Appendix A

Numbers, Inequalities, and Absolute Values

Notes

1

- التركيز على المفاهيم الأساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- أمثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠
Math.110

جمال السعدي

استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية

0566664790

الأعداد
The numbers

الأعداد التخيليه
Imagine numbers

الجذور الزوجيه للأعداد السالبه

$\sqrt{-4}$ ، $\sqrt{-5}$ ، $\sqrt[4]{-16}$ و ...

لا ينتمي لأي شيء من المقرر

الأعداد الحقيقيه
R : real numbers

الأعداد الغير نسبيه
$\mathbb{I}$: irrational numbers

π , e , $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sin 1$, ...

* $\sqrt{2} = 1.4142135...$
* $\pi = 3.14159...$

نلاحظ أن الأرقام بعد الفاصله غير مكرره.

الأعداد النسبيه
Q : rational numbers

$\left\{ \frac{a}{b} : a , b \in z \ , \ b \neq 0 \right\}$

* $\frac{1}{2} = 0.50000... = 0.5\overline{0}$
* $\frac{2}{3} = 0.6666... = 0.\overline{6}$
* $\frac{157}{495} = 0.31717... = 0.3\overline{17}$

جزء من الأرقام بعد الفاصله مكرر

الأعداد الصحيحه
Z : Integers

$\{ ... , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , ... \}$

الأعداد الكليه
W : whole numbers

$\{ 0 , 1 , 2 , ... \}$

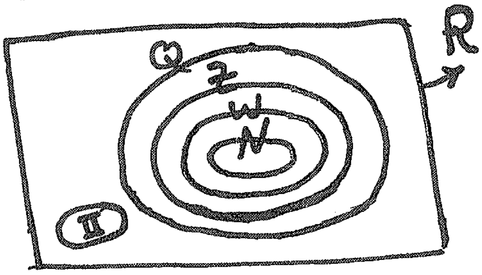
Zero

الأعداد الطبيعيه
N : natural numbers

$\{ 1 , 2 , 3 , ... \}$

نلاحظ أن :

* $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$
* $\mathbb{I} \subset R$



Examples

① whole number $= W$ is :

A) $-\sqrt[3]{8} = -2$ **B) 12** C) 0.5 D) π

② whole number $= W$ is :

A) -2 B) π C) -3.2 **D) $\sqrt{25} = 5$**

③ Integer $= Z$ is :

A) $\sqrt{25} = 5$ B) $\sqrt{-2}$ C) 5.3 D) $\frac{2}{3}$

④ Integer $= Z$ is :

A) π B) $\sqrt{-2}$ **C) $-\sqrt[3]{8} = -2$** D) 5.3

⑤ Irrational number $= \mathbb{I}$ is:

A) $\frac{2}{3}$ B) $\sqrt{-2}$ C) 0 **D) $\sqrt[5]{5}$**

⑥ Rational number $= Q$ is :

A) $\sqrt[5]{5}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{4}$ **D) $\sqrt{25} = \frac{5}{1}$**

⑦ Rational number $= Q$ is :

A) $\sqrt[5]{5}$ **B) $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$** C) $\sqrt[3]{4}$ D) $-\sqrt{2}$

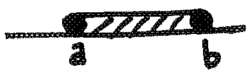
⑧ Natural number $= N$ is:

A) 4 B) π C) $\sqrt[3]{4}$ D) -12

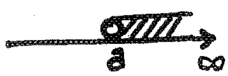
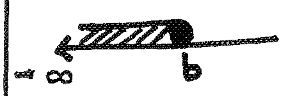
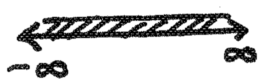
جمال السعدي أستاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية • ٠٥٦٦٦٦٤٧٩ •

Types of intervals :

① finite intervals: فترات محدوده

Notation	set description	type	picture
(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	open	
$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	closed	
$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	Half-open	
$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	" "	

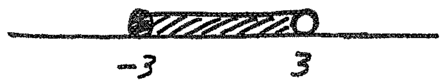
② Infinite intervals: فترات غير محدوده

Notation	set description	type	picture
(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	open	
$(-\infty, b]$	$\{x : x \leq b\}$	closed	
$(-\infty, \infty)$	R : set of all real numbers	open	

Write the sets as the intervals and show on the real line.

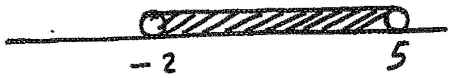
① $\{x \in R \mid -3 \leq x < 3\}$

$= [-3, 3)$



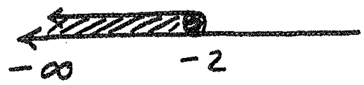
② $\{x \in R \mid -2 < x < 5\}$

$= (-2, 5)$



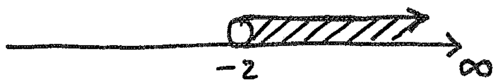
③ $\{x \in R \mid x \leq -2\}$

$= (-\infty, -2]$



④ $\{x \in R \mid x > -2\}$

$= (-2, \infty)$



⑤ $\{x \in R\}$

$= (-\infty, \infty)$

Inequalities: المتباينات

Rules for inequalities :

if a, b and c are real numbers :

① $a < b \Longrightarrow a \pm c < b \pm c$

* إضافة نفس العدد للطرفين لا يغير علاقة المتباينة

② $a < b \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ where: $c > 0$

* ضرب الطرفين في عدد موجب لا يغير علاقة المتباينة .

$a \cdot c > b \cdot c$ where: $c < 0$

* ضرب الطرفين في عدد سالب يقلب علاقة المتباينة .

③ $a < b \Longrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ where: a, b are both positive or both negative

* قلب الكسور التي لها نفس الإشارة يقلب علاقة المتباينة .

حل المتباينات
ممثلاً الحل على خط الأعداد

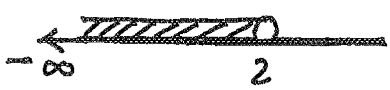
* Solve the inequalities and show the solution sets on the real line

① $4x - 1 < 2x + 3$

$4x - 2x < 3 + 1$

$2x < 4$ $\div 2$

$x < 2$



sol. set $= (-\infty, 2)$

$= \{x \in R \,/\, x < 2\}$

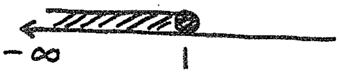
② $8 - 3x \geq 5$

$-3x \geq 5 - 8$

$-3x \geq -3$ $\div -3$

$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{-3}{-3}$ عند القسمه على عدد سالب تقلب علامه المتباينه

$x \leq 1$



$\text{Sol. set} = (-\infty , 1]$

$= \{x \in R \mid x \leq 1\}$

④ $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

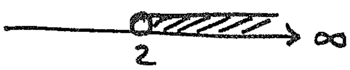
$2(6-x) < 4(3x-4)$

$12 - 2x < 12x - 16$

$-2x - 12x < -16 - 12$

$-14x < -28$ $\div -14$

$x > 2$



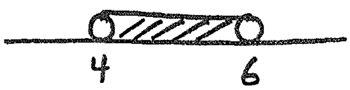
$\text{Sol. set} = (2, \infty)$

$= \{x \in R \mid x > 2\}$

⑥ $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

عند قلب الكسور تقلب علامه المتباينه

$6 > y > 4$



$\text{Sol. set} = (4, 6)$

$= \{y \in R \mid 4 < y < 6\}$

③ $3(2-x) > 2(3+x)$

$6 - 3x > 6 + 2x$

$-3x - 2x > 6 - 6$

$-5x > 0$ $\div -5$

$\frac{-5x}{-5} < \frac{0}{-5}$

$x < 0$

$\text{Sol. set} = (-\infty, 0)$

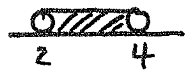
$= \{x \in R \mid x < 0\}$

⑤ $5 < 2x + 1 < 9$

$5 - 1 < 2x < 9 - 1$

$4 < 2x < 8$ $\div 2$

$2 < x < 4$



$\text{Sol. set} = (2, 4)$

$= \{x \in R \mid 2 < x < 4\}$

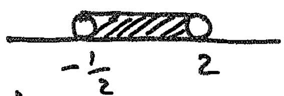
⑦ $-2 < 2 - 2x < 3$

$-2 - 2 < -2x < 3 - 2$

$-4 < -2x < 1$ $\div -2$

$\frac{-4}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{1}{-2}$

$2 > x > -\frac{1}{2}$



$\text{Sol. set} = (-\frac{1}{2}, 2)$

$= \{x \in R \mid -\frac{1}{2} < x < 2\}$

⑧ $\frac{4}{5}(x-2) < \frac{1}{3}(x-6)$

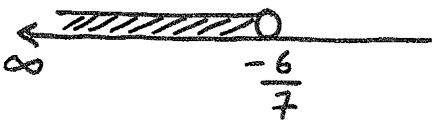
$$\frac{4x-8}{5} < \frac{x-6}{3}$$

$$12x - 24 < 5x - 30$$

$$12x - 5x < -30 + 24$$

$$7x < -6 \qquad \div 7$$

$$x < \frac{-6}{7}$$



$$\text{sol. set} = (-\infty, -\tfrac{6}{7})$$

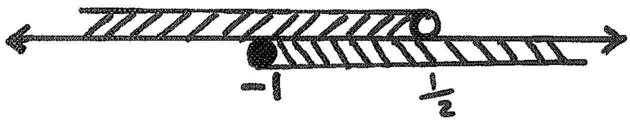
$$= \{x \in R \mid x < \tfrac{-6}{7}\}$$

⑨ $4x < 2x + 1 \leq 3x + 2$

الحل على مرحلتين
ونأخذ الجزء المشترك

$4x < 2x + 1$ and	$2x + 1 \leq 3x + 2$
$4x - 2x < 1$	$2x - 3x \leq 2 - 1$
$2x < 1$	$-x \leq 1$
$x < \frac{1}{2}$	$x \geq -1$

$$\text{Sol. set} = [-1, \tfrac{1}{2})$$



$$= \{x \in R \mid x < \tfrac{1}{2} \text{ and } x \geq -1\}$$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

The absolute value of a number a

$|a|$: is the distance from a to 0 on the real line.

* Distance is always positive or zero.

$$\Rightarrow |a| \geq 0$$

اى أنه القيمه المطلقه
دائماً اكبر من أو تساوى zero
اى لا تكون سالبه ابداً .

Note: $|a| = a$ if $a \geq 0 \longrightarrow |2| = 2$

$|a| = -a$ if $a < 0 \longrightarrow |-2| = -(-2) = 2$

Example: Rewrite the expression without absolute value symbol.

① $|4| = 4$, $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $\left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

الأكبر الأصغر

② $|\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$ * ما بداخل المطلق كميه موجبه يكون الناتج نفس ما بداخل المطلق

الأصغر الأكبر

③ $|1 - \sqrt{3}| = \begin{cases} -1 + \sqrt{3} \\ \text{أو} \\ \sqrt{3} - 1 \end{cases}$

* ما بداخل المطلق كميه سالبه
يكون الناتج أما عكس الاشارات أو تبديل الترتيب

---

④ $|2\sqrt{2} - \sqrt{8}| = |2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = |0| = 0$

---

⑤ $\big||-2| - |-3|\big| = |2 - 3| = |-1| = 1$

---

⑥ $|5| - |-23| = 5 - 23 = -18$

Express the absolute values without using the absolute symbol.

① $|3x - 2|$

$$\therefore |3x-2| = \begin{cases} 3x-2 & \text{if } x \geq \frac{2}{3} \\ -3x+2 & \text{if } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

اعاده تعريف المطلقه

نضع ما بداخل المطلقه $= 0$

$3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

عكس | مثل معامل x

$\frac{2}{3}$

$-(3x-2) = -3x+2$ | $+(3x-2) = 3x-2$

② $|1 - 2x|$

$$\therefore |1-2x| = \begin{cases} -1+2x & \text{if } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-2x & \text{if } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

اعاده تعريف المطلقه

نضع ما بداخل المطلقه $= 0$

$1 - 2x = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

عكس | مثل معامل x

$\frac{1}{2}$

$+(1-2x) = 1-2x$ | $-(1-2x) = -1+2x$

③ $|x^2 + 1| = x^2 + 1$

مجموع المربعين دائماً كمية موجبة ∴ يبقى ما بداخل المطلقه كما هو.

Notes :

خواص هامه جداً

* $|-a| = |a|$

* $|a\,b| = |a|\,|b|$

* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

* $|a+b| \leq |a| + |b| \longrightarrow$ (Triangle inequality)
متباينه المثلث.

* $\sqrt{x^2} = |x|$
* $|a^n| = |a|^n$

If : a is positive number :

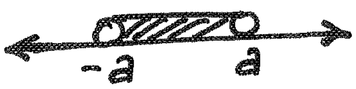
نظريات هامه جداً

① $|x| = a \iff x = \pm a$

الحل $x = a\,,\,-a$

---

② $|x| < a \iff -a < x < a$

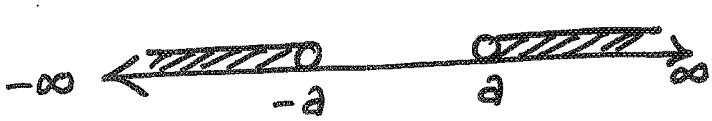


$(-a, a)$ الحل على شكل فتره
* التظليل فى الوسط.

---

③ $|x| > a \iff x > a$ or $x < -a$

الحل على شكل اتحاد فترتين



* التظليل على الأطراف.

Solve the equation :

① $|2x - 3| = 7$

solution

$2x - 3 = \pm 7$

$2x - 3 = 7$
$2x = 7 + 3$
$2x = 10 \quad \div 2$
$x = 5$

$2x - 3 = -7$
$2x = -7 + 3$
$2x = -4 \quad \div 2$
$x = -2$

$\therefore$ sol. set $= \{5 , -2\}$

② $|2x - 1| = -2$

solution

Sol. set $= \phi$

where: القيمة المطلقة ≥ 0

③ $|y| = 4$

solution

$y = \pm 4 \Rightarrow$ sol. set $= \{4 , -4\}$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

④ $\left|\frac{S}{2} - 1\right| = 1$

solution

$$\frac{S}{2} - 1 = \pm 1$$

$\frac{S}{2} - 1 = 1$	$\frac{S}{2} - 1 = -1$
$\frac{S}{2} = 2$	$\frac{S}{2} = 0$
$S = 4$	$S = 0$

$\therefore$ sol. set $= \{4, 0\}$

Solve the inequalities :

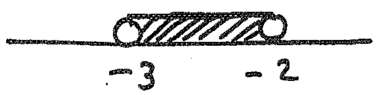
① $|2y + 5| < 1$

$-1 < 2y + 5 < 1$ (قيمة مطلقة أقل من)

$-1 - 5 < 2y < 1 - 5$

$-6 < 2y < -4$ $\div 2$

$-3 < y < -2$



$\therefore$ Sol. set $= (-3, -2)$

$= \{y \in \mathbb{R} \mid -3 < y < -2\}$

② $|2 - 3x| > 5$

(قيمه مطلقة أكبر من)

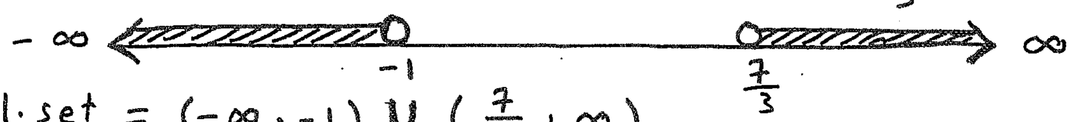
$2 - 3x > 5$ **or** $2 - 3x < -5$

$-3x > 5 - 2$ | $-3x < -5 - 2$

$-3x > 3 \quad \div -3$ | $-3x < -7 \quad \div -3$

$\frac{-3x}{-3} < \frac{3}{-3}$ | $\frac{-3x}{-3} > \frac{-7}{-3}$

$x < -1$ | $x \quad \frac{7}{3}$



$\therefore$ Sol. set $= (-\infty, -1) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$

$= \{x \in R \mid x < -1 \text{ or } x > \frac{7}{3}\}$

③ $\left|\frac{x+1}{2}\right| \geq 1$

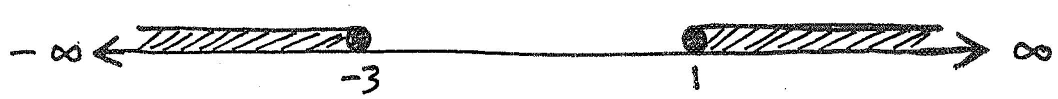
(قيمه مطلقه اكبر من)

$\frac{x+1}{2} \geq 1$ **or** $\frac{x+1}{2} \leq -1$

$x + 1 \geq 2$ | $x + 1 \leq -2$

$x \geq 2 - 1$ | $x \leq -2 - 1$

$x \geq 1$ | $x \leq -3$



$\therefore$ sol. set $= (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

$= \{x \in R \mid x \geq 1 \text{ or } x \leq -3\}$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

* If: $|x-4| < 0.1$ and $|y-7| < 0.2$

Estimate $|(x+y)-11|$?

Solution

$\because |x-4| < 0.1$

$|y-7| < 0.2$ } بالجمع

$|(x+y)-11| < 0.3$

The sol. set of: $|x+3| = |2x+1|$ is:

(A) $2, 0$ (B) $2, \frac{-4}{3}$ (C) $-2, 1$ (D) $2, 1$

* طريقة التعويض من الاختيارات

الاختيار الذي يحقق طرفي المعادلة هو الاختيار الصحيح .

The sol. set of: $\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| = 3$ is:

(A) $-4, 0$ (B) $-2, 0$ (C) $-4, \frac{-2}{5}$ (D) $0, 1$

* في حالة المتباينة التربيعية

* في حالة وجود x^2 ، x
التحليل ودراسة الاشارة

* وجود x^2 فقط
أو قوس تربيع
نأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

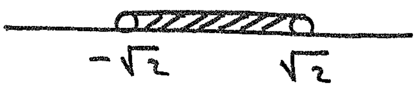
Solve the inequalities :

① $x^2 < 2$ by $\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} < \sqrt{2}$

$|x| < \sqrt{2}$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$



$\therefore$ sol. set $= (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$= \{x \in R \,/\, -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$

② $(x-1)^2 \leq 4$ by $\sqrt{\ }$

$\sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{4}$

$|x-1| \leq 2$

$-2 \leq x-1 \leq 2$

$-2+1 \leq x \leq 2+1$

$-1 \leq x \leq 3$

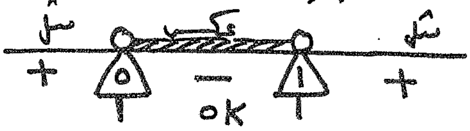
$\therefore$ sol. set $= [-1, 3]$

$= \{x \in R \,/\, -1 \leq x \leq 3\}$

③ $x^2 - x < 0$ (سالبة)

تحليل عامل مشترك $\rightarrow x(x-1) = 0$

$\rightarrow x = 0 , 1$



نختار الحل هو الفترة السالبة لأن المتباينة أقل من 0

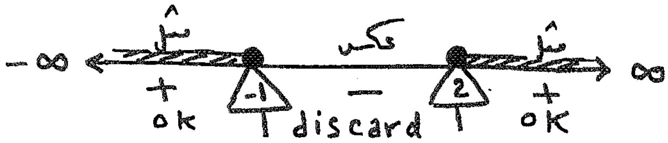
$\therefore$ sol. set $= (0, 1)$

$= \{x \in R \,/\, 0 < x < 1\}$

④ $x^2 - x - 2 \geq 0$ (موجبة)

تحليل مقدار ثلاثي $\rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \mid x = -1$



sol. set $= (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

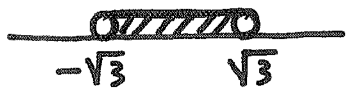
جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

⑤ $x^2 < 3$ by $\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} < \sqrt{3}$

$|x| < \sqrt{3}$

$-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$



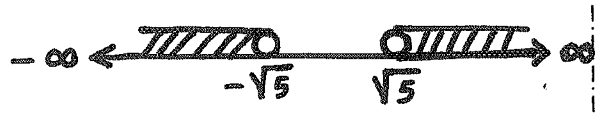
sol. set $= (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

⑥ $x^2 > 5$ by $\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} > \sqrt{5}$

$|x| > \sqrt{5}$

$x > \sqrt{5}$ or $x < -\sqrt{5}$

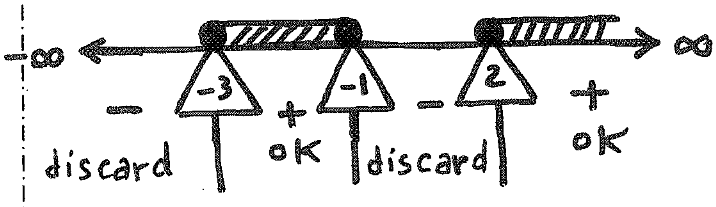


sol. set $= (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)$

⑦ $(x+1)(x-2)(x+3) \geq 0$

(موجبة) ساواه كل قوس بـ zero

ثم ايجاد قيم x وهي $-1, 2, -3$



sol. set $= [-3, -1] \cup [2, \infty)$

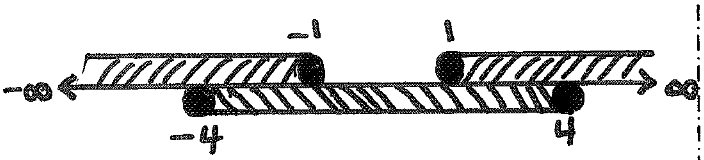
⑧ $1 \leq |x| \leq 4$

تحل على مرحلتين

ثم نوجد الجزء المشترك .

$|x| \geq 1$ and $|x| \leq 4$

$x \geq 1$ or $x \leq -1$ | $-4 \leq x \leq 4$



مجموعة الحل هي الجزء المشترك في التظليل .

sol. set $= [-4, -1] \cup [1, 4]$

قاعده

$a \leq |x| \leq b$

sol. set $= [-b, -a] \cup [a, b]$

ممكن الحل اذا بمجرد النظر

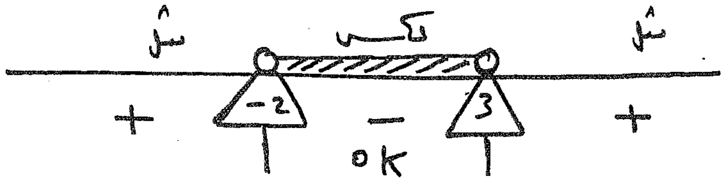
أقل من

(9) $x^2 - x - 6 < 0$ (∴ سالبه)

دراسه الأشاره

$(x - 3)(x + 2) = 0$ تحليل مقدار ثلاثي

$x = 3 \mid x = -2$



نأخذ المنطقه السالبه فقط حيث أن المتباينه أقل من zero

$\therefore$ Sol. set $= (-2, 3)$

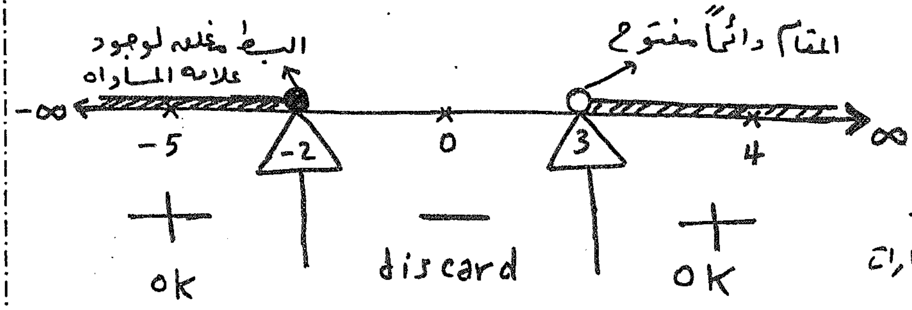
$= \{x \in R \mid -2 < x < 3\}$

---

* فى حاله المتباينه الكسريه لابد من دراسه اشاره البسط والمقام

(10) $\dfrac{x + 2}{x - 3} \geq 0 \rightarrow$ (موجبه)

* نوجد اصفار البسط والمقام $x = -2$ ، $x = 3$



* نعوض بالارقام 4 ، 0 ، −5 فى الكسر ونأخذ الاشارات

* منطقه الحل هى المنطقه الموجبه حيث أن المتباينه اكبر من zero

$\therefore$ Sol. set $= (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$

$= \{x \in R \mid x \leq -2 \text{ or } x > 3\}$

مع كل التمنيات بالنجاح والتوفيق

السعدى

* $\sqrt{x^2} = |x|$ where $x \in (-\infty, \infty)$

* $(\sqrt{x})^2 = x$ where $x \in [0, \infty)$

* $\sqrt[3]{x^3} = x$ where $x \in (-\infty, \infty)$

* $(\sqrt[3]{x})^3 = x$ where $x \in (-\infty, \infty)$

Note: $a < |x| < b$

$\therefore$ solution set $= (-b, -a) \cup (a, b)$

قاعدة هامة

Find: the solution set for the inequality

① $16 < x^2 < 25$ by $\sqrt{}$

$\sqrt{16} < \sqrt{x^2} < \sqrt{25} \Rightarrow 4 < |x| < 5$

$\therefore$ solution set $= (-5, -4) \cup (4, 5)$

② $\frac{4}{25} < x^2 < \frac{9}{25}$ by $\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{4}{25}} < \sqrt{x^2} < \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \frac{2}{5} < |x| < \frac{3}{5}$

Solution set $= (-\frac{3}{5}, \frac{-2}{5}) \cup (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$

Find: The solution set for the inequality

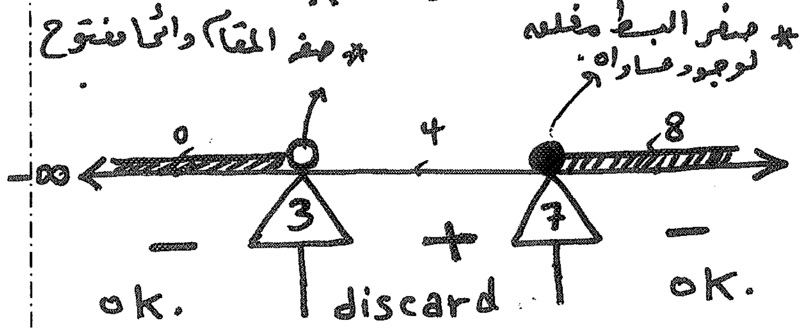
$$\frac{x+1}{x-3} \leqslant 2$$

Solution

$$\frac{x+1}{x-3} - \frac{2}{1} \leqslant 0$$ توحيد مقامات

$$\frac{x+1-2x+6}{x-3} \leqslant 0$$

$$\frac{-x+7}{x-3} \leqslant 0$$ (سالبه)



* نوجد اصفار البسط

$-x+7=0 \Rightarrow \boxed{x=7}$

* نوجد اصفار المقام

$x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

sol. set

$= (-\infty, 3) \cup [7, \infty)$

* نختار عدد في كل منطقه ثم نعوضه به في الداله الكسريه لتحديد اشاره الكسر.

Appendix B

Coordinate Geometry and Lines

Notes

2

- التركيز على المفاهيم الأساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- أمثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠

Math.110

جمال السعدي

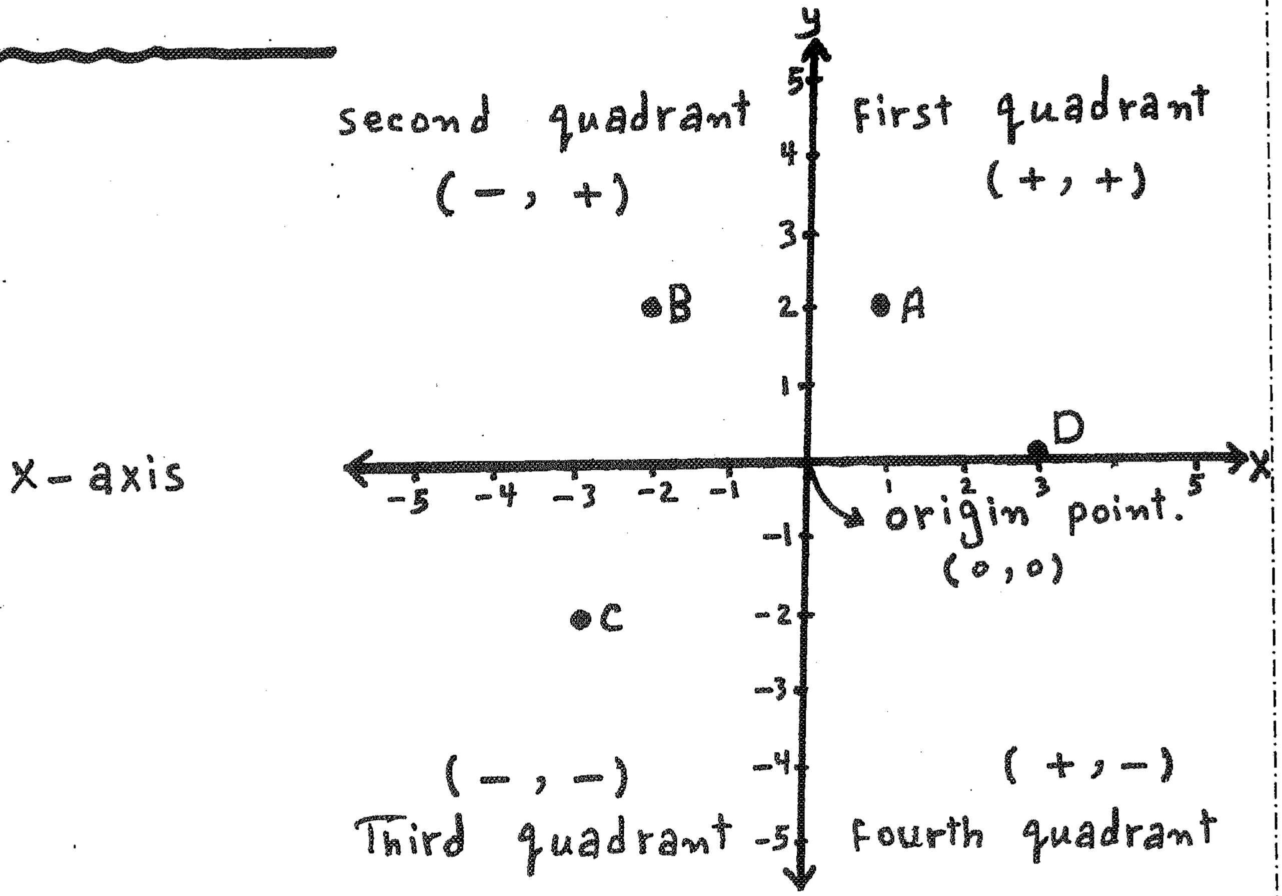
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية

0566664790

APPENDIX B: Coordinates Geometry and lines

This section reviews coordinates, lines, distance between two points, Sketch the region in the xy-plane.

* Coordinates:



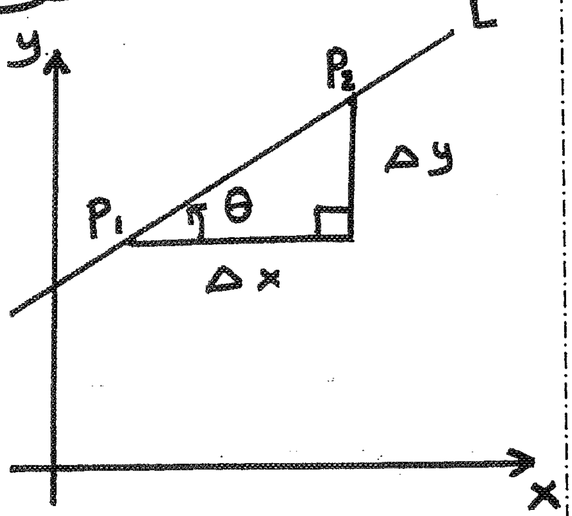
• $A = (1, 2)$ • $B = (-2, 2)$ • $C = (-3, -2)$

• $D = (3, 0)$

جـمـال الـسـعـدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Straight Line

* The slope : $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

* Equation of straight line is :

• $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

or • $y - y_1 = m(x - x_1)$

or • $y = m(x - x_1) + y_1$

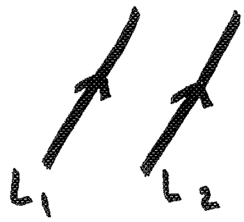
• Equation of the Line

with slope $\underline{m}$ and y-intercept $\underline{b}$

is $\Rightarrow$ $y = mx + b$

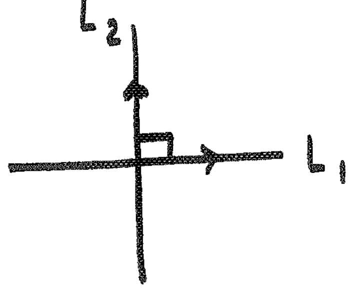
• Parallel lines

$L_1 \parallel L_2$



when : $m_1 = m_2$ * شرط التوازي

• perpendicular Lines



$L_1 \perp L_2$

when : $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

or : $m_1 \cdot m_2 = -1$ * شرط التعامد

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Example :

Find the equation for the line passes through the point (2 , 3) and with slope $\frac{-3}{2}$.

(Solution)

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$y = \frac{-3}{2}(x - 2) + 3$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \quad + 3$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

slope $\leftarrow -\frac{3}{2}$; $6 \rightarrow$ y-intercept.

Example:

Find: slope and y-intercept :

(1) $x - 6y = 12$

$$-6y = -x + 12 \quad \div -6$$

$$y = \frac{1}{6}x - 2$$

$\therefore$ slope $= \frac{1}{6}$

y-intercept $= -2$

(2) $2y = 10x - 6 \quad \div 2$

$$y = 5x - 3.$$

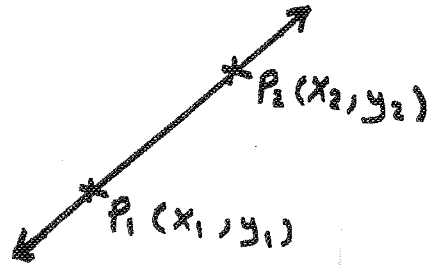
$\therefore$ slope $= 5$

y-intercept $= -3$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٦٤٧٩٠

* **The slope**: for the line passes through $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$

is $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



* **Equation** of the line passes through $P_1(x_1, y_1)$ and $P_2(x_2, y_2)$

is $$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Example:

Find: The slope and equation of the line passes through $(-2, -1)$ and $(3, 4)$

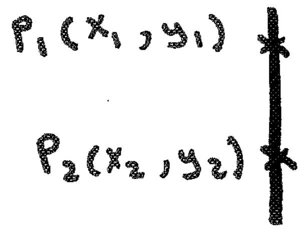
(solution)

- Slope: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4 - (-1)}{3 - (-2)} = \dfrac{5}{5} = 1$

- Equ. of the Line: $y = m(x - x_1) + y_1$

$y = 1\,(x - (-2)) + (-1)$

$\Longrightarrow y = x + 1$



Notes :

اذا كان $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ نقطتين

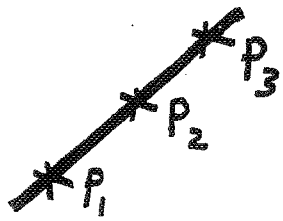
وكان $x_1 = x_2$

فإن * slope of P_1P_2 is undefined.

* P_1P_2 is vertical line.

$P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ ، $P_3(x_3, y_3)$

are <u>colinear</u>



If : slope of P_1P_2 = slope of P_2P_3

$$m_1 = m_2$$

Example:

Find the slope of the line passes through $(2, 3)$ ، $(2, -5)$

$\because x_1 = x_2$ $\therefore$ The slope is undefined.

Example:

Determine if the points :

$P_1(1,3)$, $P_2(3,2)$, $P_3(4,1)$

are colinear or not.

solution

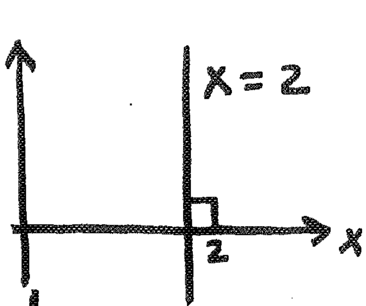
- slope of P_1P_2 : $m_1 = \dfrac{2-3}{3-1} = \dfrac{-1}{2}$

- slope of P_2P_3 : $m_2 = \dfrac{1-2}{4-3} = \dfrac{-1}{1} = -1$

$$m_1 \neq m_2$$

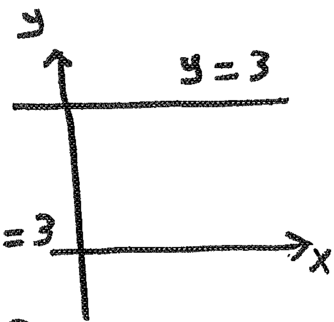
$\therefore$ P_1 , P_2 and P_3 are not colinear.

Note:



Slope of $x=2$ is undefined

eq. $x=2$ is vertical line.



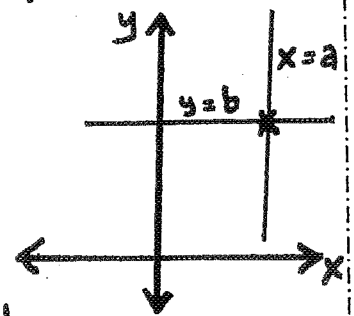
slope of $y=3$ is $m=0$

eq. $y=3$ is horizontal line.

Note:

$$P(a, b)$$

- Equation of the vertical line passes through P is $X = a$



- Equation of the Horizontal line passes through P is $y = b$

Example: Find the equation of the vertical and Horizontal line passes through $(-2, 5)$

Solution

- Equ. of vertical line is $X = -2$
- Equ. of Horizontal line is $y = 5$

Example:

Determine: if the lines are parallel or perpendicular

① $y - 2X = 1$ and $y = 2X + 5$

الميل $= \dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$

$m_1 = \dfrac{-(-2)}{1} = 2$

$m_2 = 2$

$m_1 = m_2$

$\therefore$ The lines are parallel.

② $\dfrac{y}{X} = 2$ and $2y = -X + 6$

$\div 2$

$y = 2X$

$y = \frac{-1}{2}X + 3$

$m_1 = 2$

$m_2 = -\frac{1}{2}$

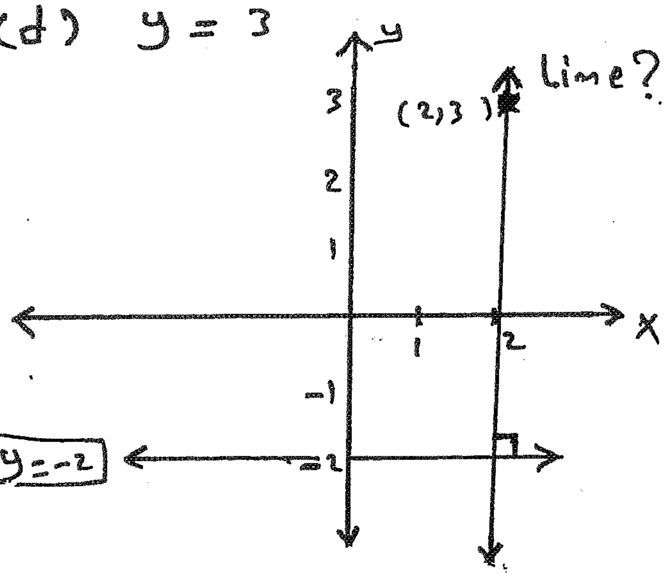
$m_1 \cdot m_2 = \cancel{2} \cdot -\frac{1}{\cancel{2}} = \underline{\underline{-1}}$

$\therefore$ The lines are perpendicular.

* An equation for the line passing th. (2,3) and perpendicular to $y=-2$ is :

(a) $x = 2$ (b) $x = 3$

(c) $y = 2$ (d) $y = 3$



من الرسم المستقيم
الذي يمر بالنقطة (2,3)
ويكون عمودياً على $y=-2$
هو المستقيم
$X = 2$

نقطة تقاطع

* The intersection point of
$y - 2x = 0$ and $y + x = 3$

(a) $(1, 2)$ (b) $(-1, 2)$

(c) $(1, -2)$ (d) $(-1, -2)$

نعوض من الاختيارات في المستقيمين
الاختيار الذي يحقق المعادلتين
هو الاختيار الصحيح
الذي يمثل نقطة تقاطع المستقيمين .
وهو (a) $(1, 2)$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Example :

Find the equation of the line :

① passes through $(\overset{x_0}{-1}, \overset{y_0}{3})$
and parallel to the line $-3x + y = 2$

Solution

eq. $y = m(x - x_0) + y_0$

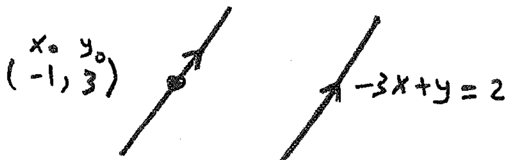
$y = 3(x - (-1)) + 3$

$y = 3x + 3 + 3$

$y = 3x + 6$

$y = 3x + 2$

$\therefore m = 3$



شرط التوازي
ان يكون للمستقيمان نفس الميل
∴ ميل المجهول $\underline{\underline{m = 3}}$

② passes through $(\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{0})$
and perpendicular to the line $y = -\frac{3}{2}x$

Solution

eq. $y = m(x - x_0) + y_0$

$y = \frac{2}{3}(x - 2) + 0$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

$m = -\frac{3}{2}$

ومن شرط التعامد
يكون ميل المستقيم المطلوب
هو $m = \frac{2}{3}$

* اذا كانت معادلة المستقيم على الشكل :

$ax + by = c$

يكون ميل المستقيم = $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}$ = $\frac{-a}{b}$

ويكون ميل العمودي = $\frac{\text{معامل } y}{\text{معامل } x}$ = $\frac{b}{a}$

Exercis :

what value of K ?

where the line $2x + Ky = 3$ ⟹ $m_1 = \frac{-2}{K}$

and the line $4x + y = 1$ ⟹ $m_2 = \frac{-4}{1}$ are :-

① parallel :

* شرط التوازي هو

$m_1 = m_2$

$\frac{-2}{K} = \frac{-4}{1}$

$\Rightarrow -4K = -2$

$\Rightarrow K = \frac{-2}{-4} \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}}$

② perpendicular :

* شرط التعامد هو

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$\frac{-2}{K} \cdot \frac{-4}{1} = -1$

$\frac{8}{K} = -1$

$\Rightarrow \boxed{K = -8}$

* Let : L_1 and L_2 are perpendicular lines with slopes m_1 and m_2 respectively

Then : $$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

أو $$m_1 \cdot m_2 = -1$$

* The equation of the line :

passes through $(1, 2)$ and slope $= 0$ is $\Rightarrow y = 2$

passes through $(1, 2)$ and has no slope is $\Rightarrow X = 1$

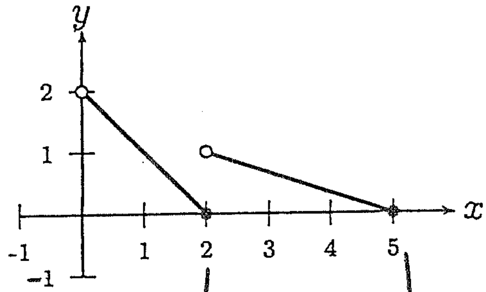
A formula for the function graphed to the right is

(a) $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{if } 0 < x \le 2; \\ \dfrac{-1}{3}x - \dfrac{5}{3}, & \text{if } 2 < x \le 5. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{if } 0 \le x \le 2; \\ \dfrac{-1}{3}x - \dfrac{5}{3}, & \text{if } 2 \le x \le 5. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{if } 0 < x \le 2; \\ \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{5}{3}, & \text{if } 2 < x \le 5. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & \text{if } 0 \le x \le 2; \\ \dfrac{-1}{3}x + \dfrac{5}{3}, & \text{if } 2 \le x \le 5. \end{cases}$

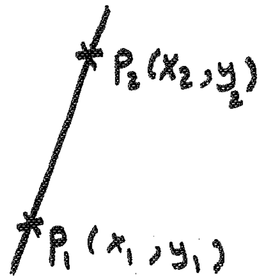


(2,0) (5,0)

* الداله التي تحقق النقطتين هي الاختيار الصحيح .

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

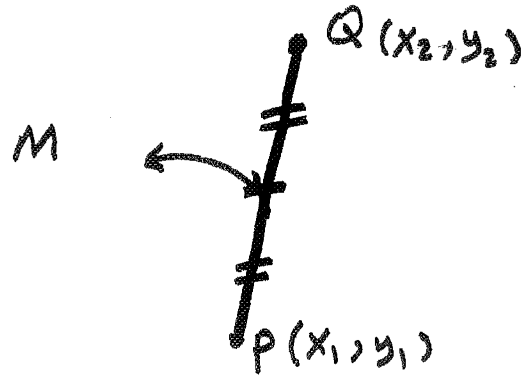
- **Distance between two points :**



$$|P_1P_2| = d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- **Mide pointe :**



$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Example : If : $P(-1, 2)$ and $Q(3, 4)$

Calculat ① the distance between P and Q.

② the Mide pointe between P and Q.

solution

① $d = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 4}$

$= \sqrt{20} = \sqrt{(4)(5)} = 2\sqrt{5}$

② $M = \left(\frac{-1+3}{2} , \frac{2+4}{2} \right)$

$= \left(\frac{2}{2} , \frac{6}{2} \right)$

$= (1 , 3)$

- In going from the point (x_1, y_1) to the point (x_2, y_2)

* The increment in x is $\Delta x = x_2 - x_1$
* " " " y is $\Delta y = y_2 - y_1$

Example :

From $P_1(2,-5)$ to $P_2(-4,1)$

Find the increments in x and y.

solution

* The increments in x is $\Delta x = -4 - 2 = -6$
* " " " y is $\Delta y = 1 - (-5) = 6$

Example

The coordinates of particle change by $\Delta x = 4$ and $\Delta y = -5$ as it moves from $A(x, y)$ to $B(1, -3)$

Find coordinates of A?

solution

* Start point A = End point B − $(\Delta x, \Delta y)$ قانون $= (1, -3) - (4, -5) = (-3, 2)$	* End point B قانون = Start Point A + $(\Delta x, \Delta y)$

السعدي

* Find the distance between :

(1) -1 and 6

$$d = |(-1) - (6)| = |-1-6| = |-7| = \boxed{7}$$

(2) $(-2, 3)$ and $(3, 3)$

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(3+2)^2 + (3-3)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

(3) If the increments $\Delta x = 3$ and $\Delta y = 1$ for moves from A to B

find the distance between A and B

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

* Show that the triangle with vertices

$A(0,2)$, $B(-3,-1)$ and $C(-4,3)$

is isosceles.

متساوي الساقين

Solution

$$|AB| = \sqrt{(-3-0)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$|BC| = \sqrt{(-4-(-3))^2+(3-(-1))^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$|AC| = \sqrt{(-4-0)^2+(3-2)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$\because |BC| = |AC|$ $\therefore$ The triangle is isosceles.

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

* (a) Show that the triangle with vertices $A(6,-7)$, $B(11,-3)$ and $C(2,-2)$ is a right triangle using Pythagorean theorem.

$$|AB| = \sqrt{(11-6)^2+(-3+7)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$|BC| = \sqrt{(2-11)^2+(-2+3)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82}$$

$$|AC| = \sqrt{(2-6)^2+(-2+7)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$$

$$\because |AB|^2 + |AC|^2 = \sqrt{41}^{\cancel{2}} + \sqrt{41}^{\cancel{2}} = 41+41 = \underline{\underline{82}}$$

$$|BC|^2 = \sqrt{82}^{\cancel{2}} = \underline{\underline{82}}$$

$\therefore |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2 \Rightarrow \therefore ABC$ is right triangle

* (b) Find the area of the triangle

$$\text{The area} = \frac{\text{حاصل ضرب ضلعي القائمة}}{2} = \frac{\sqrt{41}\cdot\sqrt{41}}{2} = \underline{\underline{\frac{41}{2}}}$$

unit area.

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Find the equation of the line :

① passes through the point $(-4, 5)$ and its slope equal 0 .

↳ Horizontal افقى

eq. $\Longrightarrow$ $y = 5$

② passes through the point $(6, 2)$ and its has no slope

↳ vertical عموديا

eq. $\Longrightarrow$ $X = 6$

Find: X-intercept and y-intercept for the line : $-2x + 5y = 20$

(solution)

X-intercept ((put $y = 0$)) $\Rightarrow -2x = 20 \Rightarrow X = -10$

y-intercept ((put $x = 0$)) $\Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = 4$

Find : x-intercept and y-intercept

for the line : $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = \frac{1}{15}$

Solution

* X-intercept ((put $y=0$))

$\frac{1}{3}x = \frac{1}{15}$ (بالضرب في 3) $\Rightarrow \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x = \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{15}\,5}$

$\boxed{x = \frac{1}{5}}$

* y-intercept ((put $x=0$))

$-\frac{1}{5}y = \frac{1}{15}$ (بالضرب في -5) $\Rightarrow \cancel{-5}\cdot-\frac{1}{\cancel{5}}y = -5\cdot\frac{1}{15}$

$\boxed{y = -\frac{1}{3}}$

Find the equation of the line where:
x-intercept $\underline{\underline{3}}$ and y-intercept $\underline{\underline{-6}}$

Solution

تتحول إلى نقطة هي $(\underset{x_1}{3}, \underset{y_1}{0})$

تتحول إلى نقطة هي $(\underset{x_2}{0}, \underset{y_2}{-6})$

وبذلك نوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y-0}{x-3} = \frac{-6-0}{0-3} \Rightarrow \frac{y}{x-3} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 6}$$

The points of intersection for:

the curve: $y = x^2 + 2x - 5$

and the line: $y = x + 1$ is:

(A) $(0, 1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $\underline{(2, 3)}$ (D) $(-2, -1)$

Solution

أســـــهل طريقة للحل التعويض من الاختيارات
النقطة التي تحقق المعادلتين معاً هي الاختيار الصحيح

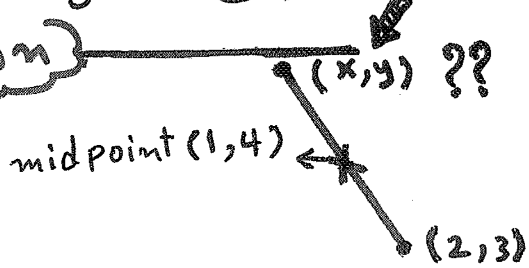
(C) $(2, 3)$

عوض عن $X = 2$ في المعادلتين يكون الناتج 3
أما باقي الاختيارات A, B, D تحقق المعادلة الثانية (المستقيم)
ولا تحقق المعادلة الأولى (المنحنى) .

If the midpoint of the line segment joining the points (x, y) and $(2, 3)$ is $(1, 4)$ then:

(A) $x = 1, y = 1$ (B) $x = 2, y = 3$ (C) $x = -1, y = 1$ (D) $x = 0, y = 5$

Solution



نجرب كل الاختيارات: الاختيار الذي يجمع
مع (2, 3) ثم يقسم الناتج على 2
ويعطي (1, 4) يكون هو الاختيار الصحيح

(D) $X = 0, y = 5$

Graph the inequality :

* $y < 2x + 3$ *

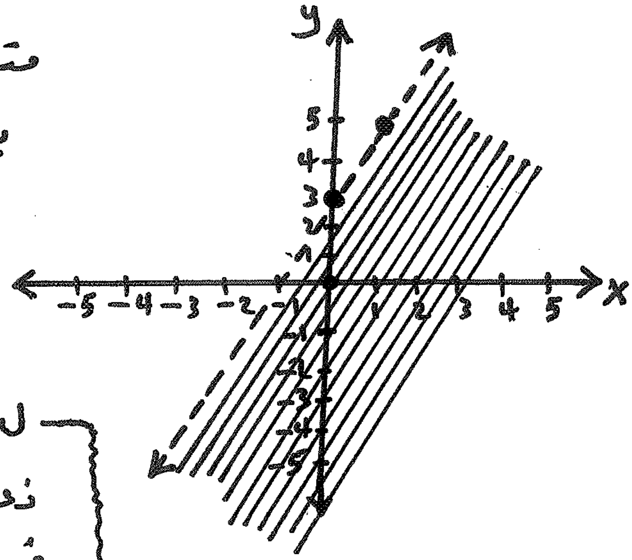
نرسم الخط المستقيم

$\boxed{y = 2x + 3}$

متقطع لعدم وجود مساواه في المتباينه

باستخدام نرسم نقطتين كما في الجدول

x	0	1
y	3	5



لتحديد منطقة حل المتباينه
نعوض بنقطة ما ولتكن (0,0)
في المتباينه:
* اذا تحققت المتباينه تكون منطقة الحل
هي المنطقه الموجود بها النقطه (0,0)
* اذا لم تتحقق المتباينه
تكون منطقة الحل هي المنطقه التي
لا تحتوي على النقطه (0,0)

نعوض بالنقطه (0,0) في المتباينه

$y < 2x + 3$

$0 < 0 + 3$

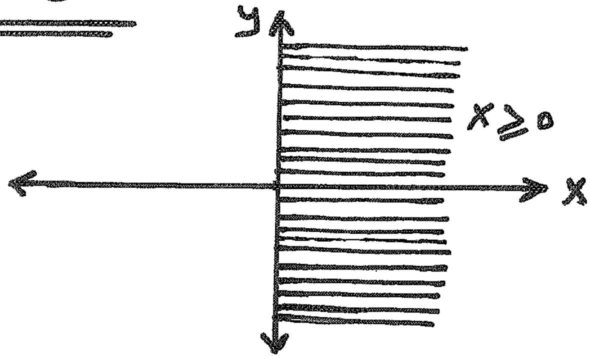
$0 < 3$ (✓)

∴ النقطه (0,0) تحقق المتباينه

∴ منطقة الحل هي المنطقه التي تحتوي على (0,0) أسفل الخط
المنطقه المظلله في الرسم

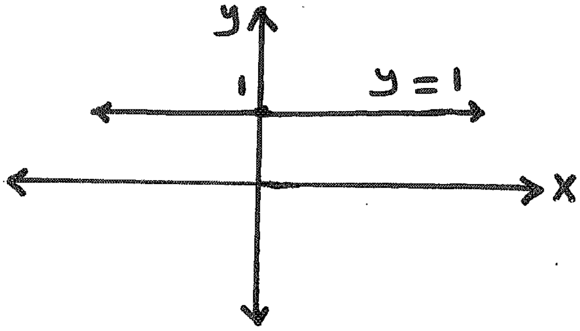
* Describe and sketch the regions given by the following sets :

(a) $\{(x,y) \mid x \geq 0\}$



الربع الأول ، الرابع
كلاهما به x موجبه .

(b) $\{(x,y) \mid y = 1\}$

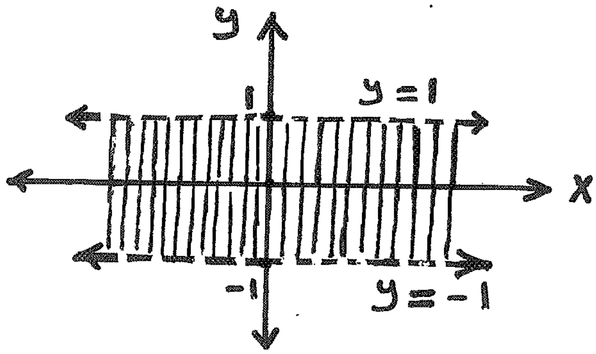


خط مستقيم // محور x
ويبعد عنه بمقدار
ويقطع محور y عند $+1$.

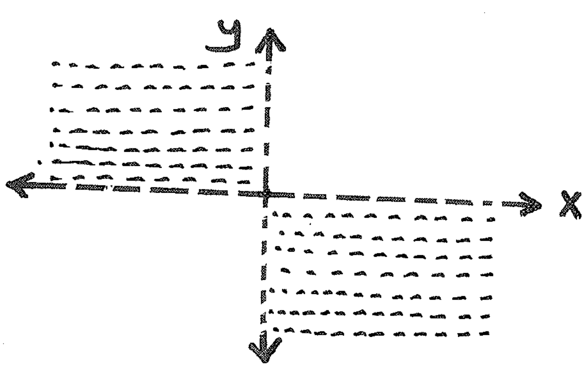
(c) $\{(x,y) \mid \underbrace{|y| < 1}\}$

$$-1 < y < 1$$

نظري



(d) $\{(x,y) \mid xy < 0\}$



حاصل ضرب x ، y اقل من zero سالب
∴ اشاره x ، y مختلفتان

x موجبه ، y سالبه (الربع الرابع)

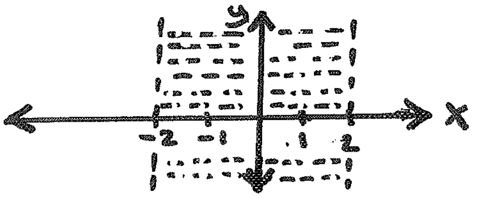
x سالبه ، y موجبه (الربع الثاني)

المحورين غير متضمنين لعدم وجود علاقه يساوي في المتباينه

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

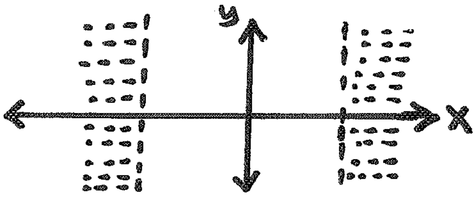
Sketch : the region in the xy - plane

① $|x| < 2$



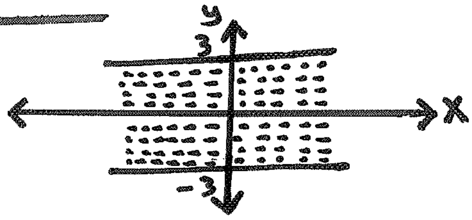
$-2 < x < 2$

② $|x| > 2$



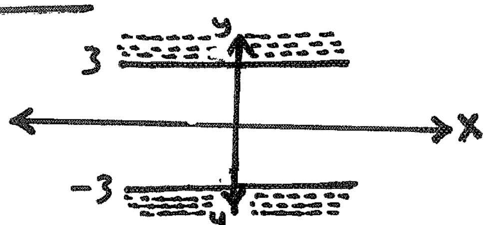
$x > 2$ or $x < -2$

③ $|y| \leq 3$



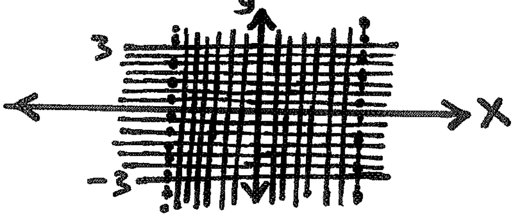
$-3 \leq y \leq 3$

④ $|y| > 3$



$y > 3$ or $y < -3$

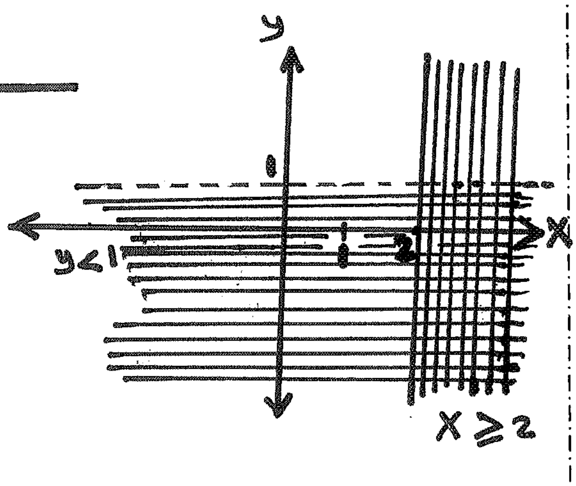
⑤ $|x| < 2$ and $|y| \leq 3$



$-2 < x < 2$ and $-3 \leq y \leq 3$

منطقة حل المتباينات هي المنطقة
المشتركة في التظليل (الشبكة)

⑥ $x \geq 2$ and $y < 1$



منطقة حل المتباينات هي المنطقة
المشتركة في التظليل (الشبكة)

* Sketch the region in the xy-plane

(1) $\{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 4 \text{ and } x \geq 2\}$

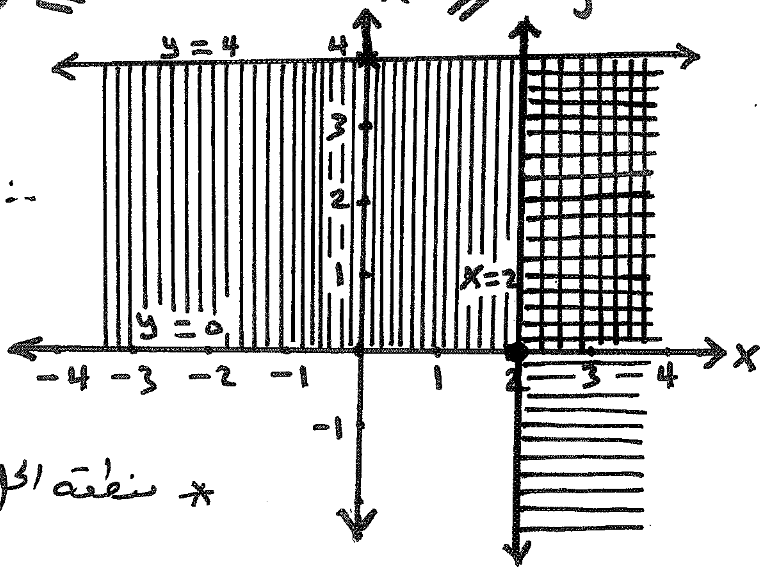
$\because 0 \leq y \leq 4$

$\therefore$ التظليل محصور بين $y=0$ ، $y=4$

$\because x \geq 2$

$\therefore$ التظليل على يمين $x=2$

* منطقة الحل هي المنطقة المشتركة في التظليل .



(2) $\{(x,y) \mid 1+x \leq y \leq 1-2x\}$

* نرسم المستقيمين :

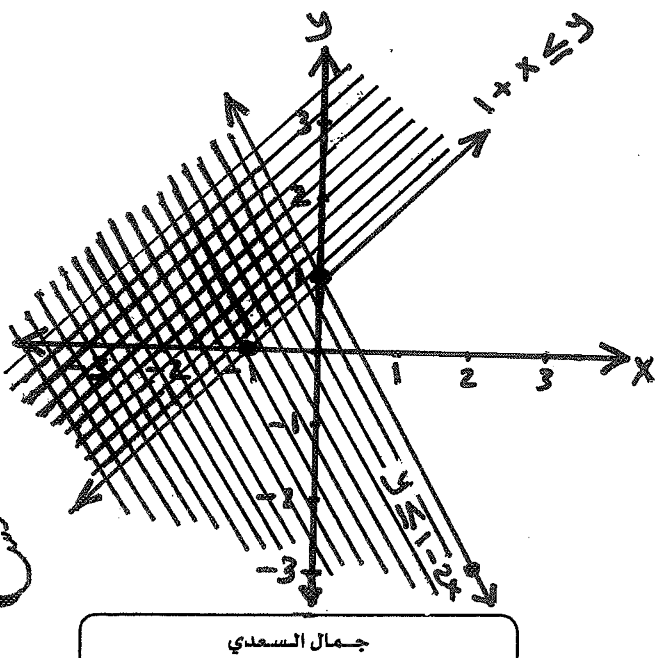
* $y = 1 + x$

x	0	-1
y	1	0

* $y = 1 - 2x$

x	0	2
y	1	-3

* منطقة الحل هي المنطقة المشتركة في التظليل .



كل التمنيات بالنجاح والتوفيق

السعدي

جمال السعدي

استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية

٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Appendix D

Trigonometry

3

Notes

- التركيز على المفاهيم الأساسية.
- شرح أبواب المنهج حسب الخطة.
- أمثلة توضيحية وتدريبات.
- نماذج اختبارات.

السعدي

رياضيات ١١٠
Math.110

جمال السعدي

استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية

0566664790

Trigonometric functions

$$F(x+T) = F(x)$$

$F(x)$ is periodic function $\Rightarrow$ period $= T$

Note:

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

$$\sec(\theta + 2\pi) = \sec\theta$$

$$\csc(\theta + 2\pi) = \csc\theta$$

$\Rightarrow$ دوال دوريه دورتها 2π

$$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$$

$$\cot(\theta + \pi) = \cot\theta$$

$\Rightarrow$ دوال دوريه دورتها π

ملحوظه : لو أستبدلت π بـ $K\pi$ في العلاقات السابقه تظل هذه العلاقات صحيحه حيث K عدد صحيح يمثل عدد الدورات :

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Find the period of the function

① $y = \tan(\pi x)$?

نضع $\pi x = \pi$ فنقسم على π

$x = 1$

② $y = \cos(\pi x)$?

نضع $\pi x = 2\pi$ نقسم على π

$x = 2$

تمرين

What is the period of each ?

① $\sin\frac{x}{2} \Longrightarrow \frac{x}{2} = 2\pi \quad \therefore x = 4\pi$

② $\cos(x - \frac{\pi}{2}) \Longrightarrow x - \frac{\pi}{2} = 2\pi \quad \therefore x = \frac{5\pi}{2}$

③ $\sin(\frac{\pi x}{3}) \Longrightarrow \frac{\pi x}{3} = 2\pi \quad \therefore x = 6$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

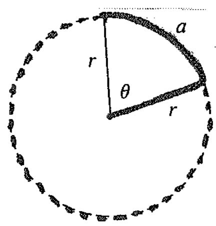
* **Angles :** can be measured by degrees or radians.

* The angle given by a complete revolution contains 360° or 2π rad.

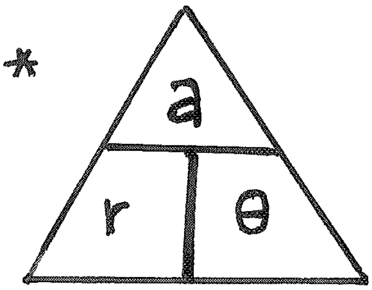
$$\Rightarrow 2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$
$$\Rightarrow \pi \text{ rad} = 180^\circ$$
$$\Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$$

---

* If the angle $\to \theta$ is subtended by the arc length a and the radius of the circle r :



* استخدام المثلث يسهل حفظ العلاقات .



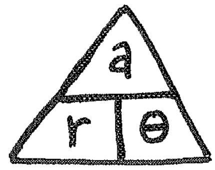
- $a = r \cdot \theta$
- $r = \dfrac{a}{\theta}$
- $\theta = \dfrac{a}{r}$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Example :

ⓐ If the radius of a circle $\underline{5}$ cm what angle is subtended by arc $\underline{6}$ cm

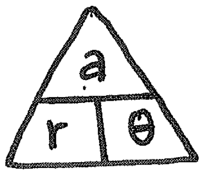
solution



$$\theta = \frac{a}{r} = \frac{6}{5} = 1.2 \text{ rad}$$

ⓑ If the radius of the circle is $\underline{3}$ cm what is the length of the arc subtended by a central angle $\frac{3\pi}{8}$ rad ?

solution



$$a = r \cdot \theta = 3 \cdot \left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{9\pi}{8} \text{ cm}$$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

العلاقة بين القياسين الستيني والدائري

للتحويل من دائري إلى ستيني

Convert radian to degree

$$\underbrace{\alpha \text{ degree}}_{\text{مجهول}} = \underbrace{\theta \text{ radian}}_{\text{معطى}} \times \frac{180}{\pi}$$

إذا وجدت π حولها إلى 180

للتحويل من ستيني إلى دائري

Convert degree to radian

$$\underbrace{\theta \text{ radian}}_{\text{مجهول}} = \underbrace{\alpha \text{ degree}}_{\text{معطى}} \times \frac{\pi}{180}$$

Example:

* Convert 60° to radian ?

$$\theta \text{ radian} = 60^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ radian}$$

* convert $\frac{3\pi}{2}$ to degree ?

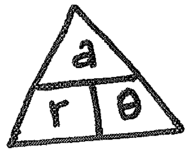
$$\alpha \text{ degree} = \frac{3 \times 180}{2} = 270^\circ$$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

$\frac{13}{A32}$ Find the length of a circular arc $\underline{\underline{a}}$?
subtended by the angle of $\frac{\pi}{12}$ rad
if the radius of the circle is 36 cm

Solution

$$a = r \cdot \theta = \cancel{36}^{3} \cdot \frac{\pi}{\cancel{12}_{1}} = \underline{\underline{3\pi}} \text{ cm}$$



$\frac{14}{A32}$ If a circle has radius 10 cm
Find the length of the arc $\underline{\underline{a}}$?
subtended by a centeral angle of 72°.

Solution

لابد من تحويل θ
من degree إلى radian

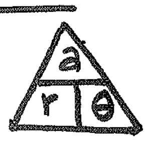
$$72^\circ = \frac{72^\circ \times \pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$$

$$a = r \cdot \theta = 10 \cdot \frac{2\pi}{5}$$
$$= \underline{\underline{4\pi}} \text{ cm}$$

$\frac{15}{A32}$ A circle has radius 1.5 m
what angle is subtended at the center
of the circle by an arc 1 m ?

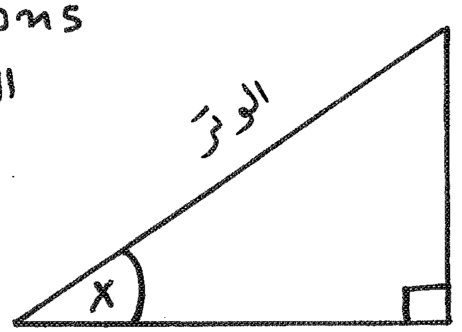
Solution

$$\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{1.5} = 0.6666\ldots \approx \underline{\underline{0.7}} \text{ rad}$$



جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Trigonometric functions
الدوال المثلثية



الدوال الأساسية	المقلوبات	ملاحظات
$\sin x = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	الدالة . مقلوبها = 1 $\sin x \cdot \csc x = 1$
$\cos x = \dfrac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$	$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\cos x \cdot \sec x = 1$
$\tan x = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$	$\tan x \cdot \cot x = 1$

* قواعد هامة جداً *

* $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

* $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

* $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

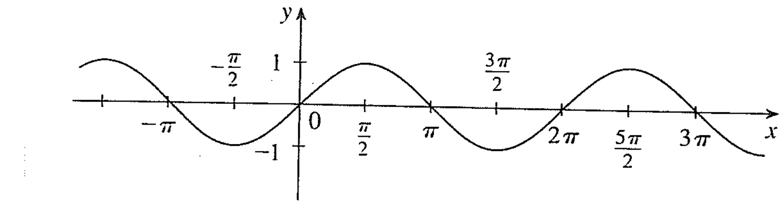
* $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

* $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

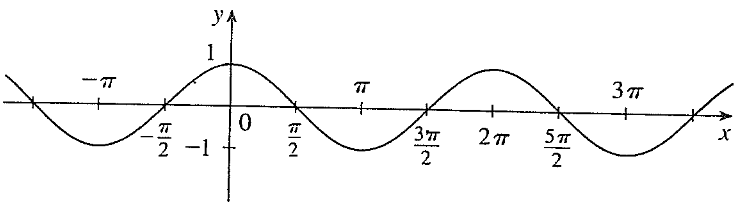
* $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

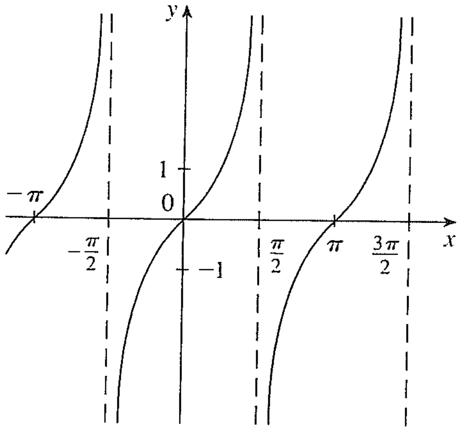
Graphs of the trigonometric functions



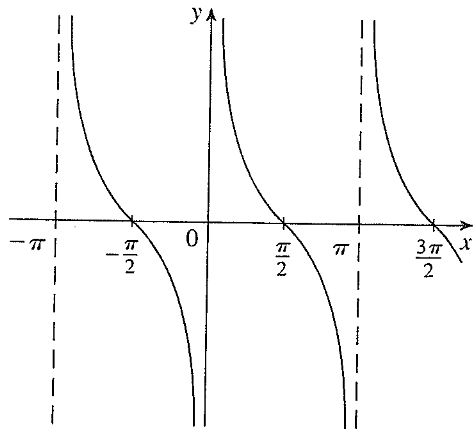
$f(x) = \sin x$



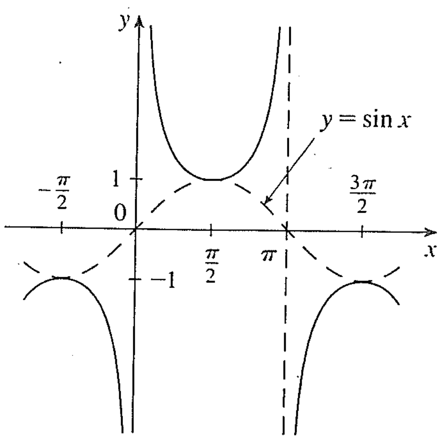
$g(x) = \cos x$



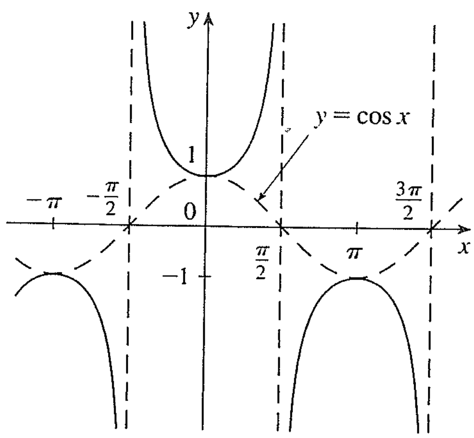
$y = \tan x$



$y = \cot x$



$y = \csc x$



$y = \sec x$

جـمال الـسعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

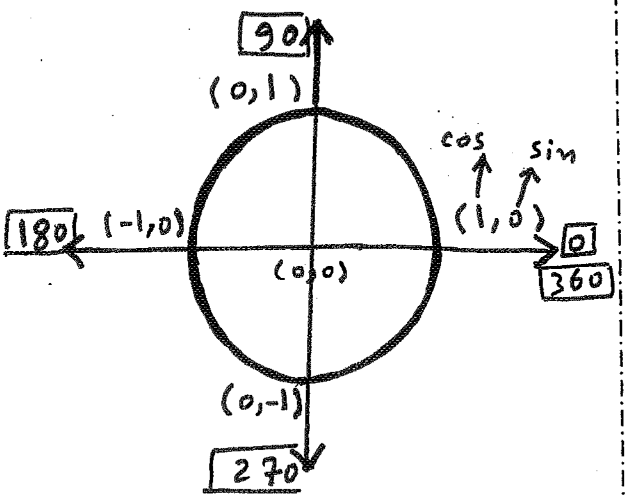
* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

* $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

* $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

* $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ * $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

الزاوية / الدالة	0	$\pi/2$ 90	π 180	$3\pi/2$ 270	2π 360
Sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	Undef.	0	undef.	0



الزاوية / الدالة	$\pi/6$ 30	$\pi/4$ 45	$\pi/3$ 60
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Note :

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

دوال محدوده
بين العددين
$-1 , +1$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

* $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$

* $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$

* $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

Example :

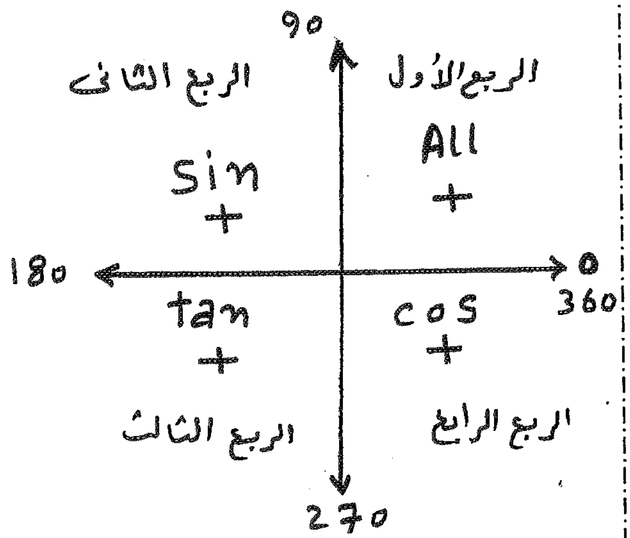
Find the value of: $\sin 45 \cos 15$?

Solution

$$\sin 45 \cos 15 = \frac{1}{2}\left[\sin(45+15) + \sin(45-15)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 60 + \sin 30\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$



كل الدوال الظاهره فى المستوى موجبه وكذلك مقلوباتها .

A	S	t	C
الربع الأول	الثانى	الثالث	الرابع

موجبه

ملحوظه هامه :

اذا عُلم ضلعان فى مثلث قائم الزاويه امكن معرفه الضلع الثالث من نظريه فيثاغورس .

* بعض الحالات المشهوره للمثلث القائم اذا عُلم ضلعان امكن استنتاج الضلع الثالث كما فى الجدول (لسرعه الحل)

ضلعى القائمه	الوتر
1 , 1	$\sqrt{2}$
3 , 4	5
6 , 8	10
5 , 12	13
8 , 15	17
15 , 20	25
7 , 24	25
⋮ ⋮	⋮

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Example :

If : $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ where $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Find : $\sin\theta$ and $\tan\theta$?

solution

$\because \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2} \rightarrow \text{المجاور}}{3 \rightarrow \text{الوتر}}$

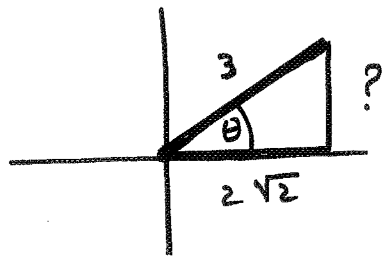
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

الربع الأول

من نظرية فيثاغورس

$|?|^2 = (3)^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 8 = 1$

$\therefore |?| = 1$



$* \sin\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \dfrac{1}{3}$

$* \tan\theta = \dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

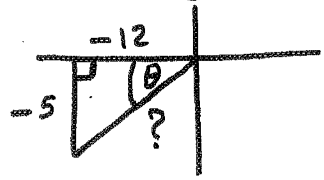
If : $\tan\theta = \frac{5}{12}$ where $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

Find : $\sin\theta$ and $\cos\theta$?

solution

$\tan\theta = \dfrac{5 \rightarrow \text{المقابل}}{12 \rightarrow \text{المجاور}}$

الزاويه θ في الربع الثالث



الضلع المجهول الوتر = 13

$* \sin\theta = \dfrac{-5}{13}$

$* \cos\theta = \dfrac{-12}{13}$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

* If: $\sin x = \frac{3}{5}$ and $\cos x = \frac{4}{5}$

Find: $\sin 2x$ and $\cos 2x$?

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$$
$$= \boxed{\frac{24}{25}}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$
$$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$
$$= \boxed{\frac{7}{25}}$$

Find: $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

ارشاد
Hint: $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{3}$$
$$= \cos 60$$
$$= \frac{1}{2}$$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Evaluate :

① $\cos \frac{\pi}{12}$ 　　عوض عن π بـ 180

$$\cos \frac{180}{12} = \cos 15$$

$$= \cos(45 - 30)$$

تحول الزاوية 15 الى طرح زاويتين مشهورتين

قانون ← $= \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

② $\sin \frac{5\pi}{12}$ 　　عوض عن π بـ 180

$$\sin \frac{5(180)}{12} = \sin 75$$

تحول الزاوية 75 الى جمع زاويتين مشهورتين

$$= \sin(45 + 30)$$

قانون ← $= \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30$

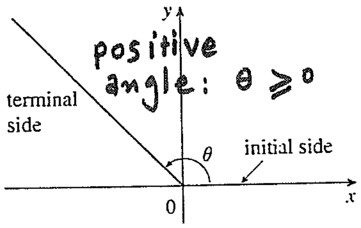
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

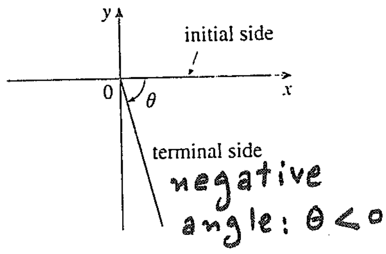
$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

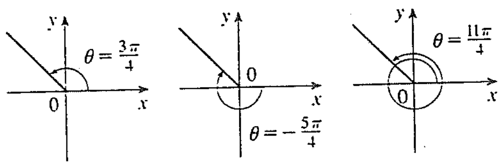
The standard position of the angles





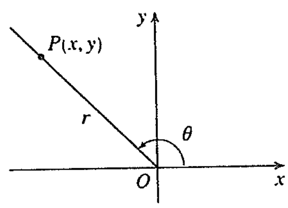
The angles : $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{-5\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{4}$

have the same initial and terminal sides



The general angle θ in standard position

- $P(x, y)$ is the point on the terminal side
- r is the distance $|OP|$:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Longrightarrow \cot\theta = \frac{x}{y}$$

جـمـال الـسـعـدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Example:

$P(-1, \sqrt{3})$ is the point on terminal line for θ.

Find the exact trigonometric ratios for θ ?

solution

$\boxed{x = -1}$, $\boxed{y = \sqrt{3}}$, $r^2 = x^2 + y^2$

$= (-1)^2 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3 = 4$

$\therefore r = \sqrt{4}$

$\Rightarrow \boxed{r = 2}$

* Trigonometric ratios:

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \csc\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \sec\theta = \frac{2}{-1} = -2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \cot\theta = -1/\sqrt{3}$

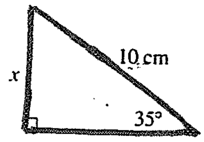
جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Find correct to five decimal places, the length of the side labeled x.

$\frac{35}{A32}$

$$\sin 35 = \frac{x}{10}$$

35.

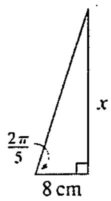


$$\Rightarrow x = 10 \cdot \sin 35 \approx 5.73576$$

$\frac{37}{A32}$

$$\tan \frac{2\pi}{5} = \frac{x}{8}$$

37.

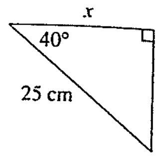


$$\Rightarrow x = 8 \cdot \tan \frac{2\pi}{5} \approx 24.62147$$

$\frac{36}{A32}$

$$\cos 40 = \frac{x}{25}$$

36.

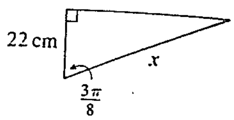


$$\Rightarrow x = 25 \cdot \cos 40 \approx 19.15111$$

$\frac{38}{A32}$

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{22}{x}$$

38.



$$\Rightarrow x = \frac{22}{\cos \frac{3\pi}{8}} \approx 57.48877$$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

If: $\sin x = \frac{1}{3}$ and $\sec y = \frac{5}{4}$

where x and y lie between 0 and $\frac{\pi}{2}$

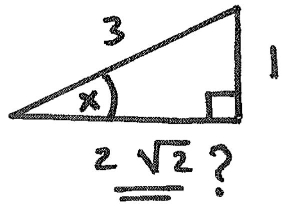
evaluate the expression

$\boxed{\frac{59}{A33}}$ $\sin(x+y)$ $\boxed{\frac{63}{A33}}$ $\sin 2y$

{solution}

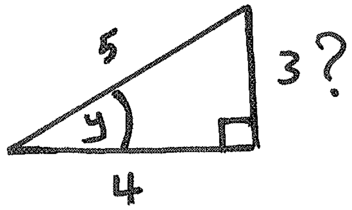
* نوجد الضلع المجهول من نظرية فيثاغورس

$\sin x = \frac{1 \rightarrow \text{المقابل}}{3 \rightarrow \text{الوتر}}$



$\sec y = \frac{5 \rightarrow \text{الوتر}}{4 \rightarrow \text{المجاور}}$

cos y مقلوب



$\frac{59}{A33}$) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{6\sqrt{2}}{15} = \frac{4+6\sqrt{2}}{15}$$

$\frac{63}{A33}$) $\sin 2y = 2 \sin y \cos y = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

Prove the identity :

46 / A32) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$

Solution

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$
$$= 1 + \sin 2x$$

48 / A32) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \sin^2\alpha$

Solution

$\tan^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$= \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) \cdot \sin^2\alpha = (\sec^2\alpha - 1)\sin^2\alpha$$
$$= \tan^2\alpha \sin^2\alpha$$

52 / A32) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

Solution

$$\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = \frac{1+\cancel{\sin\theta} + 1 - \cancel{\sin\theta}}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta}$$
$$= 2\sec^2\theta$$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

$\frac{51}{A32}$) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

Solution

$\because \tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}$ $\boxed{\text{put } \alpha=\theta}$

$\Rightarrow \tan(\theta+\theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1-\tan\theta\cdot\tan\theta}$

$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$\frac{53}{A32}$) $\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x = \cos x$

Solution

$\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x$

$= \sin x \cdot 2\sin x\cos x + \cos x \cdot (2\cos^2 x - 1)$

$= [2\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1] \cdot \cos x$

$= [2 - 1] \cdot \cos x$

$= 1 \cdot \cos x = \underline{\underline{\cos x}}$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

$\frac{67}{A33}$) $2\sin^2 x = 1$

Solution

$2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

* $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\because$ sin موجب

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الرابع

$\therefore x = 45 \quad , 135$

* $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\because$ sin سالب

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو الرابع

$\therefore x = 225 \quad , 315$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4} , \frac{5\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}$

$\frac{68}{A33}$) $|\tan x| = 1$

Solution

$\because |\tan x| = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1$

* $\tan x = 1$

$\because$ tan موجبة

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثالث

$x = 45 \quad , 225$

* $\tan x = -1$

$\because$ tan سالبة

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الرابع

$x = 135 \quad , 315$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} , \frac{3\pi}{4} , \frac{5\pi}{4} , \frac{7\pi}{4}$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

$\frac{69}{A33}$) Find all values of x in the interval $[0, 2\pi]$ that satisfy the equation

$$\sin 2x = \cos x$$

Solution

$$\sin 2x = \cos x$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \cos x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ or $2 \sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 90, 270$ | $\sin x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 30, 150$

$$\therefore x = 30, 90, 150, 270$$

$$= \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

جـمال السـعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

$\frac{71}{A33}$) $\sin x = \tan x$

solution

$\because \sin x = \tan x$

$\Rightarrow \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin x \cdot \cos x = \sin x$

$\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$

$\sin x (\cos x - 1) = 0$

$\sin x = 0$	$\cos x - 1 = 0$
	$\Rightarrow \cos x = 1$
$\Rightarrow x = 0, 180, 360$	$\Rightarrow x = 0, 360$

$\therefore x = 0, \pi, 2\pi$

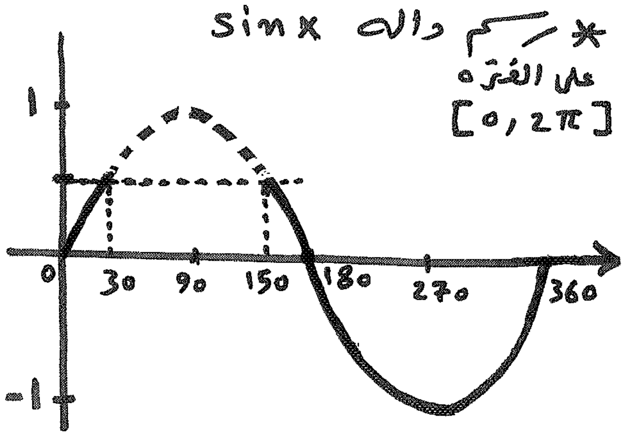
جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

$\frac{73}{A33}$) Find all values of x in the interval $[0, 2\pi]$ that satisfy the inequality.

$$\sin x \leq \frac{1}{2}$$

Solution

* رسم دالة $\sin x$ على الفترة $[0, 2\pi]$



من الرسم نأخذ قيم x التي تجعل منحنى $\sin x \leq \frac{1}{2}$ نجد أنها كل قيم x ابتداءً من 0 حتى 360 ما عدا الفترة $(30, 150)$ فيها يكون المنحنى أكبر من $\frac{1}{2}$

$0 \leq x \leq 30$ and $150 \leq x \leq 360$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ and $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

جمال السعدي
استاذ الرياضيات والإحصاء للمرحلة الجامعية
٠٥٦٦٦٦٤٧٩٠

If: $\sin x = \frac{5}{13}$ and $\cos x = \frac{12}{13}$

Find: ① $\sin 2x$ ② $\cos 2x$ ③ $\tan 2x$

solution

① $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$= 2 \left(\frac{5}{13}\right) \left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$

② $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \left(\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$

③ $\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\left(\frac{120}{\cancel{169}}\right)}{\left(\frac{119}{\cancel{169}}\right)} = \frac{120}{119}$

Express the given quantity in terms $\sin x$ and $\cos x$:

① $\sin(x+\pi)$ ② $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

③ $\tan(x+2\pi)$ ④ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$

Solution

① $\sin(x+\pi) = \sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi$
$= \sin x \cdot -1 + \cos x \cdot 0$ $\to 0$
$= -\sin x$

② $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2}$
$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1$ $\to 0$
$= -\sin x$

③ $\tan(x+2\pi) = \dfrac{\tan x + \tan 2\pi}{1-\tan x \cdot \tan 2\pi} = \dfrac{\tan x + 0}{1-\tan x \cdot 0}$

$= \dfrac{\tan x}{1} = \tan x$

④ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \cos\frac{3\pi}{2}\cos x - \sin\frac{3\pi}{2}\sin x$
$= 0 \cdot \cos x - (-1) \cdot \sin x$ $\to 0$
$= \sin x$

Find the value of the following:

$(\pi = 180°)$

① $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) \cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$

$= \sin 10 \cos 20 + \sin 20 \cos 10$

$= \sin(10 + 20) = \sin 30 = \frac{1}{2}$

② $\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$

$= \cos 10 \cos 20 - \sin 10 \sin 20$

$= \cos(10 + 20) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\dfrac{\tan 20 + \tan 40}{1 - \tan 20 \tan 40}$

$= \tan(20 + 40) = \tan 60 = \sqrt{3}$

④ $\sin 45 \sin 15$

$= -\frac{1}{2}\left[\cos(45 + 15) - \cos(45 - 15)\right] =$

$= -\frac{1}{2}\left[\cos 60 - \cos 30\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

Find the values of the functions:

① $\cos^2 \frac{\pi}{8}$ ② $\sin^2 \frac{\pi}{12}$

solution

① $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\therefore \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{8}}{2}$

$= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}$

$= \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$

$= \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$

② $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\therefore \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{\pi}{12}}{2}$

$= \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}$

$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

$= \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

Express the given by $\sin x$ and $\cos x$

① $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$ ② $\cos(\pi + x)$

مع كل التمنيات بالنجاح والتوفيق

السعدى