كيفية استخدام مبدأ المؤثرات الضاغطة في البرهان على وجود وحدانية حل معادلة فريدهولم $(1.8.5)$.

سنبحث عن حل للمعادلة $(1.8.5)$ في صف التوابع $C[a, b]$ المستمرة على المجال $[a, b]$.

يسمى كل تابع $\varphi_0(t) \in C[a,b]$ تؤول من أجله المعادلة $(1.8.5)$ إلى مطابقة على المجال $[a, b]$ بحل للمعادلة $(1.8.5)$:

$$\varphi_0(t) \equiv \lambda \int_a^b K(t,s)\ \varphi_0(s)\, ds + f(t)$$

من الواضح أنه من أجل $\lambda = 0$ يكون للمعادلة $(1.8.5)$ حل وحيد هو $\varphi_0(t) \equiv f(t)$.

لنبرهن على أن المعادلة $(1.8.5)$ قابلة للحل ، بشكل وحيد ، من أجل جميع قيم λ الصغيرة بقدر كاف بالقيمة المطلقة . سننظر إلى الطرف الأيمن من المعادلة $(1.8.5)$ كمؤثر $A\varphi$ معرف بالعلاقة

$$A\varphi = \lambda \int_a^b K(t,s)\ \varphi(s)\, ds + f(t) \quad (1.8.6)$$

إن المؤثر A ينقل كل تابع $\varphi(t) \in C[a,b]$ إلى تابع $\tilde{\varphi}(t)$ معرف على نفس المجال $[a, b]$. بذلك تؤول مسألة البرهان على وجود حل $\varphi_0(t)$ للمعادلة $(1.8.5)$ إلى مسألة البرهان على وجود نقطة ثابتة للمؤثر A ، أي على وجود تابع مثل $\varphi_0(t)$ يكون من أجله $A\varphi_0 = \varphi_0$

لنستعرض ، على سبيل المثال ، المعادلة

$$\varphi(t) = 2\int_0^1 t^2 s\ \ \varphi(s)\, ds + 1$$

إن المؤثر A الموافق لهذه المعادلة يعرف بالعلاقة :

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2 s\ \ \varphi(s)\, ds + 1$$

بفرض $\varphi(t) \equiv 1$ يكون لدينا

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2 s \,.\, 1\, ds + 1 = t^2 + 1$$

أي إن صورة التابع $(\varphi(t) \equiv 1)$ بالمؤثر A هي التابع $t^2 + 1$. لنضع $\varphi(t) = 2t^2 + 1$ فنجد أن

$$A\varphi = 2\int_0^1 t^2 s\,(2s^2 + 1)\, ds + 1 = 2t^2 + 1$$

أي إن صورة التابع $\varphi(t) = 2t^2 + 1$ هي التابع نفسه $\varphi(t) = 2t^2 + 1$ وبالتالي فإن النقطة $\varphi(t) = 2t^2 + 1$ هي النقطة الثابتة للمؤثر A وهي حل للمعادلة التكاملية المذكورة .

لنبرهن الآن على أن المؤثر A المعرف بالعلاقة $(1.8.6)$ يطبق الفضاء التام $C[a,b]$ في $C[a,b]$. أي إنه إذا كان $\varphi(t) \ni C[a,b]$ فإن التابع $g(t) = A\,\varphi(t)$ ينتمي لـ $C[a,b]$

في الواقع ، لتكن t نقطة كيفية من المجال $[a,b]$ وليكن Δt تزايداً ما بحيث تكون النقطة $(t + \Delta t)$ من المجال $[a,b]$ ، عندئذ يكون لدينا

$$\begin{aligned}
&\left| g(t+\Delta t) - g(t) \right| = \\
&= \left| \lambda \int_a^b K(t+\Delta t, s)\, \varphi(s)\, ds + f(t+\Delta t) - \right. \\
&\left. - \lambda \int_a^b K(t,s) \varphi(s)\, ds - f(t) \right| \le \\
&\le |\lambda| \int_a^b \left| K(t+\Delta t, s) - K(t,s) \right| \left| \varphi(s) \right| ds + \\
&+ \left| f(t+\Delta t) - f(t) \right| \qquad\qquad (1.8.7)
\end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon > 0$ عدداً موجباً ما ، بما أن التابع $f(t)$ ينتمي إلى $C[a,b]$ فإنه يوجد عدد مثل $\delta_1 > 0$ بحيث إن المتراجحة $\left| f(t+\Delta t) - f(t) \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ تتحقق من أجل $\left| \Delta t \right| < \delta_1$. لنفرض أيضاً أن $\phi = \max\limits_{a \le t \le b} \left| \varphi(t) \right|$.

بما أن النواة $K(t,s)$ مستمرة في المربع المغلق Q فهي مستمرة بانتظام في Q وبالتالي فإنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta_2 > 0$ بحيث إن المتراجحة

$$\left| K(t+\Delta t,s) - K(t,s) \right| < \frac{\varepsilon}{2\phi(b-a)|\lambda|} \qquad (1.8.8)$$

تتحقق من أجل جميع $|\Delta t| < \delta_2$ ومهما يكن $S \ni [a,b]$.لنأخذ الآن $\delta = min\{\delta_1 , \delta_2\}$ فنجد أنه مهما يكن Δt بحيث إن $|\Delta t| < \delta$ فإن

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| < \varepsilon \qquad \forall \ \Delta t : |\Delta t| < \delta \qquad (1.8.8)$$

وهو ما يبرهن على استمرار التابع $g(t)$ في أية نقطة $t \ni [a,b]$ وهكذا فإن $A : C[a,b] \to C[a,b]$.

لنستنتج الآن الشروط التي من أجلها يكون المؤثر A ضاغطاً . لدينا

$$d(A\varphi_1 , A\varphi_2) = \max_{a \le t \le b} \left| A\varphi_1(t) - A\varphi_2(t) \right| =$$

$$= \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi_1(s)\,ds - \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi_2(s)\,ds \right| =$$

$$= \max_{a \le t \le b} \left| \lambda \int_a^b K(t,s)\left[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\right] ds \right| \le$$

$$\le |\lambda|\ M\ (b-a) \max_{a \le t \le b} \left| \varphi_1(s) - \varphi_2(s) \right| =$$

$$= |\lambda|\ M\ (b-a)\ d(\varphi_1 , \varphi_2)$$

ومنه نجد أنه من أجل $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ يكون لدينا المؤثر A ضاغطاً

وبالتالي فإنه من أجل $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ يكون لمعادلة فريدهولم $(1.8.5)$ ذات النواة المستمرة $K(t,s)$ والحد الحر فيها $f(t)$ حل وحيد .

إن التقريبات المتتالية $\varphi_0(t)\ ,\ \varphi_1(t)\ ,\ \ldots\ ,\ \varphi_n(t)\ ,\ \ldots$ لحل هذه المعادلة تعرف بالعلاقات

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_0^1 K(t,s)\ \varphi_n(s)\,ds + f(t)$$

حيث إنه بمثابة $\varphi_0(t)$ يمكننا أخذ أي تابع مستمر على المجال $[a,b]$. بالعودة إلى المعادلة التكاملية $(1.8.5)$

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\ \varphi(s)\,ds + f(t)$$

وضمن الفرض أن النواة $K(t,s)$ تابع مستمر في المربع Q وأن $f(t)$ مستمر في المجال $[a,b]$ وجدنا أنه إذا كان $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$ فإنه للمعادلة $(1.8.5)$ يوجد حل وحيد $\varphi(t)$

سنبين الآن أنه للمعادلة $(1.8.5)$ وباستخدام المسافة في الفضاء $L^2[a,b]$:

$$d(x,y) = \left(\int_a^b [y(t) - x(t)]^2\,dt \right)^{1/2}$$

يوجد حل وحيد من أجل قيم λ المنتمية إلى مجال أوسع من المجال المذكور أعلاه الناتج عن استخدام المسافة في الفضاء $C[0,1]$.

توطئة (١) . إذا كان $x(t)$ تابعاً من الفضاء $L^2[a,b]$ ، أي إن

$$\int_a^b x^2(t)\ dt < +\infty$$

فإن التابع

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)\ x(s)\,ds$$

يكون مستمراً على المجال $[a,b]$.

البرهان . لتكن t_0 نقطة ما من المجال $[a, b]$. بما أن النـواة تـابع مستمر في المربع المغلق Q فهو تابع مستمر بانتظام ، أي إنه من أجـل أي عـدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $\delta > 0$ بحيث إنه من أجل جميع النقاط t المحققة للمتراجحة $|t - t_0| < \delta$ تتحقق المتراجحة

$$|K(t,s) - K(t_0,s)| < \varepsilon \ \forall \ s \in [a,b]$$

لذلك فإن

$$|y(t) - y(t_0)| = \left| \int_a^b [K(t,s) - K(t_0,s)]\, x(s)\, ds \right| \le$$

$$\le \varepsilon \int_a^b |x(s)|\, ds \le \varepsilon\sqrt{b-a} \left(\int_a^b x^2(s)\, ds \right)^{1/2}$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فإن ذلك يؤدي إلى استمرار التابع $y(t)$ في أيـة نقطـة $t \ni [a, b]$. وفقاً للتوطئة المذكورة يكون الطرف الأيمن من المعادلة التكاملية $(1.8.5)$ تابعاً مستمراً من أجل أي تابع $\varphi(t) \ni L^2[a,b]$. وهذا يعني أن الطرف الأيسر من المعادلة مستمر . بذلك تكون حلول المعادلـة التكامليـة $(1.8.5)$ هي التوابع المستمرة فقط من بين جميـع التوابـع المنتميـة للفـضاء $L^2[a,b]$.

سننظر إلى الطرف الأيمن للمعادلة $(1.8.5)$ كمؤثر $A\varphi$ معرف فـي الفضاء $L^2[a,b]$ واعتماداً على التوطئة يكون

$$A : L^2[a,b] \to C[a,b] \subset L^2[a,b]$$

لنضع

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\, dt\, ds \right)^{1/2}$$

ولنبين بأنه من أجل $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$ يكون المؤثر A ضاغطاً .

$$A\varphi_2 - A\varphi_2 = \lambda \int_a^b K(t,s)\,[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds$$

وباستخدام متراجحة بونياكوفسكي نجد أن

$$[A\varphi_2 - A\varphi_2]^2 = \left(\lambda \int_a^b K(t,s)\,[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds\right)^2 \leq$$

$$\leq \lambda^2 \int_a^b K^2(t,s)\,ds \,.\int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2\,ds$$

وبمكاملة طرفي المتراجحة الأخيرة بالنسبة لـ t من a إلى b نجد

$$\int_a^b [A\varphi_2(t) - A\varphi_2(t)]^2\,dt \leq$$

$$\leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,ds\,dt \int_a^b [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]^2\,ds$$

أو

$$d^2\left(A\varphi_1 \,,\, A\varphi_2\right) \leq \lambda^2 B^2 d^2(\varphi_1 \,,\, \varphi_2)$$

ومنه نجد أن

$$d\left(A\varphi_1 \,,\, A\varphi_2\right) \leq |\lambda|\, B\, d(\varphi_1 \,,\, \varphi_2)$$

وبالتالي فإنه من أجل $|\lambda|\, B < 1$ أي من أجل $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$ يكون المؤثر A ضاغطاً وبالتالي فإنه للمعادلة $(1.8.5)$ يوجد حل وحيد $\varphi(t)$.

من الواضح أن $B \leq M\,(b-a)$ وأن المساواة ممكنة إذا كان $|K(t,s)| \equiv M$ وبالتالي فإن المجال $|\lambda| < \dfrac{1}{B}$ أكبر من المجال $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$.

ملاحظة . من الممكن أن لايكون التابعان $K(t,s)$ و $f(t)$ مستمرين وإنما ينتميان فقط إلى $L^2[Q]$ و $L^2[a,b]$ على الترتيب . أي إن

$$\int_a^b f^2(t)\,dt < +\infty \quad , \quad \int_a^b \int_a^b K^2(t,s)\,dt\,ds < +\infty$$

في هذه الحالة من الطبيعي أن نبحث عن حل ينتمي إلى الفضاء $L^2[a,b]$ ويمكن البرهان على أنه من أجل $|\lambda| < \frac{1}{B}$ أيضاً يوجد للمعادلة $(1.8.5)$ حل وحيد . وفي هذه الحالة ليس من الضروري أن يكون الحل مستمراً وان وحدانيته تعني الوحدانية بدقة إلى توابع تساوي الصفر تقريباً في كل مكان .

لنستعرض معادلة ڤولتيرا من النوع الثاني

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \quad (1.8.9)$$

يمكننا النظر إلى هذه المعادلة كحالة خاصة من معادلة فريدهولم التكاملية وذلك بتمديد النواة $K(t,s)$ وبوضع

$$K(t,s) = 0 \quad ; \quad for \quad s > t \qquad (1.8.10)$$

خلافاً لمعادلة فريدهولم ، يمكن تطبيق مبدأ المؤثرات الضاغطة . (تعميم المبدأ) من أجل جميع قيم λ .

مبرهنة (٢) [*] . إذا كان A مؤثراً مستمراً ويطبق الفضاء المتري التام X في نفسه وكان A^n ، من أجل عدد n ما ، مؤثراً ضاغطاً فإنه يوجد للمعادلة $Ax = x$ حل وحيد .

نأتي الآن إلى المعادلة التكاملية $(1.8.9)$ وسنفرض أن التابع $f(t) \in C[a,b]$ وأن النواة $K(t,s)$ مستمرة في المثلث المغلق Δ :

$$\Delta = \{ a \le t \le b \quad , \quad a \le s \le t \}$$

ولنعرف المؤثر $A\varphi$ بالعلاقة :

$$A\varphi = \lambda \int_a^t K(t,s)\,\varphi(s)\,ds + f(t) \quad (1.8.11)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن المؤثر A يطبق الفضاء $C[0,1]$ في نفسه ، أي إن $A : C[a,b] \to C[a,b]$. لنبرهن على أن A مؤثر مستمر . ليكن $\varphi_1(t)$ و $\varphi_2(t)$ تابعين ما من الفضاء $C[a,b]$ ، عندئذ نجد أن

---

[*] انظر المسألة (١١) في المسائل غير المحلولة في نهاية هذا الفصل .

$$\left| A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t) \right| = \left| \lambda \int_a^t K(t,s) \, [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)] \, ds \right| \leq$$

$$\leq \; |\lambda| \; M(t-a) \max_{a \leq s \leq b} \left| \varphi_2(s) - \varphi_1(s) \right| \qquad (1.8.12)$$

حيث

$$M = \max_{(t,s) \in \Delta} \left| K(t,s) \right|$$

من $(1.8.12)$ نجد أنه مهما تكن $t \in [a,b]$ فإن

$$\left| A\varphi_2(t) - A\varphi_1(t) \right| \leq |\lambda| \; M\,(b-a)\; d(\varphi_1, \varphi_2)$$

أي إن

$$d(A\varphi_1, A\varphi_2) \leq |\lambda| \; M\,(b-a)\; d(\varphi_1, \varphi_2)$$

ليكن $\varepsilon > 0$ كيفياً ولنأخذ $\delta = \varepsilon / M\,(b-a)\,|\lambda|$ ، عندئذٍ من أجل $d(\varphi_1, \varphi_2) < \delta$ يكون لدينا $d(A\varphi_1, A\varphi_2) < \varepsilon$ وهذا يعني أن المؤثر A مستمر من $C[a,b]$ إلى $C[a,b]$.

باستخدام العلاقة $(1.8.12)$ نجد أن

$$\left| A^2\varphi_2(t) - A^2\varphi_1(t) \right| = \left| \lambda \int_a^t K(t,s) [A\varphi_2(s) - A\varphi_1(s)] \, ds \right| \leq$$

$$\leq \; |\lambda|^2 \; \frac{M^2 (t-a)^2}{2!} \; d(\varphi_1, \varphi_2)$$

وبشكل عام نجد أن

$$\left| A^n \varphi_2(t) - A^n \varphi_1(t) \right| \leq |\lambda|^n \; \frac{M^n (t-a)^n}{n!} \; d(\varphi_1, \varphi_2) \leq$$

!

$$\leq |\lambda|^n \; \frac{M^n (b-a)^n}{n!} \; d(\varphi_1, \varphi_2) \qquad (1.8.13)$$

ن هذه المتراجحة تبين أنها محققة من أجل أي عنصر $t \in [a,b]$ وبالتالي فإن

$$d\left(A^n \varphi_2, A^n \varphi_1\right) \leq \frac{|\lambda|^n \; M^n (t-a)^n}{n!} \, d(\varphi_1, \varphi_2) \quad (1.8.14)$$

من أجل أي عدد λ يمكننا اختيار العدد n كبيراً بالقدر الذي نريد وبحيث يكون

$$\frac{|\lambda|^n M^n (t-a)^n}{n!} < 1 \qquad (1.8.15)$$

وبالتالي يكون وفقاً لذلك ، المؤثر A ضاغطاً من أجل n كبيراً بقدر كاف .

استناداً إلى المبرهنة (٢) يكون للمؤثر A نقطة ثابتة وحيدة وذلك يعني وجود حل وحيد للمعادلة التكاملية $(1.8.9)$ من أجل أي عدد λ . وهذا الحل يمكن إيجاده بطريقة التقريب المتتالي :

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\ \varphi_n(s)\, ds + f(t)$$

$$(n=0,1,2,\ldots) \qquad (1.8.16)$$

مثال . بطريقة التقريب المتتالي أوجد حل المعادلة التكاملية

$$\varphi(t) = t - \int_0^t (t-s)\ \varphi(s)\, ds$$

في هذا المثال لدينا $f(t) = t$ و $K(t,s) = t-s$ وهما تابعان مستمران لنبحث عن حل بطريقة التقريب المتتالي (للمعادلة يوجد حل وحيد مستمر) لنضع $\varphi_0(t) = 0$ فنجد أن $\varphi_1(t) = t$ ويكون

$$\varphi_2(t) = t - \int_0^t (t-s)\ s\, ds = t - \frac{t^3}{3!}$$

$$\varphi_3(t) = t - \int_0^t (t-s)\ \left(s - \frac{s^3}{3!}\right) ds =$$

$$= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} ,$$

. . . .

$$\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

من الواضح أن . $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin t$

أي $\varphi(t) = \sin t$ حل للمعادلة التكاملية .

مبرهنة بيكار[*] . لتكن المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1.8.17)$$

مع الشرط الابتدائي $y = y_0$ عندما $x = x_0$.

حيث إن التابع $f(x,y)$ يحقق في المستطيل :

$R : \{ |x - x_0| \le a \, , \, |y - y_0| \le b \}$ (b , a عددان موجبان معلومان)

الشرطيين الآتيين :

١) التابع $f(x,y)$ مستمر في R وبالتالي فهو محدود أي إن

$$|f(x,y)| \le M \quad ; \quad (x,y) \in R \quad ; \quad M > 0$$

٢) للتابع $f(x,y)$ مشتق جزئي مستمربالنسبة لـــ y . أي إن :

$$\left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \le K \quad ; \quad (x,y) \in R \quad ; \quad K > 0$$

عندئذ يوجد للمعادلة التفاضلية ($1.8.17$) حل وحيد يحقق الشرط الابتدائي وهـذا الحل معرف وقابل للاشتقاق ومشتقه مستمر في جوار للنقطة x_0 :

$|x - x_0| \le h$ حيث إن $0 < h$ و $h = \min\left(a , \frac{b}{M}\right)$ كما أن

منحاه البياني من أجل تلك القيم لا يتعدى حدود الساحة R أي إن

$$|y(x) - y_0| \le b$$

بسهولة يمكن التأكد من أن المعادلة التفاضلية ($1.8.17$) مع الـشرط الابتـدائي المذكور تكافىء المعادلة التكاملية .

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\, dx \qquad (1.8.18)$$

ليكن C فضاء التوابع $y(x)$ المعرفة والمستمرة على المجال المغلق

$|x - x_0| \le h$ والتي منحنياتها البيانية واقعة في R . ولنعرف المسافة فيـه بالعلاقة :

---

[*] (picard K . E .) (24 . 7 . 1856 – 11 . 12 . 1941) رياضي فرنسي .

$$d(y,z) = \max_{x\in|x-x_0|\le h} |y(x) - z(x)|$$

كما وجدنا فإن C فضاء متري تام . لنعرف مؤثراً A بالعلاقة :

$$Ay = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$

أي إن المؤثر A يقابل كل تابع $y(x)$ معرف و مستمر على المجال $|x - x_0| \le h$ ومنحناه البياني لايتعدى R بالتابع المستمر $A\,y$ والمعرف على نفس المجال والذي منحناه البياني يقع أيضاً داخل R :

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \right| \le M\,h < b$$

أي إن A يطبق الفضاء المتري C في نفسه . لنثبت الآن أن المؤثر A ضاغط بما أن

$$d(Ay,\, Az) = \max \left| \int_{x_0}^{x} [\, f(x,y) - f(x,z)\,]\,dx \right|$$

وباستخدام شرط ليبشتس [*] نجد :

$$d(Ay,\, Az) \le K \max \left| \int_{x_0}^{x} |y-z|\,dx \right| \le$$

$$\le K \max|y-z| \max\left| \int_{x_0}^{x} dx \right| \le$$

$$\le K\,h \max|y-z| = K\,h\,d(y,z)$$

وباختيار h بحيث يكون $K\,h \le \alpha < 1$ نجد أن :

$$d(Ay, Az) \le \alpha\, d(y,z)$$

---

[*] في مبرهنة بيكار يفترض بالتابع $f(x,y)$ أنه يحقق الشرط :

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le K|y-z|$$

والذي يسمى بشرط ليبشتس . من المعلوم أنه اذا كان التابع $f(x,y)$ محققاًللشرط ٢) الواردة في نص المبرهنة فانه يكون محققاً لشرط ليبشتس ، أما العكس فهو غير صحيح . لقد استبدلنا في نص لامبرهنة شرط ليبشتس بالشرط ٢) لسهولة الاستخدام في التطبيقات العملية .

واستناداً الى مبدأ المؤثرات الضاغطة توجد نقطة ثابتة وحيدة $y(x)$ للمؤثر A . أي يوجد حل وحيد للمعدلة $(1.8.18)$ وبالتالي حل وحيد للمعادلة التفاضلية $(1.8.17)$.

§ ٩- الفضاءات القابلة للفصل
Separable Spaces

يسمى الفضاء X قابلاً للفصل إذا وجدت ، في هذا الفضاء ، مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في X . بكلام آخر يكون X قابلاً للفصل إذا وجدت فيه متتالية مثل :

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

بحيث إنه من أجل أي عنصر $x \in X$ يمكن إيجاد متتالية جزئية منها :

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots \qquad (1.9.1)$$

متقاربة إلى x . وفقاً لذلك ، وإذا كان X فضاءً مترياً فإن تعريف قابلية الفصل يمكن صياغته على الشكل التالي :

توجد في الفضاء X متتالية $(1.9.1)$ بحيث إنه من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ وأي عنصر x من X ($x \in X$) يوجد عنصر x_{n_0} من $(1.9.1)$ بحيث إن :

$$d(x, x_{n_0}) < \varepsilon$$

مثال ١. الفضاء الإقليدي E_n ذو الـ n بعداً ، قابل للفصل . في الواقع لتكن E_n^0 مجموعة جميع النقاط من E_n والتي إحداثياتها أعداد عادية . إن هذه المجموعة قابلة للعد وكثيفة في E_n .

مثال ٢ . الفضاء $C[0,1]$ قابل للفصل . لنستعرض في هذا الفضاء المجموعة C_0 المشكلة من جميع كثيرات الحدود والتي عواملها أعداد عادية . إن المجموعة C_0 قابلة للعد ولنبرهن على أنها كثيفة في $C[0,1]$.في الواقع ليكن $x(t)$ تابعاً ما من $C[0,1]$. استناداً إلى نظرية وايرشترس يوجد كثير حدود $p(t)$ بحيث إن :

$$\max_t \left| x(t) - p(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

حيث $\varepsilon > 0$ معطى . من ناحية ثانية يوجد كثير حدود معاملاته أعداد عادية مثل $p_0(t)$ وبحيث إن :

$$\max_t \left| p(t) - p_0(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه نجد أن :

$$d(x, p_0) = \max_t \left| x(t) - p_0(t) \right| < \varepsilon$$

وهو المطلوب .

مثال ٣ . الفضاء l_p $(1 \leq p < \infty)$. ليكن E_0 مجموعة العناصر x من الشكل : $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}$ حيث r_i أعداد عادية ما وأما n فهو عدد طبيعي ما . من الواضح أن E_0 قابلة للعد ولنبرهن على أن E_0 كثيفة في كل مكان في l_p . في الواقع ، لنأخذ عنصراً ما $x = \{\xi_i\} \in l_p$ وليكن $\varepsilon > 0$ عدداً موجباً معطى ، عندئذ يمكن إيجاد عدد طبيعي n (n يتعلق بـ ε) بحيث إن :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \xi_k \right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

نأخذ بعد ذلك عنصراً مثل $x_0 = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}$ بحيث إن :

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \xi_k - r_k \right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$$

وعندئذ نجد أن :

$$[d(x, x_0)]^p = \sum_{k=1}^{n} \left| \xi_k - r_k \right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \xi_k \right|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p$$

وبالتالي فإن :

$$d(x, x_0) < \varepsilon$$

وهو المطلوب .

مثال ٤ . الفضاء $L^p\,[0,1]$ قابل للفصل . في الواقع ، من خاصة الاستمرار المطلق لتكامل ليبيغ (*) ينتج أن أي تابع $x(t)$ من الفضاء $L^p\,[0,1]$ هو نهاية وسطية من الدرجة p لمتتالية $x_n(t)$ من التوابع المحدودة والقيوسة والمعرفة بالعلاقة :

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t) & ,\ if\ \ |x(t)|\le n \\ 0 & ,\ if\ \ |x(t)|>n \end{cases}$$

ومن ثم ومن الخاصة C التوابع القيوسة ينتج أن كل تابع محدود و قيوس هو نهاية وسطية من الدرجة p لمتتالية من التوابع المستمرة . بالتالي إن مجموعة التوابع المستمرة على المجال $[0\,,\,1]$ كثيفة في كل مكان في $L^p\,[0,1]$. من ناحية ثانية إن مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات العادية و القابلة للعد هي مجموعة كثيفة في كل مكان في $C\,[0\,,\,1]$ بمفهوم المسافة في هذا الفضاء و بشكل أخص بمفهوم المسافة في الفضاء $L^p\,[0,1]$. هكذا فإن مجموعة كثيرات الحدود تلك كثيفة في كل مكان في $L^p\,[0,1]$ وهكذا نكون قد أثبتنا قابلية الفصل للفضاء $L^p\,[0,1]$.

مثال ٥ . الفضاء S قابل للفصل . لتكن E_0 مجموعة العناصر x من الشكل : $\{r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, 0, \ldots\}$ حيث r_i أعداد عادية كيفية و n عدد طبيعي ما . إن E_0 قابلة للعد . ولنثبت أنه يمكن فصل متتالية جزئية من E_0 متقاربة إلى عنصر كيفي مختار

$$x=\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}\in S$$

من أجل كل ξ_n نشكل متتالية من الأعداد العادية $\left\{r_n^{(k)}\right\}$ $k=1,2,\ldots$ متقاربة الى ξ_n عندما $k\to\infty$. لنستعرض متتالية العناصر $\{x^{(k)}\}$ من E_0 والتي هي من الشكل :

$$x^{(k)}=\{r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \ldots, r_k^{(k)}, 0, 0, \ldots\}$$

(*) انظر على سبيل المثال [9] .

بسهولة نرى أن $x^{(k)} \to x$ عندما $k \to \infty$. في الواقع من أجل إثبات ذلك علينا أن نبين بأن المركبة n لـ $x^{(k)}$ متقاربة إلى المركبة n للعنصر x عندما $n \to \infty$. وهذا الأمر واضح إذا أخذنا $k > n$ كبيراً بقدر كاف ، ويكون :

$$\left| \xi_n - r_n^{(k)} \right| < \varepsilon$$

مثال ٦ . الفضاء m غير قابل للفصل . لنستعرض مجموعة العناصر x من الشكل $x = \{ \xi_i \}$ حيث إن ξ_i إما تساوي الصفر أو تساوي 1 . إن لهذه المجموعة قدرة المستمر . لنأخذ الآن عنصرين مختلفين $x = \{ \xi_i \}$ و $y = \{ \eta_i \}$ من هذه المجموعة . عندئذ نجد أن :

$$d(x, y) = \sup_i | \xi_i - \eta_i | = 1$$

هكذا يكون لدينا مجموعة من العناصر لها قدرة المستمر وواقعة على مسافة من بعضها تساوي الواحد . لنثبت أن m غير قابل للفصل . لنفرض العكس ، أي إنه توجد مجموعة مثل E_0 قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في m . لنُحطْ كل عنصر من E_0 بكرة نصف قطرها $\varepsilon = \frac{1}{3}$ عندئذ تتوضع جميع عناصر الفضاء m في داخل تلك الكرات . وبما أن مجموعة الكرات تلك قابلة للعد ، فإنه في كرة واحدة على الأقل ينبغي أن يوجد عنصران مختلفان x , y من المجموعة التي لها قدرة المستمر لنفرض أن مركز تلك الكرة هو x_0 وعندئذ يكون :

$$1 = d(x, y) \le d(x, x_0) + d(x_0, y) \le \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

وهذا غير ممكن وبالتالي فإن m غير قابل للفصل .

في خلاف ذلك يبرهن على أن الفضاء c والذي هو فضاء جزئي من m هو فضاء قابل للفصل .

مسائل وتمارين

١ – لتكن X مجموعة ما وليكن ρ تطبيقاً من $X \times X$ في $\mathbb{R}$ ومحققاً للشرطين :

$$1)\ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2)\ \rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z) \qquad ; \forall\, x,y,z \in X$$

برهن أن ρ يعرف مسافة على X .

٢ – تأكد من أن الفضاء A_R ، فضاء جميع التوابع الوحيدة القيمة والتحليلية في الدائرة $|z| < R$ $(0 < R < \infty)$ مع المسافة :

$$\rho(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |x(z) - y(z)|}{1 + \max\limits_{|z|\le r_k} |x(z) - y(z)|}$$

حيث r_k متتالية من الأعداد الموجبة متزايدة إلى R ، هو فضاء متري .

٣ – ليكن f تابعاً قابلاً للاشتقاق – مستمراً على $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \;;\; x \ge 0\}$

ومحققاً للشروط الآتية :

١) $f(0) = 0$ و $0 < f(x)$ من أجل $0 < x$

٢) $f(x)$ غير متناقص من أجل $0 \le x$

٣) $\dfrac{f(x)}{x}$ غير متزايد من أجل $0 < x$

برهن أن $\rho(x,y) = f(|x - y|)$ يعرف مسافة في $\mathbb{R}$

٤ – لتكن X مجموعة كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة n والمعرفة على المجال $[0,1]$. إذا كان :

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \qquad , \qquad Q(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k$$

فبرهن على أن المسافتين :

$$\rho_1(P,Q) = \max_{0\le t\le 1} |p(t) - Q(t)|$$

$$\rho_2(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - \beta_k|$$

متكافئتان تبولوجياً .

ملاحظة . نقول عن مسافتين $\rho_2(x,y)$, $\rho_1(x,y)$ معرفتين على مجموعة ما X إنهما متكافئتان تبولوجياً إذا وجد ثابتان مثل c_2 , c_1 بحيث إنه من أجل جميع y , x من X تتحقق العلاقة : $c_1\,\rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le c_2\,\rho_2(x,y)$

٥ – برهن أنه في أي فضاء متري $\overline{B(x_0,r)} \subset B[x_0,r]$ ($\overline{B(x_0,r)}$: لصاقة الكرة التي مركزها x_0 ونصف قطرها r ، و $B[x_0,r]$: الكرة المغلقة) .

أورد مثالاً لفضاء متري يكون فيه :

$$\overline{B(x_0,r)} \neq B[x_0,r]$$

٦ – أورد مثالاً لفضاء متري (X,ρ) تكون فيه الكرات المغلقة $B_1[x_1,r_1]$ ، $B_2[x_2,r_2]$

هي بحيث إن :

$$r_1 > r_2 \quad و \quad B_1 \subset B_2$$

٧ – ليكن $C[0,2]$ فضاء التوابع المستمرة على المجال $[0,2]$ وذا المسافة

$$\rho(x,y) = \int_0^2 |x(t) - y(t)|\,dt$$

برهن أن $C[0,2]$ ليس تاماً .

٨ – هل المتتالية $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots\}$ متقاربة في الفضاء المتري X إذا كان

$$1)\quad X = l_1 \quad ; \quad x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots)$$

$$2)\quad X = l_2 \quad ; \quad x_n = (\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots)$$

$$3)\quad X = l_3 \quad ; \quad x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$$

٩ – ليكن $C^{(1)}[0,1]$ فضاء جميع التوابع القابلة للاشتقاق – مستمرة على $[0,1]$ ، ولتكن المسافة فيه ρ معرفة بالعلاقة :

$$\rho(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} \left| x(t) - y(t) \right|$$

برهن أن هذا الفضاء ليس تاماً .

١٠ – برهن أن الفضاء A_R تام .

١١ – ليكن X فضاءً مترياً تاماً وليكن A مؤثراً يطبق X في نفسه وبحيث إن A^n مؤثر ضاغط من أجل أي عدد طبيعي n . برهن على وجود نقطة ثابتة للمؤثر A .

١٢ – ليكن X فضاءً مترياً تاماً وليكن A ، B مؤثرين ضاغطين في X وبحيث إن :

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha_A \, \rho(x,y)$$

$$\rho(Bx, By) \le \alpha_B \, \rho(x,y)$$

برهن أنه إذا كان $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$ من أجل أي عنصر $x \ni X$ فإن النقطتين الثابتتين للمؤثرين A , B تقعان على مسافة لا تزيد عن $\frac{\varepsilon}{1-\alpha}$ حيث

$$\alpha = max(\alpha_A, \alpha_B) < 1$$

١٣ – برهن أن متتالية الكسور المستمرة (x_n) :

$$1\ ,\ 2+\frac{1}{2}\ ,\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}\ ,\ \ldots$$

متقاربة وأوجد نهايتها .

١٤ – ليكن التابع $\varphi(s,u)$ معرفاً و مستمراً في الشريط :

$$\Pi = \{ (s,u) \in R^2 \ ;\ a \le s \le b \ ,\ -\infty < u < +\infty \}$$

كما انه قابل للاشتقاق بالنسبة لـــ u في Π ومشتقة يحقق الشرط :

$$0 < m \le \varphi'_u(s,u) \le M < +\infty \ ;\ (s,u) \in \Pi$$

برهن على وجود تابع وحيد ومستمر على المجال $[a,b]$ مثل $u = x^*(s)$ ومن أجله يكون :

$$\varphi\left(s, x^*(s)\right) \equiv 0 \quad \text{حيث} \quad s \in [a,b]$$

١٥- لتكن جملة المعادلات الجبرية الخطية

$$x_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x_m + a_i \ (i = 1, 2, \ldots,)$$

تأكد من أنه إذا تحققت الشروط

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < +\infty \quad , \ \alpha = \sup_{m} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{im}| < 1 \qquad (a$$

فإنه يوجد حل وحيد $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ للجملة ، وبحيث إن :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x^*_i| < +\infty$$

b) إذا كان $\beta = \sup_{i} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{im}| < 1$ و $\sup_{i} |a_i| < +\infty$ فإنه يوجد للجملة المذكورة حل وحيد $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots)$ بحيث إن :

$$\sup_{i} |x^*_i| < +\infty$$

١٦ – برهن أن المؤثر A المعرف بالعلاقة

$$A : f(x) \to \frac{1}{2} \int_{0}^{1} x(t)\, f(t)\, dt + \frac{5}{6} x$$

هو مؤثر ضاغط في الفضاء $C[0, 1]$ ، ثم أوجد نقطته الثابتة $f^*(s)$.

الفصل الثاني

الفضاءات الخطية المنظمة

Normed Linear Spaces

§ 1 – الفضاءات الخطية

Linear Spaces

في العديد من الفضاءات يمكن جمع عناصرها (العناصر : متتاليات عددية ، توابع ، . . .) كما يمكن ضربها بأعداد ومن جديد نحصل على عناصر من الفضاء نفسه . انطلاقاً من هذه الفضاءات نأتي إلى التعريف العام للفضاء الخطي .

تعريف ١ . لتكن E مجموعة من العناصر ، ذات طبيعة ما ، ومتمتعة بالخواص الآتية :

I . E زمرة أبلية بالنسبة لعملية الجمع في الزمرة .

هذا يعني أن المجموع $x + y$ للعنصرين $x , y \in E$ معرف وهو عنصر من المجموعة ذاتها ، كما أن عملية الجمع تحقق الشروط الآتية :

١) $x + y = y + x$ (الخاصة التبديلية)

٢) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (الخاصة التجميعية).

٣) يوجد عنصر وحيد θ بحيث إن :

$$x + \theta = x$$

من أجل أي عنصر $x \in E$.

٤) من أجل كل عنصر $x \in E$ يوجد عنصر معرف وحيد من المجموعة نفسها $(-x)$ بحيث إن :

$$x + (-x) = \theta$$

بدلاً من $x + (-y)$ سنكتب $x - y$.

يسمى العنصر θ بالعنصر الصفري أو صفر الزمرة E ، وأما العنصر $(-x)$ فيسمى بالعنصر المعاكس للعنصر x (نظير x) .

II . في E معرفة عملية ضرب للعناصر $x , y , z, ...$ بأعداد حقيقية (مركبة) $\lambda , \mu , \nu , ...$ ، إضافة إلى أن λx مجدداً هو عنصر من المجموعة E ، وبالنسبة لهذه العملية تتحقق الشروط الآتية :

١) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$ (الخاصة التجميعية في الضرب)

٢) $\lambda (y + x) = \lambda x + \lambda y$ و $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

(الخاصة التوزيعية)

٣) $1 . x = x$

تسمى المجموعة E المحققة للموضوعتين I , II فضاءً خطياً أو فضاءً شعاعياً . تبعاً لعملية ضرب عناصر المجموعة E المعرفة من أجل الأعداد الحقيقية (الأعداد المركبة) نحصل على فضاء خطي حقيقي (فضاء خطي مركب) (*)

مثال ١ . E_n مجموعة الأشعة والتي لكل منها n مركبة حقيقية تشكل فضاءً خطياً حقيقياً .

مثال ٢ . مجموعة التوابع لمتحول حقيقي وذات القيم المركبة ، والتي هي حلول لمعادلة تفاضلية خطية متجانسة من المرتبة n ، تشكل فضاءً خطياً مركباً .

مثال ٣ . مجموعة العناصر الحقيقية (المركبة) من الفضاء $C [0 , 1]$ ومن الفضاء $L^p[0,1]$ تشكل فضاءً خطياً حقيقياً (مركبا) .

مثال ٤ . مجموعة العناصر من الفضاءات الحقيقية (المركبة) l_p , c , m تشكل فضاء خطياً حقيقياً (مركباً) ، حيث إن مجموع العنصرين $x = \{\xi_i\}$ ، $y = \{ \eta_i \}$ هو العنصر :

$$x + y = \{ \xi_1 + \eta_1 , \xi_2 + \eta_2 , ... , \xi_n + \eta_n , . . . \}$$

وأما ضرب العنصر x بالعدد λ فهو :

$$\lambda x = \{\lambda \xi_1 , \lambda \xi_2 , ... , \lambda \xi_n , . . . \}$$

سنستخلص بعض النتائج من موضوعتي الفضاء الخطي .

(*) إن مفهوم الفضاء الوارد في الفصل الأول يحمل معنى آخراً . خلافاً لذلك فإننا سنعرف مفهوم نهاية متتالية في جميع الفضاءات الخطية التي سنتعامل معها .

١) $0 . x = \theta$ في الواقع :

$$x = 1 . x = (1 + 0) . x = 1 . x + 0 . x = x + 0 . x$$

ومنه نجد أن

$$x + (-x) = x + 0 . x + (-x)$$

أو

$$\theta = \theta + 0 . x = 0 . x$$

٢) $-x = (-1) x$ وذلك لأن

$$(-1) x + x = (-1 + 1) x = 0 . x = \theta$$

٣) $\lambda \theta = \theta$ وذلك لأن

$$\begin{aligned} \lambda \theta = \lambda [x + (-x)] &= \lambda x + \lambda (-x) = \\ = \lambda x + (-\lambda) x = \lambda x - \lambda x &= \theta \end{aligned}$$

٤) إذا كان $\lambda x = \mu x$ وكان $x \neq \theta$ فإن $\lambda = \mu$. في الحقيقة إذا كان $\lambda x = \mu x$ فإن $\lambda x - \mu x = \theta$ أو $(\lambda - \mu) x = \theta$ ومنه نجد أنه إذا كان $\lambda \neq \mu$ فإن

$$x = \frac{1}{\lambda - \mu} (\lambda - \mu) x = \frac{1}{\lambda - \mu} \theta = \theta$$

وهذا يناقض الفرض .

لنلاحظ أنه إذا كان E فضاءً خطياً فإن الخاصة التبديلية في الجمع تكون نتيجة للموضوعات الأخرى . في الحقيقة لدينا :

$$\begin{aligned} (x + y) - (y + x) &= (x + y) + (-1)(y + x) \\ &= x + y + (-1) y + (-1) x = \\ &= x + [y + (-1) y] + (-1) x = \\ &= x + \theta + (-1) x = x + (-1) x = \theta \end{aligned}$$

تعريف ٢ . نقول عن فضاءين خطيين E و E' إنهما إيزومورفيان إذا أمكن تعريف تطبيق غامر ومتباين $(1 - 1)$ بين عناصرهما وبحيث يحافظ ذلك التطبيق على العمليتين الجبريتين . أي إنه إذا كان

$$y \leftrightarrow y' \quad , \quad x \leftrightarrow x'$$

فإن

$$x + y \leftrightarrow x' + y' \quad , \quad \lambda x \leftrightarrow \lambda x'$$

في الفضاءات الخطية يمكن تعريف مفهوم الاستقلال و الارتباط الخطيين للعناصر .

تعريف ٣ . نقول إن العناصر :

$$x_1 , x_2 , \; . \; . \; . \; . \; , x_n$$

من فضاء خطي ما E مستقلة خطياً إذا نتج من المساواة

$$\lambda_1 x_1 \; . \; \lambda_2 x_2 \; , \; . \; . \; . \; . \; , \lambda_n x_n = 0$$

أن

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \; . \; . \; . = \lambda_n = 0$$

وبالعكس ، إذا وجدت أعداد مثل $\lambda_1 \; , \; \lambda_2 \; , \; . \; . \; . \; . \; \lambda_n$ وكانت ليست جميعها معدومة وبحيث إن

$$\lambda_1 x_1 \; . \; \lambda_2 x_2 \; , \; . \; . \; . \; . \; , \lambda_n x_n = 0$$

فإننا نقول إن العناصر $x_1 , x_2 , \; . \; . \; . \; . \; x_n$ مرتبطة خطياً .

لنفرض ، في الحالة الأخيرة ، أن $\lambda_n \neq 0$ ، فنجد أن :

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_n} x_{n-1}$$

بوضع : $\alpha_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_n}$ نجد أن

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_{n-1}$$

و في هذه الحالة نقول إن العنصر x_n هو تركيب خطي للعناصر

$$x_1 , x_2 , . \; . \; . \; , x_{n-1}$$

المتنوعات الخطية : *Linear Manifolds*

نقول عن مجموعة غير خالية L من عناصر فضاء خطي E إنها متنوعة خطية إذا احتوت L إضافة للعناصر $x_1 , x_2 , . \; . \; . \; , x_n$ على أي تركيب خطي لتلك العناصر

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

لنلاحظ أن أية متنوعة خطية تحتوي على العنصر الصفري θ . في الواقع ، بما أن L غير خالية فهي تحتوي على عنصر ما مثل x وبما أن L متنوعة خطية فهي تحتوي على التركيب

$$x + (-1) x$$

وبالتالي فإن : $x + (-1)x = \theta \in L$

لنستعرض العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من الفضاء الخطي E . من الواضح أن مجموعة جميع المجاميع الممكنة من الشكل $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ تشكل متنوعة خطية L_0 في E . في الحقيقة ، إذا كان للعناصر y_j الشكل

$$y_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j x_i$$

فإن أي تركيب خطي لهذه العناصر ، استناداً الى المساواة

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n = \sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i$$

يكون له الشكل نفسه ، و بالتالي فهو ينتمي إلى تلك المجموعة L_0 . إن المتنوعة الخطية L_0 هي أصغر متنوعة خطية تحتوي على العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (الأصغرية هنا تعني أن أية متنوعة خطية أُخرى L حاوية على العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_k$ تحتوي على المتنوعة الخطية L_0) .

يمكن تعميم مفهوم المتنوعة الخطية الأصغرية الحاوية على عدد معلوم و منته من العناصر على الحالة التي تحتوي فيها المتنوعة الخطية على عدد غير منته من العناصر ، على سبيل المثال ، على مجموعة قابلة للعد من العناصر . في الواقع ، لتكن $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ مجموعة قابلة للعد من عناصر الفضاء الخطي E . إن المتنوعة الخطية الأصغرية L_0 و الحاوية على هذه العناصر ستكون مجموعة جميع المجاميع الممكنة من الشكل $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ حيث إنه ليست λ_i كيفية فقط بل العدد الطبيعي k أيضاً .

تعريف ٤ . تسمى المتنوعة الخطية الأصغرية الحاوية على العناصر المعطاة **متنوعة خطية مُولّدة بتلك العناصر** أو **بالغطاء الخطي** لتلك العناصر .

إذا كانت المتنوعة الخطية L من الفضاء الخطي E معرفة بعدد منته من العناصر فإنها تسمى **متنوعة خطية منتهية البعد** و إذا كانت L معرفة بالعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وكانت هذه العناصر مستقلة خطياً فإن العدد n يُعرف عدد أبعاد

المتنوعة الخطية L ، وفي هذه الحالة تسمى مجموعة العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بقاعدة للمتنوعة الخطية L . أما إذا كانت العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ مرتبطة خطياً فإن عدد أبعاد المتنوعة الخطية يساوي العدد الأعظمي للعناصر المستقلة خطياً في مجموعة العناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

بكلامٍ آخر ، يكون عدد أبعاد المتنوعة الخطية n بعداً إذا وجد في L ، n عنصراً مستقلاً خطياً وكانت أية مجموعة مشكلة من الـ($n+1$) عنصراً من عناصر L مرتبطة خطياً .

إذا وجد في الفضاء الخطي E (في المتنوعة الخطية) من أجل كل عدد $n : n$ عنصراً مستقلاً خطياً فإننا نقول إن E **لانهائي البعد (المتنوعة الخطية لانهائية البعد)** .

بسهولة نرى أن الفضاء $C\,[\,0\,,\,1]$ ، على سبيل المثال ، هوفضاء خطي لانهائي البعد .

المجاميع المباشرة : (*Direct Sums*)

لنتعرف الى مفهوم نشر فضاء خطي في مجموع مباشر لمتنوعتين خطيتين أو أكثر . ليكن E فضاءً خطياً ، ولتكن $L_1, L_2, \ldots, L_n$ متنوعات خطية كل منها محتواة في E . إذا مُثل كل عنصر $x \in E$ وبشكل وحيد على الشكل

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ , \ x_i \in L_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (2.1.1)$$

فإننا نقول إن الفضاء E هو مجموع مباشر للمتنوعات الخطية $L_1, L_2, \ldots, L_n$ وتسمى العلاقة ($2.1.1$) بنشر العنصر x من E بدلالة العناصر x_i من L_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ونكتب في هذه الحالة :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i$$

بسهولة نجد أنه إذا كان

$$E = \sum_{i=1}^{n} \oplus L_i \quad \text{وكان} \quad L_i = \sum_{k=1}^{m_i} \oplus L_k^{(i)}$$

فإن

$$E = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \oplus \ L_k^{(i)}$$

في الواقع ، إذا كان x عنصراً من E فإن هذا العنصر يكتب على الشكل :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \cdots + x_{m_i}^{(i)} \right) , \ x_i \in L_i \ , \ x_k^{(i)} \in L_k^{(i)}$$

إن هذا التمثيل وحيد وذلك لأنه إذا كان

$$x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \cdots + \tilde{x}_{m_i}^{(i)} \right)$$

تمثيلاً آخر لـــ x ، فإنه استناداً الى وحدانية نشر العنصر $x \ni E$ بدلالـــة عناصـــر من المتنوعات الخطية $L_1, L_2, \ldots, L_n$ فإنه يكون لدينا :

$$x_i = x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \ \ldots \ + x_{m_i}^{(i)} = \tilde{x}_1^{(i)} + \tilde{x}_2^{(i)} + \ \ldots \ + \tilde{x}_{m_i}^{(i)} = \tilde{x}_i$$

واستناداً الى وحدانية نشر العناصر $x_i \ni L_i$ بعناصـــر مـــن المتنوعـــات الخطيـــة $L_1^{(i)}, L_2^{(i)}, \ldots, L_{m_i}^{(i)}$ فإنه يكون لدينا :

$$x_k^{(i)} = \tilde{x}_k^{(i)} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, m_i$$

بسهولة يمكن البرهان على أنه إذا كان $E = L_1 \oplus L_2$ فإنه يوجد عنصر مـــشترك وحيد ينتمي الى L_2, L_1 هو صفر الفضاء .

في الحقيقة ، إذا كان u عنصراً آخر منتمياً الى كل من L_1 و L_2 ، فإنه من أجـــل العنصر $x \ni E$ والذي يمثل على الشكل :

$$x = y + z \quad , \quad y \in L_1 \quad , \ z \in L_2$$

يكون له أيضاً التمثيل :

$$x = (y - u) \ + (z + u) \quad ; \ (y - u) \in L_1 \ , (z + u) \in L_2$$

والمختلف عن التمثيل الـــسابق ، وهـــذا الامـــر غيـــر ممكـــن نتيجـــة لفرضـــنا أن $E = L_1 \oplus L_2$. بالعكس إذا كان $x \ni E$ وكان

$$x = y + z \quad , \quad y \in L_1 \quad , \quad z \in L_2 \qquad (2.1.2)$$

وكان $L_1 \bigcap L_2 = \theta$ فإن $E = L_1 \oplus L_2$.

للبرهان على ذلك يكفي أن نبرهن وحدانية النشر $(2.1.2)$. إذا كان

$$x = y + z = \tilde{y} + \tilde{z} \quad , \quad y, \tilde{y} \in L_1 \quad , \quad z, \tilde{z} \in L_2$$

فإن

$$y-\tilde{y} = \tilde{z}-z \quad , \quad y-\tilde{y} \in L_1 \ , \ \tilde{z}-z \in L_2$$

واستناداً للفرض ينتج أن :

$$y-\tilde{y} = \tilde{z}-z = \theta$$

أي إن $y=\tilde{y}$ ، $z=\tilde{z}$ ، وهو المطلوب .

ان المجموع المباشر لفضاءين خطيين أو أكثر مفيد في دراسة العديد من الأمور وهوماسنتعرض له لاحقاً.

لتكن $E_1 , E_2 , \ldots , E_n$ فضاءات خطية ولتكن X مجموعة جميع الجمل المرتبة الممكنة $x=(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ للعناصر $x_i \in E_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ بفرض أن

$$x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

$$y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

وأن λ مقدار سلمي ، فإننا نضع :

$$x+y = (x_1+y_1 , x_2+y_2 , \ldots , x_n+y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1 , \lambda x_2 , \ldots , \lambda x_n)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن جميع موضوعات الفضاء الخطي المرتبطة بعمليتي الجمع والضرب بعدد والمعرفتين تكون محققة ، وبالتالي فإن المجموعة X تصبح فضاءً خطياً .

إذا كانت جميع الفضاءات E_i مترية ، فإنه من الممكن تمتير المجموعة X (جعلها فضاءً مترياً) . لنفرض على سبيل المثال :

$$\rho(x,y) = \max_i \ \rho(x_i , y_i)$$

أو

$$\rho(x,y) = [\ \sum_{i=1}^{n} \rho^2(x_i , y_i)\ ]^{\frac{1}{2}}$$

حيث $\rho(x_i , y_i)$ هي المسافة بين النقطتين y_i , x_i من الفضاء E_i كما أنه من كون الفضاءات $E_1 , E_2 , \ldots , E_n$ تامة ينتج أن X فضاء تام .

مثال . ليكن E_i من أجل أي عدد i هو المستقيم الحقيقـي ، عندئـذ يكـون الفضاء $\sum_{i=1}^{n} \oplus E_i$ والممتر بالمسافة الثانية هو الفضاء الإقليدي ذو الـ n بعداً .

فضاء العامل $(Factor\ Space)$. ليكن E فضاءً خطياً ، ولتكن L_0 متنوعة خطية من E . إن الفضاء E ، كزمرة بالنسبة لعملية الجمع ، ينـشر فـي صفوف تلاصق بالنسبة للزمرة الجزئية L_0 . على وجه الدقة . إن الفضاء E ينشر في مجموعات مثل L بحيث إن عنصرين x_1 و x_2 ينتميان الى نفس المجموعـة L إذا وفقط إذا كان الفرق $x_1 - x_2$ منتمياً الى L_0 .

إذا كان x' عنصراً ما من L فإننا نمثل أي عنصر آخر من L على الشكل $x = x' + x_0$ حيث $x_0 \in L$ وتبعاً لذلك يمكننا أن نقول إن L تتـشكل بانـسحاب مقدار x' من المتنوعة الخطية L_0 .

لنشكل زمرة العامل E / L_0 والتي عناصرها هي المجموعات L المـشكلة بانسحابات من المتنوعة الخطية L_0 .

إن عملية الجمع في E / L_0 تعرف على النحو الآتي : لـيكن L_1 , L_2 عنـصرين من E / L_0 نسمي صف التلاصق المشكل من جميع المجـاميع الممكنـة $x_1 + x_2$ حيـث $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ بمجمـوع العنـصرين L_1, L_2 ونكتب $L_1 + L_2$. ان $L_1 + L_2$ هو صف تلاصق وذلك لأنه إذا كان $x_1 + x_2$ و $x_1' + x_2'$ عنـصرين مـن نفـس المجموعـة فـإن

$$(x_1 + x_2) - (x_1' + x_2') = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') = x_0 + y_0 \in L_0$$

وذلـك لأن x_0 , y_0 ينتميـان الـى L_0 (L_0 متنوعـة خطيـة) . بالتـالي فإن $L_1 + L_2 \subset L$ حيث L صف تلاصق ما . وإذا كان y عنصراً ما من هـذا الصف فإنه بأخذعنصر من الشكل $x_1 + x_2$ من هذا الصف L (هـذا ممكـن لأن $L_1 + L_2 \subset L$) يكون لدينا :

$$y - (x_1 + x_2) = x_0 \in L$$

منه نجد :

$$y = x_1 + x_2 + x_0 = x_1 + \tilde{x}_2$$

حيث $x_1 \ni L_1$ و $\tilde{x}_2 \ni L_2$ ولذلك فإن $L \subset L_2 + L_1$ وهذا يؤدي إلى أن $L = L_2 + L_1$ بالمثل يبرهن على أن (λL) مجموعة العناصر من الشكل $x\ \lambda$ حيث $x \ni L$ و $0 \neq \lambda$ هي صف تلاصق أيضاً . إضافة إلى ذلك نضع بالتعريف $0.\ L = L_0$ من أجل أي $L \ni E / L_0$. بسهولة يمكن التأكد من أن E / L_0 يحقق جميع موضوعات الفضاء الخطي علماً بأن دور صفر الفضاء E / L_0 يلعبه هنا L_0 . لنلاحظ أنه إذا كان $L \ni E / L_0$ و كان θ صفر الفضاء E منتمياً إلى L فإن L يتطابق مع L_0 وذلك لأنه في هذه الحالة يكون لأي عنصر $x \ni L$ الشكل :

$$x = \theta + x_0 = x_0 \in L$$

والعكس صحيح .

يسمى الفضاء E / L_0 بفضاء العامل للفضاء E بالعامل L_0 .

مثال . لنستعرض في الفضاء $C[0,1]$ المتنوعة الخطية C_0 المشكلة من جميع التوابع المستمرة والتي تؤول إلى الصفر في النقطة $t = \frac{1}{2}$. إن الفضاء العامل الموافق إيزومورفي للمحور الحقيقي .

في الواقع ، ليكن $x(t)$, $y(t)$ منتميين إلى صف التلاصق نفسه بالنسبة لـ C_0 إن هذا يعني أن $x(\frac{1}{2}) - y(\frac{1}{2}) = 0$ أو $x(\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2})$ أي إنه في صف التلاصق هذا تجتمع التوابع التي تأخذ في النقطة $t = \frac{1}{2}$ القيمة نفسها . لنأخذ مثلاً في كل صف تلاصق $x(t) = const$ ، فنحصل على تقابل $(1-1)$ من مجموعة الثوابت ومجموعة صفوف التلاصق . بسهولة يمكن التأكد من هذا التقابل إيزومورفيزم . يمكن البرهان على أنه إذا كان $E = E_1 \oplus E_2$ فإن E / E_1 إيزومورفي لـ E_2 .

العلاقة بين الفضاءات الحقيقية و الفضاءات العقدية . من المعلوم ، في الأعداد المركبة أنه بالإضافة للعمليات الجبرية المعرفة على الأعداد ، تعرف أيضاً عملية المرافقة :

$$\overline{a+ib} = a - ib$$

لذلك فإنه من الطبيعي أن نستعرض الفضاء الخطي العقدي و المعــرف عليــه عملية مماثلة وهي عملية المرافقة . إن العناصر المرافقة لعناصر الفــضاء الخطــي العقدي E ، $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ هي العناصر $x, y, z, \ldots$ من E والتي من أجلها تتحقق العلاقات :

١) $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

٢) $\overline{\lambda x} = \bar{\lambda}\, \bar{x} \quad (\lambda \in C)$

٣) $\overline{(\bar{x})} = \bar{\bar{x}} = x$

وإذا كان قد عُرِّف في E تقارب متتالية من العناصر فإنه يضاف إلى ما سبق الشرط

٤) من $x_n \to x$ ينتج أن $\bar{x}_n \to \bar{x}$

نسمي العناصر x ، E والتي من أجلها $\bar{x} = x$ **بالعناصر الحقيقية** و أما العناصر التي من أجلها $\bar{x} = -x$ فتسمى بالعناصر التخيلية . من الواضح أنــه إذا كــان x حقيقياً فإن ix يكون تخيلياً و إذا كان y تخيلياً فإن $\frac{1}{i} y$ يكون حقيقيــاً . بهــذه الصورة نجد أن مجموعة العناصر التخيلية الصرفة y تتطابق مع مجموعة العناصر من الشكل ix حيث x عنصر حقيقي .

إن أي عنصر x ، E يمثل وبشكل وحيد على الشكل $x = u + i\,v$ حيــث u ، v عنصران حقيقيان .

في الحقيقة ، لنضع $u = \dfrac{x + \bar{x}}{2}$ ، $v = \dfrac{x - \bar{x}}{2i}$

فنجد أن $x = u + iv$. إضافة إلى ذلك فإن

$$\bar{u} = \frac{1}{2}\,(\overline{x + \bar{x}}) = \frac{1}{2}\,(\bar{x} + \bar{\bar{x}}) = \frac{1}{2}\,(\bar{x} + x) = u$$

$$\bar{v} = \frac{1}{2i}\,(\overline{x - \bar{x}}) = -\frac{1}{2i}\,(\bar{x} - \bar{\bar{x}}) = \frac{1}{2i}\,(x - \bar{x}) = v$$

أي إن u ، v حقيقيان . أما وحدانية التمثيل فتنتج من أنه إذا كان

$$x = u + iv = t + is$$

فإننا نجد أن

$$u - t = i(s - v)$$

وبما أن u , v , s , t عناصر حقيقية فإن :

$$\overline{(u-t)} = \bar{u} - \bar{t} = u - t$$

$$\overline{i(s-v)} = -i(\bar{s} - \bar{v}) = -i(s-v)$$

وبالتالي فإن :

$$u - t = -i(s - v)$$

وهكذا نجد أن :

$$i(s - v) = -i(s - v)$$

وهـذا يعنـي أن $s - v = 0$ أو $s = v$ ومنـه ينـتج أن $u - t = 0$ و $u = t$. بهذه الصورة نكون قد أثبتنا أن الفضاء E هو مجموع مباشر لفضاءين خطيين حقيقين ، وتبعاً لذلك فإن العديد من المـسائل المتعلقـة بالفـضاءات المركبـة (العقدية) تؤول إلى دراسة الفضاءات الحقيقية .

لنلاحظ أن الفضاء العقدي ذا الـ n بعداً هو فضاء حقيقي ذو $2n$ بعداً . في الفقرات اللاحقة سنعتبر أن الفضاءات الخطية هي فضاءات حقيقية إلا إذا أشرنا إلى عكس ذلك .

§ ٢ – الفضاءات الخطية المنظمة

Normed Linear Spaces

تناولنا في دراستنا للفضاءات المترية المسائل المرتبطة ، بـصورة أساسـية ، بمفهوم المسافة كالتقارب والاستمرار ، وقد وجدنا أن لتلك المسائل تطبيقات هامة فـي العديد من المواضيع الرياضية المختلفة . في خلاف ذلك وجدنا أن الدور الرئيسي في الفضاءات الخطية تلعبه العمليتان الجبريتان : عملية جمع العناصر وعمليـة ضـربها بمقدار سلمي . من الطبيعي أن نتوقع ، أنه من أجل هذه الفضاءات التي قد عرفت فيها مسافة إضافة للعمليتين الجبريتين ، بناء نظرية أكثر شمولاً ، وأن نجد تطبيقات عملية لها أكثر اتساعاً ، مما وجدناه في نظرية الفضاءات المترية .

تعاريف . إذا كان الفضاء الخطي ، في الوقت نفسه ، فضاءً مترياً فإنه يسمى

بفضاء متري خطي إن أهم صفوف الفضاءات المترية الخطية هي الفضاءات من النمط B (فضاءات باناخ) .

تسمى المجموعة E فضاءً خطياً منظماً إذا :

١) - كانت E فضاءً خطياً بعملية ضرب بأعداد حقيقية (عقدية) .

٢) - قوبل كل عنصر x من الفضاء E بعدد حقيقي يسمى نظيم العنصر ونرمز له بـ $\|x\|$ ويفترض أن نظيم العنصر يحقق الشروط الآتية (موضوعات النظيم) :

١) - $\| x \| \geq 0$ إضافة إلى أن $\|x\| = 0$ فقط إذا كان $x = \theta$.

٢) - $\| x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (متراجحة المثلث)

٣) - $\| \lambda x \| = |\lambda| \; \| x \|$

من أجل جميع العناصر x , y من E و أياً كان المقدار السلمي λ .

لنعرف الآن في الفضاء الخطي المنظم E مسافة . لنضع من أجل أي عنصرين x و y من E :

$$\rho (x, y) = \| x-y\| \qquad (2.2.1)$$

بما أن $x = x - \theta$ فإنه من $(2.2.1)$ ينتج أن :

$$\| x \| = \| x-\theta \| = \rho (x ,\theta)$$

أي إن نظيم أي عنصر هو بعد ذلك العنصر عن θ .

لنتأكد من أن $(2.2.1)$ تحقق جميع موضوعات الفضاء المتري . وفي هذه الحالة نقول إن المسافة مولدة من نظيم . إذا كان $x \neq y$ فإن $x - y \neq \theta$ و عندئذ واستناداً إلى ١) يكون $\| x - y \| > 0$ ، أما إذا كان $x = y$ فإن $x - y = \theta$ وبالتالي فإن $\| x - y \| = 0$.

بما أن $x - y = (-1) (y - x)$ فإنه واستناداً إلى ٣) . نجد أن $\|x-y\| = \| y-x\|$ أي إن $\rho(x,y) = \rho(y ,x)$. كما أن متراجحة المثلث من أجل المسافة تنتج من ٢) :

$$\rho(x ,y) = \| x- y \| = \| (x-z) + (z- y)) \| \leq$$

$$\leq \| x -z \| + \|z - y \| = \rho (x, z) + \rho (z , y)$$

هكذا يكون الفضاء الخطي المنظم حالة خاصة من الفضاء المتري .
إذا كان الفضاء الخطي المنظم تاماً بمفهوم المسافة المولدة بالنظيم فإنه يسمى فضاء باناخ أو فضاء من النمط B

أمثلة .

– الفضاء الخطي ذو الـ n بعداً يمكن جعله فضاء من النمط B .

في الواقع بتعريف عملية جمع العناصر و ضربها بعدد بالطريقة المعروفة و بتعريف النظيم بالعلاقة :

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

نجد أن E_n فضاء من النمط B ، إضافة إلى أن المسافة في هذا الفضاء تتطابق مع المسافة المعرفة سابقاً في E_n .

٢ – الفضاء $C\,[\,0\,,\,1\,]$ هو فضاء من النمط B . يعرف جمع التوابع و ضربها بالطريقة العادية المعروفة . ولنضع الآن :

$$\| x \| = \max_t | x(t) |$$

إن المسافة المعرفة بالنظيم تتطابق مع المسافة المعرفة سابقاً في الفضاء $C\,[0\,,\,1]$.

٣ – الفضاء l_p هو فضاء من النمط B . بتعريف جمع العناصر و ضربها بمقدار سلمي كما ذكرنا سابقاً . و بوضع :

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

نحصل على فضاء من النمط B تتطابق فيه المسافة مع المسافة المعرفة سابقاً .

٤– الفضاء $L^p\,[0\,,\,1]$ هو فضاء من النمط B . من أجل العنصر $x \in L^p\,[0\,,\,1]$ نضع :

$$\| x \| = \left(\int_0^1 | x(t) |^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

إن المسافة في الفضاء المنظم تتطابق مع المسافة المعرفة في $L^p\,[0\,,\,1]$ سابقاً .

٥ – الفضاء m هو من النمط B . في الواقع لنضع من أجل $x = \{ \xi_i \}$ $\| x \| = \sup_i | \xi_i |$ فنحصل على فضاء من النمط B تتطابق فيه المسافة مع المسافة المعرفة سابقاً .

٦ – الفضاء $\widetilde{M}[0,1]$ هو فضاء من النمط B . لنضع من أجل التابع المحدود و القيوس $x\ (t)$ على المجال $[\,0\,,\,1\,]$:

$$\| x \| = vari \max | x(t) |$$

٧ – لنستعرض فضاء التوابع $x\,(\,t\,)$ المعرفة على المجال $[\,0\,,\,1\,]$ والقابلة للاشتقاق مستمرة حتى المرتبة k ضمناً . لنعرف في هذا الفضاء نظيماً بالعلاقة :

$$\|x\| = \max \left\{ \max_t | x(t) | \ , \max_t | x'(t) | \ , \ldots . \max_t | x^{(k)}(t) | \right\}$$

فنحصل على فضاء من النمط B ويرمز عادة لهذا الفضاء بالرمز $C^{(k)}\,[0\,,\,1]$. يمكن للطالب أن يتحقق بسهولة بالنسبة لهذه الفضاءات من تحقق موضوعتي النظيم الأولى و الثالثة أما الموضوعة الثانية فإنها تنتج من موضوعة المثلث بالنسبة للمسافة والتي قد أثبتت في الفضاءات المترية . بالأخذ بعين الاعتبار العلاقة $(\,2\,.\,2\,.\,1\,)$ نجد :

$$\begin{aligned} {}^{(*)}\ \|x+y\| &= \rho\,(x+y\,,\theta) \le \rho\,(x+y\,,y) + \rho\,(y\,,\theta) = \\ &= \| x+y-y \| + \| y \| = \| x \| + \| y \| \end{aligned}$$

لنبرهن الآن على أن :

$$\| x+y \| \ge \| x \| - \| y \| \qquad (2.2.2)$$

لنمثل العنصر x على الشكل $x = (\,x\,+\,y) - y$ ومن ثم نطبق متراجحة المثلث مع مراعاة الموضوعة ٣) :

$$\| x \| = \| (\,x+y\,) + (-y\,) \| \le \| (\,x\,+\,y\,) \| + \| y \|$$

فنجد المطلوب .

(*) واقعياً قد أثبتنا في هذه الفقرة أنه إذا عرف في فضاء خطي مسافة ونظيماً مرتبطين بالعلاقة $(\,2\,.\,2\,.\,1\,)$ فإنه من تحقق موضوعة المثلث لأحدهما ينتج تلقائياً تحقق هذه الموضوعة بالنسبة للآخر .

إذا طبقنا التعريف العام للتقارب المذكور في الفضاءات المترية على الفضاءات الخطية المنظمة ، فإننا نجد أن التقارب $x_n \to x$ يعني أن $\| x_n - x \| \to 0$

وسنسمي هذا التقارب **تقارباً بالنظيم** . استناداً إلى الخواص العامة للمسافة في الفضاءات المترية يكون $\| x - y \|$ تابعاً مستمراً بالنسبة لمتغيريه (انظر الفصل الأول الفقرة الثانية) .

أي إنه إذا كانت $x_n \to x$ و $y_n \to y$ فإن $\| x_n - y_n \| \to \| x - y \|$ في حالة خاصة بوضع $y_n = \theta$ نجد أن $\| x_n \| \to \| x \|$ إذا كانت $x_n \to x$ (استمرار النظيم) .

لنبرهن الآن استحالة تعريف نظيم في الفضاء S ، فضاء جميع المتتاليات العددية بحيث يتطابق التقارب بالنظيم مع التقارب بالمسافة المعرفة في هذا الفضاء، أي مع التقارب بالإحداثيات . بكلام آخر يستحيل تعريف نظيم بحيث تكون فيه المسافة المعرفة في S مولدة من ذلك النظيم . لنفرض العكس ،أي إنه يوجد مثل ذلك النظيم في S . وليكن e_n شعاع الواحدة على المحور ذي الرقم n في S أي الشعاع الذي من أجله الإحداثي النوني (n) يساوي 1 وباقي الإحداثيات تساوي الصفر $e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{(n-1)}, 1, 00 \ldots)$. بما أ $e_n \neq 0$ فإن $\| e_n \| > 0$. لنضع

$$x_n = \frac{1}{\| e_n \|} e_n \qquad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

فنجد أن

$$\| x_n \| = \frac{1}{\| e_n \|} . \| e_n \| = 1$$

من أجل أي عدد طبيعي k تأخذ متتالية الإحداثي k للعناصر x_n الشكل :

$$0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{\| e_k \|}, 0, 0 \ldots$$

وبالتالي فهي تتقارب إلى الصفر. بهذه الصورة تتقارب المتتالية $\{x_n\}$ إلى العنصر 0 بالإحداثيات . من جهة ثانية $\| x_n \| \not\to 0$ وهذا تناقض مع الفرض لأن التقارب

بالنظيم يتطابق مع التقارب بالإحداثيات . ونذكر هنا الشروط التي يحققها تابع المسافة، إذا كانت المسافة مولّدة من نظيم معرف على الفضاء الخطي المنظم E .

توطئة . كل مسافة مولّدة من نظيم على الفضاء الخطي المنظم E تحقق الخاصتين الآتيتين :

$$1)\ d(x+a,\ y+a) = d(x,\ y)$$
$$2)\ d(\alpha x,\ \alpha y) = |\alpha|\ d(x,\ y)$$

أياً كانت العناصر x, y, a من E وأياً كان المقدار السلمي α .

البرهان . لدينا

$$d(x+a,\ y+a) = \|(x+a)-(y+a)\| = \|x-y\| = d(x,y)$$
$$d(\alpha x,\alpha y) = \|(\alpha x-\alpha y)\| = |\alpha|\ \|x-y\| = |\alpha|\ d(x,y)$$

نأتي الآن للبرهان على استمرار العمليتين الجبريتين في الفضاء الخطي المنظم .

a) إذا كانت $x_n \to x$ وكانت $y_n \to y$ فإن $x_n + y_n \to x + y$ ،

في الواقع ، إن

$$\|x_n+y_n-(x+y)\| = \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \le \|x_n-x\| + \|y_n-y\| \to 0$$

b) إذا كانت $x_n \to x$ وكانت $\lambda_n \to \lambda$ فإن $\lambda_n x_n \to \lambda x$. في الواقع ، بما أن المتتالية $\{\lambda_n\}$ متقاربة إلى نهاية محدودة λ فإن λ_n محدودة ، كما أنه لدينا :

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n-x) + (\lambda_n-\lambda)\, x\| \le$$
$$\le |\lambda_n|\ \|x_n-x\| + |\lambda_n-\lambda|\ \|x\| \to 0$$

لنلاحظ أخيراً أن

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x-y\| \qquad (2.2.3)$$

في الواقع بما أن

$$\|x\| = \|y+(x-y)\| \le \|y\| + \|x-y\|$$

فإن

$$\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$$

وبمبادلة موضعي y و x نجد أن

$$\| y \| - \| x \| \leq \| x - y \|$$

وهذا بدوره يؤدي إلى المطلوب ومجدداً نجد أنه إذا كانت $x_n \rightarrow x$ فإن :

$$\| x_n \| \rightarrow \| x \|$$

و في حالة خاصة نجد أن $\{ \| x_n \| \}$ متتالية عددية محدودة .

بما أن الفضاء الخطي المنظم هو فضاء متري فإن جميع المفاهيم المذكورة في الفضاءات المترية (الكرة ــ المجموعة المحدودة ــ قابلية الفصل ، وغيرها . . .) تبقى قائمة بالنسبة للفضاءات الخطية المنظمة كما أن جميع المبرهنات المثبتة في الفضاءات المترية هي صحيحة بالنسبة للفضاءات الخطية المنظمة .

تعريف(١) . نسمي مجموعة العناصر من فضاء خطي E من الشكل

$$y = tx \quad ; \quad x \in E \quad , \quad x \neq 0 \quad , \quad -\infty < t < +\infty$$

مستقيماً معرفاً بالعنصر x . ونسمي مجموعة العناصر من الشكل

$$y = (1-t)\, x_1 + t x_2 \quad ; \quad x_1 , x_2 \in E \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

قطعة مستقيمة تصل النقطة x_1 بالنقطة x_2 .

تعريف (٢) . نقول عن مجموعة $E \supset K$ إنها مجموعة محدبة إذا أمكن وصل أية نقطتين منها بقطعة مستقيمة تقع كلياً في المجموعة K (جميع نقاطها تنتمي إلى K) .

تعريف(٣) . لتكن M مجموعة ما من الفضاء الخطي E . نسمي مجموعة العناصر من الشكل $x + a$ حيث $M \ni x$ و a عنصر مثبت من E انسحاباً للمجموعة M ونرمز لذلك بـ $M + a$.

بسهولة يمكن التأكد من أنه إذا كانت المجموعة K محدبة فإن انسحابها يكون مجموعة محدبة أيضاً .

لنبرهن الآن على أن الكرة المفتوحة (المغلقة) في الفضاء الخطي المنظم هي مجموعة محدبة . في الواقع لتكن $x_1 , x_2 \ni S(a,r)$ أي إن

$$\| x_1 - a \| < r \quad , \quad \| x_2 - a \| < r$$

لنأخذ عنصراً كيفياً من الشكل

$$y = (1-t)\, x_1 + t x_2 \qquad 0 < t < 1$$

فنجد أن :

$$\| y-a \| = \| (1-t)\, x_1 + t x_2 - a \| =$$

$$= \| (1-t)\, x_1 + t x_2 - (1-t)\, a - ta \| \leq$$

$$\leq \| (1-t)\,(x_1 - a) \| + \| t (x_2 - a) \| =$$

$$= (1-t)\, \| (x_1 - a) \| + t \| (x_2 - a) \| <$$

$$< (1-t)\, r + tr = r$$

وهكذا فإن $\| y-a \| < r$ وبالتالي فإن $y \in S(a\,,\,r)$.

لنلاحظ خاصتين بديهيتين من خواص الكرة في فضاء باناخ : إذا كانت $x \neq \theta$ نقطة ما من E فإن الكـرة التـي مركزهـا مبـدأ الإحـداثيات و نـصف قطرهـا $\| x \| < r$ تحتوي تلك النقطة ، كما أن الكرة التي مركزها في مبدأ الإحـداثيات و نصف قطرها $\| x \| > r'$ لا تحتوي على تلك النقطة .

الكرة الواحدية في الفضاء R^2

ليكن R^2 هو الفضاء الخطي المشكل من جميع الأزواج المرتبة $x = \{\xi_1, \xi_2\}$ ، $y = \{\eta_1, \eta_2\}$ ، . . . من الأعداد الحقيقية .

بسهولة يمكن التأكد من أن العلاقات الآتية تعرف نظاماً في R^2 .

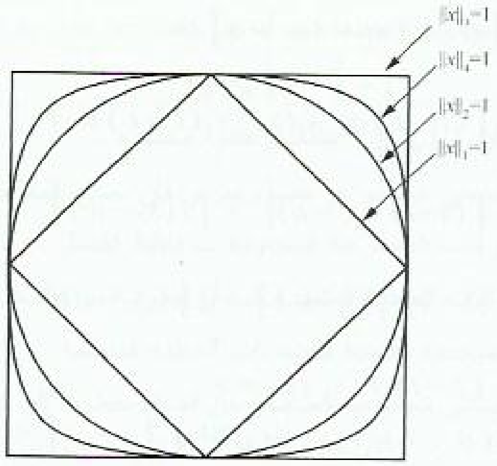
$$\| x \|_1 = | \xi_1 | + | \xi_2 |$$

$$\| x \|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| x \|_3 = max\{ | \xi_1 | \,,\, | \xi_2 | \}$$

$$\| x \|_4 = (\xi_1^4 + \xi_2^4)^{\frac{1}{4}}$$

وأن الكرة الواحدية $S(\theta, 1) = \{x : \| x \| = 1\}$ بالنسبة لتلك النظائم تبدو كما في الشكل (٣)



الشكل (٣)

بما أن الفضاء الخطي المنظم E هو فضاء خطي فإن جميع المفاهيم المعروضة في الفضاءات الخطية كمفهوم الاستقلال الخطي و الارتباط الخطي و المتنوعة الخطيـــة و نشر الفضاء في مجموع مباشر و غيرها تبقى قائمة وصحيحة .

تعريف(٤). إذا كانت L متنوعة خطية من الفضاء الخطي المنظم E وكانت مغلقة فإن L تسمى فضاءً جزئياً .

سنرى لاحقاً أنه إذا كانت L متنوعة خطية منتهية البعد من فضاء خطي منظم فإن $\overline{L} = L$ بينما إذا كانت لا نهائية البعد فإن هذه المساواة قد لا تتحقق .

ليكن على سبيل المثال $E = C[0, 1]$ ولتكن L المتنوعة الخطية المولدة بالعناصر

$$x_0 = 1 , \quad x_1 = t , \quad x_2 = t^2 , \quad . . . . , \quad x_n = t^n , ...$$

عندئذ تكون L مجموعة جميع كثيرات الحدود ويكون

$$\overline{L} = C[o,1] \neq L$$

§ ٣ – تكافؤ النظائم – الفضاءات المنظمة المنتهية البعد

Equivalent Norms – Finite Dimensional Normed Spaces

وجدنا أنه يمكن تزويد الفضا $\mathbb{R}^2$ بنظائم مختلفة ، فإذا كان $x = (\xi_1 , \xi_2)$

فإن العلاقات الآتية :

$$\| x \|_1 = | \xi_1 | + | \xi_2 | \quad , \quad \| x \|_2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}} ,$$
$$\| x \|_3 = max\{| \xi_1 | \ , | \xi_2 |\}$$

تعرف نظائم في R^2 . ولبيان اختلاف هذه النظائم قمنا باستعراض الكرات الواحدية الموافقة . سنرى أنه في الفضاءات المنتهية البعد (عدد أبعادها منتــه) ومــن أجــل النظائم غير المتماثلة تكون التوبولوجيا المترية المعرفة في ذلك الفضاء هــي نفـسها بالنسبة لجميع النظائم المعرفة على ذلك الفضاء وأما في الفضاءات اللانهائيــة البعــد (عدد أبعادها غير منته) لا يكون ذلك الأمر محققاً في الحالة العامة وأنه يتحقق مــن أجل النظائم المتكافئة .

تعريف (١) .ليكن E فضاءً خطياً منظماً وليكن $\| . \|_1$, $\| . \|_2$ نظيمين معرفين على E . نقول إن النظيم $\| . \|_2$ يكافئ النظيم $\| . \|_1$ إذا وجد ثابتان موجبان M و $m > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة :

$$m \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq M \| x \|_1 \qquad (2.3.1)$$

من أجل جميع العناصر $x \ni E$.

في ضوء التعريف المذكور سنبين أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ على مجموعة كــل النظائم المعرفة على E .

توطئة (١) . إذا كان E فضاءً خطياً منظماً وكانت $\| . \|_1$, $\| . \|_2$, $\| . \|_3$ نظائم معرفة على E وكان النظيم $\| . \|_2$ مكافئاً للنظيم $\| . \|_1$ وكان $\| . \|_3$ مكافئاً لـــ $\| . \|_2$ فإنه يكون :

١) $\| . \|_1$ مكافئاً لـــ $\| . \|_2$. ٢) $\| . \|_3$ مكافئاً لـــ $\| . \|_1$.

البرهان . من الفرض ينتج وجود ثابتين مثل m و $M > 0$ بحيث إن

$$m \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq M \| x \|_1 \quad , \quad (\forall x \in E) \qquad (2.3.2)$$

وكذلك وجود ثابتين مثل k و $K > 0$ بحيث إن :

$$k \| x \|_2 \leq \| x \|_3 \leq K \| x \|_2 \quad , \quad (\forall x \in E) \qquad (2.3.3)$$

عندئذ نجد أن :

$$\frac{1}{M} \| x \|_2 \le \| x \|_1 \le \frac{1}{m} \| x \|_2$$

أي إن $\|\cdot\|_1$ يكافئ $\|\cdot\|_2$ وبالاستعاضة عن $\|\cdot\|_2$ في $(2.3.3)$ بالمقادير الموافقة له من $(2.3.2)$ نجد :

$$km \| x \|_1 \le \| x \|_3 \le KM \| x \|_1 \ , \ (\forall x \in E)$$

أي إن $\|\cdot\|_3$ يكافئ $\|\cdot\|_1$.

سنبين الآن أن خواص الفضاء المتري (الخطي المنتظم) والمعرف عليه نظيمان متكافئان هي ذاتها بالنسبة لكل من النظيمين .

توطئة (٢) . ليكن E فضاءً خطياً منظماً وليكن $\|\cdot\|$ ، $\|\cdot\|_1$ نظيمين معرفين على E ولتكن d_1 , d المسافتان المولدتان بالنظيمين المذكورين أي إن :

$$d(x , y) = \| x - y \|$$
$$d_1(x , y) = \| x - y \|_1$$

ولنفرض وجود ثابت مثل $0 < K$ بحيث إن $\| x \| \le K \| x \|_1$ من أجل جميع العناصر x و E ($\|\cdot\|$ خاضع للنظيم $\|\cdot\|_1$) ولتكن $\{ x_n \}$ متتالية في E :

١) إذا كانت المتتالية $\{ x_n \}$ متقاربة في الفضاء المتري (E , d_1) فإنها تكون متقاربة في الفضاء المتري (E , d) .

٢) إذا كانت المتتالية $\{ x_n \}$ متتالية أساسية في (E , d_1) فإنها تكون أساسية كذلك في (E , d).

البرهان . ١) ليكن $0 < \varepsilon$ معلوماً ، عندئذ يوجد عدد مثل N و N بحيث إن المتراجحة $\| (x_n - x) \|_1 < \frac{\varepsilon}{K}$ تتحقق من أجل جميع الأعداد $N \le n$.

وبالتالي فإنه من أجل $N \le n$ يكون

$$\| x_n - x \| \le K \| x_n - x \|_1 < \varepsilon$$

أي إن $\{ x_n \}$ متقاربة في الفضاء (E , d) .

بالمثل تماماً تبرهن الحالة ٢) ونترك ذلك للطالب .

نتيجة إذا كان E فضاء خطياً منظماً و كان $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|$ نظيمين معرفين على E ومتكافئين و كانت d_1 ، d المسافتين المولدتين بالنظيمين المذكورين :

$$d(x\,,y) = \|\,x - y\,\| \qquad , \qquad d_1(x\,,y) = \|\,x - y\,\|_1$$

وكانت $\{x_n\}$ متتالية ما في E فإن

١) المتتالية $\{x_n\}$ تكون متقاربة إلى x في $(E\,,d)$ إذا وفقط إذا كانت متقاربة إلى x في الفضاء $(E\,,\,d_1)$.

٢) المتتالية $\{x_n\}$ تكون أساسية في الفضاء $(E\,,d)$ إذا وفقط إذا كانت أساسية في الفضاء $(E\,,d_1)$.

٣) الفضاء $(E\,,d)$ يكون تاماً إذا وفقط إذا كان $(E\,,d_1)$ تاماً .

البرهان . بما أن النظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_1$ متكافئان ، فإنه يوجد ثابتان $0 < M\,,m$ بحيث إن :

$$m\,\|x\| \le \|\,x\,\|_1 \le M\,\|\,x\,\| \qquad ,\,(\forall\ x \in E)$$

١) لتكن $\{x_n\}$ متقاربة إلى x في الفضاء المتري $(E\,,d)$ ، عندئذ و بما أن : $\|\,x\,\|_1 \le M\,\|\,x\,\|$ من أجل جميع العناصر x ∍ E فإنه استناداً إلى التوطئة (٢) تكون المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة في الفضاء $(E\,,d_1)$.

بالعكس لنفرض أن $\{x_n\}$ متقاربة إلى x في الفضاء المتري $(E\,,d_1)$ ، عندئذ وبما أن $\|\,x\,\| \le \frac{1}{m}\,\|\,x\,\|_1$ من أجل جميع x ∍ E فإن $\{x_n\}$ استناداً للتوطئة (٢) تكون متقاربة إلى x في الفضاء $(E\,,d)$.

إن (٢) تبرهن تماماً كما في (١) ونترك ذلك للطالب .

٣) لنفرض الآن أن $(E\,,d)$ تام ، و لتكن $\{x_n\}$ متتالية أساسية في الفضاء المتري $(E\,,d_1)$ عندئذ تكون متتالية أساسية في $(E\,,d)$ استناداً إلى ٢) وبالتالي تكون متقاربة إلى عنصر x ∍ $(E\,,d)$ وذلك لأن $(E\,,d)$ تام .

واستناداً إلى ١) تكون $\{x_n\}$ متقاربة إلى x في الفضاء المتري $(E\,,d_1)$ وهذا

بدوره يؤدي إلى أن (E, d_1) تام . إن العكس صحيح بالتناظر .

إذا كان E فضاء خطياً منظماً و كان $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_1$ نظيمين متكافئين على E ، فإنه ، كما وجدنا في النتيجة أعلاه ، لا يتعلق العديد من خصائص الفضاء المتري بالنظيم المختار وبالتالي فإنه يمكننا استبدال النظيم بنظيم آخر بغية دراسة تلك الخصائص ، إذ إنه أحياناً يكون التعامل مع أحد النظائم أسهل من التعامل مع نظائم أخرى .

تعريف (٢) . إذا كان E_2 , E_1 فضاءين خطيين منظمين وكان T إيزومورفيزماً من E_1 على E_2 و كان T هوميومورفيزماً في الوقت نفسه فإن T يسمى بإيزومورفيزم توبولوجي لـ E_1 على E_2 ونقول عن الفضاءين E_1 و E_2 إنهما إيزومورفيان توبولوجياً .

مبرهنة (١) جميع الفضاءات المنتهية البعد والتي عدد أبعاد كل منها n بعداً إيزومورفية توبولوجياً للفضاء الإقليدي E_n ذي الـ n بعداً وبالتالي فهي إيزومورفية توبولوجياً فيما بينها .

البرهان . ليكن E فضاءً خطياً منظماً ذا الـ n بعداً ولتكن $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ قاعدة في هذا الفضاء ، عندئذ أي عنصر $x \in E$ يكتب وبشكل وحيد على الشكل :

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n$$

لنعرف الآن تطبيقاً T من E إلى E_n بالعلاقة :

$$Tx = \bar{x} = \{ \xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n \} \in E_n$$

من الواضح أن هذا التطبيق للعناصر x على العناصر $\bar{x}$ هو تطبيق غامر و متباين وبالإضافة إلى هذا ، إنه إيزومورفيزم للفضاء الخطي E على الفضاء الخطي E_n .

لنبرهن الآن استمرار التطبيق T على E و استمرار T^{-1} على E_n .

من أجل أي عنصر $x \in E$ لدينا

$$\| x \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} | \xi_i | \, \| x_i \| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \beta \, \| \bar{x} \| \tag{2.3.4}$$

و بشكل خاص يكون .

$$\| x - y \| \leq \beta \, \| (\bar{x} - \bar{y}) \| \tag{2.3.5}$$

حيث إن $\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ لا يتعلق بـــ x و y .

بمـــا أن $\bar{x}$ هـــي صـــورة العنـــصر x وفـــق T و أن $x = T^{-1}\bar{x}$ فـــإن ($2.3.4$) تكتب على الشكل

$$\| T^{-1}\bar{x} \| \leq \beta \, \| \bar{x} \|$$

كما أن ($2.3.5$) تأخذ الشكل

$$\| T^{-1}\bar{x} - T^{-1}\bar{y} \| \leq \beta \, \| \bar{x} - \bar{y} \| \tag{2.3.6}$$

وبما أن ($2.3.6$) محققة من أجل أي عنصرين $\bar{x}$, $\bar{y}$ من E_n فإنها تعني أن T^{-1} مستمر على E_n .

لنثبت الآن المتراجحة في الإتجاه المعاكس . ليكن S سطح الكرة الواحدية في الفضاء E_n ، أي إن :

$$S = \left\{ \bar{x} = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \} \; : \; \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1 \right\}$$

لنعرف على S تابعاً f بالعلاقة :

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n) = \|x\| = \| \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n \|$$

وبما أن الأعداد ξ_i لايمكن أن تكون معدومة في آن واحد ، فإنه وبحكم الاستقلال الخطي لعناصر القاعدة $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ يكون لدينا

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, x_i \neq 0$$

وهذا بدوره يؤدي إلى أن

$$f(\bar{x}) = f(\xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n) > 0$$

من أجل أي عنصرين $\bar{x}$, $\bar{y}$ ∍ S يكون لدينا

$$= \left| f\,(\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,\xi_n\,)\;-f\,(\,\eta_1\,,\,\eta_2\,,\,.\,.\,.\,,\,\eta_n\,)\right|$$

$$= \left|\,\|\,x\,\| - \|\,y\,\|\,\right| \quad \le \quad \|\,x - y\,\|$$

وباستخدام المتراجحة (2 . 3 . 5) نجد أن :

$$\left|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\right| \;\le\; \beta \left\|\bar{x} - \bar{y}\right\| \qquad (2.3.7)$$

إن العلاقة (7 . 3 . 2) تعني أن f تابع مستمر على S . و استناداً إلى مبرهنة وايرشتراس يبلغ هذا التابع قيمته الصغرى α على S . بسهولة يمكن التأكد من أن $0 < \alpha$ وبالتالي فإنه من أجل أي عنصر $\bar{x}$ ∍ S يكون لدينا

$$f(\bar{x}) = \|\,x\,\| \ge \alpha$$

ومنه ومن أجل أي عنصر $\bar{x}$ ∍ E_n نجد أن

$$f(\bar{x}) = \|\,x\,\| = \left\|\bar{x}\right\| \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i\, x_i}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2}}\right| \ge \alpha\left\|\bar{x}\right\| \qquad (2.3.8)$$

ومنه نجد أن

$$\left\|\bar{x}\right\| \le \frac{1}{\alpha}\,\|\,x\,\|$$

أو :

$$\|Tx\| \le \frac{1}{\alpha}\|\,x\,\| \qquad (2.3.9)$$

وهذا يبرهن استمرار التطبيق T في الفضاء E .

من الهوميومورفيزم بين E و E_n ينتج أن التقارب بالنظيم يؤدي إلى التقارب بالإحداثيات . وبما أن E_n فضاء تام فإن E تام . أي إن كل فضاء خطي و منظم و منتهي البعد هو فضاء باناخ .

مبرهنة (٢) . ليكن E فضاءً خطياً منظماً منتهي البعد وعدد أبعاده n بعداً . وليكن $\|\cdot\|$ نظيماً معرفاً على E ولتكن $\{\, e_1\,, e_2\,,\,.\,.\,.\,.\,, e_n \,\}$ قاعدة

في E ، وليكن $\|\cdot\|_1$ نظيماً معرفاً بالعلاقة :

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.3.10)$$

عندئذ يكون النظيمان $\|\cdot\|$ ، $\|\cdot\|_1$ متكافئين .

البرهان . بما أن أي عنصر x من E يكتب وبشكل وحيد على الشكل

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$$

فإننا نجد :

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \; e_j \right\| \leq \sum_{j=}^{n} |\lambda_j| \; \|e_j\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

لنضع : $M = \left(\sum_{j=1}^{n} |e_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. فنجد أن :

$$\|x\| \leq M \; \|x\|_1$$

لنعرف الآن تابعاً من E في R بالعلاقة :

$$f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|$$

واستناداً إلى استمرار عمليتي الجمع و الضرب في E نجـد أن التـابع f مـستمر بالنسبة للمسافة الإقليدية على E .

ليكن S سطح الكرة الواحدية في E :

$$S = \{ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in E \; : \; \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i|^2 = 1 \}$$

إن هذه المجموعة متراصة (مغلقة و محدودة) بالتالي فإن التـابع f يبلـغ قيمتـه الصغرى m على هذه المجموعة في نقطة مثل $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ أي إن

$$m = f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \leq f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

من أجل جميع $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in S$.

إن $0 < m$ لأنه إذا كان $m = 0$ لكان

$$0 = f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) = \left\| \sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j \right\|$$

أي إن $\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j = 0$ وهذا ينافي أن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة في E .

وفقاً لتعريف النظيم $\|\cdot\|_1$ إذا كان $\|x\|_1 = 1$ فإنه يكون $m \leq \|x\|$ بناءً على ذلك إذا كان $y \in E \setminus \{0\}$ فإن $\left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\|_1 = 1$ وبالتالي فإن

$m \leq \left\| \frac{y}{\|y\|_1} \right\|$ ومنه نجد أن

$$\|y\| \geq m \|y\|_1$$

وبما أن العلاقة $\|y\| \geq m \|y\|_1$ محققة كذلك عندما $y = 0$ فإن النظيمين $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_1$ متكافئان .

نتيجة . إذا كان $\|\cdot\|$ ، $\|\cdot\|_2$ أي نظيمين على الفضاء الخطي المنظم و المنتهي البعد E فإن هذين النظيمين متكافئان .

البرهان . لتكن $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ قاعدة في E وليكن $\|\cdot\|_1$ نظيماً معرفاً بالعلاقة :

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

عندئذ يكون كل من $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|$ مكافئاً لـ $\|\cdot\|_1$ وهذا بدوره يؤدي إلى تكافؤ $\|\cdot\|$ و $\|\cdot\|_2$.

ومن أجل أي فضاء جزئي من فضاء خطي منظم تتحقق التوطئة الآتية و التي تنسب إلى ريس .

توطئة (١) ريس . ليكن L فضاءً جزئياً من الفضاء الخطي المنظم E و $L \neq E$ ، عندئذ من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عنصر مثل y ، نظيمه يساوي الواحد ($\| y \| = 1$) وبحيث إن :

$$\| x - y \| > 1 - \varepsilon$$

من أجل جميع $x \ni L$.

في الحقيقة ، ليكن y_0 عنصراً ما من E وغير منتمٍ إلى L . لنضع :

$$d = \inf_{x \in L} \| y_0 - x \|$$

عندئذ يكون $0 < d$ (لأنه إذا كان $d = 0$ فإن ذلك يعني أن y_0 نقطة تجمع لـ L وبالتالي فهو ينتمي إلى L وهذا مناقض للفرض) . من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ توجد نقطة مثل $x_0 \ni L$ وبحيث إن :

$$d \leq \| y_0 - x_0 \| < d + d\varepsilon$$

لنضع :

$$y = \frac{y_0 - x_0}{\| y_0 - x_0 \|}$$

إن $y \not\in L$ (إذا كان $y \ni L$ فإن ذلك يؤدي إلى $y_0 \ni L$) ، كما أن $\| y \| = 1$. ولنأخذ عنصراً كيفياً x من L ، ولنضع :

$$\xi = x_0 + \| y_0 - x_0 \| x$$

فنجد أن :

$$\| y - x \| = \left\| \frac{y_0 - x_0}{\| y_0 - x_0 \|} - x \right\| = \frac{1}{\| y_0 - x_0 \|} \| y_0 - \xi \| >$$

$$> \frac{1}{d + d\varepsilon} \| y_0 - \xi \| \geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon$$

وهو المطلوب .

استناداً إلى توطئة ريس يمكننا إثبات المبرهنة الآتية و التي تسمى بمبرهنة البعد

المنتهي . (*)

مبرهنة (٣) . إذا كانت الكرة الواحدية المغلقة $\overline{S}(\theta,1) = \{ x : \|x\| \leq 1 \}$ متراصة في الفضاء الخطي المنظم E فإن E يكون منتهي البعد .

البرهان . لتكن $\overline{S}$ متراصة ولنفرض أن $dim\ E = \infty$ ولنبين أن هذا يؤدي إلى تناقض . لنختر أي عنصر x_1 نظيمه يساوي 1 وليكن X_1 فضاء جزئياً من X أحادي البعد ومولداً بالعنصر x_1 واستناداً إلى توطئة ريس يوجد في X عنصر مثل x_2 نظيمه يساوي الواحد وبحيث إن :

$$\| x_2 - x_1 \| \geq \frac{1}{2}$$

ليكن الآن X_2 فضاءً جزئياً من X ثنائي البعد ومولداً بالعنصرين x_1 و x_2 ، عندئذ يوجد عنصر مثل x_3 ∋ X وبحيث إن : $\| x_3 \| = 1$ و :

$$\| x_3 - x \| \geq \frac{1}{2} \quad , \quad \forall x \in X_2$$

في حالة خاصة يكون : $\| x_3 - x_1 \| \geq \frac{1}{2}$ و $\| x_3 - x_2 \| \geq \frac{1}{2}$

وبالاستمرار على هذا النحو نحصل على متتالية من العنصر $\{ x_n \}$ من $\overline{S}$ وبحيث إن :

$$\| x_m - x_n \| \geq \frac{1}{2} \quad ; \quad m \neq n$$

من الواضح أن $\{ x_n \}$ لا يمكن أن تحتوي على متتالية جزئية متقاربة وهذا يناقض كونها متراصة و بالتالي فإن فرضنا أن $dim\ E = \infty$ خاطئ .

ليكن E فضاءً خطياً منظماً ، وليكن L_0 فضاءً جزئياً منه و E / L_0 فضاء العامل الموافق . إنّ E / L_0 يسمح بالتنظيم الآتي :

$$\| L \| = \inf_{x \in L} \| x \|$$

(*) سنتعرض لهذا الموضوع في الفصل الخامس بشكل مفصل .

من أجل جميع L ذ E/L_0 .

لنبرهن على أن $\| L \|$ يحقق جميع موضوعات النظيم .

١ – من الواضح ان $\| L \| \geq 0$ لنبرهن على أن $\| L \| = 0$ إذا وفقط إذا كان $L = L_0$.

لنلاحظ أولاً أن L مجموعة مغلقة . في الواقع ، لتكن $\{ x_n \}$ متتالية عناصر من L متقاربة إلى x ذ E . من أجل أي عددين n و m يكون $x_m - x_n \in L_0$ ، ومن أجل $m \to \infty$ نجد أن :

$x_n - x_m \to x_n - x$ وبما أن L_0 مغلق فإن : $x_n - x \in L_0$ وهذا يؤدي إلى أن x إضافة إلى x_n تنتميان إلى L .

لنفرض الآن :

$$\| L \| = \inf_{x \in L} \| x \| = 0$$

عندئذ توجد في L متتالية مثل $\{ x_n \}$ بحيث إن $\| x_n \| \to 0$ أي إن $x_n \to 0$ ونتيجة لكون L مغلقاً فإنه ينبغي أن يحتوي على 0 وعندئذ يكون $L = L_0$ وأما كون $\| L_0 \| = 0$ فهذا واضح وبذلك تتحقق الموضوعة الأولى من موضوعات النظيم .

٢ – ليكن $\varepsilon > 0$ من تعريف $\| L_1 \|$ و $\| L_2 \|$ ينتج وجود عنصرين مثل x_1 ذ L_1 و x_2 ذ L_2 بحيث إن :

$$\| x_1 \| \leq \| L_1 \| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\| x_2 \| \leq \| L_2 \| + \frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه نجد أن

$$\| x_1 + x_2 \| \leq \| x_1 \| + \| x_2 \| \leq \| L_1 \| + \| L_2 \| + \varepsilon$$

وخصوصاً يكون

$$\inf_{x \in L_1 + L_2} \| x \| \leq \inf_{\substack{x_1 \in L_1 \\ x_2 \in L_2}} \| x_1 + x_2 \| \leq \| L_1 \| + \| L_2 \| + \varepsilon$$

أو

$$\| L_1 + L_2 \| \leq \| L_1 \| + \| L_2 \| + \varepsilon$$

وبما أن ε كيفي فإننا نجد أن :

$$\| L_1 + L_2 \| \leq \| L_1 \| + \| L_2 \|$$

٣ - $\| \lambda L \| = | \lambda | \, \| L \|$ في الواقع ، من أجل $\lambda \neq 0$ يكون :

$$\| \lambda L \| = \inf_{x \in L} \| \lambda x \| = | \lambda | \inf_{x \in L} \| x \| = | \lambda | \, \| L \|$$

وإذا كان $\lambda = 0$ فإنه من أجل أي L يكون :

$$\| \lambda L \| = \| L_0 \| = 0 = | \lambda | \, \| L \|$$

و بذلك نكون قد أثبتنا صحة الموضوعة الثالثة من موضوعات النظيم .

لنبرهن أخيراً على أن تقارب متتالية من الصفوف $\{ L_n \}$ إلى الصف L وفق النظيم المعرف في الفضاء E / L_0 يكافئ شرط وجود متتالية من العناصر $\{ x_n \}$ ، $x_n \ni L_n$ وبحيث إن $x_n \to x$ و $x \in L$.

ليكن

$$\| L_n - L \| \to 0$$

أي إن

$$\| L_n - L \| = \varepsilon_n \quad ; \quad \varepsilon_n \to 0$$

عندئذ يحتوي $L_n - L$ على عنصر $y_n - x$ بحيث إن $y_n \ni L_n$ و $x \ni L$ و :

$$\| y_n - x \| < 2 \varepsilon_n$$

وفقاً لذلك وبمثابة العنصر x يمكننا أخذ أي عنصر مثبت (غير متعلق بـ n) مثل $x_0 \ni L$.

في الحقيقة ، إذا كان

$$\| y_n - x \| \leq 2 \varepsilon_n$$

حيث $y_n \ni L_n$ و $x \ni L$ فإن

$$\| (y_n - x + x_0) - x_0 \| \leq 2 \varepsilon_n$$

وبما أن $x_0 \ni L$ و $x \ni L$ فإن :

$$x - x_0 \in L_0 \quad \text{و} \quad x_n = y_n - x + x_0 \in L_n$$

وهكذا فإنه من أجل العنصر x_0 قد بنيت متتالية $\{ x_n \}$ ، $x_n \ni L_n$ وبحيث إن $x_n \to x_0$.

لنفرض العكس ، أي إنه توجد متتالية مثل $\{ x_n \}$ و $x_n \ni L$ و بحيث إن $x_n \to x$ و $x \ni L$. بما أن :

$$\| L_n - L \| = \inf_{y_n \in L_n , y \in L} \| y_n - y \| \leq \| x_n - x \|$$

فإن

$$\| L_n - L \| \to 0$$

و هو المطلوب .

بسهولة يمكن البرهان على أنه إذا كان الفضاء E تاماً فإن E / L_0 يكون تاماً أيضاً .

في الواقع ، لتكن $\{ L_n \}$ متتالية أساسية من الصفوف في E / L_0 . لنختر في كل صف L_n عنصراً x_n وبحيث إن :

$$\| x_n - x_m \| \leq 2 \| L_n - L_m \|$$

فنحصل على متتالية أساسية $\{ x_n \}$ من عناصر E . وبما أن E فضاء تام ، فإنه يوجد عنصر $x \ni E$ بحيث إن $x_n \to x$. عندئذ $L_n \to L$ حيث L الصف الذي يحتوي على العنصر x وهكذا نكون قد برهنا على أن E / L_0 تام .

لنلاحظ أنه إذا كانت $E_1 , E_2 , ... , E_n$ فضاءات خطية منظمة وكان E مجموعاً مباشراً لهذه الفضاءات ، فإنه يمكن جعل الفضاء E منظماً ، على سبيل المثال لنضع من أجل $x = \{ x_1 , x_2 , ... , x_n \}$:

$$\| x \| = \| x_1 \| + \| x_2 \| + . . . + \| x_n \|$$

ومن الممكن أيضاً البرهان على أنه إذا كـــان $E = E_1 \oplus E_2$ فـــإن الفـــضاءين الخطيين المنظمين E_1 و E / E_2 إيزومورفيان .

سلاسل العناصر في فضاء باناخ

لتكن . . . . . $x_1 , x_2 , ... x_n$ عناصر من فضاء باناخ فـــي E . نـــسمي العبارة من الشكل $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ سلسلة مشكلة من عناصر الفضاء E . لنستعرض

المجاميع الجزئية $S_n = x_1 + x_2 + . . . + x_n$

إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة فإننا نقول إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة .

بما أن الفضاء E فضاء تام ، فإنه لتقارب المتتالية $\{S_n\}$ يكفي أن تكون هذه المتتالية أساسية . من هذا وبدوره ينتج الشرط الكافي الآتي لتقارب السلسلة :

إذا كان $\| x_n \| \leq a_n$ و كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة ، فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ تكون متقاربة . إن البرهان ينتج وضوحاً من المتراجحة :

$$\| S_{n+p} - S_n \| = \| x_{n+1} + x_{n+2} + . . . + x_{n+p} \| \leq$$
$$\leq a_{n+1} + a_{n+2} + . . . + a_{n+p}$$

§ ٤ – الفضاءات الخطية التوبولوجية
Topological Linear Spaces

إن الفضاءات الخطية المنظمة ، و التي قد استعرضنا أعلاه بعض خواصها ، تعتبر حالة خاصة من الفضاءات الخطية المترية ، وهذه الفضاءات بدورها هي شكل من أشكال أكثر عمومية وهي الفضاءات الخطية التوبولوجية . وقد وجدت لهذه الفضاءات تطبيقات واسعة في مختلف الفروع الرياضية ، في العقود الأخيرة ، وهنا سنستعرض فقط الخواص البسيطة لهذه الفضاءات ويمكن للطالب الذي يرغب بالاطلاع على هذا الموضوع العودة إلى المرجع [7] أو إلى كتاب

Taylor A . E . and Lay D . C . , Introduction to Functional Analysis , Wiley , new York 1980

تسمى المجموعة $X = \{ x , y , z , . . . \}$ فضاءً خطياً توبولوجياً إذا تحققت الموضوعات الآتية :

I . X فضاء توبولوجي . أي إنه في X توجد جملة Y من المجموعات المفتوحة المحققة للشروط الآتية :

٩) – المجموعة الخالية والفضاء بأكمله مجموعتان مفتوحتان .

٢) - اجتماع أي عدد من المجموعات المفتوحة هو من جديد مجموعة مفتوحة .

٣) - تقاطع عدد منته من المجموعات المفتوحة هو من جديد مجموعة مفتوحة .

نسمي أية مجموعة مفتوحة تحتوي على النقطة $x \in X$ **جواراً** لهذه النقطة .

نسمي النقطة $x \in M$ ($M \subset X$) نقطة داخلية من المجموعة M إذا كانت هذه النقطة مع جوار لها $U(x)$ محتواة في M . من الواضح أن كل نقطة من مجموعة مفتوحة G هي نقطة داخلية : في هذه الحالة ، بمثابة $U(x)$ يمكننا على سبيل المثال ، أخذ المجموعة G نفسها . وبالعكس ، إذا كانت كل نقطة من نقاط مجموعة ما M نقطة داخلية ، فإن المجموعة M تكون مجموعة مفتوحة . إن هذا الأمر ينتج من المساواة :

$$M = \bigcup_{x \in M} U(x) \qquad , \qquad U(x) \subset M$$

والخاصة ٢) للمجموعات المفتوحة .

II . X فضاء توبولوجي منفصل (Seperated T. Space) . هذا يعني أنه من أجل أية نقطتين x و y من الفضاء X يوجد جوار للنقطة x لا يحتوي على النقطة y .

استناداً إلى مفهوم الجوار ، يعرف بصورة عادية مفهوم **نقطة التجمع** لمجموعة تسمى النقطة $a \in X$ نقطة تجمع للمجموعة $M \subset X$ إذا احتوى أي جوار لهذه النقطة على نقطة ، على الأقل ، من نقاط المجموعة M مغايرة للنقطة a . وتسمى مجموعة جميع نقاط التجمع للمجموعة M بالمجموعة المشتقة ويرمز لذلك بـ M' نسمي المجموعة $\overline{M} = M \bigcup M'$ بلصاقة المجموعة M . ونقول إن المجموعة M **مغلقة** إذا تطابقت M مع لصاقتها . يمكن البرهان على أن اللصاقة والمجموعات المغلقة في الفضاءات التوبولوجية تتمتع بالعديد من خواص اللصاقة والمجموعات المغلقة من المحور الحقيقي، على سبيل المثال : متممة مجموعة مفتوحة هي مجموعة مغلقة . كما أنها تتمتع بالخواص المذكورة في الفصل الأول الفقرة الثانية . المجموعة المنتهية مجموعة مغلقة . كما أنه في الفضاء التوبولوجي

يمكن تعريف نهاية متتالية من النقاط . . . . $x_1 , x_2 , ... , x_n$ . . . .

على وجه التحديد تكون النقطة x نهاية لهذه المتتالية إذا احتوى أي جوار لـ x جميع نقاط المتتالية اعتباراً من رقم ما ، وبسهولة يمكن البرهان على أن النهاية تتعرف بشكل وحيد.

III . X فضاء حقيقي خطي (يستعرض أيضاً الفضاء العقدي إلا أننا لن نتعرض هنا لذلك)

IV . عمليتا جمع العناصر وضربها بعدد حقيقي مستمرتان بالنسبة لتبولوجيا الفضاء X .هذا يعني الأمر الآتي :

٩) – من أجل أي عنصرين x و y من X وأي جوار $U (x + y)$ للعنصر $x + y$ يوجد جواران $U (x)$ ، $U (y)$ للعنصرين y , x بحيث إن

$$U (x) + U (y) \subset U (x + y)$$

(الرمز $A + B$ حيث A و B مجموعتان من الفضاء الخطي X تعني مجموعة العناصر من X والتي هي من الشكل $a + b$ حيث $a \ni A$ و $b \ni B$)

٩) – من أجل أي عدد حقيقي λ ومن أجل أي عنصر $x \ni X$ وأي جوار W للعنصر λx يوجد عدد $0 < \delta$ وجوار V للعنصر x بحيث إن

$$\alpha V \subset W$$

من أجل جميع الأعداد α المحققة للمتراجحة :

$$| \alpha - \lambda | < \delta$$

(الرمز αV يعني مجموعة النقاط من الشكل αy حيث $y \ni V$)

لتكن x_0 نقطة مثبتة من الفضاء الخطي التوبولوجي ، ولتكن G مجموعة مفتوحة عندئذ تكون $G + x_0$ مجموعة مفتوحة أيضاً .

لنأخذ أي عنصر $y \ni x_0 + G$

$$y = x_0 + x \quad , \quad x \ni G$$

فنجد أن $G \ni y - x_0$ ، وبما أن G مجموعة مفتوحة فإنها تكون جواراً للنقطة

وتبعاً لاستمرار الجمع يوجد جوار ان مثل $V(y)$ و $W(-x_0)$ $y-x_0$ للنقطتين y و x_0 على الترتيب وبحيث إن

$$V(y) + W(-x_0) \subset U(y-x_0) = G$$

وفي حالة خاصة يكون :

$$V(y) + (-x_0) \subset G$$

أي إن :

$$V(y) \subset G + x_0$$

بهذه الصورة نجد أن كل نقطة من نقاط المجموعة $G + x_0$ محتواة مع جوار ما لها في هذه المجموعة أي إن $G + x_0$ مجموعة مفتوحة .

بالمثل تماماً نبرهن على أن المجموعة λG مفتوحة من أجل أي عدد حقيقي λ وأية مجموعة مفتوحة G .

مما برهنا ينتج أنه إذا كان $U(x)$ جواراً للنقطة x من الفضاء الخطي التبولوجي X فإن $U(x) - x$ يكون جواراً لصفر الفضاء X . بالعكس ،إذا كان $V(\theta)$ جواراً لصفر الفضاء X ، فإن $V(\theta) + x$ يكون جواراً للنقطة x من الفضاء نفسه . لذلك فإنه من أجل أن نعرف مجموعة جميع الجوارات لجميع نقاط الفضاء الخطي ، أي مجموعة جميع المجموعات المفتوحة للتبولوجيا في X يكفي أن نعرف جميع جوارات الصفر .

نقول عن المجموعة A من الفضاء الخطي X إنها متناظرة إذا نتج من كون $x \in A$ أن $(-x) \in A$. إذا كان U جواراً لصفر الفضاء الخطي التوبولوجي X ، فإنه من الواضح أن :

$$-U \cap U$$

يكون أيضاً جواراً للصفر وأكثر من ذلك فهو متناظر .

لنلاحظ أخيراً أنه لتعريف توبولوجيا الفضاء لا يلزم تعريف جميع جوارات الصفر و أنه يكفي تعريف جملة من الجوارات للصفر تسمى **جملة أساسية أو قاعدة** بحيث إنه من أجل أي جوار للصفر U يوجد جوار للصفر V من الجملة الأساسية محتوى كلياً في U . وبشكل عام إذا كان لدينا جملتان أساسيتان من الجوارات S و $\tilde{S}$ في الفضاء X فإن هاتين الجملتين تسميان **متكافئتين** إذا وجد من أجل أي جوار

$U \ni S$ جوار مثل $\tilde{U}$ د $\tilde{S}$ بحيث إن $\tilde{U} \subset U$ و بالعكس ، من أجل أي جوار $\tilde{V}$ د $\tilde{S}$ يوجد جوار مثل V د S بحيث إن $V \ni \tilde{V}$. من الواضح أن الجملتين المتكافئتين من الجوارات تولدان في الفضاء X توبولوجيا واحدة (التبولوجيا نفسها) .

مثال (١) . لتكن X مجموعة التوابع الحقيقة المعرفة على المحور الحقيقي . $-\infty < t < +\infty$ والقابلة للاشتقاق عدداً غير منته من المرات على ذلك المحور والتي تؤول إلى الصفر خارج مجال مغلق محدود ما [*] . يعرف مجموع تابعين وضرب تابع بعدد بالطريقة المعلومة . بمثابة جوارات للصفر تؤخذ المجموعات الآتية : من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ وأي عدد n يكون جوار الصفر $U(n, \varepsilon)$ هو مجموعة التوابع $x(t) \ni X$ التي من أجلها

$\left| x^k(t) \right| < \varepsilon$ من أجل $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. بسهولة يمكن للطالب أن يتأكد من تحقق جميع موضوعات الفضاء الخطي التوبولوجي .

مثال (٢) . الفضاء الخطي المنظم هو فضاء خطي توبولوجي . إن أية مجموعات مفتوحة (بمفهوم المسافة المعرفة بالنظيم) والتي تحتوي على نقطة الصفر تكون جوارات لنقطة الصفر .

هنا يبرز سؤال عن الحالات التي يمكن فيها أن نعرف نظيماً في الفضاء الخطي التوبولوجي (أي جعله فضاء منظماً) بحيث تتطابق مجموعة جوارات الصفر في الفضاء الخطي المنظم الناتج مع مجموعة جوارات الصفر المعروفة سابقاً في الفضاء الخطي التوبولوجي . إن مبرهنة(أ . ن كولموغوروف) [**] تعطي إجابةعلى هذا السؤال وسنعرضها هنا بعد أن نستعرض مفهوم المجموعة المحدودة في الفضاء الخطي التوبولوجي .

---

[*] لكل تابع مجاله الخاص به .

[**] (أ . ن كولموغوروف) (*A . N. Kolmogroff*) (*25 . 4 . 1903*) رياضي سوفيتي .

نقول إن مجموعة A من الفضاء الخطي التوبولوجي **محدودة** إذا وجد عدد مثل $0 < \lambda$ من أجل أي جوار للصفر $U(\theta)$ بحيث تقع المجموعة λA كلياً في ذلك الجوار للصفر . إن محدودية المجموعة A تكافىء الشرط :

من أجل أية متتالية $\{x_n\} \subset A$ وأية متتالية من الأعداد الحقيقية $\{\lambda_n\}$ متقاربة الى الصفر تكون

$$\lambda_n x_n \to \theta$$

ولن نتعرض هنا لبرهان هذا الأمر. من هذا الشرط ينتج أنه إذا كانت المجموعة A محدودة فإن $-A$ تكون محدودة كذلك .

مبرهنة (أ . ن كولموغوروف) . الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الخطي التوبولوجي X قابلاً للتنظيم هو أن يوجد فيه جوار محدب ومحدود للصفر .

البرهان . ليكن U جواراً لصفر الفضاء X متمتعاً بالخواص المذكورة ، ودون مس عمومية المسألة يمكننا اعتباره متناظراً . لنضع من أجل أي عنصر $x \in X$:

$$\|x\| = \inf_{\lambda > 0,\, x \in \lambda U} \lambda$$

ولنبرهن على أن هذا النظيم يحقق جميع موضوعات النظيم المعروفة .

أولاً ، إن $\|\theta\| = 0$ وذلك لأن $\theta \in \lambda U$ من أجل أي عدد $\lambda > 0$. لنفرض أن $x \neq \theta$ ، عندئذ من أجل عدد ما n_0 يكون $x \notin \frac{1}{n_0} U$. في الواقع ، إذا كان $x \in \frac{1}{n} U$ من أجل أي عدد n فإن $y_n = nx \in U$ من أجل $n = 1, 2, \ldots$ ولهذا فإن المتتالية $\{y_n\}$ محدودة ومنه نجد أن $\frac{1}{n} y_n \to \theta$ وهذا غير ممكن وذلك لأن $\frac{1}{n} y_n = x \neq \theta$ وهكذا فإن $x \notin \frac{1}{n_0} U$ ولذلك فإن

$$\|x\| \geq \frac{1}{n_0} > 0$$

أي موضوعة النظيم الأولى محققة .

ليكن الآن $\| x \| = \alpha$ ، $\| y \| = \beta$ وأن $x \, , \, y \neq \theta$ عندئذ يكون

$\left\| \frac{x}{\alpha} \right\| = 1$ وبالتالي فإن $\frac{x}{\alpha} \in (1+\varepsilon) \, U$ من أجل $\varepsilon > 0$ وصغير بقدر كاف .

بالمثل تماماً نجد أن $\frac{y}{\beta} \in (1+\varepsilon) \, U$. واستناداً لتحدب الجوار U فإن

$(1+\varepsilon) \, U$ يكون محدباً كذلك وتبعاً لذلك يكون لدينا

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \, \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \, \frac{y}{\beta} \in (1+\varepsilon) \, U$$

أو

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in (1+\varepsilon) \, U$$

وبالتالي فإن

$$(x+y) \in (\alpha+\beta) \, (1+\varepsilon) \, U$$

ومنه نجد أن

$$\| x+y \| \leq (\alpha+\beta) \, (1+\varepsilon)$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فإن

$$\| x+y \| \leq \alpha + \beta = \| x \| + \| y \|$$

إذا كان x أو y أو كلاهما مساوياً للصفر فإنه تتحقق المساواة :

$$\| x+y \| = \| x \| + \| y \|$$

وهكذا تتحقق الموضوعة الثانية من موضوعات النظيم .

بما أن الجوار U متناظر فإنه من $x \in \lambda U$ ينتج أن $-x \in \lambda U$ وبالعكس . ولذلك فإن :

$$\| -x \| = \| x \|$$

لنستعرض العنصر αx حيث $\alpha > 0$ ولنفرض أن $x \in \lambda U$ عندئذ نجد أن $\alpha x \in \alpha \lambda U$ وبالعكس من $\alpha x \in \alpha \lambda U$ ينتج أن $x \in \lambda U$. ولذلك فإن

$$\| \alpha x \| = \inf_{\alpha x \in \mu U} \mu = \inf_{\alpha x \in \alpha \lambda U} \alpha \lambda = \alpha \inf_{x \in \lambda U} \lambda = \alpha \| x \|$$

وفي الحالة العامة :

$$\| \alpha x \| = \| \pm |\alpha| x \| = \| |\alpha| x \| = |\alpha| \|x\|$$

وهكذا تكون موضوعات النظيم محققة .

لإتمام إثبات المبرهنة ، يكفي أن نبين أنه من أجل أي جوار $V(\theta)$ لصفر الفضاء X توجد كرة $\|x\| < \rho$ تقع كلياً في $V(\theta)$ وبالعكس : من أجل أية كرة $\|x\| < \rho$ يوجد جوار $W(\theta)$ يقع كلياً في تلك الكرة .

لنأخذ جواراً كيفياً للصفر $V(\theta)$. بما أن جوار الصفر U والذي بدلالته عرف النظيم هو مجموعة محدودة فإنه يوجد عدد مثل $0 < r$ بحيث إن :

$$r\,U \subset V(\theta)$$

من ناحية ثانية ، من الواضح أن الكرة الواحدية $\|x\| < 1$ تقع في الجوار U ومنه نجد أن الكرة $\|x\| < r$ تقع في $r\,U$ وبالتالي في جوار الصفر $U(\theta)$.

لنفرض العكس ، لتكن $\|x\| < \rho$ كرة معلومة . من تعريف النظيم ينتج أنه في هذه الكرة يوجد جوار للصفر $\rho' U$ حيث ρ' عدد كيفي أصغر من ρ . هكذا فإن كفاية شروط المبرهنة قد برهنت . وأما اللزوم فإنه لايشكل أية صعوبة .

§ - ٥ فضاء هيلبرت المجرد

Abstract Hilbert Space

تعرف في الفضاء الشعاعي الحقيقي (العقدي) ذي الـ n بعداً إضافة لعمليتي جمع الأشعة وضربها بعدد حقيقي (عقدي) ،عملية ضرب سلمي (ضرب داخلي) للأشعة في ذلك الفضاء . إن الجداء السلمي للشعاعين :

$$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\} \quad , \quad y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$$

من الفضاء E_n هو العدد :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta_i}$$

ويعبر عن نظيم ، أو طول ، الشعاع $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ بدلالة الجداء السلمي بالعلاقة :

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^2} = \sqrt{(x , x)}$$

وبما أن الجداء السلمي للتوابع يستخدم بشكل واسع في التحليل ، فإنه من الطبيعي أن نستعرض صف الفضاءات الخطية و التي يُعرف فيها جداء سلمي ، مثل تلك الفضاءات تسمى بفضاءات هيلبرت وتحقق هذه الفضاءات الموضوعات الآتية :

موضوعات فضاء هيلبرت المجرد [*]

لتكن H مجموعة العناصر $x , y , z , \ldots$ ولنفرض أن :

١) H فضاء خطي عقدي .

٢) يقابل كل زوج من العناصر x , y من H بعدد مركب (x , y) يسمى بالجداء الداخلي (السلمي) لهذين العنصرين والذي يحقق الشروط الآتية :

a) $(x , y) = \overline{(y , x)}$ (في حالة خاصة يكون (x , x) عدداً حقيقياً) .

b) $(x_1 + x_2 , y) = (x_1 , y) + (x_2 , y)$

c) $(\lambda x , y) = \lambda (x , y)$

من أجل أي عدد مركب λ .

d) $0 \leq (x , x)$ وأن $(x , x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = \theta$. يسمى العدد $\| x \| = \sqrt{(x , x)}$ بنظيم العنصر x (لاحقاً ، سنبرهن أن هذا العدد يحقق جميع موضوعات النظيم في الفضاء الخطي المنظم) .

٣) H فضاء تام بمفهوم المسافة $\rho (x , y) = \| x - y \|$.

بتحقق هذه الموضوعات الثلاثة يسمى الفضاء H فضاء وحدياً ($unitary$) إن الفضاء الوحدي العقدي ذا الـ n بعداً هو الفضاء العقدي الإقليدي . إضافة لما ذكرنا، إذا حقق الفضاء H الموضوعة الآتية :

٤) من أجل أي عدد طبيعي n يوجد n من العناصر غير المرتبطة في H ، فإن H يكون لانهائي البعد و يسمى بفضاء هيلبرت المجرد أو اختصاراً بفضاء هيلبرت .

مثال (١) . إن الفضاء العقدي l_2 يؤول إلى فضاء هيلبرت إذا فرضنا من

---

[*] ***Hilbert D.*** ***(23 . 1 . 1862 – 14 . 2 . 1943)***

أجل أي عنصرين منه $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , \ldots \}$ و $y = \{ \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n , \ldots \}$ أن :

$$(x , y) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$$

حيث إن تقارب هذه السلسلة ينتج من متراجحة بونيا كوفسكي من أجل المجاميع .

مثال (٢) . الفضاء العقدي $L^2_\rho [0 , 1]$ فضاء جميع التوابع العقدية المعرفة والقيوسة على المجال $[0 , 1]$ والتي من أجلها :

$$\int_0^1 \rho(t) \, | x(t) |^2 \, dt < +\infty$$

حيث $\rho(t)$ تابع حقيقي و $0 \le \rho(t)$ تقريباً في كل مكان على $[0 , 1]$ ، إضافة إلى أن $0 < \rho(t)$ على مجموعة كاملة القياس . إن $L^2_\rho [0 , 1]$ يصبح فضاء هيلبرت إذا وضعنا من أجل x و y ∋ $L^2_\rho [0 , 1]$

$$(x , y) = \int_0^1 \rho(t) \, x(t) \, \overline{y(t)} \, dt$$

إن وجود هذا التكامل من أجل أي تابعين $x(t)$ و $y(t)$ من $L^2_\rho [0 , 1]$ ينتج من متراجحة بويناكوفسكي من أجل التكاملات . في حالة خاصة ومن أجل $\rho(t) \equiv 1$ نحصل على الفضاء العقدي $L^2 [0 , 1]$ المزود بالجداء الداخلي :

$$(x , y) = \int_0^1 x(t) \, \overline{y(t)} \, dt$$

وبالمثل تماماً يعرف فضاء هيلبرت الحقيقي والذي من أجله يكون الجداء الداخلي لأي عنصرين منه حقيقياً . إن الفضاءات الحقيقية l_2 ، $L^2_\rho [0 , 1]$ ، $L^2 [0 , 1]$ هي فضاء هيلبرت الحقيقية .

لنستعرض وبشكل مختصر بعض الخواص البسيطة التي تتمتع بها فضاءات هيلبرت . من الموضوعات ١) ــ ٣) نستنتج أن :

$$(x , y_1 + y_2) = (x , y_1) + (x , y_2) , \quad (x , \lambda y) = \bar{\lambda} (x , y)$$

ومن العلاقة الأخيرة ، وفي حالة خاصة ، نجد أن :

$$\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \| \qquad (2.5.1)$$

لنبرهن الآن متراجحة **بونيكافسكي – شفارتز** : من أجل الجداء الداخلي .

من أجل أي عنصرين x و y من H و $y \neq \theta$ ، وأي عدد مركب λ يكون

$$(x + \lambda y , x + \lambda y) \geq 0$$

أو :

$$(x,x) + \bar{\lambda}(x, y) + \lambda (y, x) + |\lambda|^2 (y,y) \geq 0$$

لنضع :

$$\lambda = - \frac{(x,y)}{(y,y)}$$

فنجد أن

$$(x, x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0$$

أو :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \ \|y\| \qquad (2.5.2)$$

وهي المتراجحة المطلوبة . من أجل $y = \theta$ المتراجحة (2 . 5 . 2) بديهية .

إضافة لما ذكرنا نجد أن

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y , x + y) = \\ &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \ \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

أو

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (2.5.3)$$

إن الموضوعة ٢)- d والعلاقتين (2 . 5 . 1) ، (2 . 5 . 3) تبين صحة موضوعات النظيم المعرف بدلالة الجداء الداخلي ، وبالتالي فإن المسافة المعرفة بدلالة ذلك النظيم تحقق جميع موضوعات الفضاء المتري .

توطئة (١) . الجداء الداخلي تابع مستمر بالنسبة للتقارب بالنظيم .

البرهان . في الحقيقة ، لتكن $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ، عندئذ تكون

الأعداد $\| x_n \|$ ، $\| y_n \|$ محدودة ، ولنفرض أن M هو حدها الأعلى . لدينا

$$|(x_n , y_n) - (x , y)| =$$

$$= |(x_n , y_n) - (x_n , y) + (x_n , y) - (x , y)| \leq$$

$$\leq |(x_n , y_n) - (x_n , y)| + |(x_n , y) - (x , y)| =$$

$$= |(x_n , y_n - y)| + |(x_n - x , y)| \leq$$

$$\leq \|x_n\| \ \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \ \|y\| \leq$$

$$\leq M \ \|y_n - y\| + \|y\| \ \|x_n - x\|$$

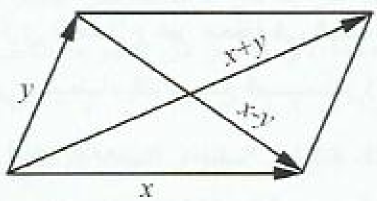
وبماأن $\| x_n - x \| \to 0$ و $\|y_n - y\| \to 0$ عندما $n \to \infty$ فإن

$|(x_n , y_n) - (x , y)| \to 0$ ، $n \to \infty$ وهو المطلوب .

لنبرهن الآن أن النظيم المعرف بدلالة الجداء الداخلي (x , y) يحقق العلاقة :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (2.5.4)$$

والمسماة بعلاقة متوازي الأضلاع



$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 =$$

$$= (x + y , x + y) + (x - y , x - y) =$$

$$= \|x\|^2 + (y, x) + (x, y) +$$

$$+ \|y\|^2 + \|x\|^2 + (y, x) - (x, y) + \|y\|^2 =$$

$$= 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

يمكن البرهان على أنه إذا حقق النظيم في فضاء باناخ العلاقة (4 . 5 . 2) فإن ذلك النظيم يولد من جداء داخلي . أي إن الفضاء يكون فضاء هيلبرت .

للإطلاع على ذلك يمكن العودة إلى كتاب :

A. Kolmogoroff and S. Fomin "Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis "Vol. I Graylock Press ,Rochester , N . Y . ,1976

مثال(١) . الفضاء l_p ($p \neq 2$) ليس فضاء هيلبرت . في الواقع لنبرهن أن النظيم في l_p لايولد من جداء داخلي . لنبرهن على عدم تحقق قاعدة متوازي الأضلاع . لنأخذ

$$x = \{ 1, 1, 0, 0, . . . \} \in l_p$$
$$y = \{ 1, -1, 0, 0, . . . \} \in l_p$$

فنجد أن :

$$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}$$
$$\|x + y\| = \|x - y\| = 2$$

وهذا يؤدي إلى أن مساواة متوازي الأضلاع غير محققة في الحالة $p \neq 2$.

مثال (٢) . في فضاء التوابع المستمرة على المجال $[0, \frac{\pi}{2}]$: $C[0, \frac{\pi}{2}]$ لنأخذ التابعين $x(t) = \cos t$ ، $y(t) = \sin t$

فنجد أن :

$$\|x\| = \|y\| = 1$$

$$\| x + y \| = \max_{0 \le t \le \frac{\pi}{2}} | \cos t + \sin t | = \sqrt{2}$$

$$\| x - y \| = \max_{0 \le t \le \frac{\pi}{2}} | \cos t - \sin t | = 1$$

ومن الواضح أن

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 \neq 2 (\| x \|^2 + \| y \|^2)$$

وبالتالي فإن النظيم في $C [0 , \frac{\pi}{2}]$ لايولد من جداء داخلي .

وبسهولة يمكن التأكد من أن الفضاء $C [a , b]$ فضاء التوابع المستمرة على المجال $[a , b]$ ليس فضاء هيلبرت . أي إن النظيم فيه لايولد من جداء داخلي .

التعامد (*Orthogonality*). لمفهوم التعامد أهمية بالغة في نظرية فضاءات هيلبرت .

بالتعريف نقول عن العنصرين x و y من فضاء هيلبرت H إنهما متعامدان ونرمز لذلك بـ $x \perp y$ إذا كان $(x , y) = 0$.

من خواص الجداء الداخلي ينتج أن :

١) العنصر الصفري θ عمودي على أي عنصر $x \in H$.

٢) $x \perp x$ فقط في تلك الحالة التي يكون فيها $x = \theta$.

٣) إذا كان $x \perp y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ فإن $x \perp \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ من أجل جميع λ_i . بكلام آخر إذا كان x معامداً لكل عنصر من عناصر مجموعة $A \subset H$ فإن x يكون معامداً لأي عنصر من المتنوعة الخطية المشكل من عناصر A .

٤) إذا كان $x \perp y_n$ $(n = 1 , 2 , \ldots)$ وكانت $y_n \to y$ فإن $x \perp y$. إن ذلك ينتج من استمرار الجداء الداخلي .

٥) إذا كانت المجموعة A كثيفة في كل مكان في H وكان x معامداً لجميع عناصر A فإن $x = \theta$. في الواقع ، بما أن المجموعة A كثيفة في مكان في H فإن $x = \lim x_n$ حيث إن $x_n \in A$ وبما أن $x \perp x_n$ فرضاً من أجل جميع n فإنه وفقاً لـ ٤) يكون $x \perp x$ ومنه نجد أن $x = \theta$.

في فضاء هيلبرت يتحقق تعميم مبرهنة فيثاغورث :

إذا كان $x = \sum_n x_n$ (المجموع منته أو غير منته) وكانت جميع الحدود متعامدة مثنى مثنى ، فإن :

$$\| x \|^2 = \sum_n \| x_n \|^2$$

في الواقع ، استناداً إلى الخاصة التوزيعية للجداء الداخلي والمحققة بالنسبة للمجاميع المنتهية والسلاسل اللانهائية نجد أن

$$\| x \|^2 = (x , x) = (x , \sum_n x_n) =$$

$$= \sum_n (x , x_n) = \sum_n (\sum_m x_m , x_n) =$$

$$= \sum_n \sum_m (x_m , x_n)$$

إلا أن $(x_m , x_n) = 0$ إذا كان $m \neq n$ ولذلك فإن :

$$\| x \|^2 = \sum_n (x_n , x_n) = \sum_n \| x \|^2$$

مبرهنة (١) . الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ، ذات الحدود المتعامدة مثنى مثنى ، (بمفهوم التقارب بالنظيم) هو أن تتقارب السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$.

البرهان . إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة فإن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$ تتقارب استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث .

بالعكس ، لنفرض أن السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2$ متقاربة ، ولنضع $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$. من أجل $p < m$ يكون لدينا :

$$S_m - S_p = \sum_{n=p+1}^{m} x_n$$

واستناداً إلى مبرهنة فيثاغورث يكون :

$$\| S_m - S_p \|^2 = \sum_{n=p+1}^{m} \| x_m \|^2$$

عندئذ ومن تقارب سلسلة مربع النظائم x_n ينتج أن $\|S_m - S_p\| \to 0$ عندما p و m يسعيان إلى ∞ . أي إن المتتالية $\{ S_m \}$ متتالية أساسية وبما أن الفضاء H تام فإن النهاية $\lim S_m$ موجودة . أي إن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ متقاربة .

تعريف . نقول إن العنصر x يعامد الفضاء الجزئي $H \supset L$ (و نكتب $x \perp L$) إذا كان x معامداً لأي عنصر $y \ni L$. ونقول عن الفضاءين الجزئيين M و L من الفضاء H إنهما متعامدان (و نكتب $L \perp M$) إذا كان $x \perp y$ أياً كان $x \ni L$ و أياً كان $y \ni M$. من ذلك ينتج أن العنصر المشترك الوحيد بين فضاءين جزئيين متعامدين هو العنصر الصفري θ .

مسقط عنصر على فضاء جزئي

لنفرض أنه لدينا ، في الفضاء الإقليدي الثلاثي البعد ، مستوي p (مار من مبدأ الإحداثيات 0) وكذلك شعاع $\overrightarrow{0M}$ غير واقع في ذلك المستوي ، عندئذ ، وبشكل دائم ، يمكننا تمثيل الشعاع $\overrightarrow{0M}$ في شكل مجموع $\overrightarrow{0M} = \overrightarrow{0N} + \overrightarrow{NM}$ حيث إن الشعاع $\overrightarrow{0N}$ يقع في المستوي p و أما الشعاع $\overrightarrow{NM}$ فهو عمودي على p . ووفقاً لذلك يكون طول الشعاع $\overrightarrow{NM}$ هو أقصر مسافة بين M ونقاط المستوي p و تكون النقطة N هي مسقط النقطة M على المستوي p ويمكن حل المسألة المماثلة في أي فضاء هيلبرت H .

مبرهنة (٢) . ليكن L فضاءً جزئياً من فضاء هيلبرت H ، عندئذ أي عنصر $H \ni x$ يمكن تمثيله وبشكل وحيد على الشكل :

$$x = y + z \qquad (2.5.5)$$

حيث $y \ni L$ و $z \perp L$.

البرهان . إذا كان $x \ni L$ ، فإنه من الواضح أن $y = x$ وأن $z = \theta$

لذلك سنفرض أن $x \notin L$. وليكن :

$$d = \inf_{y \in L} \| x - y \|^2 \quad .$$

ولتكن $\{ y_n \}$ متتالية من L بحيث إن :

$$d_n = \| x - y_n \|^2 \to d \qquad : \quad n \to \infty$$

ليكن الآن h عنصراً ما من L مختلفاً عن الصفر ، عندئذ يكون العنصر $y_n + \varepsilon h$ منتمياً لـــ L من أجل أي عدد مركب ε ولهذا فإن :

$$\| x - (y_n + \varepsilon h) \|^2 \geq d$$

أو :

$$(x - (y_n + \varepsilon h) \ , \ x - (y_n + \varepsilon h)) =$$

$$= \| x - y_n \|^2 - \bar{\varepsilon} (x - y_n , h) - \varepsilon (h , x - y_n) + | \varepsilon |^2 \ \| h \|^2 \geq d$$

لنضع

$$\varepsilon = \frac{(x - y_n , h)}{\| h \|^2}$$

فنجد أن

$$\| x - y_n \|^2 - \frac{| (x - y_n , h) |^2}{\| h \|^2} \geq d$$

ومنه فإن

$$| (x - y_n , h) |^2 \leq (d_n - d) \ \| h \|^2$$

أو :

$$| (x - y_n , h) | \leq \sqrt{d_n - d} \ \| h \| \qquad (2.5.6) .$$

من الواضح أن العلاقة $(2 . 5 . 6)$ تتحقق أيضاً من أجل $h = \theta$. من هذه المتراجحة ومن أجل أي عنصر $h \ni L$ ينتج أن :

$$| (x - y_m , h) | \leq \sqrt{d_m - d} \ \| h \|$$

و أن

$$|(x-y_n,h)|+|(x-y_m,h)| \le (\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\,\|h\|$$

أو

$$|(x-y_n,h)+(y_m-x,h)| \le |(x-y_n,h)|+$$

$$+|(x-y_m,h)| \le (\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\,\|h\|$$

أو :

$$|(y_m-y_n,h)| \le (\sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d})\,\|h\|$$

في حالة خاصة و بوضع $h = y_m - y_n$ نجد أن

$$\|(y_m-y_n)\| \le \sqrt{d_n-d}+\sqrt{d_m-d}$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة في نفسها وبما أن H فضاء تام ، فإنها تكون متقاربة إلى عنصر $y \in H$ وبما أن L مغلق فإن $y \in L$ وبالانتقال إلى النهاية في طرفي المتراجحة (2.5.6) عندما $n \to \infty$ نجد أن

$$(x-y,h)=0$$

وبما أن h عنصر كيفي من الفضاء الجزئي L فإن العلاقة الأخيرة تعني أن $(x-y)\perp L$. لنضع $x-y=z$ فنجد أن $x=y+z$

بذلك يتبقى علينا إثبات وحدانية التمثيل .لنفرض أن :

$$x=y+z \quad ; \quad x=y'+z'$$

حيث $y, y' \in L$ و $z, z' \perp L$.عندئذ نجد أن $y-y' = z'-z$

و أن

$$\|y-y'\|^2 = (z'-z,\ y-y') = 0 \qquad (2.5.7)$$

وذلك لأن $(y-y') \in L$ و $(z-z') \perp L$ ومن ناحية ثانية إن (2.5.7) تعني أن $y=y'$ وبالتالي فإن $z=z'$ وهو ما يثبت المبرهنة تماماً .

تعريف . يسمى العنصر y في النشر (2.5.5) بمسقط العنصر x على الفضاء الجزئي L . بسهولة نرى أن مجموعة جميع العناصر M المعامدة للفضاء الجزئي L تشكل فضاءً جزئياً ، فمن الواضح أن M متنوعة خطية ، وأما كونها

مغلقة فينتج من استمرارية الجداء الداخلي . تبعاً لذلك يمكننا تسمية العنصر z في العلاقة (5. 5 . 2) بمسقط العنصر x على الفضاء الجزئي M . وعادة يسمى الفضاء الجزئي M بالمتممة المعامدة (orthognal complement) للفضاء الجزئي L ويرمز لذلك بـ $H \ominus L$ و نقول إن H هو مجموع متعامد (orthognal sum) للفضاءين الجزئيين L , M ونكتب ذلك على الشكل :

$$H = L \oplus M$$

من الواضح أن المجموع المتعامد هو حالة خاصة من المجموع المباشر . بذلك نجد أن المبرهنة (٢) تعطينا نشر عنصر بدلالة مسقطيه على فضاءين جزئيين وكل منهما يتمم و يعامد الآخر .

توطئة (٢) . الشرط اللازم و الكافي كي تكون المتنوعة الخطية M كثيفة في كل مكان في H هو أن لا يوجد عنصر مختلف عن الصفر و معامد لجميع عناصر M .

لزوم الشرط . من الواضح أنه إذا كان $x \perp M$ فإن $x \perp \overline{M}$ وبما أن $\overline{M} = H$ فإن $x \perp H$ وفي حالة خاصة يكون $x \perp x$ وبالتالي فإن $x = \theta$.

كفاية الشرط . لنفرض أن M ليست كثيفة في كل مكان ، أي إن $\overline{M} \neq H$. عندئذ يوجد عنصر مثل $x \notin \overline{M}$ واستناداً للمبرهنة (٢) يكون :

$$x = y + z$$

حيث $y \in \overline{M}$ و $z \perp \overline{M}$ وبما أن $x \notin \overline{M}$ فإن $z \neq \theta$ وهذا يناقض الفرض وهو ما يثبت كفاية الشرط .

الجمل المتعامد – المنظمة (*Orthognal Systems*)

نقول عن جملة العناصر $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ إنها جملة متعامدة – منظمة إذا كان :

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases}$$

كمثال على جملة متعامدة – منظمة نأخذ مجموعة التوابع $\{ e^{i2\pi nt} \}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ في الفضاء العقدي $L^2 [0,1]$.

نقول عن مجموعة لا نهائية من فضاء خطي إنها مستقلة خطياً إذا كانت أية مجموعة منتهية منها مستقلة خطياً .

لتكن $h_1 , h_2 , \ldots , h_n , \ldots$ جملة من العناصر المستقلة خطياً ولنبين أنه يمكن تحويل هذه الجملة إلى جملة متعامدة ــ منظمة بطريقة شميت في المعامدة (*)

لنضع $e_1 = \dfrac{h_1}{\| h_1 \|}$ وليكن $g_2 = h_2 - c_{21} e_1$ ولنختر العدد c_{21} بحيث يعامد g_2 العنصر e_1 من الواضح أنه لتحقيق ذلك يكفي أن نأخذ $c_{21} = (h_2 , e_1)$. لنضع الآن $e_2 = \dfrac{g_2}{\| g_2 \|}$ علماً بأن $\| g_2 \| \neq 0$ ، إذ إنه في الحالة المعاكسة $(g_2 = \theta)$ يكون العنصران h_1 , h_2 مرتبطين خطياً وهذا مناقض للفرض . لنفرض أننا قمنا ببناء العناصر $e_1 , e_2 , \ldots , e_{k-1}$. ولنأخذ

$$g_k = h_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \, e_i$$

ونختار الأعداد c_{ki} بحيث يعامد g_k جميع العناصر $e_1 , e_2 , \ldots , e_{k-1}$. بغية ذلك علينا أن نأخذ $c_{ki} = (h_k , e_i)$. لنضع الآن $e_k = \dfrac{g_k}{\| g_k \|}$ إضافة إلى أن $\| g_k \| \neq 0$. وهكذا . . .

مثال . لنأخذ مجموعة التوابع :

$$1 , t , t^2 , \ldots , t^n , \ldots$$

بمعامدة هذه الجملة في الفضاء الحقيقي $L^2_\rho [a , b]$ حيث $\rho(t)$ تابع موجب نحصل على جملة كثيرات الحدود :

$$p_0 (t) = const \ , \ p_1 (t) \ , \ p_2 (t) \ , \ldots , p_n (t) \ , \ldots$$

المتعامدة بالوزن $\rho (t)$

$$\int_a^b \rho (t) \ p_i(t) \ p_j (t) \ dt = \delta_{ij}$$

(*) شميت ايرهارد $(Schmidt \ E .)$ $(1 . 4 . 1876 - 6 . 12 . 1959)$ رياضي ألماني .

من أجل $\rho(t) = 1$ و $a = -1$ ، $b = +1$ نحصل على جملة كثيرات حدود ليجاندر (بغض النظر عن معاملات ثابتة) . وأما من أجل $\rho(t) = e^{-t^2}$ و $a = -\infty$ و $b = +\infty$ فإننا نحصل على جملة كثيرات حدود تشبيشيف – هيرميت .

ومن أجل $\rho(t) = e^{-t}$ و $a = 0$ و $b = \infty$ نحصل على كثيرات حدود تشبيشيف– لاغير .

ليكن L فضاءً جزئياً مولداً بالجملة المتعامدة – المنظمة $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ وليكن x عنصراً من L ($x \in L$) ، عندئذ من أجل أي عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد تركيب خطي مثل $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ بحيث إن :

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| < \varepsilon$$

لكن

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \, (x, e_i) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, (e_i, x) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\alpha_j} \, (e_i, e_j) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \, c_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{c_i} + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2$$

حيث :

$$c_i = (x, e_i)$$

تسمى الأعداد c_i بمعاملات فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة المتعامدة – المنظمة $\{ e_i \}$. من المساواة الأخيرة نجد أن :

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - c_i|^2$$

وبالتالي فإن نظيم الفرق $x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ يأخذ قيمة أصغرية عندما تكون الأمثال α_i هي نفسها معاملات فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة المتعامدة – المنظمة $\{e_i\}$ ، وفي هذه الحالة يكون لدينا

$$0 \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 < \varepsilon \qquad (2.5.8)$$

وبما أن ε كيفي ويمكن اختياره صغيراً بالقدر الذي نريد فإنه يكون

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

من العلاقة $(2.5.8)$ ينتج تقارب السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ وإضافة إلى ذلك فإن

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|x\|^2$$

ليكن الآن x عنصراً كيفياً من الفضاء H ولنرمز بـ z لمسقط العنصر x على الفضاء الجزئي L ، عندئذ يكون :

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

حيث :

$$c_i = (z, e_i) = (x, e_i) \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|z\|^2$$

وبما أن :

$$x = z + y \quad ; \quad z \in L \quad , \quad y \perp L$$

فإنه يكون :

$$\|x\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2 \geq \|z\|^2$$

وبالتالي فإنه من أجل أي عنصر x ∋ H تتحقق المتراجحة

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (2.5.9)$$

حيث $(i = 1, 2, \ldots), c_i = (x, e_i)$ وتسمى العلاقة $(2.5.9)$ بمتراجحة بسل [*] .

الإغلاق بمفهوم ستيكلوف[**] :

Completness in the sense of Steklov

بحث ستيكاوف مسألة نشر تابع بدلالة جملة متعامدة – منظمة و أدخل مفهوماً هاماً حول إغلاق تلك الجملة .

لتكن $\{e_i\}$ جملة متعامدة – منظمة في فضاء هيلبرت H . تسمى هذه الجملة **تامة** إذا لم يوجد عنصر $x \in H$ مغاير للصفر ومعامد لجميع عناصر تلك الجملة وتسمى تلك الجملة **مغلقة** إذا تطابق الفضاء الجزئي L المولد بتلك الجملة مع الفضاء H . إن سلسلة فورييه بالنسبة لجملة مغلقة لعنصر ما $x \in H$ تتقارب إلى ذلك العنصر كما أنه من أجل أي عنصر $x \in H$ تتحقق مساواة بارسيفال – ستيكلوف [***] :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \|x\|^2 \qquad (2.5.10)$$

تسمى الجملة المتعامدة – المنظمة في فضاء هيلبرت والمغلقة **بقاعدة متعامدة – منظمة** . إذا كانت الجملة المتعامدة – المنظمة تامة فإنها تكون مغلقة . في الحقيقة ، في هذه الحالة لا يوجد عنصر مغاير للصفر و معامد لجميع عناصر المتنوعة الخطية L المولدة بتلك الجملة و استناداً للتوطئة (٢) يكون $L = H$ ، وبالتالي فإن تلك الجملة مغلقة .

بالعكس ، لتكن الجملة $\{e_i\}$ مغلقة ، عندئذ من أجل هذه الجملة يكون :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

---

[*] بسل فريدريك $(22.7.1784 - 17.3.1846)$ (Bessel F. w) رياضي ألماني .

[**] ستيكلوف فلاديمير اندرييفتش (Stecklov V. A.) $(9 - 1.1864 - 30.5.1926)$ رياضي روسي.

[***] بارسيفال (Parseval M. A) $(1755 - 1836)$ رياضي فرنسي .

فإذا كان $x \perp e_i$ مع $i = 1, 2, \ldots$ أي إن $c_i = 0$ مع $i = 1, 2, \ldots$ فإن $\| x \| = 0$ وهذا يعني أن $\{ e_i \}$ تامة .

كمثال على جملة متعامدة – منظمة وتامة نأخذ مجموعة التوابع المثلثية :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ , \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t \ , \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin \ , \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t \ , \ldots$$

في الفضاء الحقيقي $L^2 [-\pi \ , \ \pi]$.

فضاءات هيلبرت القابلة للفصل و الإيزومورفيزمية :

Isomorphisme of separable Hilbert space

تلعب قابلية الفصل ، في هذا البند ، الدور الأساسي فيما سنستعرضه . لنبرهن على وجود جملة تامة متعامدة – منظمة في أي فضاء هيلبرت قابل للفصل . لتكن : $G = \{ g_1 , g_2 , \ldots , g_n , \ldots \}$ مجموعة قابلة للعد و كثيفة في كل مكان في H إضافة إلى أن جميع العناصر g_n ($n = 1 , 2 , \ldots$) مختلفة عن الصفر θ . لنضع :

$$e_1 = \frac{g_1}{\| g_1 \|}$$

وليكن L_1 الفضاء الجزئي الأحادي البعد المولد بالعنصر e_1 . وليكن g_{n_2} أول عنصر من عناصر المجموعة G غير منتم لـ L_1 وليكن h_2 مسقط g_{n_2} على $H \ominus L_1$. لنفرض الآن

$$e_2 = \frac{h_2}{\| h_2 \|}$$

وليكن L_2 الفضاء الجزئي ثنائي البعد المولد بالعنصرين e_2 و e_1 وليكن g_{n_3} أول عنصر من G غير منتمٍ إلى L_2 ، وليكن h_3 مسقط g_{n_3} على $H \ominus L_2$.

لنفرض أن
$$e_3 = \frac{h_3}{\| h_3 \|}$$

وهكذا نحصل على الجملة المتعامدة – المنظمة $e_1 , e_2 , \ldots e_n \ldots$. وبما أن كل عنصر g_n ينتمي إلى واحد من الفضاءات الجزئية L_m ، بنتيجة بناء هذه الفضاءات الجزئية ، فإن الفضاء الجزئي المولد بالجملة $\{e_i\}$ يتطابق مع الفضاء

الجزئي المولد بـــ $\{g_i\}$ أي مع الفضاء H . تبعاً لذلك تكون الجملة $\{e_i\}$ قابلة للعد وذلك لأنه إذا احتوت على عدد منته p من العناصر ، فإنه كما هو معلوم في الجبر الخطي ، لن يوجد $p + 1$ من العناصر المستقلة خطياً وهذا بدوره يناقض الموضوعة ٤) .

بسهولة يمكن التأكد من أنه إذا كانت $\{e_i\}$ جملة متعامـدة – منظمـة وتامـة وكان x , y عنصرين من H وكانت معاملات فورييه لهما علـى الترتيـب c_i , d_i فإن

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \overline{d}_i$$

ليكن H فضاء هيلبرت القابل للفصل ولتكن $\{e_i\}$ جملة متعامدة – منظمة وتامة في هذا الفضاء . إذا كان x عنصراً ما من H ، فإنه يمكن مقابلة هذا العنصر بالمتتالية العددية $\{c_1\, c_2, \ldots, c_n, \ldots\}$ والتي هي معاملات فورييه للعنصر x بالنسـبة للجملة $\{e_i\}$ ، وكما وجدنا أعلاه تكون السلسلة :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$$

متقاربة . وبالتالي يمكننـا النظـر إلـى المتتاليـة $\{c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots\}$ كعنصر $\widetilde{x}$ من الفضاء العقدي l_2 بذلك نكون قد قابلنا كل عنصر $x \in H$ بعنصر $\widetilde{x} \in l_2$ وتبعاً لتمامية الجملة $\{e_i\}$ يكون لدينا :

$$\|x\|_H = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\widetilde{x}\|_{l_2} \qquad (2.5.11)$$

من الواضح بأنه إذا قوبل العنصر $x \in H$ بالعنصر $\widetilde{x} \in l_2$ وقوبل العنصر $y \in H$ بالعنصر $\widetilde{y} \in l_2$ فإن العنصر $x \pm y$ يقابل بالعنصر $\widetilde{x} \pm \widetilde{y}$ وفقاً لهذا و اعتماداً على $(1.5.11)$. ينتج أن

$$\|x - y\|_H = \|\widetilde{x} - \widetilde{y}\|_{l_2} \qquad (2.5.12)$$

ليكن الآن $\tilde{z} = \{ \zeta_i \}$ عنصراً ما من الفضاء l_2 ولنستعرض في الفضاء H

العناصر $z_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i e_i$ مع $n = 1, 2, \ldots$ عندئذ نجد أن :

$$\| z_n - z_m \|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} \zeta_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} | \zeta_i |^2$$

ولذلك فإن :

$$\| z_n - z_m \| \to 0$$

عندما m , n يسعيان إلى ∞ . وفقاً لذلك تكون المتتالية $\{ z_n \}$ متتاليـــة أساســية بمفهوم المسافة في الفضاء H ، وبما أن الفضاء H فضاء تام فــإن هــذه المتتاليــة تتقارب إلى عنصر ما z من H . وبما أن

$$(z , e_i) = \lim_{n} (z_n , e_i) = \zeta_i$$

فإن معاملات فورييه للعنصر z بالنسبة للجملة المذكورة $\{ e_i \}$ هي ζ_i وذلك يقابل كل عنصر $\tilde{z}$ د l_2 بعنصر z د H أي إن التقابل بين عناصر الفــضاء l_2 و عناصر الفضاء H هو تقابل $(1 - 1)$.

إن العلاقة $(2 .5 .12)$ تبين بأن التقابل بين عناصـــر الفــضاءين H و l_2 هــو تقابل ايزومتري ، كما أنه من الواضح بأنه إذا قوبــل العنــصر x ∋ H بالعنــصر $\tilde{x}$ د l_2 فإن العنصر λx يقابل بالعنصر $\lambda \tilde{x}$ ، وبالأخذ بعين الاعتبــار مــا ذكرناه حول الحفاظ على عملية الجمع نجد أن H و l_2 إيزومورفيان بذلك نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (٣) . فضاء هيلبرت العقدي (الحقيقي) و القابل للفصل ايزومتري و إيزومورفي مع الفضاء l_2 العقدي (الحقيقي) ، بالتالي فــإن جميــع فــضاءات هيلبرت القابلة للفصل العقدية (الحقيقية) ايزومترية و إيزومورفية فيما بينها .

في حالة خاصة تتحقق المبرهنة الآتية :

مبرهنة (٤) (ريس – فيشير) (*)

الفضاءان الحقيقيان $L^2[0 , 1]$ و l_2 ايزومتريان و ايزومورفيان .

(*) فيشر ايرنست *(2 . 7 . 1875 – 1959)* رياضي ألماني

تمارين و مسائل

١ – برهن أن القطع الناقص :

$$M = \{ \ x = (\ \xi_1 , \xi_2 , \ldots) \ \in l_2 \ : \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ \xi_n^2 \ \leq 1 \ \}$$

هو مجموعة محدبة في l_2 .

٢ – a – هل يعرف التابع : $x \to | \, arctg \, x \, |$ نظيماً في $\mathbb{R}$ ؟

b – هل يعرف التابع : $\mathbb{R}^2 \ni x = (\xi_1 \ , \ \xi_2) \to \| x \| = | \xi_1 | + | \xi_2 |$

نظيماً في $\mathbb{R}^2$ ؟

إذا كان كذلك فماذا تمثل الكرة الواحدية في $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للنظيم المذكور ؟

c – برهن أن التابع :

$$R^n \ni x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \| x \|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^p \right)^{1/p}$$

ليس نظيماً في R^n من أجل $0 < p < 1$ و $2 \leq n$.

٣ – هل التوابع التالية نظائم في مجموعة تعريفها :

$$C[a,b] \ni \ x \to \max_{a \leq t \leq \frac{a+b}{2}} | x(t) | \qquad ; \qquad (a$$

$$C^{(1)} [a,b] \ni \ x \to | \ x(a) \ | + \max_{a \leq t \leq b} | \ x'(t) \ | \qquad ; \qquad (b$$

$$C^{(1)} [a ; b] \ni x \to | \ x(b) - x(a) | + \max_{a \leq t \leq b} | x'(t) | \qquad (c$$

٤– a) تأكد من أن النظيمين :

$$\| x \|_1 = \max_{0 \leq t \leq 1} | \ x(t) \ | \ ; \ \| x \|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t) \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

غير متكافئين في $C[0,1]$.

b) هل النظيمان :

$$\| x \|_1 = \max_{0\le t\le 1} | x(t) | + \max_{0\le t\le 1} | x'(t) |$$

$$\| x \|_2 = \int_0^1 | x(t) | \, dt + \max_{0\le t\le 1} | x'(t) |$$

متكافئان في الفضاء $C[0,1]$

٥ – هل الفضاء l_1 تام بالنسبة للنظيم $\| x \|_1 = \sup_k | \xi_k |$ ؟

حيث $l_1 \ni x = (\xi_k)$.

٦) – ادرس تقارب المتتالية $\{ x_n \}$ في الفضاء الخطي المنظم E إذا كان

$$a) \quad E = l_1 , x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n^\gamma} , \frac{1}{(n+1)^\gamma}, \ldots \right) \quad \gamma > 1$$

$$b) \quad E = l_2 , x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \ldots \right)$$

$$c) \quad E = C^{(1)}[0,1] , \; x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

d) $x_n(t) = e^{-\frac{1}{n}}, E = L^1[0,1]$ من أجل t عدد أصم ، و $x_n(t) = 0$ من أجل t عدد عادي .

$$e) \; E = L^2[0,1] , \; x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}\, t , & t \in [0 ; \frac{1}{n}] \\ 0 , & t \in (\frac{1}{n} , 1] \end{cases}$$

٧ – هل تشكل المجموعة

$$L = \left\{ x = (\xi_k) \in E : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 , \xi_k \in \mathbb{R} \right\}$$

فضاءً جزئيا في E إذا كان $a) \; E = l_1$ ، $b) \; E = l_p \quad (1 < p)$ ؟

٨ – لنرمز بـــ $C^\alpha [a ; b]$ لمجموعة جميع التوابع المحققة على المجال $[a , b]$ لشرط هولدر ذي المؤشر $\alpha \in (0, 1]$:

$$H_\alpha(x) = \sup_{\substack{a \le t,\tau \le b \\ t \ne \tau}} \frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} < +\infty$$

برهن أن $C^\alpha [a ; b]$ فضاء باناخ بالنسبة للتظيم :

$$\|x\|_\alpha = \max_{a \le t \le b} |x(t)| + H_\alpha(x) \qquad x \in C^\alpha [a ; b]$$

٩- لتكن T مجموعة ما و K حقلاً سلمياً ، ولنرمز بـــ K^T للمجموعة التي عناصرها توابع x ، $x : T \to K$ و بـــ $l_p(T)$ $(1 \le p)$ للمتنوعة الخطية في K^T المشكلة من تلك التوابع $x(t)$ المختلفة عن الصفر ليس على أكثر من مجموعة قابلة للعد $t \in T$ والتي من أجلها $\sum_{t \in T} |x(t)|^p < +\infty$. برهن أن العلاقة :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{t \in T} |x(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

تعرف نظيماً في $l_p(T)$ و يكون $l_p(T)$ بالنسبة لذلك النظيم فضاء باناخ .

١٠ - هل المجموعات التالية :

a) مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة k .

b) مجموعة كثيرات الحدود من درجة لا تزيد عن k .

c) مجموعة التوابع المستمرة و المحققة للشرط $\int_0^1 |x(t)|\, dt \le 1$.

d) مجموعة التوابع المستمرة و المحققة للشرط $\int_0^1 |x(t)|^2\, dt \le 1$

محدبة في الفضاء $C[0, 1]$ ؟ .

١١ - ليكن $L^p[0, 1]$ ، $(0 < p < 1)$ فضاء جميع التوابع القيوسة وفق ليبيغ على المجال $[0 , 1]$ والتي من أجلها :

$$\int_0^1 |x(t)|^p\, dt < +\infty$$

برهن أن العلاقة :

$$\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|^p\, dt$$

تعرف مسافة في $L^p\ [0, 1]$.

١٢ – احسب نظيم x

a) في فضاء المتتاليات العددية المحدودة إذا كان

$$x = \left\{ \frac{1}{n^2 - 10n + 28} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

b) في الفضاء $L^2(0, \pi)$ إذا كان

$$x(t) = \begin{cases} \sin t & ; \quad if \quad \sin\frac{1}{t} \neq 0 \\ \cos t & ; \quad if \quad \sin\frac{1}{t} = 0 \end{cases}$$

١٣ – ليكن E فضاءً خطياً منظماً وليكن L فضاءً جزئياً من E . برهن أنه

١) – يمكن تعريف نظيم في فضاء العامل بالعلاقة :

$$\| \xi \|_1 = \inf_{x \in \xi} \| x \|$$

حيث $\xi \in E / L$ (ξ صف تلاصق) .

٢) – إذا كان E فضاء باناخ القابل للفصل فإن E / L بالنسبة للنظيم المعرف يكون فضاء باناخ القابل للفصل .

٣) – E / L إيزومورفي لـ R إذا كان $E = C[0, 1]$.

وكان $L = \{ x(t) \in C[0, 1] : x(0) = 0 \}$

١٤ – لتكن $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ متتالية عددية مثبتة $0 < \alpha_n$ ، $n \in N$.

ولتكن $l_{2,\alpha}$ مجموعة جميع المتتاليات $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ المحققة للشرط :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, |\xi_n|^2 < +\infty$$

تأكد من أن $l_{2,\alpha}$ والمزود بالجداء الداخلي :

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \, \xi_n \, \eta_n$$

حيث $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ و $l_{2,\alpha}$ هو فضاء هيلبرت القابل للفصل .

نذكر بأن القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين x و y من فضاء هيلبرت H

هي مجموعة الأشعة من الشكل $tx + (1-t)y$ حيث $0 \le t \le 1$.

إذا كانت $z \in H$ وكان $z = tx + (1-t)y$ حيث $0 < t < 1$ فإن النقطة z تسمى نقطة داخلية من القطعة المستقيمة ، وإذا لم تكن النقطة من مجموعة محدبة نقطة داخلية من قطعة مستقيمة ما منتمية إلى تلك المجموعة ، فإن تلك النقطة تسمى نقطة **حدية** لتلك المجموعة . تسمى المجموعة المغلقة والمحدبة في H **مجموعة محدبة بقوة** إذا كانت جميع نقاطها الحدودية نقاطاً حدية .

١٥ – برهن أن الكرة الواحدية المغلقة في فضاء هيلبرت هي مجموعة محدبة بقوة .

١٦ – برهن أن الكرة الواحدية في فضاء هيلبرت اللانهائي البعد H تحتوي على عدد غير منته من الكرات غير المتقاطعة والتي نصف قطر كل منها $\frac{1}{4}$.

١٧ – برهن أن النظيم في الفضاءين الخطيين المنظمين l_p $(p \neq 2 , 1 \le p)$ $C[0,1]$ لا يولد من جداء داخلي .

١٨ – لتكن L متنوعة خطية في H برهن أن $\overline{L} = H$ إذا وفقط إذا كان $L^{\perp} = \{\theta\}$.

١٩ – برهن أن الفضاء الخطي المغلق L لجميع الأشعة من الشكل :

$$x_n = (1 , \tfrac{1}{2^n} , \tfrac{1}{2^{2n}} , \tfrac{1}{2^{3n}} , \ldots)$$

هو مجموعة كثيفة في كل مكان في l_2 .

٢٠ – ليكن L فضاء جزئياً من فضاء هيلبرت H ولتكن x نقطة واقعة على بعد d من L أي إن $d = \rho(x , L) = \inf\limits_{u \in L} \| x - u \|$.

برهن أنه من أجل أي عنصرين y_1 , y_2 من L تتحقق المتراجحة :

$$\| y_1 - y_2 \| \le \sqrt{\| x - y_1 \|^2 - d^2} + \sqrt{\| x - y_2 \|^2 - d^2}$$

والمسماة بمتراجحة بيبو – ليفي .

انطلاقاً من هذه المتراجحة برهن على وجود عنصر $y \in L$ محقق للمسافة بين x والفضاء الجزئي L : $\rho(x , L) = \| x - y \|$.

٢ – ليكن L فضاء جزئياً أحادي البعد في فضاء هيلبرت H ، وليكن $a \in L$ و

$a \neq 0$ برهن أنه من أجل أي عنصر $x \in H$ يكون :

$$\rho(x, L^{\perp}) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}$$

٢٢ – من أجل التابع e^t أوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $P(t)$ بحيث يكـون النظيم $\| e^t - P(t) \|$ أصغرياً في $L^2[-1, 1]$

٢٣– في الفضاء $l_{2,a}$ (انظر المسألة ١٤) أوجـد قاعـدة متعامـدة – منظمـة إذا

$\alpha_n = n$ (a

$\alpha_n = n^2$ (b . $\alpha_n = e^{-n}$ (c حيث $n \in N$.

٢٤– لتكن $\{ e_n \}$ جملة متعامدة – منظمة فـي H ، ولـتكن $\{ \lambda_n \}$ متتاليـة مـن C برهن أن الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ في H هو أن يكون :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$$

الفصل الثالث

المؤثرات الخطية

Lenear Operators

إن أهم صفوف المؤثرات المدروسة جيداً هو صف المؤثرات الخطية في الفضاءات الخطية .

§ 1 . المؤثرات الخطية

تعريف . ليكن E_x و E_y فضاءين خطيين توبولوجيين فوق حقل الأعداد الحقيقية أو فوق حقل الأعداد المركبة . وليكن A مؤثراً معرفاً على E_x ومجموعة قيمه متوضعة في E_y ، وسنكتب ذلك على الشكل $y = A\,x$. يسمى المؤثر A خطياً [*] إذا :

١) كان هذا المؤثر جمعياً . أي إنه من أجل جميع x_1 , x_2 من E_x يكون

$$A\,(\,x_1 + x_2\,) \;=\; A\,x_1 + A\,x_2 \qquad (\,3\,.\,1\,.\,1\,)$$

٢) كان هذا المؤثر متجانساً . أي إنه من أجل جميع x و E_x ومن أجل جميع الأعداد الحقيقية (إذا كان E_x حقيقيا) أو جميع الأعداد المركبة (إذا كان E_x مركباً) λ

$$A\,(\,\lambda\,x\,) \;=\; \lambda\;A\,x \qquad (\,3\,.\,1\,.\,2\,)$$

لاحقاً سنرمز لمجموعة جميع المؤثرات الخطية والمستمرة والتي تطبق E_x في E_y بالرمز $(\,E_x \to E_y\,)$.

من الواضح أنه في حالة الفضاء المتري يعني استمرار المؤثر A أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ معطى يمكن إيجاد عدد $\delta > 0$ بحيث إن مجموعة صور العناصر المنتمية للكرة $S\;(\;x\;,\;\delta\;)$ تكون في الكرة $S\;(\;A\,x\;,\;\varepsilon\;)$.

مثال (١) . ليكن $E_x = E_y \;=\; E_n$ الفضاء الإقليدي ذا الـ n بعداً ،

---

[*] يعتمد البعض تعريف المؤثر الخطي على أنه إذا كان جمعيا و مستمراً وسنرى لاحقاً أن ذلك يؤدي إلى تجانس المؤثر .

ولتكن $\{ a_{ik} \}_{i,k=1}^{n}$ مصفوفة مربعة من المرتبة n . لنعرف مؤثراً A

$A : E_n \to E_n$ على النحو الآتي :

إذا كان

$$x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \}$$

$$y = \{ \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n \}$$

فإن مركبات العنصر y صورة العنصر x وفق A تتعرف بالعلاقات :

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ \xi_k \qquad ; \qquad i = 1 , 2 , \ldots$$

أو

$$y = A \ x$$

إن المؤثر A خطي ومستمر . في الواقع إن كون A جمعياً ينتج من المساواة :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ (\ \xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)} \ ) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ \xi_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ \xi_k^{(2)}$$

حيث : $i = 1 , 2 , \ldots , n$

المكافئة للمساواة :

$$A \ (\ x_1 + x_2 \ ) = A x_1 + A \ x_2$$

ومن الواضح أن المؤثر A متجانس ، وأما استمراريته فتنتج من المتراجحة :

$$\sqrt{ \sum_{i=1}^{n} (\ \eta_i^{(m)} - \eta_i \ )^2 } \leq \sqrt{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 } \quad \sqrt{ \sum_{k=1}^{n} (\ \xi_k^{(m)} - \xi_k \ )^2 }$$

حيث $x_m = \{ \xi_k^{(m)} \}$ ، $y_m = A x_m = \{ \eta_i^{(m)} \}$ ، و

$x_m \to x$ الناجمة عن متراجحة بونياكوفسكي من أجل المجاميع .

مثال (٢) . لنضع

$$y \ (t) = \int_0^1 K \ (t , s) \ x \ (s) \ ds$$

حيث $K (t , s)$ تابع مستمر في المربع $0 \leq t , s \leq 1$. إذا كان $x (t) \in C [0 , 1]$ فإنه من الواضح أن التابع $y (t)$ ينتمي إلى $C [0 , 1]$ ، وبالتالي فإن المؤثر المعرف بالعلاقة $y = A x$ يطبق الفضاء $C [0 , 1]$

في نفسه . بسهولة نرى أن المؤثر A خطي . إذ إن :

$$A\ (x_1+x_2)\ =\int_0^1 K(t,s)\ [x_1\ (s)+x_2(s)]\ ds =$$

$$=\int_0^1 K(t,s)\ x_1\ (s)\ ds\ +\int_0^1 K(t,s)\ x_2(s)\ ds\ = Ax_1 + Ax_2$$

أي إن A مؤثر جمعي . أما خاصة التجانس فهي واضحة .

لتكن $\{x_n\ (t)\}$ متتالية من عناصر الفضاء $C[0\ ,\ 1]$ متقاربة إلى $x(t)$ بمفهوم التقارب في $C[0\ ,\ 1]$. بما أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب بانتظام ، وبما أنه في حالة التقارب المنتظم يمكننا الانتقال بالنهاية إلى تحت إشارة التكامل فإن :

$$\lim_n \int_0^1 K(t,s)\ x_n\ (s)\ ds\ =\int_0^1 K\ (t,s)\ x(s)\ ds$$

أي إن :

$$\lim_n\ Ax_n\ =\ Ax$$

وهو ما يثبت أن المؤثر A مستمر .

مثال (٣) . لنستعرض في الفضاء $C[0\ ,\ 1]$ المؤثر A المعرف بالعلاقة :

$$y(t)\ =\ \int_0^t x(\tau)\ d\tau$$

من الواضح أن هذا المؤثر خطي ومستمر و أنه معرف على الفضاء $C[0\ ,\ 1]$ بأكمله و لنستعرض في هذا الفضاء مؤثراً آخر B معرفاً بالعلاقة :

$$y\ (t)\ =\ \frac{d}{dt}\ x\ (t)$$

إن هذا المؤثر معرف في $C[0\ ,\ 1]$ ، ولكن ليس من أجل جميع التوابع $x(t) \in C[0\ ,\ 1]$ ، و إذا كان ناتج التطبيق $y = Bx$ موجوداً فإنه لا ينتمي دائماً إلى $C\ [0\ ,\ 1]$.في خلاف ذلك إذا اعتبرنا أن ساحة تعريف المؤثر B هي المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع القابلة للاشتقاق والتي مشتقاتها مستمرة (هذه

المتنوعة كثيفة في كل مكان في $C[0,1]$) فإن ساحة قيم المؤثر B تكــون محتواة في $C[0,1]$.

من الواضح أن المؤثر B جمعي و متجانس إلا أنه ليس مستمراً في ســاحة تعريفــه وذلك لأن مشتق نهاية متتالية توابع متقاربة بانتظام يمكن أن لا يساوي نهاية متتاليــة مشتقات التوابع ، حتى ولو كانت جميع تلك المشتقات موجودة .

الخواص البسيطة للمؤثرات الخطية

لننوه أولاً إلى بعض النتائج الناجمة عن جمعية المؤثر . على وجه التحديد ، إذا كان المؤثر A جمعياً فإن : (*)

a) $A\,\theta = \theta$

b) $A(-x) = -Ax \quad ; \quad \forall\ x \in E_x$

c) تتحقق العلاقة (3.1.2) من أجل أي عدد عادي λ .

البرهان

a) من أجل أي عنصر x د E_x لدينا

$$Ax = A(x+\theta) = Ax + A\theta$$

و بالتالي فإن $A\theta = \theta$.

b) بما أن $x - x = \theta$ فإنه استناداً إلى (a) يكون لدينا

$$Ax + A(-x) = A(x-x) = A\theta = \theta$$

وبالتالي فإن $A(-x) = -Ax$.

c) إذا كان n عدداً طبيعياً فإن

$$A(nx) = A(x+x+\ldots+x) = nAx$$

إذا كان $\lambda = \dfrac{1}{n}$ حيث n عدد طبيعي ، فإن

$$Ax = A(n \cdot \frac{1}{n}x) = n\,A(\frac{1}{n}x)$$

ومنه نجد

$$A\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}(Ax)$$

إذا كانت $\lambda = \frac{m}{n}$ حيث m , n عددان طبيعيان ، إنه استناداً إلى ما سبق نجد

$$A(\lambda x) = A\left(m.\frac{1}{n}x\right) = mA\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}Ax = \lambda Ax$$

أخيراً إذا كان λ عدداً عادياً سالباً أي إن $\lambda = -r$ حيث إن لـ r الشكل $\frac{m}{n}$ (m , n طبيعيان) فإنه وفقاً لما أثبتنا من أجل الأعداد العادية الموجبة يكون :

$$A(\lambda x) = A(-rx) = -A(rx) = -r(Ax) = \lambda(Ax)$$

وإذا كان $\lambda = 0$ فإن استناداً إلى a) تكون العلاقة ($3.1.2$) محققة من الممكن أن نبين ، أنه حتى في الحالات المبسطة ، عندما يكون الفضاءان E_x , E_y مجموعتين من الأعداد الحقيقية (المؤثر A يكون تابعاً حقيقياً) فإنه من الخاصة الجمعية للمؤثر A لاتنتج خاصة التجانس في الحالة العامة ، أي إنه لاتحقق العلاقة ($3.1.2$) من أجل جميع الأعداد λ .

إذا كان المؤثر A جمعياً ومتجانساً فإنه من أجل جميع العناصر $x_1 , x_2 , ... , x_n$ من E_x وجميع الأعداد $\lambda_1 , \lambda_2 , ... , \lambda_n$ يكون :

$$A\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k A x_k \qquad (3.1.3)$$

وتسمى هذه الخاصة بالخاصة التوزيعية للمؤثر .

لنلاحظ أنه لتعريف استمرار مؤثر معرف في فضاء متري قمنا أولاًبتعريف استمرار ذلك المؤثر في نقطة ومن ثم على الفضاء بأكمله ، في خلاف ذلك ، فإنه من صف المؤثرات الجمعية في الفضاءات الخطية تفرز مباشرة المؤثرات المستمرة وهذا الأمر يفسر بالمبرهنة الآتية :

مبرهنة (١) . إذا كان المؤثر الجمعي $A : E_x \to E_y$: A مستمراً في

نقطة ما x_0 ∋ E_x فإنه يكون مستمراً في جميع نقاط E_x أي إنه خطي .[*]

البرهان . لتكن $\{ x_n \}$ متتالية من عناصر الفضاء E_x متقاربة إلى x ($x_n \to x$) عندئذ يكون $(x_n - x + x_0) \to x_0$ وبما أن المؤثر A مستمر في النقطة x_0 فإن

$$\lim_n A (x_n - x + x_0) = A x_0$$

لكن المؤثر A جمعي وبالتالي فإن

$$A . (x_n - x + x_0) = A x_n - A x + A x_0$$

ومنه نجد أن

$$\lim_n A x_n - Ax + Ax_0 = A x_0$$

وبالتالي فإن

$$\lim_n A x_n - A x$$

مبرهنة (٢) . إذا كان المؤثر A جمعياً ومستمراً (خطياً (*)) ومعرفاً في الفضاء الخطي الحقيقي E_x فإنه يكون متجانساً .

البرهان . إذا أخذنا بعين الاعتبار $a)$, $b)$, $c)$ الواردة في البند السابق والمتعلقة بالمؤثر الجمعي A فإنه يكفي التحقق من صحة العلاقة ، $(3 . 1 . 2)$ من أجل الحالة التي فيها λ عدداً أصماً . في هذه الحالة يمكن وبشكل دائم اختيار متتالية من الأعداد العادية r_n بحيث إن $r_n \to \lambda$. وعندئذ من أجل أي عنصر x ∋ E_x يكون $r_n x \to \lambda x$ وبالتالي فإن من استمرارية المؤثر A ينتج أن

$$A(\lambda x) = A \lim_n (r_n x) = \lim_n A(r_n x) = \lim_n r_n A x = \lambda A x$$

وهذا ما يثبت تجانس المؤثر A .

مبرهنة (٣) . كل مؤثر جمعي ومتجانس في فضاء خطي ومنتهي البعد هو مؤثر خطي .

---

[*] بمفهوم التعريف الثاني للمؤثر الخطي الذي يعتمد الخاصة الجمعية للمؤثر وكذلك خاصة الاستمرار

البرهان . ليكن X فضاء منتهي البعد ولتكن $x_1 , x_2 , . . . , x_n$ قاعـدة فيه ، وليكن المؤثر A جمعياً ومتجانساً . عندئذ يكون لأي عنصر $x \in X$ الشكل : $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ ويكون

$$A x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A x_k)$$

إذا كانت $\{ x^{(p)} \}$ متتالية متقاربة إلى x وكانت $x^{(P)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(P)} x_k$ فـإن $\alpha_k^{(P)} \to \alpha_k$ عنـدما $p \to \infty$ مـع $k = 1 , 2 , . . . , n$ وذلـك لأن التقارب في الفضاء المنتهي البعد هو تقارب بالإحداثيات . ووفقاً لذلك نجد

$$A x^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{p} (A x_k) \to \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A x_k = A x$$

وهذا ما يثبت استمرارية المؤثر A .

من أجل المؤثرات الخطية يمكن تعميم الخاصة التوزيعية (3 . 1 . 3) علـى سلـسلة لانهائية : إذا كانت السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ متقاربة ، فإنه باستخدام استمرارية المؤثر و الخاصة " المنتهية " التوزيعية للمؤثر الخطي A نجد

$$A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right) = A \left(\lim_{k \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} A \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (A x_k)$$

فضاءات المؤثرات *The Spaces of Operators*

في مجموعة المؤثرات الخطية المستمرة المعرفة على الفـضاء الخطـي E_X و التي تأخذ قيمها في الفضاء الخطي E_Y ،يمكن تعريف عمليتين جبريتين . لنفرض أن B , A مؤثران من تلك المجموعة ،ولنعرف مجموع هذين المؤثرين بواسطة العلاقة:

$$(A + B) x = A x + B x$$

ونعرف عملية ضرب مؤثر خطي بعدد بالعلاقة :

$$(\lambda A) x = \lambda A x$$

بسهولة يمكن التأكد من أن هاتين العمليتين تحققان الموضوعات اللازمة ، التي بموجبها تصبح مجموعة المؤثرات الخطية فضاءً خطياً . في حالة خاصة يكون صفر هذا الفضاء هو المؤثر 0 والذي من أجل أي عنصر $x \in E_x$ يكون $0 x = 0$.

لنعرف في فضاء المؤثرات الخطية نهاية متتالية . لنفرض ، على سبيل المثال ، أن $A_n \to A$ إذا كان :

$\lim_n A_n x = A x$ من أجل أي عنصر $x \in E_x$. وسنستعرض ، بتفصيل أكثر ، هذا الفضاء لاحقاً ومن أجل شروط إضافية على E_x , E_y .

حلقة المؤثرات الخطية المستمرة

ليكن E فضاءً خطياً ما ، ولنستعرض مجموعة جميع المؤثرات الخطية المستمرة $(E \to E)$ المعرفة على E والتي تأخذ قيمها في E . كما ذكرنا أعلاه ، إن هذه المجموعة تشكل فضاءً خطياً . لنعرف الآن جداء مؤثرين B و A من $(E \to E)$ بالعلاقة

$$(A B) x = A(B x)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن الجداء مجدداً هو مؤثر خطي ومستمر . وبالاستقراء يعرف جداء أي عدد من المؤثرات . في حالة خاصة يكون :

$$A A = A^2 \quad , \quad A^2 A = A^3 \quad , \; . \; . \; .$$

بسهولة نرى أن

$$(A B) C = A(B C)$$

و أن

$$(A + B) C = A C + B C$$
$$C(A + B) = C A + C B$$

و أنه يوجد مؤثر واحدي I معرف بالعلاقة

$$I x = x$$

من أجل أي عنصر x وبحيث إن

$$A I = I A = A$$

من أجل أي مؤثر A .

بذلك نجد أن المجموعة $(E \to E)$ تشكل حلقة ذات عنصر وحدة . إلا أنها غير تبديلية أي إنه بشكل عام : $A B \neq B A$

مثال . ليكن $E = C[0,1]$ ، ولنستعرض المؤثرين

$$A x = y(t) = \int_0^1 t s \, x(s) \, dz \, ,$$

$$B x = y(t) = t \, x(t)$$

عندئذ نجد

$$A B x = \int_0^1 t s s \, x(s) \, ds = t \int_0^1 t s^2 \, x(s) \, ds$$

$$B A x = t \int_0^1 t s \, x(s) \, ds = t^2 \int_0^1 t s \, x(s) \, ds$$

وبالتالي فإن : $AB \neq BA$.

يعتبر مفهوم مقلوب مؤثر من المفاهيم البالغة الأهمية . وفقاً للتعريف العام لمقلوب عنصر في الحلقة ، نسمي المؤثر الخطي المستمر B مقلوباً يسارياً للمؤثر الخطي A إذا كان $BA = I$. بالمثل تماماً نسمي المؤثر الخطي المستمر C مقلوباً يمينياً للمؤثر الخطي A إذا كان $AC = I$. إذا كان للمؤثر A مقلوباً يسارياً B ومقلوباً يمينياً C فإنهما يكونان متساويين وذلك لأن

$$B = B(AC) = (BA)C = C$$

وفي هذه الحالة نقول إنه يوجد مقلوب للمؤثر A ، ونرمز له بـ A^{-1} .

بذلك نجد أنه إذا كان A^{-1} موجوداً فإن $A A^{-1} = A^{-1} A = I$.

لاحقاً سنعود إلى مفهوم مقلوب مؤثر و سنستعرض بعض الخصائص المتعلقة بذلك .

§ ٢ – المؤثرات الخطية في الفضاءات الخطية المنظمة

Linear Operators in Normed Linear Spaces

ليكن E_X ، E_Y فضاءين خطيين منظمين . بما أن الفضاء الخطي المنظم هو حالة خاصة من الفضاء الخطي التوبولوجي فإن تعريف المؤثر الخطي المعرف على E_X و الذي مجموعة قيمه متوضعة في E_Y الوارد سابقاً يبقى قائماً من أجل

الفضاءات الخطية المنظمة كما أن المبرهنتين (١) و (٢) الـواردتين فـي الفقـرة السابقة تبقيان قائمتين . لنلاحظ هنا أن التقارب في E_x و E_y هو تقـارب بـالنظيم ولذلك فإن استمرار المؤثر A يعني أن

$$\| A x_n - A x \| \to 0$$

من أجل

$$\| x_n - x \| \to 0$$

مثال . لتكن $\{ a_{ik} \}$ مع $i , k = 1 , 2 , \ldots$ مصفوفة لانهائية و بحيث إن :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q < \infty \quad ; \quad q > 1$$

عندئذ تعرف مجموعة المعادلات :

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k < \infty \quad , \quad i = 1 , 2 , \ldots$$

والتـي بواسـطتها تقابـل العنـصر $x = \{ \xi_i \}$ مــن الفـضاء l_p بالعنـصر $y = \{ \eta_i \}$ ، مؤثراً خطياً مستمراً $y = A x$ معرفاً على l_p ويأخذ قيمه في l_q حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. أي إن $A \in (l_p \to l_q)$. لنبين قبل كل شــيء أن y تنتمي فعلاً لــ l_q ($y \in l_q$) إذا كان $x \in l_p$. باستخدام متراجحة هولدر مــن أجل المجاميع نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} | \eta_i |^q = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k \right|^q \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k |^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}^q =$$

$$= \| x \|^q \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q \leq \| x \|^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q$$

وبما أن هذه المتراجحة صحيحة من أجل أي عدد n ، فإنه يمكننا الانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ و عندئذ نجد

$$\| y \|^q = \sum_{i=1}^{\infty} | \eta_i |^q \le \| x \|^q \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q$$

وهذا يعني أن $y \ni l_q$.

لنبرهن على أن المؤثر A خطي و مستمر . ليكن

$$x_1 = \{ \xi_i^{(1)} \} \in l_p \quad , \quad x_2 = \{ \xi_i^{(2)} \} \in l_p$$

عندئذ من المساواة

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \ (\xi_k^{(1)} + \xi_k^{(2)}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \ \xi_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \ \xi_k^{(2)}$$

ينتج أن

$$A (x_1 + x_2) = A x_1 + A x_2$$

أي إن المؤثر A جمعي . من الواضح أن المؤثر A متجانس . لنفرض الآن أن

$$x_n = \{ \xi_i^{(n)} \} \quad , \quad x = \{ \xi_i \} \in l_p$$

$$A x_n = y_n = \{ \eta_i^{(n)} \} \quad , \quad A x = y = \{ \eta_i \} \in l_q$$

وعندئذ يكون لدينا

$$\| y_n - y \| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | \eta_i^{(n)} - \eta_i |^q \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i^{(n)} - \xi_i |^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^q \right)^{\frac{1}{q}} \| x_n - x \|$$

بالتالي فإن

$$\| y_n - y \| \to 0$$

من أجل $\| x_n - x \| \to 0$ ، وهذا ما يثبت استمرار المؤثر A .

تعريف . نقول عن المؤثر $A \in (E_x \to E_y)$ إنه محدود إذا وجد عدد حقيقي مثل $M > 0$ وبحيث إن

$$\| A x \| \leq M \| x \| \qquad (3.2.1)$$

من أجل أي عنصر x ∋ E_x (إن النظيم $\| A x \|$ يؤخذ بمفهوم المسافة في E_y حيث تتوضع قيم المؤثر A و أما $\| x \|$ فيؤخذ بمفهوم المسافة في E_x) .

إن العلاقة $(3.2.1)$ تعني أن المؤثر A ينقل مجموعة العناصر $\{ x \} \subset E_x$ المحدودة إلى مجموعة العناصر $\{ A x \} \subset E_y$ المحدودة أيضاً . أي إن صورة مجموعة محدودة من E_x هي مجموعة محدودة في E_y .

مبرهنة (١) . الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر الجمعي و المتجانس A مستمراً هو أن يكون محدوداً .

البرهان . **اللزوم** : لنفرض أن المؤثر A مستمر ، إلا أنه غير محدود . عندئذ توجد متتالية من العناصر مثل $\{ x_n \}$ بحيث إن :

$$\| A x_n \| > n \| x_n \| \qquad (3.2.2)$$

وبما أنه من هذه المتراجحة ينتج أن $A x_n \neq \theta$ فإن $x_n \neq \theta$.

لنشكل العنصر

$$\xi_n = \frac{x_n}{n \| x_n \|}$$

فنجد أن

$$\| \xi_n \| = \frac{1}{n \| x_n \|} \| x_n \| = \frac{1}{n} \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

أي إن $\xi_n \to 0$. من ناحية ثانية وتبعاً لتجانس المؤثر نجد

$$A \xi_n = \frac{1}{n \| x_n \|} A x_n$$

وبالتالي و استناداً إلى العلاقة $(3.2.2)$ يكون

$$\| A \xi_n \| > 1$$

أي إن المتتالية $A \xi_n$ لا تسعى إلى 0 ($A \xi_n \nrightarrow A \theta$) الأمر الذي يناقض

استمرارية المؤثر A وبالتالي فإن A محدود .

الكفاية : ليكن المؤثر الجمعي A محدوداً . أي إن

$$\| Ax \| \leq M \| x \|$$

ولتكن $x_n \to x$ أي إن $\| x_n - x \| \to 0$. عندئذ يكون :

$$\| Ax_n - Ax \| = \| A(x_n - x) \| \leq M \| x_n - x \| \to 0$$

أي إن $Ax_n \to Ax$ وبالتالي فإن A مستمر .

إذا أمكن لمؤثر خطي في فضاء باناخ أن يكون غير مستمر ، فإن كل مؤثر خطي في فضاء باناخ المنتهي البعد E هو مؤثر مستمر .

في الحقيقة ، لتكن $e_1, e_2, \ldots, e_n$ قاعدة في الفضاء E ، وليكن x عنصراً ما من E ، عندئذ يكتب هذا العنصر على الشكل $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$.

واستناداً إلى هوميومورفيزمية فضاء باناخ ذي الـ n بعداً مع الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً نجد أنه إذا كان :

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)} e_i \to x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

فإن $\xi_i^{(k)} \to \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. إلا أنه عندئذ نجد أن :

$$Ax_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)} Ae_i \to \sum_{i=1}^{n} \xi_i Ae_i = Ax$$

وهو المطلوب .

نظيم مؤثر . ليكن A مؤثراً خطياً محدوداً . نسمي أصغر الأعداد M المحققة للعلاقة $(3.2.1)$:

$$\| Ax \| \leq M \| x \| \qquad (3.2.1)$$

(مثل هذه الأعداد موجود بنتيجة محدودية المؤثر A) ، بنظيم المؤثر A ونرمز لذلك بـ $\| A \|$.

من العلاقة $(3.2.1)$ نجد أن

$$\frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leq M \quad , \quad x \neq \theta$$

من الواضح أن M لا يقل عن الحد الأعلى للطرف الأيسر لهذه المتراجحة و أن أصغر تلك الثوابت M و المحقق لهذه المتراجحة (والذي هو $\|A\|$) هو تماماً الحد الأعلى الأصغري للطرف الأيسر . أي إن

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad (3.2.2)$$

بسهولة نجد أن :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \qquad (3.2.2')$$

باستبدال M بـ $\|A\|$ في العلاقة $(3.2.1)$ نجد

$$\|Ax\| \leq \|A\| \ \|x\| \quad ; \quad \forall x \in E_x \qquad (3.2.3)$$

لنبرهن الآن على أن

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \qquad (3.2.4)$$

من العلاقة $(3.2.3)$ نجد من أجل $\|x\| \leq 1$ أن

$$\|Ax\| \leq \|A\|$$

وبالتالي فإن :

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \leq \|A\| \qquad (3.2.5)$$

وبملاحظة أن

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \geq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\| \qquad (3.2.6)$$

فإنه من $(3.2.5)$ و $(3.2.6)$ تنتج العلاقة $(3.2.4)$. وهكذا فإنه لحساب نظيم مؤثر خطي يمكننا استخدام إحدى العلاقات $(3.2.2)$ أو $(3.2.2')$ أو $(3.2.4)$.

كمثال على ذلك سنحسب نظيم المؤثر التكاملي ذي النواة المستمرة

$$y(t) = \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds$$

والذي يطبق الفضاء $C[0,1]$ في $C[0,1]$. لنضع

$$Ax = \int_0^1 K(t,s)\ x(s)\ ds$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\|Ax\| = \max_t \left| \int_0^1 K(t,s)\ x(s)\ ds \right| \leq$$

$$\leq \max_t \int_0^1 |K(t,s)|\ ds\ \max_s |x(s)| = \max_t \int_0^1 |K(t,s)|ds\ \|x\|$$

وبالتالي فإن

$$\|A\| \leq \max_t \int_0^1 |K(t,s)|\ ds \qquad (3.2.7)$$

بما أن $\int_0^1 |K(t,s)|\, ds$ تابع مستمر فإنه يبلغ قيمته العظمى في نقطة ـ ولتكن t_0 من المجال $[0,1]$. لنضع

$$z_0(s) = sign\ K(t_0, s)$$

ليكن $x_n(s)$ تابعاً مستمراً وبحيث إن $|x_n(s)| \leq 1$ و $x_n(s) = z_0(s)$ في كل مكان باستثناء مجموعة E_n قياسها أصغر من $\dfrac{1}{2Mn}$ حيث :

$$M = \max_{t,s} |K(t,s)|$$

وبالتالي فإنه على المجموعة E_n يكون لدينا

$$|x_n(s) - z_0(s)| \leq 2$$

ووفقاً لذلك نجد أن

$$\left| \int_0^1 K(t,s)\, z_0(s)\ dS - \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\ ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |K(t,s)|\ |x_n(s) - z_0(s)|\ ds =$$

$$= \int_{En} |K(t,s)|\ |x_n(s) - z_0(s)|\ ds \leq$$

$$\leq 2 \max | K(t,s) | \cdot \frac{1}{2Mn} = \frac{1}{n}$$

وهذه المتراجحة محققة من أجل جميع النقاط $t \in [0,1]$. وبالتالي فإنه من أجل جميع $t \in [0,1]$ يكون لدينا

$$\int_0^1 K(t,s)\, z_0(s)\, ds \leq$$

$$\leq \int_0^1 K(t,s)\, x_n(s)\, ds + \frac{1}{n} \leq \|A\| \, \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

بتعويض t بـــ t_0 في هذه المتراجحة نجد

$$\int_0^1 | K(t_0,s) |\, ds \leq \|A\| \, \|x_n\| + \frac{1}{n}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ في طرفي المتراجحة الأخيـــرة وبملاحظـــة أن $\|x_n\| \leq 1$ نجد

$$\int_0^1 | K(t_0,s) |\, ds \leq \|A\|$$

أي إن

$$\max_t \int_0^1 | K(t,s) |\, ds \leq \|A\| \qquad (3.2.8)$$

من $(3.2.7)$ و $(3.2.8)$ نجد أن

$$\|A\| = \max_t \int_0^1 | K(t,s) |\, ds$$

تمديد مؤثر *Extension of linear operator*

لتكن L متنوعة خطية في الفضاء الخطي المنظم E_X ، ويمكننا النظـــر إلـــى هذه المتنوعة الخطية على أنها فضاء خطي مستقل غير تام . ولنفرض أن A مـــؤثر جمعي معرف على L وقيمه متوضعة في فضاء خطي منظم E_Y . يسمى المؤثر A محدوداً على L إذا وجد ثابت مثل M بحيث إن

$$\|Ax\| \leq M \|x\|$$

من أجل جميع العناصر $x \in L$. ويسمى أصغر هذه الثوابت بنظيم المؤثر A على L ونرمز له بـــ $\| A \|_L$.

مبرهنة (٢) . ليكن A_0 مؤثراً خطياً و محدوداً ومعرفــاً علـــى متنوعـــة خطية L كثيفة في مكان في الفضاء الخطي المنظم E_x ، ولتكن قيمه متوضعة فـــي الفضاء الخطي المنظم التام E_y ، عندئذ يمكن تمديد هذا المـــؤثر علـــى الفـــضاء E_x بأكمله دون زيادة في النظيم بشكل وحيد .

بكلام آخر ، يمكن تعريف مؤثر مثل A بحيث إن

$$A\, x = A_0\, x \qquad ; \qquad x \in L$$

و

$$\| A \|_{E_x} = \| A_0 \|_L$$

البرهان . ليكن x عنصراً من E_x وغير منتمٍ إلى L . بما أن L كثيفة في كل مكان في E_x فإنه توجد متتالية مثل $x_n \subset L$ و بحيث إن $\| x_n - x \| \to 0$ عندما $n \to \infty$ وهذا يعني أن المتتالية $\{ x_n \}$ أساسية . أي إن

$$\| x_n - x_m \| \to 0 \qquad , \qquad n\, , m \to \infty$$

من ناحية ثانية ، لدينا :

$$\| A_0\, x_n - A_0\, x_m \| = \| A_0\, (x_n - x_m) \| \leq \| A_0 \| \; \| x_n - x_m \| \to 0$$

عندما $n, m \to \infty$ ، وبالتالي فإن المتتالية $\{ A_0\, x_n \}$ متقاربة في نفسها .

وبما أن الفضاء E_y تام فإن هذه المتتالية تكون متقاربة إلى عنصر من هذا الفضاء ، ولنرمز لذلك العنصر بـــ $A\, x$. لنبين أن هذا العنصر لا يتعلق باختيارنا للمتتالية $x_n \subset L$. لتكن $\{ \xi_n \} \subset L$ متتالية أخرى متقاربة إلى x . من الواضح أن

$$\| x_n - \xi_n \| \to 0$$

ومنه نجد أن

$$\| A_0\, x_n - A_0\, \xi_n \| \to 0$$

وبالتالي فإن $A_0\, \xi_n \to A\, x$ وهذا يعني أن المؤثر A معرف علـــى عناصـــر E_x بشكل وحيد . إذا كانت $x \in L$ فإننا نأخذ $x_n = x$ من أجل جميـــع n وعندئـــذ يكون

$$Ax = \lim_n A_0 x_n = A_0 x$$

إن المؤثر المنشأ A مؤثر جمعي وذلك لأنه إذا كانت

$x_n^{(1)} \to x_1$ و $x_n^{(2)} \to x_2$ فإن

$$A(x_1 + x_2) = \lim_n A_0 (x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) =$$

$$= \lim_n A_0 (x_n^{(1)}) + \lim_n A_0 x_n^{(2)} = A x_1 + A x_2$$

بما أن

$$\| A_0 x_n \| \leq \|A_0\|_L \ \|x_n\|$$

فإنه الانتقال إلى النهاية نجد

$$\| A x \| \leq \|A_0\|_L \ \|x\|$$

أي إن المؤثر A محدود . ومن هذه المتراجحة ينتج أن

$$\| A \|_{E_x} \leq \|A_0\|_L$$

وبما أن نظيم المؤثر لا يمكن له أن يتناقص بنتيجة التمديد فإن

$$\| A \|_{E_x} = \|A_0\|_L$$

بسهولة يمكن التأكد من وحدانية التمديد . في الواقع إذا كان B مؤثراً خطياً وتمديداً للمؤثر A_0 على E_x وكانت $x \in E_x$ و $x_n \subset L$ وبحيث إن $x_n \to x$ فإنه استناداً إلى استمرارية المؤثر B نجد

$$B x = \lim_n B x_n = \lim_n A_0 x_n = A x$$

أي إن المؤثرين A , B متطابقان .

تسمى عملية تمديد المؤثر ، المذكورة أعلاه ، بتمديد مؤثر بالاستمرار

ملاحظة . بنفس الخطوات التي برهنا وفقها وحدانية التمد يد في المبرهنة أعلاه يمكننا التأكيد على أنه إذا كان B و A_0 مؤثرين خطيين معرفين في الفضاء الخطي المنظم E_X وكانت قيمهما متوضعة في فضاء خطي منظم E_Y ، وكان $A x = B x$ من أجل جميع العناصر x المنتمية إلى مجموعة ما L كثيفة في كل

مكان في E_x فإن $A\,x = B\,x$ من أجل جميع العناصر $x \in E_x$ (*).

في فضاء هيلبرت يمكن تمديد المؤثر الخطي مع الحفاظ على النظيم من أية مجموعة جزئية خطية .

مبرهنة (٣) . ليكن H فضاء هيلبرت ولتكن L متنوعة خطية فيه وليكن $y = A_0\, x$ مؤثراً خطياً معرفاً على L ويأخذ قيمه في فضاء باناخ E_y عندئذ يمكن تمديد المؤثر A_0 على الفضاء H بأكمله مع الحفاظ على النظيم .

البرهان . لنرمز بـ E للصاقة المتنوعة الخطية L . بذلك تكون E فضاءً جزئياً من H وبما أن L كثيفة في كل مكان في E فإنه يمكننا تمديد المؤثر A_0 على E مع الحفاظ على النظيم استناداً للمبرهنة (٢) . وفقاً لذلك ودون أن ننقص من عمومية المسألة يمكننا اعتبار أن L ، منذ البداية ، فضاءً جزئياً .لنرمز بـ P لمؤثر الإسقاط العمودي من H على الفضاء الجزئي L ولنضع من أجل أي عنصر $x \in H$

$$A\,x = A_0\,(\,px\,)$$

إن جمعية المؤثر A تنتج من جمعية المؤثرين A_0 و P ، وأن

$$\|Ax\| \leq \|A_0\|\;\|p\,x\| \leq \|A_0\|\;\|p\|\;\|x\| = \|A_0\|\;\|x\|$$

(وذلك لأن $\|p\| = 1$) (**) ومنه وكما في إثبات المبرهنة (٢) ينتج أن المؤثر A خطي وأن $\|A_*\| = \|A\|$.

في صياغة هذه المبرهنة ونتيجة لعدم فرضنا أن L كثيفة في كل مكان في H فإن تمديد المؤثر A_0 في هذه المبرهنة يمكن تحقيقه بشكل غير وحيد . سنرى في الفصل القادم أنه من أجل الداليات الخطية تتحقق المبرهنة (٣) في أي فضاء خطي منظم .

(*) يمكن أن لاتكون هنا L مجموعة خطية (متنوعة خطية) .

(**) يمكن للطاب إثبات ذلك بسهولة إذا لاحظ أن $x = y + z$ حيث أن $y \in L$ و $z \perp L$ وأن $p\,x = y$ من أجل أي عنصر $x \in H$ ، في حالة خاصة إذا كان $x \in L$ فإن $p\,x = x$

§ 3 . فضاء المؤثرات الخطية والمحدودة

The Space of Linear Bounded Operators

وجدنا أن مجموعة جميع المؤثرات الخطية والمحدودة والمعرفة على الفضاءالخطي نفسه E والتي قيمها متوضعة في الفضاء الخطي E_y ، تشكل فضاءً خطياً ($E_x \to E_y$) . بالإضافة إلى ذلك ، إذا فرضنا أن E_x و E_y فضاءان منظمان ، فإنه يمكننا تعريف نظيم في الفضاء ($E_x \to E_y$) .

في الحقيقة ، من أجل المؤثر الخطي المحدود A الذي يطبق E_x في E_y كنا قد عرفنا في الفقرة الثانية نظيماً . بسهولة يمكن التأكد من أن ذلك النظيم يحقق جميع موضوعات النظيم . في الواقع

١) إن $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| \ge 0$ وإذا كان $\|A\| = 0$

(أي إن $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = 0$) فإن $\|Ax\| = 0$ من أجل جميع x التي من أجلها $\|x\| \le 1$ وعندئذ واستناداً إلى تجانس المؤثر A يكون $Ax = 0$ من أجل جميع العناصر x . أي إن $A = 0$.

٢) . $\|\lambda A\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \|A\|$

٣)

$$\|A+B\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax + Bx\| \le \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| + \sup_{\|x\| \le 1} \|Bx\| =$$
$$= \|A\| + \|B\| .$$

بذلك يكون فضاء المؤثرات الخطية المحدودة فضاءً خطياً منظماً .

في حالة خاصة ، عندما يكون $E_y = R$ (R – مجموعة الأعداد الحقيقية) فإنه يرمز للفضاء ($E_x \to R$) بـ E_x^* ويسمى بالفضاء المرافق للفضاء E_x وهو فضاء الداليات (المؤثرات التي تأخذ قيماً عددية) الخطية المحدودة و المعرفة على E_x وسنستعرض هذا الفضاء بالتفصيل في الفصل الرابع .

مبرهنة (١) . إذا كان الفضاء E_y تاماً فإن فضاء المؤثرات الخطية

المحدودة يكون تاماً وبالتالي فهو فضاء من النمط B .

البرهان . لتكن $\{ A_n \}$ متتالية من المؤثرات الخطية والمحدودة ، متقاربة في نفسها بالنظيم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة أي إن $\| A_n - A_m \| \to 0$ عندما m , n تسعيان إلى ∞ . عندئذ من أجل أي عنصر x يكون

$$\| A_n x - A_m x \| \leq \| A_n - A_m \| \| x \| \to 0 \; ; \; n , m \to \infty$$

لذلك فإنه من أجل كل عنصر مثبت x تكون متتالية العناصر $\{ A_n x \}$ متقاربة في نفسها في الفضاء E_y . وبما أن الفضاء E_y تام فإن $\{ A_n x \}$ تتقارب إلى عنصر مثل $y \ni E_y$. وهكذا فإن كل عنصر $x \ni E_x$ يقابل بعنصر $y \ni E_y$ بذلك يتعرف لدينا مؤثر A بالعلاقة $y = Ax$. إن هذا المؤثر خطي

$$1) \; A (x_1 + x_2) = \lim_n A_n (x_1 + x_2) = \lim_n A_n x_1 + \lim_n A_n x_2 =$$

$$= Ax_1 + Ax_2$$

$$2) \; A (\alpha x) = \lim_n A_n \alpha x = \alpha \lim_n A_n x = \alpha A x$$

ولنبين الآن أن A محدود . بالفرض لدينا

$$\| A_n - A_m \| \to 0 \quad ; \quad n , m \to \infty$$

ومنه نجد أن

$$\big| \| A_n \| - \| A_m \| \big| \to 0 \quad , \quad n , m \to \infty$$

أي إن المتتالية العددية $\left\{ \| A_n \| \right\}$ متقاربة في نفسها ، بالتالي فهي محدودة لذلك فإنه يوجد ثابت مثل K بحيث إن

$$\| A_n \| \leq K \quad ; \quad \forall \; n \in \mathbb{N}$$

من هذا ينتج أن

$$\| A_n x \| \leq K \| x \|$$

من أجل جميع الأعداد n ، وبالتالي فإن

$$\| A x \| = \lim_n \| A_n x \| \leq K \| x \|$$

أي إن A مؤثر محدود . وهذا بدوره يؤدي إلى أن المؤثر A مستمر .

لنبرهن الآن على أن A هو نهاية المتتالية A_n بمفهوم التقارب بالنظيم في فضاء

المؤثرات الخطية المحدودة . من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عدد مثل n_0 بحيث إن

$$\| A_{n+p} \ x - A_n \ x \| < \varepsilon \qquad (3.3.1)$$

من أجل جميع $n \geq n_0$ و $p > 0$ وجميع العناصر x والتي نظيمها $\| x \| \leq 1$. بالانتقال إلى النهاية عندما $p \to \infty$ في المتراجحة (3 . 3 . 1) نجد أن

$$\| A x - A_n x \| \leq \varepsilon$$

من أجل جميع $n \geq n_0$ وجميع x التي نظيمها لا يتجاوز الواحد . ولهذا فإنه من أجل $n \geq n_0$ يكون :

$$\| A_n - A \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| (A_n - A) x \| \leq \varepsilon$$

وبالتالي فإن

$$A = \lim_n A_n$$

بمفهوم التقارب بالنظيم في فضاء المؤثرات الخطية المحدودة وهذا ما يثبت أن $(E_X \to E_Y)$ تام .

نتيجة . إن الفضاء E^* المرافق للفضاء الخطي المنظم E هو فضاء باناخ .

التقارب المنتظم و التقارب النقطي (الضعيف) لمتتاليات المؤثرات

Uniform and Weak Convergence of Sequences of Operatores

إن دراسة متتاليات المؤثرات الخطية تلعب دوراً هاماً في العديد من التطبيقات العملية . وهو ما سنعالجه الآن . سنعتبر أن E_X و E_Y فضاءان خطيان منظمان فوق نفس الحقل السلمي .

تعريف (١) . نسمي تقارب متتالية من المؤثرات الخطية و المحدودة بمفهوم النظيم في فضاء المؤثرات الخطية و المحدودة تقارباً منتظماً .

تبرر هذه التسمية على النحو الآتي : إذا كانت المتتالية $\{ A_n \}$ متقاربة إلى A بمفهوم التقارب بالنظيم فإن $\{ A_n x \}$ تتقارب بانتظام إلى $(A x)$ في كل كرة $\| x \| \leq r$. في الواقع ، من أجل أي عدد معطى $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل n_0

بحيث إنه من أجل جميع الأعداد $n > n_0$ يكون : $\| A_n - A \| < \frac{\varepsilon}{r}$

وعندئذ نجد أن

$$\| A_n x - Ax \| \leq \| A_n - A \| \; \| x \| < \frac{\varepsilon}{r} . r = \varepsilon$$

من أجل جميع النقاط $x \ni \overline{S}(\theta , r)$. بالعكس . إذا كانت المتتالية $\{ A_n x \}$ متقاربة بانتظام إلى $(A x)$ على كرة ما $\| x \| \leq r$ فإن $A_n x \to A x$ بانتظام في الكرة الواحدية . في الواقع ، بما أن

$$\frac{1}{r} \| A_n x - Ax \| < \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon_1 \qquad \forall\ n > n_0 \ , \ x \in \overline{S}(\theta , r)$$

وبفرض أن $\xi = \frac{x}{r}$ يكون $\xi \in \overline{S}\ (\theta , 1)$ ، كما أن

$$\| A_n \xi - A \xi \| < \varepsilon_1 \qquad \forall\ n > n_0 \ ; \ \xi \in \overline{S}(\theta , 1) \ .$$

وبالتالي فإن

$$\| A_n - A \| = \sup_{\| \xi \| \leq 1} \| (A_n - A) \xi \| < \varepsilon_1$$

أي إن : $\| A_n - A \| \to 0$.

يعرف في فضاء المؤثرات الخطية شكل آخر للتقارب وهو التقارب النقطي .

تعريف . نقول إن متتالية المؤثرات الخطية و المحدودة $\{ A_n \}$ متقاربة نقطياً إلى المؤثر A (في نفسها) إذا كانت المتتالية $\{ A_n x \}$ متقاربة إلى $(A x)$ من أجل كل نقطة مثبتة x (في نفسها) .

من الواضح ، أنه من التقارب المنتظم للمتتالية $\{ A_n \}$ ينتج التقارب النقطي إلا أن العكس غير صحيح ، كما يوضح ذلك المثال الآتي .

ليكن H فضاء هيلبرت ولتكن $\{ e_1 , e_2 , \ldots , e_n , \ldots \}$ قاعدة متعامدة – منظمة فيه وليكن A_n مؤثر الإسقاط العمودي على الفضاء الجزئي H_n المولد بالعناصر $\{ e_1 , e_2 , \ldots , e_n , \ldots \}$. من أجل أي عنصر $x \ni H$ يكون

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} (x , e_i) \ e_i \to \sum_{i=1}^{\infty} (x , e_i) \ e_i = x$$

بالتالي فإن $A_n \to I$ بمفهوم التقارب النقطي . من ناحية ثانية ومـــن أجـــل $1 > \varepsilon_0$

ومن أجل أي عدد $0 < p , n$ لدينا

$$\| A_n \; e_{n+1} - A_{n+p} \; e_{n+1} \| = \| e_{n+1} \| = 1 > \varepsilon_0$$

وبالتالي فإن المتتالية $\{ A_n \}$ غير متقاربة بانتظام في الكرة الواحدية في الفضاء H .

مبرهنة (٢) : (باناخ – شتينهاوس) (*)

إذا كانت متتالية المؤثرات الخطية و المحدودة $\{ A_n \}$ متقاربة في نفسها في كل نقطة x من فضاء باناخ E_x ، فإن متتالية النظائم $\{ \| A_n \| \}$ تكون محدودة . أي إنه يوجد عدد مثل $0 < M$ بحيث إن

$$\| A_n \| \le M \quad ; \quad \forall \; n = 1, 2, \ldots$$

البرهان . لنفرض العكس . أي إن متتالية النظائم $\{ \| A_n \| \}$ ليست محدودة ولنبرهن على أنه في هذه الحالة تكون المجموعة $\{ \| A_n \, x \| \}$ غير محدودة على أية كرة مغلقة $\| x - x_0 \| \le \varepsilon$. أي إننا أمام الأمر الآتي :

إذا كانت متتالية النظائم $\{ \| A_n \| \}$ غير محدودة فإن المجموعة $\{ \| A_n \, x \| \}$ تكـــون غير محدودة على أية كرة مغلقة $\overline{S}(x_0 , \varepsilon) = \| x - x_0 \| \le \varepsilon$.

لنفرض الآن العكس أي إن المجموعة $\{ \| A_n \, x \| \}$ محدودة على كـــل كـــرة مغلقة $\overline{S}(x_0 , \varepsilon)$. أي إنه يوجد عدد مثل $0 < c$ بحيث إن

$$\| A_n \, x \| \le c$$

من أجل جميع الأعداد n ومهما يكن العنصر $x \in \overline{S}(x_0 , r)$. لنأخذ عنـــصراً ما $\xi \in E_x$ عندئذ يكون العنصر

$$x = \frac{\varepsilon}{\| \xi \|} \; \xi + x_0$$

من الكرة $\overline{S}(x_0 , \varepsilon)$ و بالتالي فإن

(*) (14 . 1 . 1887 – 25 . 2 . 1972) (Steinhaus H . D) رياضي بولوني .

$$\| A_n x \| \leq c \qquad \forall \ n = 1, 2, \ldots$$

أو

$$\| A_n x \| = \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|} (A_n \xi) + A_n x_0 \right\| \leq c$$

وبما أن

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|} \| A_n \xi \| - \| A_n x_0 \| \leq \left\| \frac{\varepsilon}{\|\xi\|} A_n \xi + A_n x_0 \right\| \leq c$$

فإنه يكون لدينا

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|} \| A_n \xi \| \leq c + \| A_n x_0 \|$$

أو

$$\| A_n \xi \| \leq \frac{c + \| A_n x_0 \|}{\varepsilon} \| \xi \| = c_1 \| \xi \|$$

وبالتالي فإن

$$\| A_n \xi \| \leq c_1 \| \xi \| \qquad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ومنه نجد أن

$$\| A_n \| \leq c_1 \qquad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

أي إن متتالية النظائم محدودة وهذا تناقض وهو ما يثبت صحة دعوانا من أنه إذا كانت متتالية النظائم $\{ \|A_n\| \}$ غير محدودة فإن المجموعة $\{ \|A_n x\| \}$ تكون غير محدودة على أية كرة مغلقة $\overline{S_0}(x_0, \varepsilon)$.

لتكن الآن $\overline{S_0}(x_0, \varepsilon_0)$ كرة مغلقة ما في الفضاء E_x ولنفرض أن المتتالية $\{ \|A_n x\| \}$ غير محدودة على هذه الكرة . عندئذ يوجد عدد مثل n_1 وعنصر مثل $x_1 \in \overline{S_0}(x_0, \varepsilon_0)$ بحيث يكون

$$\| A_{n_1} x_1 \| > 1$$

واستناداً إلى استمرارية المؤثر A_{n_1} تتحقق المتراجحة الأخيرة في كرة مغلقة $\overline{S_1}(x_1, \varepsilon_1)$ محتواة في $\overline{S}(x_0, \varepsilon_0)$. وبما أن المتتالية $\{ \|A_n x\| \}$ غير

محدودة على الكرة $\overline{S_1}(x_1, \varepsilon_1)$ فإنه يوجد عدد مثل $n_1 < n_2$ وعنصر مثل $x_2 \in \overline{S_1}(x_1, \varepsilon_1)$ بحيث يكون :

$$\| A_{n_2} x_2 \| > 2$$

و تبعاً لاستمرارية المؤثر A_{n_2} تتحقق المتراجحة الأخيرة في كرة مغلقة $\overline{S_2}(x_2, \varepsilon_2)$ محتواة في $\overline{S_1}(x_1, \varepsilon_1)$ وهكذا . . . . يمكننا اعتبار $\varepsilon_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ وعندئذ يوجد عنصر مثل $\bar{x}$ ينتمي إلى جميع الكرات $\overline{S_n}(x_n, \varepsilon_n)$ ويكون في هذه النقطة

$$\| A_{n_k} \bar{x} \| \geq k$$

وهذا بدوره يناقض الفرض الرئيسي للمبرهنة من أن المتتالية $\{ A_n x \}$ متقاربة في نفسها من أجل كل عنصر $x \in E_x$ وهو ما يثبت مبرهنة باناخ – شتينهاوس .

ملاحظة . في صياغة مبرهنة باناخ – شتينهاوس يمكننا استبدال تقارب متتالية المؤثرات $\{A_n\}$ في نفسها في كل نقطة $x \in E_x$ بمحدودية هذه المتتالية في كل نقطة من نقاط الفضاء . وفي هذه الحالة لا يتغير إثبات المبرهنة .

مبرهنة (٣) . إذا كان الفضاءان E_x ، E_y تامين فإن فضاء المؤثرات الخطية المحدودة $(E_x \to E_y)$ يكون تاماً بمفهوم التقارب النقطي .

البرهان. بما المتتالية $\{ A_n x \}$ متقاربة في نفسها من أجل كل عنصر $x \in E_x$ فإن النهاية $\lim\limits_{n} A_n x$ موجودة لنضع

$$y = \lim_{n} A_n x$$

بذلك يتعرف لدينا مؤثر A $(y = A x)$ معرف على E_x ويأخذ قيمة في E_y وكما سبق في المبرهنة (١) يمكن التأكد من أن هذا المؤثر خطي ، واستناداً إلىمبرهنة باناخ – شتينهاوس يكون هذا المؤثر محدوداً . في الواقع لدينا :

$$y = A x = \lim_{n} A_n x$$

وبما أن

$$\| A_n x \| \leq M \| x \| \qquad n = 1, 2, \ldots$$

فإنه بالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ نجد

$$\| A x \| \leq M \| x \|$$

أي إن A محدود .

هكذا ، فإنه توجد نهاية لكل متتالية ، من المؤثرات الخطية المحدودة ، متقاربة في نفسها نقطياً و هذه النهاية مؤثر خطي و محدود . أي إن فضاء المؤثرات الخطية و المحدودة فضاء تام بمفهوم التقارب النقطي .

غالباً تبدو المبرهنة الآتية مفيدة .

مبرهنة (٤) . الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية المؤثرات $\{ A_n \}$ إلى المؤثر A_0 نقطياً هو أن :

١) تكون المتتالية $\{ \| A_n \| \}$ محدودة .

٢) تتقارب $A_n x$ إلى $A_0 x$ من أجل أي عنصر x من مجموعة ما X ، التراكيب الخطية لعناصرها كثيفة في كل مكان في E_x .

البرهان . إن لزوم الشرط الأول ما هو إلا مبرهنة باناخ – شتينهاوس المثبتة أعلاه وأما لزوم الشرط الثاني فهو بديهي . لنبرهن كفاية هذين الشرطين .

لنفرض أن : $M = \sup\limits_{n=0,1,...} \| A_n \|$

وأن $L (X)$ الغطاء الخطي للمجموعة X . استناداً إلى خطية المؤثرات A_0 , A_n والشرط الثاني فإن $A_n x \to A_0 x$ من أجل أي عنصر $x \ni L (X)$. لنأخذ الآن عنصراً ξ من الفضاء E_x وغير منتمٍ إلى $L (X)$ ، وعندئذ من أجل أي عدد معطى $0 < \varepsilon$ يوجد عنصر مثل $x \ni L (X)$ وبحيث إن : $\| \xi - x \| < \dfrac{\varepsilon}{4 M}$

ويكون لدينا :

$$\| A_n \xi - A_0 \xi \| \leq \| A_n \xi - A_n x \| + \| A_n x - A_0 x \| + \| A_0 x - A_0 \xi \| \leq$$

$$\leq \| A_n x - A_0 x \| + \left(\| A_n \| + \| A_0 \| \right) \| x - \xi \| < \| A_n x - A_0 x \| + \frac{\varepsilon}{2}$$

وبما أن $A_n x \to A_0 x$ فإنه يوجد عدد مثل n_0 بحيث يكون :

$$\| A_n x - A_0 x \| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل $n_0 \leq n$. لذلك فإنه من أجل $n_0 \leq n$ يكون لدينا :

$$\| A_n\xi - A_0 \xi \| < \varepsilon$$

وهو المطلوب .

§ ٤- المؤثرات المعاكسة

Inverse Operators

تعاريف . كنا قد تعرفنا لمفهوم مقلوب مؤثر، كما أشرنا إلى أهمية هذا المفهوم ، وسنرى أن هذا المفهوم مرتبط بمسألة وجود ووحدانية الحل للمعادلة المؤثرية من الشكل :

$$A x = y \qquad (3.4.1)$$

حيث إن y عنصر معلوم من الفضاء الخطي E وأما x فهو عنصر مجهول من الفضاء نفسه . بما أنه للمعادلات من الشكل ($3.4.1$) تنسب جمل المعادلات الجبرية الخطية والمعادلات التفاضلية الخطية وكذلك المعادلات التكاملية الخطية وغيرها فمن الواضح أن إيجاد المؤثر المقلوب (المعاكس) لمؤثر معلوم هو أمر بالغ الأهمية .

هكذا لنستعرض المعادلة ($3.4.1$) ، ولنفرض أن للمؤثر A مقلوب A^{-1} . لنضع :

$$x = A^{-1} y$$

وبتعويض هذه القيمة في ($3.4.1$) نجد المطابقة :

$$A A^{-1} y = y$$

أي إن $y = y$ وبالتالي فإن :

$$x = A^{-1} y$$

حل للمعادلة ($3.4.1$) .

لنفرض وجود حل آخر x_1 للمعادلة ($3.4.1$) :

$$A x_1 = y$$

بتطبيق المؤثر A^{-1} على طرفي هذه المساواة نجد :

$$x_1 = A^{-1} y = x$$

وبالتالي فإن الحل $x = A^{-1} y$ وحيد .

إذا كان C مقلوباً يمينياً للمؤثر A فإنه بسهولة نجد أن : $x = C y$ حل للمعادلة ($3.4.1$) إلا أن مسألة وحدانية هذا الحل تبقى مفتوحة .

لنفرض الآن أن B مقلوب يساري للمؤثر A فإذا كان للمعادلة $(3.4.1)$ حل x أي إن $A\,x = y$ فإنه بتطبيق المؤثر B على طرفي هذه العلاقة نجد $x = B\,y$ أي إن الحل وحيد ، إلا أن مسألة وجود الحل تبقى مفتوحة . إن التحليل لما استعرضناه يبين أن مقلوب المؤثر (ثنائي الإتجاه ،أو المقلوب اليساري أو المقلوب اليميني) لايطبق على أي عنصر $x \in E$ وإنما فقط على العناصر من الشكل $A\,x$ أي على صور عناصر الفضاء E .إن مجموعة هذه الصور تشكل متنوعة خطية (جزء من الفضاء E) بتعميم الحالةالمشار إليها نأتي الى التعريف الأكثرعمومية لمقلوب المؤثر.

ليكن الفضاءان الخطيان E_x , E_y ، وليكن A مؤثراً يطبق E_x على E_y . إذا وجد مؤثر A^{-1} معرف على E_y ويأخذ قيمه في E_x وبحيث يكون :

$$A^{-1} A\,x = x \qquad (3.4.2)$$

من أجل أي عنصر $x \in E_x$ وكان :

$$A\,A^{-1}\,y = y \qquad (3.4.2')$$

من أجل أي عنصر $y \in E_y$ فإن أياً من المؤثرين A و A^{-1} يسمى مقلوباً للمؤثر الآخر . من هذا التعريف ينتج بشكل خاص أن

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

أما إذا حقق المؤثر A^{-1} واحداً من الشرطين السابقين فإنه يسمى مقلوباً يسارياً (يمينياً) على الترتيب للمؤثر A .

بسهولة يمكن التأكد من أن مقلوب المؤثر الخطي هو مؤثر خطي أيضاً .في الحقيقة ، ليكن :

$$x = A^{-1}(y_1 + y_2) - A^{-1}\,y_1 - A^{-1}\,y_2$$

استناداً إلى جمعية المؤثر A نجد :

$$\begin{aligned} A\,x &= A\,A^{-1}\,(y_1 + y_2) - A\,A^{-1}\,y_1 - A\,A^{-1}\,y_2 = \\ &= (y_1 + y_2) - y_1 - y_2 = 0 \end{aligned}$$

ومنه فإن

$$x = A^{-1} A\,x = A^{-1}\,0 = 0$$

أي إن

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}\,y_1 + A^{-1}\,y_2$$

وبالتالي فإن A^{-1} جمعي . بالمثل تماماً يبرهن على أن A^{-1} متجانس . في خلاف ذلك

فإنه من استمرار المؤثر A بالنسبة لتوبولوجيا ما لا ينتج في الحالة العامة استمرار المؤثر المقلوب بالنسبة لتلك التوبولوجيا أو غيرها . بكلام آخر إن مقلوب مؤثر خطي ومحدود يمكن أن لا يكون خطياً ومحدوداً .

مبرهنات حول مقلوب مؤثر . *Theorems of the Inverse Operator*

سنستعرض عدداً من المبرهنات التي تعطينا الشروط الكافية لوجود المقلوب لمؤثر خطي ومحدود . لنلاحظ أولاً أنه إذا كان A مؤثراً خطياً ومحدوداً من E_X على E_Y وغامراً ومتبايناً فإن المؤثر المقلوب A^{-1} يكون موجوداً ، كما أنه يكون خطياً . في الحقيقة ، من أجل أي عنصر $y \in E_Y$ توجد صورة عكسية وحيدة $x \in E_X$. وبمقابلة كل عنصر $y \in E_Y$ بصورته العكسية $x \in E_X$ نحصل على مؤثر A^{-1} والذي بمفهوم تعريفه يحقق الشرط $(3 . 4 . 2)$ ومن هذا الشرط تنتج خطية المؤثر A^{-1} .

مبرهنة (١) . ليكن A مؤثراً خطياً من الفضاء الخطي المنظم E_X على الفضاء الخطي المنظم E_Y ، ومحققاً للشرط :

$$\| A x \| \geq m \| x \| \qquad m > 0 \qquad (3 . 4 . 3)$$

من أجل كل عنصر $x \in E_X$ وحيث m ثابت ما . عندئذ يكون A^{-1} موجوداً وخطياً ومحدوداً .

البرهان . من الشرط $(3 . 4 . 3)$ ينتج أن المؤثر A يطبق E_X على E_Y كما أنه غامر و متباين ، وذلك لأنه إذا كان $A x_1 = y$ و $A x_2 = y$ فإن

$$m \| x_1 - x_2 \| \leq \| A (x_1 - x_2) \| = 0$$

وبالتالي فإن $x_1 = x_2$ ولذلك فإن المؤثر A^{-1} موجود وهو كما ذكرنا أعلاه ، خطي . أما كونه محدوداً فإنه ينتج مباشرة من العلاقة $(3 . 4 . 3)$:

$$\| A^{-1} y \| \leq \frac{1}{m} \| A A^{-1} y \| = \frac{1}{m} \| y \|$$

وذلك من أجل أي عنصر $y \in E_Y$. وهو المطلوب .

ملاحظة . إن الشرط $(3 . 4 . 3)$ هوشرط لازم أيضاً لوجود المقلوب A^{-1} . في الواقع ، لنفرض أن A^{-1} موجود و أنه خطي و محدود على $(A E_X)$ ، ذلك يعني

وجود ثابت مثل $0 < M$ بحيث إنه من أجل أي عنصر x ∍ E_x يكون

$$\| A^{-1} (A x) \| \leq M \| A x \|$$

أو أن

$$\| x \| \leq M \| A x \|$$

لنفرض أن $m = \frac{1}{M}$ فنجد أن

$$m \| x \| \leq \| A x \|$$

ليكن B ، A مؤثرين خطيين محدودين يطبق كل منهما الفضاء الخطي المــنظم E في نفسه ، عندئذ يكون جداء المؤثرين $A B$ معرفاً ولنثبت أن

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \| \qquad (3 . 4 . 4)$$

من أجل أي عنصر x ∍ E ، لدينا

$$\| A Bx \| \leq \| A \| \| Bx \| \leq \| A \| \| B \| \| x \|$$

وهذا بدوره يؤدي إلى العلاقة ($3 . 4 . 4$) .

لنفرض الآن أن المؤثرات B , B_n , A , A_n تنتمي لــ ($E \to E$) وأن $A_n \to A$ و $B_n \to B$ بمفهوم التقارب المنتظم . عندئذ يكون : $A_n B_n \to A B$. في الواقع إن

$$\| A_n B_n - A B \| \leq \| A_n B_n - A_n B \| + \| A_n B - AB \| \leq$$
$$\leq \| A_n \| \| B_n - B \| + \| B \| \| A_n - A \|$$

إن المتتالية $\{ \| A_n \| \}$ هي متتالية عددية متقاربة وبالتالي فهي محدودة كما أن

$$\| A_n - A \| \to 0 \quad and \quad \| B_n - B \| \to 0$$

لذلك فإن

$$\| A_n B_n - AB \| \to 0$$

وهو المطلوب .

مبرهنة (٢) . ليكن A مؤثراً خطياً ومحدداً ويطبــق الفــضاء الخطــي المنظم التام E في نفسه ، وليكن $\| A \| \leq q < 1$ عندئذ يوجد للمــؤثر ($I + A$) مقلوب خطي ومحدود .

البرهان . لنستعرض ، في فضاء المؤثرات المعرفة على E والتي تأخذ قيمها في الفضاء نفسه ، السلسلة

$$I - A + A^2 - A^3 + \ldots + (-I)^n A^n + \ldots \qquad (3.4.5)$$

بما أن

$$\| A^2 \| \leq \| A \|^2$$

وبالمثل كذلك

$$\| A^n \| \leq \| A \|^n$$

فإنه من أجل المجاميع الجزئية S_n للسلسلة (3 . 4 . 5) يكون لدينا

$$\begin{aligned} & \| S_{n+p} - S_n \| = \\ & = \| (-1)^{n+1} A^{n+1} + (-I)^{n+2} A^{n+2} + \ldots + (-I)^{n+p} A^{n+p} \| \leq \\ & \leq \| A \|^{n+1} + \| A \|^{n+2} + \ldots + \| A \|^{n+p} \leq \\ & \leq q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{n+p} \to 0 \end{aligned}$$

عندما $n \to \infty$ و $p > 0$. وبالتالي فإن متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة (3 . 4 . 5) متقاربة في نفسها ، وبما أن فضاء المؤثرات الخطية تام فإن المتتالية تتقارب إلى نهاية ما ، وبالتالي فإن السلسلة (3 . 4 . 5) متقاربة . لنفرض أن S هو مجموع السلسلة (3 . 4 . 5) .

لدينا :

$$\begin{aligned} S(I+A) &= \lim_n S_n (I+A) = \\ &= \lim_n (I + A + A^2 + \ldots + A^n - A - A^2 - \ldots - A^{n+1}) \\ &= \lim_n (I - A^{n+1}) = I \end{aligned}$$

أي إن :

$$S = (I+A)^{-1}$$

بسهولة نرى أن S مؤثر خطي ، وبما أن

$$\| S \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| A \|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

فإن S محدود وبذلك نجد أن المؤثر $(I+A)^{-1}$ خطي ومحدود . وهو المطلوب .

مبرهنة (٣) . ليكن للمؤثر $A : A \in (E_x \to E_y)$ مقلوب A^{-1} ،

وليكن المؤثر ΔA بحيث إن

$$\| \Delta A \| < \| A^{-1} \|^{-1} \quad .$$

عندئذ يوجد للمؤثر $B = A + \Delta A$ مقلوب B^{-1} . وإضافة إلى ذلك يكون :

$$\| B^{-1} - A^{-1} \| \leq \frac{\| \Delta A \|}{1 - \| A^{-1} \| \, \| \Delta A \|} \| A^{-1} \|^2 \qquad (3.4.6)$$

في الحقيقة ، إن :

$$A + \Delta A = A (I + A^{-1} \Delta A)$$

وبما أن $\| A^{-1} \Delta A \| < 1$ فإنه للمؤثر $(I + A^{-1} \Delta A)$ يوجد مقلوب ، استناداً للمبرهنة (٢) ، وهذا المقلوب يعطى بمجموع السلسلة

$$(I + A^{-1} \Delta A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (- A^{-1} \Delta A)^n$$

ومن الواضح عندئذ أن المؤثر $(I + A^{-1} \Delta A)^{-1} A^{-1}$ هو مقلوب المؤثر $A (I + A^{-1} \Delta A) = A + \Delta A$ وبالتالي فإن

$$\| (A + \Delta A)^{-1} - A^{-1} \| \leq \| A^{-1} \| \, \| (I + A^{-1} \Delta A)^{-1} - I \| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \| A^{-1} \Delta A \|^n \| A \|^{-1} = \frac{\| A^{-1} \Delta A \|}{1 - \| A^{-1} \Delta A \|} \| A^{-1} \| \leq$$

$$\leq \frac{\| \Delta A \|}{1 - \| A^{-1} \| \, \| \Delta A \|} \| A^{-1} \|^2$$

وهو المطلوب .

مثال . لنستعرض المؤثر التكاملي :

$$A x = x(t) - \int_0^1 K(t,s) x(s) ds \qquad (3.4.7)$$

ذا النواة المستمرة $K(t,s)$ ، والذي يطبق الفضاء $C[0,1]$ في نفسه .

ولتكن $K_0(t,s)$ نواة منحلة قريبة من النواة $K(t,s)$ وليكن A_0 المؤثر

التكاملي الموافق للنواة $K_0(t, s)$ ، أي إن

$$A_0 x = x(t) - \int_0^1 K_0(t,s)\, x(s)\, ds \qquad (3.4.8)$$

لنستعرض المعادلتين

$$A\, x = y \qquad (3.4.7')$$

$$A_0\, x = y \qquad (3.4.8')$$

ولنضع

$$\omega = \max_{t,s} \left| K(t,s)\, x_0(t,s) \right|$$

إذا كان $\Delta A = A - A_0$ فإننا بسهولة نجد أن $\| \Delta A \| \le \omega$.

من المعلوم ، في أبحاث المعادلات التكاملية أن حل المعادلة ($3.4.8$) ذات النـواة المنحلة يؤول إلى حل جملة معادلات خطية جبرية . لنفرض أن لتلـك الجملـة حـل ولنكتبه على الشكل

$$x_0(t) = R\, y$$

حيث R مؤثر معرف بالمصفوفة (r_{ij}) مقلوب مصفوفة الجملة الجبرية المشار إليها أعلاه ، ولنفرض أن r هو نظيم المؤثر R . عندئذ وإذا كان

$$\omega < \frac{1}{r}$$

فإنه استناداً إلى المبرهنة (٣) يوجد للمعادلة التكاملية ($3.4.7$) ذات النواة غيـر المنحلة حل ، وإذا كان ذلك الحل هو $x(t)$ فإنه يكون

$$\| x(t) - x_0(t) \| \le \frac{\omega}{1 - \omega r}\, r^2$$

بالعكس . إذا علمنا بأن المعادلة ($3.4.7$) قابلة للحـل ، فإنـه يمكننـا اسـتخدام المبرهنة (٣) لإثبات وجود حل للمعادلة التكاملية ذات النواة المنحلة وكـذلك تقـدير الخطأ المرتكب في الحل التقريبي .

قبل أن نأتي إلى إثبات مبرهنة باناخ المتعلقة بمقلـوب مـؤثر سنـستعرض التوطئـة الآتية :

توطئة (١) . ليكن A مؤثراً خطياً (ليس بالضرورة أن يكون محدوداً)

يطبق فضاء باناخ E_x في فضاء باناخ E_y . لنرمز بـ E_n لمجموعة جميع العناصر $x \in E_x$ والتي من أجلها

$$\| A x \| \leq n \| x \|$$

عندئذ يكون

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

وتكون واحدة من المجموعات E_n على الأقل كثيفة في كل مكان في E_x .

البرهان . لنلاحظ ، أولاً ، أن كل مجموعة من المجموعات E_n ليست خالية . وذلك لأنه ، على سبيل المثال ، $\theta \in E_n$ من أجل كل عدد n ، وبالإضافة إلى ذلك فإن كل عنصر x و $x \neq \theta$ ينتمي إلى مجموعة واحدة من المجموعات E_n بغية التحقق من ذلك يكفي أن نأخذ بمثابة العدد n أصغر عدد صحيح يزيد عن $\frac{\| A x \|}{\| x \|}$. ولذلك يمكننا أن نكتب

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

وبما أن الفضاء E_x تام فإنه لايمكن أن يكون اجتماعاً عدوداً (قابلاً للعد) لمجموعات غيركثيفة في أي مكان (انظر المبرهنة (٣) من الفقرة ٦ من الفصل الأول) وبالتالي فإن واحدة من المجموعات E_{n_0} (تكون كثيفة في كل مكان في E_x). بالتالي توجد كرة $S (x_0 , r)$ تكون فيها $S (x_0 , r) \cap E_{n_0}$ كثيفة في كل مكان .

لنستعرض الكرة $\overline{S} (x_1 , r_1)$ الواقعة كلياً داخل $S (x_0 , r)$ والتي من أجلها $x_1 \in E_{n_0}$. ولنأخذ أي عنصر x نظيمه يساوي r_1 : $\| x \| = r_1$ عندئذ ينتمي العنصر $(x_1 + x)$ إلى $\overline{S} (x_1 , r_1)$ وذلك لأن

$$\| x_1 + x - x_1 \| = r_1$$

بما أن $\overline{E}_{n_0} \supset \overline{S} (x_1 , r_1)$ فإنه توجد متتالية من العناصر مثل $\{ z_k \}$ من $\overline{S} (x_1 , r_1) \cap E_{n_0}$ وبحيث إن $z_k \to x_1 + x$ عندما $k \to \infty$ (هذه المتتالية

يمكن أن تكون توقفية إذا كان $(x_1 + x) \ni E_{n_0}$ وبالتالي يكون لدينا

$$x_k = z_k - x_1 \to x$$

وفقاً لذلك يمكننا أن نعتبر أن

$$\frac{r_1}{2} \leq \| x_k \|$$

وذلك لأن $x_k \to x$ و $\| x \| = r_1$ وبالإضافة إلى ذلك فإن $\| x_k \| \leq r_1$ بما أن z_k و x_1 تنتمي إلى E_{n_0} فإن

$$\| Ax_k \| = \| A z_k - Ax_1 \| \leq \| Az_k \| + \| Ax_1 \| \leq$$
$$\leq n_0 \left(\| z_k \| + \| x_1 \| \right)$$

وبالتالي فإن

$$\| z_k \| + \| x_k + x_1 \| \leq \| x_k \| + \| x_1 \| \leq r_1 + \| x_1 \|$$

ولذلك فإن

$$\| A x_k \| \leq n_0 \left(r_1 + 2 \| x_1 \| \right) \leq \frac{2n_0 \left(r_1 + 2 \| x_1 \| \right)}{r_1} \| x_k \|$$

ليكن n أصغر عدد صحيح يزيد عن

$$\frac{2 n_0 \left(r_1 + 2 \| x_1 \| \right)}{r_1}$$

عندئذ يكون

$$\| A x_k \| \leq n \| x_k \|$$

ومنه ينتج أن جميع $x_k \ni E_n$.

هكذا ، فإن أي عنصر x ونظيمه يساوي r_1 يمكن تقريبه بعناصر من E_n .

لنفرض الآن أن x عنصر ما من E_x ، ولنستعرض العنصر

$$\xi = r_1 \frac{x}{\| x_1 \|}$$

فيكون

$$\| \xi \| = r_1$$

ووفقاً لما برهنا توجد متتالية $\| \xi_k \| \supset E_n$ متقاربة إلى ξ . وعندئذ نجد أن

$$x_k = \xi_k \frac{\| x \|}{r_1} \to x$$

$$\| A x_k \| = \frac{\| x \|}{r} \| A \xi_k \| \le \frac{\| x \|}{r_1} n \| \xi_k \| = n \| x_k \|$$

ومن هذا ينتج أن $x_k \ni E_n$. وهكذا فإن E_n كثيفة في كل مكان في E_x .

مبرهنة (٤) (باناخ) . ليكن A مؤثراً خطياً ومحدوداً ومعرفاً على فضاء باناخ E_x ويطبقه على فضاء باناخ E_y (غامراً و متبايناً) ، عندئذ يوجد مؤثر خطي ومحدود A^{-1} مقلوب للمؤثر A ويطبق E_y على E_x .

البرهان . لإثبات المبرهنة يلزمنا فقط إثبات أن A^{-1} مؤثر محدود . استناداً للتوطئة أعلاه يمكننا تمثيل E_y على الشكل

$$E_y = \bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k$$

حيث Y_k مجموعة العناصر $y \ni E_y$ والتي من أجلها

$$\| A^{-1} y \| \le k \| y \|$$

وحيث إن واحدة على الأقل من المجموعات Y_k كثيفة في كـــل مكـــان فـــي E_y . ولنفرض أن هذه المجموعة هي Y_n .

لنأخذ عنصراً ما $y \ni E_y$ ، ولنفرض أن $\| y \| \le 1$. عندئذ نجد عنـــصراً مثل $y_1 \ni Y_n$ وبحيث إن

$$\| y - y_1 \| \le \frac{1}{2} \qquad , \qquad \| y_1 \| \le 1$$

(هذا الأمر يمكن تحقيقه وذلك لأن $\overline{S}(0,1) \cap Y_n$ كثيفة في $\overline{S}(0,1)$ و $y \ni \overline{S}(0,1)$) ومن ثم نجد عنصراً مثل $y_2 \ni Y_n$ وبحيث إن

$$\| (y - y_1) - y_2 \| \le \frac{1}{2^2} \qquad , \qquad \| y_2 \| \le \frac{1}{2}$$

بالاستمرار على هذا النحو نجد عنصراً مثل $y_k \ni Y_n$ وبحيث إن

$$\| y - (y_1 + y_2 + \ldots + y_k) \| \le \frac{1}{2^k} \qquad , \qquad \| y_k \| \le \frac{1}{2^{k-1}}$$

وبذلك نجد أن

$$y = \lim_{k} \sum_{i=1}^{k} y_i$$

لنضع $x_k = A^{-1} y_k$ ، عندئذ يكون

$$\| x_k \| \leq n \| y_k \| \leq \frac{n\, l}{2^{k-1}}$$

إن المتتالية $\{ S_k \}$ حيث : $S_k = \sum_{i=1}^{n} x_i$ تتقارب عندما $k \to \infty$ إلى نهايـة ما $x \ni E_x$ وذلك لأن

$$\| S_{k+p} - S_k \| = \left\| \sum_{i=k+1}^{k+p} x_i \right\| < \frac{nl}{2^{k-1}}$$

وأن E_x فضاء تام . وبالتالي فإن

$$x = \lim_{k} \sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

وأن

$$A\, x = A \left(\lim_{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \right) = \lim_{k} \sum_{i=1}^{k} A x_i = \lim_{k} \sum_{i=1}^{k} y_i = y$$

ومنه نجد

$$\| A^{-1} y \| = \| x \| = \lim_{k} \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i \right\| \leq \lim_{k} \sum_{i=1}^{k} \| x_i \| \leq$$

$$\leq \sum_{i+1}^{\infty} \frac{n\, l}{2^{i-1}} = 2nl = 2n \| y \|$$

وبما أن y عنصر كيفي من E_y ، فإن محدودية المؤثر A^{-1} قد أثبتت .

كنا قد ذكرنا أنه من الممكن أن يكون مقلوب مؤثر خطي ومحدود مؤثراً خطياً ، إلا أنه غير معرف على كل الفضاء E_y ، وإنما على متنوعة خطية ، كما أنـــه غيــر محدود على تلك المتنوعة الخطية ، وبالمثل فإنه من الممكن أن يكون مقلــوب مــؤثر خطي غير محدود ومعرف على متنوعة خطية كثيفة في كل مكان في E_y مؤثراً خطياً ومحدوداً ومعرفاً على E_y . سنورد مثالين بسيطين دون الخوض في التفاصيل والتي تخرج عن إطار هذا الكتاب .

مثال (١) . ليكن $E = C[0,1]$ وليكن المؤثر A معرفاً بالعلاقة

$$Ax = \int_0^t x(\tau)\, d\tau$$

عندئذ يكون المؤثر A خطياً ومحدوداً ، إلا أن المؤثر

$$A^{-1} y = \frac{d}{dt} y(t)$$

خطي وغير ومحدود ومعرف على المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع القابلة للاشتقاق والتي مشتقاتها مستمرة و التي من أجلها $y(0) = 0$.

مثال (٢) . ليكن $E = C[0,1]$ وليكن المؤثر A معرفاً بالعلاقة

$$Ax = \frac{d}{dt}\left\{ p(t) \frac{dx}{dt} \right\} + q(t)\, x$$

إن هذا المؤثر هو مؤثر شتورم – ليوفيل وهو غير محدود ومعرف على المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع القابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية والتي مشتقها الثاني مستمر والمحققة للشروط

$$x(0) = x(1) = 0$$

إن مقلوب هذا المؤثر هو المؤثر

$$A^{-1} y = \int_0^1 G(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

حيث إن $G(t,\tau)$ هو تابع غرين ، وهذا المؤثر خطي ومحدود ومعرف على الفضاء $C[0,1]$ بأكمله .

المؤثرات المتعلقة بوسيط . *Operators Depending on a Parameter*

غالباً ، وفي كثير من المواضيع الرياضية ، تواجهنا معادلات من الشكل

$$Ax - \lambda x = y \qquad (3.4.9)$$

أو

$$(A - \lambda I)\, x = y$$

حيث A مؤثر خطي و λ وسيط ما . إلى جانب $(3.4.9)$ تدرس المعادلة

$$Ax - \lambda x = 0 \qquad (3.4.10)$$

أو :

$$(A - \lambda I)\, x = 0$$

والتي تسمى بالمعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة $(3 . 4 . 9)$. إن للمعادلة $(3 . 4 . 10)$ يوجد بشكل دائم حل هو $x = \theta$ ويسمى هذا الحل بالحل التافه .

لنفرض أنه من أجل قيمة ما لـ λ يوجد للمؤثر $(A - \lambda I)$ مقلوب

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. يسمى المؤثر R_λ **بالمؤثر الحال (المفكك)** *(Resolvent operator)* للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ ، عندئذ من أجل تلك القيمة لـ λ يوجد للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ ومن أجل أي عنصر y حل وحيد

$$x = R_\lambda y$$

وفي هذه الحالة تقبل المعادلة $(3 . 4 . 10)$ حلاً لها فقط الحل التافه $x = \theta$. تسمى تلك القيم لـ λ والتي من أجلها يوجد حل وحيد للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ من أجل أي عنصر y ومن أجلها أيضاً يكون R_λ مؤثراً محدوداً **بالقيم النظامية** للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ أو للمؤثر A . و إذا وجد للمعادلة $(3 . 4 . 10)$ من أجل قيمة معطاة λ حل غير الحل التافه ، فإن تلك القيمة لـ λ تسمى **بقيمة خاصة (أو بعدد مميز)** للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ أو للمؤثر A ويسمى الحل غير التافه حلاً **خاصاً أو شعاعاً خاصاً** للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ أو للمؤثر A موافقاً للقيمة الخاصة λ .

إذا كانت λ قيمة خاصة للمؤثر A وكان للمعادلة $(3 . 4 . 9)$ حل من أجل y ما فإن ذلك الحل لن يكون وحيداً ، وذلك لأنه إذا كان x_0 حلاً للمعادلة $(3 . 4 . 9)$

$$A x_0 - \lambda x_0 = y$$

وكان e عنصراً خاصاً للمؤثر A موافقاً لتلك القيمة لـ λ :

$$A e - \lambda e = 0$$

فإن

$$A(x_0 + e) - \lambda(x_0 + e) = y$$

أي إن $(x_0 + e)$ حل للمعادلة $(3 . 4 . 9)$.

تسمى مجموعة جميع القيم λ غير النظامية **بطيف المؤثر** A . في حالة خاصة تنتمي جميع القيم الخاصة إلى الطيف . من المبرهنتين (٢) و (٣) من هذه الفقرة ينتج أن إذا كانت λ بحيث إن $\frac{1}{|\lambda|}\|A\| = q < 1$ ، فإنه للمؤثر $A - \lambda I$ يوجد مقلوب

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \ldots \right)$$

وأنه إذا كانت λ قيمة نظامية فإن $\lambda + \Delta\lambda$ من أجل

$$|\Delta\lambda| < \| (A - \lambda I)^{-1} \|^{-1}$$

تكون أيضاً قيمة نظامية . من ذلك ينتج أن مجموعة القيم النظامية مجموعة مفتوحة وهذا يعني أن الطيف مغلق .

مثال . لنستعرض في الفضاء $C[0,1]$ المعادلة التكاملية

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds \qquad (3.4.11)$$

حيث $K(t,s)$ تابع مستمر في المربع $0 \le t, s \le 1$. لنضع $\frac{1}{\lambda} = \mu$ ولنكتب هذه المعادلة على شكل المعادلة المؤثرية المعروضة أعلاه ، فنجد

$$\int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds - \mu x(t) = \mu y(t)$$

ولنرمز بـ

$$Ax = \int_0^1 k(t,s)\, x(s)\, ds$$

فنجد أن

$$Ax - \mu x = -\mu y$$

كما أن

$$R_\mu = R_{\frac{1}{\lambda}} = -\frac{1}{\mu}\left(I + \frac{A}{\mu} + \frac{A^2}{\mu^2} + \ldots \right) = \lambda\left(I + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \ldots \right)$$

لنلاحظ أن

$$A^p z = \int_0^1 k_p(t,s)\, z(s)\, ds$$

حيث $K_p(t,s)$ هو التكرير $P-$ ($Iteration - p$) للنواة $K(t,s)$. بالتالي يكون لدينا

$$R_{\frac{1}{\lambda}}(z) = -\lambda z(t) - \lambda^2 \int_0^1 K(t,s)\, z(s)\, ds - \lambda^3 \int_0^1 K(t,s)\, z(s)\, ds - \ldots$$

ولذلك فإن حل المعادلة (3 . 4 . 11) يكون

$$x(t) = R_{\frac{1}{\lambda}}(-\frac{1}{\lambda} y) =$$

$$= y(t)\, \lambda \int_0^1 K(t,s)\, y(s)\, ds + \lambda^2 \int_0^1 K(t,s)\, y(s)\, ds + \ldots$$

بذلك نحصل على الحل نفسه المعروف في نظرية المعادلات التكاملية ، وعلى وجه الدقة

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_0^1 R(t,s,y)\; y(s)\, ds$$

حيث $R(t, s, y)$ مفكك النواة $(resolvent)$ $K(t, s)$ (أو المؤثر الحال للنواة) :

$$R(t,s,\lambda) = K(t,s) + \lambda K_2(t,s) + \lambda^2 K_3(t,s) + \ldots$$

إن المعادلات المستنتجة من أجل المؤثر المفكك $R(t, s, \lambda)$ في نظرية المعادلات التكاملية هي في الواقع الشروط كي يكون $R_{\frac{1}{\lambda}}$ مقلوباً يمينياً و يسارياً للمؤثر $(A - \lambda I)$.

§ ٥- المؤثرات المغلقة و نظرية البيان المغلق

Closed Operatos and Closed Graph Theorem

من المؤكد أن المنحني البياني لتابع لمتحول حقيقي $f(x)$ هو الأكثر شهرة ، إنه تماماً شكل في المستوي ، يمثل مجموعة الأزواج المرتبة $\langle x, f(x) \rangle$ حيث إن x تمسح جميع نقاط ساحة تعريف التابع f ، ويمكننا القول إن المنحني البياني للتابع f هو مجموعة الأزواج المرتبة المنسوبة للتابع . على أية حال ، إننا نريد هنا تعميم مفهوم المنحني البياني لتابع لمتحول حقيقي . لتكن X و Y مجموعتين ما ، وليكن A تطبيقاً من مجموعة جزئية $X \supset D$ إلى المجموعة Y . تسمى مجموعة الأزواج

المرتبة

$$Gr\ (A) = \{ \langle x, A(x) \rangle \mid x \in D \}$$

ببيان التطبيق A (*Graph*) . إن اهتمامنا سينصب على الحالة التي يكون فيها كل من X و Y فضاءً خطياً منظماً و A مؤثراً خطياً و D متنوعة خطية من X . وجدنا أن المجموع المباشر لفضاءين خطيين X و Y يكون فضاءً خطياً إذا عرفنا فيه عملية جمع للعناصر وضرب بمقدار سلمي على النحو الآتي

$$\langle x_1 , y_1 \rangle + \langle x_2 , y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2 \ ,\ y_1 + y_2 \rangle$$
$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, \alpha y \rangle$$

حيث $x, x_1, x_2 \in X$ و $y, y_1, y_2 \in Y$. وكنا قد رمزنا للفضاء الناتج بـ $X \oplus Y$.

بسهولة يمكن التأكد من أنه إذا كان المؤثر A خطياً فإن $Gr\ (A)$ تكون متنوعة خطية و بالعكس . أي إن الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر A خطياً هو أن تكون $Gr(A)$ متنوعة خطية في $X \oplus Y$.

وبفرض أن X و Y فضاءان خطيان منظمان ، فإنه يمكن تعريف نظيم في $X \oplus Y$ بإحدى العلاقات الآتية

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \| \langle x , y \rangle \| = \| x \| + \| y \| \\ (2) & \| \langle x , y \rangle \| = \left(\| x \|^p + \| y \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1) \\ (3) & \| \langle x , y \rangle \| = \max \left(\| x \| , \| y \| \right) \end{array}\right\} \quad (3.5.1)$$

ويمكن البرهان على أن هذه النظائم متكافئة .

وكملاحظة أخيرة هنا نذكر أنه إذا كان X و Y فضاءي باناخ فإن $X \oplus Y$ يكون فضاء باناخ أيضاً . في الواقع ، لتكن $\{ z_n \}$ متتالية أساسية في $X \oplus Y$ حيث $z_n = \langle x_n , y_n \rangle$ ، عندئذ من أجل كل عدد موجب ε يوجد عدد N بحيث إنه : (سنستخدم العلاقة الأولى من ($3.5.1$))

$$\| z_n - z_m \| = \| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \| < \varepsilon \quad ; \quad (n, m > N) \quad (3.5.2)$$

وبالتالي فإن $\{y_n\}$ و $\{x_n\}$ متتاليتان أساسيتان في X و Y على الترتيب . وبالتالي فهما

متقاربتان إلى x و y مثلاً ($x_n \to x$, $y_n \to y$) لنضع $z = \langle x , y \rangle$. إن ذلك يؤدي إلى أن $z_n \to z$ وذلك لأنه بالانتقال إلى النهاية في (2 . 5 . 3) عندما $m \to \infty$ نجد :

$$\| z_n - z \| = \| x_n - x \| + \| y_n - y \| \le \varepsilon \quad ; \quad (\forall n > N)$$

وبما أن $\{z_n\}$ متتالية أساسية ما فإن $X \oplus Y$ تام .

ليكن X و Y فضاءين خطيين منظمين و D متنوعة خطية من X وليكن A مؤثراً خطياً $A : D(A) \to Y$.

تعريف (١) . نقول إن المؤثر A **مغلق** إذا كانت المتتالية $\{A\ x_n\}$ (من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ من نقاط $D(A)$ متقاربة إلى $x \in X$) متقاربة في Y إلى $y \in Y$ ($A x_n \to y$) وإذا تحقق الشرطان

$$x \in D(A) \quad \text{و} \quad y = A x \ .$$

كدافع لاستخدام كلمة مغلق في وصف المؤثر A سنبين أن المؤثر الخطي A يكون مغلقاً إذا وفقط إذا كان بيانه $Gr(A)$ فضاءً جزئياً في $X \oplus Y$. لنفرض أن المؤثر A مغلق . بما أن A خطي فإن $Gr(A)$ متنوعة خطية في $X \oplus Y$ ولنبرهن على أنها مغلقة . لنبرهن على أن كل نقطة تجمع لـ $Gr(A)$ هي نقطة من $Gr(A)$.
لتكن $\langle x, y\rangle$ نقطة تجمع لـ $Gr(A)$ ، عندئذ توجد متتالية $\langle x_n, A\,x_n\rangle$ من $Gr(A)$ متقاربة إلى $\langle x, y\rangle$ وبحيث إن $x_n \in D(A)$. إن ذلك يعني أن

$$\| \langle x_n , A\,x_n\rangle - \langle x, y\rangle \| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

وبما أن

$$\begin{aligned} \| \langle x_n, Ax_n\rangle - \langle x, y\rangle \| &= \| \langle x_n - x, A\,x_n - y\rangle \| = \\ &= \| x_n - x \| + \| A\,x_n - y \| \to 0 \quad ; \quad n \to \infty \end{aligned}$$

فإن ذلك يقتضي

$$x_n \to x \quad , \quad A\,x_n \to y$$

وبما أن A مغلق فإن $x \in D(A)$ و أن $y = A\,x$ وبالتالي فإن

$$\langle x, y\rangle = \langle x , A\,x \rangle \in Gr(A)$$

أي إن $Gr(A)$ مغلق .

بالعكس . لنفرض أن $Gr(A)$ مغلق وأن

$$x_n \to x \qquad , \qquad x_n \in D(A) \quad ; \quad \forall n$$
$$A x_n \to y$$

بالتالي يكون علينا أن نبــرهن علـــى أن $x \in D(A)$ وأن $y = A x$. إن الفــرض يؤدي إلى أن

$$\langle x_n , A x_n \rangle \to \langle x, y \rangle \in \overline{Gr(A)}$$

وبما أن $Gr(A) = \overline{Gr(A)}$ فإن $\langle x , y \rangle \in Gr(A)$ واستناداً لتعريف المجموعة $Gr(A)$ نجد أن

$$x \in D(A) \qquad , \qquad y = A x$$

وبالتالي فإن A مغلق .

هكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة الآتية

مبرهنة (١) . الشرط اللازم والكافي كي يكون المؤثر A مغلقــاً هــو أن يكون بيانه $Gr(A)$ مغلقاً .

مثال (مؤثر مغلق إلا أنه غير محــدود) . لــيكن $X = Y = C[0, 1]$ ولــتكن D مجموعـــة التوابـــع القابلـــة للاشـــتقاق والتـــي مـــشتقاتها مـــستمرة ($C[0, 1] \supset D$) وليكن A مؤثر الإشتقاق . وجدنا أن المؤثر A خطـــي إلا أنـــه غير محدود ولنبرهن على أنه مغلق .

لتكن $\{ x_n \}$ متتالية من D ومتقاربة إلى x وأن $A x_n \to y$ بما أن $A x_n \to y$ فإنهاتعني أن $x'_n \to y$ واستناداً إلى نظرية التوابع نجد أن متتالية المشتقات لمتتالية معلومة هي متتالية متقاربة بانتظام أيضاً (التقارب في $C^{(1)}[0, 1]$ تقارب منتظم) وبالتالي فإن مشتق النهاية موجود ويساوي نهاية متتالية المشتقات أي إن

$$x \in D(A) \qquad and \qquad A x = y$$

حقيقة أن x' تابع مستمر تنتج من أنه نهاية لمتتالية من التوابع المــستمرة . متقاربـــة بانتظام وهذا بدوره تماماً يعني أن A مؤثر مغلق .

لنبحث متى يكون المؤثر المحدود مغلقاً ؟ من الواضح أنه إذا كــان A مــؤثراً خطياً ومحدوداً وبحيث إن

$$X \supset D \xrightarrow{A} Y$$

و إذا كانت $D\ (A)$ فضاءً جزئياً من X وكانت $\{\ x_n\ \}$ من $D\ (A)$ متقاربة إلــى x وبحيث إن المتتالية $\{\ A\ x_n\ \}$ متقاربة إلى y

$$A\ x_n \to y$$

فإن x نهاية المتتالية $\{\ x_n\ \}$ تنتمي إلى $D\ (A)$ ($D\ (\ A\ )$ مغلقة) ، وتبعاً لاستمرار المؤثر A فإن $A\ x_n \to A\ x$ وهذا يؤدي إلى أن A مغلق . بذلك نكــون قــد أثبتنــا المبرهنة الآتية :

مبرهنة (٢) . إذا كان A مؤثراً خطياً ومحدوداً

$$A : D\ (\ A\ ) \to Y$$

وكانت $D\ (\ A\ )$ فضاءً جزئياً في X فإن A مغلق .

نتيجة . إذا كان A مؤثراً خطياً بحيث إن

$$A\ :\ X \to Y$$

وكان A مستمراً فإنه يكون مغلقاً .

مبرهنة (٣) . إذا كان A مؤثراً خطياً ومغلقاً ، $A : D\ (\ A\ ) \to Y$ وكان مقلوبه A^{-1} موجوداً فإنه يكون مغلقاً .

البرهــان . بمــا أن المــؤثر A مغلــق ، فــإن بيانــه $Gr\ (\ A\ )$ مغلــق (المبرهنة (١)) :

$$Gr\ (A) = \Big\{ \big\langle\ x\ ,\ Ax\ \big\rangle \Big|\ x \in D\ \ (A)\ \Big\}$$

بفرض أن $R\ (\ A\ )$ هي مجموعة قيم المؤثر A نجد أنــه مــن أجــل كــل عنــصر $y \in R\ (\ y\ )$ يوجــد عنــصر وحيــد $x \in D\ (\ A\ )$ وبحيــث إن $y = A\ x$ أو $x = A^{-1}\ y$ وذلك نتيجة وجود المؤثر A^{-1} . وفقاً لذلك يمكننا كتابة بيان المؤثر A الشكل :

$$Gr\ \ (A)\ \ =\ \ \Big\{ \big\langle A^{-1} y\ ,\ y \big\rangle\ \Big|\ \ y \in R\ \ (A)\ \Big\} \qquad (\ 3.5.2\ )$$

لنستعرض الآن التطبيق

$$X \oplus Y\ \to\ Y \oplus X$$
$$\langle x, y \rangle\ \to\ \langle y, x \rangle$$

من الواضح أن هذا التطبيق ايزومتـــري ، وبمـــا أن التطبيـــق الأيزومتـــري ينقـــل المجموعات المغلقة إلى مجموعات مغلقة ، فإن صورة المجموعة المغلقة (2 . 5 . 3) بواسطة ذلك التطبيق تكون المجموعة المغلقة

$$\left\{ \left\langle y \ , A^{-1}y \right\rangle \mid y \in R\ (A) \right\}$$

وما هذه المجموعة إلا بيان المؤثر A^{-1} . أي إن

$$Gr\,(A^{-1}) = \left\{ \left\langle y \ , A^{-1}y \right\rangle \mid y \in R\ (A) \right\}$$

مغلق .

مبرهنة (٤) . إذا كان المؤثر A

$$A \ : \ D\,(A) \to Y$$

خطياً ومحدوداً ومغلقاً وكان Y فضاء باناخ فإن $D\,(A)$ يكون فضاءً جزئياً في X .

البرهان . للبرهان على أن $D\,(A)$ مغلق علينا أن نبين بأن أية نقطة تجمع لنقاط $D\,(A)$ هي نقطة من $D\,(A)$. لتكن x نقطة تجمع ما لـــ $D\,(A)$ ، عندئذ توجد متتالية من نقاط $D\,(A)$ مثل $\{x_n\}$ بحيث إن $x_n \to x$ وبما أن

$$\| Ax_n - Ax_m \| \le \| A \| \ \| x_n - x_m \| \ \to 0 \qquad , \ \ n,m \to \infty$$

فإن ذلك يعني أن المتتالية $\{Ax_n\}$ هي متتالية أساسية في Y ، وبما أن Y فضاء باناخ فإن $\{Ax_n\}$ تتقارب إلى عنصر مثل $y \in Y$. أي إن

$$A \ x_n \to y$$

وبما أن المؤثر y مغلق فـــإن $x \in D\,(A)$ و $A \ x = y$ وبالتـــالي فـــإن $D\,(A)$ تحتوي على جميع نقاط تجمعها وهو ما يثبت أن $D\,(A)$ فضاء جزئي في X .

مبرهنة (٥) (مبرهنة البيان المغلق) . ليكن A مؤثراً خطياً $A : X \to Y$ حيث إن X و Y فضاءا باناخ . إذا كان A مغلقاً فإنه يكون محدوداً .

البرهان . بما أن كلاً من X و Y فضاء باناخ فإن $X \oplus Y$ فـــضاء بانـــاخ وبما أن A مؤثر مغلق فإن $Gr\,(A)$ مغلق في $X \oplus Y$. ومن ناحية ثانية ، وبمـــا أن المجموعة الجزئية المغلقة من فضاء متري هي مجموعة تامة كذلك فإن $Gr\,(A)$ هو فضاء باناخ أيضاً .

لنعرف مؤثراً B بالعلاقة $(B : Gr\,(A) \to X)$:

$$B \langle x , Ax \rangle = x \qquad (3.5.3)$$

من الواضح أن B مؤثر خطي ، كما أنه محدود

$$\| B \langle x,Ax \rangle \| = \| x \| \leq \| x \| + \| Ax \| = \| \langle x, Ax \rangle \|$$

كما أنه يطبق $Gr(A)$ على X : $B(Gr(A)) = X$ ولنبين أنه تطبيق متباين .

بغية ذلك سنبين أن $\langle 0,0 \rangle$ هو العنصر الوحيد الذي صورته وفق B هي 0 .

لنفرض أن

$$B \langle x , Ax \rangle = x = 0$$

إن $x = 0$ يؤدي إلى أن $Ax = 0$ وبالتالي فإن

$$\langle x , Ax \rangle = \langle 0 , 0 \rangle$$

واستناداً للمبرهنة (٤) من الفقرة السابقة يكون المؤثر B^{-1} موجوداً ومحدوداً . لتكن الآن $\{x_n\}$ متتالية متقاربة إلى x ولنبرهن على أن المتتالية $\{Ax_n\}$ متقاربة إلى Ax . بما أن B^{-1} مؤثر مستمر فإنه يمكننا أن نكتب

$$B^{-1} x_n \to B^{-1} x$$

أو أن

$$\langle x_n , Ax_n \rangle \to \langle x , Ax \rangle$$

وبالتالي فإن

$$\langle x_n - x , Ax_n - Ax \rangle \to \langle 0 , 0 \rangle$$

أي إن

$$A x_n \to A x$$

وهذا يعني أن المؤثر مستمر وبالتالي فهو محدود . وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

١ – ليكن X و Y فضاءين خطيين و $A : X \to Y$ مؤثراً خطياً ولتكن جملة العناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ منتمية إلى $D (A)$ ومرتبطة خطياً . برهن أن الجملة : $A x_1 , A x_2 , \ldots , A x_n$ مرتبطة خطياً .

٢ – إذا كانت جملة العناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ المنتمية إلى $D (A)$ في المسألة (١) مستقلة خطياً فهل تكون مجموعة العناصر $A x_1 , A x_2 , \ldots , A x_n$ مستقلة خطياً ؟

٣ – ليكن X و Y فضاءين خطيين و $A : X \to Y$ مؤثراً خطياً . برهن أن صورة أية مجموعة محدبة في $D (A)$ هي مجموعة محدبة في الفضاء Y .

٤ – إذا كان X فضاءً خطياً منظماً ولنفرض أنه قد عرف على X نظيمين $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_2$ متكافئين ولنفرض أن $A : X \to Y$ مؤثر خطي . برهن أن هذا المؤثر يكون في الوقت نفسه إما محدوداً أو غير محدود بالنسبة للنظيمين المذكورين .

٥ – احسب نظيم المؤثر $A : l_1 \to l_1$ المعرف بالعلاقة :

$Ax = \{ 3\xi_1 , \xi_2 + \xi_3 , \xi_3 , \xi_4 , \xi_5 , \ldots \}$ حيث إن $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots \}$.

٦ – احسب نظيم المؤثر $A : l_p \to l_p$ المعرف بالعلاقة

$$Ax = \{ \xi_1 , \xi_3 , \xi_5 , \xi_7 , \ldots , \xi_{2n-1} , \ldots \}$$

حيث إن

$$x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , \ldots \}$$

٧ – احسب نظيم المؤثر $A : C [0 , 1] \to C [0 , 1]$ المعرف بالعلاقة :

$$A x(t) = \int_0^1 (t+s) \; x(s) \, ds$$

٨ – ليكن المؤثر $A : C [0 , 1] \to C [0 , 1]$ معرفاً بالعلاقة :

$$A x = \int_0^1 (t^2 + s^2)\ x(s) ds$$

برهن أ ن هذا المؤثر خطي ومحدود واحسب نظيمه .

٩ – احسب نظيم المؤثر A المعرف في الفضاء $L^p[0,1]$ بالعلاقة

$$a) \quad A\varphi(t) = \varphi(\tfrac{t}{2})$$

$$b) \quad A\varphi(t) = \varphi(\tfrac{2t+1}{3})$$

١٠ – ليكن $k(t, \tau)$ تابعاً من الفضاء $C([a, b] \times [a, b])$ وليكن $0 < \alpha < 1$ برهن أن المؤثر $A : C[a, b] \to C[a, b]$ المعرف بالعلاقة

$$Ax(t) = \int_a^b \frac{k(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}} x(\tau)\ d\tau \quad ; \quad t \in [a,b]$$

هو مؤثر محدود .

١١ – أوجد نظيم المؤثر $A : R^n \to l_2$ المعرف بالعلاقة

$$A x = \{ \frac{\xi_1}{1}, \ldots, \frac{\xi_n}{1}, \ldots, \frac{\xi_1}{k}, \ldots, \frac{\xi_n}{k}, \ldots \}$$

حيث إن $x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \}$ عنصر من R^n .

١٢ – ليكن المؤثر $A : l_2 \to l_2$ معرفاً بالعلاقة

$$A x = \{ \lambda_1 \xi_1, \lambda_2 \xi_2, \ldots \}$$

حيث $x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \}$ عنصر من l_2 و $\lambda_n \in R$ و $(n \in N)$.
ما هو الشرط الذي ينبغي تحققه في المتتالية $\{\lambda_n\}$ كي تتطابق ساحة تعريف المؤثر $D(A)$ مع الفضاء l_2 ؟ وماهو الشرط الذي ينبغي فرضه على المتتالية $\{\lambda_n\}$ كي يكون المؤثر A محدوداً واحسب نظيمه في هذه الحالة .

١٣ – ليكن $E = C[0, +\infty)$ فضاء جميع التوابع المستمرة $x(t)$ على نصف المحور : $[0, +\infty)$ والتي من أجلها

$$\|x\| = \sup_{t \in [0, \infty)} |x(t)| < +\infty$$

هل المؤثر $A : E \to E$ المعرف بالعلاقة $A\ x(t) = t\, x(t)$ حيث $t \in [0, +\infty)$ محدود؟

١٤ – أورد مثالاً لفضاء خطي منظم E ومؤثرين A , B من $L(E,E)$ (فضاء المؤثرات الخطية المحدودة $E \to E$) يكون من أجلهما

$$\| AB \| < \| A \| \, \| B \|$$

١٥ – ليكن E فضاء باناخ وليكن L و M فضاءين جزئيين من E وبحيث إن $E = L \oplus M$. برهن أن المؤثرين $P_1 : E \to L , P_2 : E \to M$, والمعرفين بالعلاقتين

$$P_1 x = x_1 , \quad P_2 x = x_2 \quad (x = x_1 + x_2 , x \in E , x_1 \in L , x_2 \in M)$$

هما مؤثران خطيان محدودان ومن أجلهما يكون

$$P_i^2 = P_i \;\; (i = 1,2) \; , \; P_1 + P_2 = I \;\; , \;\; P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$$

١٦ – ليكن E فضاء باناخ وليكن $A \in L(E,E)$ ولتكن $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ ($\lambda_k \in R$) سلسلة صحيحة متقاربة على R . برهن أن نهاية المتتالية $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$ عندما $n \to \infty$ هي $\varphi(A)$ و $L(E,E)$.

ماهي الشروط التي يجب أن تتحقق بالمتتالية $\{ \lambda_k \}$ كي تتحقق العلاقة

$$\| \varphi(A) \| \le \varphi (\| A \|)$$

١٧ – ابحث في التقارب المنتظم والتقارب النقطي لمتتالية المؤثرات $\{ A_n \} \subset L(E,E)$ في الحالات الآتية

$$a) \; E = l_2 \; ; \; A_n x = \{ \frac{\xi_1}{n} , \ldots , \frac{\xi_k}{n} , \ldots \} \; ; \quad x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_k , \ldots \} \in l_2$$

$$b) \; E = l_2 \; ; \; A_n x = \{ \xi_1 , \ldots , \xi_n , 0 , 0 , \ldots \} \; ; \quad x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_k , \ldots \} \in l_2$$

$$c) \; E = C[0,1] \; ; \; A_n x = t^n (1 - t) \; x(t) \; ; \; t \in [0,1]$$

$$d) \; E = C[0,1] \; ; \; A_n x = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau) \, d\tau \; ; \; t \in [0,1]$$

$e)\ E = C[0,1]\ ;\ A_n\, x = nt^n\ x(t) \qquad ;\ t \in [0,1]$

١٨ – ليكن المؤثر $A : C[0,1] \to C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة

$$Ax(t) = x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

$$t \in [0;1]\ ,\ \lambda \in R \setminus \{0\}$$

حيث $k(t,\tau) = \psi(t)\,\gamma(\tau)$ والتابعان $\psi(t)$ و $\gamma(t)$ مستمران على $[0;1]$ ولا يطابقان الصفر و $\int_0^1 \psi(t)\gamma(t)\,dt \neq \frac{1}{\lambda}$. برهن أن A عكوس – مستمر (*) ثم أوجد A^{-1} .

١٩ – تأكد من وجود واستمرار مقلوب المؤثر $A : l_2 \to l_2$ ، إذا كان :

$a)\ Ax = \{\xi_3, \xi_1, \xi_4, \xi_5, \ldots\}$

$b)\ Ax = \{\xi_1 + 2\xi_2, \xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots\}$

$c)\ Ax = \{\xi_2 - \xi_1, \xi_2 + \xi_3, 2\xi_2 - 2\xi_1, \xi_4, \xi_5, \ldots\}$

حيث $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots\} = x \ni l_2$.

٢٠– ليكن A مؤثراً في الفضاء $C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau \qquad t \in [0;1]$$

برهن على أنه لايوجد مقلوب محدود لهذا المؤثر .

٢١ – ليكن المؤثر $A: C[0,1] \to C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة

$$Ax(t) = \frac{x(t)}{t}$$

ولتكن ساحة تعريفه :

$D(A) = \{ x(t) \in C[0,1] : \lim_{t \to 0} t^{-1}\, x(t)$ موجودة $\}$

(*) نقول إن المؤثر $A : E_1 \to E_2$ عكوس – مستمر إذا كان $R(A) = E_2$ وكان لـ A مقلوب وكان $A^{-1} \in L(E_1, E_2)$ (أي أن A^{-1} خطي ومحدود) .

برهن أن A مغلق .

٢٢ – ليكن المؤثر $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ معرفاً بالعلاقة :

$$Ax(t) = \frac{dx}{dt}$$

ولتكن ساحة تعرفه $D(A)$ هي المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع $x(t)$ القابلة للاشتقاق – مستمرة على المجال $[0, 1]$ والمحققة للشروط $x(0) = x(1) = 0$

برهن أن A مغلق .

٢٣ – لنستعرض المؤثر $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$ المعرف بالعلاقة :

$$A\,x(t) = \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} + x(t)$$

والذي ساحة تعريفه $D(A)$ هي المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع $x(t)$ القابلة للاشتقاق من المرتبة الثانية – مستمرة على المجال $[0, 1]$ والمحققة للشروط $x(0) = x'(0) = 0$. برهن أن A مؤثر مغلق وغير محدود .

٢٤ – ليكن A مؤثراً $(A : X \to Y)$ خطياً ومغلقاً . هل أن

a) $D(A)$ مغلقة في X ؟ .

b) $R(A)$ مغلقة في Y ؟ .

الفصل الرابع

الداليات الخطية

Linear Functionals

ذكرنا بأنه إذا كانت قيم مؤثر ما هي أعداد حقيقية فإن المؤثر يــسمى داليــاً .

يسمى الدالي $f(x)$ المعرف في فضاء خطي توبولوجي E خطياً [*] إذا كان :

$$1)\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad ; \quad (f \text{ جمعي})$$

$$2)\ f(x_n) \to f(x) \quad ; \quad (f \text{ مستمر في } x)$$

وذلك عندما $x_n \to x$ بمفهوم التقارب في الفضاء الخطي E .

بما أن مجموعة الأعداد الحقيقية R هي فضاء من النمط B (فضاء باناخ) ، فإنه من أجل الداليات الخطية تبقى التعاريف والمبرهنات الواردة ســابقاً فـــي المــؤثرات الخطية قائمة .

مبرهنة (1) . إذا كان الدالي الجمعي $f(x)$ والمعرف على الفضاء الخطي E مستمراً في نقطة واحدة من هذا الفضاء ، فإنه يكون مستمراً على E وبالتالي فهــو خطي .

مبرهنة (2) . الدالي الخطي متجانس .

مبرهنة (٣) . الشرط اللازم والكافي كي يكون الدالي الجمعي والمعرف على الفضاء الخطي المنظم E خطياً هو أن يكون محدوداً :

$$|f(x)| \le M \|x\|$$

يسمى أصغر الثوابت M والمحققة للمتراجحة بنظيم الدالي ونرمز له بــــ $\|f\|$.
وهكذا فإن :

$$|f(x)| \le \|f\| \, \|x\|$$

(*) يعرف الدالي f بأنه خطي أيضاً إذا كان ١) جمعياً ٢) متجانساً أي أن $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ مهما يكن العدد λ ومهما يكن العنصر $x \in E$

أخيراً فإن

$$\| f \| = \sup_{\| x \| \leq 1} | f(x) |$$

أو :

$$\| f \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{| f(x) |}{\| x \|}$$

مثال (١) . ليكن $E = L^p [0 , 1]$ ، عندئذ يكون :

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$$

دالياً خطياً .

في الواقع ، إن وجود معنى لـ $f(x)$ من أجل أي تابع $x \ni [0 , 1]$ L^p ينتج من متراجحة هولدر

$$\left| \int_0^1 x(t)\, dt \right| \leq \left(\int_0^1 | x(t) |^p\, dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 dt \right)^{1/q} = \| x \|$$

ومن هذه المتراجحة ينتج أن $f(x)$ محدود وأما كونه جمعياً فهو واضح .

مثال (٢) . ليكن $E = C[0 , 1]$ ، ولتكن t_0 نقطة مثبتة من المجال $[0 , 1]$ ، ولنضع :

$$f(x) = x(t_0)$$

من الواضح أن $f(x)$ جمعي ولنثبت أنه محدود وأن $\| f \| = 1$.

في الحقيقة إن :

$$| f(x) | = | x(t_o) | \leq \max_{0 \leq t \leq 1} | x(t) | = \| x \|$$

وهذا يؤدي إلى أن $\| f \| \leq 1$. من ناحية ثانية وباختيار $x(t) = 1$ يكون $\| x \| = 1$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن :

$$| f(x) | = 1 \quad ; \quad \| f \| \geq 1$$

وبالتالي فإن : $\| f \| = 1$

مثال (٣) . ليكن E فضاءً خطياً منظماً . إن النظيم :

$$\| . \| : E \to \mathbb{R}$$

المعرف على E هو دالي على E إلا أنه غير خطي ، لكونه غير جمعي .

مثال (٤) . ليكن $E=E_k$ الفضاء الإقليدي ذا الـ k بعداً . لنضع من أجل العنصر $x = \{ \xi_i \}$ من هذا الفضاء :

$$f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ . \ . \ . + c_k\xi_k$$

حيث $c_1 , c_2 , \ . \ . \ . \ , c_k$ ثوابت ما . إن جمعية الدالي $f(x)$ واضحة مجدداً . ولنفرض أن $\{ x_n \}$ متتالية من هذا الفضاء متقاربة إلى x . كما وجدنا أن التقارب في هذا الفضاء هو تقارب بالإحداثيات وهذا يعني أن $\xi_i^{(n)} \to \xi_i$ من أجل جميع $i = 1, 2, \ . \ . \ . , k$. وبالتالي فإن

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{k} c_i \, \xi_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \xi_i = f(x)$$

أي إن f دالي مستمر .

من الممكن إعطاء تأويل هندسي لنظيم الدالي الخطي . بما أن معادلة المستوي في الفضاء الإقليدي ذي الـ k بعداً من الشكل :

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ . \ . \ . + c_k\xi_k = c$$

فإنه يمكن كتابتها على الشكل :

$$f(x) = c$$

بالمثل نسمي مجموعة النقاط من فضاء خطي منظم E والمحققة للمساواة

$$f(x) = c$$

بفوق مستو (*hyperplane*) ، حيث f دالي معرف على E . من الطبيعي أن نسمي فوق المستويين :

$$f(x) = c_0 \qquad , \qquad f(x) = c_1$$

فوق مستويين متوازيين .

إن فوق المستوي $f(x) = c$ يقسم الفضاء إلى نصفين : مجموعة النقاط x التي من أجلها يكون $f(x) \leq c$ ومجموعة النقاط x التي يكون فيها $f(x) \geq c$. نسمي اصطلاحياً المجموعة الأولى بنصف الفضاء الواقع على يسار فوق المستوي $f(x) = c$ وتسمى الثانية بنصف الفضاء الواقع على يمين $f(x) = c$.

إن فوق المستوي $\|f\| = f(x)$ يتمتع بخاصة مميزة هي أن الكرة الواحدية $\|x\| \le 1$ تقع كلياً على يسار ذاك فوق المستوي (وذلك لأنه من أجل نقاط الكرة $\|x\| \le 1$ لدينا $\|f\| = f(x)$) . من ناحية ثانية إن أي فوق مستوي من فوق المستويات المتوازية $f(x) = \|f\| - \varepsilon$ لا يتمتع بتلك الخاصة . بشكل مماثل لنظرية الأجسام المحدبة في الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً نسمي فوق المستوي $\|f\| = f(x)$ بالمستوي الحامل (*supporting plane*) للكرة $1 \le \|x\|$.

نذكر الآن بعض المبرهنات المثبتة من أجل المؤثرات الخطية والمحققة من أجل الداليات .

مبرهنة (باناخ – شتينهاوس) . إذا كانت متتالية الداليات الخطية $\{ f_n(x) \}$ المعرفة على فضاء باناخ E محدودة في كل نقطة $x \ni E$ ، فإن متتالية النظائم $\{ \|f_n\| \}$ لتلك الداليات تكون أيضاً محدودة .

مبرهنة (١) . إذا كانت متتالية الداليات الخطية $\{ f_n(x) \}$ متقاربة في نفسها في كل نقطة من فضاء باناخ E ، فإنه يوجد دالي خطي مثل $f(x)$ بحيث أن :

$$f_n(x) \to f(x) \quad ; \quad \forall x \in E$$

مبرهنة (٢) . الشرط اللازم والكافي كي تتقارب متتالية الداليات الخطية $\{ f_n \}$ في كل نقطة x من فضاء باناخ إلى الدالي f_0 هو أن :

١) – تكون المتتالية $\{ \|f_n\| \}$ محدودة .

٢) – $f_n(x) \to f_0(x)$ من أجل أية نقطة x من مجموعة ما $M \subset E$ والتي التراكيب الخطية لعناصرها كثيفة في كل مكان في E .

مبرهنة (٣) . يمكن تمديد الدالي الخطي f_0 المعرف على متنوعة خطية L كثيفة في كل مكان في الفضاء المنظم E والمحدود عليها ، على الفضاء بأكمله دون تزايد في النظيم (مع الحفاظ على النظيم) وبشكل وحيد .

§ ١- . مبرهنة هان ـ باناخ ونتائجها
Hahn – Banach Theorem

تبين مبرهنة هان- باناخ إمكانية تمديد دالي خطي معرف بشكل أولي على متنوعة خطية L من فضاء خطي منظم E (ليس بالضرورة أن تكون L كثيفة في كل مكان في E) مع الحفاظ على النظيم .

مبرهنة (٤) (هان – باناخ [*]) . ليكن E فضاءً خطياً ولتكن L متنوعة خطية فيه ، وليكن $f(x)$ دالياً خطياً معرفاً على L ، عندئذ يمكن تمديد الدالي f على الفضاء E بأكمله مع الحفاظ على النظيم . بكلام آخر يمكن بناء دالي خطي $F(x)$ معرف على E وبحيث إن :

$$1)\quad F(x)=f(x)\ ;\ \forall x\in L$$

$$2)\quad \|F\|_E = \|f\|_L$$

البرهان . سنقتصر البرهان على الحالة التي يكون فيها الفضاء E قابلاً للفصل . إذ إن إثبات المبرهنة من أجل أي فضاء يتطلب أفكاراً تخرج عن إطار هذا الكتاب .

لنحقق تمديد الدالي f تدريجياً . لنأخذ عنصراً ما مثبتاً $x_0 \in E$ وغير منتم لـ L ($x_0 \notin L$) ولنستعرض مجموعة العناصر $L_1 = (L\,;x_0)$ من الشكل $x + t\,x_0$ حيث $x \in L$ وأما t فعدد حقيقي ما . من الواضح أن L_1 متنوعة خطية إذ إنه إذا كان ، على سبيل المثال ، $y_1 = x_1 + t_1 x_0$ و $y_2 = x_2 + t_2 x_0$ عنصرين من L_1 حيث إن $x_1 , x_2 \in L$ فإن لمجموعهما

$$y_1 + y_2 = (x_1 + x_2) + (t_1 + t_2)\,x_0 \qquad (4.1.1)$$

نفس البنية ولذلك فإن $(y_1 + y_2) \in L_1$ ، بالمثل يمكن التأكد من أنه إذا كان y عنصراً من L_1 فإن $\lambda y \in L_1$ من أجل أي عدد λ .

---

[*] هانز هان (١٨٧٩ – ١٩٣٤) رياضي نمساوي .

لنثبت الآن أن كل عنصر من عناصر L_1 يمثل بشكل وحيد على الشكل $x + t\,x_0$. لنفرض وجود تمثلين للعنصر $u \in L_1$:

$$u = x_1 + t_1 x_0 \qquad , \qquad u = x_2 + t_2 x_0$$

إضافة إلى أن $t_1 \neq t_2$ (في الحالة المغايرة ، من $x_1 + t_1 x_0 = x_2 + t_1 x_0$ نجد أن $x_1 = x_2$ والتمثيل يكون وحيداً) عندئذ يكون لدينا :

$$x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)\, x_0$$

$$x_0 = \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1}$$

وهذا الأمر غير ممكن وذلك لأن $x_0 \notin L$ و $x_1 , x_2 \in L$ وهكذا فإن $t_1 = t_2$ وبالتالي $x_1 = x_2$ وهو مايثبت وحدانية التمثيل .

إن المجموعة $L \subset L_1$ وتحديداً إن كل عنصر $x \in L$ يمكن تمثيله على الشكل $x = x + \alpha x_0$ حيث إن $\alpha = 0$ ولذلك فهي محتواة في L_1 .

لنستنتج الآن بعض المتراجحات المساعدة . لنأخذ عنصرين كيفيين x' و x'' من L فيكون لدينا :

$$f(x') - f(x'') = f(x' - x'') \leq |f(x' - x'')| \leq \|f\| \; \|x' - x''\|$$

وبما أن :

$$\|x' - x''\| = \|(x' + x_0) - (x'' + x_0)\| \leq \|(x' + x_0)\| + \|(x'' + x_0)\|$$

فإنه يكون :

$$f(x') - f(x'') \leq \|f\| (\|x' + x_0\| + \|x'' + x_0\|)$$

ومنه نجد :

$$-\|f\| \; \|x' + x_0\| + f(x') \leq \|f\| \; \|x'' + x_0\| + f(x'')$$

بتثبيت x'' أولاً وبأخذ الحد الأعلى الأصغري للطرف الأيسر بالنسبة لجميع $x' \in L$ (ولنرمز له بـ m) ومن ثم نستعرض جميع x'' المنتمية إلى L وأخذ الحد الأدنى الأعظمي للطرف الأيمن بالنسبة لجميع $x'' \in L$. (ولنرمز له بـ M) فنجد أن:

$$\left.\begin{aligned} m &= \sup_{x' \in L} \{ f(x') - \|f\| \; \|x' + x_0\| \} \\ M &= \inf_{x'' \in L} \{ f(x'') + \|f\| \; \|x'' + x_0\| \} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.2)$$

وبما أن كلاً من x' و x'' غير مرتبط بالآخر ، فإنه من الممكن استبدالهما بنقطة x في L كيفية وأن نكتب

$$\left.\begin{aligned} m &= \sup_{x\in L} \{ f(x) - \|f\| \, \|x+x_0\| \} \\ M &= \inf_{x\in L} \{ f(x) + \|f\| \, \|x+x_0\| \} \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.2')$$

أخيراً ، نأتي إلى تمديد الدالي f من L على L_1 . بغية ذلك نأخذ عدداً حقيقياً ما c محصوراً بين M, m [*] : $m \leq c \leq M$ فنجد أن :

$$\sup_{x\in L}\{ f(x) - \|f\| \, \|x+x_0\| \leq c \leq$$
$$\leq \inf_{x\in L} \{ f(x) + \|f\| \, \|x+x_0\| \} \qquad (4.1.3)$$

لنأخذ الآن عنصراً u في L_1 ، إنه وكما برهنا أعلاه ، يكون من الشكل

$$u = x + t x_0$$

حيث إن العنصر x في L والعدد الحقيقي t يتعرفان بشكل وحيد . لنعرف دالياً $\varphi(u)$ بالعلاقة

$$\varphi(u) = f(x) - tc$$

حيث c ثابت حقيقي ما محقق للعلاقة (4 . 1 . 3) . إن الدالي $\varphi(u)$ يتعرف بشكل وحيد من أجل كل عنصر u في L_1 وذلك بنتيجة وحدانية تمثيل العنصر u .

فمن أجل $u \in L$ يكون $t = 0$ ومن التمثيل $u = u + 0\, x_0$ نجد أن $\varphi(u) = f(u)$. أي إن φ و f يتطابقان على L . وأما كون الدالي $\varphi(u)$ جمعياً فإنه ينتج بالاستفادة من العلاقة (4 . 1 . 1) :

$$\varphi(y_1 + y_2) = f(x_1 + x_2) - (t_1 + t_2)\, c =$$

$$= [f(x_1 - t_1 c] + [f(x_2 - t_2 c] = \varphi(y_1) + \varphi(y_2)$$

وبالمثل يمكن التحقق من أن φ متجانس : إذا كان $y = x + t x_0$ عنصراً من L_1 فإن $\lambda y = \lambda x + (\lambda t) x_0$ ويكون

$$\varphi(\lambda y) = f(\lambda x) - (\lambda t) c = \lambda [f(x) - tc] = \lambda \varphi(y)$$

---

[*] إذا كان $m < M$ يمكن إعطاء الثابت C مجموعة غير منتهية من القيم المختلفة وتبعاً لذلك نحصل على مجموعة غير منتهية من التمديدات المختلفة للدالي f على L_1 .

لنبرهن على أن الدالي $\varphi(u)$ محدود وأن نظيمه يساوي نظيم الدالي $f(x)$.

لنستعرض حالتين :

١) $0 < t$. من $\frac{x}{t} \in L$ ومن العلاقة (4.1.3) نجد أن

$$\varphi(u) = t\left[f\left(\frac{x}{t}\right) - c\right] \le t\left\{ \|f\| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| \right\} =$$
$$= \|f\| \, \| x + t x_0 \| = \| f \| \, \| u \|$$

وهكذا فإن :

$$\varphi(u) \le \| f \| \, \| u \| \qquad (4.1.4)$$

٢) $0 > t$. من العلاقة (4.1.3) نجد :

$$f\left(\frac{x}{t}\right) - c \ge - \| f \| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| = -\frac{1}{|t|} \| f \| \, \| x + t\, x_0 \| =$$
$$= \frac{1}{t} \| f \| \, \| u \|$$

ومن ذلك نجد أن :

$$\varphi(u) = t\left\{ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \right\} \le t\ \frac{1}{t}\ \|f\| \, \| u \| = \| f \| \, \| u \|$$

أي إنه مجدداً حصلنا على العلاقة (4.1.4) .

بذلك تكون المتراجحة (4.1.4) محققة من أجل جميع العناصر $u \in L_1 = (L ; x_0)$

باستبدال u بـ $-u$ في (4.1.4) نجد :

$$-\varphi(u) \le \| f \| \, \| u \|$$

ومنه فإن :

$$| \varphi(u) | \le \| f \| \, \| u \|$$

وبالتالي نجد أن :

$$\| \varphi \| \le \| f \|$$

وبما أن الدالي φ هو تمديد للدالي f من L على L_1 فإن : $\| \varphi \| \ge \| f \|$

وبالتالي فإن :

$$\| \varphi \| = \| f \|$$

(لنلاحظ أننا قد عرفنا نظيم الدالي φ انطلاقاً من المتنوعة الخطية حيث هو معـرف عليها) . هكذا يكون الدالي $f(x)$ قد مدد على $L_1 = (L ; x_0)$ مع الحفاظ علـى النظيم .

إذا كان الفضاء E قابلاً للفصل ، فإن برهان مبرهنة هان – باناخ يمكن إنجازه على النحو التالي . لتكن N مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان فـي E . لنأخـذ عناصر هذه المجموعة غير المنتمية إلى L ولنرقمها :

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

نمدد الدالي $f(x)$ على المتنوعات الخطية

$$(L ; x_0) = L_1, (L_1 ; x_1) = L_2, \ldots$$

وهكذا . فإننا في النهاية نكون قد بنينا دالياً خطياً φ_ω معرفاً على متنوعـة خطيـة L_ω كثيفة في كل مكان في E ، ومساوية لاجتماع جميع L_n . إضافة إلى أن

$$\|\varphi_\omega\| = \|f\|$$

وبتمديد الدالي φ_ω بعدئذٍ بالاستمرار على E (انظر المبرهنة ٣) نـأتي إلـى الـدالي المطلوب F . في الحالة العامة ، هكذا ، ينجز إثبات مبرهنة هان – باناخ .

لنستعرض جميع التمديدات الممكنة ، مع الحفاظ على النظيم ، للدالي f . كمـا وجدنا أعلاه مثل هذه التمديدات موجود . لنعرف في مجموعـة جميـع التمديـدات ϕ ترتيباً جزئياً ، نفرض أن

$$f' \prec f''$$

إذا كانت المتنوعة الخطية L' ، حيث f' معرف عليها ، جزءاً من المتنوعة الخطيـة L'' حيث الدالي f'' معرف و $f'(x) = f''(x)$ من أجل $x \supset L'$. من الواضـح أن العلاقة $f' \prec f''$ تتمتع بجميع خواص الترتيب .

لتكن الآن $\{f_\alpha\}$ مجموعة جزئية كيفية ومرتبـة مـن المجموعـة ϕ . لهـذه المجموعة الجزئية يوجد حد أعلى والذي هو دالي f_* معرف على المتنوعة الخطيـة $L_* = \bigcup_\alpha L_\alpha$ حيث L_α ساحة تعريف f_α ، إضافة إلى ذلك فإن

$$f_*(x) = f_{\alpha_0}(x)$$

إذا كان x ∋ L_* عنصراً من L_{α_0} . من الواضح أن f_* هو دالي خطي وأن

$\| f \| = \| f_* \|$ أي إن $f_* \ni \phi$. بذلك نجد أن جميع شروط توطئة زورن محققة

وبالتالي فإن ϕ تمتلك عنصراً أعظمياً F وهذا الدالي معرف على الفضاء E بأكمله ،

وذلك لأن في الحالة المعاكسة يمكن تمديده مجدداً وبذلك لا يكون عنصراً أعظمياً في

ϕ .

ملاحظة . بما أنه يمكن اختيار العدد c المحقق للعلاقة (3 . 1 . 4) بأشكال مختلفة وأن العنصر الأعظمي في المجموعة ϕ ليس وحيداً ، فإن التمديد للدالي الخطي وفقاً لمبرهنة هان – باناخ ، بشكل عام ، ليس وحيداً .

نتيجة (١) . ليكن E فضاءً خطياً منظماً وليكن $x_0 \neq 0$ عنصراً ما مثبتاً من E ، عندئذ يوجد دالي خطي مثل $f(x)$ معرف على E وبحيث إن

$$1)\quad \| f \| = 1 \quad . \qquad 2)\quad f(x_0) = \| x_0 \|$$

لنستعرض مجموعة العناصر $L = \{ t x_0 \}$ حيث إن t عدد حقيقي من R .

إن L فضاء جزئي من E معرف بالعنصر x_0 . لنعرف على L دالياً $\varphi(x)$ على النحو التالي : إذا كان $x = t x_0$ فإن

$$\varphi(x) = t \| x_0 \|$$

من الواضح أن هذا الدالي خطي ومحدود و :

$$1)\quad \varphi(x_0) = \| x_0 \|$$

$$2)\quad | \varphi(x) | = | t | \; \| x_0 \| = \| x \|$$

وبالتالي فإن $\| \varphi \| = 1$.

بتمديد الدالي $\varphi(x)$ على الفضاء E بأكمله مع الحفاظ على النظيم نحصل على الدالي $f(x)$ المحقق للشروط المطلوبة .

نتيجة (٢) . لتكن L متنوعة خطية في الفضاء الخطي المنظم E ، وليكن $x_0 \ni \bar{L}$ ويقع على مسافة $d > 0$ من L ($d = \inf\limits_{x \in L} \| x_0 - x \|$) .

عندئذ يوجد دالي خطي $f(x)$ معرف على E وبحيث إن

$$1)\quad f(x) = 0 \qquad \forall\ x \in L$$
$$2)\quad f(x_0) = 1$$
$$3)\quad \| f \| = \frac{1}{d}$$

البرهان . لنأخذ المجموعة $(L \,;\, x_0)$ والتي لكل عنصر منها الشكل

$$u = x + t\, x_0$$

حيث $x \in L$ و t عدد حقيقي . لنعرف دالياً $\varphi(u)$ بالعلاقة

$$\varphi(u) = t \qquad , \qquad \forall\ u \in (L \,;\, x_0)$$

من الواضح أن $\varphi(x) = 0$ إذا كان $x \in L$ وأن $\varphi(x_0) = 1$.

لنحسب $\| \varphi \|$. لدينا

$$|\varphi(u)| = |t| = \frac{|t|\,\|u\|}{\|u\|} = \frac{|t|\,\|u\|}{\|x + t x_0\|} =$$
$$= \frac{\|u\|}{\left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\|} = \frac{\|u\|}{\left\| x_0 - \left(-\frac{x}{t}\right) \right\|} \le \frac{\|u\|}{d}$$

ومنه نجد أن

$$\|\varphi\| \le \frac{1}{d} \qquad (4.1.5)$$

وحسب تعريف الحد الأدنى توجد متتالية $\{ x_n \} \subset L$ وبحيث إن

$$d = \lim_{n} \| x_n - x_0 \|$$

وبما أن

$$| \varphi(x_n - x_0) | \le \|\varphi\| \, \| x_n - x_0 \|$$

فإنه وفقاً لما ذكرنا أعلاه نجد أن

$$1 \le \|\varphi\| \, \| x_n - x_0 \|$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ في المتراجحة الأخيرة نجد

$$1 \le \|\varphi\| \; d$$

أو

$$\|\varphi\| \ge \frac{1}{d} \qquad (4.1.6)$$

بمقارنة $(4.1.5)$ و $(4.1.6)$ نجد

$$\|\varphi\| = \frac{1}{d}$$

وبتمديد الدالي $\varphi(x)$ على الفضاء E مع الحفاظ على النظيم نحصل على دالي $f(x)$ متمتع بالخواص المطلوبة .

بالعودة إلى النتيجة (١) نجد أن تلك النتيجة تعني أنه من أجل كل عنصر $x_0 \neq 0$ د E يوجد دالي (لا يطابق الدالي الصفري) من الفضاء المرافق E^* بكلام آخر إن تلك النتيجة تعني توفر عدد كاف من الداليات الخطية في الفضاء E^* لتمييز عناصر الفضاء E . في الحقيقة إذا كان x و y عنصرين من E و $x \neq y$ فإنه من أجل العنصر $z = x - y \neq 0$ يوجد دالي خطي محدود f من E^* وبحيث إن

$$f(z) = \|z\| = F(x-y) = \| x - y \| \neq 0$$

أي إن

$$F(x) \neq F(y)$$

من ناحية ثانية وتبعاً لتلك النتيجة نجد أنه إذا كان من أجل عنصر ما x من الفضاء الخطي المنظم E : $f(x) = 0$ من أجل أي دالي خطي من الفضاء المرافق E^* فإن ذلك يؤدي إلى أن $x = 0$.

من الممكن أيضاً إعطاء تفسير هندسي للنتيجة (١) يتلخص فيما يأتي :

من أية نقطة x_0 واقعة على سطح الكرة $\|x\| \leq r$ ، أي إن $\|x_0\| = r$ ، يمكن تمرير مستو حامل لهذه الكرة .

هذه المبرهنة هي تعميم للدعوى المبرهنة في الفضاء ذي الـ n بعداً من قبل غ . مينكوفسكي .

في الواقع ، إن معادلة المستوي الحامل لتلك الكرة ينبغي أن تكون من الشكل $f(x) = r\,\|f\|$ ، إلا أنه من أجل النقطة x_0 يمكن تعريف دالي f_0 ، نظيمه يساوي الواحد ومن أجله يكون

$$f_0(x_0) = \|x_0\| = r \qquad (4.1.7)$$

إن المستوي

$$f_0(x) = r$$

هو مستو حامل ويمر ، استناداً للعلاقة (4.1.7) ، من النقطة x_0 .

إن النتيجة الثانية هامة من أجل توضيح مسألة تقريب عنصر معطى x_0 بتراكيب خطية لعناصر أخرى معطاة $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset E$.

على وجه الدقة فإنه من النتيجة (2) ينتج : أن الشرط اللازم والكافي كي تكون x_0 نهاية لمتتالية من التراكيب الخطية من الشكل $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ هو أن يكون $f(x_0) = 0$ من أجل جميع الداليات الخطية f والتي تؤول إلى الصفر على جميع العناصر $x_1, x_2, \ldots$.

في الواقع . لنفرض أنه من $f(x_i) = 0$ ، $i = 1, 2, \ldots$ ينتج أن $f(x_0) = 0$ عندئذ لايمكن أن تقع x_0 على مسافة $d > 0$ من المتنوعة الخطية L المولدة بالعناصر $\{x_i\}$ ، وذلك لأنه ، في الحالة المعاكسة ،ووفقاً للنتيجة الثانية يوجد دالي مثل f_0 بحيث إن $f_0(x_i) = 0$ مع $i = 1, 2, \ldots$ و $f_0(x_0) = 1$ لكن إذا كان $d = 0$ فإن ذلك يعني أنه إما أن تكون x_0 نقطة تجمع للمتنوعة الخطية L أو أن $x_0 \in L$ وبالتالي فإن x_0 يمكن تقريبها بعناصر من الشكل $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. بالعكس ، لنفرض أن x_0 نهاية لمتتالية عناصر من L ولنفرض أن $f(x_i) = 0$ من أجل دالي ما f . عندئذ لنفرض أن

$$x_0 = \lim_n \xi_n \ , \ \xi_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} x_i$$

فنجد أن

$$f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{k_n} c_i^{(n)} f(x_i) = 0$$

وبالتالي فإن

$$f(x_0) = f(\lim_n \xi_n) = \lim_n f(\xi_n) = 0$$

§ – ٢ الشكل العام للداليات الخطية في بعض الفضاءات التابعية

The General Form of Linear Functionals in Some Functional Spaces

يمكن إيجاد الشكل العام للداليات الخطية في كثير من الفضاءات التابعية حيث تلك الداليات معرفة عليها . إن معرفة الشكل العام للداليات الخطية مفيدة في الدراسات المختلفة لتلك الفضاءات التابعية .

الداليات الخطية في الفضاء E_n ذي الـ n بعداً

Linear Functionals on The n- dimensional Space E_n

لتكن $\{ e_1 , e_2 , \dots , e_n \}$ قاعدة في E_n ، عندئذ من أجل أي عنصر $x \in E_n$ يمكن أن نكتب

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; e_i$$

وبالتالي يكون لدينا

$$f(x) = f \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; f_i$$

أي إن

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; f_i x \qquad (4.2.1)$$

وبالعكس ، إن العبارة ($4 . 2 . 1$) حيث f_i أعداد اختيارية تعرف دالياً خطياً على E_n . بهذه الصورة نجد أن العبارة ($4 . 2 . 1$) تعطي الشكل العام للدالي الخطي المعرف على الفضاء E_n . بما أنه يمكن النظر إلى $f_i \; (i = 1, 2, \dots, n)$ على أنها مركبات لشعاع f ذي n بعداً ، فإن الفضاء E_n^* المرافق للفضاء E_n هو أيضاً فضاء ذو n بعداً إلا أن المسافة فيه ، بشكل عام ، تختلف عن المسافة في E_n .

لِيكن على سبيل المثال $\| x \| = \max\limits_i | \xi_i |$ ، عندئذ يكون

$$|f(x)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i \; f_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \; |f_i| \le \sum_{i=1}^{n} \max_i |\xi_i| |f_i|$$

$$=\| x \| \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i | \right)$$

وبالتالي فإن

$$\| f \| \leq \sum_{i=1}^{n} | f_i | \qquad (4.2.2)$$

من ناحية أُخرى إذا أخذنا العنصر x_0 من E_n

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} sign \ f_i \ . e_i$$

فإن $1 = \| x_0 \|$ ويكون لدينا

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} sign \ f_i \ f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} sign \ f_i \ . \ f_i = \sum_{i=1}^{n} | f_i | =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} | f_i | \ \| x_0 \|$$

وبالتالي فإن

$$\| f \| \geq \sum_{i=1}^{n} | f_i | \qquad (4.2.3)$$

بمقارنة $(4.2.2)$ و $(4.2.3)$ نجد أن

$$\| f \| = \sum_{i=1}^{n} | f_i |$$

أما إذا أخذنا في E_n المسافة الإقليدية

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

فنجد أن

$$| f(x) | = \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i f_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \, |f_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| x \| \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي فإن

$$\| f \| \le \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

من جهة ثانية ، إذا أخذنا $x_0 = (f_1 , f_2 , \ . \ . \ . \ , f_n)$ ، فإننا نجد أن

$$| f(x_0) | = \sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \| x_0 \| \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

وبالتالي فإن

$$\| f \| \ge \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ومنه نجد

$$\| f \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | f_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

أي إن المسافة في E_n^* هي المسافة الإقليدية أيضاً .

وفقاً لمفاهيم الجبر التنسوري تسمي عناصر الفضاء E_n بعناصر مخالفة التغير (*contravariant*) أما عناصر E_n^* فتسمى بعناصر موافقة التغير (*covariant*) .

إن الدالي الخطي $f (x)$ يمكن تمثيله في شكل جداء داخلي

$$f (x) = (x , f)$$

حيث $x \in E_n$ و $f \in E_n^*$.

ونترك للطالب التأكد من صحة العلاقات المعرفة للمسافات في E_n^* والموافقة للمسافات المبينة في E_n :

$$1) \ \| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \| f \| =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \; ; \; 1 < p < \infty \right)$$

$$2) \; \| x \| = \sup_{1 \le i \le n} |\xi_i| \quad \Rightarrow \quad \| f \| = \sum_{i=1}^{n} |f_i|$$

$$3) \; \| x \| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| \quad \Rightarrow \quad \| f \| = \sup_{1 \le i \le n} |f_i|$$

الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء S

General Form of Linear Functionals on S .

ليكن $f(x)$ دالياً خطياً معرفاً على الفضاء S فضاء جميع المتتاليات العددية . لنضع

$e_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ حيث $\xi_n^{(n)} = 1$ و $\xi_i^{(n)} = 0$ من أجل $i \neq n$ ولنفرض أن $f(e_n) = a_n$. بما أن التقارب في الفضاء S هو تقارب بالإحداثيات ، فإنه من أجل العنصر $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ تتحقق المساواة :

$$x = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

واستناداً إلى استمرارية الدالي $f(x)$ نجد

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$$

وبما أن هذه السلسلة يجب أن تكون متقاربة من أجل أية متتالية عددية $\{\xi_k\}$ فإن a_k يجب أن تكون معدومة ابتداءً من رقم معين وبالتالي فإن

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$$

وبما أنه ، وبالعكس ، أية عبارة من هذا الشكل من أجل أية أعداد حقيقيــة a_k ومــن أجل أي عدد طبيعي n تمثل دالياً خطياً في الفضاء S فإننــا نجـد أن الـشكل العــام للداليات الخطية المعرفة على الفضاء S يعطى بالعلاقة

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$$

حيث إن الأعداد n و a_k تتعرف بشكل وحيد بالدالي f .

الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $C[0,1]$. مبرهنة ريس (*)

General Form of Linear Functionals on $C[0,1]$

ليكن $f(x)$ دالياً خطياً معرفاً على الفضاء $C[0,1]$. بما أن كل تابع مستمر $x(t)$ على المجال $[0,1]$ هو تابع محدود ، وبما أنه من أجل التابع المستمر يكون

$$\sup_{0\le t\le 1} x(t) = \max_{0\le t\le 1} x(t)$$

فإنه يمكننا اعتبار الفضاء $C[0,1]$ فضاءً جزئياً من فضاء التوابع المحدودة $M[0,1]$ على المجال $[0,1]$ ، حيث يعرف فيه النظيم بالعلاقة

$$\|x\| = \rho(x,\theta) = \sup_{0\le t\le 1} |x(t)|$$

لنمدد الدالي الخطي $f(x)$ المعرف على الفضاء $C[0,1]$ على $M[0,1]$ مع الحفاظ على النظيم ولنرمز للدالي الممدد بـ $F(x)$.

لنستعرض التوابع

$$u_t(\xi) \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le \xi < t \\ 0 & ; \quad t \le \xi \le 1 \end{cases}$$

من الواضح أن

$$u_t(\xi) \in M[0,1]$$

ولنضع

$$F[u_t(\xi)] = g(t)$$

ولنبرهن على أن التابع $g(t)$ ذو تغير محدود (**) لنقسم المجال $[0,1]$ بالنقاط

(*) فريديش ريس (٢٢- ١ - ١٨٨٠ ، ٢٨ - ١١ - ١٩٥٦) رياضي مجري واحد من مؤسسي التحليل التابعي .

(**) (ليكن $f(t)$ تابعاً معرفاً على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ حيث $(a<b)$ ، ولنجزئ المجال $[a,b]$ ، بالنقاط :

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

ولنشكل المجموع :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ . \ . \ . < t_{n-1} < t_n \ = \ 1$$

ولنشكل المجموع

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \ g(t_i) - g(t_{i-1}) \ \right|$$

ولنضع

$$\varepsilon_i = \ \text{sign} \ [\ g(t_i) - g(t_{i-1}) \ ]$$

عندئذ نجد

$$\sum_{i=1}^{n} \left| g(t_i) - g(t_{i-1}) \right| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ [\ g(t_i) - g(t_{i-1}) \ ] \ =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ [\ F(u_{t_i}) - F(u_{t_{i-1}}) \ ] \ = F\left[\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(u_{t_i} - u_{t_{i-1}}\right)\right]$$

ومنه نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \ g(t_i) - g(t_{i-1}) \ \right| \ \leq \ \| F \| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ (u_{t_i} - u_{t_{i-1}}) \ \right\| \ \leq \ \| f \|$$

وذلك لأن

$$\| F \| \ = \ \| f \| \qquad , \qquad \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ (u_{t_i} - u_{t_{i-1}}) \right\| \ = 1$$

وهكذا يكون

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \ g(t_i) - g(t_{i-1}) \ \right| \ \leq \ \| f \|$$

أي إن التابع $g\ (t\ )$ ذو تغير محدود على المجال $[\ 0\ ,\ 1]$.

$$\vartheta = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \ f(t_{i+1}) - f(t_i) \right|$$

إذا كانت هذه المجاميع محدودة من الأعلى من أجل أية تجزئة للمجال $[\ a\ ,\ b]$ ، فإننا نقول إن التابع $f(\ t\ )$ ذو تغير محدود على المجال $[a\ ,\ b]$. ويسمى الحد الأعلى الأصغري للمجاميع تلك بالتغير الكلي للتابع $f(\ t\ )$ في المجال $[a,\ b]$ ونكتب ذلك على الشكل :

$$V_a^b \{f\} = \sup\{\ \vartheta\}$$

لمعرفة الخصائص التي يتمتع بها صف التوابع ذات التغيرات المحدودة يمكن العودة إلى [9]

نأتي الآن لإيجاد العبارة التحليلية للدالي f . لنأخذ تابعاً ما $x(t)$ مستمراً على المجال $[0, 1]$. ولننشئ التابع

$$z_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) \left[u_{\frac{k}{n}}(t) - u_{\frac{k-1}{n}}(t) \right]$$

إن $z_n(t)$ تابع درجي (بسيط) . وبالتالي يكون لدينا

$$F(z_n) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right]$$

ولهذا فإن

$$\lim_n F(z_n) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right] =$$

$$= \int_0^1 x(t)\, d\, g(t)$$

من ناحية ثانية إن المتتالية $\{ z_n(t) \}$ ، وعندما $n \to \infty$ تتقارب بانتظام إلى $x(t)$ أي إن $\| z_n - x \| \to 0$. وبما أن الدالي $F(x)$ مستمر ، فإن

$$F(z_n) \to F(x)$$

ولهذا فإن

$$F(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t)$$

ولكن

$$F(x) = f(x)$$

من أجل التابع المستمر $x(t)$. تبعاً لذلك يكون

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t) \qquad (4.2.4)$$

وفقاً لذلك يمكن استبدال التابع $g(t)$ بالتابع $\overline{g}(t)$ الذي يتطابق مع التـــابع $g(t)$ في نقاط استمراره كما أنه مستمر من اليسار $\overline{g}(t-0) = \overline{g}(t)$ في نقاط الانقطاع . هكذا نأتي إلى مبرهنة ريس .

مبرهنة (ف . ريس) . كل دالي خطي معرف على الفضاء $C[0, 1]$

يمكن تمثيله بتكامل ستيلتجس [*] بالعلاقة (4 . 2 . 4) ، حيث $g(t)$ تابع ذو تغير محدود ويعرف بالدالي $f(x)$.

وبالعكس ، بسهولة نرى أن الدالي

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, h(t)$$

حيث $h(t)$ تابع ما ذو تغير محدود هو دالي خطي في الفضاء $C[0, 1]$. في الحقيقة، إن كون $\varphi(x)$ جمعياً واضحاً وأما استمراريته فتنتج من إمكانية الانتقال بالنهاية إلى ما تحت إشارة التكامل من أجل متتالية من التوابع متقاربة بانتظام .

بهذه الصورة نكون قد أثبتنا أن العلاقة (4 . 2 . 4) تعطينا الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $C[0, 1]$ ، بمعنى أن تلك العلاقة تعطينا جميع الداليات الخطية في الفضاء $C[0, 1]$ من أجل جميع الدوال ذات التغيرات المحدودة الممكنة $g(t)$.

لنحسب نظيم الدالي $f(x)$. لدينا

$$\sum_{i=1}^{n} \left| g(t_i) - g(t_{i-1}) \right| \leq \| f \|$$

ومنه نجد أن التغير الكلي

$$\overset{1}{\underset{0}{\vee}} \{ g \} \leq \| f \| \qquad (4.2.5)$$

من ناحية ثانية ومن العلاقة (4 . 2 . 4) نجد

$$| f(x) | = \left| \int_0^1 x(t)\, d\, g(t) \right| \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} | x(t) | \overset{1}{\underset{0}{\vee}} \{ g \} = \overset{1}{\underset{0}{\vee}} \{ g \} \| x \|$$

ومنه يكون

$$\| f \| \leq \overset{1}{\underset{0}{\vee}} \{ g \} \qquad (4.2.6)$$

---

[*] توماس جوهانس ستيلتجس *Th . J . Stieltjes* (١٢٢٩ – ١٨٥٦ – ٣١ – ١٢ – ١٨٩٤) رياضي هولندي.

من $(4.2.5)$ و $(4.2.6)$ ينتج أن

$$\| f \| = \overset{1}{\underset{0}{V}} \{ g \}$$

ذكرنا أن كل تابع $g(t)$ ذي تغير محدود على المجال $[0, 1]$ يعرف دالياً خطياً على $C[0, 1]$ وفق العلاقة

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t)$$

وفقاً لذلك فإنه إذا تطابق تابعان $g_1(t)$ و $g_2(t)$ على المجال $[0, 1]$ ، في كل مكان ، باستثناء مجموعة قابلة للعد ، على الأكثر من النقاط الداخلية من ذلك المجال ، فإنهما يعرفان دالياًخطياً واحداً . بالعكس ، لنفرض أن التابعين $g_1(t)$ و $g_2(t)$ يعرفان دالياً خطياً واحداً (نفس الدالي) على $C[0, 1]$. أي إن

$$\int_0^1 x(t)\, d\, g_1(t) = \int_0^1 x(t)\, d\, g_2(t)$$

من أجل كل تابع مستمر $x(t)$ على المجال $[0, 1]$. من ذلك وبسهولة ينتج أن $g_1(t) - g_2(t) = const$ في جميع نقاط استمرار التابع $(g_1 - g_2)$ أي تقريباً في كل مكان (باستثناء مجموعة منتهية أو قابلة للعد من النقاط) .

بهذه الصورة نجد أن كل دالي خطي على $C[0, 1]$ يقابل بصف من التوابع ذات التغيرات المحدودة على $[0, 1]$ ، إضافة إلى ذلك ، فإن التابعين $g_1(t)$ و $g_2(t)$ ينتميان إلى نفس الصف فقط وفقط إذا كان الفرق بينهما مختلفاً عن ثابت على الأكثر في مجموعة قابلة للعد من نقاط المجال $[0, 1]$ الداخلية .

هكذا ، نجد أن التقابل بين الداليات الخطية المعرفة على $C[0 \,.\, 1]$ والتوابع ذات التغيرات المحدودة على ذلك المجال والمعرف بالعلاقة $(4.2.4)$ هو تقابل وحيد القيمة بالتبادل أي إن $(1\text{-}1)$ ذلك إذا اعتبرنا أن التابعين ذوي التغيرات المحدودة والمختلفين في نقاط استمرارهما بعامل ثابت متطابقان . باستبدال $\bar{g}(t)$ في العلاقة $(4.2.4)$ تبقى العلاقة $4.2.6$)صحيحة أما المتراجحة $(4.2.5)$ فتزداد قوة ووفقاً لذلك تبقى العلاقة $(4.2.7)$ محققة

لقد عمم أ. أ. ماركوف (*) ميرهنة ريس بإيجاد الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $C(K)$ فضاء التوابع المستمرة على متراصة K .

الشكل العام للداليات الخطية في l_p

Genenal Form of Linear Functionals on l_p

ليكن $f(x)$ دالياً خطياً معرفاً على l_p . بما أن العناصر $e_k = \{ \xi_i^{(k)} \}$ حيث $\xi_k^{(k)} = 1$ و $\xi_i^{(k)} = 0$ من أجل $i \neq k$ تشكل قاعدة في l_p فإن أي عنصر $x \ni l_p$ يكتب على الشكل

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

وتبعاً لخطية الدالي $f(x)$ يكون لدينا

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$$

لنضع $f(e_k) = c_k$ ، عندئذ تتعرف الأعداد c_k بشكل وحيد بالدالي f ويكون

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k \qquad (4.2.8)$$

لنوضح الخواص التي تتمتع بها الأعداد c_k . لنضع $x_n = \{ \xi_k^{(n)} \}$ حيث

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} |c_k|^{q-1} \operatorname{sign} c_k & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

وأما العدد q فيأخذ بحيث تتحقق المساواة

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

عندئذ يكون لدينا

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} | c_k |^q$$

من ناحية ثانية

(*) انظر على سبيل المثال [5] وعمل ماركوف في *Matem . cδ. 4(46) 1938*

$$f(x_n) \le \|f\| \, \|x_n\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^{q} \right)^{\frac{1}{p}}$$

ومنه نجد أن

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|$$

وبما أن هذه المتراجحة صحيحة من أجل أي عدد n فإن

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\| \qquad (4.2.9)$$

أي إن $c_k \in l_q$.

بالعكس ، لتكن $\{ d_k \}$ متتالية ما من l_q ، عندئذ

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, \xi_k$$

يكون دالياً خطياً معرفاً في الفضاء l_p . في الحقيقة ، إن كون هذا الدالي جمعياً هـو أمر واضح ، وأما محدوديته فتنتج من متراجحة هولدر .

$$|\varphi(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, \xi_k \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |d_k \, \xi_k| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

لنحسب نظيم الدالي f . من العلاقة $(4.2.8)$ واعتماداً على متراجحـة هولـدر نجد أن

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, \xi_k \right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{q} \right)^{\frac{1}{q}} . \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^{p} \right)^{\frac{1}{p}}$$

وبالتالي فإن

$$\| f \| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.10)$$

وبمقارنة العلاقتين $(4.2.9)$ و $(4.2.10)$ نجد

$$\| f \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

نتيجة . إن الشكل للدالي الخطي في الفضاء l_2 هو

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k$$

حيث

$$\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 < +\infty$$

و

$$\| f \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

يدرس في التحليل التابعي ، إضافة للفضاء l_p والذي عناصره هي المتتاليات العددية

$$x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , \ldots \}$$

و التي من أجلها

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k | < \infty$$

إضافة إلى أن

$$\| x \| = \sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k |$$

بسهولة يمكن البرهان على أن الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء l هو

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$$

حيث $\{ c_k \}$ متتالية محدودة ، وأما نظيم هذا الدالي فيعطى بالعلاقة

$$\| f \| = \sup_k | c_k |$$

الشكل العام للداليات الخطية في الفضاء $L^p[0,1]$

Generral Form of Linear Functionals on $L^p[0,1]$

ليكن $f(x)$ دالياً خطياً معرفاً على $L^p[0,1]$ $(P > 1)$. ولنضع

$$u_t(\xi) = \begin{cases} 1 & ; \; 0 \le \xi < t \\ 0 & ; \; t \le \xi \le 1 \end{cases}$$

وليكن $g(t) = f[u_t(\xi)]$. ولنبرهن على أن التابع $g(t)$ مستمر إطلاقاً .
لتكن $\delta_i = (\tau_i, t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ جملة من المجالات غير المتقاطعة والمتوضعة على المجال المغلق $[0, 1]$. بفرض أن

$$\varepsilon_i = \text{sign}\,[g(t_i) - g(\tau_i)]$$

نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(\tau_i)| = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [g(t_i) - g(\tau_i)] =$$

$$= f\left\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)]\right\} \le \|f\| \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)] \right\| =$$

$$= \|f\| \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [u_{t_i}(\xi) - u_{\tau_i}(\xi)] \right|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\delta_i} d\xi \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\| \left(\sum_{i=1}^{n} \text{mes}\;\delta_i \right)^{\frac{1}{p}}$$

ومن هذه المتراجحة ينتج الاستمرار المطلق للتابع $g(t)$. وبما أن التابع المستمر إطلاقاً $g(t)$ هو تكامل ليبيغ لمشتقه ، فإننا نضع

$$g'(t) = \alpha(t)$$

ويكون عندئذ

$$g(t) - g(0) = \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau$$

ولكن

$$g(0) = f[\,u_0(\xi)\,]$$

وبما أن $u_0(\xi) \equiv 0$ (صفر الفضاء $L^p[0,1]$) فإن

$$g(0) = f\,[u_0(\xi)] = 0$$

وبالتالي فإن

$$g(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau$$

باستخدام التابع $u_t(\tau)$ نجد أن

$$f\,[u_t(\tau)] = g(t) = \int_0^t \alpha(\tau)\,d\tau = \int_0^1 u_t(\tau)\,\alpha(\tau)\,d\tau$$

وبما أن الدالي f خطي فإنه من أجل أي تابع درجي (بسيط) $z_n(\tau)$ حيث

$$z_n(\tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,[u_{\frac{k}{n}}(\tau) - u_{\frac{k-1}{n}}(\tau)]$$

يكون

$$f(z_n) = \int_0^1 z_n(\tau)\,\alpha(\tau)\,d\tau$$

بفرض أن $x(t)$ تابع محدود وقابل للقياس ، عندئذ توجد متتالية من التوابع البسيطة $\{z_m(t)\}$ المتقاربة إلى $x(t)$ تقريباً في كل مكان . أي إن

$$z_m(t) \to x(t)\,,\,(a.e.)\;,\quad m \to \infty$$

تبعاً لذلك يمكننا اعتبار أن المتتالية محدودة بانتظام . واستناداً إلى مبرهنة ليبيغ حـــول مكاملة متتالية محدودة نجد أن :

$$\lim_m f(z_m) = \lim_m \int_0^1 z_m(t)\,\alpha(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \lim_m z_m(t)\,\alpha(t)\,dt = \int_0^1 x(t)\,\alpha(t)\,dt$$

من جهة ثانية وبما أن $z_n(t) \to x(t)$ تقريباً في كل مكان و $z_n(t)$ محـــدودة بانتظام ، فإن

$$\| z_m - x \| = \left(\int_0^1 | z_m(t) - x(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

عندما $m \to \infty$. ولهذا فإن

$$f(z_m) \to f(x)$$

وبالتالي فإن

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

لنستعرض الآن التابع $x_n(t)$ المعرف بالعلاقة

$$x_n(t) = \begin{cases} |\alpha(t)|^{q-1} \operatorname{sign} \alpha(t) & ; \; |\alpha(t)| \le n \\ 0 & ; \; |\alpha(t)| > n \end{cases}$$

حيث q هو العدد المرافق للعدد p . أي إن

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

إن التابع $x_n(t)$ محدود وقابل للقياس (قيوس) وبالتالي فإن

$$f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt$$

و

$$|f(x_n)| \le \|f\| \, \|x_n\| = \|f\| \left(\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

من ناحية ثانية

$$|f(x_n)| = f(x_n) = \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 |x_n(t)|\,|\alpha(t)|\, dt \ge \int_0^1 |x_n(t)|\,|x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}} \, dt$$

$$= \int_0^1 |x_n(t)|^{\frac{q}{q-1}} \, dt =$$

$$= \int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt$$

وبالتالي فإن

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \le |f(x_n)| \le \|f\| \, \|x_n\| =$$

$$= \|f\| \left(\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

ومنه نجد أن

$$\left(\int_0^1 |x_n(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|$$

ولكنه من الواضح أن

$$|x_n(t)| \to |\alpha(t)|^{q-1}$$

وذلك عندما $n \to \infty$ تقريباً في كل مكان على المجال $[0, 1]$ وذلك لأن التابع $\alpha(t)$ تابع جمعي ، وبالتالي فإنه يسعى إلى اللانهاية فقط على مجموعة قياسها الصفر . وبالانتقال إلى النهاية عندما $n \to \infty$ نجد

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^{(q-1)p} \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\|$$

أو

$$\left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \le \|f\| \qquad (4.2.11)$$

من هذا ينتج أن التابع $\alpha(t)$ ينتمي إلى الفضاء $L^q[0,1]$.

ليكن الآن $x(t)$ تابعاً ما من الفضاء $L^p[0,1]$ ، عندئذ يكون التكامل

$$\int_0^1 x(t) \, \alpha(t) \, dt$$

موجوداً (متقارباً) وبالتالي توجد متتالية من التوابع المحدودة والقابلة للقياس مثل

بحيث إن $\{ x_m(t) \}$

$$\int_0^1 | x(t) - x_m(t) |^p \, dt \to o$$

عندما $m \to \infty$. اعتماداً على متراجحة هولدر نجد أنه عندما $m \to \infty$

$$\int_0^1 x_m(t) \, \alpha(t) \, dt \to \int_0^1 x(t) \, \alpha(t) \, dt$$

وبما أن $x_m(t)$ توابع محدودة وقابلة للقياس فإن

$$\int_0^1 x_m(t) \, \alpha(t) \, dt = f(x_m)$$

وبالتالي فإن

$$f(x_m) \to \int_0^1 x(t) \, \alpha(t) \, dt$$

عندما $m \to \infty$. من ناحية ثانية إن

$$f(x_m) \to f(x)$$

بذلك نجد أن

$$f(x) = \int_0^1 x(t) \, \alpha(t) \, dt \qquad (4.2.12)$$

وهكذا فإن كل دالي خطي ومعرف على $L^p[0,1]$ يمكن تمثيله بالعلاقة (4.2.12) . وبالعكس إذا كان $\beta(t)$ تابعاً ما من $L^q[0,1]$ فإن

$$\varphi(x) = \int_0^1 x(t) \, \beta(t) \, dt$$

يكون دالياً خطياً معرفاً على $L^p[0,1]$. في الحقيقة إن جمعية هذا الدالي واضحة ، أما كونه محدوداً فينتج من متراجحة هولدر .

هكذا نجد أن العلاقة (4.2.12) ، ومن أجل أي تابع مثبت $\alpha(t) \in L^q[0,1]$ تعطينا الشكل العام للدالي الخطي المعرف على $L^p[0,1]$.

لنحسب نظيم هذا الدالي . من العلاقة (4.2.12) لدينا

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t)\ \alpha(t)\, dt \right| \le$$

$$\le \left(\int_0^1 |x(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \|x\|$$

وبالتالي فإن

$$\|f\| \le \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.2.13)$$

ومن العلاقتين $(4.2.11)$ و $(4.2.12)$ نجد أن

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |\alpha(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

غالباً ما يستخدم ، في التحليل التابعي، الفضاء $L[0, 1]$ فضاء التوابع الجمعية بمفهوم ليبيغ . يعرف نظيم تابع $x(t)$ من هذا الفضاء بالمساواة

$$\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\, dt$$

ويعطى الشكل العام للداليات الخطية المعرفة على $L[0, 1]$ بالعلاقة

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\ \ \alpha(t)\ \ dt$$

حيث إن $\alpha(t)$ تابع محدود تقريباً في كل مكان ، كما أن نظيم هذا الدالي يعطى بالعلاقة

$$\|f\| = \text{vrai} \max_{[0, 1]} |\alpha(t)|$$

الشكل العام للداليات الخطية في فضاء هيلبرت

General Form of Linear Functionals on Hilbert Space

لنستعرض في فضاء هيلبرت H دالياً خطياً $f(x)$. بما أن الفضاء H هو

فضاء خطي فوق حقل الأعداد المركبة ، فإنه يمكن للدالي $f(x)$ أن يأخذ قيماً مركبة ، وبما أن اهتمامنا منصب على الداليات الخطية فإننا نعتبر الدالي $f(x)$ والذي يأخذ قيماً مركبة هو دالي خطي إذا كان جمعياً ومتجانساً ومستمراً (لنلاحظ أن هذه الشروط الثلاثة بالنسبة للداليات التي تأخذ قيماً مركبة ليست مرتبطة ببعضها) .

ليكن $f(x)$ دالياً خطياً معرفاً في فضاء هيلبرت H . ولنرمز بـ L . لمجموعة أصفار هذا الدالي ، أي مجموعة العناصر $x \in H$ والتي من أجلها $f(x) = 0$

$$L = \{ x \in H \mid f(x) = 0 \}$$

إن L فضاء جزئي . إذ إن L متنوعة خطية ينتج مباشرة من كون f جمعياً ومتجانساً وأما كون L مغلقة فإنه ينتج من استمرارية الدالي f .

لنأخذ عنصراً كيفياً من الفضاء H وغير منتم إلى L ، ولنرمز بـ x_0 لمسقط ذلك العنصر على الفضاء الجزئي $H \ominus L$. ليكن $f(x_0)=\alpha$ ، عندئذ من الواضح أن $\alpha \neq 0$. لنضع

$$x_1 = \frac{x_0}{\alpha} .$$

فيكون

$$f(x_1) = 1$$

إذا كان x عنصراً ما من الفضاء H وكان $f(x) = \beta$ ، فإنه يكون لدينا

$$f(x) - \beta f(x_1) = 0$$

أو

$$f(x - \beta x_1) = 0 .$$

أي إن العنصر $z = x - \beta x_1$ هو عنصر من L . أو

$$x = \beta x_1 + z$$

إن هذه المساواة تبين أن الفضاء H هو مجموع متعامد للفضاء الجزئي L والفضاء الجزئي الأحادي البعد والمولد بالعنصر x_1 . بما أن $z \perp x_1$ ، فإنه يكون لدينا

$$(x , x_1) = \beta \| x_1 \|^2$$

وبما أن $\beta = f(x)$ فإن

$$f(x) = (x , \frac{x_1}{\| x_1 \|^2})$$

ولنرمز بـــ u للعنصر $\frac{x_1}{\| x_1 \|^2}$ فنجد العلاقة

$$f(x) = (x , u) \qquad (4.2.14)$$

والتي تعبر عن دالي خطي كيفي $f(x)$ في شــكل جــداء داخلــي للعنــصر x و لعنصر مثبت u . إن العنصر u يتعرف بشكل وحيد بالدالي f . في الواقــع إذا كان أيضاً

$$f(x) = (x , v)$$

فإن ذلك يؤدي إلى أن

$$(x , u - v) = 0$$

من أجل أي عنصر $x \in H$. وبالتالي فإن $u - v = 0$ أو $u = v$.

من العلاقة $(4.2.14)$ نجد أن

$$| f(x) | = | (x , u) | \leq \| x \| \, \| u \|$$

ومنه فإن

$$\| f \| \leq \| u \|$$

وبما أنه، من ناحية ثانية ، لدينا

$$f(u) = (u , u) = \| u \|^2$$

فإن $\| f \|$ لا يمكن أن يكون أصغر من $\| u \|$ وهكذا فإن $\| f \| = \| u \|$ هكــذا نحصل على المبرهنة التالية :

مبرهنة أي دالي خطي $f(x)$ معرف في فضاء هيلبرت يكون له الشكل :

$$f(x) = (x , u)$$

حيث إن العنصر u يتعرف بشكل وحيد بالدالي f وتبعاً لذلك فإن

$$\| f \| = \| u \| \qquad (4.2.15)$$

بسهولة يمكن التأكد من العكس . أي إنه من أجل أي عنصر $u \in H$ تعرف العلاقة $(4.2.14)$ دالياً خطياً $f(x)$ يعطى نظيمــه بالعلاقــة $(4.2.15)$. بــذلك

تعطينا العلاقة ($4 . 2. 14$) الشكل العام للدالي الخطي في فضاء هيلبرت H . تعرف هذه المبرهنة **باسم تمثيل ريس للدالي الخطي في فضاء هيلبرت .**

§ ٣ – الفضاءات المرافقة والمؤثرات المرافقة
Conjugate Spaces and Adjoint Operators

كنا قد أشرنا إلى أن مجموعة جميع الداليات الخطية المعرفة على فضاء خطي منظم E تشكل فضاء باناخ E^* و الذي يسمى بالفضاء المرافق للفضاء E . باستخدام الشكل العام للداليات الخطية ، يمكننا ، في بعض الحالات ، بيان طبيعة الفضاء E^* بدقة إلى إيزومورفيزم (بغض النظر عن ايزوموفيزم) .

١ . ليكن $E = C [0 , 1]$. ولنستعرض مجموعة التوابع ذات التغيرات المحدودة $g (t)$ والمعرفة على المجال $[0, 1]$ والتي تؤول إلى الصفر في النقطة $t = 0$. وسنفرض أنه في نقاط الانقطاع τ يكون $g (\tau) = g (\tau - 0)$. من الواضح أن هذه المجموعة هي فضاء خطي بالنسبة لعمليتي جمع تابعين وضرب تابع بعدد حقيقي المألوفتين . لنعرف نظيماً للتوابع ذات التغيرات المحدودة . لنضع

$$\| g \| = \overset{1}{\underset{0}{V}} \{ g \}$$

بسهولة يمكن التأكد من ان جميع موضوعات النظيم محققة ، لذلك نحصل على فضاء خطي منظم نرمز له بـ V وعناصره هي التوابع ذات التغيرات المحدودة على المجال $[0, 1]$.

لنستعرض ، من ناحية ثانية ، الفضاء $E^* = C^* [0 , 1]$ فضاء جميع الداليات الخطية المعرفة على $C [0, 1]$. برهنا أعلاه أن كل دالي خطي $f \in C^* [0, 1]$ يعرف وبشكل وحيد تابعاً $g (t)$ ، $g (0) = 0$ وذا تغير محدود . وبالعكس كل تابع $g (t)$ ، $g (0) = 0$ وذي تغير محدود يقابل دالياً $f \in C^* [0, 1]$ ولهذا فإنه يوجد بين مجموعة جميع الداليات الخطية من $C^* [0, 1]$ ومجموعة جميع عناصر فضاء التوابع ذات التغيرات المحدودة تقابل $(1 - 1)$. وبما أنه من الواضح ، بأن مجموع الداليين $f_1 + f_2$ يقابل بالمجموع

$g_1 + g_2$ مجموع التابعين الموافقين للداليين ، و أن الدالي λf يقابل بالتابع $\lambda g(t)$ فإننا نستنتج أن التقابل بين $C^*[0,1]$ والفضاء V هو ايزومورفيزم . وبماأن

$$\| f \| = \overset{1}{\underset{0}{V}}\{ g \} = \| g \|$$

فإن التقابل ايزومتري .

من وجهة نظر العديد من مسائل التحليل التابعي يعتبر هذان الفضاءان غير مختلفين ولذلك غالباً ما يذكر بأن الفضاء المرافق لفضاء التوابع المستمرة هو فضاء التوابع ذات التغيرات المحدودة .

٢ . ليكن $E = L^p[0,1]$ وبالإضافة إلىذلك لنأخذ الفضاء $L^q[0,1]$ حيث

$$q = \frac{1}{p-1}$$

بما أن كل دالي خطي $f \in L^p[0,1]$ يقابل وبشكل وحيد بتابع $\alpha(t)$ من $L^q[0,1]$ وبالعكس ، فإنه يتعرف لدينا تقابل $(1-1)$ بين $L^{p^*}[0,1]$ و $L^q[0,1]$. وكما ذكرنا سابقاً ، يمكن التأكد من أن هذا التقابل ايزومورفي و ايزومتري . أي إن $L^{p^*}[0,1] = L^q[0,1]$ على أن نفهم هذه المساواة بأنها محققة (بغض النظر عن ايزومورفيزم) بدقة حتى ايزومورفيزم . في حالة خاصة ومن أجل $p = 2$ يكون $L^{2^*}[0,1] = L^2[0,1]$ ولهذا فإن الفضاء $L^2[0,1]$ يسمى **فضاءً مترافقاً ذاتياً** .

٣ . بسهولة يمكن التأكد من أن $l_p^* = l_q$ ، وفي حالة خاصة فإن $l_2^* = l_2$. وجدنا أن فضاء المؤثرات الخطية المحدودة من الفضاء الخطي المنظم E_x إلى الفضاء الخطي المنظم E_y يكون فضاء باناخ إذا كان الفضاء E_y تاماً . وفقاً لذلك نجد أن الفضاء E^* المرافق للفضاء الخطي المنظم E هو فضاء باناخ (ليس من الضروري أن يكون E تاماً) . وبما أن الفضاء $L^p[0,1]$ هو الفضاء المرافق لـ $L^q[0,1]$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ و l_p هو الفضاء المرافق لـ l_q فإننا نجد وفقاً لـ ٢ و ٣ أن الفضاءين $L^p[0,1]$ و l_p تامان .

٤ . وجدنا أن الدالي الخطي في فضاء هيلبرت يولد بعنصر من ذلك الفضاء وهذا يعني أن فضاء هيلبرت مترافق ذاتياً . ولنفس السبب يكون الفضاء الإقليدي ذو الـ n بعداً فضاءً مترافقاً ذاتياً .

الفضاءات الانعكاسية *Reflexive Spaces* . ليكن E فضاءً خطياً منظماً ، وليكن E^* الفضاء المرافق له . بما أن E^* هو فضاء خطي منظم أيضاً فإنه يمكننا بناء $E^{**} = (E^*)^*$ وهكذا .

لنستعرض بشيء من التفصيل الفضاء E^{**} . إن هذا الفضاء هو فضاء الداليات الخطية F المعرفة على E^* الذي عناصره هي الداليات الخطية المعرفة على E . لنأخذ الدالي الخطي $f(x)$ المعرف على E . هنا يكون الدالي f مثبتاً أما x فهو متحول في E .

لنأتي الان إلى عبارة $f(x)$ من وجهة نظر أخرى . سنعتبر أن $x \in E$ عنصر مثبت أما f فهو عنصر متغير من E^* . أي إننا نقابل كل عنصر $f \in E^*$ بعدد حقيقي $f(x)$. بكلام آخر يمكننا النظر إلى العبارة $f(x)$ من أجل x مثبت و f متغير كدالي F_x معرف على الفضاء E^* (*) . لذلك يمكننا أن نكتب

$$f(x) = F_x(f)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن F_x دالي خطي ، وبالتالي فإن $F_x \in E^{**}$. في الحقيقة إن

$$\begin{aligned} F_x(f_1 + f_2) &= (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \\ &= F_x(f_1) + F_2(f_2) \end{aligned}$$

و

$$|F_x(f)| = |f(x)| \le \|x\| \, \|f\|$$

من هذا ، وفي حالة خاصة ، يكون

(*) ليكن على سبيل المثال :

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, d\, g(t)$$

بتثبيت $g(t)$ وتحويل $x(t)$ نحصل على الحالة الأولى ، وبتثبيت $x(t)$ وتحويل $g(t)$ نحصل على الحالة الثانية .

$$\| F_x \| \leq \| x \| \qquad (4.3.1)$$

واستناداً إلى النتيجة الأولى من مبرهنة هان – باناخ والتي تؤكد وجود دالي خطي مثل f_0 ونظيمه يساوي الواحد : $\| f_0 \| = 1$ ، من أجل كل عنصر x وبحيث إن $\| f_0(x) \| = \| x \|$. فإنه من أجل هذا الدالي نجد أن

$$| F_x (f_0) | = | f_0 (x) | = \| x \|$$

أو على حد سواء

$$| F_x (f_0) | = \| f_0 \| \, \| x \| \quad , \quad (\| f_0 \| = 1)$$

وبالتالي يكون لدينا

$$\| F_x \| \geq \| x \| \qquad (4.3.2)$$

بمقارنة $(4 . 3 . 1)$ و $(4 . 3 . 2)$ **نجد**

$$\| F_x \| = \| x \| \qquad (4.3.3)$$

بسهولة نجد أن

$$F_{x_1+x_2} (f) = F_{x_1} (f) + F_{x_2} (f)$$
$$F_{\lambda x} (f) = \lambda F_x (f)$$

بهذه الصورة نكون قد قابلنا كل عنصر $x \ni E$ بدالي $F_x \ni E^{**}$ ، إضافة إلى أن هذا التقابل بين E والمجموعة $\{ F_x \} \subset E^{**}$ هو تقابل إيزومورفي وايزومتري (كون التقابل وحيد القيمة بالتبادل ، أي $(1-1)$ بين E و $\{ F_x \}$ ، ينتج من $(4 . 3 . 3)$) بالتالي فإن $E \subset E^{**}$. في الحالة التي يكون فيها $E = E^{**}$ فإن الفضاء E يسمى **فضاءً انعكاسياً** .

مثال (١) . إن الفضاء الإقليدي ذا الـ n بعداً هو فضاء انعكاسي . في الحقيقة ، إذا كان E هو الفضاء الإقليدي ذو الـ n بعداً فإن E^* يكون أيضاً الفضاء الإقليدي ذا الـ n بعداً وبالتالي فإن E^{**} فضاء إقليدي ذو n بعداً ، وبما أنه إذا كان واحد من الفضاءات ذي الـ n بعداً جزءاً من الآخر فإنها تتطابق لذلك فإنه من $E \subseteq E^{**}$ ينتج أن $E = E^{**}$.

مثال (٢) . الفضاء $L^p [0,1]$ $(1 < p)$ هو فضاء انعكاسي . في الواقع لدينا

$$L^{p^{**}}[0,1] = (L^{p^*}[0,1])^* = (L^q[0,1])^* = L^p[0,1]$$

مثال (٣) الفضاء l_p $(1 < p)$ فضاء انعكاسي . ينتج ذلك كما في المثال السابق .

مثال (٤) . لنستعرض الفضاء $C[0, 1]$ ولنبرهن على أن هذا الفضاء ليس فضاءً انعكاسياً . لنفرض العكس . أي إن $C[0, 1]$ فضاء انعكاسي ، عندئذ أي دالي خطي $F(f)$ معرف على الفضاء V فضاء التوابع ذات التغيرات المحدودة ينبغي أن يكون من الشكل $F_x(f) = f(x)$ من أجل اختيار مناسب للعنصر $x \in C[0, 1]$. بتطبيق الشكل العام للدالي الخطي $f(x)$ المعرف على $C[0, 1]$ نجد أن أي دالي خطي $F(f)$ يكون من الشكل

$$F_x(f) = f(x) = \int_0^1 x(t)\, d f(t) \qquad (4.3.4)$$

رمزنا بـ $f(t)$ للتابع ذي التغيرات المحدودة والذي يقابل الدالي $f(x)$ من $C^*[0, 1]$. لنستعرض الدالي

$$F_{x_0}(f) = f(t_0+0) - f(t_0-0)$$

الذي يقابل كل تابع $f(t)$ ذي التغير المحدود بقفزة ذلك التابع في النقطة t_0 . من الواضح أن هذا الدالي جمعي ، كما أن

$$\left| F_{x_0}(f) \right| = \left| f(t_0+0) - f(t_0-0) \right| \le \bigvee_0^1 \{f\} = \| f \|$$

وبالتالي فإن $F_{x_0}(f)$ دالي محدود ونظيمه لا يتجاوز الواحد . بالإضافة إلى ذلك فإنه من الواضح أن $F_{x_0}(f) \neq 0$ في الحقيقة ، يكفي أن نستعرض $F_{x_0}(f_1)$ حيث

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t < t_0 \\ 1 & ; \quad t_0 \le t \le 1 \end{cases}$$

استناداً إلى العلاقة $(4.3.4)$ ينبغي أن يوجد تابع مستمر مثل $x_0(t)$ بحيث إن

$$F_{x_0}(f) = \int_0^1 x_0(t)\, d f(t) \qquad (4.3.5)$$

لنستعرض الآن التابع

$$f_0(t) = \int_0^t x_0(\tau)\, d\tau$$

عندئذ يكون لدينا $F_{x_0}(f_0) = 0$ وذلك لأن التابع $f_0(t)$ مستمر على المجال $[0, 1]$ ، ومن ناحية ثانية ومن كون $F_{x_0}(f) \not\equiv 0$ ينتج أن $x_0(t) \not\equiv 0$ وأن

$$F_{x_0}(f_0) = \int_0^1 x_0(t)\, d\, f_0(t) = \int_0^1 x_0^2\, dt > 0$$

هكذا نصل إلى تناقض ، وهذا التناقض ناجم عن فرضنا أن لكل دالي خطي $F \ni C^{**}[0, 1]$ الشكل F_x . أي إن الفضاء $C[0, 1]$ انعكاسي .

لقد برهن بليسنير (*A . I . Plessner*) أنه من أجل تطبيق طبيعي (*) إما أن يكون $E = E^{**}$ وإما أن تكون جميع الفضاءات $E, E^*, E^{**}, E^{***}, \ldots$ مختلفة .

لمزيد من التفاصيل حول هذا الموضوع يمكن العودة إلى كتاب

N . Dunford J , Schwartz . Linear Operators , Part I . General Theory .

المؤثرات المرافقة *Adjoint Operators* . لنستعرض المؤثر الخطي والمحدود $y = Ax$ الذي يطبق الفضاء الخطي المنظم E_x في الفضاء الخطي المنظم E_y .

ليكن $\varphi(y)$ دالياً خطياً معرفاً على E_y ، عندئذ يكون $\varphi(y)$ معرفاً من أجل $y = Ax$ حيث إن x عنصر ما من E_x ومن أجل $y = Ax$ يكون لدينا

$$\varphi(y) = \varphi(Ax) = f(x)$$

حيث إن $f(x)$ دالي معرف على E_x . من الواضح أن $f(x)$ خطي . بذلك نجد أن كل دالي $\varphi \ni E_y^*$ يقابل بدالي $f \ni E_x^*$ وبهذا يكون لدينا مؤثر معرف على E_y^* ومجموعة قيمه متوضعة في E_x^* . لنرمز لهذا المؤثر بـ A^* . يسمى

(*) ليكن E فضاءً خطياً منظماً وليكن E^{**} الفضاء المرافق لفضاء باناخ E^* يسمى التطبيق $f : x \to \hat{x}$ للفضاء E في الفضاء E^{**} والمعرف بالعلاقة $\hat{x}\,\hat{x} = x^*\,x$ من أجل $x^* \ni E^*$ بالتطبيق الطبيعي لـ E في E^{**} . أحياناً يسمى التطبيق المعرف أعلاه بالايزومورفيزم الايزومتري الطبيعي لـ E في E^{**}

المؤثر A^* **بالمؤثر المرافق للمؤثر** A . إن المساواة $\varphi(y) = f(x)$ تكتب على الشكل

$$f = A^* \varphi$$

مبرهنة (١) . المؤثر المرافق A^* للمؤثر الخطي والمحدود A والـذي يطبق الفضاء الخطي المنظم E_x في الفضاء الخطي المنظم E_y هو مـؤثر خطـي ومحدود ، و

$$\| A^* \| = \| A \|$$

البرهان . من الواضح أولاً أن المؤثر A^* جمعي ، كما أن

$$\left| (A^* \varphi)(x) \right| = \left| f(x) \right| = \left| \varphi(Ax) \right| \le$$
$$\le \|\varphi\| \ \|Ax\| \le \|\varphi\| \ \|A\| \ \|x\|$$

ومنه نجد

$$\| A^* \varphi \| \le \| A \| \, \| \varphi \|$$

وبالتالي فإن A^* مؤثر محدود ، وبالإضافة إلى ذلك فإن

$$\| A^* \| \le \| A \| \qquad (4.3.6)$$

ليكن x_0 عنصراً ما من E_x . استناداً إلىالنتيجة الأولى من مبرهنة هان – باناخ ينتج وجود دالي مثل φ_0 ∋ E_y^* و نظيمـه يـساوي الواحـد : $\| \varphi_0 \| = 1$ وبحيث إن $\varphi_0(Ax_0) = \| A x_0 \|$. ومن ذلك نستنتج أن

$$\| Ax_0 \| = \varphi_0(Ax_0) = f_0(x_0) \le \| f_0 \| \, \| x_0 \| =$$
$$= \| A^* \varphi_0 \| \, \| x_0 \| \le \| A^* \| \, \| \varphi_0 \| \, \| x_0 \| = \| A^* \| \, \| x_0 \|$$

وبالتالي فإن

$$\| A \| \le \| A^* \| \qquad (4.3.7)$$

من العلاقتين $(4.3.6)$ و $(4.3.7)$ نجد أن

$$\| A^* \| = \| A \|$$

وهو ما يثبت صحة المبرهنة .

مثال (١) . ليكن E فضاء ذا n بعداً وليكن المؤثر $A : E \to E$ معرفاً

بالمصفوفة $\{a_{ij}\}$ من المرتبة n والمساواة

$$y = A\,x$$

حيث $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ ، $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$

والتي تكتب علىالشكل

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_j$$

لنستعرض الدالي الخطي f د E^* حيث $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ و

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,\xi_i$$

لذا فإن

$$f(Ax) = \sum_{i=1}^{n} f_i\,\eta_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,f_i\,\xi_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,f_i\right)\xi_j = \sum_{j=1}^{n} g_j\,\xi_j$$

حيث

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,f_i$$

إن الشعاع $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ هو عنصر من الفضاء E^* ونحصل عليه من الشعاع $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ المنتمي إلى الفضاء نفسه بالتطبيق الخطي A^* : $g = A^* f$ المولد بمنقول المصفوفة المعرفة للمؤثر A . بالتالي فإن الانتقال إلىالمؤثر المرافق في الفضاء ذي الـ n يتم بالانتقال إلى منقول المصفوفة .

مثال (٢) . لنستعرض في الفضاء $L^2[0,1]$ المؤثر

$$Ax = y(t) = \int_0^1 K(t,s)\;x(s)\,ds$$

حيث إن $K(t,s)$ نواة مستمرة .

ليكن $f(y)$ دالياً خطياً معرفاً على $L^2[0,1]$ ، عندئذ يكون لـ $f(y)$ الشكل

$$f(y) = (y, f) = \int_0^1 y(t)\,f(t)\,dt \qquad , \qquad f(t) \in L^2[0,1]$$

ولذلك فإن

$$f(Ax) = \int_0^1 f(t) \left\{ \int_0^1 K(t,s)\, x(s)\, ds \right\} dt =$$

$$= \int_0^1 x(s) \left\{ \int_0^1 K(t,s)\, f(t)\, dt \right\} ds =$$

$$= \int_0^1 x(s) \quad g(s)\, ds$$

حيث

$$g(t) = \int_0^1 K(s,t) \quad f(s)\, ds$$

بذلك نجد أن الانتقال إلى المؤثر المرافق في هذا المثال يعني تبديل موضعي المتغيرين في النواة (تسمى النواة $K(s,t)$ بمنقول النواة $K(t,s)$) .

§ ٤ – فضاء باناخ ذو القاعدة

Banach Spaces With Basis

تعريف . ليكن E فضاءً لانهائي عدد الأبعاد من النمط B (فضاء باناخ) نقول عن متتالية العناصر $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ من E إنها قاعدة في هذا الفضاء إذا مثل أي عنصر $x \in E$ وبشكل وحيد على الشكل

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i$$

حيث إن ξ_i أعداد حقيقية .

من الواضح أن وحدانية التمثيل تكافئ الشرط أن

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i\, e_i = 0$$

إذا وفقط إذا كان $\xi_i = 0$ من أجل جميع i .

مثال (١) . ليكن $E = l_p$ ، عندئذ تشكل مجموعة العناصر

$e_1 = \{1, 0, 0, 0, \ldots\}$, $e_2 = \{0, 1, 0, 0, \ldots\}$, . . .

قاعدة في l_p وذلك لأنه من أجل أي عنصر يكون لدينا التمثيل الوحيد

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \, e_i$$

وذلك إذا كان $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ في الحقيقة ، إن

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \, e_i = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots\}$$

ولذلك فإن

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, e_i \right\| = \| \{0, 0, \ldots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots\} \| =$$

$$= \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

كباقٍ لسلسة متقاربة . وبالتالي فإن

$$x = \lim_{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \, e_i$$

كما انه إذا كان

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \, e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \xi'_i \, e_i$$

أي إن

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} (\xi_i - \xi'_i) e_i = \{\xi_1 - \xi'_1 , \xi_2 - \xi'_2 , \ldots\}$$

فإن

$$\xi_i = \xi'_i \qquad : \quad i = 1, 2, \ldots$$

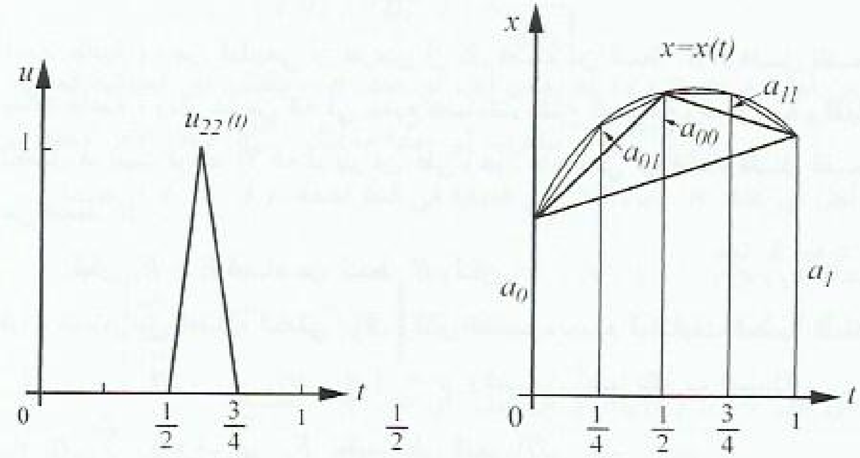
وهو المطلوب .

مثال (٢) . ليكن $E = C[0, 1]$. لنستعرض في الفضاء $C[0, 1]$ متتالية العناصر

$$t, 1-t, u_{00}(t), u_{10}(t), u_{11}(t), u_{20}(t), u_{21}(t), u_{22}(t), \ldots \qquad (4.4.1)$$

حيث إن $u_{kl}(t)$ ، $k=1,2,\ldots$ ، $0 \le l < 2^k$ ، تعـرف علـى النحو الآتي

$u_{kl}(t)=0$ إذا كانت t خارج المجال $\left(\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right)$. أما إذا كانـت t من ذلك المجال فإن المنحني البياني لـ $u_{kl}(t)$ يكون مثلثاً متساوي الساقين و ارتفاعه يساوي الواحد (في الشكل (٤) ممثل المنحني البياني للتابع $u_{22}(t)$)



الشكل (٤)

إن كل تابع $x(t)$ ∍ $C[0,1]$ يمثل في شكل سلسلة

$$x(t)=a_0\ t+a_1(1-t)+\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{kl}\ u_{kl}(t) \qquad (4.4.2)$$

حيث $a_0=x(1)$ ، $a_1=x(0)$ أما الأمثال a_{kl} فيمكن إيجادها و بشكل وحيد بطريقة هندسية مبينة في الشكل (٤)

من الواضح أن المنحني البياني للمجموع الجزئي

$$a_0(t)+a_1(1-t)+\sum_{k=0}^{s-1}\ \sum_{l=0}^{2^k-1} a_{kl}\ u_{kl}(t)$$

للسلسلة (4 . 4 . 2) هو خط منكسر عدد رؤوسه يساوي $1 + 2^s$ رأساً . و هــذه الرؤوس واقعة على المنحني $x = x(t)$ في نقاط فواصلها متساوية البعــد . إن مجموعة التوابع (4 . 4 . 1) تشكل قاعدة في الفضاء $C[0, 1]$.

إذا كان E فضاءً ذا قاعدة فإنه ، من الواضــح ، يكــون قــابلاً للفــصل ، وتكــون المجموعة القابلة للعد والكثيفة في كل مكان في الفضاء ذي القاعــدة هــي مجموعــة التراكيب الخطية من الشكل $\sum_{i=1}^{n} r_i e_i$ ذات المعاملات العادية r_i (المعاملات فيها أعداد عادية) . من الطبيعي أن نفرض أن كل فضاء من النمط B وقابــل للفــصل يمتلك قاعدة ، وبالرغم من انه في جميع فضاءات باناخ المعلومة والمعرفــة والقابلــة للفصل قد بنيت قواعد إلا أنه لم يبرهن على وجود قاعدة في أي فضاء قابــل للفــصل من النمط B .

ليكن $E = E_x$ فضاء من النمط B ولتكن $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ قاعــدة فيه . لنستعرض الفضاء الخطي E_y والذي عناصره جميع المتتاليات العددية الممكنة $y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots\}$ والتي من أجلها تتقارب السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$. لنعرف في E_y نظيماً على النحو الآتي

$$\| y \| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i \right\|$$

سنبين الآن أن E_y فضاء من النمط B . في الواقع ، بسهولة يمكن التأكد من تحقق موضوعات النظيم . ولنفرض أن المتتالية

$$\{y_k\} \subset E_y \quad ; \quad y_k = \{\eta_i^{(k)}\}_{i=1,2,\ldots}$$

متقاربة في نفسها ، عندئذ من أجل $0 < \varepsilon$ معطى يكون لدينا

$$\| y_m - y_k \| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)}) e_i \right\| < \varepsilon \ , \ m, k \geq m_0(\varepsilon)$$

وبالتالي فإن :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)}) e_i \right\| < \varepsilon \qquad (4.4.3)$$

من أجل $m, k \geq m_0(\varepsilon)$ و أي عدد n . من ذلك ينتج أن

$$\left\| (\eta_n^{(m)} - \eta_n^{(k)}) e_n \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)}) e_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)}) e_i \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)}) e_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(k)}) e_i \right\| < 2\varepsilon$$

ولذلك فإن

$$\left| (\eta_n^{(m)} - \eta_n^{(k)}) \right| < \frac{2\varepsilon}{\| e_n \|}$$

من أجل $m, k \geq m_0(\varepsilon)$ ومن أجل أي عدد n . بالتالي فإن المتتالية العددية $\{ \eta_n^{(m)} \}_{m=1,2,...}$ تتقارب إلى نهاية ما مثل $\eta_n^{(0)}$ وهذا الأمر محقق من أجل أي عدد n . بالانتقال إلى النهاية في المتراجحة $(4.4.3)$ عندما $k \to \infty$ نجد

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(0)}) e_i \right\| \leq \varepsilon \qquad (4.4.4)$$

من أجل $m \geq m_0(\varepsilon)$ و من أجل أي عدد n . لنضع

$$S_n^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(m)} e_i \qquad S_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^{(0)} e_i$$

وبالأخذ بعين الاعتبار المتراجحة $(4.4.4)$ يكون لدينا

$$\left\| S_{n+p}^{(0)} - S_n^{(0)} \right\| \leq \left\| S_{n+p}^{(m)} - S_n^{(m)} \right\| + 2\varepsilon$$

من أجل $m \geq m_0(\varepsilon)$ و من أجل أي عدد n وأي عدد $p > 0$.

لنفرض الآن أن $\delta > 0$ عدد معطى ما ، لنختر أولاً العدد ε ومن ثم $m_0(\varepsilon)$ بحيث إن $\frac{\delta}{2} > 2\varepsilon$ ومن ثم نثبت $m \geq m_0(\varepsilon)$ و نأخذ عدداً n_0 بحيث يكون

$$\left\| S_{n+p}^{(m)} - S_n^{(m)} \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل $n \geq n_0$ ومن أجل أي عدد $p > 0$ (هذا الأمر ممكن بنتيجة تقارب

السلسلة $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(m)} e_i$) . عندئذ يكون

$$\left\| S_{n+p}^{(0)} - S_n^{(0)} \right\| < \delta$$

من أجل $n_0 \le n$ ومن أجل أي عدد $0 < p$. أي إن السلسلة

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^{(0)} e_i$$

تتقارب وبالتالي فإن $y_0 = \{ \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}, \ldots, \eta_n^{(0)}, \ldots \} \in E_y$. وبما أنـــه ، وبالإضافة إلى ذلك ، ينتج من المتراجحة $(4.4.4)$ أن

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (\eta_i^{(m)} - \eta_i^{(0)}) e_i \right\| \le \varepsilon$$

من أجل $m_0 \le m$.

أي إن

$$\| y_m - y_0 \| \le \varepsilon \quad ; \quad m \ge m_0$$

وبالتالي فإن الفضاء E_y تام .من الواضح أن كل عنصر :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \quad \in E_x$$

يقابل بعنصر وحيد

$$y_x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \} \in E_y$$

وبالعكس ، كل عنصر $y = \{ \eta_i \} \in E_y$ يقابل بعنصر وحيـد $x_y \in E_x$ وعلـى وجه التحديد

$$x_y = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i$$

وبالتالي يمكننا أن نعتبر أنه لدينا مؤثر A يحقق تقابلاً $(1-1)$ (غامر و متبـاين) لــ E_y على E_x معرفاً بالعلاقة $A y = x$. وبسهولة يمكن التأكد من أن المـؤثر A خطي . بالإضافة إلى ذلك فإنه محدود . في الحقيقة ، إن

$$\| A y \| = \| x \| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \right\| \le \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i e_i \right\| = \| y \|$$

وبالتالي فإنه يكون لدينا مؤثر خطي يطبق E_y على E_x وغامر ومتباين . استناداً إلى مبرهنة باناخ يكون مقلوب هذا المؤثر A^{-1} موجوداً ويكون $y = A^{-1} x$ وهو بحد ذاته مؤثر خطي . ليكن

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \ e_i$$

عنصراً ما من E_x . ولنعرف دالياً f_k بالعلاقة : $f_k(x) = \xi_k$. من الواضح أن هذا الدالي جمعي ، كما أن

$$| f_k(x) | = | \xi_k | = \frac{| \xi_k | \| e_k \|}{\| e_k \|} = \frac{\left\| \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i e_i \right\|}{\| e_k \|} \leq$$

$$\leq 2 \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \frac{1}{\| e_k \|} = \frac{2 \| y \|}{\| e_k \|} = \frac{2 \| A^{-1} x \|}{\| e_k \|} \leq \frac{2 \| A^{-1} \|}{\| e_k \|} \| x \|$$

وبالتالي فإن f_k محدود وهذا بدوره يؤدي إلى أن f_k خطي ، كما أن

$$\| f_k \| \leq \frac{2 \| A^{-1} \|}{\| e_k \|}$$

لنعرف من أجل كل عدد k دالياً f_k ، فنحصل على متتالية لا نهائية من الداليات الخطية $E^* \supset f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ إضافة إلى أن كل عنصر $E \ni x$ يمكن كتابته على الشكل

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) \ e_i$$

لنضع ، في حالة خاصة ، $x = e_j$ فنجد أن

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & , \ if \ \ i = j \\ 0 & , \ if \ \ i \neq j \end{cases}$$

أي إن

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & ; \ if \ i = j \\ 0 & ; \ if \ i \neq j \end{cases} \qquad (4.4.5)$$

بذلك نحصل على متتاليتين من العناصر $\{ e_i \}$ والداليات $\{ f_i \}$ محققتين للعلاقات $(4.4.5)$ ، مثل هاتين المتتاليتين تسميان **بثنائيتي التعامد** .

لنأخذ الآن دالياً ما $f \in E^*$. بما أن

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) e_i = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i$$

فإن

$$f(x) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f[f_i(x) e_i] = \lim_n \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(e_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) f(e_i)$$

لنرمز بـــ c_i لـــ $f(e_i)$ ($c_i = f(e_i)$) فنحصل عندئذ على التمثيل الآتي

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x)$$

من أجل أي دالي $f \in E^*$. أو

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i \qquad (4.4.6)$$

من الواضح أن التمثيـــل $(4.4.6)$ وحيـــد وأن السلـــسلة $(4.4.6)$ تتقارب من أجل كل عنصر $x \in E$.

لنفرض مجدداً أن x عنصر ما من E ، عندئذ يكون

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j + \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j e_j$$

وبالتالي فإن كل عنصر $x \in E$ يقابل وبشكل وحيد بعنصرين

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \ \ and \ \ z_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_j e_j$$

وبهاتين المساويتين يتعرف لدينا مؤثران

$$y_n = S_n x \quad , \quad z_n = R_n x$$

معرفان على E وساحتا قيمهما متوضعتان في الفضاء نفسه .

من الواضح أن S_n و R_n مؤثران خطيان ومحدودان من أجل كل عدد مثبت n . في الواقع ، إن خطيتهما واضحة وأما محدوديتهما فتنتجان من المتراجحة

$$\| S_n x \| \leq \sup_m \left\| \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i \right\| = \| A^{-1} x \| \leq \| A^{-1} \| \; \| x \|$$

والمتراجحة المماثلة

$$\| R_n x \| \leq 2 \; \| A^{-1} \| \; \| x \|$$

الشكل المصفوفي لمؤثر في فضاء ذي قاعدة . ليكن A مؤثراً خطياً ومحدوداً و معرفاً في فضاء باناخ E ذي قاعدة ، ويطبق هذا الفضاء في نفسه . لنأخذ عنصراً $x \ni E$. عندئذ يكون :

$$x = \lim_n x_n$$

حيث

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, e_i$$

وبالتالي فإن

$$y = A x = A \lim_n x_n = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, Ae_i$$

وبما أن $A\, e_i$ هو ، مجدداً ، عنصر من E فإنه يمكن نشره بدلالة عناصر القاعدة

$$Ae_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} \, e_k$$

وعندئذ يكون

$$y = A x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{k\,i} \, e_k \right) \qquad (4.4.7)$$

وبما أن y أيضاً عنصر من E فإنه بالمثل يمكن نشره بدلالة عناصر القاعدة :

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \, e_k \qquad (4.4.8)$$

لنفرض الآن أن $\{ f_i \}$ متتالية داليات ثنائية التعامد مع المتتالية $\{ e_i \}$ عندئذ من $(4.4.7)$ و $(4.4.8)$ نجد

$$\eta_m = f_m(y) = f_m\left\{\lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\, e_k\right)\right\} =$$

$$= \lim_n f_m \left\{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\, e_k\right)\right\} =$$

$$= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki} f_m(e_k) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\xi_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{mi}\xi_i \qquad (4.4.9)$$

ن المساواة (4 . 4 . 9) تبين أن المؤثر A يتعرف بشكل وحيد بالمصفوفة اللانهائية (a_{mi}) (بدلالة هذه المصفوفة وبمركبات العنصر x تتعرف وبشكل وحيد مركبات العنصر $y = Ax$)

لنستعرض الآن المؤثر A^* المرافق للمؤثر A والذي يطبق الفضاء E^* في نفسه .

لنفرض أن $f = A^*\varphi$ ، أي إنه من أجل أي عنصر $x \in E$ يكون

$$\varphi(Ax) = f(x)$$

ولنفرض أيضاً أن

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i$$

و

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i$$

عندئذ يكون لدينا

$$\varphi(Ax) = \varphi\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\xi_i\right)e_k\right\} =$$

$$= \lim_n \varphi\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\xi_i\right)e_k\right\} = \lim_n \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\xi_i\right)\varphi(e_k) =$$

$$= \lim_n \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\xi_i\right)c_k = \lim_n \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}c_k\right)\xi_i$$

من ناحية ثانية لدينا

$$\varphi(Ax) = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \xi_i$$

وبالتالي فإن

$$\sum_{i=1}^{r} d_i \xi_i = \lim_{n} \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} c_k \right) \xi_i \qquad (4.4.10)$$

ليكن $x = e_m$ أي إن $\xi_m = 1$ و $\xi_i = 0$ من أجل $i \neq m$ عندئذ تعطينا العلاقة $(4.4.10)$:

$$d_m = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} a_{km} c_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{km} c_k$$

إن المساواة الناتجة تبين أن المصفوفة المقابلة للمؤثر المرافق هي منقول المصفوفة الموافقة للمؤثر المنطلق . مثل هذا التمثيل للمؤثرات ومرافقاتها يتحقق على سبيل المثال في الفضاء l_2 . من التمثيل المصفوفي للمؤثرات ، بسهولة نجد أن

$$1) \quad (A+B)^* = A^* + B^*$$
$$2) \quad (AB)^* = B^* A^*$$
$$3) \quad (A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$ (إذا كان A^{-1} موجوداً)

كما أن هذه العلاقات يمكن استنتاجها دون الفرض أن الفضاء يتمتع بقاعدة فيه .

الجداء السلمي – العناصر المتعامدة – الجمل ثنائية التعامد :

Inner Product and Orthogonal Elements – Biorthogonal Systems

ليكن $x \in E$ و f دالياً خطياً معرفاً على E أي إن $f \in E^*$. لنستعرض العبارة :

$$f(x) = (x, f) = (f, x) \qquad (4.4.11)$$

إن هذه العبارة ومن أجل f, x متغيران هي دالي ثنائي الخطية بالنسبة لمتحوليه أي إنه خطي بالنسبة لكل واحد من متحوليه . إن هذا الدالي ثنائي الخطية يؤول إلى الجداء الداخلي للعنصرين f, x في الحالة التي يكون فيها E فضاء هيلبرت أي إن $E = E^*$ (انظر العلاقة $4.2.14$) . لقد جرت العادة حتى في الحالة التي يكون فيها E^* و E غير متساويين ($E \neq E^*$) أن تسمى العلاقة $(4.4.11)$ بالجداء السلمي (الداخلي) للعنصرين $x \in E$ و $f \in E^*$.

نقول عن العنصرين $x \in E$ و $f \in E^*$ إنهما متعامدان إذا كان

$$(x, f) = (f, x) = 0$$

ذكرنا أعلاه أنه إذا كانت $\{x_n\}$ متتالية من E و $\{f_n\}$ متتالية من E^* فإن هاتين المتتاليتين تسميان ثنائيتي التعامد إذا كان

$$(x_i, f_j) = \delta_{ij} \qquad (4.4.12)$$

أي إن x_i و f_i متعامدان من أجل $i \neq j$. كما ذكرنا بأنه إذا كان الفضاء E ذي قاعدة $(e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots)$ وكانت $\{f_k\}$ متتالية من الداليات الخطية من E^* فإنه من أجل أي عنصر $x \in E$ يكون

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$$

و

$$f_k(x) = \xi_k$$

في الفضاءات المترافقة ذاتياً ، على سبيل المثال ، في فضاء هيلبرت تكون المتتاليتان ثنائيتا التعامد واقعتين في الفضاء نفسه . إذا كان $f_n = x_n$ وبالتالي فإن التعامد الثنائي يؤول إلى التعامد العادي .

لتكن المتتاليتان $\{x_n\}$ و $\{f_n\}$ ثنائيتي التعامد ، وليكن العنصر x ممثلاً في السلسلة الآتية

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i \qquad (4.4.13)$$

لدينا

$$(x, f_k) = \lim_n \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \, , f_k \right) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \xi_i (x_i, f_k)$$

من أجل $k \leq n$ واستناداً إلى العلاقة $(4.4.12)$ تؤول جميع الحدود في هذا المجموع إلى الصفر باستثناء الحد

$$\xi_k (x_k, f_k) = \xi_k$$

ومنه يكون $\xi_k = (x, f_k)$ وبالتالي فإن العلاقة $(4.4.13)$ تأخذ الشكل

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} (x, f_i) x_i \qquad (4.4.14)$$

وبالمثل ، إذا كان

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \; f_n \qquad (4.4.15)$$

فإن

$$d_n = (x_n , f)$$

تسمى السلسلتان $(4 . 4 . 14)$ ، $(4 . 4 . 15)$ بسلسلتي فوربيه الموافقتين للمتتاليتين ثنائيتي التعامد .

لنبين الآن وجود جملة ثنائية التعامد من الداليات الخطية $\{ f_1 , f_2 , . . . , f_n \} \subset E^*$ من أجل أية جملة من العناصر $\{ x_1 , x_2 , ... , x_n \} \subset E$ ومستقلة خطياً .

لتكن $L_1 = L (x_2 , x_3 , . . . x_n)$ المتنوعة الخطية المولدة بالعناصر $x_2 , x_3 , ... , x_n$: بما أن العنصر x_1 يقع على مسافة $0 < d$ من L_1 (استناداً للاستقلال الخطي للعناصر $x_1 , x_2 , ... , x_n$ ولكون L_1 مغلقة) فإنه يوجد دالي خطي $f_1 (x)$ بحيث إن $f_1 (x) = 0$ على L_1 وفي حالة خاصة على العناصر $x_2 , x_3 , ... , x_n$ و $f_1 (x_1) = 1$.

بإعادة هذه العملية من أجل المتنوعة الخطية :

$$L_2 = L (x_1 , x_3 , ... , x_n)$$

والعنصر x_2 ومن ثم بالاستمرار على هذا النحو نحصل على جملة الداليات المنشودة.

بالعكس ، لنفرض أنه لدينا جملة الداليات $\{ f_1 , f_2 , ... , f_n \} \subset E^*$ المستقلة خطياً ، أي إنه من

$$\lambda_1 f_1 (x) + \lambda_2 f_2 (x) + . . . + \lambda_n f_n (x) = 0$$

من أجل أي عنصر $x \in E$ ينتج أن $\lambda_1 = \lambda_2 = . . . = \lambda_n = 0$. عندئذ توجد جملة من العناصر مثل $\{ x_1 , x_2 , ... , x_n \} \subset E$ ثنائية التعامد مع جملة الداليات تلك . لنفرض أولاً أن $n = 1$. بما أن $f_1 (x) \neq 0$ فإنه يوجد عنصر مثل x_0 بحيث إن $f_1 (x_0) = \alpha$ ؛ $(\alpha \neq 0)$ وعندئذ يتمتع العنصر $x_1 = \dfrac{x_0}{\alpha}$ بالخاصة المطلوبة .

لنفرض صحة الأمر من أجل $(n-1)$ دالياً مستقلاً خطياً ولنبرهن صحة الأمر من أجل n دالياً . لتكن $\{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ جملة العناصر ثنائية التعامد مع الداليات $\{f_2, f_3, \ldots, f_n\}$ ولنرمز بـ M_1 للمتنوعة الخطية المعرفة بجملة المعادلات

$$f_2(x)=0 \;,\; f_3(x)=0 \;,\; f_n(x)=0$$

من أجل أي عنصر $x \ni E$ يكون العنصر

$$u = x - \sum_{i=2}^{n} c_i x_i \;;\quad c_i = f_i(x)$$

منتمياً للمتنوعة الخطية M_1 . في M_1 يوجد عنصر مثل x_0 بحيث إن $f_1(x_0)=\alpha$ $(\alpha \neq 0)$ وذلك لأنه في الحالة المعاكسة يكون $f_1(u)$ مساوياً للصفر من أجل جميع العناصر u :

$$f_1(x) - \sum_{i=2}^{n} c_i f_1(x_i) = 0$$

أو

$$f_1(x) = \sum_{i=2}^{n} f_1(x_i)\, f_i(x)$$

من أجل أي عنصر $x \ni E$ وهذا يعني أن f_1 هو تركيب خطي للداليات $f_2, f_3, \ldots, f_n$ وهذا مناقض للفرض .

هكذا ، يوجد عنصر مثل x_0 وبحيث إن

$$f_1(x_0)=\alpha \neq 0 \;,\; f_2(x_0) = f_3(x_0) = \ldots = f_n(x_0)=0$$

لنفرض $x_1 = \dfrac{x_0}{\alpha}$ فنحصل على العنصر الأول من الجملة ثنائية التعامد و بإعادة نفس الخطوات من أجل المتنوعة الخطية

$$M_2 = \{x : f_1(x)=0 \;,\; f_3(x)=0 \;,\; \ldots, f_n(x)=0\}$$

والدالي f_2 نحصل على عنصر x_2 وهكذا . . .

مسائل و تمارين

١- أي من الداليات f الآتية خطي ومستمر :

$$1)\quad f(x) = \int_0^1 x^2(t)\,dt \qquad ; \qquad x \in C[0,1]$$

$$2)\quad f(x) = \int_0^1 x(t)\,\sin^2 t\,dt \qquad ; \qquad x \in L^2[0,1]$$

$$3)\quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin k \qquad ; \qquad x \in L$$

حيث L متنوعة خطية عناصرها x و l_2 ومن أجلها تتقارب السلسلة

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \;\sin k \quad \text{و} \quad \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2}$$

٢- ليكن R_p^n فضاءً خطياً ذا n بعداً ، عناصره الأشعة الحقيقية

$x = \{ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \}$ ذات النظيم

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{1 \le k \le n} |\xi_k| & ; \quad p = +\infty \end{cases}$$

أوجد الشكل العام للدالي الخطي المستمر في R_p^n واحسب نظيمه .

٣ - ﴿) ليكن المؤثر $A : R^n \to R^n$ معرفاً بجملة المعادلات

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\xi_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

ولنستعرضه كمؤثر في R_∞^n (انظر التمرين٢) . بين أن

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

ب) لنفرض أن $A : R_1^n \to R_1^n$ بين أن

$$\| A \|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{j=1}^{n} | a_{ij} |$$

٤ – تحقق من أن العلاقة

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, x(t_k)$$

حيث $t_1 , t_2 , \ldots , t_n$ جملة من نقاط المجال $[a , b]$ و $c_k \in \mathbb{R}$ ، تعـرف دالياً خطياً ومستمراً في الفضاء $C[a , b]$ ثم احسب نظيمه .

٥ – تحقق من أن العلاقة :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k + \xi_{k+1}}{2^k}$$

حيث $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , \ldots \} \in l_2$ تعرف دالياً خطياً ومستمراً فـي l_2 ثم احسب نظيمه .

٦ – ليكن $f \neq 0 \in E^*$. ولتكن $M = \{ x \in E : f(x) = 1 \}$. برهن أن

$$\frac{1}{\| f \|} = \inf_{x \in M} \| x \|$$

٧ – ليكن العدد $1 < p$ مثبتاً . من أجل أي قيم لـــ $\alpha \in \mathbb{R}$ ينتمي الدالي :

$$f_\alpha (x) = \int_0^1 \frac{x(t)}{t^\alpha} \, dt$$

للفضاء $L^{p^*} [0,1]$.

٨ – اكتب في شكل تكامل ستيلتجيس الدالي f الخطي والمستمر على $C[-1, 1]$ ، حيث f معرف بالعلاقة

$$f(x) = \int_{-1}^{1} t \, x(t) \, dt - 2x(0)$$

٩ – لتكن $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ مجموعة من عناصر الفـضاء الخطـي المـنظم E ، مستقلة خطياً ، لتكن $c_1 , c_2 , \ldots , c_n$ مجموعة من الثوابت الحقيقة .

برهن على وجود دالي $f \in E^*$ بحيث إن

$$f(x_k) = c_k \; ; \; (k = 1 , 2 , \ldots , n)$$

١٠ – لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر الفضاء الخطي المنظم E ، ولتكن $\{c_n\}$ متتالية من الأعداد الحقيقية ، و M عدداً موجباً . برهن أن الشرط اللازم والكافي لوجود دالي f ∋ E^* محقق للشرط $f(x_n) = c_n$ ، $(n \in \mathbb{N})$ و $\|f\| \leq M$

هو أن يتحقق الشرط :

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k c_k| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right\|$$

من أجل أي عدد n ∋ $\mathbb{N}$ وأياً كانت الأعداد الحقيقية $\lambda_n, \ldots, \lambda_2, \lambda_1$ ،

١١ – لتكن L متنوعة خطية في الفضاء الخطي المنظم E . برهن أن L تكون كثيفة في E إذا وفقط إذا كان أي دالي خطي f ∋ E^* مساوياً للصفر على L مطابقاً للصفر .

١٢ – ليكن E فضاءً خطياً منظماً . برهن أنه إذا كان E^* قابلاً للفصل فإن E يكون قابلاً للفصل . هل العكس صحيح ؟ .

١٣ – برهن أن الدالي الخطي والمستمر $f(x) = x(0)$ في الفضاء $C[-1, 1]$ لا يمثل على الشكل :

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, g(t)\, dt$$

حيث $g(t)$ ∋ $C[-1, 1]$. أوجد تابعاً مثل $g(t)$ ذا تغير محدود على المجال $[-1, 1]$ وبحيث إن :

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\, g(t)$$

١٤ – ليكن $x(t)$ تابعاً من الفضاء $C[-1, 1]$. لنضع :

$$f(x) = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt$$

١) برهن أن f دالي خطي و محدود .

٢) أوجد تابعاً مثل $g(t)$ ذا تغير محدود على المجال $[-1, 1]$ وبحيث إن :

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\ d\ g(t)$$

١٥ – ليكن $x_0(t) \in C[0,1]$ تابعاً مثبتاً . ولنستعرض في الفضاء $C[0,1]$ الفضاء الجزئي الأحادي البعد $L = \{\lambda x_0(t)\}$ حيث $\lambda \in R$ ، ولنعرف على L دالياً خطياً بالعلاقة $f(x) = \lambda$ إذا كان $x = \lambda x_0$.

١) برهن أن $\| f \| = 1$.

٢) استناداً إلى مبرهنة هان – باناخ يمكن تمديد هذا الدالي ، مع الحفا على النظيم ، على الفضاء $C[0,1]$ ، فإذا كان

$a)$ $x_0(t) = t$ ، $b)$ $x_0(t) = 1 - 2t$ فهل يكون التمديد وحيداً ؟ .

١٦ – ليكن E^2 الفضاء الثاني البعد والذي عناصره $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. ليكن f دالياً خطياً معرفاً على الفضاء الجزئي L $L = \{ x \in E^2 : 2x_1 - x_2 = 0 \}$ بالعلاقة $f(x) = x_1$. برهن على وجود تمديد وحيد لـ f على E^2 مع الحفاظ على النظيم ثم أوجد ذلك التمديد .

الفصل الخامس

المجموعات المتراصة في الفضاءات المترية وفي الفضاءات المنظمة

منذ زمن بعيد ، يزيد عن مائة عام ، لاحظ الرياضي التشيكي بولزانو أن كل مجموعة محدودة وغير منتهية من المحور الحقيقي تمتلك ، على الأقل ، نقطة تجمع واحدة ، كما أنه لفت الانتباه إلى أهمية هذه النظرية في بناء قوي للتحليل الرياضي . لقد استخدمت في حساب التحولات ، وكذلك في إثبات مبرهنة وجود حل لمعادلة تفاضلية عادية فكرة فصل متتالية متقاربة من بعض مجموعات ليست نقطية بل إن عناصرها هي توابع أو منحنيات ، وفي غير ذلك من المواضيع ، وقد قاد هذا الأمر إلى تعريف عام للمجموعات المتراصة والمتوضعة في فضاء ما .

§ ١ . تعاريف . مبرهنات عامة .

لتكن K مجموعة متوضعة في فضاء متري X . تسمى هذه المجموعة **متراصة** إذا احتوت كل متتالية من عناصر هذه المجموعة على متتالية جزئية متقاربة .إذا انتمت نهايات تلك المتتاليات المنوه إليها إلى المجموعة K فإن K تسمى مجموعة **متراصة في نفسها** ، أما إذا انتمت تلك النهايات إلى الفضاء X ولم تنتم إلى K فإن K تسمى **مجموعة متراصة في الفضاء** X . من الواضح أن الشرط اللازم والكافي كي تكون K متراصة في نفسها ،أن تكون متراصة في الفضاء X ومغلقة .

في حالة خاصة ، إذا احتوت كل مجموعة جزئية وغير منتهية من الفضاء X على متتالية جزئية متقاربة إلى عنصر ما من X فإن الفضاء X يسمى **فضاء متراصا**

ويسمى الفضاء المتري المتراص **متراصة** . من الواضح أن المتراصة هي فضاء متري تام .

مثال ١ . ليكن $X = [0, 1]$. من الواضح أن X هو فضاء متراص وذلك استناداً إلى مبرهنة بولزانو .

مثال ٢ . ليكن $X = E_1$ الفضاء الإقليدي أُحادي البعد (المحور الحقيقي) إن X ليس متراصاً . في الحقيقة ، إن المجموعة الجزئية منه $M = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ لا تحتوي على أية متتالية جزئية متقاربة . خلافاً لذلك إن كل مجموعة محدودة في الفضاء X هي مجموعة متراصة استناداً لمبرهنة بولزانو .

مثال ٣ . ليكن X هو الفضاء الإقليدي ذا الـ n بعداً E_n . بشكل مماثل لما سبق نجد أن X ليس متراصاً وأن كل مجموعة محدودة من عناصر هذا الفضاء هي مجموعة متراصة .

مثال ٤ . ليكن $X = C[0, 1]$. إن هذا الفضاء ليس متراصاً ، وأكثر من ذلك فإنه في $C[0, 1]$ توجد مجموعات محدودة وغير متراصة .

مثال ٥ . ليكن $X = l_2$ ، هذا الفضاء ليس متراصاً ، وأكثر من ذلك فإنه في هذا الفضاء توجد مجموعات محدودة وغير متراصة ، كمثال على تلك المجموعات نأخذ الكرة الواحدية المغلقة $S = \overline{S}(\theta, 1)$.

في الحقيقة ، لنأخذ في S المتتالية الآتية :

$$e_1 = \{1, 0, 0, \ldots\} \quad , \quad e_2 = \{0, 1, 0, \ldots\} \ldots$$

لدينا $\| e_i - e_j \| = \sqrt{2}$ من أجل $i \neq j$ ، لذلك فإن هذه المتتالية أو أية متتالية جزئية منها لا تتقارب وهو ما يثبت عدم تراص S . كمثال غير تافه لمجموعة متراصة في الفضاء l_2 هو ما يسمى **بمتوازي السطوح الرئيسي** في فضاء هيلبرت الإحداثي و الذي يمثل مجموعة النقاط U :

$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots\}$ والتي تحقق إحداثياتها العلاقة $0 \leq \xi_n \leq \dfrac{1}{n}$. إن تراص المجموعة U ينتج من اختبار التراص العام الذي

سنستعرضه لاحقاً .

من الممكن إثبات مبرهنة مماثلة لمبرهنة الكرات المتوضعة (كل كرة محتواة في سابقتها) في فضاء متري تام X وذلك من أجل المجموعات المتراصة دون الفرض بأن الفضاء X تام . وعلى وجه الدقة تتحقق المبرهنة الآتية :

مبرهنة (كانتور) [*] . لتكن :

$$K_1 \supset K_2 \supset \ . \ . \ . \supset K_n \supset \ . \ . \ .$$

متتالية من المجموعات غير الخالية والمغلقة والمتراصة من الفضاء المتري X .

عندئذ يكون التقاطع $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ غير خال .

في الواقع ، لنأخذ في كل مجموعة K_i نقطة x_i فنحصل على متتالية $\{ x_i \} \subset K_1$. وبما أن K_1 متراصة ، فإنه من $\{ x_i \}$ يمكن فصل متتالية جزئية متقاربة مثل $\{ x_{i_k} \}$. لنفرض أن :

$$x_0 = \lim_{k} x_{i_k}$$

وبما أنه من أجل أي عدد مثبت n وبدءاً من الرقم $i_k > n$ تكون جميع حدود تلك المتتالية منتمية لـ K_n ، وبما أن K_n مغلقة فإن $x_0 \in K_n$ وعندئذ فإن $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ وهو المطلوب .

وجود القيمة الحدية (*The Existence of an Extremum*)

إن إثبات المبرهنات الأساسية المتعلقة بالتوابع المستمرة والمعرفة على مجال مغلق يستند إلى خاصة التراص . ويمكن تعميم بعض المبرهنات على الداليات المستمرة والمعرفةعلى مجموعات متراصة في فضاء متري كيفي .على سبيل المثال ، تتحقق المبرهنة الآتية والتي تعتبر تعميماً لمبرهنات وايرشتراس الشهيرة .

مبرهنة (١) . لتكن K مجموعة متراصة في نفسها من الفضاء X وليكن $f(x)$ دالياً مستمراً ومعرفاً على تلك المجموعة . عندئذ :

١. الدالي $f(x)$ محدود على K .

---

[*] *Cantor (3 . 3 . 1845 - 6 . 1 . 1918)* رياضي ألماني .

٢. يبلغ الدالي $f(x)$ حديه الأعلى و الأدنى على K .

١ • لنبرهن على أن الدالي محدود من الأعلى (بالمثل يبرهن على أنه محدود من الأدنى) . لنفرض العكس ، عندئذٍ توجد متتالية من النقاط مثل $\{x_n\}$ بحيث يكون $f(x_n) > n$. وبما أن K متراصة في نفسها فإن المتتالية $\{x_n\}$ تحتوي على متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة إلى نقطة $x_0 \in K$. عندئذ ، من ناحية أولى يكون $f(x_{n_k}) > n_k$ وبالتالي فإن $f(x_{n_k}) \to \infty$ عندما $k \to \infty$. من ناحية ثانية و استناداً إلى استمرارية الدالي على K ، وبشكل خاص في النقط x_0 ، نجد أن :

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \qquad ; \qquad k \to \infty$$

بذلك نحصل على تناقض وبذلك نكون قد أثبتنا محدودية الدالي $f(x)$.

٢ • ليكن $\beta = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. إن هذا يعني أن $f(x) \le \beta$ من أجل جميع $x \in K$ ، كما أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ توجد نقطة مثل $x_\varepsilon \in K$ بحيث إن :

$$f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon$$

بالتالي توجد متتالية من النقاط مثل $\{x_n\}$ بحيث إن :

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \beta \qquad (5.1.1)$$

وبما أن المجموعة K متراصة في نفسها فإن المتتالية $\{x_n\}$ تحتوي على متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ متقاربة إلى نقطة $x_0 \in K$ وعندئذ يكون :

$$\beta - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \le \beta$$

بالتالي فإن :

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \beta$$

من ناحية ثانية ، بما أن $f(x)$ مستمر في جميع نقاط المجموعة K وفي حالة خاصة في النقطة x_0 فإن :

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

وهذا يعني أن $f(x_0) = \beta$ وهو المطلوب .

بالمثل تماماً يبرهن على أنه إذا كان $\alpha = \inf\limits_{x \in K} f(x)$ ، فإنه توجد نقطة مثل ξ_0 ∋ K وبحيث إن $f(\xi_0) = \alpha$

ملاحظة . ينبغي الإشارة هنا إلى أنه إذا كان الدالي المستمر $f(x)$ معرفاً على مجموعة غير متراصة في نفسها فإنه من الممكن أن لايبلغ الحدين :

$$\inf_{x \in K} f(x) \qquad \text{و} \qquad \sup_{x \in K} f(x)$$

لنستعرض على سبيل المثال ، في الفضاء $C[0, 1]$ المجموعـــة M مجموعـــة جميع الداليات $x(t)$ التي تحقق الشروط $x(0) = 0$ ، $x(1) = 1$ و $\max\limits_{t} |x(t)| \leq 1$ إن الدالي :

$$f(x) = \int_0^1 x^2(t)\; dt$$

مستمر على M ولايبلغ على هذه المجموعة حده الأدنى .

في الواقع ، إذا كان $x(t) = t^n$ ، فإن :

$$f(x) = \frac{1}{2n+1}$$

وهذا يعني أن :

$$\inf_{M} f(x) = 0$$

إلا أنه من الواضح أنه من أجل كل منحنٍ مستمر $x = x(t)$ يصل النقطتين $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ يكون $0 < f(x)$ (من هذا وفي حالة خاصة ينتج أن مجموعة المنحنيات المستعرضة ليست متراصة بالرغم من أنها مجموعة محدودة ومغلقة في $C[0, 1]$

بهذه الصورة ، ينبغي علينا ، قبل الاستناد إلى المبرهنة (١) ، التأكـد مـن تـراص المجموعة التي عرف عليها الدالي المستمر .

إن فرضية بلوغ الدالي المستمر حده الأعلى الأصغري أو الأدنـى الأعظمـي علـى مجموعة غير متراصة يؤدي إلى نتائج غير صحيحة كما في المثال المذكور .

تُعمم المبرهنة (١) على الداليات نصف المستمرة . بالتعريف يسمى الدالي $f(x)$ **نصف مستمر من الأدنى (من الأعلى)** ، إذا نتج من تقارب المتتالية $\{x_n\}$ إلى x ($x_n \to x$) أن :

$$f(x) \le \underline{\lim}_n f(x_n) \quad \left(f(x) \ge \overline{\lim}_n f(x_n) \right)$$

ومن أجل هذه الداليات تتحقق المبرهنة الآتية :

مبرهنة (٢). الدالي $f(x)$ نصف المستمر من الأدنى (من الأعلى) والمعرف على مجموعة متراصة في نفسها يكون محدوداً من الأدنى (من الأعلى) على هذه المجموعة ويبلغ عليها حده الأدنى الأعظمي (الأعلى الأصغري) .

لهذه المبرهنة تطبيقات واستخدامات واسعة في حساب التحولات وذلك لأن الصفوف الهامة من الداليات المستعرضة هناك (في حساب التحولات) هي صفوف الداليات نصف المستمرة .

معايير تراص مجموعة في فضاء متري

(*Criteria for Compactness*)

سنعطي الآن المعيار الأول لتراص مجموعة متوضعة في فضاء متري . وبغية هذا الأمر سنعطي أولاً التعريف الآتي :

تسمى المجموعة N من الفضاء المتري X ε **- شبكة** للمجموعة M من الفضاء نفسه ، إذا وجدت من أجل كل نقطة $x \in M$ نقطة $x_\varepsilon \in N$ بحيث إن

$$\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$$

(في حالة خاصة يمكن أن تتطابق M مع الفضاء X) .

مبرهنة (٣) (هاوسدورف) [*] . الشرط اللازم لتراص المجموعة K من الفضاء المتري X هو أن يوجد من أجل كل عدد $0 < \varepsilon$, ε - شبكة منتهية للمجموعة K (إذا كان X تاماً فإن الشرط يصبح كافياً أيضاً) .

اللزوم . لنفرض أن K متراصة . ولتكن x_1 نقطة ما من K . إذا كان

---

[*] *Hausdorf F* (*8 . 11 . 1868 – 26 . 1 . 1442*) رياضي ألماني .

$\varepsilon < \rho\,(x\,,\,x_1)$ من أجل جميع النقاط $x \in K$ فإن ε – شبكة المنتهيـــة قد بنيت . أما إذا كان ذلك غير محقق فإنه توجد نقطة مثل $x_2 \in K$ وبحيث يكون $\varepsilon \geq \rho\,(x_1\,,\,x_2)$. إذا كـــان مـــن أجـــل أيـــة نقطـــة $x \in K$: إمـــا $\varepsilon < \rho\,(x\,,\,x_1)$ وأما $\varepsilon < \rho\,(x\,,\,x_2)$ فإن ε – شبكة المنتهية قد بنيت . إذا كان ذلك غير محقق أيضاً ، فإنه توجـــد نقطـــة مثـــل $x_3 \in K$ بحيـــث إن :

$$\rho\,(x_2\,,\,x_3) \geq \varepsilon \qquad \text{و} \qquad \rho\,(x_1\,,\,x_3) \geq \varepsilon$$

بالاستمرار على هذا النحو نجد النقاط $x_1\,,\,x_2\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,x_n$ والتي مـــن أجلهـــا يكون $i \neq j\;\;;\;\;\varepsilon \geq \rho\,(x_i\,,\,x_j)$.

ويمكن أن نقوم بافتراضين . إما أن تتقطع عملية بناء النقاط بعد k خطوة أي إنه من أجل أية نقطة $x \in K$ تتحقق واحدة من المتراجحات :

$$\rho\,(x, x_i) < \varepsilon \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

وفي هذه الحالة تشكل مجموعة النقاط $x_1\,,\,x_2\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,x_k$ ε – شبكة منتهية للمجموعة K (*) ، وإما أن تستمر عملية بناء النقاط x_i دون توقف أو تحديـــد . إن هذا الافتراض مستثنى وذلك لأنه إذا كان ذلك محققاً فإننا نحصل على متتالية غير منتهية من النقاط $x_1\,,\,x_2\,,\,.\,.\,.\,.\,,\,x_n\,,\,.\,.\,.\,.$ بحيث إن :

$$\rho\,(x_i\,,\,x_j) \geq \varepsilon \quad ; \quad i \neq j$$

وبالتالي فإن هذه المتتالية أو أية متتالية جزئية منها لا تكون متقاربة ، الأمـــر الـــذي يناقض تراص المجموعة K .

كفاية الشرط . لنفرض أن الفضاء X تام ، وأنـــه مـــن أجـــل أي عـــدد $\varepsilon > 0$ توجد ε – شبكة منتهية للمجموعة K . لنأخذ متتالية الأعداد $\{\,\varepsilon_n\,\}$ ، $\lim\limits_{n} \varepsilon_n = 0$ ولنبن من أجل كل عدد ε_n منها ε_n – شبكة منتهية

$$\{\; x_1^{(n)}\;,\; x_2^{(n)}\;,\;.\;.\;.\;.\;,\; x_{k_n}^{(n)} \;\}$$

للمجموعة K . لنأخذ مجموعة جزئية ما غير منتهية $T \subset K$ ولنحط كل نقطـــة من النقاط $x_1^{(1)}\;,\;x_2^{(1)}\;,\;.\;.\;.\;.\;,\;x_{k_1}^{(1)}$ بكرة مغلقة نصف قطرها ε_1 ، عندئذ

(*) من المفيد ملاحظة أن هذه الـــ ε – شبكة مؤلفة من نقاط المجموعة K .

تقع كل نقطة من نقاط T في واحدة من تلك الكرات . وبما أن عدد تلك الكرات منته فإنه ، على الأقل ، في واحدة منها تقع مجموعة غير منتهية من نقاط المجموعة T . لنرمز لهذه المجموعة الجزئية من T بـ T_1 . لنأخذ النقاط $x_{k_2}^{(2)}$, ... , $x_2^{(2)}$, $x_1^{(2)}$ ولنحط كل منها بكرة مغلقة نصف قطرها ε_2 وبشكل مماثل لما سبق نحصل على مجموعة غير منتهية $T_1 \supset T_2$ متوضعة بشكل كامل في واحدة من الكرات التي نصف قطرها ε_2 . بالاستمرار على هذا النحو نحصل على المتتالية $T_1 \supset T_2 \supset . . . \supset T_n \supset . . .$ من المجموعات الجزئية غير المنتهية من المجموعة T ، إضافة إلى أن المجموعة الجزئية T_n محتواة في الكرة المغلقة ذات نصف القطر ε_n ، وبالتالي فإن المسافة بين أية نقطتين من T_n لا تزيد عن $2\,\varepsilon_n$.

لنأخذ الآن نقطة $\xi_1 \in T_1$ ونقطة $\xi_2 \in T_2$ ومختلفة عن ξ_1 ونقطة $\xi_3 \in T_3$ ومختلفة عن ξ_2 و ξ_1 وهكذا . . . ، بذلك نحصل على متتالية من نقاط T

$$T_\omega = \{ \ \xi_1 \ , \ \xi_2 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ \xi_n , . \ . \ \}$$

إن هذه المتتالية متقاربة في نفسها . في الواقع ، إن $\xi_n \in T_n$ و $\xi_{n+p} \in T_{n-p} \subset T_n$ من أجل أي عدد طبيعي p . بالتالي فإن :

$$\rho \ (\xi_{n+p} \ , \xi_n) \ < \ 2\,\varepsilon_n \to 0 \qquad ; \qquad n \to \infty \ , \ p > 0$$

وبما أن الفضاء X تام فرضاً فإن المتتالية T_ω تتقارب إلى نقطة مثل $\xi \in X$ وهذا ما يثبت أن المجموعة K متراصة .

نتيجة (١) . لتكون المجموعة K من الفضاء المتري التام X متراصة يكفي أن توجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ ، ε - شبكة متراصة للمجموعة K .

لتكن N $\frac{\varepsilon}{2}$ - شبكة متراصة للمجموعة K . بتطبيق المبرهنة السابقة على N ، نجد أنه توجد N_0 $\frac{\varepsilon}{2}$ شبكة للمجموعة N وعندئذ تكون N_0

ε – شبكة منتهية للمجموعة K . في الواقع ، من أجل كل نقطة $x \in K$ توجد نقطة $\xi \in N$ بحيث إن :

$$\rho(x, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبدوره من أجل النقطة $\xi \in N$ توجد نقطة $x_\varepsilon \in N_0$ بحيث إن :

$$\rho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

بالتالي ، فإنه من أجل أية نقطة $x \in K$ توجد في N_0 نقطة مثل x_ε بحيث إن

$$\rho(x, x_\varepsilon) \leq \rho(x, \xi) + \rho(\xi, x_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي إن N_0 ε – شبكة منتهية للمجموعة K .

بما أن الفضاء X تام فإنه استناداً للمبرهنة السابقة نجد أن K متراصة .

نتيجة (٢). الفضاء المتراص X قابل للفصل .

في الواقع ، لنأخذ المتتالية $\{\varepsilon_n\}$ حيث إن $\varepsilon_n \to 0$ ولنبن من أجل كل عدد ε_n منها ε_n – شبكة منتهية :

$$N_n = \{ x_i^{(n)} \}_{i=1,2,\ldots,k_n}$$

لتكن $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ من الواضح أن N قابلة للعد وأنها كثيفة في كل مكان في X .

نتيجة(٣). المجموعة المتراصة K (من فضاء متري X) محدودة .

لتكن $N_1 = \{ x_1, \ldots, x_n \}$ هي 1 – شبكة للمجموعة K وليكن a عنصراً مثبتاً من الفضاء المتري X ولنفرض أن :

$$d = \max_i (a, x_i)$$

من الواضح أنه من أجل أية نقطة $x \in K$ يكون لدينا :

$$\rho(x, a) \leq 1 + d$$

وهو المطلوب .

سنورد الآن اختبارين للمجموعات المتراصة في نفسها والتي يمكن اعتبارهما أيضاً كتعريفين لذلك المفهوم .

نقول عن الجملة $\{ G_\alpha \}$ من المجموعات المفتوحة من الفضاء X إنها **تغطية للمجموعة** $M \subset X$ إذا انتمت كل نقطة $x \in M$ على الأقل لواحدة من المجموعات G_α في تلك الجملة .

مبرهنة(٤) . الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة المغلقة F من الفضاء المتري X متراصة في نفسها هو أن تحتوي أية تغطية لـ F على تغطية منتهية .

لزوم الشرط . لتكن $\{ G_\alpha \}$ جملة من المجموعات المفتوحة والتي تشكل تغطية للمجموعة المتراصة في نفسها F والتي لا يمكن فصل تغطية منتهية منها للمجموعة F . لنأخذ المتتالية $\{ \varepsilon_n \}$ المتقاربة إلى الصفر ، ولتكن $x_1^{(1)} , x_2^{(1)} , \ldots , x_{k_1}^{(1)}$ ε_1 – شبكة للمجموعة F . عندئذ يكون :

$$F = \bigcup_{n=1}^{k_1} F_i$$

حيث :

$$F_i = \bar{S} (x_i^{(1)} , \varepsilon_1) \cap F$$

بسهولة نرى أن F_i مجموعة متراصة في نفسها وأن قطرها لا يزيد عن $2 \varepsilon_1$ ، فإذا لم يمكن تغطية المجموعة F بأية جملة منتهية من $\{ G_\alpha \}$ فإن هذا الأمر لا يمكن تحقيقه على الأقل من أجل مجموعة واحدة من المجموعات F_i . ولنفرض أن F_{i_1} هي تلك المجموعة التي لا يمكن تغطيتها بأية جملةجزئية منتهية من $\{ G_\alpha \}$. بنفس الطريقة ومن F_{i_1} نحصل على مجموعة $F_{i_1 i_2}$ متراصة ونصف قطرها لا يزيد عن $2 \varepsilon_2$ والتي لا يمكن تغطيتها بجملة جزئية منتهية من $\{ G_\alpha \}$. وهكذا و بالاستمرار على هذا النحو نحصل على متتالية من المجموعات المتوضعة كل منها في سابقتهاو المغلقة و المتراصة

$$F_{i_1} \supset F_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset F_{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \ldots$$

والتي أقطارها تسعى إلى الصفر .

لنفرض أن النقطة المنتمية إلى جميع هذه المجموعات هـي x_0 . بمـا أن الجملـة $\{ G_\alpha \}$ تشكل تغطية للمجموعة F و $x_0 \in F$ فإنه توجد مجموعة مثـل G_{α_0} تحتوي على هذه النقطة . وبما أن المجموعة G_{α_0} مفتوحـة فإنـه يوجـد جـوار $S(x_0 , \varepsilon)$ للنقطة x_0 يقع كلياً في المجموعة G_{α_0} . لنختـر الآن العـدد n كبيراً بشكل كاف وبحيث يكون قطر المجموعة $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ أصغر من ε . عندئذٍ من الواضح أن :

$$F_{i_1 i_2 \dots i_n} \subset S(x_0 , \varepsilon)$$

هكذا نصل إلى تناقض . من ناحية أولى إن المجموعة $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ وفقاً لطريقة بنائها لا يمكن تغطيتها بأية جملة جزئية منتهية من $\{ G_\alpha \}$ ومن ناحية ثانية إن هذه المجموعة مغطاة بـ G_{α_0} . بالتالي فإنه من أية تغطية للمجموعة F يمكن فصل تغطية منتهية وهوما يثبت لزوم الشرط .

كفاية الشرط . لنفرض أنه من كل تغطية للمجموعة F يمكن فصل تغطية منتهية . لتكن M مجموعة جزئية من المجموعة F وبحيث إنه لاتوجد لها نقطـة تجمع . عندئذ من أجل كل نقطة $x \in F$ يوجد جـوار $S(x , \varepsilon_x)$ لايحتـوي ، باستثناء النقطة x نفسها ، على أية نقطة من M . إن هذه الجوارات تشكل تغطيـة للمجموعة M . لنفصل من تلك التغطية تغطية منتهية

$$S (x_1 , \varepsilon_1) , S (x_2 , \varepsilon_2) , \dots , S (x_n , \varepsilon_n)$$

بما أن المجموعة M بأكملها تقع في هذه الجوارات وأن كل جـوار يحتـوي علـى الأكثر على نقطة من نقاط المجموعة M فـإن المجموعـة M يجـب أن تكـون منتهية . بالتالي فإنه ينبغي أن توجد لأية مجموعة جزئية غيـر منتهيـة $M \subset F$ نقاط تجمع ، أي إن F متراصة .

نقول عن جملة من المجموعات إنها **متمركزة** إذا كان تقاطع أية جملة جزئية منتهيـة منها غير خالٍ .

مبرهنة (٥). الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة المغلقة F مـن الفضاء المتري X متراصة هو أن يكون تقاطع أية جملة متمركزة من المجموعات

المغلقة من المجموعة F غير خال .

لزوم الشرط . لنفرض أن F متراصة فـي نفـسها وأن $\{ F_\alpha \}$ جملـة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة من F والتي تقاطعها خال . لنضع $G_\alpha = C F_\alpha$ [*] عندئذ تكون G_α مجموعة مفتوحة ويكون :

$$\bigcup_\alpha G_\alpha = C \bigcap_\alpha F_\alpha = X$$

وبالتالي فإن الجملة $\{ G_\alpha \}$ تشكل تغطية للمجموعة F . وبالتالي فإنه يمكننا فصل جملة جزئية منتهية والتي تشكل تغطية لـ F :

$$G_{\alpha_1} , G_{\alpha_2} , \ldots , G_{\alpha_n} .$$

بما أن $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ فإن :

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = C \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \subset C F \qquad (5.1.2)$$

إلا انه من ناحية ثانية $F_{\alpha_i} \subset F$ ولذلك فإن :

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \subset F \qquad (5.1.3)$$

من العلاقتين $(5.1.2)$ ، $(5.1.3)$ ينتج أن $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$ وهذا يناقض الفرض أن $\{ F_\alpha \}$ جملة متمركزة وهو ما يثبت لزوم الشرط .

كفاية الشرط . لنفرض أن تقاطع أية جملة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة من F غير خال . لنستعرض أية تغطية $\{ G_\alpha \}$ للمجموعة F حيث إن G_α مجموعات مفتوحة . لنضع :

$$F_\alpha = F \setminus G_\alpha = F \cap C G_\alpha$$

إن المجموعات F_α مغلقة ، كما أن :

$$\bigcap_\alpha F_\alpha = F \setminus \bigcup_\alpha G_\alpha = \varnothing$$

وبالتالي فإن الجملة $\{ F_\alpha \}$ ليست متمركزة . بالتالي توجد جملة جزئية

---

[*] $C A$ تعني متممة المجموعة A .

F_{α_1} , F_{α_2} , ... , F_{α_n} تقاطعها خال . وعندئذ ومن أجل المجموعات المقابلة لها

$$G_{\alpha_1}\ ,\ G_{\alpha_2}\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ G_{\alpha_n}$$

يكون لدينا :

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \supset F \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = F$$

بهذه الصورة نكون قد بينا بأنه من أية تغطية $\{ G_\alpha \}$ للمجموعة F أمكننا فصل تغطية منتهية .

مبرهنة (٦) . كل مجموعة متراصة في نفسها من فضاء متري هي صورة مستمرة لمجموعة كانتور الكاملة (مجموعة كانتور المتقطعة) .

لن نتعرض لإثبات هذه المبرهنة هنا ، وللإطلاع على البرهان بشكل كامل يمكن العودة إلى [1] أو [8]

لنستعرض الآن تطبيقاً f لمتراصة X إلى فضاء متري Y .

مبرهنة (٧) . الصورة المستمرة لمتراصة هي متراضة .

في الحقيقة ، لتكن $\{ y_n \}$ متتالية كيفية من $Y \supset f(X)$. ولنأخذ من أجل كل عنصر y_n واحدة من الصورة العكسية x_n . بما أن $\{ x_n \} \subset X$ و X متراصة ، فإنه من $\{ x_n \}$ يمكننا فصل متتالية جزئية $\{ x_{n_k} \}$ متقاربة إلى عنصر $X \ni x_0$. وبما أن $f(x)$ تطبيق مستمر فإن :

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(X)$$

بذلك نجد أن أية متتالية من $f(X)$ تحتوي على متتالية جزئية متقاربـة ، إضـافة إلى أن نهاية تلك المتتالية الجزئية تنتمـي إلـى $f(X)$ وبالتـالي فـإن $f(X)$ متراصة . إن هذه المبرهنة تعطي بالتمازج مع المبرهنة (٦) وصـفاً تامـاً لجميـع المتراصات . وعلى وجه التحديد فإن الفضاء المتري يكون متراصاً إذا وفقط إذا كـان صورة مستمرة لمجموعة كانتور المتقطعة .

§ – ٢ معايير التراص لمجموعات في بعض الفضاءات التابعية
Criteria for Compactness of Sets

معيار التراص في $C[0\,,\,1]$.
Criterion for Compactness in $C[0\,,\,1]$

نقول عن توابع من مجموعة ما M إنها **محدودة بانتظام** (*uniformly bounded*) إذا وجد ثابت مثل c بحيث يكون $|x(t)| \leq c$ من أجل جميع التوابع $x(t) \in M$ وأية نقطة $t \in [0\,,1]$. ونقول عن التوابع إنها متساوية الاستمرار (*equicontinuous*) إذا وجد من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ يتعلق فقط بـ ε وبحيث إنه من أجل أية نقطتين t_1 و t_2 من $[0\,,\,1]$ محققتين للمتراجحة $|t_1 - t_2| < \delta$ يكون :

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \varepsilon$$

من أجل أي تابع $x(t)$ من المجموعة M .

مبرهنة ١ (أرزيلا) (*Arzela*) [*] . الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $K \subset C[0\,,1]$ متراصة هو أن تكون التوابع $x(t) \in K$ محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار .

اللزوم . لتكن K متراصة . إن المحدودية بانتظام للتوابع $x(t) \in K$ تنتج من النتيجة (٣) للمبرهنة (٣) في الفقرة السابقة . لنبرهن الاستمرار المتساوي للتوابع $x(t) \in K$. ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ولنبن $\frac{\varepsilon}{3}$ – شبكة منتهية

---

[*] *Arzela C.* *(15 . 3 . 1912 – 8 . 3 . 1847)* رياضي إيطالي .

للمجموعة K . بما أن التوابع $\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t)\}$ مستمرة على المجال $[0, 1]$. فإنها متساوية الاستمرار على ذلك المجال .

في الواقع ، لنختر من أجل كل تابع $x_i(t)$ عدداً δ_i بحيث يكون :

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

من أجل $|t_1 - t_2| < \delta_i$ أياً كانت t_1 و t_2 من $[0, 1]$. لنفرض أن δ هو أصغر الأعداد δ_i ، $i = 1, 2, \ldots, k$ ، وإذا كان الآن $\delta > |t_1 - t_2|$ ، فإنه من أجل أي تابع $x(t)$ ∋ K يكون لدينا :

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - x_i(t)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| +$$

$$+ \max_{0 \leq t \leq 1} |x_i(t) - x(t)| < 2\rho(x, x_i) + \frac{\varepsilon}{3}$$

وباختيار $x_i(t)$ بحيث يكون

$$\rho(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{3}$$

نجد أن

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي ، وبما أن التقدير الذي حصلنا عليه لا يتعلق بوضع النقطتين t_1 و t_2 في المجال $[0, 1]$ و لا يتعلق باختيار التابع $x(t)$ من K فإن الاستمرار المتساوي للتوابع $x(t)$ من K يكون قد أثبت .

الكفاية . استناداً لشروط المبرهنة نجد أنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن اختيار عدد مثل $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

من أجل $\delta > | t_1 - t_2 |$ أياً كانت t_1 و t_2 من $[0 , 1]$ وأياً كان التابع $x(t) \in K$. لنأخذ عدداً طبيعياً n بحيث يكون $\frac{1}{n}$ أصغر من δ ، ولنقسم المجال $[0 , 1]$ إلى n قسماً متساوياً :

$$[\frac{k}{n} , \frac{k+1}{n}] \ , \ k = 0 , 1 , 2 , \ldots , n-1$$

وعندئذ يكون

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

من أجل أي تابع $x(t) \in K$ وأياً كانت $t_1 , t_2 \in [0 , 1]$ وبحيث إن :

$$| t_1 - t_2 | < \frac{1}{n}$$

وفي حالة خاصة يكون الأمر كذلك من أجل t_1 , t_2 المنتميتين إلى واحد من المجالات الجزئية $[\frac{k}{n} , \frac{k+1}{n}]$.

لنقابل كل تابع $x(t)$ بتابع مستمر $x_n(t)$ بحيث إن :

١) $x_n(\frac{k}{n}) = x(\frac{k}{n})$ من أجل $k = 0 , 1 , 2 , \ldots , n-1$

٢) على المجال $[\frac{k}{n} , \frac{k+1}{n}]$ التابع $x_n(t)$ خطي .

بهذه الصورة يكون المنحني البياني للتابع $x_n(t)$ هو خط منكسر بـ n رأساً مرسوماً في المنحني البياني للتابع $x(t)$.

لنفرض أن

$$x(\frac{k}{n}) \le x(\frac{k+1}{n})$$

عندئذ وتبعاً لخطية التابع $x_n(t)$ على المجال $[\frac{k}{n} , \frac{k+1}{n}]$ يكون لدينا

$$x(\frac{k}{n}) \le x_n(t) \le x(\frac{k+1}{n})$$

ومنه

$$-\varepsilon < x(t) - x\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq x(t) - x_n(t) \leq x(t) - x\left(\frac{k}{n}\right) < \varepsilon$$

أما إذا كان

$$x\left(\frac{k+1}{n}\right) \geq x\left(\frac{k}{n}\right)$$

فإننا نجد أن

$$-\varepsilon < x(t) - x\left(\frac{k}{n}\right) \leq x(t) - x_n(t) \leq x(t) - x\left(\frac{k+1}{n}\right) < \varepsilon$$

وبالتالي فإن :

$$|\, x(t) - x_n(t) \,| < \varepsilon$$

من أجل جميع $t \in [\,0\,,\,1\,]$. أي إن :

$$\rho\,(x\,,\,x_n) < \varepsilon$$

وهذا يعني أن N مجموعة التوابع $x_n(t)$ تشكل ε – شبكة للمجموعة K .

وبالتالي واستناداً إلى المحدودية بانتظام للمجموعة K يكون لدينا :

$$|\, x_n(t) \,| \leq |\, x(t) \,| + |\, x(t) - x_n(t) \,| < c + \varepsilon = c_1$$

أي إن المجموعة N محدودة بانتظام .

لنقابل كل تابع $x_n(t)$ و N بنقطة من الفضاء $\widetilde{X}$ ذي الـ $(n+1)$ بعداً وبمثابة الإحداثيات لتلك النقطة نأخذ تراتيب رؤوس الخط المنكسر – للمنحني $x_n(t)$. إن هذا التقابل هو 1 لـ 1 (1 – 1) كما أنه مستمر بالتبادل بمفهوم أنه إذا كانت متتالية التوابع $\{ x_n^{(k)}(t) \}$ متقاربة إلى $x_n^{(0)}(t)$ بمفهوم المسافة في الفضاء $C[\,0\,,\,1\,]$ فإن متتالية النقاط $\{ \widetilde{x}^{(k)} \}$ تتقارب إلى النقطة $\widetilde{x}^{(0)}$ بمفهوم المسافة في الفضاء E_{n+1} ، إلا أن المجموعة $\widetilde{N} = \{ \widetilde{x} \}$ محدودة وبالتالي فهي متراصة في E_{n+1} . ولهذا فإن المجموعة $N = \{ x_n(t) \}$ متراصة في $C[\,0\,,\,1\,]$.

هكذا فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يمكن بناء ε – شبكة متراصة للمجموعة K .
عندئذ وبما أن $C[0,1]$ تام واستناداً إلى النتيجة (١) من المبرهنة (٣) من الفقرة السابقة نجد أن K متراصة .

يمكن تعميم المبرهنة المثبتة على حالات التطبيقات للمجموعات المتراصة في متراصات .

ليكن X و Y فضاءين متريين معطيين ولتكن F مجموعة من التطبيقات f للفضاء X في الفضاء Y . نقول عن التطبيق $f \in F$ إنه **محدود** إذا كان :

$$\rho\left(f(x), \theta\right) \leq c_f$$

من أجل أي عنصر $x \in X$ ، و حيث إن θ عنصر مثبت من الفضاء Y و c_f ثابت يتعلق فقط باختيار التطبيق f ونقول إن التطبيق $f \in F$ **مستمر بانتظام** إذا وفقط إذا وجد من أجل كل عدد موجب $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بحيث إن المتراجحة

$$\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right) < \varepsilon$$

تتحقق من أجل أية نقطتين x_1 و x_2 من الفضاء X محققتين للمتراجحة $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ،

لتكن $M(X, Y)$ مجموعة جميع التطبيقات المحدودة من الفضاء X إلى الفضاء Y . ولنحوّل المجموعة $M(X, Y)$ إلى فضاء متري . لنضع :

$$\rho(f, \varphi) = \sup_{x \in X} \rho\left(f(x), \varphi(x)\right)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن جميع موضوعات المسافة تكون محققة . إن التقارب في الفضاء $M(X, Y)$ هو تقارب منتظم على X لمتتالية التطبيقات $\{f_n(x)\} \subset M(X, Y)$ إلى التطبيق $f(x) \in M(X, Y)$.

إذا كان الفضاء Y تاماً فإن الفضاء $M(X, Y)$ يكون تاماً أيضاً . في الواقع ، إذا كانت $\rho(f_n, f_m) \to 0$ عندما n, m تسعيان إلى ∞ ، فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون :

$$\rho\left\langle f_n(x), f_m(x)\right\rangle < \varepsilon \qquad (5.2.1)$$

من أجل m , n $\leq$ n_0 (ε) ومـن أجـل جميـع $x \in X$. لنثبـت $x \in X$ ونتيجة لكون الفضاء Y تاماً فإن المتتالية $\{ f_n(x) \}$ والمتقاربـة فـي نفـسها تتقارب إلى عنصر ما $y \in Y$. لنضع :

$$f(x) = y = \lim_{n} f_n(x)$$

فنحصل على تطبيق للفضاء X في الفضاء Y .

بالانتقال إلى النهاية في المتراجحة $(5.2.1)$ عندما $m \to \infty$ ، نجـد أن :

$$\rho (f_n(x) , f(x)) \leq \varepsilon$$

من أجل $n \geq n_0 (\varepsilon)$ ومن أجـل جميـع $x \in X$. مـن ذلـك ينـتج أن $f \in M(X, Y)$ وأن $f_n(x) \to f(x)$ بانتظام على X .

لنرمز بـــ $C(X, Y)$ لمجموعة جميـع التطبيقـات المـستمرة بانتظـام مـن $M(X, Y)$ بسهولة يمكن التأكد من أن نهاية متتاليـة متقاربـة بانتظـام مـن التطبيقات المستمرة بانتظام هي تطبيق مستمر بانتظام ، من ذلك ينتج أن المجموعة $C(X, Y)$ مغلقة في الفضاء $M(X, Y)$.

نذكر أخيراً التعريف الآتي . نقول عن التطبيق f المنتمي إلـى أسـرة مـا $Q \subset C(X, Y)$ إنه **متساوي الاسـتمرار** إذا وجـد مـن أجـل كـل عـدد $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ يتعلق فقط بـــ ε وبحيث يكون :

$$\rho (f(x_1) , f(x_2)) < \varepsilon$$

من أجل $\rho(x_1 , x_2) < \delta$ و من أجل جميع $f \in Q$ و لا يتعلق باختيـار $x_1 , x_2 \in X$.

مبرهنة(٢). الشرط اللازم والكافي كي يمكن فصل متتالية متقاربة بانتظـام من مجموعة التطبيقات المستمرة Q للمجموعة المتراصة X في المتراصة Y هو أن تكون تطبيقات المجموعة Q متساوية الاستمرار .

سنبرهن فقط كفاية الشروط المذكورة . لنلاحظ قبل كل شيء أن المجموعة Y هي مجموعة محدودة لكونها متراصة و بالتالي فإن جميع التطبيقات من المجموعة Q محدودة بانتظام . ولذلك فإن $Q \subset C(X, Y)$. وبما أن $C(X, Y)$ مغلقـة

في $C(X,Y)$ فإن للبرهان على تراص المجموعـة Q فـي $M(X,Y)$ يكفي أن نثبت تراص Q في المجموعة $M(X,Y)$.

لنختر من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ عدداً $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة :

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.2.2)$$

من أجل $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ومباشرة من أجل جميع $f \in Q$ وهـذا الأمـر ممكن بنتيجة تساوي استمرار التطبيقات . لنأخـذ بعدئـذ $\frac{\delta}{2}$ – شـبكة منتهيـة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في المجموعة X ، ولنعرف المجموعات :

$$X_i = S(x_i, \frac{\delta}{2}) \setminus \bigcup_{j \neq i} S(x_j, \frac{\delta}{2})$$

إن هذه المجموعات غير متقاطعة واجتماعها يعطينا المجموعة X ، كما أن قطر كل مجموعة منها X_i لا يزيد عن δ . لتكن بعدئـذ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $\frac{\varepsilon}{2}$ – شـــبكة للمتراصـــة Y . لنـــستعرض جميـــع التوابـــع الممكنـــة $g(x) \in M(X,Y)$ والتي تأخذ قيماً ثابتة y_j علـى المجموعـة X_i . لنتأكد من أن هذه التوابع تشكل ε – شبكة منتهية للمجموعة Q . فـي الواقـع ، لنأخذ تطبيقاً كيفياً $f \in Q$ ، عندئذ من أجل أي عنصر $x \in X$ وأي تـابع $g(x)$ يكون لدينا :

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(x_i)) + \\ + \rho(f(x_i), g(x_i)) + \rho(g(x_i), g(x))$$

حيث x_i مختارة بحيث يكون $x \in X_i$ ، لذلك و استناداً لـ $(5.2.2)$ مـع الأخذ بعين الاعتبار أن x ، x_i تنتميان لنفس المجموعة X_i يكون

$$\rho(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \rho(g(x), g(x_i)) = 0$$

ومنه نجد أن

$$\rho(f(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \rho(f(x_i), g(x_i))$$

لنختر الآن $g(x)$ بحيث يحقق $g(x_i) = y_j$ المتراجحة :

$$\rho(f(x_i), y_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

عندئذ من أجل أي عنصر x و X يكون

$$\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$$

بالتالي فإن

$$\rho(f, g) = \sup_x \rho(f(x), g(x)) \le \varepsilon$$

هكذا فإن المجموعة Q كمجموعة جزئية من الفضاء المتري التام $M(X, Y)$ تمتلك ε – شبكة منتهية فهي متراصة . وهو المطلوب .

معايير التراص في $L^p[0, 1]$

(Criteria for Compactness in $L^p[0, 1]$)

ليكن $x(t)$ و $L^p[0, 1]$ ولنمدد التابع $x(t)$ خارج المجال $[0, 1]$ فارضين أن $x(t) = 0$ إذا كانت t من خارج المجال . عندئذ من أجل أي مجال مغلق $[a, b]$ من المحور الحقيقي يكون للتكاملين :

$$\int_a^b |x(t)|\, dt \quad , \quad \int_a^b |x(t)|^p\, dt$$

معنى .

اختبار التراص في $L^p[0, 1]$. (مبرهنة م . ريس) .

الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة التوابع :

$$K = \{ x(t) \subset L^p[0, 1] \}$$

متراصة هو أن تكون هذه المجموعة محدودة بانتظام بالنظيم ومتساوية الاستمرار وسطياً أي إن :

$$1) \quad \int_0^1 |x(t)|^p dt \le c^p$$

$$2) \quad \int_0^1 |x(t+h) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon^p \quad ; 0 < h < \delta(\varepsilon)$$

من أجل جميع توابع المجموعة .

اللزوم . إن لزوم الشرط (١) واضح . لنبرهن تحقق الشرط الثاني . بما أن المجموعة K متراصة ، فإنه من أجل أي عدد $o < \varepsilon$ توجد $\frac{\varepsilon}{3}$ - شبكة منتهية $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ للمجموعة K و بما أن كل تابع من $L^p[0, 1]$ مستمر وسطياً فإنه من أجل أي عدد i يوجد عدد مثل δ_i بحيث يكون :

$$\int_0^1 | x_i(t+h) - x_i(t) |^p \; dt < (\frac{\varepsilon}{3})^p$$

من أجل $0 < h < \delta_i$. ليكن $\delta = \min_i \delta_i$ ، عندئذ نجد أن :

$$\int_0^1 | x_i(t+h) - x_i(t) |^p \; dt < (\frac{\varepsilon}{3})^p$$

من أجل $0 < h < \delta$. ومن أجل جميع $i = 1, 2, \ldots, n$.

لنأخذ تابعاً كيفياً $x(t) \in K$ ، عندئذ يوجد تابع مثل $x_i(t)$ بحيث إن :

$$\int_0^1 | x(t) - x_i(t) |^p \; dt < (\frac{\varepsilon}{3})^p$$

ومن أجل $0 < h < \delta$ يكون لدينا :

$$\left(\int_0^1 | x(t+h) - x(t) |^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$+ \left(\int_0^1 | x(t+h) - x_i(t+h) |^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_0^1 | x_i(t+h) - x_i(t) |^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\int_0^1 | x_i(t) - x(t) |^p dt \right)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \left(\int_0^1 | x(t+h) - x_i(t+h) |^p \; dt \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{2\varepsilon}{3}$$

لكن

$$\left(\int_0^1 | x(t+h) - x_i(t+h) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \int_h^1 | x(s) - x_i(s) |^p \, ds \leq \int_0^1 | x(s) - x_i(s) |^p \, ds < (\frac{\varepsilon}{3})^p$$

(استخدمنا هنا أن $x(t)$ و $x_i(t)$ يساويان الصفر خارج المجـــال $[0, 1]$)

من المتراجحتين الأخيرتين ينتج أن :

$$\left(\int_0^1 | x(t+h) - x(t) |^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

من أجل $0 < h < \delta$ ، وبما أن $x(t)$ تابع كيفي من K فإن لزوم الشرط (٢) قد أثبت .

الكفاية . لنستعرض توابع **ستيكلوف الوسطية**

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) \, d\tau$$

لدينا

$$| x_h(t) | = \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} x(\tau) \, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2h} \left(\int_{t-h}^{t+h} d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau)|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq (\frac{1}{2h})^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |x(\tau)|^p \, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (5.2.3)$$

كما أن

$$| x_h(t+u)-x_h(t) | =$$

$$=\frac{1}{2h} \left| \int_{t+u-h}^{t+u+h} x(\tau)\, d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\, d\tau \right| =$$

$$= \frac{1}{2h} \left| \int_{t-h}^{t+h} x(\tau+u)\, d\tau - \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{t-h}^{t+h} |x(\tau+u) - x(\tau)|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2h}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{0}^{1} |x(\tau+u) - x(\tau)|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (5.2.4)$$

من الشرطين (١) و (٢) والمتراجحتين $(5.2.3)$ ، $(5.2.4)$ ينتج أن مجموعة التوابع $\{ x_h(t) \}$ من أجل h مثبت ومن أجل $x(t)$ و K تكون محدودة بانتظام ومتساوية الاستمرار . بالتالي فإن المجموعة $\{ x_h(t) \}$ متراصة بمفهوم التقارب المنتظم ، وبشكل أخص بمفهوم التقارب الوسطي من الدرجة p .

من ناحية ثانية لدينا :

$$| x(t) - x_h(t) | \leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |x(t) - x(\tau)|\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |x(t) - x(t+\tau)|\, d\tau \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2h}\right)^{1/p} \left(\int_{-h}^{h} | x(t)-x(t+\tau)|^p\, d\tau \right)^{1/p}$$

ومنه نجد أن :

$$\int_0^1 |x(t)-x_h(t)|^p\, dt \leq \frac{1}{2h} \int_0^1 \left\{ \int_{-h}^{h} |x(t)-x(t+\tau)|^p\, d\tau \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left\{ \int_0^1 |x(t)-x(t+\tau)|^p\, dt \right\} d\tau <$$

$$< \frac{1}{2h}\, \varepsilon^p \int_{-h}^{h} d\tau = \varepsilon^p$$

فإذا كان : $|\tau| < \delta$ فإنه وبحسب الشرط الثاني يكون :

$$\int_0^1 |x(t+\tau)-x(t)|^p\, dt < \varepsilon^p$$

وهكذا فإن المجموعة $\{x_h(t)\}$ تشكل ε - شبكة للمجموعة K ، وبما أن هـذه الـ ε - شبكة متراصة فإنه وفقاً لنتيجة مبرهنة هاوسدورف تكون متراصة وبالتالي فإن المجموعة نفسها K متراصة .

إضافة لما ذكرنا سنستعرض اختبارين للتراص فـي الفـضاء $L^p[0,1]$ دون التعرض للبرهان .

مبرهنة (ا . ن . كولموغوروف) . [انظـر 8] تكـون المجموعـة $K \subset L^p[0,1]$ متراصة إذا وفقط إذا كانت :

١) نظائم التوابع $x(t) \in K$ محدودة في المجموعة .

٢) من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يكون :

$$\| x - x_h \| < \varepsilon$$

من أجل $h < \delta$ ومن أجل جميع التوابع $x(t) \in K$.

سنقول إن لتوابع المجموعة $M = \{x(t)\}$ **نظائم متـساوية الاسـتمرار إطلاقاً** إذا أمكن من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ إيجاد عدد $\delta > 0$ بحيث يكون

$$\| x(t) \ \ \chi_E(t) \| < \varepsilon$$

في كل مرة يكون فيهـا $mes\ E < \delta$ وحيـث إن $\chi_E(t)$ التـابع المميـز للمجموعة E .

مبرهنة (م . ا . كراسنوسيلسكي) (*) . لتكن المجموعة $K \subset L^p[0,1]$ ولنفرض أن لعناصرها نظائم متساوية الاستمرار إطلاقاً و متراصة . بمفهوم التقارب بالقياس عندئذ تكون هذه المجموعة متراصة بمفهوم التقارب الوسطي .

معيار التقارب في الفضاء Q .

(Criterion for Compactness in the Space Q)

لنستعرض مجموعة المنحنيات $\{q\}$ المعرفة بالمعادلات

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad 0 \le t \le 1 \quad (5.2.5)$$

حيث $x(t)$ و $y(t)$ و $z(t)$ توابع مستمرة بالنسبة للوسيط t . إذا كان p و q منحنيين معطيين ، فإننا سنكتب معادلاتهما على الشكل $(5.2.5)$ وسننسب لبعضهما بعض النقاط الموافقة لنفس قيم الوسيط . لنفرض أن d هي المسافة الأعظمية بين نقاط المنحنيين الموافقة . إن العدد d يتعلق باختيار التمثيل الوسيطي للمنحنيين . سنعتبر أن المسافة $\rho(q,p)$ هي الحد الأدنى الأعظمي للأعداد d من أجل جميع التمثيلات الوسيطية للمنحنيين .

بسهولة يمكن التأكد من أن المسافة المعرفة بين المنحنيين تحقق جميع موضوعات المسافة وسنرمز للفضاء الناتج **بالفضاء** Q . إن هذا الفضاء يلعب دوراً هاماً في حساب التحولات . يمكن البرهان على أن Q فضاء تام .

مبرهنة (هيلبرت) . إذا كانت $K \subset Q$ هي مجموعة جميع المنحنيات القابلة للإصلاح (*rectifiable curves*) والمتوضعة في جزء منته من الفضاء والتي أطوالها محدودة في المجموعة (*uniformly bounded lengths*) عندئذ تكون K متراصة .

لنفرض أن أطوال المنحنيات $q \in K$ لاتزيد عن العدد l . ولنقسّم كل منحن K $q \in$ إلى n قسماً متساوية الأطوال ولنصل نقاط التقسيم فنحصل على خط منكسر

(*) $M.A.$ **Krasnoselskii** (27.4.1920) رياضي سوفيتي .

للاطلاع على إثبات المبرهنة يمكن العودة إلى كتاب (المؤلف نفسه)

Topological Methods in the Theory of Non – linear integral equations GTTI. 1956. (Russian).

q_n . إن كل قوس من أقواس المنحني q وبالمقابل جزء الخط المنكسر q_n لايزيد عن $\frac{l}{n}$ ، كما أن المسافة بين نقاط قوس من تلك الأقواس وبين نقاط الوتر الموافـق لضلع من الخط المنكسر q_n لاتزيد عن $\frac{2l}{n}$. لنعـرف مـن أجـل q و q_n تمثيلين وسطيين بحيث تقابل رؤوس الخط المنكسر q_n في التمثيلـين بأعـداد مـن الشكل $\frac{k}{n}$ ، $k = 0 , 1 , 2 , ... , n$ وبحيث إنـه عنـدما تمـسح النقطة t المجال $\left(\frac{k}{n} , \frac{k+1}{n} \right)$ نحصل على قوس المنحني q والمقابل لـضلع الخط المنكسر q_n . إن المسافة بين نقاط الخطين q و q_n والمقابلـة لـنفس قـيم الوسيط لاتزيد عن $\frac{2l}{n}$ وبالتالي فإن

$$\rho (q , q_n) \leq \frac{2l}{n}$$

بذلك تشكل K_n مجموعة الخطوط المنكسرة q_n $\frac{2l}{n}$ – شبكة للمجموعة K .

إلا أن كل خط منكسر يعرف بـ $(1 + n) 3$ من الإحداثيات لرؤوسه والتـي عددها $(1 + n)$ واستناداً إلى شروط المبرهنة هي محدودة فـي المجموعـة ، ولذلك فإن K_n متراصة . استناداً إلى النتيجة (١) للمبرهنة (3) مـن الفقـرة الأولى تكون K متراصة .

تستخدم هذه المبرهنة في البرهان على وجود الخطوط الجيوديزية .

معيار التراص في فضاء ذي قاعدة .

(Criterion for Compactness in a Space with Basis)

مبرهنة (٣) . إذا كانت K مجموعة من فضاء باناخ E ، فإن الشرط

اللازم والكافي كي تكون K متراصة هو أن تكون محدودة وأن يوجد من أجل كـل عدد $\varepsilon > 0$ عدد مثل n_0 بحيث يكون $\| R_n x \| < \varepsilon$ من أجـل $n_0 \le n$ ومن أجل جميع x من K (*)

اللزوم . إن محدودية المجموعة K تنتج من النتيجة (٣) للمبرهنة (٣) من الفقرة السابقة . لنبرهن تحقق الشرط الثاني . لنأخذ عدداً ما $\eta > 0$ ولنبنِ η – شبكة للمجموعة K : $\{ x_1 , \dots , x_k \}$ من أجل أي عنصر $x \in K$ نجد عنصراً x_i ينتمي إلى الـ η – شبكة وبحيث يكون $\| x - x_i \| < \eta$ ، وسيكون لدينا :

$$\begin{aligned} \| R_n x \| &= \| x - S_n x \| \le \| x - x_i \| + \| x_i - S_n x \| \le \\ &\le \| x - x_i \| + \| S_n x_i - S_n x \| + \| R_n x_i \| \le \\ &\le (1 + \| A^{-1} \|) \| x - x_i \| + \| R_n x_i \| < \\ &< (1 + \| A^{-1} \|) \eta + \| R_n x_i \| \end{aligned}$$

بما أن $R_n x \to 0$ عندما $n \to \infty$ من أجل كل عنصر مثبت x ، فإنه يوجد عدد مثل n_0 بحيث يكون $\| R_n x_i \| < \eta$ من أجل $n_0 \le n$ ومن أجل $i = 1 , 2 , \dots , k$ ولذلك فإنه من أجل $n_0 \le n$ يكون :

$$\| R_n x \| < (2 + \| A^{-1} \|) \eta$$

و للحصول على المتراجحة المطلوبة يكفي أن نأخذ :

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2 + \| A^{-1} \|}$$

وذلك لأن n_0 لا يتعلق باختيار العنصر x من K .

الكفاية . لنبرهن على أنه بتحقق شروط المبرهنة يوجد من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ ε – شبكة منتهية للمجموعة K . ليكن $\varepsilon > 0$ معطى ، ولنختر عدداً

(*) انظر الفقرة (٤) فضاء باناخ ذو القاعدة من الفصل الرابع

n_0 بحيث يكون $\| R_{n_0} x \| < \frac{\varepsilon}{2}$ من أجل جميع $x \ni K$. لنستعرض بعدئذ المجموعة K_{n_0} المشكلة من عناصر من الشكل $S_{n_0} x$ حيث إن $x \ni K$. ويمكننا النظر إلى هذه المجموعة كمجموعة متوضعة في الفضاء $E_{n_0} \subset E_n$ ذي الـ n_0 بعداً والمعرف بالعناصر $e_1 , e_2 , \ldots , e_{n_0}$ وبما أنه ، بالإضافة لذلك ، واستناداً للمتراجحة :

$$\| S_{n_0} x \| \leq \| A^{-1} \| \, \| x \|$$

ومحدودية المجموعة K فرضاً وكون المجموعة K_{n_0} محدودة ،فإن هذه المجموعة متراصة . ولهذا فإنه في E_{n_0} توجد $\frac{\varepsilon}{2}$ – شبكة منتهية للمجموعة K_{n_0} ومن الواضح أن هذه الشبكة هي ε – شبكة للمجموعة K وهو المطلوب .

معيار التراص في l_p .

(*Criterion for Compactness in* l_p) .

الشرط اللازم والكافي كي تكون المجموعة $K \subset l_p$ متراصة هو أن تكون K محدودة . ومن أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد n_0 يتعلق فقط بـ ε بحيث يكون $\sum_{i=n+1}^{\infty} | \xi_i |^p < \varepsilon^p$ من أجل $n \geq n_0$ ومن أجل أي عنصر $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , \ldots \}$ من المجموعة K .

إن إثبات ذلك ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة إذا لاحظنا أنه في l_p يكون :

$$\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} | \xi_i |^p \right)^{\frac{1}{p}} = \| R_n x \|$$

مثال . لنستعرض في الفضاء l_p مجموعة العناصر $x = \{ \xi_i \}$ التي من أجلها $0 \le \xi_n \le \frac{1}{n}$ أي متوازي السطوح الرئيسي في فضاء هيلبرت الإحداثي .

من المعيار السابق ينتج أن متوازي السطوح متراص .

التراص والبعد المنتهي

(Compactness and Finite Dimension)

من المعلوم أن كل مجموعة محدودة في الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً هي مجموعة متراصة . وسنبرهن هنا أن تراص المجموعات المحدودة هو صفة مميزة للفضاءات الخطية المنظمة والمنتهية البعد .

مبرهنة (٤) . الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الجزئي L من الفضاء الخطي المنظم E منتهي البعد هو أن تكون كل مجموعة محدودة من L متراصة .

اللزوم . لنفرض أن L ذو n بعداً ، عندئذ يكون L هوميومورفياً مع الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً E_n . إن N صورة المجموعة المحدودة $M \subset L$ بواسطة الهوميومورفيزم (تطبيق (١ – ١) ومستمر بالتبادل) هي مجموعة محدودة في E_n وبما أن $N \subset E_n$ متراصة في E_n فإن M في L متراصة أيضاً .

الكفاية . لنفرض أن كل مجموعة محدودة من L متراصة . لنأخذ في L عنصراً كيفياً x_1 و $\| x_1 \| = 1$ ولنرمز بـ L_1 للفضاء الجزئي المولد بـ x_1 إذا كان $L = L_1$ فإن المبرهنة تكون قد أثبتت . أما إذا لم يتطابق L_1 مع L فإنه استناداً للتوطئة في الفقرة الثانية من الفصل الثاني يوجد عنصر في L مثل x_2 بحيث إن $\| x_2 \| = 1$ و :

$$\| x_2 - x_1 \| \ge \frac{1}{2}$$

لنرمز بـ L_2 للفضاء الجزئي المولد بالعنصرين x_1 و x_2 وهنا يكون لدينا احتمالان : إما $L = L_2$ وفي هذه الحالة تكون المبرهنة قد أثبتت وأما أن لا يتطابق

L_2 مع L وفي هذه الحالة واستناداً إلى التوطئة المشار إليها يوجد عنصر مثـل x_3 بحيث إن $\| x_3 \| = 1$ و

$$\| x_3 - x_1 \| \geq \frac{1}{2}$$

$$\| x_3 - x_2 \| \geq \frac{1}{2}$$

ويمتابعة هذه العملية يمكننا القيام بافتراضين : إما أن يتطابق L_n من أجل عدد ما n مع L وفي هذه الحالة تكون المبرهنة قد أثبتت وإما أن نبني متتاليـة لا نهائيـة (غير منتهية) من العناصر $\{ x_n \}$ والتي من أجلها يكون $\| x_n \| = 1$ و :

$$\| x_n - x_m \| \geq \frac{1}{2}$$

من أجل $n \neq m$ وأياً كان m , n . إن الاقتراح الثاني يسقط وذلـك لأنـه يعنـي وجـود مجموعـة محـدودة ($\| x_n \| = 1$) وغيـر متراصـة $n \neq m \quad ; \quad \| x_n - x_m \| \geq \frac{1}{2}$ الأمر الذي يناقض شـروط المبرهنة .

التقريب الأفضل . (*The Best Approximation*) .

درس تشبيشيف مسألة التقريب الأفضل لتوابع بتركيبات خطية لتوابع معطاة . بالمحافظة على تلك المفاهيم هنا نكون أمام تقريبـات فـي الفـضاءات C و L^2_ρ وغيرها .

لنستعرض مسألة التقريب الأفضل لعنصر كيفي x من فضاء خطي منظم E بتراكيب خطية لجملة منتهية معطاة من العناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ من E ومـستقلة خطياً . لنبرهن على أن مسألة التقريب الأفضل قابلة للحل .(*)

توطئة . من أجل ازدياد غير محدود لـ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ يسعى التابع

(*) يمكن العودة إلى كتاب

Akhiezer N. I. Lectures on the Tyheory of Approximations Gostekhizdat (Russian)

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = \| x-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_n x_n \|$$

إلى ∞ ويكون لدينا :

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \geq \| \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \| - \| x \|$$

البرهان . لنستعرض التابع المستمر في المتحولات $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$:

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = \| \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \|$$

على سطح الكرة الواحدية في الفضاء الإقليدي ذي الـ n بعداً :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1$$

(الكرة الواحدية مجموعة متراصة في نفسها) . إن هذا التابع يبلغ قيمته الأصغرية μ والتي هي بحد ذاتها أكبر من الصفر تبعاً للاستقلال الخطي للعناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$. لنفرض أن $0 < k$ عدد معطى ما . إذا كان :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2} > \frac{1}{\mu}\,(k + \| x \|)$$

فإن :

$$\varphi(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| - \| x \| =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_i^2} \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2}} x_i \right\| - \| x \| \geq$$

$$\geq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2} \,.\, \mu - \| x \| > k$$

وهو المطلوب .

مبرهنة . توجد أعداد حقيقية مثل $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}$ بحيث يكون للتابع :

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \| x - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \ldots - \lambda_n x_n \|$$

قيمة أصغرية من أجل :

$$\lambda_1 = \lambda_1^{(0)}, \ \lambda_2 = \lambda_2^{(0)}, \ \ldots, \ \lambda_n = \lambda_n^{(0)} \ (*)$$

إن المبرهنـــة واضــحة إذا كـــان x مرتبطـــاً خطيـــاً بالعناصـــر $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ستفرض أن العنصر x لا يقع في الفضاء الجزئي المولـد بالعناصـر $x_1, x_2, \ldots, x_n$. مـن الواضـح أولاً أن التـابع $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ مستمر بالنسبة لمتغيراته الأمر الذي ينتج من المتراجحة :

$$|\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) - \varphi(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)| =$$

$$= \left| \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| - \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| \right| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \mu_i| \, \|x_i\| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu_i| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

استناداً للتوطئة يكون $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \geq \|x\|$ خارج كرة ما :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leq r^2$$

وبما أن هذه الكرة متراصة في نفسها فـإن التـابع $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ، كتابع مستمر ، يبلغ على هذه الكرة قيمته الصغرى v في نقطة مثل $(\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)})$. لكن $v \leq \varphi(0, 0, \ldots, 0) = \|x\|$ ولذلك فإن v هي القيمة الأصـغرية للتـابع $\varphi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ فـي فـضاء جميـع النقـاط $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ وهو ما يثبت المبرهنة .

(*) أي أنه في الفضاء المتهي البعد ، المولّد بالعناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ يوجد عنصر أقرب مـا يكون لـ x .

إن التركيب الخطي :

$$\lambda_1^{(0)} x_1 + \lambda_2^{(0)} x_2 + \ldots + \lambda_n^{(0)} x_n$$

الذي يعطي التقريب الأفضل للعنصر x ليس وحيداً في الحالة العامة . للحصول على وحدانية في التقريب $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ ينبغي فرض شروط إضافية . على سبيل المثال ، في الفضاء $C[0,1]$ تستعرض جمل من التوابع محققة ، كما يقولون ، لشرط تشيبشيف . وفي خلاف ذلك يمكننا ذكر بعض الفضاءات التي يتعرف فيها التقريب الأفضل بشكل وحيد .

نقول عن الفضاء E إنه **منظم بقوة** ، إذا تحققت المساواة $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ فقط من أجل $y = \alpha x$ حيث $0 < \alpha$ ، وكان $x \neq 0$ و $y \neq 0$

بسهولة يمكن أن نبيّن بأن التقريب الأفضل في الفضاء المنظم بقوة يتعرف بشكل وحيد . في الحقيقة ، إذا وجد تركيبان خطيان $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ و $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ بحيث إن :

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| = d$$

حيث إن

$$d = \min \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| > 0$$

فإن

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right\| = \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d = d$$

وبما أن

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| \geq d$$

فإن

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| = d$$

وبالتالي فإن

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i + \mu_i}{2} x_i \right\| = \left\| \frac{1}{2} \left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \right\| + \\ + \left\| \frac{1}{2} \left(x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \right) \right\|$$

وبما أن الفضاء منظم بقوة فإن :

$$x - \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \alpha \{ x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \}$$

إذا كان $\alpha \neq 1$ فإن x تكون تركيباً خطياً للعناصر $x_n , . . . , x_1 , x_2$ وهذا مرفوض بالفرض ، لذلك فإن $\alpha = 1$. وهذا يؤدي إلى أن :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$$

وبما أن العناصر $x_1 , x_2 , ... , x_n$ مستقلة خطياً فإن

$$\lambda_i = \mu_i \quad , \quad i = 1, 2, . . . , n$$

وهو المطلوب .

كأمثلة على فضاءات منظمة بقوة نذكر الفضاءين $L^p [0 , 1]$ ، l_p من أجل $1 < p$. إن الفضاء $C [0 , 1]$ ليس منظماً بقوة وللتأكد من ذلك يكفي أن نستعرض تابعين غير سالبين مستقلين خطياً $x (t)$ و $y (t)$ من $C [0 , 1]$ ولهما قيمتان أعظميتان في نقطة واحدة (في نفس النقطة) من المجال $[0 , 1]$. من أجل هذين التابعين يكون

$$\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$$

بالرغم من أن $y \neq \alpha x$. ويمكن للطالب أن يتأكد من أن الفضاءين $L [0 , 1]$ و l هما أيضاً فضاءان ليسا منظمين بقوة .

التراص الضعيف . سنستعرض مبرهنة بالغة الأهمية وذات تطبيقات واسعة في التحليل التابعي .

مبرهنة (٥). إذا كان الفضاء E قابلاً للفصل ، فإن كل كرة من الفضاء المرافق E^* متراصة بضعف . أي إنه من أية متتالية من الداليات الخطية $\{ f_n \}$ ذات النظائم المحدودة يمكن فصل متتالية جزئية تتقارب بضعف إلى دالي ما f_0 .

في دراستنا لفضاء المؤثرات وجدنا أن فضاء المؤثرات الخطية المحدودة هو فضاء تام بمفهوم التقارب النقطي للمؤثرات . وبما أن مفهوم التقارب النقطي ومفهوم التقارب الضعيف يتطابقان بالنسبة للداليات الخطية ، فإنه يمكننا اعتبار أن الفضاء E^* تام بمفهوم التقارب الضعيف . وفقاً لذلك يكفي أن نبرهن على أنه من أية متتالية $\{ f_n \}$ من الداليات الخطية ذات النظائم المحدودة يمكننا فصل متتالية جزئية متقاربة بضعف في نفسها . دون أن نمس عمومية المسألة يمكننا اعتبار أن $\| f_n \| \leq 1$. لتكن $x_1 , x_2 , \quad . . . . , x_n$ مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في E . بما أن :

$$| f_n (x_1) | \leq \| f_n \| \ \| x_1 \| \leq \| x_1 \|$$

فإن المتتالية $\{ f (x_1) \}$ متتالية عددية محدودة ، وبالتالي فإنه يمكننا فصل متتالية جزئية منها متقاربة :

$$f_{n_1^{(1)}} (x_1) \ , \ f_{n_2^{(1)}} (x_1) \ , \ . . . . \ , \ f_{n_k^{(1)}} (x_1) , . . .$$

لنستعرض متتالية الداليات $\{ f_{n_k^{(1)}} (x_2) \}$. بماأن

$$\left| f_{n_k^{(1)}} (x_2) \right| \leq \| x_2 \|$$

فإن $\{ f_{n_k^{(1)}} (x_2) \}$ متتالية عددية محدودة ولذلك فإنه يمكننا فصل متتالية جزئية متقاربة منها :

$$f_{n_1^{(2)}} (x_2) \ , \ f_{n_2^{(2)}} (x_2) \ , \ . . . . \ , \ f_{n_k^{(2)}} (x_2) , . . .$$

وبالاستمرار على هذا النحو يمكننا بناء متتالية من الداليات $\{ f_{n_k^{(3)}} \}$ متقاربة على x_3 وهكذا . ومن المهم أن نلاحظ بأن كل متتالية جزئية لاحقة هي جزء من المتتالية التي سبقتها ولذلك فإنها تتقارب على كل عنصر تتقارب عليه سابقاتها من المتتاليات الجزئية . لنشكل المتتالية " الجزئية القطرية " :

$$f_{n_1^{(1)}} \ , \ f_{n_2^{(2)}} \ , \ . \ . \ . \ . \ . \ f_{n_k^{(k)}} \ , \ . \ . \ . \ .$$

بسهولة نرى أن هذه المتتالية الجزئية تتقارب من أجل أي عنصر x_m من المجموعة القابلة للعد المستعرضة . في الحقيقة ، من أجل إثبات ذلك يكفي ملاحظة أن $f_{n_m^{(m)}} \ , \ f_{n_{m+1}^{(m+1)}} \ , \ . \ . \ . \ . \ .$ هي جزء من المتتالية الجزئية $\{ f_{n_k^{(m)}} \}$ والمتقاربة على x_m وفقاً لطريقة بناء تلك المتتالية . لذلك فإن المتتالية ككل $\{ f_{n_k^{(k)}} \}$ تتقارب على x_m . بما أن نظائم الداليات في المتتالية $\{ f_{n_k^{(k)}} \}$ محدودة في المجموعة فإن هذه المتتالية تتقارب على المجموعة $\{ x_1 \ , \ x_2 \ , \ . \ . \ . \ , \ x_n \ , \ . \ . \ . \ . \}$ الكثيفة في كل مكان في E . واستناداً للمبرهنة (٢) في الصفحة (٢١١) تكون المتتالية $\{ f_{n_k^{(k)}} \}$ متقاربة بضعف. وهو المطلوب.

نتيجة . كل كرة في الفضاءين $L^p [0 \ , \ 1]$ ، l_p متراصة بضعف .

هذا الأمر ينتج من أن $L^p [0 \ , \ 1] \ = \ L^{q^*} \ [0 \ , \ 1]$، $l_p \ = \ l_q^*$ وأن l_q ، $L^q [0 \ , \ 1]$ قابلان للفصل .

ملاحظة . بسهولة يمكن التأكد من أن كل كرة في E^* مغلقة بضعف وبالتالي إذا كانت متراصة بضعف فإنها تكون متراصة بضعف في نفسها .

§ ٣ شمولية الفضاء $C[0 \ , \ 1]$

Universality oF $C[\ 0 \ , \ 1 \ ]$

برهن الرياضي السوفيتي ب . س اوريسون (*P . S . Uryson*) في عام (١٩٢٣) على وجود فضاءات مترية قابلة للفصل " **شاملة** " (*universal*) أي: فضاءات تحتوي على فضاء جزئي ايزومتري لأي فضاء متري قابل للفصل . لاحقاً برهن الرياضيان البولونيان . باناخ و س . مازور على أن الفضاء $C[\ 0 \ , \ 1]$ هو

فضاء شامل . إن برهان نظرية باناخ و مازور يستند إلى التراص الضعيف للفضاءات المرافقة .

مبرهنة ١ . كل فضاء باناخ والقابل للفصل E ايزومتري وإيزومورفي لفضاء جزئي من الفضاء $C[0,1]$.

البرهان . لتكن S هي الكرة $\| f \| \leq 1$ في الفضاء E^* ، وسنعتبر أن التقارب في S هو التقارب الضعيف للداليات الخطية . استناداً إلى المبرهنة (٥) من الفقرة الثانية تكون S مجموعة متراصة في نفسها . لتكن $a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots$ مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في الكرة الواحدية $\| x \| \leq 1$ من الفضاء E .

من أجل كل دالي $f \in S$ نضع

$$f(a_k) = \xi_k \quad , \quad |\xi_k| \leq 1 \quad , \quad k = 1 , 2 , \ldots ,$$

إذا كان $f_n \xrightarrow{w} f_0$ $(f_n , f_0 \in S)$ فإن $\xi_k^{(n)} = f_n(a_k) \to f_0(a_k) = \xi_k^{(0)}$ بذلك يُقابل كل دالي $f \in S$ بعنصر $y = \{ \xi_k \}$ $(\xi_k = f(a_k))$ من الفضاء S وإن التقارب $f_n \xrightarrow{w} f_0$ يؤدي إلى أن $y_n \to y_0$ العناصر الموافقة من الفضاء S . لنفرض أن N هي مجموعة من نقاط الفضاء S المقابلة للداليات $f \in S$ عندئذ تكون N صورة مستمرة لمجموعة متراصة في نفسها وبالتالي فهي متراصة في نفسها . بسهولة نرى أن التطبيق المعاكس لـ N على S هو أيضاً غامر ومتباين ومستمر . في الحقيقة ، ليكن $f(a_k) = \varphi(a_k)$, $k = 1 , 2 , \ldots$. من أجل أي عنصر $x \in E$ و $\| x \| \leq 1$ نختار a_{k_0} بحيث يكون $\| x - a_{k_0} \| < \varepsilon$. عندئذ يكون :

$$| f(x) - \varphi(x) | \leq | f(x - a_{k_0}) | + | f(a_{k_0}) - \varphi(a_{k_0}) | + + | \varphi(x - a_{k_0}) | < 2\varepsilon$$

وبما أن ε كيفي فإن $f(x) = \varphi(x)$ أي إن $f = \varphi$.

بالتالي إذا كان $f_n(a_k) \to f_0(a_k)$ $k = 1 , 2 , \ldots$ فإنه استناداً إلى

محدودية نظائم الداليات $(\,\| f_n \| \, , \, \| f_0 \| \le 1\,)$ ينتج أن $f_n \xrightarrow{w} f_0$. وكذلك الغمر والتباين والاستمرار للتقابل وعكسه بين S ، N : $N \leftrightarrow S$.

بالاستناد إلى المبرهنة (٦) من الفقرة (١) نجد أن N كمجموعة متراصة في نفسها من فضاء متري تكون صورة مستمرة لمجموعة كانتور المتقطعة P_0 . بهذه الصورة يُقابل كل عنصر $t \ni P_0$ بدالي $f_t \ni S$. إن مجموعة جميع الداليات f_t تتطابق مع S ويكون $f_{t_n} \xrightarrow{w} f_t$ عندما $t_n \to t$. لنختر عنصراً ما $x \ni E$ وحسب تعريف التقارب الضعيف للداليات يكون لدينا :

$$f_{t_n}(x) \;\to\; f_t(x)$$

من أجل $t_n \to t$. من أجل x مثبت يكون $f_t(x)$ تابعاً مستمراً بالنسبة لـ $t \ni P_0$ وسنرمز لهذا التابع بـ $\varphi_x(t)$ أي إن :

$$\varphi_x(t) = f_t(x) \qquad (5.3.1)$$

لنمدد التابع $\varphi_x(t)$ المعرف على المجموعة P_0 كتابع خطي ومستمر على المجالات المجاورة لـ P_0 $(adjacent\ to\ P_0)$ فنحصل على تابع مستمر $\varphi_x(t)$ و معرف على المجال المغلق $[0,1]$ أي إنه ينتمي للفضاء $C[0,1]$.

ووفقاً لتعريف النظيم في الفضاء $C[0,1]$ يكون لدينا :

$$\| \varphi_x \|_c = \max_{0 \le t \le 1} | \varphi_x(t) |$$

واستناداً لخطية $\varphi_x(t)$ على المجالات المجاورة لـ P_0 تتطابق القيمة الأعظمية للتابع $\varphi_x(t)$ على المجال $[0,1]$ مع القيمة الأعظمية للتابع $\varphi_x(t)$ على P_0 ، ولذلك فإن

$$\| \varphi_x \|_c = \max_{t \in P_0} | \varphi_x(t) |$$

من ناحية ثانية ومن أجل $t \ni P_0$ ووفقاً لـ $(5.3.1)$ يكون لدينا

$$| \varphi_x(t) | = | f_t(x) | \le \| f_t \| \; \| x \| \le \| x \|_E$$

وبالتالي فإن

$$\max_{t \in P_0} | \varphi_x(t) | \le \| x \|_E \qquad (5.3.2)$$

أكثر من ذلك ، من أجل x معطى يمكن بناء دالي f_0 نظيمه يساوي الواحد ومـــن أجله يكون :

$$f_0(x) = \| x \|_E$$

وبما أن $f_0 \ni S$ فإنه توجد $t_0 \ni P_0$ يكون من أجلها

$$f_{t_0} = f_0$$

وبالتالي فإن

$$f_{t_0}(x) = \| x \|_E$$

أي إن

$$\varphi_x(t_0) = \| x \|_E$$

ولذلك فإن

$$\max_{t \in P_0} |\varphi_x(t)| \geq \| x \|_E \qquad (5.3.3)$$

من $(5.3.2)$ و $(5.3.3)$ ينتج أن

$$\| \varphi_x \|_c = \max_{t \in P_0} \| \varphi_x(t) \| = \| x \|_E \qquad (5.3.4)$$

من بناء التابع $\varphi_x(t)$ واضح بأنه إذا قوبل $x_1 \ni E$ بـــ $\varphi_{x_1}(t)$ و x_2 بـ $\varphi_{x_2}(t)$ فـــإن $x_1 + x_2$ يقابـــل بـــ $\varphi_{x_1}(t) + \varphi_{x_2}(t)$ و λx يقابل بـــ $\lambda \varphi_x(t)$. بالتالي يكون لدينا تطبيق ايزومورفي للفضاء E على جزء من الفضاء $C[0, 1]$. وبما أنه وفقاً للايزومورفيزم يقابـــل العنـــصر $x_1 - x_2$ بالتابع $\varphi_{x_1}(t) - \varphi_{x_2}(t)$ ووفقاً للعلاقة $(5.3.4)$ يكون لدينا :

$$\| x_1 - x_2 \|_E = \| \varphi_{x_1} - \varphi_{x_2} \|_c$$

أي إن التقابل بين الفضاء E وجزء الفضاء $C[0, 1]$ هو ليس فقط ايزومورفياً بل ايزومتريا أيضاً . وهو المطلوب .

مبرهنة ٢(فريشيه) *(Fréchet)* (*)

(*) *(Fréchet . M . R)* *(2.9 . 1878 - 4 . 6 . 1973)* رياضي فرنسي .

كل فضاء متري و قابل للفصل X ايزومتري لفضاء جزئي من فضاء باناخ ما قابل للفصل .

البرهان . لتكن $M = \{ x_0 , x_1 , \ldots , x_n , \ldots \}$ مجموعة قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في X . لنقابل كل عنصر x و X بنقطة $y = \{ \eta_i \}$ من الفضاء m ، حيث :

$$\eta_i = \rho (x , x_i) - \rho (x_0 , x_i) \qquad i = 1 , 2 , \ldots$$

استناداً إلىموضوعة المثلث يكون

$$| \eta_i | = | \rho (x , x_i) - \rho (x_0 , x_i) | \leq \rho (x , x_0)$$

وبالتالي فإن $\{ \eta_i \}$ متتالية محدودة . أي إن y ، في الواقع ، نقطة في الفضاء m .

لنفرض أن العنصرين x , x' من X ، بالتطبيق المعرف لدينا ، يقابلان بالعنصرين $y = \{ \eta_i \}$ و $y' = \{ \eta'_i \}$ من m ، عندئذ يكون لدينا :

$$\| y - y' \| = \sup_i | \eta_i - \eta'_i | =$$

$$= \sup_i | [\rho (x , x_i) - \rho (x_0 , x_i)] - [\rho (x' , x_i) - \rho (x_0 , x_i)] | =$$

$$= \sup_i | \rho (x , x_i) - \rho (x' , x_i) | \leq \rho (x , x') \qquad (5.3.5)$$

لنفرض الآن أن ε عدد موجب كيفي ، أصغر من $\rho (x , x')$. توجد نقطة مثل x_n من المجموعة القابلة للعد والكثيفة في كل مكان M بحيث إن $\rho (x , x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. بالتالي فإن

$$\rho (x' , x_n) > \rho (x' , x) - \rho (x , x_n) > \rho (x' , x) - \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

ولهذا فإن

$$| \eta_n - \eta'_n | = | \rho (x_n , x) - \rho (x_n , x') | > \rho (x' , x_n) - \frac{\varepsilon}{2} >$$

$$> \rho (x , x') - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \rho (x , x') - \varepsilon$$

ومنه نجد أن

$$\| y - y' \| > \rho (x , x') - \varepsilon \qquad (3.5.6)$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي فإنه من العلاقة $(3.5.6)$ نجد

$$\| y - y' \| \geq \rho (x , x') \qquad (3.5.7)$$

بمقارنة العلاقتين $(3.5.5)$ و $(3.5.7)$ نجد

$$\| y - y' \| = \rho (x , x') \qquad (3.5.8)$$

وهكذا فإن المسافة بين النقطتين x و x' في X تساوي المسافة بين صورتيهما y و y' في m ، بالتالي فإن الفضاء X ايزومتري لجزء L من الفضاء m من الواضح ، أن هذا الجزء من الفضاء m قابل للفصل .

ليكن E فضاءً جزئياً من الفضاء m مولداً بعناصر المجموعة L ، عندئذ يكون E قابلاً للفصل ومن النمط B (فضاء باناخ) . X ايزومتري لجزء من هذا الفضاء . وهو المطلوب إثباته .

مبرهنة (٣). (باناخ – مازور) ($Banach - Mazur$) كل فضاء متري وقابل للفصل ايزومتري مع جزء ما من الفضاء $C[0 , 1]$.

إن البرهان ينتج مباشرة من المبرهنتين (١) و (٢) .

سنستعرض ، في ختام هذه الفقرة ، خاصة أُخرى من شمولية الفضاء $C[0 , 1]$. بمفهوم مختلف قليلاً . بسبب بعض المسائل المرتبطة بنظرية العزوم ونظرية المعادلات التكاملية الخطية بنى م . غ . كريين ($M . G . Krein$) نظرية المخاريط [*] .

تسمى المجموعة المغلقة والمحدبة K من الفضاء E **مخروطاً** إذا تمتعت بالخواص الآتية : إذا كان $x \ni K$ $(x \neq \theta)$ فإن $\lambda x \ni K$ من أجل $\lambda \geq 0$

---

[*] للاطلاع على هذا الموضوع يمكن العودة إلى الي العملين :

1) K rien M . G . and Rutman M . A . Linear Operatars that Leave a Cone Invariant in Banach Space (Russian) U M N , T. III V Y P . 1 (2 3) 1948 .

2) Krien M . G . Fundamental Properties of Normal Conical Sets in Banach Space (Russian) D A N (28) (13 – 17) . 1940

و $\lambda x \ni K$ من أجل $\lambda > 0$. وإذا كان x و y من K فإن $(x+y) \ni K$.

ويسمى المخروط K **طبيعياً** (*normal*) إذا تحققت من أجل أي عنصرين منه x و $y \ni K$ و $\| x \| = \| y \| = 1$ المتراجحة :

$$\| x + y \| \geq \delta$$

حيث δ عدد موجب ثابت . على سبيل المثال ، تشكل مجموعة التوابع غير السالبة من الفضاء $C[0, 1]$ مخروطاً طبيعياً ، وتتحقق المبرهنة الآتية :

مبرهنة (٤). (م . غ . كريين) . إذا كان K مخروطاً طبيعياً في الفضاء القابل للفصل E فإنه يوجد تطبيق خطي $(1-1)$ غامر ومتباين للفضاء E على فضاء جزئي من الفضاء $C[0,1]$ وتكون صور العناصر من K وفقط تلك العناصر بواسطة ذلك التطبيق توابع غير سالبة .

إذا لم يكن الفضاء E قابلاً للفصل ، فإنه تتحقق مبرهنة مماثلة مع استبدال الفضاء $C[0, 1]$ بالفضاء $C(Q)$ فضاء التوابع المستمرة على المجموعة ثنائية التراص Q .

مسائل وتمارين

١ – برهن أنه إذا كانت S هي ε – شبكة للمجموعة M فإن $M \subset \bigcup_{z \in S} S(z, \varepsilon)$ وبالعكس .

٢ – اذكر مثالاً لمجموعة محدودة إلا أنها غير متراصة .

٣ – اذكر مثالاً لمجموعة محدودة إلا أنها غير متراصة في الفضاءين l_1 و m

٤ – لتكن X مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية $X(t) = at^2 + bt + c$ مزودة بالمسافة $\rho(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 2} |X(t) - Y(t)|$ وليكن $z = (a, b, c) \in R^3$

برهن وجود ثابتين مثل $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ بحيث إن :

$$\alpha_2\, d(z_1\,,\,z_2) \le \rho(x_1\,,\,x_2) \le \alpha_2\, d(z_1\,,\,z_2)$$

حيث إن d هي المسافة في R^3 .

٥ – لتكن X مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية $X(t) = at^2 + bt + c$ مزودة بالمسافة $\rho(x, y) = \max\limits_{0 \le t \le 2} |X(t) - Y(t)|$ ، ولتكن M مجموعة جزئية من التوابع المحققة للشرط $|x(t)| \le 1$. برهن أن M متراصة ومغلقة .

٦ – اذكر مثالاً لمجموعة جزئية G من المجال المغلق $[a\,,\,b] = [0\,,\,1]$ وتغطية مفتوحة $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ للمجموعة G لايمكن فصل تغطية منتهية منها .

٧ – اذكر مثالاً لمجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء متري وتغطية مفتوحة لايمكن فصل تغطية منتهية منها .

٨ – اذكر مثالاً لمجموعة مغلقة ومتراصة F في فضاء متري X وتغطية $\{F_n\}$ للمجموعة F بمجموعات مغلقة لايمكن فصل تغطية منتهية منها .

٩ – اذكر مثالاً لتابع مستمر غير محدود على مجموعة مغلقة ومحدودة في فضاء متري .

١٠ – ليكن $X = [0\,,\,1]$ و

$$M = \{x \in C(0\,,\,1)\,,\, 0 \le x(t) \le 1\,,\, x(1) = 1\}\,,$$

وليكن $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt$. برهن أن M مجموعة مغلقة ومحدودة في $C(0\,,\,1)$. أوجد الحدين الأدنى الأعظمي والأعلى الأصغري . هل توجد نقاط يبلغ فيها الحدان الأدنى الأعظمي والأعلى الأصغري قيمتيهما ؟ .

١١ – برهن أن الفضاء $C^1[a\,,\,b]$ مجموعة من الشريحة الأولى في $C[a\,,\,b]$.

مسائل محلولة في مواضيع الفصل الأول

٢ – تأكد من أن A_R ، فضاء جميع التوابع الوحيدة القيمة والتحليلية في الدائرة $|z| < R$ $(0 < R < \infty)$ مع المسافة :

$$\rho(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{|z|\le r_k} |x(z)-y(z)|}{1+\max\limits_{|z|\le r_k} |x(z)-y(z)|}$$

حيث r_k متتالية من الأعداد الموجبة متزايدة إلى R هو فضاء متري

من الواضح أن $0 < \rho(x,y)$ إذا كان $x \ne y$ باستبدال $y(z)$ بـ $x(z)$ في تعريف المسافة $\rho(x,y)$ نجد أن $\rho(x,y) = 0$ وذلك لأن $\max\limits_{|z|\le r_k} |x(z) - x(z)| = 0$. بالعكس لنفرض أن $\rho(x,y) = 0$ ، إن هذا يؤدي إلى أن $\max\limits_{|z|\le r_k} |x(z) - y(z)| = 0$ من أجل أي عدد $0 \le k$.

أي إن التابعين $x(z)$ و $y(z)$ متطابقان على كل دائرة مغلقة $|z| \le r_k$ واستناداً إلى مبرهنة الوحدانية في التوابع التحليلية ينتج أن $x(z) \equiv y(z)$ من أجل جميع z : $|z| < R$.

وبما أن موضوعة التناظر في تابع المسافة المعرف واضحة فإنه يتبقى علينا إثبات متراجحة المثلث (موضوعة المثلث) . لتكن x , y , z عناصر كيفية من الفضاء A_R . بما أنه في أية نقطة z : $|z| < R$ يكون

$$|x(z) - y(z)| \le |x(z) - u(z)| + |u(z) - y(z)|$$

فإنه من الواضح أن

$$\max_{|z|\le r_k} |x(z) - y(z)| \le$$
$$\le \max_{|z|\le r_k} |x(z) - u(z)| + \max_{|z|\le r_k} |u(z) - y(z)|$$

من أجل أي عدد $0 \le k$.

وبفرض أن

$$a = \max_{|z| \le r_k} | x(z) - y(z) |$$
$$b = \max_{|z| \le r_k} | x(z) - u(z) |$$
$$c = \max_{|z| \le r_k} | u(z) - y(z) |$$

واستناداً إلى المتراجحة العددية

$$\frac{a}{1+a} \le \frac{b+c}{1+b+c} \le \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

نجد أن

$$\rho(x,y) \le \rho(x,u) + \rho(u,y)$$

٤ – لتكن X مجموعة كثيرات الحدود الجبرية من الدرجة n والمعرفة على المجال $[0,1]$. إذا كان

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \quad , \quad Q(t) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k t^k$$

فبرهن على أن المسافتين

$$\rho_1(P,Q) = \max_{0 \le t \le 1} | P(t) - Q(t) |$$
$$\rho_2(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} | \alpha_k - \beta_k |$$

متكافئتان توبولوجياً .

ليكن

$$g(t) = P(t) - Q(t) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \beta_k) t^k = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k t^k$$

عندئذٍ يكون

$$\rho_1(P,Q) = \max_{0 \le t \le 1} | g(t) | \le \sum_{k=0}^{n} | \gamma_k | = \rho_2(P,Q)$$

لنأخذ الآن مجموعة النقاط $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ على المجال $[0,1]$ ولنستعرض جملة المعادلات المشكلة من $(n+1)$ معادلة بـ $(n+1)$ مجهولاً :

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_k \, t_i^k = g(t_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

إن معين هذه الجملة هو معين ڤانديرموند وهو مختلف عن الصفر ، ولذلك فإن

$$\gamma_k = \sum_{k=0}^{n} c_{k\,i} \; g(t_i) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

حيث إن الأعداد c_{ki} تتعلق باختيار النقاط t_i ولا تتعلق باختيار كثير الحدود $g(t)$ لذلك فإن

$$\rho_2(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} |\gamma_k| \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} |c_{k\,i}| \; . \; \rho_1(P, Q)$$

وهو المطلوب .

مطلوب

٦ – أورد مثالاً لفضاء متري (X, ρ) تكون فيه الكرات المغلقة $B_1[x_1, r_1]$ ، $B_2[x_2, r_2]$ هي بحيث إن

$$B_1 \subset B_2 \quad \text{و} \quad r_1 > r_2$$

ليكن (X, ρ) فضاءً مترياً مؤلفاً من جميع النقاط (x, y) من الدائرة $x^2 + y^2 < 9$ وذات المسافة الإقليدية المعروفة . لنضع $B_2 = X$ و

$$B_1 = B_2 \cap \{ (x, y) : (x^2 - 2)^2 + y^2 \le 16 \}$$

عندئذٍ نجد أن $B_1 \subset B_2$ وأن $r_1 = 4$ و $r_2 = 3$ و $r_2 < r_1$

مطلوب ٨ – هل المتتالية $x_n = \{ \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots \}$ متقاربة في الفضاء المتري X إذا كان

$$1) \quad X = l_1 \quad ; \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$2) \quad X = l_2 \quad ; \quad x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$3)\quad X = l_1 \quad ; \quad x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right)$$

١) من الواضح ، أن المتتالية

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0 \ldots \right)$$

تنتمي إلى l_1 من أجل كل عدد $n \in N$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| = \left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \times n = 1$$

إلا أنها ليست متقاربة في l_1 لكونها ليست متتالية أساسية . في الواقع ، من أجل $n \in N$ يكون لدينا

$$\rho(x_n, x_{2n}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right) + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1$$

٢) إن المتتالية

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

ليست أساسية في الفضاء l_2 ، إذ إنه من أجل أي عدد $n \in N$ لدينا :

$$\rho^2(x_n, x_{2n}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(2n)} \right|^2 =$$

$$= \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right]^2 \times n^2 + \left(4n^2 - n^2\right) \times \left(\frac{1}{2n} \right)^2 = 1$$

لاحظ أن

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

و أن

$$x_{2n} = \left(\underbrace{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}, \ldots, \frac{1}{2n}}_{(2n)^2}, 0, 0, \ldots \right)$$

٣) في هذه الحالة لدينا

$$\rho^3 (x_n , x_{n+p}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \to 0 , n \to \infty$$

ومن أجل أي عدد p و N . إن ذلك يعني أن المتتالية $\{ x_n \}$ أساسية في الفضاء l_3 ، وبما أن الفضاء l_3 تام فإن المتتالية $\{ x_n \}$ متقاربة في ذلك الفضاء .

~~١~~ الدرس – برهن أن الفضاء A_R تام .

لتكن $\{ x_n (z) \}$ متتالية أساسية في الفضاء A_R ، أي إنه من أجل كل عدد $0<\varepsilon$ يوجد عدد مثل n_0 بحيث إنه من أجل جميع $n , m \geq n_0$ يكون

$$\rho (x_n , x_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} \frac{\max\limits_{|z| \leq r_k} | x_n (z) - x_m (z) |}{1 + \max\limits_{|z| \leq r_k} | x_n (z) - x_m (z) |} < \varepsilon$$

من هذا ينتج أن المتتالية تتقارب بانتظام على الدائرة $|z| \leq r_k$ (لكونها تحقق شروط اختبار كوشي في التقارب المنتظم) و أما كون التابع نهاية المتتالية تحليلياً في كل دائرة $|z| \leq r_k$ ولاتتعلق بـ k ، فإنه ينتج على الترتيب من مبرهنتي وايرشتراس والوحدانية في التوابع التحليلية وأما العلاقة $\lim\limits_{n \to \infty} \rho (x_n , x) = 0$ فإنها تنتج من الانتقال إلى النهاية في كل حد تحت إشارة الجمع في السلسلة

$$\rho (x_n , x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\max\limits_{|z| \leq r_k} | x_n (z) - x (z) |}{1 + \max\limits_{|z| \leq r_k} | x_n (z) - x (z) |}$$

(تبعاً لتقاربها المنتظم بالنسبة لـ n) وهو المطلوب .

الحل ٢٢- ليكن X فضاءً مترياً ، وليكن B و A مؤثرين ضاغطين في X وبحيث أن

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha_A \, \rho(x, y)$$
$$\rho(Bx, By) \le \alpha_B \, \rho(x, y)$$

برهن على أنه إذا كان $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$ من أجل أي عنصر $x \in X$

فإن النقطتين الثابتتين للمؤثرين A و B تقعان على مسافة لاتزيد عن $\dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}$

حيث $\alpha = \max(\alpha_A, \alpha_B) < 1$

لتكن x^* النقطة الثابتة للمؤثر A ولنبن النقطة الثابتة y^* للمؤثر B كنهاية للمتتالية

$$y_k = B^k x^*$$

عندئذ يكون

$$\rho(x^*, y_k) \le \rho(x^*, y_1) + \ldots + \rho(y_{k-1}, y_k) \le$$

$$\le \rho(x^*, Bx^*)\,[1 + \alpha_B + \ldots + \alpha_B^{k-1}] \le$$

$$\le \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B}$$

وبالانتقال إلى النهاية عندما $k \to \infty$ نجد أن

$$\rho(x^*, y^*) \le \frac{\rho(x^*, Bx^*)}{1 - \alpha_B} = \frac{\rho(Ax^*, B^*x)}{1 - \alpha_B} < \frac{\varepsilon}{1-\alpha}$$

الحل ٢٤- ليكن التابع $\varphi(s, u)$ معرفاً ومستمراً في الشريط

$$\Pi = \{ (s,u) \in R^2 ; \quad a \le s \le b \quad , \quad -\infty < u < \infty \}$$

كما أنه قابل للاشتقاق بالنسبة لـ u في Π ومشتقه يحقق الشرط :

$$0 < m \le \varphi'_u(s,u) \le M < +\infty \quad ; \quad (s,u) \in \Pi$$

برهن على وجود تابع وحيد ومستمر على المجال $[a, b]$ مثل $u = x^*(s)$ ومن أجله يكون $\varphi(s, x^*(s)) \equiv 0$ حيث $s \in [a, b]$

لنستعرض في الفضاء $C[b, a]$ المؤثر $Ax = y$ حيث

$$y(s) = x(s) - \frac{2}{M+m}\varphi(s, x(s)) \quad ; \quad s \in [a, b]$$

إن هذا المؤثر ضاغط ، وذلك لأنه إذا كـان $y = Ax$ و $\tilde{y} = A\tilde{x}$ ، فإنـه استناداً لمبرهنة لاغرانج في التزايدات المحدودة يكون لدينا من أجل أي $s \in [a\ b]$

$$|y(s) - \tilde{y}(s)| =$$

$$= \left| x(s) - \tilde{x}(s) - \frac{2}{M+m}\left[\varphi(s, x(s)) - \varphi(s, \tilde{x}(s))\right] \right| =$$

$$= |x(s) - \tilde{x}(s)| \cdot \left| 1 - \frac{2}{M+m}\varphi'_u(s, \theta(s)) \right| \leq$$

$$\leq \frac{M-m}{M+m} \max_{s\in[a,b]} |x(s) - \tilde{x}(s)|$$

وحيث إن $\frac{M-m}{M+m} < 1$ فإن المؤثر A ضاغط ، وبالتالي فإنـه للمـؤثر A توجد نقطة ثابتة وحيدة مثل x^* في الفضاء $C[b, a]$. بملاحظـة أن العلاقـة $x^* = Ax^*$ تكـافئ $\varphi(x, x^*(s)) \equiv 0$ حيـث $s \in [a, b]$ يـتم المطلوب .

<u>١٦</u> - برهن أن المؤثر A المعرف بالعلاقة

مطلوب

$$A: \quad f(x) \to \frac{1}{2}\int_0^1 xt f(t)\, dt + \frac{5}{6}x$$

هو مؤثر ضاغط في الفضاء $C[0, 1]$ ، ثم أوجد نقطته الثابتة $f^*(x)$.

بما أن

$$|Af_1 - Af_2| = \frac{1}{2}\left| \int_0^1 xt\,[f_1(t) - f_2(t)]\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\max_{t\in[0,1]} |f_1(t) - f_2(t)| = \frac{1}{2}\rho(f_1, f_2)$$

فإن المؤثر A ضاغط . لنضع $f_0(x) = 0$ عندئذ نجد أن

$$f_1(x) = Af_0(x) = \frac{5}{6}x$$

$$f_2(x) = \quad Af_1(x) \quad = \frac{1}{2}\int_0^1 x\, t. \frac{5}{6} t \; dt + \frac{5}{6}x \quad = (\frac{5}{6^2} + \frac{5}{6})\; x$$

$$f_3(x) = A f_2 = (\frac{5}{6^3} + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6})\; x$$

....

$$f_n(x) = A f_{n-1} = (\frac{5}{6^n} + \frac{5}{6^{n-1}} + \ldots + \frac{5}{6^2} + \frac{5}{6})\, x$$

وبالتالي فإن

$$f^*(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = x$$

أي إن هذا التابع هو الحل الوحيد في الفضاء $C[0, 1]$ للمعادلة التكاملية

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x t \; f(x)\, dt + \frac{5}{6}\, x$$

مسائل محلولة في مواضيع الفصل الثاني

مطلوب

٢ - a) هل يعرف التابع $x \to |\, arctg\ x \,|$ نظيماً في $\mathbb{R}$ ؟

b) هل يعرف التابع $x = (\xi_1\ ,\xi_2\ ) \to \|\ x\ \| = |\,\xi_1\,| + |\,\xi_2\,|$ ، $x \in \mathbb{R}^2$ نظيماً في $\mathbb{R}^2$ ؟

إذا كان الأمر كذلك فماذا تمثل الكرة الواحدية في $\mathbb{R}^2$ بالنسبة للنظيم المذكور ؟

c) برهن أن التابع

$$\mathbb{R}^n \ni x = (\xi_1\ ,\xi_2 , \ldots , \xi_n\ ) \to \|\, x \,\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\,\xi_k\,|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ليس نظيماً في $\mathbb{R}^n$ من أجل $0 < p < 1$ و $2 \le n$.

a) إن التابع $x \to |\, arctg\ x \,|$ لا يعرف نظيماً في $\mathbb{R}$ وذلك لأن الموضوعة الثانية من موضوعات النظيم لا تتحقق ($\|\ \lambda\, x \| = |\,\lambda\,|\ \|\ x\ \|$) : في الواقع ، إذا أخذنا $x = \sqrt{3}$ و $\lambda = \dfrac{1}{3}$ فإنه يكون لدينا

$$\|\ \lambda\, x \| = arctg\ \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

من ناحية ثانية لدينا

$$|\lambda|\ \|\ x \| = \frac{1}{3} arctg\ \sqrt{3}\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$$

b) إن التابع $(\xi_1\ ,\xi_2\ ) \to \|\ x\ \| = |\,\xi_1\,| + |\,\xi_2\,|$ يعرف نظيماً في $\mathbb{R}^2$ وذلك لأنه أياً كان العنصر $x = (\xi_1\ ,\xi_2\ )$ من $\mathbb{R}^2$ فإن $\|\ x\ \| = |\,\xi_1\,| + |\,\xi_2\,|$ يكون أكبر أو يساوي الصفر ، كما أن $\|\ x\ \| = 0$ يؤدي إلى أن $|\,\xi_1\,| + |\,\xi_2\,| = 0$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن $|\,\xi_1\,| = |\,\xi_2\,| = 0$ الأمر الذي يؤدي إلى أن $x = \theta$ وهذا يعني أن الموضوعة الأولى من موضوعات النظيم محققة .

إن $\| \lambda x \| = | \lambda \xi_1 | + | \lambda \xi_2 |$ وبالتالي فإن

$$\| \lambda x \| = | \lambda | \left(| \xi_1 | + | \xi_2 | \right)$$

أي إن $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \|$ وهو ما يثبت صحة الموضوعة الثانية . لنتأكد من تحقق الموضوعة الثالثة . ليكن

$$x = (\xi_1 , \xi_2) \quad \text{و} \quad y = (\eta_1 , \eta_2)$$

فنجد أن

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1 , \xi_2 + \eta_2)$$

وبالتالي فإن

$$\| x + y \| = | \xi_1 + \eta_1 | + | \xi_2 + \eta_2 | \le$$
$$\le | \xi_1 | + | \eta_1 | + | \xi_2 | + | \eta_2 | = \| x \| + \| y \|$$

إن الكرة الواحدية $S [0 , 1]$ هي مجموعة النقاط من R^2 والتي من أجلها :

$$S[0,1] = \left\{ x = (\xi_1 , \xi_2) \in R^2 : | \xi_1 | + | \xi_2 | \le 1 \right\}$$

وهي بالنسبة للتنظيم المعرف تمثل المربع الواحدي (طول ضلعه واحدة الطول) ذا الرؤوس : $(0 , 1)$ ، $(-1 , 0)$ ، $(0 , -1)$ ، $(1 , 0)$ الواقعة على المحورين الإحداثيين $0x$ و $0y$.

c) بالنسبة للتابع المذكور لا تتحقق الموضوعة الثالثة من موضوعات النظيم

في الواقع ، لنأخذ الشعاعين

$x = (\frac{1}{2} , 0 , 0 , \ldots , 0)$ ، $y = (0 , \frac{1}{2} , 0 , \ldots , 0)$ من R^n .

من الواضح أن $x \ne y$ ، كما أن

$$\| x \|_p = \| y \|_p = \frac{1}{2} \qquad \forall \;\; 0 < p < 1$$

و

$$\| x \|_p + \| y \|_p = 1$$

إلا أن

$$\| x+y \|_p = \left\| \left(\frac{1}{2} , \frac{1}{2} , 0 , \ldots , 0 \right) \right\|_p =$$

$$= \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}-1}$$

وبما أن $p \in (0,1)$ فإن $1 < 2^{\frac{1}{p}-1}$ وتبعاً لذلك يكون

$$\| x+y \|_p > \| x \|_p + \| y \|_p$$

مطلوب

٤ - a) تأكد من أن النظيمين

$$\| x \|_1 = \max_{0 \le t \le 1} | x(t) | \quad , \quad \| x \|_2 = \left(\int_0^1 x^2(t)\, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

غير متكافئين في الفضاء $C[0,1]$.

b) هل النظيمان

$$\| x \|_1 = \max_{0 \le t \le 1} | x(t) | + \max_{0 \le t \le 1} | x'(t) |$$

$$\| x \|_2 = \int_0^1 | x(t) |\, dt + \max_{0 \le t \le 1} | x'(t) |$$

متكافئان في الفضاء $C^{(1)}[0,1]$ ؟

a) نذكر بأن النظيمين المعرفين على الفضاء نفسه يكونان متكافئين إذا وفقط إذا نتج من تقارب متتالية ما وفق أحد النظيمين تقاربها بالنسبة للنظيم الآخر. لنأخذ على سبيل المثال المتتالية $x_n(t) = t^n$. بالنسبة للنظيم $\| . \|_2$ يكون

$$\| x_n \| = \left(\int_0^1 t^{2n}\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \;\; ; \;\; n \to \infty$$

إلا أنها لا تتقارب بالنسبة للنظيم $\| . \|_1$ وذلك لأن التقارب وفق النظيم الأول كما هو معلوم لدينا ، مكافئ للتقارب المنتظم ، وإن المتتالية المذكورة تتقارب نقطياً إلى التابع

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le t < 1 \\ 1 & ; \quad t = 1 \end{cases}$$

الذي يعاني انقطاعاً في النقطة $t = 1$ وبالتالي فهو لا ينتمي إلى الفضاء $C[0, 1]$ وهذا بدوره يؤدي إلى عدم تكافؤ النظيمين .

b) إن النظيمين $\| \cdot \|_1$ و $\| \cdot \|_2$ متكافئان ، كما أن النظيم $\| \cdot \|_2$ خاضع للنظيم $\| \cdot \|_1$ (*) . في الواقع ، إن

$$\| x \|_2 = \int_0^1 | x(t) | \, dt + \max_{0 \le t \le 1} | x'(t) | \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le 1} | x(t) | \int_0^1 dt + \max_{0 \le t \le 1} | x'(t) | = \| x \|_1$$

وبالتالي فإنه للبرهان على تكافؤ النظيمين يكفي استناداً إلى المبرهنة الآتية :

مبرهنة . إذا كان $\| \cdot \|_1$ و $\| \cdot \|_2$ معرفين على الفضاء الخطي المنظم X وكان X فضاء باناخ بالنسبة لكل من النظيمين وكان أحد النظيمين خاضعاً للآخر فإن هذين النظيمين متكافئان .

أن نبرهن على $C^{(1)}[0, 1]$ تام بالنسبة لكل من النظيمين $\| \cdot \|_1$ و $\| \cdot \|_2$.

لنبرهن أولاً أن الفضاء $C^{(1)}[0, 1]$ تام بالنسبة للنظـيم $\| \cdot \|_1$. لـتكن $\{ x_k \}$ متتالية أساسية وفق النظيم $\| \cdot \|_1$ في $C^{(1)}[0, 1]$. أي إنه من أجـل أي عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عدد k_0 د N بحيث إنه من أجل جميـع الأعـداد $k_0 < k$ و $k_0 < m$ يكون

$$\| x_k - x_m \|_1 = \max_{0 \le t \le 1} | x_k(t) - x_m(t) | + \max_{0 \le t \le 1} | x'_k(t) - x'_m(t) | < \varepsilon$$

وباستخدام معيار التقارب المنتظم لمتتالية تابعية نجد أنه من المتراجحة السابقة ينتج وجود تابع مثل $x_0(t)$ د $C^{(1)}[0,1]$ بحيث إن المتتالية $x_k(t)$ تتقارب بانتظام إلى $x_0(t)$ و $x'_k(t)$ تتقارب بانتظام إلى $x'_0(t)$

على $\left(k \to \infty \text{ عندما } x'_k(t) \underset{\to}{\to} x'_0(t), x_k(t) \underset{\to}{\to} x_0(t) \right)$

(*) نقول إن النظيم $\| \cdot \|_2$ خاضع للنظيم $\| \cdot \|_1$ ، إذا وجد ثابت $0 < c$ بحيث أن المتراجحة $\| x \|_2 \le c \| x \|_1$ تتحقق من أجل جميع العناصر $X \ni x$. (X فضاء خطي منظم) .

$[0,1]$. وهذا يعني أن المتتالية $\{x_k\}$ $(\subset C^{(1)}[0,1])$ متقاربة وفق النظيم $\|.\|_1$ إلى التابع $x_0(t)$ من $C^{(1)}[0,1]$.

إذا كانت المتتالية $\{x_k(t)\}$ أساسية وفق النظيم $\|.\|_2$ فإنه من أجل أي عدد $0<\varepsilon$ وجميع $k_0<k$ و $k_0<m$ يكون

$$\max_{0\le t\le 1} |x'_k(t) - x'_m(t)| < \varepsilon$$

و

$$\int_0^1 |x_k(t) - x_m(t)|\, dt < \varepsilon$$

عندئذ فإن المتتالية $\{x'_k(t)\}$ تتقارب بانتظام على المجال $[0,1]$ إلى تابع ما مثل $\varphi_0(t)$ من $C[0,1]$ ، أما المتتالية $\{x_k(t)\}$ فإنها تتقارب في الفضاء $L[0,1]$ (الفضاء $L[0,1]$ تام) إلى تابع $x_0(t)$ بالتالي توجد متتالية جزئية $\{x_{k_n}(t)\}$ متقاربة إلى $x_0(t)$ تقريباً في كل مكان على $[0,1]$.

لتكن t_0 نقطة من المجال $[0,1]$ بحيث إن $x_{k_n}(t_0) \to x_0(t_0)$ عندما $n\to\infty$. بمكاملة المتتالية الجزئية $\{x'_{k_n}(t)\}$ حداً حداً نجد أن

$$\int_{t_0}^{t} x'_{k_n}(\tau)\, d\tau = x_{k_n}(t) - x_{k_n}(t_0) \to \int_{t_0}^{t}\varphi_0(\tau)\, d\tau \, (\forall t\in[0,1])$$

ومنه نجد

$$x_{k_n}(t) \to x_0(t_0) + \int_{t_0}^{t}\varphi_0(\tau)\, d\tau \, (\forall t\in[0,1])$$

أي إن

$$x_0(t) = c + \int_{t_0}^{t}\varphi_0(\tau)\, d\tau$$

تقريباً في كل مكان على $[0,1]$.

بما أن عناصر الفضاء $L[0,1]$ تتعرف بدقة حتى التكافؤ وأن التابع

فإن التابع $c + \int_{t_0}^{t} \varphi_0(\tau)\, d\tau$ مستمراً إطلاقاً على المجال $[0, 1]$

أيـــا كـــان $t \in [0,1]$ وأن $x_0(t) \in C^{(1)}[0,1]$ وأن $x_0'(t) = \varphi_0(t)$. بالإضافة إلى ذلـك ، فإنـه مــن الواضـح عنـدما $n \to \infty$ أن $\| x_n - x_0 \|_2 \to 0$ وهذا بدوره يثبـت أن الفـضاء $C^{(1)}[0,1]$ تـام بالنسبة للنظيم $\| . \|_2$. بذلك يكون النظيمان $\| . \|_1$ ، $\| . \|_2$ متكافئين .

ملاحظة . يمكن إثبات تكافؤ النظيمين $\| . \|_1$ ، $\| . \|_2$ بـشكل مباشـر وذلك بالتأكد من أنه مــن تقـارب متتاليـة $\{x_n(t)\}$ $\left(\subset C^{(1)}[0,1] \right)$ وفق النظيم $\| . \|_1$ ينتج تقاربها وفق $\| . \|_2$ وبالعكس .

حذف ~~٢-~~ ادرس تقارب المتتالية $\{x_n\}$ في الفضاء الخطي المنظم E إذا كان

$$a)\ E = l_1,\ x_n = \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n^\sigma}, \frac{1}{(n+1)^\sigma}, \ldots \right), \sigma > 1$$

$$b)\ E = l_2,\ x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \right)$$

$$c)\ E = C^{(1)}[0,1],\ x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

d) $E = [0, 1]$ ، L $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$ من أجل t عدد أصم ، و $x_n(t) = 0$ من أجل t عدد عادي .

$$e)\, E = L^2\,[0,1]\ ,\ x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}\,t & ;\quad t \in [0;\frac{1}{n}] \\ 0 & ;\quad t \in (\frac{1}{n},1] \end{cases}$$

a) إن المتتالية $\{x_n\}$ هي متتالية أساسية في l_1 وذلك لأن

$$\rho\,(x_n, x_{n+p}) = \|x_n - x_{n+p}\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^{\sigma}} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{\sigma}} \to 0$$

عندما $n \to \infty$ وبانتظام بالنسبة لـ $p \ni N$. وبما أن l_1 تام فإن المتتالية متقاربة في l_1 .

b) في هذه الحالة لدينا

$$\rho^2\,(x_n, x_{n+1}) = \|x_n - x_{n+1}\|^2 = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})^2 + 2 > 2$$

وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n\}$ ليست متقاربة في l_2 .

c) إن المتتالية $\{x_n(t)\}$ متقاربة إلى التابع $x(t) \equiv 0$ وذلك لأن المتتاليـــة $\{x_n(t)\}$ تتقارب بانتظام إلى الصفر ($x_n(t) \underset{\rightarrow}{\rightarrow} 0$ عندما $n \to \infty$) و

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0.1]} |x_n'(t)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0.1]} |t^n(1-t)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$$

أي إن $x_n'(t) \underset{\rightarrow}{\rightarrow} 0$ $n \to \infty$ وهذا يعني أن

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0.1]} |x_n(t)| + \max_{t\in[0.1]} |x_n'(t)| =$$

$$= \max_{t\in[0.1]} \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right| + \max_{t\in[0.1]} t^n(1-t) \to 0$$

عندما $n \to \infty$

d) لنلاحظ أن كل تابع $x_n(t)$ هو تابع قيوس ومحدود وبالتالي فهو

قابل للمكاملة بمفهوم ليبيغ ، إلا أنه غير قابل للمكاملة بمفهوم ريمان لكونــه منقطعــاً على مجموعة ذات قياس موجب . إن المتتالية $\{ x_n(t) \}$ تتقارب في الفضاء $L[0,1]$ إلى التابع $x(t) \equiv 1$ وذلك لأن

$$\| x_n - 1 \| = \int_0^1 | x_n(t) - 1 | \, dt = \int_0^1 (x_n(t) - 1) \, dt =$$

$$= -1 + \int_0^1 x_n(t) \, dt = -1 + \int_0^1 e^{-\frac{t}{n}} \, dt =$$

$$= -1 + \frac{e^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

(استخدمنا هنا تطابق تكامل ليبيغ للتوابع المتكافئة (التابع $x_n(t)$ يكافئ التابع $e^{-\frac{t}{n}}$)

e) إن المتتالية $\{ x_n \}$ لاتتقارب فــي الفــضاء $L^2[0,1]$ لكونهــا متتالية غير أساسية . في الواقع ، من أجل أي عددين p, n من $\mathbb{N}$ لدينا :

$$\rho^2 (x_n , x_{n+p}) = \| x_n - x_{n+p} \|^2 =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n+p}} \left(\sqrt{n+p} - (n+p)\sqrt{n+p}\, t - \sqrt{n} + n\sqrt{n}\, t \right)^2 dt +$$

$$+ \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} \left(\sqrt{n} - n\sqrt{n}\, t \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+p}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{(n+p)\sqrt{n+p}}$$

إذا كان $n = p$ فإننا نجد بسهولة أن

$$\rho^2 (x_n , x_{2n}) = \frac{4\sqrt{2} - 5}{6\sqrt{2}} > 0$$

٨ – لنرمز بـ $C^\alpha[a,b]$ لمجموعة جميع التوابــع $x(t)$ المحققــة علــى المجال $[a,b]$ لشرط هولدر ذي المؤشر α ∋ $(0,1]$: حذف α

$$H_\alpha(x) = \sup_{a\le t,\tau\le b} \frac{x(t)-x(\tau)}{|t-\tau|^\alpha} < +\infty$$

برهن أن $C^\alpha[a,b]$ فضاء باناخ بالنسبة للنظيم

$$\|x\|_\alpha = \max_{a\le t\le b} |x(t)| + H_\alpha(x) \ , \ x \in C^\alpha[a,b] \ (*)$$

بسهولة يمكن التأكد من أن العلاقة (*) تعرف نظيماً في $C^\alpha[a,b]$.

ولنبرهن على أن هذا الفضاء تام .

لتكن $\{x_n(t)\}$ متتالية أساسية في $C^\alpha[a,b]$. أي إن $\|x_n - x_m\| \to 0$ عندما $n, m \to \infty$. بما أن كل تابع من $C^\alpha[a,b]$ هو تابع مستمر فإن $C^\alpha[a,b] \subset C[a,b]$ وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n(t)\}$ هي متتالية أساسية في $C[a,b]$ من المعلوم أن $C[a,b]$ هو فضاء باناخ وبالتالي فإن المتتالية $\{x_n(t)\}$ تتقارب في هذا الفضاء إلى تابع مثل $x(t) \in C[a,b]$. أي إن

$$\|x_n - x\|_{c[a,b]} \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

ولنبرهن الآن على أن التابع $x(t) \in C^\alpha[a,b]$. في الحقيقة ، من كون أن المتتالية $\{x_n(t)\}$ أساسية ينتج أن $\{x_n(t)\}$ محدودة (بالنظيم) ، أي إن $\|x_n\|_\alpha \le K$ من أجل جميع الأعداد $n \in \mathbb{N}$. وفي حالة خاصة يكون أيضاً $K \ge H_\alpha(x_n)$ ، من أجل جميع قيم n ، أي إنه من أجل أية نقطتين t و τ من $[a,b]$ و $(t \ne \tau)$ يكون لدينا

$$\frac{|x_n(t) - x_n(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \le K$$

بالانتقال إلى النهاية في العلاقة الأخيرة عندما $n \to \infty$ ، آخذين بعين الاعتبار أن $x_n(t) \to x(t)$ وأن $x_n(\tau) \to x(\tau)$ عندما $n \to \infty$ فنجد أن

$$\frac{|x(t) - x(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \le K$$

أي إن $K \ge H_\alpha(x_n)$ ومن ذلك ينتج أن $x(t) \in C^\alpha[a,b]$.

لنبرهن الآن أن المتتالية $\{ x_n (t) \}$ تتقارب إلى $x (t)$ في الفضاء $C^{\alpha}[a , b]$. أي إن $\| x_n - x \|_{\alpha} \to 0$ عندما $n \to \infty$. بغية هذا الأمر يكفي أن نبرهن على أن $H_{\alpha} (x_n - x) \to 0$ عندما $n \to \infty$. في الواقع ، بما أن المتتالية $\{ x_n (t) \}$ أساسية ، فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $n_0 = n_0 (\varepsilon)$ بحيث يكون $\varepsilon > H_{\alpha} (x_n - x_m)$ من أجل $n_0 < m , n$ وفقاً لذلك نجد أنه من أجل أية نقطتين t و τ من $[a , b]$ و $(t \neq \tau)$ يكون لدينا

$$\frac{| x_n (t) - x_m (t) - (x_n (\tau) - x_m (\tau)) |}{| t - \tau |^{\alpha}} < \varepsilon$$

ومنه ومن أجل $m \to \infty$ وباستخدام العلاقتين $x_m (t) \to x (t)$ و $x_m (\tau) \to x (\tau)$ نجد أن

$$\frac{| x_n (t) - x(t) - x_n (\tau) + x(\tau) |}{| t - \tau |^{\alpha}} \le \varepsilon \quad (n,m > n_0)$$

وبما أن المتراجحة الأخيرة محققة من أجل جميع t و τ من المجال $[a , b]$ و $(t \neq \tau)$ فإن $H_{\alpha} (x_n - x) \le \varepsilon$. بهذه الصورة نجد أنه من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عدد مثل $n_0 = n_0 (\varepsilon)$ بحيث إنه من أجل جميع $n_0 < n$ تتحقق المتراجحة $H_{\alpha} (x_n - x) \le \varepsilon$ وهذا يعني أن $H_{\alpha} (x_n - x) \to 0$ عندما $n \to \infty$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن $(x_n - x) \to 0$ عندما $n \to \infty$. وهو المطلوب .

١٠ – هل المجموعات الآتية مطابع

a) – مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة k .

b) – مجموعة كثيرات الحدود من درجة لا تزيد عن k .

c) – مجموعة التوابع المستمرة والمحققة للشرط $\int_0^1 | x (t) | \, dt \le 1$.

d) - مجموعة التوابع المستمرة والمحققة للشرط $\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt \le 1$

محدبة في الفضاء $C[0,1]$ ؟

a) ليكن

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k \quad , \quad Q(t) = \sum_{n=0}^{k} \beta_n t^n$$ كثيري حدود من

الدرجة k في t حيث $t \in [0,1]$ ولنشكل كثير الحدود

$$R(t) = \lambda p(t) + (1-\lambda) Q(t) \quad : \quad 0 \le \lambda \le 1$$

فنجد أن

$$R(t) = \sum_{n=0}^{k} [\lambda \alpha_n + (1-\lambda) \beta_n] t^n$$

من الواضح أن $R(t)$ هو كثير حدود في t إلا أن درجته في الحالة العامة لا تساوي k ويكفي لتحقيق ذلك أن يكون $\lambda \alpha_k + (1-\lambda) \beta_k = 0$ فـإذا كانت معاملات كثيري الحدود أمثال t^k محققة للشرط

$$0 < \lambda = \frac{\beta_k}{\beta_k - \alpha_k} < 1$$

فإن $R(t)$ لن يكون من الدرجة k . وبالتالي فإن المجموعة ليست محدبة .

b) بنفس الطريقة نجد أن مجموعة كثيرات الحدود من درجة لا تزيد عن k هـي مجموعة محدبة .

c) ليكن $x(t)$ و $y(t)$ تابعين مستمرين ومحققين للشرط

$$\int_0^1 |y(t)| \, dt \le \quad , \quad \int_0^1 |x(t)| \, dt \le 1$$

لنشكل التابع

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t) \quad , \quad 0 \le \lambda \le 1$$

من الواضح أن $z(t)$ تابع مستمر ، كما أن

$$|z(t)| \le \lambda |x(t)| + (1-\lambda) |y(t)|$$

ومنه فإن

$$\int_0^1 |z(t)|\, dt \le \lambda \int_0^1 |x(t)|\, dt +$$

$$+(1-\lambda)\int_0^1 |y(t)|\, dt \le \lambda + (1-\lambda) = 1$$

وبالتالي فإن مجموعة التوابع هذه مجموعة محدبة .

d) بالمثل تماماً كما في c) تكون المجموعة محدبة .

مطلوب ١٢ - أوجد نظيم x

a) في فضاء المتتاليات العددية المحدودة إذا كان

$$x = \left\{ \frac{1}{n^2 - 10n + 28} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

b) في الفضاء $L^2(0, \pi)$ إذا كان

$$x(t) = \begin{cases} \sin t & ; \text{if } \sin \frac{1}{t} \ne 0 \\ \cos t & ; \text{if } \sin \frac{1}{t} = 0 \end{cases}$$

a) لنأخذ التابع $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 10x + 28}$. إن هذا التابع متزايد في المجال $1 \le x \le 5$ ومتناقص في المجال $5 \le x \le \infty$

وبالتالي فإن

$$\| x \| = \sup_n |\xi_n| = \sup_n |(n^2 - 10n + 28)^{-1}| =$$

$$= |25 - 50 + 28|^{-1} = \frac{1}{3}$$

b) إن التابع $\sin \dfrac{1}{t}$ ينعدم في مجموعة النقاط $t = \dfrac{1}{\pi n}$ أي في مجموعة قابلة للعد ، وفقاً لذلك يكون التابعان $x(t)$ و $\sin t$ متكافئين وذلك لأن قياس المجموعة التي يختلف عليها التابعان مساوٍ للصفر $(\mu(\sin t \ne x(t)) = 0)$

ومنه نجد

$$\| x \|_{L^2} = \left(\int_0^{\pi} (\sin t)^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos t}{2} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

١٤- لتكن $\alpha = (\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots)$ متتالية عددية مثبتة و $0 < \alpha_n$ ، $n \in \mathbb{N}$ ولتكن $l_{2,\alpha}$ مجموعة جميع المتتاليات $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots \}$ المحققة للشرط

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n | \xi_n |^2 < + \infty$$

تأكد من أن $l_{2,\alpha}$ والمزود بالجداء الداخلي

$$(x , y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n \eta_n$$

حيث $y = (\eta_1 , \eta_2 , \ldots) \in l_{2,\alpha}$ هو فضاء هيلبرت القابل للفصل .

بما أن

$$\alpha_n | \xi_n \eta_n | \le \frac{\alpha_n}{2} \left(| \xi_n |^2 + | \eta_n |^2 \right)$$

فإن السلسلة $\sum \alpha_n \xi_n \eta_n$ تتقارب إطلاقاً . يمكن التأكد بشكل مباشر من تحقق موضوعات الجداء الداخلي . لنبرهن أن $l_{2,\alpha}$ فضاء تام . لتكن $\{ x^{(k)} \} = \{ (\xi_n^{(k)}) \}_{k=1}^{\infty}$ متتالية أساسية في $l_{2,\alpha}$. هذا يعني أنه مقابل كل عدد موجب $0 < \varepsilon$ يمكن إيجاد عدد مثل k_0 بحيث إنه من أجل $k_0 < r$ و $k_0 < s$ يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left| \xi_n^{(r)} - \xi_n^{(s)} \right|^2 < \varepsilon^2$$

وبالتالي من أجل أي عدد $m \in \mathbb{N}$ يكون

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \left| \xi_n^{(r)} - \xi_n^{(s)} \right|^2 < \varepsilon^2 \qquad (1)$$

من ذلك نستنتج أن المتتالية $\{ \xi_n^{(k)} \}_{k=1}^{\infty}$ تتقارب إلى نهاية ما مثل ξ_n من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$. أي إن

$$\xi_n = \lim_{k \to \infty} \xi_n^{(k)}$$

بجعل s تنتهي إلى ∞ في (1) نجد

$$\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \left| \xi_n^{(r)} - \xi_n \right|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad , \qquad (r > k_0)$$

وبما أن هذه المتراجحة محققة من أجل أي عدد m فإن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left| \xi_n^{(r)} - \xi_n \right|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad , \qquad (r > k_0) \qquad (2)$$

من تقارب السلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left| \xi_n^{(r)} \right|^2$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left| \xi_n^{(r)} - \xi_n \right|^2$ ينتج تقارب السلسلة $\sum \alpha_n \left| \xi_n \right|^2$ (اعتماداً على المتراجحة : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$)

بذلك نكون قد أثبتنا أن المتتالية $x = \{ \xi_n \} \in l_{2,\alpha}$.

بما أن $0 < \varepsilon$ كيفي فإن المتراجحة (2) تعني أن

$$\lim_{k \to \infty} \left\| x^{(k)} - x \right\|_{2,\alpha}^2 = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left| \xi_n^{(k)} - \xi_n \right|^2 = 0$$

وهو ما يثبت أن الفضاء $l_{2,\alpha}$ تام . أي إنه فضاء هيلبرت .

إن الفضاء $l_{2,\alpha}$ قابل للفصل ، إذ إنه بمثابة مجموعة قابلة للعد وكثيفة في $l_{2,\alpha}$ يمكننا أخذ مجموعة جميع الأشعة التي عدد مركباتها المختلفة عن الصفر منته (هذا العدد خاص بكل شعاع) والمركبات الأخرى أعداد عادية .

١٦ – برهن أن الكرة الواحدية في فضاء هيلبرت اللانهائي البعد H تحتوي على عدد غير منته من الكرات غير المتقاطعة والتي نصف قطر كل منها $\frac{1}{4}$. حذف

لتكن $B = \{ x \in H : \| x \| \leq 1 \}$ الكرة الواحدية في H ،

ولتكن $\{ e_k \}_{k=1}^{\infty}$ جملة متعامدة – منظمة في H ، ولتكن

$$B_k = \left\{ x \in H : \left\| x - \frac{1}{2} e_k \right\| \leq \frac{1}{4} \right\}$$

أي إن B_k هي الكرات التي مراكزها $\frac{1}{2} e_k$ ونصف قطر كل منها $\frac{1}{4}$. إذا كان $x \in B_k$ فإن

$$\|x\| = \left\|x - \frac{1}{2}e_k + \frac{1}{2}e_k\right\| \le \left\|x - \frac{1}{2}e_k\right\| + \left\|\frac{1}{2}e_k\right\| \le \frac{3}{4} < 1$$

أي إن $x \in B$ وبالتالي فإن $B_k \subset B$ من أجل كل عدد $k \in \mathbb{N}$.

لنبين بأن الكرتين B_k , B_m غير متقاطعتين إذا كان $k \neq m$. لتكن $x \in B_k$ و $y \in B_m$ عندئذ نجد أن

$$\left\|\frac{1}{2}e_k - \frac{1}{2}e_m\right\| \le \left\|\frac{1}{2}e_k - x\right\| + \|x - y\| + \left\|y - \frac{1}{2}e_m\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2} + \|x - y\|$$

ومن هذا ينتج أن $\|x - y\| \ge \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$ (اعتبرنا هنا أن $\|e_k - e_m\| = \sqrt{2}$ إذا كان $k \neq m$) بالتالي فإنه في الكرة B محتوى عدد غير منته من الكرات غير المتقاطعة والتي نصف قطر كل منها يساوي $\frac{1}{4}$.

١٨ – لتكن L متنوعة خطية في H . برهن أن $\overline{L} = H$ إذا وفقط إذا كان $L^{\perp} = \{\theta\}$. حذف

لتكن $L^{\perp} = \{\theta\}$ ، أي إنه إذا كان $(x, y) = 0$ من أجل أي عنصر $y \in L$ فإن $x = \theta$. لنفرض أن L ليست كثيفة في كل مكان في H ، أي إن $\overline{L} \neq H$. إن ذلك يعني وجود عنصر $x_0 \notin \overline{L}$.

بما أن $\overline{L}$ فضاء جزئي و $x_0 \notin \overline{L}$ فإنه تتحقق مبرهنة النشر المتعامد :
$x_0 = y_0 + z_0$ حيث $y_0 \in \overline{L}$ و $z_0 \perp \overline{L}$ وفقاً لذلك يكون $z_0 \neq \theta$ طالما أن $x_0 \notin \overline{L}$. في خلاف ذلك إن $(z_0 , y) = 0$ من أجل أي عنصر $y \in \overline{L}$ و بشكل خاص من أجل $y \in L$ عندئذ واستناداً للفرض يكون $z_0 = \theta$ إن هذا التناقض يثبت أن $\overline{L} = H$.

بالعكس ، لنفرض أن $\overline{L} = H$ ولنفرض وجود عنصر $z_0 \in H$ و $z_0 \perp L$.
بما أن $\overline{L} = H$ فإنه توجد متتالية من العناصر مثل $\{y_n\}$ محتواة في L ومتقاربة إلى z_0 $(y_n \to z_0)$ ، وعندئذ يكون

$$0 = (y_n , z_0) \to (z_0 , z_0)$$

استناداً إلى استمرارية الجداء الداخلي . بالتالي $0 = (z_0 , z_0)$ أي إن $z_0 = \theta$

محذوف ٢٠ – ليكن L فضاءً جزئياً من فضاء هيلبرت H ولتكن x نقطة واقعة على بعد d من L . أي إن $d = \rho(x , y) = \inf\limits_{u \in L} \| x - u \|$ برهن أنه من أجل أي عنصرين y_1 , y_2 من L تتحقق المتراجحة

$$\| y_1 - y_2 \| \leq \sqrt{\| x - y_1 \|^2 - d^2} + \sqrt{\| x - y_2 \|^2 - d^2}$$

والمسماة بمتراجحة بيبو ـــ ليفي .

انطلاقاً من هذه المتراجحة برهن على وجود عنصر y و L محقق للمسافة بين x والفضاء الجزئي L :

$$\rho(x , L) = \| x - y \|$$

لنستعرض الشعاعين $\frac{x - y_1}{\sqrt{2}}$, $\frac{x - y_2}{\sqrt{2}}$ ولنكتب مساواة متوازي الأضلاع بالنسبة لهذين الشعاعين :

$$\| x - y_1 \|^2 + \| x - y_2 \|^2 = \frac{1}{2} \| 2x - (y_1 + y_2) \|^2 + \| y_1 - y_2 \|^2$$

بما أن L فضاء جزئي في H فإن $(y_1 + y_2)$ و L ولذلك فإن

$$\| 2x - (y_1 + y_2) \|^2 = 4 \left\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|^2 \geq 4 d^2$$

وعندئذ يكون

$$\| y_1 - y_2 \|^2 \leq \| x - y_1 \|^2 + \| x - y_2 \|^2 - 2d^2 \leq$$

$$\leq \left(\sqrt{\| x - y_1 \|^2 - d^2} + \sqrt{\| x - y_2 \|^2 - d^2} \right)$$

أي إن

$$\| y_1 - y_2 \| \leq \sqrt{\| x - y_1 \|^2 - d^2} + \sqrt{\| x - y_2 \|^2 - d^2}$$

لنبرهن القسم الثاني من المسألة . بغية ذلك نعود إلى تعريف الـــ inf :

من أجل أي عدد n و N يوجد عنصر مثل y_n و L بحيث إن

$$d \leq \| x - y_n \| < d + \frac{1}{n} \qquad (*)$$

وبالاستناد إلى متراجحة بيبو ـ ليڤي نجد أن

$$\| y_n - y_m \| \leq \sqrt{\| x - y_n \|^2 - d^2} + \sqrt{\| x - y_m \|^2 - d^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{(d + \frac{1}{n})^2 - d^2} + \sqrt{(d + \frac{1}{m})^2 - d^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{2d}{m} + \frac{1}{m^2}}$$

ومن هذا نستنتج أن المتتالية $\{ y_n \}$ أساسية . بما أن الفضاء H تام فــإن $\{ y_n \}$ تتقارب إلى عنصر مثل $y \ni L$ (L مغلق) ، وبالانتقال إلى النهايــة عنــدما $n \to \infty$ في طرفي المتراجحة (*) نجد

$$\| x - y \| = d$$

وهو المطلوب .

مطلوب ٢٢ – من أجل التابع e^t أوجد كثير حدود من الدرجة الثانية $p(t)$ بحيث يكــون النظيم $\| e^t - p(t) \|$ أصغرياً في $L^2[-1,1]$.

بما أنه في الفضاء المزود بجداء داخلي يكون البعد بين عنصر x والمجموع الجزئي النوني لسلسلة فورييه لذلك العنصر ، من أجل n معطى ، هو الأصغر ، فإن كثيــر الحدود المنشود يتطابق مع كثير حدود فورييه من الدرجة الثانية للتابع e^t أي إن

$$p(t) = c_0\, e_0(t) + c_1\, e_1(t) + c_2\, e_2(t)$$

حيث $e_0(t)$ ، $e_1(t)$ ، $e_2(t)$ عناصر من جملة متعامدة منظمة في $L^2[-1,1]$ وأن $c_k = (e^t , e_k)$; $(k = 0 , 1 , 2)$ معاملات فورييه للتابع e^t .

لإيجاد $e_0(t)$ ، $e_1(t)$ ، $e_2(t)$ نطبق عمليــة المعامــدة علــى التوابــع المستقلة خطياً : $1 , t , t^2$

بالأخـــذ بعـــين الاعتبـــار أن $\| 1 \| = \left(\int_{-1}^{1} dt \right)^{1/2} = \sqrt{2}$ نجـــد

أن $e_0(t) = \frac{1}{\| 1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

وبالتالي يكون لدينا $e_1(t) = \frac{h_1(t)}{\| h_1 \|}$ حيث $h_1(t) = t - (t, e_0)\, e_0$.

بما أن $(t, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t\, dt = 0$ فإن $h_1(t) = t$ وبالإضـــافة لذلك فإن

$$\| h_1 \|^2 = (h_1, h_1) = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{2}{3}$$

وبالتالي فإن $e_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\; t$. نأتي الآن إلى إيجاد التابع $e_2(t)$:

$e_2(t) = \frac{h_2(t)}{\| h_2 \|}$ حيث $h_2(t) = t^2 - (t^2, e_0) - (t^2, e_1)\, e_1$

بسهولة نجد أن

$$(t^2, e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

وأن

$$(t^2, e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$$

وبالتالي فإن $h_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$. وبما أن

$$\| h_2 \|^2 = (h_2, h_2) = \int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{2})^2\, dt = \frac{8}{45}$$

فإن

$$e_2(t) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$$

وهكذا فإنه لإيجاد كثير الحدود المنشود يتبقى علينا حساب معاملات فورييه c_0 ، c_1 ، c_2 للتابع e^t :

$$c_0 = (e^t , e_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^t \, dt = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}} \quad ;$$

$$c_1 = (e^t , e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t\, e^t \, dt = \frac{\sqrt{6}}{e} \quad ;$$

$$c_2 = (e^t , e_2) = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) e^t \, dt = \frac{\sqrt{5}\,(e^2 - 7)}{e\sqrt{2}}$$

وعندئذٍ يكون

$$p(t) = c_0\, e_0(t) + c_1\, e_1(t) + c_2\, e_2(t) = \frac{e^2 - 1}{e\sqrt{2}} \; \frac{1}{\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{6}}{e} \; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, t + \frac{\sqrt{5}\,(e^2 - 7)}{e\sqrt{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{3}{4} \; \frac{11 - e^2}{e} + \frac{3}{e} t + \frac{15}{4} \; \frac{e^2 - 7}{e} t^2$$

٢٤ – لتكن $\{ e_n \}$ جملة متعامدة منظمة في H ولتكن $\{ \lambda_n \}$ متتالية من C .
حذف

برهن أن الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ في H هو أن يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$$

لنفرض أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ متقاربة ولنضع $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ عندئذٍ من أجل أي عدد m و N يكون لدينا :

$$(x , e_m) = \lim_{k \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \lambda_n\, e_n , e_m \right) = \lambda_m$$

(جوهرياً $m \le k$) . عندئذٍ واستناداً إلى متراجحة بسل يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x , e_n)|^2 \le \|x\|^2 < \infty$$

بالعكس ، لنفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$. عندئذٍ لنفرض من أجل كل عدد $k \ni \mathbb{N}$ أن $x_k = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n$ بالتالي نجد أن

$$\| x_k - x_j \|^2 = \left\| \sum_{n=j+1}^{k} \lambda_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} |\lambda_n|^2$$

وبما أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ متقاربة فإن متتالية المجاميع الجزئية تكون متقاربة .

وبالتالي فهي متتالية كوشي . وهذا يؤدي إلى أن المتتالية $\{ x_k \}$ هي متتالية أساسية في H وبما أن H تام فإنها تكون متقاربة إلى عنصر $x \ni H$ وهو المطلوب .

مسائل محلولة في مواضيع الفصل الثالث

مطلوب

١ – ليكن X و Y فضاءين خطيين و $A : X \rightarrow Y$ مؤثراً خطياً ولتكن جملة العناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ منتمية إلى $\mathcal{D}(A)$ ومرتبطة خطياً . برهن أن الجملة $A x_1 , A x_2 , \ldots , A x_n$ مرتبطة خطياً .

بما أن الجملة $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ مرتبطة خطياً ، فإنه توجد مجموعة من الثوابت $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ أحدها على الأقل لا يساوي الصفر وبحيث إن

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

ومنه نجد أن

$$A (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2 + \ldots + \lambda_n A x_n = 0$$

وهذا يعني أن مجموعة العناصر $A x_1 , A x_2 , \ldots , A x_n$ مرتبطة خطياً .

٢ – إذا كانت جملة العناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ المنتمية إلى $\mathcal{D}(A)$ مستقلة خطياً فهل مجموعة العناصر $A x_1 , A x_2 , \ldots , A x_n$ مستقلة خطياً ؟ مطلوب

في الحالة العامة لن تكون مجموعة العناصر $A x_1 , A x_2 , \ldots , A x_n$ مستقلة خطياً وذلك لأنه يمكن إيجاد مجموعة من الأعداد ليست جميعها معدومة وبحيث يكون

$$A (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) = 0$$

أي إن الشعاع $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ ينتمي إلى نواة المؤثر A .

٤ – إذا كان X فضاءً خطياً منظماً ولنفرض أنه قد عرف على X نظيمين متكافئين $\|\cdot\|_1$ ، $\|\cdot\|_2$ ولنفرض أن $A : X \rightarrow X$ مؤثر خطي برهن أن هذا المؤثر يكون في الوقت نفسه إما محدوداً أو غير محدود بالنسبة للنظيمين المذكورين . صف

بما أن النظيمين متكافئان ، فإنه يوجد ثابتان موجبان مثل c_1 , c_2 بحيث تتحقق المتراجحة

$$c_1 \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq c_2 \| x \|_1 \qquad \forall\ x \in X$$

ولنفرض أن A محدود بالنسبة للنظيم الأول أي إنه يوجد ثابت مثل $0 < M$ بحيث يكون

$$\| A x \|_1 \leq M \| x \|_1 \qquad \forall\ x \in X$$

وهذا بدوره يؤدي إلى أن

$$c_1 \| A x \|_1 \leq M\ c_1 \| x \|_1 \leq M \| x \|_2 \qquad (*)$$

من ناحية ثانية لدينا

$$\frac{1}{c_2} \| x \|_2 \leq \| x \|_1$$

وبالتالي فإن (*) تأخذ الشكل

$$\frac{c_1}{c_2} \| A x \|_2 \leq \| A x \|_1 \leq M \| x \|_2 \qquad (**)$$

من (*) و (**) نستنتج أن A محدود بالنسبة للنظيم $\| \ \|_2$. بالمثل يبرهن على أنه محدود بالنسبة للنظيم الأول إذا كان محدوداً بالنسبة للنظيم الثاني . وبالمثل أيضاً يبرهن على عدم محدوديته بالنسبة لنظيم تؤدي إلى عدم محدوديته بالنسبة للنظيم الآخر .

٦ – احسب نظيم المؤثر $A : l_p \rightarrow l_p$ المعرف بالعلاقة مطلوب

$$A\ x = \{ \xi_1 , \xi_3 , \xi_5 , \xi_7 , \ . \ . \ . \ . \ , \xi_{2n-1} , \ . \ . \ . \ . \}$$

حيث إن

$$x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ . \ . \ . \ . \ , \xi_n , \ . \ . \ . \}$$

$$\| A x \|^p = | \xi_1 |^p + | \xi_3 |^p + | \xi_5 |^p + \ . \ . \ . \leq \sum_{i=1}^{\infty} | \xi_i |^p = \| x \|^p$$

ومنه نجد أن $\| A \| \leq 1$

إلا أن النظيم يبلغ القيمة 1 على الشعاع

$$x_0 = \{ \xi_1 ,\ 0 ,\ \xi_3 ,\ 0 ,\ \xi_5 , 0 , \ . \ . \ . \}$$

في الواقع ، إن

$$\| A x_0 \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} | \xi_{2k-1} |^{p} \right)^{\frac{1}{p}} = \| x_0 \|$$

وبالتالي فإن $\| A \| = 1$.

٨ – ليكن المؤثر $A : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة

$$A x = \int_0^1 (t^2 + s^2) \; x(s) \; ds$$

مطلوب

برهن أن هذا المؤثر خطي ومحدود واحسب نظيمه .

لنبرهن أولاً على خطية المؤثر A .

$$A(\alpha x + \beta y) = \int_0^1 (t^2 + s^2)(\alpha x + \beta y) \, ds =$$

$$= \int_0^1 (t^2 + s^2) \; \alpha x(s) \; ds + \int_0^1 (t^2 + s^2) \; \beta y(s) \, ds =$$

$$= \alpha \int_0^1 (t^2 + s^2) \, x(s) \; ds + \beta \int_0^1 (t^2 + s^2) \; y(s) \, ds =$$

$$= \alpha A x + \beta A y$$

لنتأكد الآن من المحدودية :

$$\| A x \| = \max_t \left| \int_0^1 (t^2 + s^2) \; x(s) + \; ds \right| \le$$

$$\le \max_t | x(t) | \cdot \max_t \left| \int_0^1 (t^2 + s^2) \; ds \right| =$$

$$= \max_t | x(t) | \cdot \max_t \left| t^2 s + \frac{1}{3} s^3 \Big|_0^1 \right| =$$

$$= \max_t | x(t) | \cdot \max_t \left| t^2 + \frac{1}{3} \right| = \frac{4}{3} \| x \|$$

لنحسب نظيم المؤثر A . مما ذكرنا أعلاه نجد أن $\| A \| \le \frac{4}{3}$.

لنفرض أن $x_0(t) = 1$ ، $\| x_o \| = 1$ فنجد أن

$$A x_0 = \int_0^1 (t^2 + s^2)\ ds = t^2 + \frac{1}{3}$$

$$\| A x_0 \| = \max_t \left| t^2 + \frac{1}{3} \right| = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \| x_0 \|$$

وهذا يؤدي بدوره إلى ان

$$\| A \| = \frac{4}{3}$$

حذف ١٠ – ليكن $k(t,\tau)$ تابعاً من الفضاء $C([a,b]\times[a,b])$ ولـيكن $0 < \alpha < 1$. برهن أن المـؤثر $A : C[0,1] \to C[0,1]$ المعـرف بالعلاقة

$$A x(t) = \int_0^1 \frac{k(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}\ d\tau \quad ; \quad t \in [a,b]$$

هومؤثر محدود .

لنبرهن أولاً أن التابع

$$\mathcal{J}(t) = \int_0^1 \frac{d\tau}{|t-\tau|^{\alpha}}$$

مستمر على المجال $[a,b]$ ولنحسب قيمته الأعظمية . بغية ذلك نكتـب $\mathcal{J}(t)$ على الشكل :

$$\mathcal{J}(t) = \int_a^t \frac{d\tau}{|t-\tau|^{\alpha}} + \int_t^b \frac{d\tau}{|t-\tau|^{\alpha}}$$

من الواضح أن

$$\mathcal{J}(t) = \frac{1}{1-\alpha}[(t-a)^{1-\alpha} + (b-t)^{1-\alpha}]$$

ومن هذا تنتج استمرارية التابع $\mathcal{J}(t)$.

بسهولة يمكن التأكد من أن التابع $\mathcal{J}(t)$ يبلغ في النقطة $t = \frac{a+b}{2}$ قيمتـه الأعظمية $\left(\max_{a \le t \le b} |\mathcal{J}(t)| \right)$ وأن هذه القيمة تساوي $2^{\alpha}\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

عندئذ نجد أن

$$\| A x \| = \max_{a \le t \le b} \left| \int_a^b \frac{k(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} \, x(\tau)\, d\tau \right| \le$$

$$\le \max_{a \le t \le b} \int_a^b \frac{|k(t,\tau)|}{|t-\tau|^\alpha} \, |x(\tau)| \, d\tau \le$$

$$\le \max_{a \le t \le b} \int_a^b \frac{d\tau}{|t-\tau|^\alpha} \, M \, . \| x \|$$

حيث

$$M = \max_{a \le t \le b} |k(t,\tau)|$$

وبالتالي فإن

$$\| A \| \le 2^\alpha \, \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \, M$$

١٢ – ليكن المؤثر $A : l_2 \to l_2$ معرفاً بالعلاقة

$$A\, x = \{ \lambda_1 \xi_1 , \lambda_2 \xi_2 , \ldots , \lambda_n \xi_n , \ldots \}$$

حيث $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n , \ldots \}$ من الفضاء l_2 و $\lambda_n \in R_n$ و ($n \in N$) ماهو الشرط الذي ينبغي أن تحققه المتتالية $\{ \lambda_n \}$ كي تتطابق ساحة تعريف المؤثر $D(A)$ مع الفضاء l_2 ؟ وماهو الشرط الذي ينبغي فرضه على المتتالية $\{ \lambda_n \}$ كي يكون المؤثر A محدوداً ؟ واحسب نظيمه في هذه الحالة .

بما أن $A : l_2 \to l_2$ فإن ذلك يقتضي أن يكون

$$\| A x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | \lambda_k \, \xi_k |^2 < +\infty \quad (\forall \, x = \{ \xi_k \} \in l_2) \qquad (*)$$

نميز هنا حالتين : ١) المتتالية $\{ \lambda_n \}$ محدودة ، أي إن

$\sup_n | \lambda_n | = c < +\infty$ في هذه الحالة نجد أنه من أجل أي عنصر $x \in l_2$

يكون لدينا

$$\| A x \|^2 \le c^2 \sum_{k=1}^{\infty} | \xi_k |^2 = c^2 \, \| x \|^2$$

وهذا يعني أن

$$\| A \| \leq c$$

أي إن المؤثر A محدود وتكون $\mathcal{D}(A) = l_2$ ، وذلك لأن $(A\ x) \in l_2$ من أجل أي عنصر $x \in l_2$.

٢) المتتالية $\{ \lambda_n \}$ ليست محدودة . أي إن $\sup\limits_{n} | \lambda_n | = \infty$ عندئذ تكون $\mathcal{D}(A)$ ساحة تعريف المؤثر A مؤلفة من تلك العناصر $x \in l_2$ والمحققة للعلاقة (*) . أي إن $\mathcal{D}(A) \neq l_2$. (على سبيل المثال إذا كان $\lambda_n = n$ فإن المجموعة غير القابلة للعد

$$M_\alpha = \{ x : x = (1, \frac{1}{2^{1+\alpha}}, \ldots, \frac{1}{n^{1+\alpha}}, \ldots), 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \}$$

محتواة في l_2 إلا أنها غير محتواة في $\mathcal{D}(A)$) . ويكون المؤثر A في هذه الحالة غير محدود . في الواقع ، ليكن

$$e_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots \right) \in \mathcal{D}(A) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

فنجد أن

$$A\ e_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \lambda_n, 0, \ldots \right)$$

وبالتالي فإن

$$\| A\ e_n \| = | \lambda_n | < + \infty$$

من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ و ($\| e_n \| = 1$ من أجل أي $n \in \mathbb{N}$) . إلا أن

$$\sup_{n} \| A\ e_n \| = \sup_{n} | \lambda_n | = \infty$$

وبالتالي فإن

$$\| A \| = \sup_{\substack{\| x \| = 1 \\ x \in D(A)}} \| A x \| = + \infty$$

لنبين الآن على أنه إذا كان المؤثر A محدوداً (أي إن

$$\| A \| \leq c = \sup_n | \lambda_n | < +\infty \quad , \quad \mathcal{D}(A) = l_2 \,)$$

فإن نظيمه يساوي c . بغية ذلك علينا أن نبـــرهن المتراجحـــة المعاكـــسة (أي إن $\| A \| \geq c$)

بما أن

$$\| A \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| A x \|}{\| x \|} \geq \frac{\| A e_n \|}{\| e_n \|} = \| A e_n \| = \| \lambda_n \|$$

فإنه يكون $\| A \| \leq \| \lambda_n \|$ من أجل أي عدد $n \in \mathbb{N}$ وبالتالي فإن $\| A \| \leq \sup_n \| \lambda_n \|$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن

$$\| A \| = c = \sup_n \| \lambda_n \|$$

١٤ – أورد مثالاً لفضاء خطي منظم E ومؤثرين A و B مــن $L\,(E\,,E)$ يكون من أجلهما $\| A B \| < \| A \| \, \| B \|$.

ليكن $E = C\,[\,0\,,1\,]$ ، وليكن المؤثران A و B معرفين في هذا الفضاء بالعلاقتين

$$A\,x(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau \quad , \quad B\,x(t) = t\,x(t)$$

من الواضح أن المؤثرين A و B خطيان ، وأما استمرارية المؤثر A فإنها تنتج من المتراجحة

$$\| A x \| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^t x(\tau)\,d\tau \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} | x(t) | \cdot \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t d\tau = \| x \|$$

أي إن $\| A \| \leq 1$. لنأخذ التابع $x_0(t) \equiv 1$ فيكون

$$A\,x_0(t) = \int_0^t d\tau = t$$

من الواضح أن $\| A\,x_0 \| = 1$ ومنه ينتج أن

$$\| A \| = \sup_{\| x \| = 1} \| A x \| \geq \| A x_0 \| = 1$$

وبالتالي فإن $\| A \| = 1$

بالمثل تماماً يبرهن على أن $\|B\| = 1$ وبذلك يكون

$A, B \in L(C[0,1], C[0,1])$ لنستعرض الآن المؤثر AB المعرف بالعلاقة

$$ABx(t) = A\big(tx(t)\big) = \int_0^t \tau x(\tau)\, d\tau$$

ومنه نجد أن

$$\|ABx\| = \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t \tau x(\tau)\, d\tau \right| \le$$

$$= \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| \cdot \max_{0 \le t \le 1} \left| \int_0^t \tau\, d\tau \right| = \frac{1}{2} \|x\|$$

وبالتالي فإن $\|AB\| \le \frac{1}{2}$. إضـافة لـذلك فـإن $\|ABx_0\| = \frac{1}{2}$ حيـث $x_0(t) \equiv 1$ أي إن $\|AB\| = \frac{1}{2}$ وهذا يؤدي إلى أن

$$\|AB\| = \frac{1}{2} < 1 = \|A\| \cdot \|B\|$$

١٦ - لـيكن E فـضاء بانـاخ ، لـيكن $A \in L(E, E)$ ولـتكن $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^k$ $(\lambda_k \in R)$ سلسلة صحيحة متقاربة على R . برهن أن نهايـــة المتتاليـــة $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k A^k$ عنـــدما $n \to \infty$ هـــي $\varphi(A) \in L(E, E)$. ما هي الشروط التي يجب أن تتحقق بالمتتاليـة $\{\lambda_k\}$ كي تتحقق العلاقة

$$\|\varphi(A)\| \le \varphi(\|A\|)$$

لنلاحظ قبل كل شيء ونتيجةً لتوافر عملية ضرب العناصر في الفـضاء $L(E, E)$ يمكننـا تعريـف A^n مـن أجـل أي عـدد $n \in N$ ، ووفقـاً لـذلك يكـون $\|A^n\| \le \|A\|^n$. لنعرف المؤثر $\varphi(A)$ (شكلياً) بالعلاقة

$$\varphi(A)x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x \qquad x \in E \qquad (*)$$

ونذكِّر بأن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ تسمى متقاربة في E إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية متقاربة . إن كل سلسلة متقاربة إطلاقاً في فضاء باناخ هي سلسلة متقاربة وان صحة العلاقة (*) تنتج من التقدير الآتي :

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \, \|A\|^k = c < \infty$$

والذي يتحقق فرضاً من شروط المسألة . وهذا يعني أن السلسلة $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x$ متقاربة إطلاقاً وبالتالي فهي متقاربة في E لكون E فضاء باناخ . واستناداً إلى المتراجحة السابقة نجد

$$\|\varphi(A)x\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k A^k x \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| \, \|A\|^k \|x\| = c\,\|x\| \, , (\forall\, x \in E)$$

أي إن $\|\varphi(A)\| \le c$. بسهولة يمكن التأكد من خطية المؤثر $\varphi(A)$ وبالتالي فإن $\varphi(A) \in L(E, E)$. لنبرهن الآن على أن المتتالية $\{S_n(A)\}$ تتقارب بانتظام إلى التابع $\varphi(A)$ عندما $n \to \infty$ في الفضاء $L(E, E)$.

في الواقع ، من أجل كل عنصر $x \ni E$ يكون

$$\|(\varphi(A) - S_n(A))x\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k A^k x \right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| \, \|A\|^k \|x\|$$

أي إن

$$\|(\varphi(A) - S_n(A))\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| \, \|A\|^k \to 0$$

عندما $n \to \infty$ كباق لسلسة متقاربة . إذا كان $0 \le |\lambda_k|$ من أجل جميع $k \ni N$ فإنه يكون

$$\| \varphi(A) \| \leq \sum_{k=0}^{s} |\lambda_k| \, \|A\|^k = \varphi(\|A\|)$$

١٨ – ليكن المؤثر $A : C[0,1] \to C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة هنا خطأ

$$Ax(t) = x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau \;,\; t \in [0,1] \;,\; \lambda \in R \setminus \{0\}$$

حيث $k(t,\tau) = \psi(t)\, \gamma(\tau)$ والتابعـــان $\gamma(t)$ و $\psi(t)$ مـــستمران على $[0,1]$ و لا يطابقان الصفر و $\int_0^1 \psi(t)\, \gamma(t)\, dt \neq \frac{1}{\lambda}$. برهن أن A عكوس – مستمر ثم أوجد A^{-1} .

إن المؤثر A معرف على الفضاء بأكمله وبـــسهولة يمكـــن التأكـــد مـــن ان $\|A\| \leq 1 + |\lambda| \, \|\psi\| \, \|\gamma\|$. أي إن $A \in L(C[0,1], C[0,1])$ إضافة إلى أن $C[0,1]$ هو فضاء باناخ . بالتالي فإنه لإثبات استمرارية مقلوب المؤثر A يكفي (استناداً لمبرهنة باناخ حول مقلوب مؤثر) أن نبرهن على أنه من أجل كل $y \in C[0,1]$ يوجد للمعادلة

$$Ax(t) \equiv x(t) - \lambda \int_0^1 \psi(t)\, \gamma(\tau)\, x(\tau)\, d\tau = y(t) \qquad (1)$$

حل وحيد . من المعادلة (1) ينتج أنه إذا كان $x(t)$ حلاً لهذه المعادلة فإنه يجـب أن يكون

$$x(t) = y(t) + \lambda c \psi(t)$$

حيث إن

$$c = \int_0^1 \gamma(\tau)\, x(\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة (2) بـ $\gamma(t)$ وبالمكاملة على المجال $[0,1]$ نجد

$$\int_0^1 \gamma(\tau)\, x(\tau)\, d\tau = \lambda c c_0 + \int_0^1 \gamma(\tau)\, y(\tau)\, d\tau \qquad (3)$$

حيث

$$c_0 = \int_0^1 \gamma(\tau)\, \psi(\tau)\, d\tau \qquad \left(c_0 \neq \frac{1}{\lambda} \right)$$

وبما أن $\int_0^1 \gamma(\tau)\, x(\tau)\, d\tau = c$ فإنه من (3) نجد أن

$$c = \frac{1}{1-\lambda c_0} \int_0^1 \gamma(\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

وبالتالي فإن

$$x(t) = \frac{\lambda}{1-\lambda c_0} \int_0^1 k(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + y(t) \equiv A^{-1} y(t) \qquad (4)$$

من هنا تنتج وحدانية حل المعادلة (1) ، أما تلك الحقيقة من أن (4) تعرف حل المعادلة المطلوب (مهما يكن الطرف الأيمن $y(t)$) فيمكن التأكد من ذلك بشكل مباشر . إن هذا يعني أن للمؤثر A يوجد مقلوب مستمر ويعرف عمله بالعلاقة (4) .

على سبيل المثال إذا كان $\lambda = -1$, $\Psi(t) = \gamma(t) = e^t$.

أي إن المؤثر A يعرف بالعلاقة

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{t+\tau}\, x(\tau)\, d\tau$$

فإنه بالحساب نجد أن $c_0 = \frac{1}{2}(e^2-1)$ وبالتالي فإن

$$A^{-1} y(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1} \int_0^1 e^{t+\tau}\, y(\tau)\, d\tau \quad \forall\, y(t) \in C[0,1]$$

٢٠ – ليكن A مؤثراً في الفضاء $C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau)\, d\tau \quad , \quad t \in [0,1]$$

برهن على أنه لايوجد مقلوب محدود لهذا المؤثر .

إن ساحة تعريف المؤثر تتطابق مع الفضاء $C[0,1]$ ، كما أنه من الواضح أن المؤثر A محدود وأن $\|A\| = 1$ و $\operatorname{Ker} A$ نواة المؤثر A تتألف من التابع الصفري وذلك لأنه من المساواة :

$$\int_0^t x(\tau)\ d\tau = 0 \qquad \forall\ t \in [0,1]$$

ينتج أن $x(t) \equiv 0$ ، أما ساحة قيمه $R(A)$ فتمثل المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع القابلة للاشتقاق والتي مشتقاتها مستمرة في الفضاء $C[0,1]$ والمحققة للشرط $y(0)=0$:

$$R(A) = \{y(t) \in C[0,1] : y(t) = \int_0^t x(\tau)\ d\tau, y(0) = 0\}$$

بما أن $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ فإن المؤثر A تطبيق $(1-1)$ للفضاء $C[0,1]$ على $R(A)$ أي إن المؤثر المقلوب A^{-1} موجود ومعرف على $R(A)$ وهو تطبيق $(1-1)$ لـ $R(A)$ على $C[0,1]$. من الواضح أن

$$A^{-1}x(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \quad , \quad t \in [0,1] \ , \ x(t) \in R(A)$$

في الواقع ، إذا كان $x(t) \in R(A)$ فإن

$$\int_0^t x'(\tau)\ d\tau = x(t) - x(0) = x(t)$$

وذلك لأن $x(0) = 0$ و $\int_0^t x'(\tau)\ d\tau = x(t)$ غير أن المؤثر A^{-1} ليس محدوداً . في الحقيقة ، لنأخذ المتتالية $\{x_n(t) = \sin\ nt\}$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

من الواضح أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}$ يكون

$$x_n(t) \in \mathcal{D}(A^{-1}) = R(A) \ \ and \ \ \|x_n\| \le 1$$

وبما أن $\|A^{-1}x_n\| = n$ فإن

$$\sup_{\substack{x \in D(A^{-1}) \\ \|x\| \le 1}} \|A^{-1}x\| = +\infty$$

أي إن المؤثر A^{-1} ليس محدوداً .

إن هذه المسألة تبين بأن للمؤثر المحدود يمكن أن يوجد مقلوب غير محدود و معرف على متنوعة خطية لاتنطابق مع الفضاء بأكمله .

٢٣- ليكن المؤثر $A : C[0,1] \to C[0,1]$ معرفاً بالعلاقة

$$A x(t) = \frac{dx}{dt}$$

ولتكن ساحة تعريفه $\mathcal{D}(A)$ هي المتنوعة الخطية المشكلة من التوابع $x(t)$ القابلة للاشتقاق ـ مستمرة على المجال $[0, 1]$ والمحققة للشروط $0 = x(1) = x(0)$. برهن أن A مغلق .

إن تعريف المؤثر المغلق المطبق في فضاء باناخ مماثل للتعريف المقابل في فضاء هيلبرت ، وبالضبط ، ليكن E_1 و E_2 فضاءي باناخ ، وليكن A مؤثراً خطياً و ساحة تعريفه $\mathcal{D}(A) \subset E_1$ ومجموعة قيمه $R(A) \subset E_2$.

يسمى المؤثر A **مغلقاً** اذا نتج من أن $x_n \in \mathcal{D}(A)$ $(n \in \mathcal{N})$ و $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ و $\lim\limits_{n\to\infty} A x_n = y$ أن $x \in \mathcal{D}(A)$ و $y = Ax$.

إن المؤثر المعطى A هو مؤثر خطي . لنبرهن على أن A مغلق لتكن $\{x_n = x_n(t)\}$ حيث $0 \le t \le 1$ متتالية من $\mathcal{D}(A)$ متقاربة في $C[0, 1]$ إلى التابع $x = x(t)$ من الفضاء $C[0, 1]$ ، ولتكن المتتالية $\{y_n = A x_n(t) = x'_n(t)\}$ حيث $0 \le t \le 1$ متقاربة في الفضاء $C[0, 1]$ إلى تابع ما y من $C[0, 1] : y = y(t)$. بما أن التقارب في الفضاء $C[0, 1]$ هو تقارب بانتظام فإن المتتالية $\{x_n(t)\}$ تتقارب بانتظام إلى $x(t)$ على المجال $[0, 1]$ ، كما أن المتتالية $\{y_n(t) = x'_n(t)\}$ تتقارب بانتظام إلى $y(t)$ على المجال $[0, 1]$ ، واستناداً إلى المبرهنة الشهيرة في التحليل الرياضي والمتعلقة باشتقاق المتتالية المتقاربة بانتظام حداً حداً ، يكون التابع $x = x(t)$ حيث $0 \le t \le 1$ قابلاً للاشتقاق ومشتقه مستمراً و $x'(t) = y(t)$ من أجل أية نقطة $t \in [0, 1]$. بالإضافة إلى ذلك ، وبما أن $x_n(t)$ تحقق الشروط $x_n(0) = x_n(1) = 0$ فإن التابع $x(t)$ يحقق نفس الشروط وبالتالي فإن التابع $x = x(t)$ ينتمي للمجموعة $\mathcal{D}(A)$ ويكون $y(t) = Ax(t)$ $0 \le t \le 1$ أي إن المؤثر A مغلق .

Leut α

مسائل محلولة في مواضيع الفصل الرابع

٢– ليكن R_p^n فضاء خطياً ذا n بعداً ، عناصره الأشعة الحقيقية

$x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \}$ ذات النظيم

$$\| x \|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} | \xi_k |^p \right)^{\frac{1}{p}} & ; \quad 1 \le p < +\infty \\ \max_{1 \le k \le n} | \xi_k | & ; \quad p = +\infty \end{cases}$$

أوجد الشكل العام للدالي الخطي المستمر في R_p^n واحسب نظيمه .

a) ليكن $1 < p < +\infty$ ، و لنبرهن على أن كل دالي خطي مستمر $f \in (R_p^n)^*$ يكون من الشكل

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \quad \text{و} \quad x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \} \in R_p^n$$

حيث إن العنصر $y = \{ \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n \} \in R_q^n$ يتعرف بشكل وحيد بالدالي f ويكون من أجله $\| f \| = \| y \|_q$ وأن العدد q يحقق العلاقة $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. في الواقع ، لتكن $\{ e_k \}_{k=1}^{n}$ قاعدة في R_p^n ، عندئذ أي عنصر $x \in R_p^n$ يمثل وبشكل وحيد على الشكل $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ حيث إن $\xi_1 , \ldots , \xi_n$ إحداثيات الشعاع x : $x = \{ \xi_1 , \xi_2 , \ldots , \xi_n \}$.

بالتالي فإنه من أجل أي دالي $f \in (R_p^n)^*$ يكون

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k$$

حيث $\eta_k = f(e_k)$ $(k = 1 , 2 , \ldots , n)$. إن الشعاع $y = \{ \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n \}$ يتعرف بشكل وحيد بالدالي f : إذا كان $x = e_k$ فإن $f(x) = f(e_k) = \eta_k$ أي إن η_k يتطابق مع $f(e_k)$.

نأتي الآن لإيجاد نظيم الدالي f . لنضع $\xi_k = sign\, \eta_k \times | \eta_k |^{q-1}$ (العدد q

يحقق العلاقة $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ ولنستعرض الشعاع

$$\tilde{x} = \{ sign\ \eta_1 . |\eta_1|^{q-1} , \ldots , sign\ \eta_n . |\eta_n|^{q-1} \}$$

فنجد أن

$$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} sign\ \eta_k . \eta_k . |\eta_k|^{q-1} = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q$$

وبما أن f دالي مستمر فإن

$$|f(\tilde{x})| = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q \leq \| f \| . \| \tilde{x} \|_q =$$

$$= \| f \| (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^{p(q-1)})^{\frac{1}{p}} = \| f \| (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{p}}$$

وبالتالي فإن

$$(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{1-\frac{1}{p}} = (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \| f \|$$

أي إن $\| y \|_q \leq \| f \|$.

بالإضافة إلى ذلك فإنه من أجل أي عنصر $y = \{ \eta_1 , \eta_2 , \ldots , \eta_n \}$ من R_q^n تعرف العلاقة

$$f_y(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \qquad x = \{ \xi_1 , \ldots , \xi_n \} \in R_p^n$$

دالياً مستمراً في الفضاء R_p^n . في الواقع ، إن خطية الدالي f_y واضحة وأن محدوديته تنتج من تطبيق متراجحة هولدر في المجاميع :

$$|f_y(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| . |\eta_k| \leq$$

$$\leq (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} . (\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}} = \| y \|_q . \| x \|_p$$

أي إن $\| f_y \| \leq \| y \|_q$. بذلك تعطينا العلاقة

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \ , x=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in R_p^n \ , \eta_k = f(e_k)\ , k=1,\dots,n$$

الشكل العام للدالي الخطي المستمر في الفضاء R_p^n $(1 < p < +\infty)$.

ويكون لدينا

$$\| f \| = (\sum_{k=1}^{n} | \eta_k |^q)^{\frac{1}{q}} = \| y \|_q$$

b) ليكن $p = 1$. بشكل مماثل لما سبق ، سنبرهن أن للـدالي f ∋ $(R_1^n)^*$ الشكل

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \eta_k \qquad x = \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} \in R_1^n$$

حيث

$y=\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ∋ R_∞^n و $\eta_k = f(e_k)$, $(k=1,2,\dots,n)$

وفقاً لذلك نجد

$$| f(x) | \le \sum_{k=1}^{n} | \xi_k \eta_k | \le \max_{1\le k\le n} | \eta_k | \cdot \sum_{k=1}^{n} | \xi_k | = \max_{1\le k\le n} | \eta_k | . \| x \|_1$$

أي إن $\| f \| \le \max_{1\le k\le n} | \eta_k | = \| y \|_\infty$. لنبرهن المتراجحة المعاكسة الإتجاه .

ليكن $\max_{1\le k\le n} | \eta_k | = | \eta_{k_0} |$ ولنأخذ العنصر

$\tilde{x} = (0,\dots,0, \operatorname{sign} \eta_{k_0} ,0,\dots,0)$ من الواضح أن $\| \tilde{x} \| = 1$ وأن

$f(\tilde{x}) = | \eta_{k_0} |$ وعندئذ يكون لدينا

$$\| f \| = \sup_{\| x \|_1 \le 1} | f(x) | \ge f(\tilde{x}) = | \eta_{k_0} | = \max_{1\le k\le n} | \eta_k |$$

وبالتالي فإن $\| f \| = \max_{1\le k\le n} | \eta_k |$.

c) إذا كان $p = \infty$ فإن كل دالي f ∋ $(R_\infty^n)^*$ يكون من الشكل (تأكد من ذلك) :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \qquad x = \{ \xi_1, \dots, \xi_n \} \in R_\infty^n$$

حيث إن $y=\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ∋ R_1^n . من المتراجحة :

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\xi_k \eta_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \cdot \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| \cdot \|x\|_\infty$$

ينتج أن $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| = \|y\|_1$ ، وبأخذ العنصر

$\tilde{x} = (\operatorname{sign} \eta_1, \ldots, \operatorname{sign} \eta_n)$ يكون $\|\tilde{x}\|_\infty = 1$ وبالتالي يكون لدينا

$f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|$.

عندئذٍ نجد أن

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_\infty \leq 1} |f(x)| \geq f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|$$

أي إن $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|$.

٤ ــ تحقق من أن العلاقة

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, x(t_k)$$

حيث $t_1, t_2, \ldots, t_n$ جملة من نقاط المجال $[a, b]$ و $c_k \in \mathbb{R}$ ، تعرف دالياً خطياً مستمراً في الفضاء $C[a, b]$ ثم احسب نظيمه .

بما أن

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + \mu x_2) &= \sum_{k=1}^{n} c_k [\lambda x_1(t_k) + \mu x_2(t_k)] = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k x_1(t_k) + \mu \sum_{k=1}^{n} c_k x_2(t_k) = \\ &= \lambda f(x_1) + \mu f(x_2) \end{aligned}$$

فإن f دالي خطي ، ومن المتراجحة

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| \, |x(t_k)| \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \cdot \sum_{k=1}^{n} |c_k| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot \|x\|$$

تنتج استمراريته وكما أن $\|f\| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|$

لنستعرض الآن في المجال $[a\,,\,b]$ التابع $\widetilde{x}(t)$ الخطي ـ جزئياً والذي يأخذ في النقاط $t_1\,,t_2\,,\ldots\,,t_n$ القيم $\widetilde{x}(t_k) = \text{sign}\ c_k$ مع $(k = 1\,,2\,,\ldots\,,n)$ والخطي في المجالات $[t_k\,,t_{k+1}]$ والثابت في المجالين $[a\,,t_1]$ و $[t_n\,,b]$ عندئذٍ يكون $\|\widetilde{x}\| \le 1$ ولهذا فإن

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| \ge |f(\widetilde{x})| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{x}(t_k)\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |c_k\ \text{sign}\ c_k| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$$

وهذا يعني أن $\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|$.

لنلاحظ أن نظيم الدالي يمكن حسابه أيضاً استناداً إلى العلاقة $\|f\| = \overset{b}{\underset{a}{V}}\{g\}$ ، إلا أنه من أجل ذلك علينا أولاً إيجاد مثل ذلك التابع $g(t)$ ذي التغيرات المحدودة والذي من أجله يكون $f(x) = \int_a^b x(t)\ d\ g(t)$ من أجل جميع العناصر $C[a,b] \ni x(t)$.

٦ – ليكن $E^* \ni f \neq 0$. ولتكن $M = \{\, x \in E : f(x) = 1 \,\}$ برهن أن

$$\frac{1}{\|f\|} = \inf_{x\in M} \|x\|$$

بما أنه من أجل جميع النقاط $E \ni x$ تتحقق المتراجحة $|f(x)| \le \|f\|\ \|x\|$ ، فإنه في حالة خاصة ، ومن أجل جميع العناصر $M \ni x$ يكون $\|x\| \ge \frac{1}{\|f\|}$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن

$$\frac{1}{\|f\|} = \inf_{x\in M} \|x\| \,.$$

واستناداً إلى تعريف نظيم f ، نجد أنه من أجل أي عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عنصر مثل $E \ni y_\varepsilon$ وبحيث إن

$$|f(y_\varepsilon)| > (\|f\| - \varepsilon)\,\|y_\varepsilon\| \qquad (\|f\| > \varepsilon)$$

لنضع $x_\varepsilon = \dfrac{y_\varepsilon}{f(y_\varepsilon)}$ عندئذٍ يكون $x_\varepsilon \in M$ و $\|x_\varepsilon\| < \dfrac{1}{\|f\| - \varepsilon}$

وهذا يعني أن $\inf\limits_{x \in M} \|x\| < \dfrac{1}{\|f\| - \varepsilon}$. وبما أن ε كيفي فإننا نجد أن

$$\inf_{x \in M} \|x\| \leq \frac{1}{\|f\|}$$

وبمقارنة هذه المتراجحة مع المتراجحة التي حصلنا عليها أولاً نـأتي إلـى العلاقـة المطلوبة .

٨ – اكتب في شكل تكامل ستيلتجس الدالي f ، الخطي والمستمر على الفضاء $C[-1, 1]$ والمعرف بالعلاقة

$$f(x) = \int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt - 2\, x(0)$$

لنستعرض على المجال $[-1, 1]$ التابع $g_0(t) = \dfrac{t^2}{2}$ ، عندئذٍ يكون

$$\int_{-1}^{1} x(t)\, d\, g_0(t) = \int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt$$

وبما أنه في تمثيل الدالي f يوجد حد آخر هو $-2x(0)$ فإنه ينبغـي اسـتبدال التـابع $g_0(t)$ بحيـث يعـاني التـابع $g(t)$ فـي تكامـل سـتيجليس $\int_{-1}^{1} x(t)\, d\, g(t)$ انقطاعـاً فـي النقطـة $t = 0$ مقـداره $-2x(0)$ – يتطابق ، كما هو معلوم في نظرية تكامل ستيجليس ، مع $x(0)\,[g(+0) - g(-0)]$ (*) . من الواضح أنه إذا كان

(*) في حل مثل هذا النمط من المسائل علينا أن نتذكر بأنه إذا كان التابع $x(t)$ مـستمراً علـى المجـال $[a, b]$ وكان للتابع $g(t)$ مشتق $g'(t)$ في جميع نقاط المجال $[a, b]$ باستثناء عدد منته من النقاط $c_1, c_2, \ldots, c_m$ وكان قابلاً للتكامل بمفهوم ريمن فإن

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{2} & ; \quad -1 \leq t \leq 0 \\ \dfrac{t^2}{2} - 2 & ; \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

فإن $f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\, g(t)$.

١٠ – لتكن $\{ x_n \}$ متتالية من عناصر الفضاء الخطي المنظم E ، ولتكن $\{ c_n \}$ متتالية من الأعداد الحقيقية ، و M عدداً موجباً . برهن أن الشرط اللازم والكافي لوجود دالي f ∍ E^* محقق للشرط

$$f(x_n) = c_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \| f \| \leq M$$

هو أن يتحقق الشرط

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \qquad (*)$$

الكفاية . لنفرض أن (*) محققة . لتكن L مجموعة التراكيب الخطية من الشكل $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ (n , λ_k كيفية) . من أجل كل عنصر x ∋ L :

نضع $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \qquad (**)$$

إن العلاقة (**) تعرف على L دالياً خطياً ومحدوداً . في الواقع ، يمكن التأكد من خطية الدالي f_0 بسهولة ، أما محدوديته فتنتج من العلاقة (*) وذلك لأن

$$| f_0(x) | = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| = M \| x \|$$

أي إن

$$\int_a^b x(t)\, d\, g(t) = \int_a^b x(t)\, g'(t)\, dt + x(a)[g(a+o) - g(a)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} x(c_k)\, [g(c_k + 0) - g(c_k - 0)] + x(b)\, [g(b) - g(b-o)]$$

$$\| f_0 \| \leq M$$

لنلاحظ أيضاً أن قيمة الدالي تتعرف بالعنصر x بشكل وحيد . في الحقيقة ، إذا وجد تمثيلان من الشكل

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k x_k$$

لنفس العنصر $x \in L$ ، فإنه استناداً إلى (*) يكون

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda'_k x_k \right\| = 0$$

أي إن

$$f_0 \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right) = f_0 \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda'_k c_k \right)$$

وبذلك يتبقى علينا استخدام مبرهنة هان – باناخ في الفضاءات الخطية المنظمة وتمديد الدالي f_0 كدالي خطي ومحدود إلى دالي f معرف على E مع الحفاظ على النظيم أي إنه بحيث يكون $\| f \| = \| f_0 \| \leq M$.

اللزوم . استناداً لخطية الفضاء E يكون العنصر $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ عنصراً من E من أجل أي عدد $n \in N$ ومهما كانت الأعداد الحقيقية $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$. بالتالي فإن

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right| \leq$$
$$\leq M \| x \| = M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$$

أي إن

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|$$

١٢– ليكن E فضاءً خطياً منظماً . برهن أنه إذا كان E^* قابلاً للفصل فإن E يكون قابلاً للفصل . هل العكس صحيح ؟

لتكن المجموعة $M = \{ f_1 , f_2 , \ . \ . \ . \ . \}$ قابلة للعد وكثيفة في كل مكان في الفضاء E^* . من المعلوم أن $\| f_k \| = \sup\limits_{\|x\|=1} |f_k x|$ ومن تعريف الحد الأعلى الأصغري ينتج أنه من أجل $\varepsilon_k = \frac{\| f_k \|}{2}$ يوجد عنصر مثل $x_k \in E$ يكون من أجله $\| x_k \| = 1$ ، ويكون أيضاً :

$$\| f_k \| - \varepsilon_k < | f_k (x_k) | \leq \| f_k \|$$

أي إن

$$f_k (x_k) \geq \frac{\| f_k \|}{2}$$

لنرمز بـ L لمجموعة جميع التراكيب الخطية للعناصر x_k والتي معاملاتها أعداد عادية . إن L مجموعة قابلة للعد . ولنبرهن على أنها كثيفة في كل مكان في E . أي إن $\overline{L} = E$. لنفرض أن $\overline{L} \neq E$ عندئذٍ استناداً إلى النتيجة (٢) من مبرهنة هان – باناخ من أجل الفضاءات الخطية المنظمة ، يوجد دالي مثل $f \in E^*$ و $f \neq 0$ و $f(x) = 0$ من أجل أي عنصر $x \in \overline{L}$. بالتالي فإن $f(x_k) = 0$ من أجل أي عدد $k \in \mathbb{N}$. وبما أن M كثيفة في كل مكان في E^* ، فإنه من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد مثل $k_0 \in \mathbb{N}$ وبحيث إن $\| f - f_{k_0} \| < \varepsilon$ وعندئذٍ يكون

$$\left| \left(f - f_{k_0} \right) \left(x_{k_0} \right) \right| = \left| f (x_{k_0}) - f_{k_0} (x_{k_0}) \right| = \left| f_{k_0} (x_{k_0}) \right| > \frac{\| f_{k_0} \|}{2}$$

ومنه نجد أن

$$\| f - f_{k_0} \| = \sup_{\| x \| = 1} \left| \left(f - f_{k_0} \right) (x) \right| \geq \left| (f - f_{k_0}) (x_{k_0}) \right| > \frac{\| f_{k_0} \|}{2}$$

أي إن

$$\| f_{k_0} \| < 2 \| f - f_{k_0} \| < 2 \varepsilon$$

وهذا يعني أن

$$\| f \| = \| f + f - f_{k_0} \| \leq \| f_{k_0} \| + \| f - f_{k_0} \| < 2 \varepsilon + \varepsilon = 3 \varepsilon$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كيفي ، فإنه يكون $\| f \| = 0$ وبذلك فإن $f = 0$ على E
إن التناقض الناتج يثبت أن $E = \overline{L}$.

إن العكس ليس صحيحاً . في الواقع ، إذا أخذنا الفضاء l_1^* (يبرهن على أن هذا الفضاء إيزومورفي للفضاء m فضاء جميع المتتاليات المحدودة ونترك برهان ذلك كتمرين للطالب) فإنه يكون $m = l_1^*$ ومن المعلوم أن الفضاء l_1 قابل للفصل أما الفضاء m فهو غير قابل للفصل انظر المثال (٦) في الفضاءات القابلة للفصل (الفصل الأول) .

١٤ – ليكن $x(t)$ تابعاً من الفضاء $C[-1, 1]$ ولنضع

$$f(x) = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt$$

١) برهن أن f دالي خطي ومحدود

٢) أوجد تابعاً مثل $g(t)$ ذا تغير محدود على المجال $[-1, 1]$ وبحيث إن

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\, g(t)$$

١) بما أن

$$f(\alpha x + \beta y) = \frac{(\alpha x + \beta y)(-1) + (\alpha x + \beta y)(1)}{2} +$$

$$+ \int_{-1}^{1} t(\alpha x + \beta y)(t)\, dt =$$

$$= \alpha \left[\frac{x(-1) + x(1)}{2}\right] + \beta \left[\frac{y(-1) + y(1)}{2}\right] +$$

$$+ \alpha \int_{-1}^{1} t\, x(t)\, dt + \beta \int_{-1}^{1} t\, y(t)\, dt =$$

$$= \alpha f(x) + \beta f(y)$$

فإن الدالي f خطي .

$$|f(x)| = \left| \frac{x(-1)+x(1)}{2} + \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{|x(-1)|+|x(1)|}{2} + \int_{-1}^{1} |t\,x(t)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{|x(-1)|+|x(1)|}{2} + 2\,\|x\| \leq 3\,\|x\|$$

وبالتالي فإن الدالي f محدود .

لنستعرض على المجال $[-1, 1]$ التابع $g_0(t) = \frac{t^2}{2}$. عندئذ يكون

$$\int_{-1}^{1} x(t)\,d\,g_0(t) = \int_{-1}^{1} t\,x(t)\,dt$$

وبما أنه في تمثيل الدالي f يوجد حدان

$\frac{x(-1)}{2}$ و $\frac{x(1)}{2}$ فإنه ينبغي استبدال التابع $g_0(t)$ بتابع $g(t)$ يعاني في طرفي المجال انقطاعين $\frac{x(-1)}{2}$ و $\frac{x(1)}{2}$ ، (انظر الملاحظة المذكورة في المسألة ٨) – من الواضح أنه إذا كان

$$g(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad t = -1 \\ \frac{t^2}{2} & ; \quad -1 < t < 1 \\ 1 & ; \quad t = 1 \end{cases}$$

فإن

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\,d\,g(t)$$

١٦– ليكن E^2 الفضاء ثنائي البعد والذي عناصره $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

ليكن f دالياً خطياً معرفاً على الفضاء الجزئي L :

$L = \{x \in E^2 : 2x_1 - x_2 = 0\}$ بالعلاقة $f(x) = x_1$. برهن على وجود تمديد وحيد لــ f على E^2 مع الحفاظ على النظيم ، ثم أوجد ذلك التمديد .

إذا كان $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ و E فإن التمديد يكون

$$F(x) = \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2$$

مسائل محلولة في مواضيع الفصل الخامس

٢ – اذكر مثالاً لمجموعة محدودة إلا أنها غير متراصة .

لنستعرض المجموعة $X = (0, 1)$ المزودة بالمسافة $\rho(x, y) = |x - y|$. إن X محدودة إلا أنها غير متراصة وذلك لأنه أخذنا على سبيل المثال المتتالية

$\{x_n = \frac{1}{n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ فإنه لايمكننا فصل متتالية جزئية منها متقاربة وذلك لأن النهاية $0 \notin X$.

٤ – لتكن X مجموعة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية $x(t) = at^2 + bt + c$. مزودة بالمسافة $\rho(x, y) = \max\limits_{0 \le t \le 2} |x(t) - y(t)|$ ولتكن $z = (a, b, c) \in R^3$ برهن وجود ثابتين مثل $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ بحيث إن

$$\alpha_2 d(z_1, z_2) \le \rho(x_1, x_2) \le \alpha_1 d(z_1, z_2)$$

حيث إن d هي المسافة في R^3 .

يمكن حل هذه المسألة باستخدام المبرهنة المتعلقة بإيزومورفيزمية الفضاءات المنتهية البعد ، إلا أننا سنعطي حلاً مباشراً لهذه المسألة دون استخدام المبرهنة المشار إليها . وفقاً للتقابل بين X و R^3 يكون لدينا

$$a_1 t^2 + b_1 t + c_1 = x_1(t) \sim z_1 = (a_1, b_1, c_1)$$
$$a_2 t^2 + b_2 t + c_2 = x_2(t) \sim z_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\rho(x_1, x_2) = \max_{0 \le t \le 2} \left| a_1 t^2 + b_1 t + c_1 - a_2 t^2 - b_2 t - c_2 \right| =$$
$$= \max_{0 \le t \le 2} \left| (a_1 - a_2) t^2 + (b_1 - b_2) t + (c_1 - c_2) \right| \le$$
$$\le 4 \left(|a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| + |c_1 - c_2| \right)$$

واستناداً إلى متراجحة بونياكوفسكي نجد

$$\leq 4\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}\ .\sqrt{1^2+1^2+1^2}$$
$$= 4\sqrt{3}\ \ d(z_1,z_2)$$

لنضع $\alpha_1 = 4\sqrt{3}$.

من ناحية ثانية لدينا

$$d(z_1,z_2) = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2}$$

ولنضع $c_1 - c_2 = n\ ,\ b_1 - b_2 = m\ ,\ a_1 - a_2 = l$

و

$$\delta = \max\left|l\,t^2 + m\,t + n\right|$$
$$f(t) = lt^2 + m\,t + n$$

ويكون

$$f(0) = n \Rightarrow |n| \leq \delta$$
$$\begin{cases} f(1) = l + m + f(0) \\ f(2) = 4l + 2m + f(0) \end{cases}$$

ومنه نجد أن

$$f(2) - 2f(1) = 2l - f(0)$$

وبالتالي فإن

$$|l| = \left|\frac{f(2) - 2f(1) + f(0)}{2}\right| \leq 4\frac{\delta}{2} = 2\delta$$
$$|m| = \left|f(1) - f(0) - \frac{f(0) + f(0) - 2f(1)}{2}\right| \leq$$
$$\leq \frac{4+3+1}{2}\delta = 4\delta$$

وهكذا يكون لدينا

$$d(z_1,z_2) \leq \sqrt{4\delta^2 + 16\delta^2 + \delta^2} \leq$$
$$\leq 5\max_{0\leq t\leq 2}\left|(a_1-a_2)t^2 + (b_1-b_2)t + (c_1-c_2)\right| \leq$$
$$\leq 5\,\rho(x_1, x_2)$$

لنضع الآن $\alpha_2 = \frac{1}{5}$.

٦- اذكر مثالاً لمجموعة جزئية G من المجال المغلق $[a , b] = [0 , 1]$ وتغطية مفتوحة $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ للمجموعة G لا يمكن فصل تغطية منتهية منها .

لنضع

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} , \frac{n}{n+1} \right)$$

أي إن $G = (0 , \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2} , \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3} , \frac{3}{4})$ . . . .

ولنضع $G_n = \left(\frac{n-1}{n} , \frac{n}{n+1} \right)$. من الواضح أن المجموعة $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ تغطي المجموعة G وأما $\{G_n\}_{n=1}^{N}$ فلا تغطي تلك المجموعة .

٨ - اذكر مثالاً لمجموعة مغلقة ومتراصة F في فضاء متري X وتغطية $\{F_n\}$ للمجموعة F بمجموعات مغلقة لايمكن فصل تغطية منتهية منها .

لتكن المجموعة $X = R^1$ و $F = [0 , 1]$ (هذه المجموعة مغلقة ومتراصة في X) و

$$F_0 = \{0\} , \; F_n = [\frac{1}{n} , 1] \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

من الواضح أن المجموعات $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ تشكل تغطية لـ F إلا أنه لايمكن فصل تغطية منتهية منها .

١٠ - ليكن $X = C[0 , 1]$

$$M = \{ x \in C[0, 1] , 0 \le x(t) \le 1 , x(1) = 1 \}$$

وليكن $f(x) = \int_0^1 x(t) \, dt$. برهن أن M مجموعة مغلقة ومحدودة في $C[0 , 1]$. أوجد الحدين الأدنى الأعظمي والأعلى الأصغري . هل توجد نقاط يبلغ فيها الحدان الأعظمي الأصغري قيمتيهما ؟ .

إن التابع الصفري $x_0(t) \equiv 0$ لا ينتمي للمجموعة M و من أجل أي عنصر x ∋ M لدينا

$$\rho(x, x_0) = \max_{0 \le t \le 1} |x(t)| \le 1$$

وبالتالي فإن $M \subseteq S(0,1)$ أي إن M محدودة .

لنبرهن على أن M مغلقة . لتكن $\{x_n\}$ متتالية من عناصر M متقاربة إلى عنصر ما $x(t)$ أي إن $x_n(t)$ تتقارب إلى $x(t)$ بانتظام .

وبالتالي فإن المتراجحة $1 \ge x_n(t) \ge 0$ تؤدي إلى أن $1 \ge x(t) \ge 0$ كما أن

$$\begin{cases} x(0) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(0) = 0 \\ x(1) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(1) = 1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن $x(t) \in M$.

لــيكن $f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$ حيــث إن $x(t) \in M$. إن $f(x)$ مستمر على M وذلك لأنه إذا كانت $x_n(t) \to x(t)$ فإن $x_n(t)$ تتقارب إلى $x(t)$ بانتظام وبالتالي فإن

$$\int_0^1 x_n(t)\, dt \to \int_0^1 x(t)\, dt$$

أي إن

$$f(x_n) \to f(x)$$

إن العلاقة $\inf\limits_{x\in M} f(x) = 0$ تعني أن

١) $0 \le f(x)$ (وضوحاً) .

٢) من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر y بحيث إن $0 < \varepsilon - f(y)$ أي إن $f(y) < \varepsilon$

لنستعرض التابع $y(t)$ المعرف بالعلاقة

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t \le 1-\delta \\ \dfrac{t-1+\delta}{\delta} & , \quad (1-\delta) \le t \le 1 \end{cases}$$

فنجد أن

$$f(y) = \int_0^1 y(t)\,dt = \frac{\delta}{2} < \varepsilon$$

إن العلاقة $\sup_{x \in M} f(x) = 1$

تعني أن

١) $f(x) \leq 1$ (وضوحاً) .

٢) من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر z بحيث إن $f(z) + \varepsilon > 1$

أي إن $f(z) > 1 - \varepsilon$

لنأخذ التابع $z(t) \equiv 1$ فنجد أن

$$f(z) = \int_0^1 z(t)\,dt = \int_0^1 dt - 1 > 1 - \varepsilon$$

لنبرهن علىعدم وجود عنصر $\omega(t) \ni M$ يبلغ فيه الحد الأدنى العظمي قيمة الصفر . لنفرض العكس ، أي إنه

$$f(\omega) = \inf f(x) = 0$$

بما أن $0 = f(\omega) = \int_0^1 \omega(t)\,dt$ وهذا بدوره يؤدي إلى أن $\omega(t) \equiv 0$ وهذا يناقض أن $\omega(t) = 1$.

أما الحد الأعلى الأصغري فإنه يبلغ قيمته في النقطة $\mu(t) = 1$.

في الواقع ،

$$f(\mu) = \int_0^1 1\,dt = 1$$

المراجع العلمية

1. Aleksandrov , P . S . *Introduction to Theory of Sets and General Topology* . Moscow , Nauka , 367 pages 1977 (Russian)
2. Aleksandrov , P . S . *Theory of Functions of Real Variable and Theory of Topoligical Spaces* . Moscow , Nauka , 415 Pages , 1978 (Russian)
3. Akhiezer , N . I . and Glazman , I . M *Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces* , Vol . I . Pitman , London , 312 pages , 1981 .
4. Bachman , G . and Narici , L . , *Functionnal Analysis* . Academic press 530 pages , New York 1966 .
5. Dunford N. and Schwartz J . , *Linear Operators Part I . General Theory* . Wiley , New York , 858 pages 1958 .
6. Kantorovich L . V . and Akilov G . P , *Functional Analysis. Pergmon press , 588* pages 1982
7. Kolmogoroff A .N . Fomin S . B , *Elements of The Theory of Functios and Functional Analysis* , Moscow , Nauka 542 pages , 1976 .
8. Liusternik L . A . and Sobolev W . E . , *Elements of Functional Analysis* . Ungar , New York , 520 pages 1965 .
9. Natanson I . P . , *Theory of Functions of Real Variable* , Moscow . Nauka , 480 pages ,1974 (Russian)
10. Riesz F . and – Nagy S z. B . , *Functional Analysis. Ungar* , New York 465 pages 1972 .
11. Rudin W . , *Functional Analysis Mc Graw – Hill* , New York 1973 .
12. Rynne B . and Youngson . *Linear Functional Analysis. Springer* , 273 pages 2000 .
13. Vulikh , B . Z . , *Introduction to Functional Analysis* . Moscow , Nauka . 415 pages 1967 (Russian)

14. Vulikh , B . Z , *A Brief Course in The Theory of Functions of Real Variable* . Moscow . MIR , 356 pages , 1967

جدول المصطلحات العلمية

INDEX

A

Abelian (Commutative) group	زمرة (تبادلية) آبلية
Abstract function	تابع مجرد
Abstract Hilbert space	فضاء هيلبرت المجرد
Additive operator	مؤثر جمعي
Adjoint operator	مؤثر مرافق
Self adjoint operator	مؤثر مترافق ذاتياً
Axiom , second seperation	

B

Banach S .	باناخ ستيفان
Banach – Hahn theorem	مبرهنة هان – باناخ
Banach Stienhaus theorem	مبرهنة باناخ – شتينهاوس
Banach theorem	مبرهنة باناخ
Basis	قاعدة
of finite – dimensional subspace	قاعدة فضاء جزئي منتهي البعد
of an infinite – dimensorinal subspce	قاعدة فضاء جزئي لا نهائي البعد
Bessel's inequality	متراجحة بسل
Bound Biorthogonal sequences	متتاليات ثنائية التعامد
Greatest lower bound of an operator	الحد الأعلى الأصغري
Least upper bound of an operator	الحد الدنى الأعظمي
Bounded operator	مؤثر محدود
Bounded set	مجموعة محدودة

Buniakoskii inequality متراجحة بونياكوفسكي

C

Calculus of variations حساب التحولات

Category

Set of the first , مجموعة من الشريحة الأولى

Set of the second , مجموعة من الشريحة الثانية

متراجحة كوشي – بونياكوفسكي – شفارتز

Cauchy – Buniokovskii – Schwarz inequality

Cauchy sequence متتالية كوشي

Strong , متتالية كوشي

Weak , متتالية كوشي

Closed graph theorem مبرهنة البيان المغلق

Closed linear oparator مؤثر خطي مغلق

Closed set مجموعة مغلقة

Closure لصاقة

Coefficients Fourier معاملات فورييه

Combination , (linear) تركيب (خطي)

Compact set مجموعة متراصة

, space فضاء متراص

Complement ,(orthogonal) متممة متعامدة

Complete space فضاء تام

Completeness of space إتمام فضاء

Completion of a space

Conjungate مرافق

Conjugate space فضاء مرافق

second conjugate space فضاء مرافق ثاني

Continuous function	تابع مستمر
Continuous operator	مؤثر مستمر
Contraction mapping theorem	مبرهنة التطبيق الضاغط
Convergence	تقارب
in the (p th power)	تقارب وسطي من الدرجة p
in the mean with weight ρ	تقارب وسطي بوزن ρ
norm - conrergence	تقارب بالنظيم
Strong convergence of sequenc of operators	تقارب قوي لمتتالية مؤثرات
Uniform convergence of operator	تقارب منتظم لمتتالية مؤثرات
Weak convergence of sequences of elements	تقارب ضعيف لمتتالية عناصر
Convex set	مجموعة محدبة

D

Dense	كثيف
Everywhere dense set	مجموعة كثيفة في كل مكان
Nowhere dense set	مجموعة غير كثيفة في أي مكان
Diameter of a set	قطر مجموعة
Dimension	بعد
Direct sum	مجموع مباشر

E

Eigenelement	عنصر خاص
Eigenvalue	قيمة خاصة
Elemet	عنصر
Contravariant	مخالف للتغير
Covariant	موافق للتغير
Norm of an element	نظيم عنصر

Purely imaginary ,real	عنصر تخيلي صرف (حقيقي)
Elements , orthogonal	عناصر متعامدة
Euclidean space	فضاء إقليدي
Everywhere denese set	مجموعة كثيفة في كل مكان
Extension of a linear functional	تمديد مؤثر خطي

F

Factor space	فضاء العامل
Fourier	فورييه
coefficients ,	معاملات فورييه
Series ,	سلسلة فورييه
Functional , linear	دالي خطي
Norm of a functional	نظيم دالي خطي
Function	تابع
Fundamental sequence	متتالية أساسية

G

Gram – Schmidt process	عملية غرام – شميت
Greatest lower bounded of an operator	الحد الأدنى العظمي لمؤثر
Graph	بيان

H

Hahn - Banach theorem	مبرهنة هان – باناخ
Hilbert space	فضاء هيلبرت
Hölder inequality	متراجحة هولدر
Homeomorphism	هوميومورفيزم

I

Independence , linear	استقلال خطي
Inequality	متراجحة
Bessel ,	متراجحة بسل

Cauchy – Buniakovckie Schwarz	متراجحة كوشي – بونياكوفسكي – شفارتز
Hölder	متراجحة هولدر
Minkowski	متراجحة منكوفسكي
Inner product	جداء داخلي
Inverse element	مقلوب عنصر
Inverse operator	مقلوب مؤثر
left inverse operator	مقلوب مؤثر يساري
right inverse operator	مقلوب مؤثر يميني
Isomertic space	فضاء ايزومتري (متساوي المسافة)
Isomorphism	إيزومورفيزم

K

Kolmogorov , theorem	مبرهنة كولموغوروف

H

Legender polynomials	كثيرات حدود ليجاندر
Least upper bound of an operaort	الحد الأعلى الأصغري لمؤثر
Left inverse operator	مقلوب يساري
Limit	نهاية
of a sequence ,	نهاية متتالية
point ,	نقطة نهاية
Linear	خطي
combination ,	تركيب خطي
dependence ,	ارتباط خطي
functional ,	دالي خطي
functional , representation of	تمثيل الداليات الخطية
independence	استقلال خطي

manifold	متنوعة خطية
normed space	فضاء خطي منظم
operator	مؤثر خطي

M

Manifold , linear ,	متنوعة خطية
Metric	مسافة
Metric space	فضاء متري
trivial ,	مسافة تافهة
Minawski's inquality	متراجحة مينكوفسكي

N

Neighborhood	جوار
Norm	نظيم
of an element	نظيم عنصر
of an operator	نظيم مؤثر
Normed linear space	فضاء خطي منظم
Nowhere dense set	مجموعة غير كثيفة في أي مكان

O

Open set	مجموعة مفتوحة
Operator	مؤثر
additive ,	مؤثر جمعي
adjoint	مؤثر مرافق
bounded	مؤثر محدود
contiuous	مؤثر مستمر
Orthogenal	تعامد
complement	متممة معامدة

elements	عناصر متعامدة
sum	مجموع متعامد
Orthogonalization	معامدة
Orthogonal systems	جمل متعامدة

P

Parallelogram law	قانون متوازي الأضلاع
Parseval's equality	مساواة بارسيفال
Point	نقطة
limit ,	نقطة نهاية
Polynomial	كثير حدود
Product , inner	جداء داخلي
Projection	إسقاط

R

Regular	نظامي
value of an operator	قيمة نظامية لمؤثر
Representation of linear functionals	تمثيل الداليات الخطي
Resolvent operator	المؤثر المفكك (الحال)
Riesz – Fischer theorem	مبرهنة ريس – فيشير

S

Scalar product	جداء سلمي
Second separation axiom	موضوعة الفصل الثانية
Self adjiont operator	مؤثر مترافق ذاتياً
Separability of spaces	قابلية الفصل للفضاءات
Separable space	فضاء قابل للفصل
Sequence	متتالية
biorthogonal ,	متتالية ثنائية التعامد

fundamcutal ,	متتالية أساسية
limit of ,	نهاية متتالية
	تقارب قوي لمتتالية مؤثرات
Strong convergence of sequences of operatr	
	تقارب ضعيف لمتتالية عناصر
Weak convergence of sequences of elements	
Series Fourier	سلسة فوربيه
Set	مجموعة
closed ,	مجموعة مغلقة
compact ,	مجموعة متراصة
convex ,	مجموعة محدبة
dense ,	مجموعة كثيفة
everywhere dense ,	مجموعة كثيفة في كل مكان
nowhere dense ,	مجموعة غير كثيفة في أي مكان
of first category	مجموعة من الشريحة الأولى
of second category	مجموعة من الشريحة الثانية
open ,	مجموعة مفتوحة
Space	فضاء
abstract ,	فضاء مجرد
abestract Hilbert ,	فضاء هيلبرت المجرد
Banach ,	فضاء باناخ
complete ,	فضاء تام
complex ,	فضاء مركب
conjugate ,	فضاء مرافق
Hilbert coordinate space ,	فضاء هيلبرت الإحداثي

isometric ,	فضاء ايزومتري
linear ,	فضاء خطي
linear normed ,	فضاء خطي منظم
metric ,	فضاء متري
metrizable ,	فضاء قابل للتمتير
of all sequences of numbers	فضاء جميع المتتاليات العددية
of bounded measureable funtions	فضاء التوابع القابلة للقياس والمحدودة
of buonded sequences of numbers	فضاء المتتاليات العددية المحدودة
of continuous functions	فضاء التوابع المستمرة
of convergence in measure	فضاء التقارب بالقياس
of functions of buonded variation	فضاء التوابع المحدودة التغيير
of functions with integrable pth power	فضاء التوابع القابلة للمكاملة من الدرجة p
separable	فضاء قابل للفصل
topological	فضاء توبولوجي
unitary	فضاء وحدي
Spectrum	طيف
Subspace	فضاء جزئي
Sum	مجموعة
direct ,	مجموعة مباشر
orthognal ,	مجموع متعامد
Supporting plane	مستوي حامل
Systems	جمل
linear	جمل خطية
orthogonal	جمل متعامدة

T

Theorem	مبرهنة
of Riesz	مبرهنة ريس
of Riesz – Fischer	مبرهنة ريس – فيشير
Topological space	فضاء توبولوجي
Trivial metric	مسافة تافهة
Totally ordered	مرتب كلياً

U

Uniform convergece of operators	تقارب منتظم للمؤثرات
Unitary space	فضاء وحدي

V

Value	قيمة
Variation	تحول
Calculus of variation ,	حساب التحولات

W

Weak convergence of sequences of elements	التقارب الضعيف لمتتالية عناصر
Weierstrass	وايشتراس

Z

Zorn's lemma	توطئة زورن

UNIVERSITY OF ALEPPO
FACULTY OF SCIENCE

PRINCIPLES OF FUNCTIONAL ANALYSIS 1

Prof. SHAHADEH AL-ASSADI

1252377

مديرية الكتب والمطبوعات المطبعة الرقمية

السعر 260 ل.س