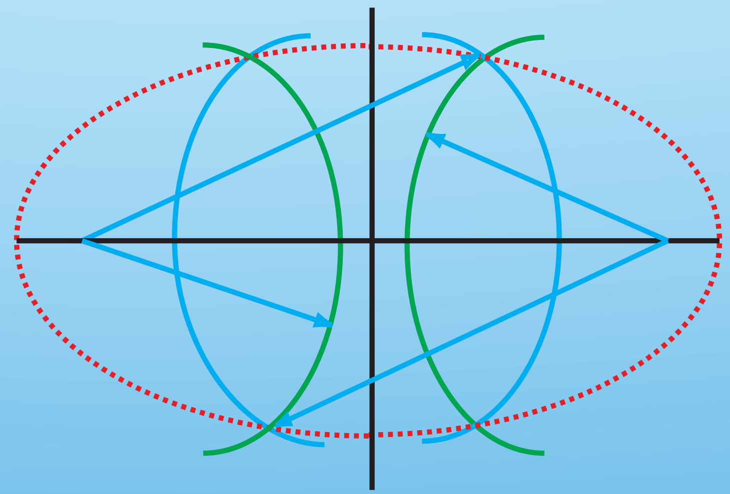
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الادارة العامة للمناهج

دليل المعلم
لتدريس كتاب
الرياضيات
للصف الثالث الثانوي (القسم العلمي)



١٤٣٣هـ/ ٢٠١٢م

دليل المعلم لتدريس كتاب الرياضيات
للصف الثالث الثانوي (القسم العلمي)
الطبعة الثانية ١٤٣٣هـ/ ٢٠١٢م

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

دليل المعلم

لتدريس كتاب
الرياضيات
للصف الثالث الثانوي / القسم العلمي

المؤلفون

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الإله علي حمد الحوري
د. عوض حسين البكري
د. محمد رشاد الكوري
د. محمد حسن عبده المسوري
د. عبدالله سالم بن شحنة
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري
أ. مريم عبدالجبار سلمان
أ. يحيى محمد الكنز

أ. سالمين محمد باسلوم / منسقاً
أ. محمد علي مرشد
أ. يحيى بكار مصفر
أ. عبدالباري طه حيدر
أ. نصر محمد بدر
أ. جميلة إبراهيم الرازحي
أ. عادل علي مقبل البنا
أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان

الإخراج الفني

الصف الطباعي والرسم والتصميم: علي عبد الله السلفي

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ‏ ‏ رددیه وأعیدي وأعیدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ ‏ ‏ وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي ‏ ‏ أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس ‏ ‏ اُخْلُدي خافِقَةً في كل قِمّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي ‏ ‏ واذخُريني لكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبّي أمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول.
د. عبدالله عبده الحامدي.

أ/ جميل علي الخالدي.	د/ صالح ناصر الصوفي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	د/ أحمد حسن المعمري.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ عبد الوهاب عوض كويران.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله لملس.	د/ علي قاسم إسماعيل.
أ/ منصور علي مقبل.	د/ عبدالقادر محمد العلبي.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ محمد عبدالله زبارة.	أ/ لطفية أحمد حمزة.

أ/ خالد محمد الجباري.

قرَّرَتْ اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٢)، وتأريخ ٢٠٠٤/٥/١٩م طباعة هذا الدليل وتوزيعه للعام الدراسي ٢٠٠٤ / ٢٠٠٥م .

الطبعة الثانية

١٤٣٣هـ / ٢٠١٢م

بسم الله الرحمن الرحيم

تقـــديم

ونحن نتطلع بتيقظ واهتمام إلى السنوات المقبلة – الفترة الحا سمة في مسيرة التربية والتعليم في بلادنا – والعالم يشهد تطورات علمية وتقنية، مما يفرض علينا مزيداً من الجهد؛ لإيجاد معلم قادر على العطاء، والإنجاز، متفهم لما يجري من تطوير في المناهج التعليمية.

ومن بين الأدوات التي تساعد في تطوير أداء المعلم في الصف الدراسي دليل المعلم الذي يحوي بعض الأساليب التي تمكن المعلم و المعلمة من فهم المادة العلمية في الكتاب المدرسي، وكيفية التعامل معها بقدر من النجاح، وهذا لا يعني أن الدليل قد بلغ مرتبة الكمال، أو أنه خال من الشوائب، إلا أنه كان لابد من أن ندفع بهذا الإنجاز إلى حيز الاختبار؛ لنتبين أوجه الجودة فيه وكذلك أوجه القصور أو النقص فتتجمع لدينا جراء ذلك اقترحات للتطوير والتحسين نفيد منها في طبعات لاحقة .

إن هذا الدليل يعتبر أحد الأدوات التي تعين المعلم والمعلمة على أداء رسالتهما، وعليك البحث والاطلاع على كل ما هو مفيد من المعارف من مصادر المعرفة التربوية والعلمية العديدة، وتدريب الطلبة على كيفية التعلم من الكتاب المدرسي ومن غيره من المصادر التعليمية.

لذا فإن إصلاح التربية والتعليم لن يتوقف عند إصدار الكتب المدرسية، وأدلة المعلمين فقط، بل سيتعداه إلى تدريب المعلمين، وإعادة تأهيلهم، وتوفير التوجيه، وتحديث أنماط التقويم، والاختبارات .

فإلى كل من شارك في إنجاز التطوير للمناهج؛ نتوجه بجزيل الشكر لما بذلوه من عمل في سبيل تجسيد أهداف المنهج وتطلعاته؛ خدمة لمستقبل أبنائنا وإسهاماً في بناء الإنسان والوطن.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

مـــقـــدمـــة الدليل

عزيزنا المدّرس . . .

عزيزتنا المدّرسة . . .

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي القسم العلمي، فإننا نرى ضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي وكتاب التمارين.

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة ، وهذه الحصص لن تتم إلا بتخطيط جيد . وهذا ما يسعى إليه هذا الدليل لمساعدتك لتحقيقه

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للمرحلة الثانوية، وفق إستراتيجية تربوية شاملة وخطة واضحة المعالم. ومن أهم معالمها إنها تعطى أهمية كبيرة لأنشطة الطلبة وتعلمهم الذاتي من خلال حل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، إضافة إلى إعطاء أهمية خاصة لأدلة المعلمين ، وفق معايير متجددة حتى يتمكن المدرس من الاستفادة منها استفادة حقيقية في مجال تخطيط الدروس وتنفيذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سليمة وسلسة وشيقة للطلبة في الكتاب المدرسي ، إضافة إلى التمارين والمسائل المتنوعة في كتاب التمارين ؛ فإننا أشدحرصاً على أن نقدم للمدرسين أفضل الطرائق، وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعلم .

ولقد وضعنا في بداية هذا الدليل أهداف تدريس الرياضيات للمرحلة الثانوية عامة ، وللصف الثاني الثانوي بشئ من التفصيل من واقع وثيقة المنهاج ؛ ثم أتبعناها بثلاث مقدمات توضيحية حول منهجية واستخدام كل من الكتاب المدرسي وكتاب التمارين والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُنيت عليها وكيفية استخدامها .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا .

والله من وراء القصد .

المؤلفون

المحتويات

المحتويات

المحتويات

أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية

يهدف تدريس الرياضيات في نهاية المرحلة الثانوية إلى :

١ – تعرُّف المتعلم على الأعداد المركبة ، وإجراء العليات عليها
٢ – تعرُّف المتعلم على مبادئ المنطق الرياضي .
٣ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات (الدوال) ، وأنوعها .
٤ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات العكسية ، وإيجاد التطبيق العكسي لتطبيق معطى .
٥ – تعرُّف المتعلم على تركيب التطبيقات وإيجاده .
٦ – إجراء المتعلم للعمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .
٧ – تعرُّف المتعلم على اللوغاريتمات وخواصها ، واستخدامها ، وتمييز الدالة الأسية واللوغاريتمية ورسمها .
٨ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستنتاج بعض قوانينها (الحد العام، المجموع)، واستخدامها .
٩ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصها وحل مسائل عليها .
١٠ – تعرُّف المتعلم على نهاية بعض الدوال ، وحسابها ، وإيجاد مشتقاتها .
١١ – تعرُّف المتعلم على مشتقات بعض الدوال ، وحسابها باستخدام القواعد .
١٢ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية .
١٣ – تعرُّف المتعلم على النظم الرياضية الجبرية ذات العملية الواحدة ، وذات العمليتين .
١٤ – تعرُّف المتعلم على المحددات ، والمصفوفات ، والمتجهات ، وإجراء العمليات عليها .
١٥ – استخدام المتعلم بعض خواص المصفوفات ، والمحددات ، في حل أنظمة من المعادلات الخطية .
١٦ – استنتاج المتعلم لبعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .
١٧ – إيجاد المتعلم لميل ومعادلة المستقيم في المستوى ، واستنتاج معادلة المماس .
١٨ – تعرُّف المتعلم على المتجهات وخواصها ، وإجراء العمليات عليها .
١٩ – إكساب المتعلم مفاهيم الدوران ، والتكبير ، والانعكاس تحليلياً وتركيب الدوران والتحاكي .
٢٠ – استنتاج المتعلم بعض معادلات القطوع المخروطية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .
٢١ – تعرُّف المتعلم على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بينها .
٢٢ – برهنة المتعلم لبعض مبرهنات الهندسة الفضائية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .
٢٣ – حساب المتعلم لمقاييس التشتت ، وبعض معاملات الارتباط .
٢٤ – برهنة المتعلم بعض قوانين ومبرهنات الاحتمالات ، واستخدامها في حل بعض المسائل.
٢٥ – تعرُّف المتعلم على حساب التكامل واستنتاج بعض قوانينه .
٢٦ – إجراء المتعلم لبعض التكاملات ، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .
٢٧ – استخدام المتعلم الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .
٢٨ – إكساب المتعلم بعض القيم العملية السليمة مثل الأمانة العلمية والنظام والترتيب والاعتماد على النفس من خلال منهجية علم الرياضيات .
٢٩ – تنمية روح البحث والابتكار لدى المتعلم ومتابعة التطورات العملية المعاصرة .
٣٠ – تنمية الذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال والبنى الرياضية المختلفة .
٣١ – تقدير المتعلم لدور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الأول ثانوي

يكون المتعلم بعد الإنتهاء من دراسة الصف الأول ثانوي قادراً على :

١ – التعرُّف على مبادئ المنطق الرياضي .

٢ – التعرُّف على التطبيقات ، وأنواعها (الثابت ، المحايد ، المتباين ، الغامر)

٣ – إجراء العليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .

٤ – التعرُّف على الحدوديات ، وخواصها ، وإيجاد أصفار الحدوية .

٥ – التعرف على النظام ذي العملية الثنائية ، وخواصه (الزمرة) .

٦ – حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير أو متغيرين .

٧ – حل معادلات من الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد بطريقة القانون، واستخدام المميز لمعرفة نوع جذري المعادلة.

٨ – حل جملة المتراجحات من الدرجة الأولى بيانياً .

٩ – حل متراجحة من الدرجة الثانية ذات متغير واحد .

١٠ – إيجاد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، وبُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

١١ – إيجاد ميل ومعادلة المستقيم في المستوى .

١٢ – اكتساب مفاهيم الانعكاس ، والانسحاب ، والدوران تحليلياً (بإستخدام قواعد جبرية) .

١٣ – ذكر شروط التوازي والتعامد ، وإيجاد العلاقة بين مستقيمين في مستوى .

١٤ – التعرف على المتجهات ، وخواصها وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استنتاج بعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .

١٦ – التعرُّف على المجموع والرمز مجـ وخواصه .

١٧ – إيجاد مقاييس النزعه المركزية ، (الوسط، الوسيط ، المنوال) .

١٨ – إيجاد مقاييس التشتت (المدى ، التباين ، الإنحراف المعياري) .

١٩ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

٢٠ – تنمية بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والموضوعية واحترام اراء الآخرين .

٢١ – إدراك دور الرياضيات في خدمة ودراسة فروع المعرفة الأخرى .

٢٢ – تنمية ذوق جمال وتناسق الرسوم والأشكال البيانية والبُنى الرياضية المختلفة .

٢٣ – تكوين البصيرة الرياضية على فهم الرياضيات بأنها فكرة دائم التطور .

٢٤ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي (العلمي)

بعد الانتهاء من دراسة منهاج الرياضيات للصف الثاني الثانوي يكون المتعلم قادراً على :

١ – التعرُّف على النظام ذي العمليتين وخواصه (الحقل) .

٢ – التعرُّف على الخصائص الأساسية لحقل الأعداد الحقيقية .

٣ – التعرف على القيمة المطلقة ، وخواصها ، وحسابها .

٤ – التعرُّف على المصفوفات ، والمحددات، وإجراء العمليات عليها .

٥ – استخدام بعض خواص المصفوفات، والمحددات، في حل انظمة من المعادلات الخطية .

٦ – التعرُّف على بعض الدوال ، وإيجاد الدالة العكسية ،وإيجاد تركيب دالتين.

٧ – التعرُّف على مفهوم اللوغاريتم وخواصه ،وإستخدامه، والتمييز بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية ورسم منحنى كل منهما.

٨ – التعرُّف على مفاهيم الدائرة في المستوى الإحداثي.

٩ – استنتاج معادلة الدائرة وإيجاد معادلة المماس لدائرة، وحساب طوله من نقطة خارجة عنها.

١٠ –التعرُّف على بعض المفاهيم الأساسيةفي الهندسة الفضائية والعلاقات بين المستقيمات والمستويات في الفراغ.

١١ – برهنة بعض المبرهنات الهندسية الفضائية .

١٢ – استنتاج بعض العلاقات للنسب المثلثية ، وحل المعادلات المثلثية .

١٣ – التعرُّف على على مفاهيم المتتالية الحسابية والهندسية، وبعض قوانينها (الحد العام، مجموعهما) .

١٤ – التعرُّف على مفهوم النهاية، وحساب نهايات بعض المتتاليات والدوال.

١٥ – التعرُّف على مفهوم الاشتقاق واستنتاج بعض قوانينه.

١٦ – حساب مشتقات بعض الدوال.

١٧ – التعرُّف على مفاهيم الاتصال ومبرهنات الاتصال واستخدامها في حل بعض المسائل على الدوال.

١٨ – التعرُّف على مفاهيم الإرتباط ، والانحدار، وحساب معامل الارتباط.

١٩ – التعرُّف على الاحتمال وحسابه.

٢٠ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية.

٢١ – تنمية بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والصبر واحترام آراء الآخرين.

٢٢ – الرغبة في الاستزادة من الرياضيات والاستمرار في دراستها.

٢٣ – تقدير قيمة الرياضيات واسهامها في خدمة المواد الأخرى .

٢٤ – تذوق جمال وتماسك البناء الرياضي.

٢٥ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في وضع أساسيات العلوم الرياضية .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثالث الثانوي (القسم العلمي)

يكون المتعلم بعد الانتهاء من دراسة الصف الثالث الثانوي قادراً على :

١ – التعرُّف على حقل الأعداد المركبة، وإِجراء العمليات عليها .
٢ – حل المعادلات من الدرجة الثانية على الأعداد المركبة .
٣ – التعرُّف على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصهما وحل مسائل عليهما .
٤ – إيجاد مفكوك ذي الحدين وتعيين أي حدٍ في المفكوك وحساب قيمته .
٥ – التعرُّف على القطوع المخروطية وتعيين معادلات كل منها .
٦ – التعرُّف على الزاوية الزوجية والمساقط، وبرهنة بعض المبرهنات المتعلقة بالمساقط على المستوى .
٧ – برهنة بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمال .
٨ – التعرُّف على بعض المفاهيم الأساسية للاشتقاق ومبرهناته .
٩ – ايجاد مشتقات بعض الدوال .
١٠ – التعرُّف على مفهوم التكامل .
١١ – إجراء بعض التكاملات، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .
١٢ – استخدام الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .
١٣ – إدراك دور الرياضيات في خدمة ودراسة فروع المعرفة الأخرى .
١٤ – تنمية بعض القيم العلمية السليمة كالأمانة العلمية والدقة والنظام والترتيب والموضوعية واحترام آراء الآخرين .
١٥ – تنمية حب الرياضيات وتعزيز اتجاهات التعلم الذاتي وتنمية روح الكشف والإبتكار والبحث .
١٦ – الرغبة في الاستزادة من الرياضيات والاستمرار في دراستها .
١٧ – تذوق جمال وتماسك البناء الرياضي .
١٨ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في وضع أساسيات العلوم الرياضية .

جدول توزيع الحصص على الوحدات

م	عنوان الوحدة	عدد الحصص
١	الأعداد المركبة	٢٨
٢	مبدأ العدّ ومبرهنة ذات الحدين	٢٠
٣	القطوع المخروطية	٢٥
٤	الهندسة الفضائية	١٤
٥	الاحتمالات	٢٩
٦	التفاضل	٣٨
٧	التكامل	٤٢
	إجمالي عدد الحصص	١٩٦ حصة

∋	عنصر في / ينتمي إلى
∌	ليس عنصراً في / لا ينتمي إلى
⊃	مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊇)
⊅	**ليست** مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز ⊉)
{ ﺃ ، ب ، جـ ، . . . }	حاصرتا المجموعة
∩	تقاطع
∪	اتحاد
∅ ، { }	المجموعة الخالية (فاي)
سَ	متممة المجموعة س
س / ص = س − ص	الفرق بين المجموعتين س، ص.
س × ص	حاصل ضرب المجموعتين س، ص.
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية .
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة (ومنها ص+ ، ص−)
ك	مجموعة الأعداد الكسرية
ن	مجموعة الأعداد النسبية (ومنها ن+ ، ن−)
ح	مجموعة الأعداد الحقيقية (ومنها ح+ ، ح−)
] ﺃ ، ب [	الفترة المغلقة ﺃ ، ب .
[ﺃ ، ب]	الفترة المفتوحة ﺃ ، ب .
[ﺃ ، ب [	الفترة نصف المفتوحة من جهة ﺃ .
] ﺃ ، ب]	الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .
π	النسبة التقريبية (باي) .
<	أكبر من
>	أصغر من
≤	أكبر من أو يساوي
≥	أصغر من أو يساوي
هـ	الأساسي الطبيعي (عدد حقيقي غير نسبي)
لط	لوغاريتم العدد الطبيعي
=	يساوي .
≯	ليس أصغر من

$\not>$	ليس أكبر من .
$\neq$	لا يساوي
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	عمودي على
$\not\perp$	ليس عموديا على
$\approx$	يساوي تقريباً
$\equiv$	يكافئ
$\sim$	يشابه
$\cong$	يطابق
$\because$	بما أن
$\therefore$	إذن
$\overline{\text{ا ب}}$	القطعة المستقيمة ا ب
$\lvert \text{ا ب} \rvert$	طول القطعة ا ب .
$\overleftarrow{\text{ا ب}}$	الشعاع الذي بدايته النقطة ا .
$\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$	المستقيم ا ب (الذي يمر بالنقطتين ا ، ب) .
$\propto$	يتناسب
مجـ	المجموع
$\triangle$	المثلث
$\measuredangle$ ا ب جـ	الزاوية ا ب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .
ق ($\measuredangle$ ا ب جـ)	قياس الزاوية ا ب جـ .
جا	جيب الزاوية
جتا	جيب تمام الزاوية
ظا	ظل الزاوية
ظتا	ظل تمام الزاوية
قا	قاطع الزاوية
قتا	قاطع تمام الزاوية
[س]	صحيح س أو أكبر عدد صحيح أصغر من س
$\pm\infty$	سالب أوموجب ما لا نهاية
$\lvert \quad \rvert$	القيمة المطلقة

$\forall$	لكل
$\exists$	يوجد على الأقل
$\sim$ م	نفي م
$\Leftarrow$	يقتضي
Δ ، δ	دلتا
حـ$_د$	الحد النوني للمتتالية (الحد العام)
$\langle$ حـ$_د$ $\rangle$	متتالية حسابية أو هندسية حدها العام حـ$_د$
ε	أبسِلُون
$\wedge$	(و) رمز العطف
$\vee$	(أو) رمز الفصل
ت$^{-١}$	التطبيق العكسي للتطبيق ت
ت$_١$ $\circ$ ت$_٢$	تركيب تطبيقين ت$_١$ ، ت$_٢$
$\sqrt[د]{م}$	الجذر النوني للعدد م
حـ	حدودية
ط*	ط / { ٠ }
ص*	ص / { ٠ }
د*	د / { ٠ }
ح*	ح / { ٠ }
$\overleftarrow{م ب}$	المتجه م ب
($\overleftarrow{و م}$ ، $\overleftarrow{و ب}$)	الزاوية الموجهة ضلعها الابتدائي $\overleftarrow{و م}$ وضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$
$\overleftarrow{ف}$ (س ، ص)	المتجه القياسي
$\overleftarrow{٠}$	المتجه الصفري
$\lvert \overleftarrow{ف} \rvert$	طول المتجه
$\overleftarrow{س}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور السيني الموجب
$\overleftarrow{ص}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور الصادي الموجب
$\overleftarrow{ف}_١ \bullet \overleftarrow{ف}_٢$	الضرب الداخلي لمتجهين
ك $\bullet$ $\overleftarrow{ف}$	ضرب متجه بعدد حقيقي
نهـــا	نهاية
دَ (س)	مشتقة الدالة د (س)
ر$_و$	رو (معامل ارتباط سبيرمان)

عند إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية، رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب استراتيجية مناهج هذه المرحلة التي استندت إلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإلى الأسس العامة للتربية ، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرائق والأساليب كما ورد في وثيقة المناهج من ناحية ، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى ، وكل ذلك مبنيٌّ على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية، ولهذا ظهرت هذه المعالم واضحة في كتب الرياضيات لهذه المرحلة ، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة مع مراعاة الدقة والصرامة العلمية، والاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها ، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط ، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي، إضافة إلى التعزيز بالتدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة.

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات وشبه المحسوسات، واقترب أكثر فأكثر إلى العمليات التجريدية ، إذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى عالٍ ، منها : التصنيف، والمقارنة، وتكوين المفاهيم والعلاقات، والتجريد والتعميم، والتفسير والترجمة . والطالب في هذه المرحلة يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الأستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية مما يساعد على حل المشكلات بشكل أعمق، وبما ينمي لدى الطلبة جوانب الإبداع والابتكار.

٣ – جرت ـ قدر الإمكان ـ محاولة لتوظيف المادة التعليمية ، في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إلا نوع من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم والعادات الإيجابية وتنمية الانتماء . والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال تقديم المواضيع بشكل منسق إلى جانب عرض بعض جماليات المادة هنا وهناك .

٤ – مراعاة الفروق الفردية حيث عرضت المادة بتسلسل من خلال قدرٍ كافٍ من الأمثلة ، والتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجاً متصاعداً في الصعوبة. وتخدم التمارين والمسائل في كل بند تثبيت المادة التعليمية، كما تهدف إلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات والرموز المناسبة ، دون المبالغة في دقتها الرياضية ومراعاة الربط بالتطبيقات دون خلل في تعميماتها المجردة . وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

أ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية تصنيف وتجريد .

ب) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم.

جـ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ، وهذه عملية تصنيف وتمييز ، بل عملية تعميق، ومن ذلك تتم صياغة التعاريف بعناية .

٦ – معالجة البرهنة من خلال الحصول على عدد من المبرهنات وبرهانها وحل بعض التمارين والمسائل عليها، ويتم ضمن ذلك تحديد المعطيات (المقدمات) والمطالب (النتائج) وقد تم الاهتمام في هذا المجال بتطوير أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه . وعُني هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية والتحليلية .وقد ظهرت البرهنة لأول مرة في الصفوف (٧– ٩) من مرحلة التعليم الأساسي وقد سارت فكرة البرهنة في تلك المرحلة على النحو التالي :

أ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات ، وقد مُهّد لذلك في الصفوف الدنيا من مرحلة التعليم الأساسي واستمر في الصفوف العليا من تلك المرحلة .

ب) فهم البرهان والخطوات المنطقية (كان ذلك في الصف السابع) .

جـ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا الأمر مشترك في الصفين السابع والثامن .

د) إقامة البرهان بشكل ذاتي ، حيث يتمكن الطالب بنفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل ، ويبدأ هذا من الصف الثامن .

وفي المرحلة الثانوية يتم الإرتقاء بالبرهنة من حيث ألأساليب والأفكار ،وفي هذا المجال لا بد من التأكيد على نموذج عرض البرهان ، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة .

٧ – إعطاء أهمية للمهارات بشكل موازٍ لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات ، بحيث لا يطغى واحد على الآخر. وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

ب) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة (وهي مرحلة سابقة للمهارات) .

جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا تمام المهارة .

تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر إن للمهارة جانبين هما الدقة والسرعة. والعناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلا أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى ، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات.ومن المهارات التي يجب أن يتقنها طالب هذه المرحلة استخدام الآلات الحاسبة واستخدام الجداول والرسوم البيانية وتفسيرها... وما شابه ذلك.

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، وأساليب التفكير الرياضي خاصة. ويعتبر ما سبق تقديمه في مرحلة التعليم الأساسي من شرح وتوظيف لاستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد يمتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة في كل من الجبر والهندسة ، بل وفي كافة الفروع والمجالات الرياضية. ويتمثل حل المسألة في الخطوات التالية :

أ) حصر المعطيات .

ب) تحديد المطلوب .

جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل، ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات اللازمة

للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد ، وفي هذه الخطوة يتم تنمية الابداع والابتكار .

د) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

هـ) مراجعة الحل (التحقق من صحة الحل) : وهو مطلب تربوي، أكثر من كونه علميًا ، إذ يساعد على تنمية القدرة على النقد الذاتي، حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أولاً : أُعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلا أن المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم . إن المنهاج ينعكس انعكاساً تاماً في الكتاب ، وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ دروسه اليومية . وهذا لا يعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي وكذلك كتاب التمارين . كما يوصي المدرس بالمراجع العلمية والتربوية الأخرى ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية ، وقد أوردنا عناوين بعض المراجع في الدليل في نهاية كل وحدة.

ثانياً : يعتبر الكتاب المصدر الرئيس للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفاً ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المادة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعليمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة خارج الصف ، إذا كان وقت الحصص لايستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العملية . ومما سبق نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين تقدم للطالب مفهوم خاطئ، وللاسف لازال يمارسه كثير من المدرسين دون إدراك .

ثالثاً : يقدّم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها، ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما هي ثم يطلب نقلها إلى الكرسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو من كتاب التمارين أو يعدها بنفسه .

رابعاً : يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بحيث يمكن أن تغطى المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد ضمن ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية .

هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجيةً واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة .

من ضمن استراتيجيات إعداد المواد التعليمية للمرحلة الثانوية، إعداد كتب الأنشطة والتمارين لكل مادة، ولهذا فقد جاء إعداد كتاب التمارين لمادة الرياضيات تحقيقاً لأهداف تعليمية مكملة للكتب المدرسية . وقد روعي عند إعداد كتاب التمارين أن يحتوى على ما يلي :

١ – إضافة إلى تمارين ومسائل كل بند في الكتاب المدرسي فقد تم إعداد بعض التمارين والمسائل التي وضعت تحت رقم البند المعني ، وإن كانت تمارين الكتاب المدرسي تغنى عن هذه التمارين، إلا أن ما ورد في كتاب التمارين هو زيادة التمرن، واحتياطي لمن يريد الاستزادة من التمارين بغرض التمكن من المادة .

٢ – وضعت في نهاية كل وحدة مجموعة من التمارين العامة والمسائل التي تربط محتوى الوحدة ككل، ولتساعد على فهم اعمق بين بنودها ونظرة شمولية بين مفاهيمها ويجعلها أكثر ثباتاً في أذهان الطلبة .

٣ – اختبار الوحدة، وهو متناغم مع اختبار الوحدة الذي في الدليل، قد وضعا وفقاً لأهداف الوحدة .

واستناداً لماسبق ، فقد خُطِّط أن يستخدم كتاب التمارين على النحو التالي :

أولاً : يمكن الاكتفاء بتمارين ومسائل الكتاب المدرسي بعد كل بند ، ويستعان بما في كتاب التمارين فقط وقت الضرورة ، أو لإعداد بعض الاختبارات أو خطوات التقويم نهاية كل بند .

ثانياً : نهاية كل وحدة يكلّف الطلبة بحل عدد كاف من التمارين العامة والمسائل ، يقوم المدرس باختيارها بدقة، ويمكن اعتبارها مراجعة عامة للوحدة

ثالثاً : يطلب المدرس من الطلبة حل اختبار الوحدة كواجب منزلي ، وقبل يومين أو ثلاث من الاختبار الذي سيتم إجراؤه .

وبالتالي يتيح فرصة كافية للطلبة للمراجعة والاستفسار عن أي صعوبات تواجههم .

إن الهدف الأساسي لكتاب التمارين هو تمكين الطلبة من المادة وتثبيتها وتعميقها لديهم.

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للمرحلة الثانوية منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع استراتيجية مناهج هذه المرحلة؛ ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية، وتراعي خصوصية المواضيع ولا تلغي إبداع المدرس في سلوكه التدريسي، الذي يمكنه من إبراز شخصيته مع أخذه بعين الإعتبار خصوصيات طلبته. ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية والتي يجب الأخذ بها عند استخدام تلك الأدلة :

١ – الحرص على أن تخطط جميع الوحدات ، بل وجميع الدروس ، إلا أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا وضع تشكيل كل وحدة على النحو التالي :

أ) جدول بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب ، وعلى المدرس ألا يزيد كثيراً أو ينقص كثيراً عن هذا العدد المقترح من الحصص حتى لا تنتهي السنة الدراسية وهو لم يغطِ المقرر الدراسي .

ب) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها. وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما أنها منسجمة ـ إن لم تكن متطابقة ـ مع وثيقة المناهج لكل وحدة .

جـ) مقدمة للوحدة وتحتوي على فكرة عامة لمكونات الوحدة الدراسية، وعلى لمحة تاريخية ، ومفاهيم وتعميمات الوحدة، وبعض الأخطاء الشائعة إذا دعت الضرورة لذكرها وسبل علاجها ، وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولا يجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

د) أهداف لكل درس، مع ذكر العدد المقترح للحصص ، كما تم التعرض لتنفيذ الدرس بتحديد عنوان عام لكل حصة دراسية، ثم جاء تقويم الدرس ، وبعد ذلك إرشادات وإجابات التمارين والمسائل .

هـ) كما سبقت الإشارة، فإن اختبار الوحدة الذي في كتاب التمارين يُعطى كواجب منزلي، وتهيئة لاختبار الوحدة الحقيقي الذي في الدليل، ويفضل أن يعد المدرس اختباراً آخراً وفقًا ذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة ، ثم يقوم المدرس بتحليل إجابات الطلبة على أن تتم معالجة الأخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ – كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلا مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ، ولهذا على المدرس أن يكيف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف، وبما يتيح له الإبداع دون الخروج عن أهداف المنهاج. ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءة متمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة بأهدافها وخطواتها التمهدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من عنده، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه مستعيناً بالتقويم الذي في الدليل لكل بند .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ، وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها ، وأن يوظفه بشكل يومي ، ولا يقتصر استخدامه ـ كما تعود كثير من المدرسين ـ على تحديد الواجبات والتمارين .

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطيه المدرس عناية كبيرة ، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب ، منها تسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً ، واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة وبحيث يشعر الطلبة المتوسطون بشئ من تحقيق الذات . وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلته وتمارينه، وهنا نوجه نظره إلى كتاب التمارين . وعلى المدرس أن يضع من ضمن أهداف الدرس : إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين .

٦ – على المدرس أن ينفذ بشكل أو آخر كل ما يشار إليه من أساليب لتنمية القدرات العقلية، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف ، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة ، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة .

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعينة، إلا في البرهنة ، ولهذا على المعلم ، وكلما أتيحت له الفرصة ، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في مرحلة التعليم الأساسي من استراتيجية حل المسألة ، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها .

٨ – ينصح المدرس بأن يوجه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية من حيث العرض الكتابي، يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظاميته وجمال عرضه .

وبعد عرض المنهجيات الثلاث لإعداد الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ودليل المعلم ، فإن على المدرس تتبع هذه المنهجيات في عمله التدريسي حصة حصة وبنداً بنداً ، ويحرص على تطبيقها في الممارسة الفعلية للتدريس .

الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

دليل المعلم

لتدريس كتاب

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي / القسم العلمي

المؤلفون

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً

د. أمة الإله علي حمد الحوري	أ. سالمين محمد باسلوم / منسقاً
د. عوض حسين البكري	أ. محمد علي مرشد
د. محمد رشاد الكوري	أ. يحيى بكار مصفر
د. محمد حسن عبده المسوري	أ. عبدالباري طه حيدر
د. عبدالله سالم بن شحنة	أ. نصر محمد بدر
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري	أ. جميلة إبراهيم الرازحي
أ. مريم عبدالجبار سلمان	أ. عادل علي مقبل البنا
أ. يحيى محمد الكنز	أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان

الإخراج الفني

الصف الطباعي والرسم والتصميم: علي عبد الله السلفي

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني

الطبعة الثانية

١٤٣٠-١٤٣١هـ / ٢٠٠٩-٢٠١٠م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي ‏ ‏ ‏ ‏ رددِيه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ ‏ ‏ ‏ ‏ وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي ‏ ‏ ‏ ‏ رددي أيتها الدنيا نشيدي
وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي ‏ ‏ ‏ ‏ أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمَّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُه من كل شمس ‏ ‏ ‏ ‏ اُخْلُدِي خافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي ‏ ‏ ‏ ‏ واذخُريني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالسلام محمد الجوفي.
د. عبدالله عبده الحامدي.

أ/ جميل علي الخالدي.	د/ صالح ناصر الصوفي.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ محمد عبد الباري القدسي.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ عبد الوهاب عوض كويران.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله لملس.	د/ علي قاسم إسماعيل.
أ/ منصور علي مقبل.	د/ عبدالقادر محمد العلبي.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ محمد عبدالله زبارة.	أ/ فوزية أحمد نعمان.

أ/ خالد محمد الجباري.

قرَّرَتْ اللجنة العليا للمناهج في اجتماعها رقم (٢)، وتأريخ ٢٠٠٤/٥/١٩م طباعة هذا الدليل وتوزيعه للعام الدراسي ٢٠٠٤ / ٢٠٠٥م .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقـــديم

ونحن نتطلع بتيقظ واهتمام إلى السنوات المقبلة – الفترة الحا سمة في مسيرة التربية والتعليم في بلادنا – والعالم يشهد تطورات علمية وتقنية، مما يفرض علينا مزيداً من الجهد؛ لإيجاد معلم قادر على العطاء، والإنجاز، متفهم لما يجري من تطوير في المناهج التعليمية .

ومن بين الأدوات التي تساعد في تطوير أداء المعلم في الصف الدراسي دليل المعلم الذي يحوي بعض الأساليب التي تمكن المعلم و المعلمة من فهم المادة العلمية في الكتاب المدرسي، وكيفية التعامل معها بقدر من النجاح، وهذا لا يعني أن الدليل قد بلغ مرتبة الكمال، أو أنه خال من الشوائب، إلا أنه كان لابد من أن ندفع بهذا الإنجاز إلى حيز الاختبار؛ لنتبين أوجه الجودة فيه وكذلك أوجه القصور أو النقص فتتجمع لدينا جراء ذلك اقترحات للتطوير والتحسين نفيد منها في طبعات لاحقة .

إن هذا الدليل يعتبر أحد الأدوات التي تعين المعلم والمعلمة على أداء رسالتهما، وعليك البحث والاطلاع على كل ما هو مفيد من المعارف من مصادر المعرفة التربوية والعلمية العديدة، وتدريب الطلبة على كيفية التعلم من الكتاب المدرسي ومن غيره من المصادر التعليمية .

لذا فإن إصلاح التربية والتعليم لن يتوقف عند إصدار الكتب المدرسية، وأدلة المعلمين فقط، بل سيتعداه إلى تدريب المعلمين، وإعادة تأهيلهم، وتوفير التوجيه، وتحديث أنماط التقويم، والاختبارات .

فإلى كل من شارك في إنجاز التطوير للمناهج؛ نتوجه بجزيل الشكر لما بذلوه من عمل في سبيل تجسيد أهداف المنهج وتطلعاته؛ خدمة لمستقبل أبنائنا وإسهاماً في بناء الإنسان والوطن.

أ.د. عبدالسلام محمد الجوفي
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

مـــقـــدمـــة الدليل

عزيزنا المدّرس . . .

عزيزتنا المدّرسة . . .

إذ يسرنا أن نضع بين يديك هذا الدليل لكتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي القسم العلمي، فإننا نرى ضرورة أن نوصيك ببذل الجهد الكبير للاستفادة منه بمصاحبة الكتاب المدرسي وكتاب التمارين.

ومن أجل أن تتحقق أهداف المادة في هذا الصف ، فإنه يجب السعي الحثيث لتقديم حصص ناجحة ، وهذه الحصص لن تتم إلا بتخطيط جيد . وهذا ما يسعى إليه هذا الدليل لمساعدتك لتحقيقه

لقد جاء تطوير مناهج الرياضيات للمرحلة الثانوية، وفق إستراتيجية تربوية شاملة وخطة واضحة المعالم. ومن أهم معالمها إنها تعطى أهمية كبيرة لأنشطة الطلبة وتعلمهم الذاتي من خلال حل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، إضافة إلى إعطاء أهمية خاصة لأدلة المعلمين ، وفق معايير متجددة حتى يتمكن المدرس من الاستفادة منها استفادة حقيقية في مجال تخطيط الدروس وتنفيذها .

وإذا كنا قد حرصنا على تقديم مادة علمية سليمة وسلسة وشيقة للطلبة في الكتاب المدرسي ، إضافة إلى التمارين والمسائل المتنوعة في كتاب التمارين ؛ فإننا أشدحرصاً على أن نقدم للمدرسين أفضل الطرائق، وأحسن الأساليب لتخطيط وتقديم حصص فاعلة ومثيرة ومحفزة للتعلم .

ولقد وضعنا في بداية هذا الدليل أهداف تدريس الرياضيات للمرحلة الثانوية عامة ، وللصف الثاني الثانوي بشئ من التفصيل من واقع وثيقة المنهاج ؛ ثم أتبعناها بثلاث مقدمات توضيحية حول منهجية واستخدام كل من الكتاب المدرسي وكتاب التمارين والدليل نفسه تساعدك على فهم المنهجية التي بُنيت عليها وكيفية استخدامها .

نسأل الله أن نكون قد وفقنا لإصابة أهدافنا .

والله من وراء القصد .

المؤلفون

المحتويات

المحتويات

المحتويات

أهداف تدريس الرياضيات في المرحلة الثانوية

يهدف تدريس الرياضيات في نهاية المرحلة الثانوية إلى :

١ – تعرُّف المتعلم على الأعداد المركبة ، وإجراء العليات عليها
٢ – تعرُّف المتعلم على مبادئ المنطق الرياضي .
٣ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات (الدوال) ، وأنوعها .
٤ – تعرُّف المتعلم على التطبيقات العكسية ، وإيجاد التطبيق العكسي لتطبيق معطى .
٥ – تعرُّف المتعلم على تركيب التطبيقات وإيجاده .
٦ – إجراء المتعلم للعمليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .
٧ – تعرُّف المتعلم على اللوغاريتمات وخواصها ، واستخدامها ، وتمييز الدالة الأسية واللوغاريتمية ورسمها .
٨ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم المتتاليات الحسابية والهندسية ، واستنتاج بعض قوانينها (الحد العام، المجموع)، واستخدامها .
٩ – تعرُّف المتعلم على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصها وحل مسائل عليها .
١٠ – تعرُّف المتعلم على نهاية بعض الدوال ، وحسابها ، وإيجاد مشتقاتها .
١١ – تعرُّف المتعلم على مشتقات بعض الدوال ، وحسابها باستخدام القواعد .
١٢ – حل المتعلم لمعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى والثانية .
١٣ – تعرُّف المتعلم على النظم الرياضية الجبرية ذات العملية الواحدة ، وذات العمليتين .
١٤ – تعرُّف المتعلم على المحددات ، والمصفوفات ، والمتجهات ، وإجراء العمليات عليها .
١٥ – استخدام المتعلم بعض خواص المصفوفات ، والمحددات ، في حل أنظمة من المعادلات الخطية .
١٦ – استنتاج المتعلم لبعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .
١٧ – إيجاد المتعلم لميل ومعادلة المستقيم في المستوى ، واستنتاج معادلة المماس .
١٨ – تعرُّف المتعلم على المتجهات وخواصها ، وإجراء العمليات عليها .
١٩ – إكساب المتعلم مفاهيم الدوران ، والتكبير ، والانعكاس تحليلياً وتركيب الدوران والتحاكي .
٢٠ – استنتاج المتعلم بعض معادلات القطوع المخروطية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .
٢١ – تعرُّف المتعلم على بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية والعلاقات بينها .
٢٢ – برهنة المتعلم لبعض مبرهنات الهندسة الفضائية ، واستخدامها في حل بعض التمارين والمسائل .
٢٣ – حساب المتعلم لمقاييس التشتت ، وبعض معاملات الارتباط .
٢٤ – برهنة المتعلم بعض قوانين ومبرهنات الاحتمالات ، واستخدامها في حل بعض المسائل.
٢٥ – تعرُّف المتعلم على حساب التكامل واستنتاج بعض قوانينه .
٢٦ – إجراء المتعلم لبعض التكاملات ، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .
٢٧ – استخدام المتعلم الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .
٢٨ – إكساب المتعلم بعض القيم العملية السليمة مثل الأمانة العلمية والنظام والترتيب والاعتماد على النفس من خلال منهجية علم الرياضيات .
٢٩ – تنمية روح البحث والابتكار لدى المتعلم ومتابعة التطورات العملية المعاصرة .
٣٠ – تنمية الذوق الجمالي والفني لدى المتعلم من خلال تناسق الرسومات والأشكال والبنى الرياضية المختلفة .
٣١ – تقدير المتعلم لدور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الأول ثانوي

يكون المتعلم بعد الإنتهاء من دراسة الصف الأول ثانوي قادراً على :

١ – التعرُّف على مبادئ المنطق الرياضي .

٢ – التعرُّف على التطبيقات ، وأنواعها (الثابت ، المحايد ، المتباين ، الغامر)

٣ – إجراء العليات على القوى (بأسس صحيحة وكسرية) ، واستنتاج قوانينها .

٤ – التعرُّف على الحدوديات ، وخواصها ، وإيجاد أصفار الحدوية .

٥ – التعرف على النظام ذي العملية الثنائية ، وخواصه (الزمرة) .

٦ – حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات متغير أو متغيرين .

٧ – حل معادلات من الدرجة الثانية ذات المتغير الواحد بطريقة القانون، واستخدام المميز لمعرفة نوع جذري المعادلة.

٨ – حل جملة المتراجحات من الدرجة الأولى بيانياً .

٩ – حل متراجحة من الدرجة الثانية ذات متغير واحد .

١٠ – إيجاد إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، وبُعد نقطة معلومة عن مستقيم معلوم .

١١ – إيجاد ميل ومعادلة المستقيم في المستوى .

١٢ – اكتساب مفاهيم الانعكاس ، والانسحاب ، والدوران تحليلياً (بإستخدام قواعد جبرية) .

١٣ – ذكر شروط التوازي والتعامد ، وإيجاد العلاقة بين مستقيمين في مستوى .

١٤ – التعرف على المتجهات ، وخواصها وإجراء العمليات عليها .

١٥ – استنتاج بعض العلاقات الهامة للنسب المثلثية ، وحل المثلث القائم .

١٦ – التعرُّف على المجموع والرمز مجـ وخواصه .

١٧ – إيجاد مقاييس النزعه المركزية ، (الوسط، الوسيط ، المنوال) .

١٨ – إيجاد مقاييس التشتت (المدى ، التباين ، الإنحراف المعياري) .

١٩ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .

٢٠ – تنمية بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والموضوعية واحترام اراء الآخرين .

٢١ – إدراك دور الرياضيات في خدمة ودراسة فروع المعرفة الأخرى .

٢٢ – تنمية ذوق جمال وتناسق الرسوم والأشكال البيانية والبُنى الرياضية المختلفة .

٢٣ – تكوين البصيرة الرياضية على فهم الرياضيات بأنها فكرة دائم التطور .

٢٤ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في تطور علم الرياضيات .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثاني الثانوي (العلمي)

بعد الانتهاء من دراسة منهاج الرياضيات للصف الثاني الثانوي يكون المتعلم قادراً على :

١ – التعرُّف على النظام ذي العمليتين وخواصه (الحقل) .

٢ – التعرُّف على الخصائص الأساسية لحقل الأعداد الحقيقية .

٣ – التعرف على القيمة المطلقة ، وخواصها ، وحسابها .

٤ – التعرُّف على المصفوفات ، والمحددات، وإجراء العمليات عليها .

٥ – استخدام بعض خواص المصفوفات، والمحددات، في حل انظمة من المعادلات الخطية .

٦ – التعرُّف على بعض الدوال ، وإيجاد الدالة العكسية ،وإيجاد تركيب دالتين.

٧ – التعرُّف على مفهوم اللوغاريتم وخواصه ،وإستخدامه، والتمييز بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية ورسم منحنى كل منهما.

٨ – التعرُّف على مفاهيم الدائرة في المستوى الإحداثي.

٩ – استنتاج معادلة الدائرة وإيجاد معادلة المماس لدائرة، وحساب طوله من نقطة خارجة عنها.

١٠ –التعرُّف على بعض المفاهيم الأساسيةفي الهندسة الفضائية والعلاقات بين المستقيمات والمستويات في الفراغ.

١١ – برهنة بعض المبرهنات الهندسية الفضائية .

١٢ – استنتاج بعض العلاقات للنسب المثلثية ، وحل المعادلات المثلثية .

١٣ – التعرُّف على على مفاهيم المتتالية الحسابية والهندسية، وبعض قوانينها (الحد العام، مجموعهما) .

١٤ – التعرُّف على مفهوم النهاية، وحساب نهايات بعض المتتاليات والدوال.

١٥ – التعرُّف على مفهوم الاشتقاق واستنتاج بعض قوانينه.

١٦ – حساب مشتقات بعض الدوال.

١٧ – التعرُّف على مفاهيم الاتصال ومبرهنات الاتصال واستخدامها في حل بعض المسائل على الدوال.

١٨ – التعرُّف على مفاهيم الإرتباط ، والانحدار، وحساب معامل الارتباط.

١٩ – التعرُّف على الاحتمال وحسابه.

٢٠ – استخدام الآلات الحاسبة لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية.

٢١ – تنمية بعض القيم كالدقة والنظام والترتيب والصبر واحترام آراء الآخرين.

٢٢ – الرغبة في الاستزادة من الرياضيات والاستمرار في دراستها.

٢٣ – تقدير قيمة الرياضيات واسهامها في خدمة المواد الأخرى .

٢٤ – تذوق جمال وتماسك البناء الرياضي.

٢٥ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في وضع أساسيات العلوم الرياضية .

أهداف تدريس الرياضيات للصف الثالث الثانوي (القسم العلمي)

يكون المتعلم بعد الانتهاء من دراسة الصف الثالث الثانوي قادراً على :

١ – التعرُّف على حقل الأعداد المركبة، وإِجراء العمليات عليها .
٢ – حل المعادلات من الدرجة الثانية على الأعداد المركبة .
٣ – التعرُّف على مفاهيم التباديل والتوافيق وخواصهما وحل مسائل عليهما .
٤ – إيجاد مفكوك ذي الحدين وتعيين أي حدٍ في المفكوك وحساب قيمته .
٥ – التعرُّف على القطوع المخروطية وتعيين معادلات كل منها .
٦ – التعرُّف على الزاوية الزوجية والمساقط، وبرهنة بعض المبرهنات المتعلقة بالمساقط على المستوى .
٧ – برهنة بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمال .
٨ – التعرُّف على بعض المفاهيم الأساسية للاشتقاق ومبرهناته .
٩ – ايجاد مشتقات بعض الدوال .
١٠ – التعرُّف على مفهوم التكامل .
١١ – إجراء بعض التكاملات، واستخدام حساب التكامل في حل بعض المسائل الرياضية .
١٢ – استخدام الآلات الحاسبة والحاسوب لحل بعض المسائل الحسابية والتطبيقية .
١٣ – إدراك دور الرياضيات في خدمة ودراسة فروع المعرفة الأخرى .
١٤ – تنمية بعض القيم العلمية السليمة كالأمانة العلمية والدقة والنظام والترتيب والموضوعية واحترام آراء الآخرين .
١٥ – تنمية حب الرياضيات وتعزيز اتجاهات التعلم الذاتي وتنمية روح الكشف والإبتكار والبحث .
١٦ – الرغبة في الاستزادة من الرياضيات والاستمرار في دراستها .
١٧ – تذوق جمال وتماسك البناء الرياضي .
١٨ – تقدير دور العلماء العرب والمسلمين في وضع أساسيات العلوم الرياضية .

جدول توزيع الحصص على الوحدات

م	عنوان الوحدة	عدد الحصص
١	الأعداد المركبة	٢٨
٢	مبدأ العدّ ومبرهنة ذات الحدين	٢٠
٣	القطوع المخروطية	٢٥
٤	الهندسة الفضائية	١٤
٥	الاحتمالات	٢٩
٦	التفاضل	٣٨
٧	التكامل	٤٢
	إجمالي عدد الحصص	١٩٦ حصة

$\ni$	عنصر في / ينتمي إلى
$\not\ni$	ليس عنصراً في / لا ينتمي إلى
$\supset$	مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز $\supseteq$)
$\not\supset$	**ليست** مجموعة جزئية من (وأيضاً الرمز $\not\supseteq$)
{ ا ، ب ، جـ ، . . . }	حاصرتا المجموعة
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\emptyset$ ، { }	المجموعة الخالية (فاي)
سَ	متممة المجموعة س
س / ص = س − ص	الفرق بين المجموعتين س، ص.
س × ص	حاصل ضرب المجموعتين س، ص.
ط	مجموعة الأعداد الطبيعية .
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة (ومنها ص+ ، ص−)
ك	مجموعة الأعداد الكسرية
ن	مجموعة الأعداد النسبية (ومنها ن+ ، ن−)
ح	مجموعة الأعداد الحقيقية (ومنها ح+ ، ح−)
] ا ، ب [	الفترة المغلقة ا ، ب .
[ا ، ب]	الفترة المفتوحة ا ، ب .
[ا ، ب [	الفترة نصف المفتوحة من جهة ا .
] ا ، ب]	الفترة نصف المفتوحة من جهة ب .
π	النسبة التقريبية (باي) .
$<$	أكبر من
$>$	أصغر من
$\leqslant$	أكبر من أو يساوي
$\geqslant$	أصغر من أو يساوي
هـ	الأساسي الطبيعي (عدد حقيقي غير نسبي)
لط	لوغاريتم العدد الطبيعي
$=$	يساوي .
$\not>$	ليس أصغر من

$\not>$	ليس أكبر من .
$\neq$	لا يساوي
$//$	يوازي
$\not\parallel$	لا يوازي
$\perp$	عمودي على
$\not\perp$	ليس عموديا على
$\approx$	يساوي تقريباً
$\equiv$	يكافئ
$\sim$	يشابه
$\cong$	يطابق
$\because$	بما أن
$\therefore$	إذن
$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
$\lvert \text{أ ب} \rvert$	طول القطعة أ ب .
$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع الذي بدايته النقطة أ .
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب (الذي يمر بالنقطتين أ ، ب) .
$\propto$	يتناسب
مجـ	المجموع
$\triangle$	المثلث
$\measuredangle$ أ ب جـ	الزاوية أ ب جـ ، أو الزاوية التي رأسها ب .
ق ($\measuredangle$ أ ب جـ)	قياس الزاوية أ ب جـ .
جا	جيب الزاوية
جتا	جيب تمام الزاوية
ظا	ظل الزاوية
ظتا	ظل تمام الزاوية
قا	قاطع الزاوية
قتا	قاطع تمام الزاوية
[س]	صحيح س أو أكبر عدد صحيح أصغر من س
$\pm\infty$	سالب أوموجب ما لا نهاية
$\lvert\ \ \rvert$	القيمة المطلقة

$\forall$	لكل
$\exists$	يوجد على الأقل
$\sim$ أ	نفي أ
$\Leftarrow$	يقتضي
Δ ، δ	دلتا
حـ$_ن$	الحد النوني للمتتالية (الحد العام)
$\langle$ حـ$_ن$ $\rangle$	متتالية حسابية أو هندسية حدها العام حـ$_ن$
ε	أبسِلُون
$\wedge$	(و) رمز العطف
$\vee$	(أو) رمز الفصل
ت$^{-1}$	التطبيق العكسي للتطبيق ت
ت$_1$ $\circ$ ت$_2$	تركيب تطبيقين ت$_1$ ، ت$_2$
$\sqrt[ن]{أ}$	الجذر النوني للعدد أ
حـ	حدودية
ط*	ط / { ٠ }
ص*	ص / { ٠ }
ن*	ن / { ٠ }
ح*	ح / { ٠ }
$\overleftarrow{أ ب}$	المتجه أ ب
($\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$)	الزاوية الموجهة ضلعها الابتدائي $\overleftarrow{و أ}$ وضلعها النهائي $\overleftarrow{و ب}$
$\overleftarrow{ف}$ (س ، ص)	المتجه القياسي
$\overleftarrow{٠}$	المتجه الصفري
$\vert \overleftarrow{ف} \vert$	طول المتجه
$\overleftarrow{س}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور السيني الموجب
$\overleftarrow{ص}$	متجه الوحدة في اتجاه المحور الصادي الموجب
$\overleftarrow{ف}_1 \bullet \overleftarrow{ف}_2$	الضرب الداخلي لمتجهين
ك $\bullet$ $\overleftarrow{ف}$	ضرب متجه بعدد حقيقي
نهــــا	نهاية
دَ (س)	مشتقة الدالة د (س)
ر	رو (معامل ارتباط سبيرمان)

عند إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية، رأى المؤلفون تبني منهجية تواكب استراتيجية مناهج هذه المرحلة التي استندت إلى السياسة التربوية التعليمية للدولة وإلى الأسس العامة للتربية ، ومن جملة ما ارتكزت عليه منهجية التأليف مراعاة الطرائق والأساليب كما ورد في وثيقة المناهج من ناحية ، وتراعي النمو العقلي والنفسي للطالب من ناحية أخرى ، وكل ذلك مبنيٌّ على التسلسل المنطقي والعلمي للمادة التعليمية، ولهذا ظهرت هذه المعالم واضحة في كتب الرياضيات لهذه المرحلة ، من أهمها :

١ – الحرص على كتابة المادة التعليمية بلغة مبسطة وواضحة مع مراعاة الدقة والصرامة العلمية، والاعتناء بتوحيد المصطلحات والرموز فيها ، ودعم ذلك بالرسوم التوضيحية والتسلسل المترابط ، وهذا يخدم في الوقت نفسه توليد الحافز للتعلم الذاتي، إضافة إلى التعزيز بالتدريبات والأنشطة والمداخل التعليمية المناسبة.

٢ – عرض المادة من خلال مداخل وأساليب تدريسية تتفق مع تسلسل المادة ومع النمو العقلي للطالب ، وقد قل العمل بالمحسوسات وشبه المحسوسات، واقترب أكثر فأكثر إلى العمليات التجريدية ، إذ على الطالب أن يمارس عمليات عقلية أعلى مما سبق أو بمستوى عالٍ ، منها : التصنيف، والمقارنة، وتكوين المفاهيم والعلاقات، والتجريد والتعميم، والتفسير والترجمة . والطالب في هذه المرحلة يمتلك قدرات عقلية تساعده على استخدام أسلوبي التفكير الأستقرائي والاستنتاجي ، والطريقتين التحليلية والتركيبية مما يساعد على حل المشكلات بشكل أعمق، وبما ينمي لدى الطلبة جوانب الإبداع والابتكار.

٣ – جرت ـ قدر الإمكان ـ محاولة لتوظيف المادة التعليمية ، في مواقف كثيرة ، وما التدريبات العملية والأنشطة والمسائل التطبيقية إلا نوع من تطبيق مبدأ توظيف المادة التعليمية ، كما إن ذلك يتضمن بشكل أو آخر تنمية الجانب الوجداني لدى الطلبة ، إذ ينمي ذلك كثيراً من الميول والاتجاهات والقيم والعادات الإيجابية وتنمية الانتماء . والجانب الوجداني يتحقق أيضاً من خلال تقديم المواضيع بشكل منسق إلى جانب عرض بعض جماليات المادة هنا وهناك .

٤ – مراعاة الفروق الفردية حيث عرضت المادة بتسلسل من خلال قدرٍ كافٍ من الأمثلة ، والتنويع في التمارين والمسائل ، وقد أخذ ذلك تدريجاً متصاعداً في الصعوبة. وتخدم التمارين والمسائل في كل بند تثبيت المادة التعليمية، كما تهدف إلى معالجة الصعوبات والأخطاء الشائعة .

٥ – تقديم المفاهيم بشكل دقيق وربطها بالمصطلحات والرموز المناسبة ، دون المبالغة في دقتها الرياضية ومراعاة الربط بالتطبيقات دون خلل في تعميماتها المجردة . وقد بنيت مراحل تقديم المفاهيم عموماً على ثلاث خطوات هي :

أ) تحديد خصائصها المشتركة ، وهذه عملية تصنيف وتجريد .

ب) توظيف وتطبيق هذه الخصائص على عناصر أخرى تمثل المفهوم ، وهذه عملية تجسيد وعملية تعميم.

جـ) فصل عناصر المفهوم عن غيرها لمفهوم آخر ، وهذه عملية تصنيف وتمييز ، بل عملية تعميق، ومن ذلك تتم صياغة التعاريف بعناية .

٦ – معالجة البرهنة من خلال الحصول على عدد من المبرهنات وبرهانها وحل بعض التمارين والمسائل عليها، ويتم ضمن ذلك تحديد المعطيات (المقدمات) والمطالب (النتائج) وقد تم الاهتمام في هذا المجال بتطوير أسلوب الحصول على المبرهنة وصياغتها وأسلوب الحصول على فكرة البرهان وعرضه . وعُني هنا بأساليب التفكير الاستقرائي والاستنتاجي إلى جانب الطريقتين التركيبية والتحليلية .وقد ظهرت البرهنة لأول مرة في الصفوف (٧– ٩) من مرحلة التعليم الأساسي وقد سارت فكرة البرهنة في تلك المرحلة على النحو التالي :

أ) إعطاء الأسباب والتعليلات لبعض الخطوات ، وقد مُهّد لذلك في الصفوف الدنيا من مرحلة التعليم الأساسي واستمر في الصفوف العليا من تلك المرحلة .

ب) فهم البرهان والخطوات المنطقية (كان ذلك في الصف السابع) .

جـ) إعادة البرهان بتسلسل خطواته وتفسيرها ، وهذا الأمر مشترك في الصفين السابع والثامن .

د) إقامة البرهان بشكل ذاتي ، حيث يتمكن الطالب بنفسه من إقامة برهان بعض النتائج والمسائل ، ويبدأ هذا من الصف الثامن .

وفي المرحلة الثانوية يتم الإرتقاء بالبرهنة من حيث ألأساليب والأفكار ،وفي هذا المجال لا بد من التأكيد على نموذج عرض البرهان ، وكيفية رسم الأشكال والأعمال المساعدة .

٧ – إعطاء أهمية للمهارات بشكل موازٍ لأهمية تقديم المفاهيم ومعالجة المبرهنات ، بحيث لا يطغى واحد على الآخر. وقد اهتم بتوفير متطلبات تكوين المهارات على النحو التالي :

أ) القدرة على تعليل وتفسير الخطوات لأي أداء ، ويمثل ذلك الفهم .

ب) الحصول على نتائج صحيحة ودقيقة ، ويمثل ذلك القدرة (وهي مرحلة سابقة للمهارات) .

جـ) إنجاز العمل المطلوب بشكل صحيح وفي الوقت المحدد بالدقة المطلوبة ، ويمثل هذا تمام المهارة .

تفسر المهارة غالباً بأداء المهام بالدقة المطلوبة في الوقت المحدد لها ؛ بمعنى آخر إن للمهارة جانبين هما الدقة والسرعة. والعناية بالمهارات هو امتداد لما تقدم في الصفوف السابقة ، إلا أنه يمتد ويتوسع إلى مهارات أعلى ، وأداءات أكثر دقة ، وآليات أكثر تعقيداً أو أكثر خطوات .ومن المهارات التي يجب أن يتقنها طالب هذه المرحلة استخدام الآلات الحاسبة واستخدام الجداول والرسوم البيانية وتفسيرها . . . وما شابه ذلك.

٨ – الاهتمام بحل المسائل ، فهو الأداة الأساسية لتنمية أساليب التفكير عامة ، وأساليب التفكير الرياضي خاصة. ويعتبر ما سبق تقديمه في مرحلة التعليم الأساسي من شرح وتوظيف لاستراتيجية حل المسألة هو الأساس للاستمرار في هذا المجال ، والذي قد يمتد من حل المسائل اللفظية إلى برهنة في كل من الجبر والهندسة ، بل وفي كافة الفروع والمجالات الرياضية. ويتمثل حل المسألة في الخطوات التالية :

أ) حصر المعطيات .

ب) تحديد المطلوب .

جـ) وضع الخطة ، ويتم فيها استعادة المفاهيم والتعميمات في المسألة ، وما يمكن من مفاهيم وتعميمات تساعد على الحل، ومن ذلك تحديد العلاقات المتضمنة في المسألة والعمليات اللازمة

للحل ، ويشمل ذلك إعادة الصياغة والتوضيح بالأشكال التي تعكس المعطيات وتصور أي عمل مساعد ، وفي هذه الخطوة يتم تنمية الابداع والابتكار .

د) تنفيذ الحل : ويتم فيه تنفيذ خطة الحل ، ووضع الخطوات في تسلسل منطقي مع تفسيرها وتعليلها ، وتدارك الأخطاء ، إذ يمكن اكتشاف خلل في الخطة أثناء تنفيذها ، أو يمكن اختصارها أو ظهور حلول أخرى أفضل أو أوضح ، وفي نهاية هذه الخطوة تتم صياغة جملة الجواب .

هـ) مراجعة الحل (التحقق من صحة الحل) : وهو مطلب تربوي، أكثر من كونه علميًا ، إذ يساعد على تنمية القدرة على النقد الذاتي، حتى يتمكن الطالب من تلافي أخطائه بنفسه .

وانطلاقاً مما سبق فإننا نرى أن يكون استخدام الكتاب المدرسي وفقاً لما يلي :

أولاً : أُعد الكتاب المدرسي في الأساس لاستخدام الطالب ، إلا أن المدرس يجد فيه المادة التعليمية الضرورية التي تقدم للطالب ، كما يجد فيه أسلوباً لعرض هذه المادة وتسلسلها ، ونماذج لأساليب التقويم . إن المنهاج ينعكس انعكاساً تاماً في الكتاب ، وبذلك فالكتاب المدرسي خير معين للمدرس في تخطيط وتنفيذ دروسه اليومية . وهذا لا يعني أن يهمل المدرس الاستعانة بالدليل ، فالدليل مكمل للكتاب المدرسي وكذلك كتاب التمارين . كما يوصي المدرس بالمراجع العلمية والتربوية الأخرى ، والتي يمكن أن تساعده في تطوير أساليبه التدريسية وتعمق لديه المادة العلمية ، وقد أوردنا عناوين بعض المراجع في الدليل في نهاية كل وحدة.

ثانياً : يعتبر الكتاب المصدر الرئيس للتعلم ، وقد شكل بحيث يساعد الطالب على التعلم والدراسة الذاتية ، ولذا على المدرس أن يراعي الاستعانة بالكتاب المدرسي في كل حصة دراسية ، فيعطي الطلبة تكليفاً ليس فقط لحل التمارين والمسائل ، بل لمراجعة المادة المكتوبة من حيث الشرح والتعاريف والتعليمات والأمثلة المحلولة ، كما يطلب منهم أداء التدريبات والأنشطة خارج الصف ، إذا كان وقت الحصص لايستوعب ذلك ، وكل هذا يساعد على تشكيل شخصية الطالب العملية . ومما سبق نرى أن مفهوم الكتاب المدرسي كمجموعة تمارين تقدم للطالب مفهوم خاطئ، وللاسف لازال يمارسه كثير من المدرسين دون إدراك .

ثالثاً : يقدّم الكتاب المدرسي للطالب نماذج مثالية للحل ، والتي على الطالب أن يتبعها ويقلدها، ولذا ليس بالضرورة أن يعيد المدرس حل أمثلة الكتاب كما هي ثم يطلب نقلها إلى الكرسات ، بل عليه أن يشرح ما غمض في الكتاب وأن يقدم أمثلة أخرى مشابهة يختارها من تمارين الكتاب أو من كتاب التمارين أو يعدها بنفسه .

رابعاً : يقوم المدرس بتقسيم بنود كل وحدة حسب عدد الحصص المتاحة ، وبذلك يخطط كل حصة بحيث يمكن أن تغطى المادة التعليمية وأمثلتها وتمارينها ، ويحدد ضمن ذلك الواجبات الصفية والمنزلية بما يخدم أهداف الحصة الدراسية .

هذا كل ما يتعلق بالكتاب المدرسي منهجيةً واستخداماً وقد قدم بشكل مختصر وعلى المدرس التوسع في ذلك من المراجع المناسبة .

من ضمن استراتيجات إعداد المواد التعليمية للمرحلة الثانوية، إعداد كتب الأنشطة والتمارين لكل مادة، ولهذا فقد جاء إعداد كتاب التمارين لمادة الرياضيات تحقيقاً لأهداف تعليمية مكملة للكتب المدرسية . وقد روعي عند إعداد كتاب التمارين أن يحتوى على ما يلي :

١ – إضافة إلى تمارين ومسائل كل بند في الكتاب المدرسي فقد تم إعداد بعض التمارين والمسائل التي وضعت تحت رقم البند المعني ، وإن كانت تمارين الكتاب المدرسي تغنى عن هذه التمارين، إلا أن ما ورد في كتاب التمارين هو زيادة التمرن، واحتياطي لمن يريد الاستزادة من التمارين بغرض التمكن من المادة .

٢ – وضعت في نهاية كل وحدة مجموعة من التمارين العامة والمسائل التي تربط محتوى الوحدة ككل، ولتساعد على فهم اعمق بين بنودها ونظرة شمولية بين مفاهيمها ويجعلها أكثر ثباتاً في أذهان الطلبة .

٣ – اختبار الوحدة، وهو متناغم مع اختبار الوحدة الذي في الدليل، قد وضعا وفقاً لأهداف الوحدة .

واستناداً لماسبق ، فقد خُطِّط أن يستخدم كتاب التمارين على النحو التالي :

أولاً : يمكن الاكتفاء بتمارين ومسائل الكتاب المدرسي بعد كل بند ، ويستعان بما في كتاب التمارين فقط وقت الضرورة ، أو لإعداد بعض الاختبارات أو خطوات التقويم نهاية كل بند .

ثانياً : نهاية كل وحدة يكلّف الطلبة بحل عدد كاف من التمارين العامة والمسائل ، يقوم المدرس باختيارها بدقة، ويمكن اعتبارها مراجعة عامة للوحدة

ثالثاً : يطلب المدرس من الطلبة حل اختبار الوحدة كواجب منزلي ، وقبل يومين أو ثلاث من الاختبار الذي سيتم إجراؤه .

وبالتالي يتيح فرصة كافية للطلبة للمراجعة والاستفسار عن أي صعوبات تواجههم .

إن الهدف الأساسي لكتاب التمارين هو تمكين الطلبة من المادة وتثبيتها وتعميقها لديهم.

لقد تبنى مؤلفو أدلة المعلمين لكتب الرياضيات للمرحلة الثانوية منهجية تنبع من منهجية تأليف الكتب نفسها وتتواكب مع استراتيجية مناهج هذه المرحلة؛ ولهذا جاءت الأدلة مكملة للكتب وتشرحها وتساعد المدرس في تخطيط وتنفيذ الحصص الدراسية، وتراعي خصوصية المواضيع ولا تلغي إبداع المدرس في سلوكه التدريسي، الذي يمكنه من إبراز شخصيته مع أخذه بعين الإعتبار خصوصيات طلبته. ومن هنا ظهرت الملامح التالية في أدلة كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية والتي يجب الأخذ بها عند استخدام تلك الأدلة :

١ – الحرص على أن تخطط جميع الوحدات ، بل وجميع الدروس ، إلا أنه لم يرد تفصيل بخطوات الحصص ، وبهذا وضع تشكيل كل وحدة على النحو التالي :

أ) جدول بتوزيع حصص الوحدة إلى دروس حددت عدد حصصها كمقترح مناسب ، وعلى المدرس ألا يزيد كثيراً أو ينقص كثيراً عن هذا العدد المقترح من الحصص حتى لا تنتهي السنة الدراسية وهو لم يغطِ المقرر الدراسي .

ب) أهداف الوحدة عامة ، وهو ما يخضع للقياس في اختبار الوحدة نهاية تدريسها. وهذه الأهداف مشتقة من أهداف تدريس الرياضيات لهذا الصف ، كما أنها منسجمة - إن لم تكن متطابقة - مع وثيقة المناهج لكل وحدة .

جـ) مقدمة للوحدة وتحتوي على فكرة عامة لمكونات الوحدة الدراسية، وعلى لمحة تاريخية ، ومفاهيم وتعميمات الوحدة، وبعض الأخطاء الشائعة إذا دعت الضرورة لذكرها وسبل علاجها ، وبعض التوجيهات التدريسية العامة ، وكل ذلك يشكل خلفية علمية للمدرس فقط ، ولا يجوز التطرق له مع الطلبة في الحصص الدراسية .

د) أهداف لكل درس، مع ذكر العدد المقترح للحصص ، كما تم التعرض لتنفيذ الدرس بتحديد عنوان عام لكل حصة دراسية، ثم جاء تقويم الدرس ، وبعد ذلك إرشادات وإجابات التمارين والمسائل .

هـ) كما سبقت الإشارة، فإن اختبار الوحدة الذي في كتاب التمارين يُعطى كواجب منزلي، وتهيئة لاختبار الوحدة الحقيقي الذي في الدليل، ويفضل أن يعد المدرس اختباراً آخراً وفقًا ذلك النموذج وبما يحقق الأهداف المرسومة ، ثم يقوم المدرس بتحليل إجابات الطلبة على أن تتم معالجة الأخطاء والأهداف التي لم تتحقق بشكل أو آخر .

٢ – كل ما قدم للمدرس في الأدلة ما هو إلا مقترحات ، ولكنها مواكبة للمادة المعدة في الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ، ولهذا على المدرس أن يكيف هذه المقترحات ضمن الواقع التدريسي وفق ظروف الصف، وبما يتيح له الإبداع دون الخروج عن أهداف المنهاج. ولهذا نوصي المدرس بأن يقرأ الدليل قراءة متمعنة ، ثم يخطط كل حصة على حدة بأهدافها وخطواتها التمهيدية والمادة التعليمية التي ربما يعد لها أمثلة جديدة من عنده، كما يقدم لها تقويماً مناسباً يعده بنفسه مستعيناً بالتقويم الذي في الدليل لكل بند .

٣ – على المدرس أن يعمل بشكل مستمر على تثبيت وتطوير المعارف والمهارات السابقة ، وأن يخطط عملاً صفياً كلما أمكن ، وخاصة في الحصص المحددة للتمارين ، كما يفضل التقويم في نهاية كل درس حتى يطمئن إلى أن أهدافه تتحقق أولاً بأول .

٤ – أن يستخدم الكتاب المدرسي استخداماً فاعلاً كما قد وضح ذلك في منهجية إعداد الكتب المدرسية وكيفية استخدامها ، وأن يوظفه بشكل يومي ، ولا يقتصر استخدامه ـ كما تعود كثير من المدرسين ـ على تحديد الواجبات والتمارين .

٥ – مراعاة الفروق الفردية أمر هام ، يجب أن يعطيه المدرس عناية كبيرة ، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار بعض الجوانب ، منها تسلسل المادة ، وتقديم الأمثلة المتدرجة الأقرب فهماً ، واستخدام الوسائل إن تطلب الأمر وإن لم تذكر في الدليل ، ويتم إعطاء الواجبات الصفية والمنزلية بشكل متدرج في الصعوبة وبحيث يشعر الطلبة المتوسطون بشئ من تحقيق الذات . وقد يتطلب هذا الأمر من المدرس أن يعد بنفسه أمثلته وتمارينه، وهنا نوجه نظره إلى كتاب التمارين. وعلى المدرس أن يضع من ضمن أهداف الدرس: إعداد التمارين العلاجية لضعفاء الطلبة والتمارين التدريبية للمتوسطين منهم والتمارين والمسائل الإثرائية للمتقدمين .

٦ – على المدرس أن ينفذ بشكل أو آخر كل ما يشار إليه من أساليب لتنمية القدرات العقلية، ولذا ربما يكلف المدرس طلابه بالمزيد من العمل خارج الصف ، مثل إنجاز بعض التدريبات أو تنفيذ بعض الأنشطة ، وبما يتيح لهم ربطاً مستمراً بالمادة مع مراعاة تطبيقاتها الهامة في الحياة .

٧ – لم يظهر حل المسألة بشكل بارز في الكتب المدرسية المعينة، إلا في البرهنة ، ولهذا على المعلم ، وكلما أتيحت له الفرصة ، أن يعيد ما تعلمه الطلبة في مرحلة التعليم الأساسي من استراتيجية حل المسألة ، وأن يربطها دائماً بالبراهين المعروضة والمطلوب القيام بها .

٨ – ينصح المدرس بأن يوجه طلبته إلى تنفيذ حلول التمارين والمسائل بقوالب وأشكال نموذجية من حيث العرض الكتابي، يتبعونها دائماً مع العناية بنظافة الحل ونظاميته وجمال عرضه .

وبعد عرض المنهجيات الثلاث لإعداد الكتاب المدرسي وكتاب التمارين ودليل المعلم ، فإن على المدرس تتبع هذه المنهجيات في عمله التدريسي حصة حصة وبنداً بنداً ، ويحرص على تطبيقها في الممارسة الفعلية للتدريس .

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
١ – ١	العدد المركب	٣
١ – ٢	جمع وطرح الأعداد المركبة	٣
١ – ٣	ضرب وقسمة الأعداد المركبة	٦
١ – ٤	الصيغة القطبية للعدد المركب	٥
١ – ٥	القوى والجذور	٦
١ – ٦	حل المعادلة من الدرجة الثانية	٣
١ – ٧	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	٢٨

أهداف الوحدة

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يعرِّف مفهوم العدد التخيلي (ت) وقواه .

٢ – يتعرَّف الصيغ المختلفة للعدد المركب .

٣ – يكتب الأعداد المركبة كزوج مرتب ، ويمثلها بنقاط في المستوى .

٤ – يجمع ويطرح الأعداد المركبة، ويتعرّف على خواص عمليتي الجمع والطرح .

٥ – يوجد مرافق العدد المركب .

٦ – يضرب ويقسم الأعداد المركبة، ويتعرف خواص عمليتي الضرب والقسمة

٧ – يوجد مقياس وسعة العدد المركب .

٨ – يحوِّل العدد المركب من الصيغة القطبية إلى الصيغة الجبرية ، والعكس .

٩ – يتعرَّف مبرهنة دي موافر

١٠ – يطبق مبرهنة دي موافر في إيجاد القوى ، والجذور للأعداد المركبة .

١١ – يحل معادلة الدرجة الثانية بمتغير واحد في مجموعة الأعداد المركبة .

المقدمة

تعرفنا في المراحل السابقة على بعض المجموعات العددية وقمنا بتوسيعها من مجموعة الأعداد الطبيعية (ط) إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) مروراً بمجموعتي : الأعداد الصحيحة (ص) والنسبية (ن)، إلا أن هذا التوسع لا يلبي حاجتنا لحل المعادلات من الدرجة الثانية بمتغير واحد كالتالي :

أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، ذات المميز ب^{٢} – ٤ أ جـ < ٠ ، الأمر الذي استدعى توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة جديدة تسمى « مجموعة الأعداد المركبة » حيث أن الأعداد الحقيقية مجموعة جزئية منها ، وبذلك يكون لمثل هذه المعادلات حل .

ويأتي تناول مجموعة الأعداد المركبة في هذه الوحدة من خلال تعريفها وتقديم أهم خواصها ، وتمثيلها هندسياً على مستوى الإحداثيات ، وإجراء العمليات عليها، كما يتم التعرض لدراسة القوى والجذور بواسطة مبرهنة دي موافر وبعض التطبيقات المختلفة على هذه المبرهنة .

لمحة تاريخية

كان الخوارزمي (٧٨٠ – ٨٥٠م) يعرف أن هناك حالات يستحيل فيها إيجاد قيمة المجهول (الكميات التخيلية) ، وهذه الحالات هي حل المعادلات من النوع س^{٢} + ١ = ٠ ، س^{٢} + ٤ = ٠ ، س^{٢} + س + ١ = ٠ ، لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب وقد سمَّى الخوارزمي هذه "الحالة المستحيلة" ، وبقيت معروفة بهذا الأسم بين علماء الرياضيات، حتى أحرز كاردان (Kardana) (١٥٤٥م) بعض التقدم لإدخال الأعداد المركبة في حل المعادلات من الدرجة الثالثة . ثم جاء بعده البرت جيرارد (Albert Girard) (١٦٢٩م) وأدخل بعض الرموز مثل $\sqrt{-١}$ ، حيث أكد أفكار كاردان من خلال التعميم أن كل معادلة من الدرجة ن تقبل ن من الحلول الحقيقية أو المركبة .

وفي القرن السابع عشر أطلق ديكارت (DiKart) على هذه الأعداد اسم « الأعداد الخيالية » .

بعد ذلك جاء رينيه ديسكارتس (Rene Descartes) (١٦٣٧م) وأدخل المصطلحين « حقيقي » ، و « تخيلي » على أجزاء العدد المركب .

وبعد أن برهن دي موافر (De Moivre) (١٦٦٧ – ١٧٥٤م) مبرهنته المشهورة سنة ١٧٣٨م، توصل أويلر (Euler) (١٧٠٧ – ١٧٨٣م) إلى تحقيق العلاقات الموجودة بين عدة مبرهنات مختلفة الأصل مثل استخراج الجذور التربيعية لعدد مركب ، وتقسيم جاوس (Gauss) ، واللوغاريتمات والدالة الأسية والدوال المثلثية، واستطاع أن يحصر التناقضات الحادة التي أثارها هذا المفهوم بين العلماء بشكل جهري بنشره (١٧٤٨م) مبرهنة كاملة حول لوغاريتمات وأسس الأعداد المركبة ، وعرَّف الكمية التخيلية بأنها الكمية التي إذا ضُربت في نفسها كان الناتج مقداراً سالباً ، وأعطى عدداً من الأمثلة لتوضيح ذلك وركز كارل جاوس (Gauss) (١٧٧٧ – ١٨٥٥م) على دراسة الكميات التخيلية وخواصها وبرهن (١٧٩٩م) على أن كل معادلة جبرية لها جذر على صورة (س + ت ص) ، ويُعد آرجاند (Argand) (١٨٠٦م) وجاوس (Gauss) (١٨٣١م) ، هما اللذان جعلا هذه التوزيعات ذات أهمية بالغة لفهم الأعداد المركبةمن خلال التمثيل الهندسي لتلك الأعداد، حيث عرَّف جاوس (١٨٣١م) الأعداد المركبة على أنها أزواج مرتبة من الأعداد الحقيقية .

وفي القرن التاسع عشر قدّم العلماء بعض التعديلات على الطريقة المقترحة للأعداد المركبة وقاموا بتوسيع ذلك إلى الدوال ذات المتغيرات المركبة ، وقام هاملتون الانجليزي (Hamilton) (١٨٠٥ – ١٨٦٥م) و ويرستراس الألماني (١٨٩٧– ١٨١٥م) بإجراءات أكثر تجريداً ، وقدما طريقة الأزواج المرتبة التي أعطت الشرعية لتمثيل الأعداد المركبة .

والجدول التالي يوضّح كل مراحل التطوّر والتوسع الذي طرأ على مجموعات الأعداد :

الأعداد المركبة
- الأعداد الحقيقية
  - الأعداد النسبية
    - الأعداد الصحيحة
      - الأعداد الصحيحة الموجبة
      - الأعداد الصحيحة السالبة
    - الكسور . . . .
  - الأعداد غير النسبية . . . .
- الأعداد التخيلية الصرفة . . . .

خلفية علمية

عندما يحاول المرء حل المعادلات من النوع $س^{٢} + ١ = ٠$ ، $س^{٢} + ٤ = ٠$ ، وغيرها ، يجد نفسه غير قادر على حلها في مجموعة الأعداد الحقيقية ، حيث لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب ، وبالتالي أصبحت الأعداد الحقيقية لا تفي لحل مثل هذه المعادلات ، الأمر الذي يتطلب توسيع نظام الأعداد .

الأعداد التخيلية

الأعداد التخيلية هي الأعداد التي مربعاتها سالبة، مثلاً $\sqrt{-١}$ ، $\sqrt{-٢}$ ، $\sqrt{-١٥}$ ، $\sqrt{-٩}$ ، . . . إلخ

وقد تم إعطاء الرمز(i) للعدد ($\sqrt{-١}$) وهو حرف لاتيني مأخوذ من كلمة imaginary ويقابله في اللغة العربية الرمز (ت) وهو أول حرف من كلمة (تخيلي) ،

ولهذا مثلاً : $\sqrt{-٥} = \sqrt{٥}\,ت$ ؛ $\sqrt{-٩} = \sqrt{٩}\,ت = ٣\,ت$

وبالتالي فإنّ حل المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = -١ \Leftarrow س^{٢} = ت^{٢} \Leftarrow س = \pm\,ت$.

وبصورة عامة فإن $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}\,ت$ ، $أ \in ح_{+}$ ،

أي أن :

لكل عدد حقيقي ص ≠ ٠ يصدق أن (ت ص) عدد مربعه ($-ص^{٢}$) ، ويسمّى ص « عدد تخيلي صرف» .

قوى العدد (ت)

استناداً إلى أن $ت^2 = -1$ ، نستطيع أن نكتب قوى العدد (ت) كالآتي :

$ت^1 = ت$ ، $ت^2 = -1$ ، $ت^3 = -ت$ ، $ت^4 = 1$ ، $ت^5 = ت$ ، . . . . إلخ .

فإذا كان م عدداً صحيحاً أكبر من ٤ وكان $\frac{م}{4} = هـ$ والباقي د فإن :

$م = 4هـ + د$ ، $0 \leqslant د < 4$

$\therefore ت^م = ت^{(4هـ + د)} = ت^{4هـ} . ت^د = (ت^4)^هـ . ت^د = 1^هـ . ت^د = ت^د$.

أي أن $\boxed{ت^م = ت^د}$ حيث د باقي قسمة م على ٤ .

الأعداد المركبة

الصيغة الديكارتية للعدد المركب هي (س ، ص) ، والصيغة الجبرية للعدد المركب هي (س + ت ص)،
حيث س ، ص $\in$ ح ، ت = $\sqrt{-1}$

ونرمز للعدد المركب بالرمز ع ، أي أن :

ع = س + ت ص ، عندما ص = ٠ فإن العدد المركب يكون ع = س + ٠ × ت = س ويسمّى ع في هذه الحالة **عدداً حقيقياً صرفاً** ؛

وعندما س = ٠ ، فإن ع = ٠ + ت ص = ت ص ، ويسمّى ع في هذه الحالة **عدداً تخيلياً صرفاً** .

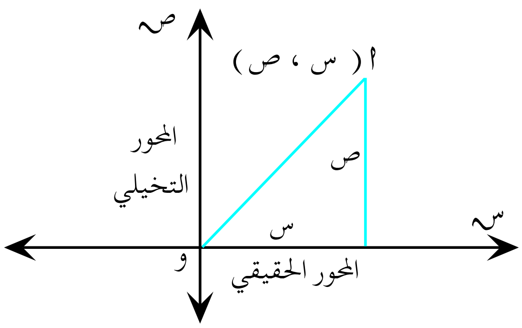
ومن أمثلة الأعداد المركبة : ٤ ، ٢ - ٧ ت ، ٣ ت ، ٥ + ت

لنرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز م ؛ فإن م = { ع : ع = س + ت ص ، س ، ص $\in$ ح }

أي أن ح $\subset$ م ، حيث ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

التمثيل الهندسي (البياني) للعدد المركب

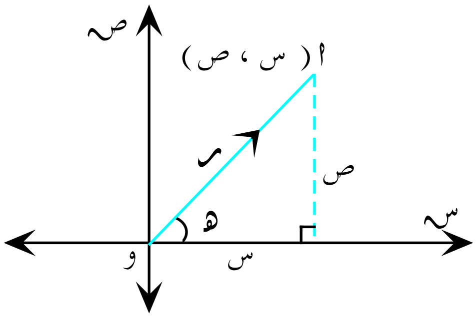
العدد المركب ع = (س + ت ص)،يمكن تمثيله بنقطة في المستوى الإحداثي ، والتي إحداثياها (س ، ص)؛ والعكس صحيح حيث أن كل نقطة أحداثياها (س ، ص) يقابلها عدد مركّب ع = (س ، ص) ؛ أو ع = س + ت ص ؛ وبشكل خاص فإن نقطة الأصل تمثل العدد المركب صفراً (٠ + ٠ × ت) ؛ وأما العدد المركب (س + ٠ × ت) فتمثله نقطة على محور السينات ، والعدد المركب (٠ + ت ص) تمثله نقطة على محور الصادات .



وبما أن الجزء الحقيقي للعدد المركب (س + ت ص) عبارة عن نقطة على محور السينات فيسمّى (المحور الحقيقي) والجزء التخيلي عبارة عن نقطة على محور الصادات فيسمّى (المحور التخيلي) ويسمّى المستوى في هذه الحالة (مستوى آرجاند) أو (مستوى جاوس) .

الصيغة القطبية (المثلثية) للعدد المركب

بما أنه يمكن تمثيل العدد المركب ع = س + ت ص بنقطة (س، ص) على مستوى آرجاند ، فمن الشكل المرسوم أدناه فإن الأحداثيين القطبيين للنقطة أ (س ، ص) هما هـ ، ر (ر > ٠) وتعتبر نقطة الأصل قطباً والاتجاه الموجب و س المحور القطبي . وأن بُعد النقطة أ عن نقطة الأصل يساوي (ر) وأن الزاوية الموجّهة التي يصنعها المتجه و أ المثل للعدد المركب مع الاتجاه الموجب للمحور السيني (المحور الحقيقي) هي هـ .



أي أن س = ر جتا هـ ... (١)، ص = ر جا هـ ... (٢)

∵ ع = س + ت ص

∴ ع = ر جتا هـ + ت ر جا هـ

= ر (جتا هـ + ت جا هـ) = [ر ، هـ]

وتسمّى هذه الصورة بالصيغة القطبية (المثلثية) للعدد المركب، والعدد الحقيقي الموجب (ر) يسمّى **مقياس العدد المركب ع أو طول ع ، وتسمى هـ بسعة العدد المركب أو زاويته .**

أي أن ر = | ع | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ، وذلك باستخدام مبرهنة فيثاغورس أو بتربيع المعادلتين (١) ، (٢) أعلاه ، ثم جمعهما نحصل على :

س^2 + ص^2 = ر^2 (جتا^2 هـ + جا^2 هـ) = ر^2 ، ∴ ر = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

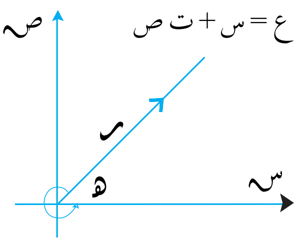
ويمكن إيجاد السعة (الزاوية) وكذا تحديد الربع الذي تقع فيه الزاوية هـ من العلاقات الآتية :

س = ر جتا هـ ، ص = ر جا هـ ، $\frac{ص}{س}$ = $\frac{ر\ جاهـ}{ر\ جتاهـ}$ = ظا هـ .

وصورة العدد المركب ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ) والممثلة بالمتجه و أ تسمى بصورة آرجاند .

وهذه العلاقة لا تحدد تماماً قيمة وحيدة للزاوية هـ ، أي أن سعة (ع) = هـ + ٢ ك π ، ك ∈ ص .

وأما قيمة هـ التي تحقق المتراجحة − π < هـ ≤ π فتسمّى القيمة الأساسية لسعة العدد المركب ع ، ولهذا فإن كل عدد مركب يمكن كتابته بالصيغة



ع = س + ت ص = ر (جتاهـ + ت جاهـ) أو [ر ، هـ]

ر = | ع | = | س + ت ص | = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ،

هـ = ظا$^{-1}$ $\frac{ص}{س}$

إن سعة العدد الحقيقي الموجب هي (الصفر) = ٢ ك π ، ك ∈ ص وسعة العدد الحقيقي السالب هي π،

وسعة العدد التخيلي الصرف الموجب هي + $\frac{\pi}{2}$ وسعة العدد التخيلي الصرف السالب هي − $\frac{\pi}{2}$

وسعة العدد المركب ع = ٠ = (٠ + ت × ٠) = (٠ ، ٠) غير معرفه لأن ظا$^{-1}$ ($\frac{صفر}{صفر}$) غير معرف .

تساوي عددين مركبين

يقال أن العددين المركبين $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$ متساويان فقط إذا كان جزآهما الحقيقيان متساويين وجزآهما التخيليان متساويين، أي أن :

$س_١ + ت ص_١ = س_٢ + ت ص_٢ \Leftrightarrow س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢$ ؛ وبما أنه يمكن كتابة العدد المركب كزوج مرتب ، فإنه يمكن توضيح ذلك بالأزواج المرتبة ، حيث أن $ع_١ = (س_١ ، ص_١) = ع_٢ = (س_٢ ، ص_٢)$ فإننا نجد أن $س_١ = س_٢$ ، $ص_١ = ص_٢ \Leftrightarrow (س_١ ، ص_١) = (س_٢ ، ص_٢)$ ، يمكن التحقق من هذا التعريف بواسطة التمثيل البياني للعدد المركب إذا انطبقت النقطتان $(س_٢ ، ص_٢)$ ، $(س_١ ، ص_١)$ على بعضهما في مستوى معين .

جمع الأعداد المركبة

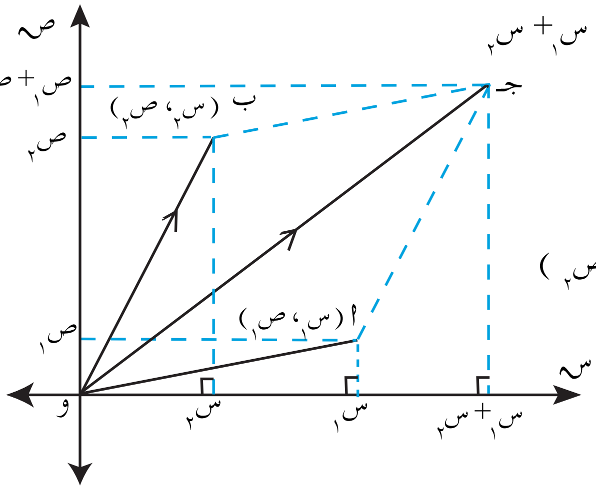
ليكن المتجه $\overleftarrow{و أ}$ يمثّل العدد المركب $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ والمتجه $\overleftarrow{و ب}$ يمثّل العدد المركب $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$.

أي أن $\overleftarrow{و جـ} = \overleftarrow{و أ} + \overleftarrow{أ جـ} = \overleftarrow{و أ} + \overleftarrow{و ب}$ وبالتالي فإن مساقط $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ على محور السينات هي $س_١$ ، $س_٢$ على الترتيب ومسقط $\overleftarrow{و جـ}$ على محور السينات هو $س_١ + س_٢$

وبالمثل مسقط $\overleftarrow{و جـ}$ على محور الصادات هو $ص_١ + ص_٢$ ، وبالتالي فإن إحداثي النقطة جـ هي $(س_١ + س_٢ ، ص_١ + ص_٢)$

أي أن $ع_١ + ع_٢ = (س_١ + ت ص_١) + (س_٢ + ت ص_٢)$

$= (س_١ + س_٢) + ت (ص_١ + ص_٢)$



ومنه نتوصَّل إلى التعريف التالي :

مجموع أي عددين مركبين يساوي عدداً مركباً ، جزؤه الحقيقي هو مجموع الجزأين الحقيقيين ، جزؤه التخيلي هو مجموع الجزأين التخيليين .

التمثيل البياني للعدد المركب $ع_١ + ع_٢$

لتكن $ع_١ = (س_١ + ت ص_١)$ ، $ع_٢ = (س_٢ + ت ص_٢)$ عددين مركبين يمكن تمثيلهما بالنقاط أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ في مستوى آرجاند ، ارسم $\overline{و أ}$ ، $\overline{و ب}$.

اكمل رسم متوازي الأضلاع و أ جـ ب ، ارسم القطرين ، وسمّي نقطة تقاطعهما م (م هي منتصف $\overline{أ ب}$) .

إذن أحداثيّ م هي $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$. لتكن (س ، ص) هما إحداثيا النقطة (جـ)

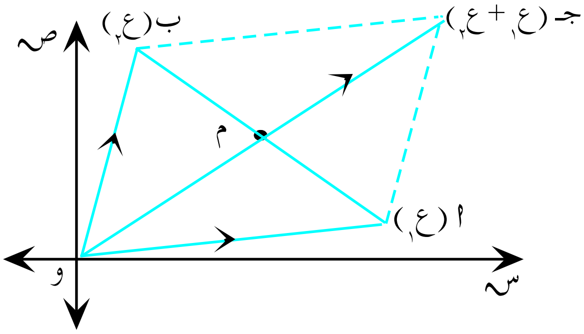
فإن م هي منتصف $\overline{و جـ}$ ، $\therefore$ إحداثيا م هما $\left(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢}\right)$

$\therefore \frac{س}{٢} = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص}{٢} = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

أي أن $س = س_{١} + س_{٢}$ ، $ص = ص_{١} + ص_{٢}$ ،

وبالتالي فإن إحداثيا النقطة جـ هما $(س_{١} + س_{٢} ، ص_{١} + ص_{٢})$ وهذا يوضّح أن النقطة جـ تمثل العدد المركب :

$(س_{١} + س_{٢}) + ت (ص_{١} + ص_{٢}) = (س_{١} + ت ص_{١}) + (س_{٢} + ت ص_{٢})$ والذي يمثل مجموع العددين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$



أي أن :

$ع_{١} = \overleftarrow{و أ}$ ،

$ع_{٢} = \overleftarrow{و ب}$ ،

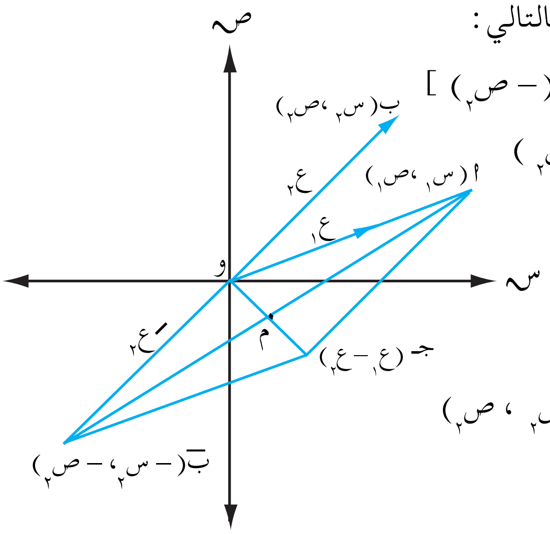
$\therefore ع_{١} + ع_{٢} = \overleftarrow{و جـ}$ ،

طرح الأعداد المركبة

إذا كان $ع = س + ت ص$ ، فإننا نستطيع أن نعرّف العدد المركب السالب كالتالي :

$(-ع) = -(س + ت ص)$

$= -س - ت ص = (-س ، -ص)$



وبالتالي نستطيع أن نعرّف طرح عددين مركبين $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ كالتالي:

$ع_{١} - ع_{٢} = ع_{١} + (-ع_{٢}) = (س_{١} + ت ص_{١}) + [-س_{٢} + ت (-ص_{٢})]$

$= (س_{١} - س_{٢}) + ت (ص_{١} - ص_{٢})$

التمثيل البياني للعدد المركب $ع_{١} - ع_{٢}$

لتكن $ع_{١} = (س_{١} + ت ص_{١})$ ، $ع_{٢} = (س_{٢} + ت ص_{٢})$

أي عددين مركبين وتمثلهما النقطتان : أ $(س_{١} ، ص_{١})$ ، ب $(س_{٢} ، ص_{٢})$

في مستوى آرجاند على الترتيب ، ارسم $\overline{و أ}$ ، $\overline{و ب}$.

ثم مد $\overline{ب و}$ إلى ب' بحيث يكون $| و ب | = | و ب' |$ ؛

إذن إحداثيا ب' هما $(-س_{٢} ، -ص_{٢})$ وبالتالي فإن ب' تمثل العدد المركب

$-ع_{٢} = [-س_{٢} + ت (-ص_{٢})]$.

أكمل رسم متوازي الأضلاع أ جـ ب' و ، وسمِّ نقطة تقاطع أقطاره م .

بما أن م هي منتصف $\overline{أ ب'}$ فإن إحداثييها هما $\left(\frac{س_{١} - س_{٢}}{٢} ، \frac{ص_{١} - ص_{٢}}{٢}\right)$ ؛

فإذا كانت (س ، ص) هما إحداثيا النقطة (جـ) فإن (م) هي منتصف $(\overline{\text{و جـ}})$ ، وبالتالي

فإن إحداثييها هما $(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢})$

$$\therefore \frac{س}{٢} = \frac{س_٢ - س_١}{٢} ، \frac{ص}{٢} = \frac{ص_٢ - ص_١}{٢}$$

أي أن $س = س_٢ - س_١$ ، $ص = ص_٢ - ص_١$

وبالتالي فإن إحداثيي النقطة جـ هي [($س_٢ - س_١$) ، ($ص_٢ - ص_١$)] وهذا يوضّح أن النقطة جـ تمثل العدد المركب ($س_٢ - س_١$) + ت ($ص_٢ - ص_١$) = ($س_٢ + ت ص_٢$) − ($س_١ + ت ص_١$) والذي يمثل $ع_٢ - ع_١$.

أي أن $ع_١ = \overrightarrow{\text{و أ}}$ ، $ع_٢ = \overrightarrow{\text{و ب}}$ ، $- ع_١ = - \overrightarrow{\text{و ب}} = \overrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\therefore ع_٢ - ع_١ = \overrightarrow{\text{و جـ}}$

ضرب الأعداد المركبة

إذا كان $ع_١ = س_١ + ت ص_١$ ، $ع_٢ = س_٢ + ت ص_٢$

فإن $ع_١ \cdot ع_٢$ = ($س_١ + ت ص_١$) ($س_٢ + ت ص_٢$) = ($س_١ س_٢ - ص_١ ص_٢$) + ت ($س_١ ص_٢ + س_٢ ص_١$)

أما عند ضرب عددين مركبين بالصيغة القطبية فإننا نضرب الأطوال ونجمع الزوايا .

ولإثبات ذلك نكتب $ع_١$ ، $ع_٢$ بالصيغة القطبية $ع_١ = ر_١$ (جتا $هـ_١$ + ت جا $هـ_١$).

$ع_٢ = ر_٢$ (جتا$هـ_٢$ + ت جا$هـ_٢$)

إذن $ع_١ \cdot ع_٢$ = [$ر_١$ (جتا $هـ_١$ + ت جا $هـ_١$)] [$ر_٢$ (جتا $هـ_٢$ + ت جا $هـ_٢$)]

= $ر_١ ر_٢$ [(جتا $هـ_١$ جتا $هـ_٢$ − جا $هـ_١$ جا $هـ_٢$) + ت (جا $هـ_١$ جتا $هـ_٢$ + جتا $هـ_١$ جا $هـ_٢$)]

والتي يمكن كتابتها بعد الاختصار :

$ع_١ \cdot ع_٢ = ر_١ ر_٢$ [جتا ($هـ_١ + هـ_٢$) + ت جا ($هـ_١ + هـ_٢$)] وبالتالي فإن طول $ع_١ ع_٢ = ر_١ ر_٢$ ؛

وسعة ($ع_١ ع_٢$) = سعة $ع_١$ + سعة $ع_٢$ = $هـ_١ + هـ_٢$.

أي أن سعة العدد المركب ($ع_١ ع_٢$) تساوي مجموع سعتي العددين $ع_١$ ، $ع_٢$ ؛ والعكس صحيح، أي أن مجموع سعة $ع_١$ وسعة $ع_٢$ تساوي سعة العدد($ع_١ ع_٢$)

ضرب عدد مركب في عدد صحيح أو عدد نسبي

إذا كان ع = (س ، ص) = س + ت ص ،

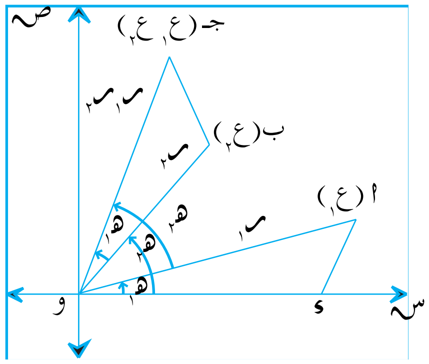
فإن حاصل ضرب د × (س ، ص) هو مجموع د من الأزواج المرتبة من الأعداد المركبة

أي أن د (س ، ص) = (س ، ص) + (س ، ص) + . . . د من المرات = (د س ، د ص)

أو د ×(س + ت ص) = د س + ت د ص .

وأما ضرب عدد مركب في عدد نسبي فيساوي ضرب العدد المركب في بسط الكسر وقسمة العدد المركب على المقام : أي أن $\frac{م}{د}$ × (س ، ص) = ($\frac{م س}{د}$ ، $\frac{م ص}{د}$) = $\frac{م}{د}$ س + ت $\frac{م}{د}$ ص

التمثيل البياني للعدد (ع$_1$ ع$_2$)



ليكن : ع$_1$ = مر$_1$ (جتا هـ$_1$ + ت جا هـ$_1$) ،

ع$_2$ = مر$_2$ (جتا هـ$_2$ + ت جا هـ$_2$) ؛

وتمثلهما النقطتان أ[مر$_1$ ، هـ$_1$] ، ب[مر$_2$ ، هـ$_2$] على الترتيب .

ارسم $\overline{وأ}$ ، $\overline{وب}$.

وبالتالي فإن | و أ | = مر$_1$ ، ق(∠ أ و س) = هـ$_1$ ، | و ب | = مر$_2$ ، ق(∠ ب و س) = هـ$_2$

∴ ع$_1$ ع$_2$ = مر$_1$ (جتا هـ$_1$ + ت جا هـ$_1$) · مر$_2$ (جتاهـ$_2$ + ت حاهـ$_2$)

= مر$_1$ مر$_2$ [جتا (هـ$_1$ + هـ$_2$) + ت جا (هـ$_1$ + هـ$_2$)]

وهذا يؤدي إلى أن النقطة التي على صورة [مر$_1$ مر$_2$ ، هـ$_1$ + هـ$_2$] تمثل العدد ع$_1$ ع$_2$.

لتكن ء أية نقطة على المحور الحقيقي بحيث تكون | و ء | = ١ ، ارسم $\overline{ءأ}$.

ارسم المثلث و ب جـ مشابهاً للمثلث و ء أ ، ومن تشابه المثلثين أ و ء ، جـ و ب ينتج أن :

$$\frac{|\text{وجـ}|}{|\text{وب}|} = \frac{|\text{وأ}|}{|\text{وء}|} \Leftarrow \frac{|\text{وجـ}|}{\text{مر}_2} = \frac{\text{مر}_1}{1} \Leftarrow |\text{وجـ}| = \text{مر}_1\,\text{مر}_2 \text{ ،}$$

ق(∠ س و جـ) = ق(∠ س و أ) + ق(∠ أ و جـ) = هـ$_1$ + هـ$_2$

وبالتالي فإن الإحداثيين القطبيين للنقطة جـ هي [مر$_1$ مر$_2$ ، هـ$_1$ + هـ$_2$] وهي تمثل حاصل الضرب (ع$_1$ · ع$_2$).

من العلاقة ع$_1$ ع$_2$ = مر$_1$ مر$_2$ [جتا (هـ$_1$ + هـ$_2$) + ت جا (هـ$_1$ + هـ$_2$)]

ينتج أن هذه السعة لا بد أن تكون على الصورة (هـ$_1$ + هـ$_2$) + ٢ ك π ، (ك ∈ ص)

وبالتالي نأخذ سعة (ع$_1$) = هـ$_1$ + ٢ ك π ، سعة (ع$_2$) = هـ$_2$ + ٢ ك π

مرافق العدد المركب

لتكن ع = س + ت ص فإن س − ت ص يسمّى مرافق ع ويرمز له بالرمز $\bar{ع}$.

أي أن لكل عدد مركب ع = (س ، ص) يوجد عدد مرافق $\bar{ع}$ = (س ، − ص) .

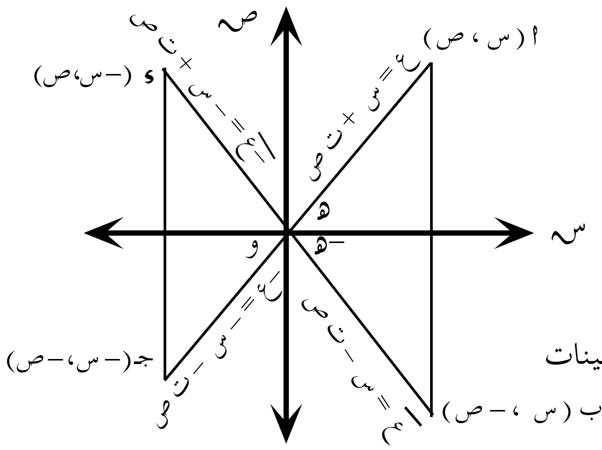
وصورة مرافق العدد المركب هي نفسها صورة العدد الاصلي بعد تغيير إشارة الجزء التخيلي .

ولذلك فإن مرافق العدد الحقيقي هو العدد نفسه .

أي أن $\overline{٢ + ٣ ت}$ = ٢ − ٣ ت ، $\overline{٦ ت}$ = − ٦ ت ، $\overline{− ٧ ت}$ = ٧ ت ، $\overline{٣}$ = ٣ ، $\overline{− ٧}$ = − ٧ .

وبشكل عام فإن مرافق الجزء الحقيقي للعدد المركب يساوي الجزء الحقيقي نفسه ومرافق الجزء التخيلي الصرف يساوي نظيره الجمعي .

التمثيل الهندسي لمرافق العدد المركب



إذا كانت النقطة (أ) تمثل العدد المركب

ع = س + ت ص = (س ، ص)

والنقطة (ب) تمثل العدد المرافق

$\overline{ع}$ = س − ت ص = (س ، − ص)

فإن (ب) هي صورة (أ) بالانعكاس في محور السينات (المحور الحقيقي)

وإذا كانت (جـ) تمثل العدد المركب − ع = − س − ص = (−س ، − ص)

فإن − ع هي صورة $\overline{ع}$ بالانعكاس في محور الصادات (المحور التخيلي)

لتكن ع = (س + ت ص) = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

فإن $\overline{ع}$ = (س − ت ص) = ر (جتاهـ − ت جاهـ) = ر [جتا (−هـ) + ت جا (− هـ)]

ولهذا فإن سعة $\overline{ع}$ = − هـ .

وإذا كانت النقطة (ء) تمثل العدد المرافق − $\overline{ع}$ = − س + ت ص فإن (ء) هي صورة النقطة (جـ) بالانعكاس في محور السينات (المحور الحقيقي) .

وبصورة عامة فإن العددين المترافقين متماثلان حول محور السينات .

بما أن $|ع|^2 = (\sqrt{س^2 + ص^2})^2 = س^2 + ص^2$

$ع\overline{ع}$ = (س + ت ص) (س − ت ص) = $س^2 + ص^2$

∴ $|ع|^2 = ع . \overline{ع}$.

قسمة الأعداد المركبة

لتكن $ع_1 = س_1 + ت ص_1 = (س_1 ، ص_1)$ ، $ع_2 = س_2 + ت ص_2 = (س_2 ، ص_2)$

$$إذن \quad \frac{ع_2}{ع_1} = \frac{س_2 + ت ص_2}{س_1 + ت ص_1} = \frac{(س_2 + ت ص_2)(س_1 - ت ص_1)}{(س_1 + ت ص_1)(س_1 - ت ص_1)}$$

$$= \frac{(س_1 س_2 + ص_1 ص_2) + ت (س_1 ص_2 - س_2 ص_1)}{س_1^2 + ص_1^2}$$

$$= \frac{س_1 س_2 + ص_1 ص_2}{س_1^2 + ص_1^2} + ت \frac{س_1 ص_2 - س_2 ص_1}{س_1^2 + ص_1^2}$$

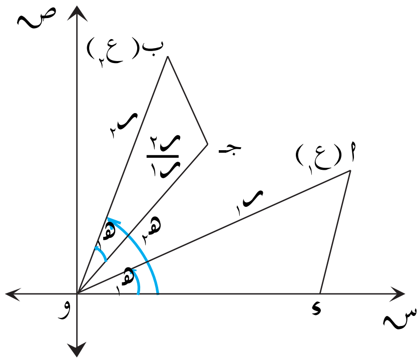
أو نضرب ع_2 في النظير الضربي للعدد ع_1 ،

أي أن $\frac{1}{\text{ع}_1} = \frac{1}{\text{س}_1 + \text{ت ص}_1} = \frac{1}{\text{س}_1 + \text{ت ص}_1} \times \frac{\text{س}_1 - \text{ت ص}_1}{\text{س}_1 - \text{ت ص}_1}$

$$= \frac{\text{س}_1 - \text{ت ص}_1}{\text{س}_1^2 - (\text{ت ص}_1)^2} = \frac{\text{س}_1 - \text{ت ص}_1}{\text{س}_1^2 - (-\text{ص}_1^2)} = \frac{\text{س}_1 - \text{ت ص}_1}{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1} = (\text{س}_2 + \text{ت ص}_2)\,\frac{(\text{س}_1 - \text{ت ص}_1)}{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2} = \frac{(\text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2) + \text{ت}(\text{س}_1\text{ص}_2 - \text{س}_2\text{ص}_1)}{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2}$$

$$= \frac{\text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2}{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2} + \text{ت}\,\frac{\text{س}_1\text{ص}_2 - \text{س}_2\text{ص}_1}{\text{س}_1^2 + \text{ص}_1^2} \ .$$



التمثيل البياني للعدد المركب $\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$

ليكن ع_1 ، ع_2 أي عددين مركبين وتمثيلهما القطبي هو

$\text{ع}_1 = \text{ر}_1 \,(\text{جتا هـ}_1 + \text{ت جا هـ}_1)$

$\text{ع}_2 = \text{ر}_2 \,(\text{جتا هـ}_2 + \text{ت جا هـ}_2)$

وتمثلهما النقطتين أ ، ب التي إحداثياتهما القطبية هي

$[\text{ر}_1 \text{ ، هـ}_1]$ ، $[\text{ر}_2 \text{ ، هـ}_2]$ على الترتيب

ارسم $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$. وبالتالي فإن :

$|\text{و أ}| = \text{ر}_1$ ، ق$(\measuredangle \text{ أ و س}) = \text{هـ}_1$ ، $|\text{و ب}| = \text{ر}_2$ ، ق$(\measuredangle \text{ ب و س}) = \text{هـ}_2$.

$\therefore \frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1} = \frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_1} \,[\text{جتا}(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1) + \text{ت جا}(\text{هـ}_2 - \text{هـ}_1)]$.

وبالتالي فإن النقطة التي إحداثياها القطبية $[\frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_1} \text{ ، هـ}_2 - \text{هـ}_1]$ تمثل العدد المركب $\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$.

لتكن (ء) أية نقطة على المحور الحقيقي ، بحيث تكون $|\text{و ء}| = 1$ ، ارسم $\overline{\text{ء أ}}$.

الآن ارسم المثلث (و ب جـ) مشابهاً للمثلث (و أ ء) ، من التشابه نجد أن :

$$\frac{|\text{و ب}|}{|\text{و جـ}|} = \frac{|\text{و أ}|}{|\text{و ء}|} \Leftarrow \frac{\text{ر}_2}{|\text{و جـ}|} = \frac{\text{ر}_1}{1} \Leftarrow |\text{و جـ}| = \frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_1}$$

أيضاً ق$(\measuredangle \text{ س و جـ}) =$ ق$(\measuredangle \text{ س و ب}) -$ ق$(\measuredangle \text{ ب و جـ}) = \text{هـ}_2 - \text{هـ}_1$

إذن الصورة القطبية للنقطة جـ هي :

$[\frac{\text{ر}_2}{\text{ر}_1} \text{ ، هـ}_2 - \text{هـ}_1]$. وهذا يمثل العدد المركب $\frac{\text{ع}_2}{\text{ع}_1}$.

برهان آخر لسعة خارج قسمة عددين مركبين

سعة $\left(\frac{ع_2}{ع_1}\right) = هـ_2 - هـ_1$

البرهان :

سعة $\left(\frac{1}{ع_1}\right) = -هـ_1$

سعة $(ع_1 ع_2) = هـ_1 + هـ_2$

سعة $\left(\frac{ع_2}{ع_1}\right) =$ سعة $\left(ع_2 \times \frac{1}{ع_1}\right) = هـ_2 + (-هـ_1) = هـ_2 - هـ_1$

أي أن سعة $\left(\frac{ع_2}{ع_1}\right) =$ سعة $(ع_2)$ − سعة $(ع_1)$

بعض خواص الأعداد المركبة

(١) إذا كان $ع \in م$ ، فإن :

أ) $\overline{(\overline{ع})} = ع$

ب) $(ع + \overline{ع}) =$ عدداً حقيقياً

جـ) $(ع - \overline{ع})$ إمّا (صفراً) أو (عدداً تخيلياً)

د) $ع\,\overline{ع} = |ع|^2$ ولهذا فإن $ع\,\overline{ع}$ عدداً حقيقي

(٢) إذا كان $ع_1 ، ع_2 \in م$ ، فإن :

أ) $\overline{(ع_1 + ع_2)} = \overline{ع_1} + \overline{ع_2}$

ب) $\overline{(ع_1 - ع_2)} = \overline{ع_1} - \overline{ع_2}$

جـ) $\overline{ع_1 ع_2} = \overline{ع_1} \cdot \overline{ع_2}$

د) $|ع_1 ع_2| = |ع_1| \cdot |ع_2|$

هـ) لأي عدد مركب ع فإن $|ع| = 0 \Leftrightarrow ع = 0$

(٣) لأي عددين مركبين $ع_1 ، ع_2 \in م$ فإن :

أ) $|ع_1 + ع_2| \le |ع_1| + |ع_2|$

ب) $|ع_1 - ع_2| \le |ع_1| + |ع_2|$

جـ) $|ع_1 - ع_2| \ge |ع_1| - |ع_2|$

د) $|ع_1 + ع_2|^2 + |ع_1 - ع_2|^2 = 2\left(|ع_1|^2 + |ع_2|^2\right)$

مبرهنة دي موافر

إن الهدف الأساس من دراسة مبرهنة دي موافر هو تسهيل إجراء عملية إيجاد القوى النونية للعدد المركب .

فمثلاً لإيجاد قيمة $(٣ + ت)^{٥}$ ، نكتبه بالصورة القطبية (المثلثية) ثم نطبق مبرهنة دي موافر .

ومبرهنة دي موافر تنص على أن : إذا كانت ن عدداً صحيحاً فإن :

$(جتا\, هـ + ت\, جا\, هـ)^{ن} = جتا\, ن هـ + ت\, جا\, ن هـ$.

أما إذا كانت ن كسراً (موجبًا أو سالبًا)

فإن أحد قيم $(جتا\, هـ + ت\, جا\, هـ)^{ن}$ هي $(جتا\, ن هـ + ت\, جا\, ن هـ)$

ولإثبات ذلك نأخذ الحالات الآتية :

الحالة الأولى : إذا كانت د $\in$ $ص_+$ (وهي الحالة التي وردت في كتاب الطالب)

الحالة الثانية : إذا كانت د عدد صحيحاً سالباً .

البرهان : نضع د = − م :

$$(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{-م} = \frac{1}{(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{م}} = \frac{1}{\text{جتام هـ} + \text{ت جام هـ}}$$

$$= \frac{1}{\text{جتام هـ} + \text{ت جام هـ}} \times \frac{\text{جتام هـ} - \text{ت جام هـ}}{\text{جتام هـ} - \text{ت جام هـ}}$$

$$= \frac{\text{جتام هـ} - \text{ت جام هـ}}{\text{جتا}^{2}\text{م هـ} + \text{جا}^{2}\text{م هـ}}$$

$$= \text{جتام هـ} - \text{ت جام هـ} \quad (\text{ولكن د} = -\text{م})$$

$$= \text{جتا}(-\text{د هـ}) - \text{ت جا}(-\text{د هـ}) \text{ ، } = \text{جتا د هـ} + \text{ت جا د هـ}$$

مما سبق نستنتج أنه مهما كانت د عدداً صحيحاً سالباً أو موجباً فإن :

$$(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{د} = \text{جتا د هـ} + \text{ت جا د هـ}$$

الحالة الثالثة : إذا كانت د كسراً .

البرهان : (نضع د = $\frac{ك}{ل}$ ، حيث ك أي عدد صحيح ، ل أي عدد صحيح موجب) .

بما أن ل موجب :

$\therefore$ $(\text{جتا } \frac{هـ}{ل} + \text{ت جا } \frac{هـ}{ل})^{ل} = \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ}$ (بأخذ الجذر $\frac{1}{ل}$ لكلا الطرفين نجد أن :)

$(\text{جتا } \frac{هـ}{ل} + \text{ت جا } \frac{هـ}{ل})$ هي أحد قيم $(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{\frac{1}{ل}}$

إذن $(\text{جتاهـ} + \text{ت جا هـ})^{د} = (\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{\frac{ك}{ل}} = [(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{ك}]^{\frac{1}{ل}}$

$= (\text{جتا ك هـ} + \text{ت جا كهـ})^{\frac{1}{ل}}$

ولكن حسب معرفتنا أن : $(\text{جتا ك هـ} + \text{ت جا كهـ})^{\frac{1}{ل}}$ هي أحد قيم $(\text{جتا } \frac{ك}{ل} \text{هـ} + \text{ت جا } \frac{ك}{ل} \text{هـ})$

بدلاً عن هـ لدينا ك هـ ، بوضع د = $\frac{ك}{ل}$ نجد أن :

جتا د هـ + ت جا د هـ هي أحد قيم (جتا ك هـ + ت جا ك هـ) وهي أيضاً أحد قيم $(\text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{د}$

ولهذا فإن مبرهنة دي موافر صحيحة لكل القيم النسبية د .

نتائج : (١) لكل قيم د الصحيحة أو النسبية فإن :

$(\text{جتادهـ} - \text{ت جا د هـ})$ هي أحد قيم $(\text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})^{د}$

(٢) $\frac{1}{\text{جتاهـ} \pm \text{ت جا هـ}} = (\text{جتا هـ} \pm \text{ت جا هـ})^{-1} = \text{جتا}(-\text{هـ}) \pm \text{ت جا}(-\text{هـ})$

$= (\text{جتا هـ} \mp \text{ت جا هـ})$

توجيهات طرائقية عامة

١- يراجع المعلم حل المعادلات من الدرجة الثانية في ح ، والتركيز على المعادلات التي يكون فيها المميز (Δ) أصغر من الصفر (Δ < ٠) .

٢ – توضيح الحاجة إلى الأعداد التخيلية، وهي الأعداد التي مربعها سالب وإعطاء أمثلة كافية عليها .

٣ – تكوين مجموعة الأعداد المركبة، من خلال توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث أصبحت لدينا مجموعة تضم ثلاث مجموعات جزئية وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الصرفة، ومجموعة الأعداد التخيليةالصرفة ومجموعة الأعداد الخليطة (والتي لها جزآن حقيقي وتخيلي) .

٤ – تُربط الصيغة الجبرية للعدد المركب بتمثيله على مستوى آرجاند ، ويوضح أن العدد المركب يمكن تمثيله بنقطة في المستوى أو زوج مرتب ويمكن تمثيله بمتجه في المستوى .

٥ – يوضح المدرس جمع الأعداد المركبة بواسطة المتجهات والذي يسمى التمثيل البياني لجمع الأعداد المركبة كما هو موضح في كتاب الطالب ، ويتم توضيح بقية العمليات (الطرح والضرب والقسمة) ؛ إذا سمح الوقت كما ورد في دليل المعلم .

٦ – قبل تدريس الحقل (م ، + ، ٠) وخواصه ، يتم مراجعة الحقل (ح ، + ، ٠) وخواصه .

٧ – الاهتمام بمعاني الرموز واستخدامها الصحيح – ع ، $\frac{١}{ع}$ ، $\overline{ع}$ ، والتمييز بينها عند حل التمارين وعدم الخلط بينهما .

٨ – يذكّر المعلم طلبته دائماً ، بأن العدد الحقيقي الصرف ا $\in$ ح يكتب على الصورة (ا + ٠ × ت) جبرياً أو ا (جتا٠° + ت جا٠°) قطبياً (مثلثياً)، وبالمثل كل عدد تخيلي صرف (ب ت) يكتب بالصورة (٠ + ب ت) جبرياً ، ب (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$) قطبياً وللتسهيل يتم توضيح ذلك بواسطة التمثيل على دائرة الوحدة.

٩ – توضيح المرافق والنظير الجمعي والضربي للعدد المركب بالصيغة القطبية أو الجبرية بواسطة التمثيل في مستوى آرجاند .

١٠– تدريب الطلاب باستمرار على التحويل من الصيغة الجبرية إلى الصيغة القطبية والعكس ؛ وذلك حتى يتسنى للطالب حل التمارين بطريقة أسهل ، مثل تمارين القوى والجذور .

١١– عند إعطاء مبرهنة دي موافر اكتفي في الكتاب المدرسي بأن الأس (ه) عدد صحيح موجب ليسهل للطالب التحقق من المبرهنة ، ويتم التوسيع بإعطاء تعميم بقية الحالات بدون برهان التي يكون فيها ه عدداً نسبيًا كما هو في الدليل .

١٢– عند تطبيق مبرهنة دي موافر تتم مراجعة النسب المثلثية وقوانينها .

١٣– عند ضرب عدد حقيقي صرف في عدد مركب بالصيغة القطبية يتم التركيز على ضرب العدد الحقيقي في المقياس فقط، ولا يضرب في السعة. ويوضح ذلك بكتابة العدد الحقيقي الصرف بالصيغة القطبية ثم تطبيق قاعدة ضرب عددين مركبين، أو باستخدام المتجهات، وبالمثل عند قسمة عدد مركب على عدد حقيقي صرف .

فمثلاً : إذا كان $ع_١ = \frac{١}{٤} ع_٢$ ، وكان $ع_٢ = [١٢ ، \frac{\pi}{٣}]$ فأوجد $ع_١ ع_٢$.

يتم حل هذا المثال على النحو التالي :

نجد $ع_١ = [\frac{١}{٤} ، ٠] . [١٢ ، \frac{\pi}{٣}] = [٣ ، \frac{\pi}{٣}]$

$\therefore ع_١ ع_٢ = [٣ ، \frac{\pi}{٣}] . [١٢ ، \frac{\pi}{٣}] = [٣٦ ، \frac{٢\pi}{٣}]$

الأخطاء الشائعة

ينبه المدرس طلبته إلى الأخطاء الشائعة التالية :

١ – الخلط بين معكوس العدد المركب ومرافق العدد المركب مثلاً $\frac{١}{ع} = ع^{-١}$ وليس $\bar{ع}$.

٢ – عند إيجاد المرافق يقوم الطلبة بوضع إشارة مخالفة للجزأين الحقيقي والتخيلي للعدد المركب، والصحيح أن يضع إشارة مخالة فقط للجزء التخيلي.

٣ – يقوم بعض الطلبة عند ضرب عدد حقيقي صرف في عدد مركب بالصيغة القطبية بضرب العدد الحقيقي في المقياس والسعة معاً .

مثل هذا الخطأ أن يكتب على النحو التالي :

$$\frac{١}{٣} [٦ ، \frac{\pi}{٣}] = [\frac{١}{٣} \times ٦ ، \frac{١}{٣} \times \frac{\pi}{٣}]$$

والصحيح أن يضرب العدد الحقيقي الصرف في المقياس فقط أي أن :

$$\frac{١}{٣} [٦ ، \frac{\pi}{٣}] = [\frac{١}{٣} \times ٦ ، \frac{\pi}{٣}] = [٢ ، \frac{\pi}{٣}]$$

٤ – يعتقد الطلاب أن :

أ) $|ع_١ + ع_٢| = |ع_١| + |ع_٢|$

ب) $[ر_١ ، هـ_١] + [ر_٢ ، هـ_٢] = [ر_١ + ر_٢ ، هـ_١ + هـ_٢]$

وهما صيغتان خاطئتان .

والصحيح هـــو :

أ) $|ع_١ + ع_٢| \leqq |ع_١| + |ع_٢|$

ب) $[ر_١ ، هـ_١] + [ر_٢ ، هـ_٢]$

$$= [\sqrt{ر_١^٢ + ر_٢^٢} ، ظا^{-١} (\frac{ص_١ + ص_٢}{س_١ + س_٢})]$$

١ – ١ العدد المركب

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

– يتعرّف العدد التخيلي (ت) وقواه .
– يتعرّف مجموعة الأعداد المركبة .
– يكتب الأعداد المركبة كأزواج مرتبة ، ويمثّلها بنقطة في المستوى
– يمثّل العدد المركب بمتجه قياسي (والعكس)
– يعرّف تساوي عددين مركبين

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا الدرس في ثلاث حصص كالآتي :
الحصة الأولى : العدد ت وقواه .
الحصتان الثانية والثالثة : الأعداد المركبة .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى السؤال الآتي كخطوة تقويم :
بسّط ما يأتي ، ثم اكتبه بالصيغة الجبرية س + ت ص : (١ + ت)^{٣} – (١ – ت)

إرشادات وإجابات : تمارين (١ – ١)

[١] أ) ت ب) – ١ جـ) ت ء) صفر هـ) ٢ ت
و) ١ + ت ز) ٥ ت ح) ٢ – ٢ ت ي) ت ك) صفر

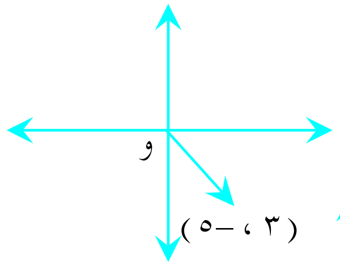
[٢] أ) الحقيقي – ٤ والتخيلي ٣ ب) الحقيقي ٣ والتخيلي $\sqrt{٥}$
جـ) الحقيقي ٧ والتخيلي ٧ ء) الحقيقي صفر والتخيلي $\sqrt{٣}$
هـ) الحقيقي – $\sqrt{٢}$ والتخيلي – ٢ و) الحقيقي صفر والتخيلي $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$
ز) الحقيقي صفر والتخيلي ١٣ ح) الحقيقي ١١ والتخيلي صفر .

[٣] أ) $\frac{٣\,ت}{٤\sqrt{٧}}$ ب) – ٩٠ جـ) – ١٢ $\sqrt{١٠}$
ء) – (٧ $\sqrt{٧}$ + ٥ $\sqrt{٥}$) ت هـ) ٣٢٤ و) (٩٧٢ $\sqrt{٢}$ – ٢٨٨ $\sqrt{٣}$) ت
ز) $\sqrt{٥}$ س^{٤} (٣ – ت) .

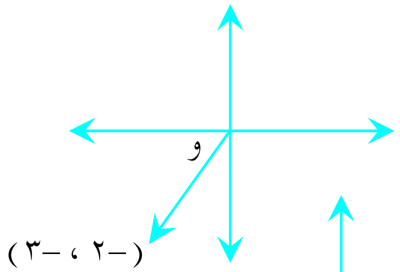
[٥] أ) س = ١ ، ص = -١   ب) س = ٤ ، ص = ١

جـ) س = $\frac{٣}{٢}$ ، ص = ٣   ء) س = ٣ ، ص = -٢ ، س = -٣ ، ص = ٢

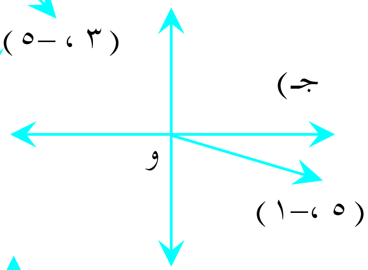
[٦] أ)



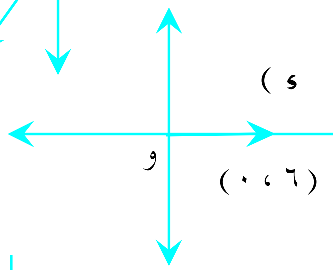
ب)



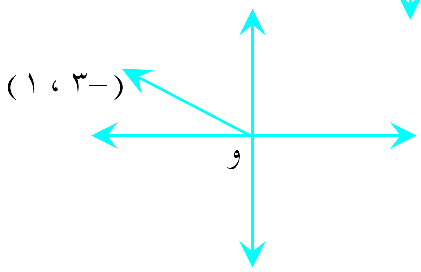
جـ)



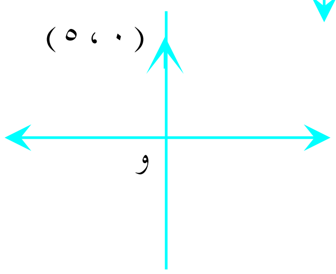
ء)



هـ)



و)



١ - ٢ جمع وطرح الأعداد المركبة

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

- يجمع ويطرح الأعداد المركبة .
- يمثّل المجموع والفرق بيانياً .
- يوجد النظير الجمعي لعدد مركب .
- يتعرّف خواص النظام (م ، +) .

تنفيذ حصص البند يُنفَّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : جمع وطرح الأعداد المركبة .

الحصة الثانية : النظير الجمعي وخواص النظام (م ، +)

الحصة الثالثة : تمارين صفية

التقويم يتم التقويم بنائياً، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى سؤالاً شبيهاً بالسؤال الآتي كخطوة تقويم :

إذا كان $ع_١$ = (١ - ت) ، $ع_٢$ = (-٢ + ٤ ت)

فأوجد : أ) $ع_٢ + ع_١$ ب) $ع_٢ - ع_١$ جـ) النظير الجمعي للعددين $ع_١$ ، $ع_٢$

إرشادات وإجابات : تمارين (١ – ٢)

[١] أ) ٦ + ت   ب) $-\frac{٩}{٤} - \frac{١}{٦}$ ت   جـ) ٧ + ت

ء) ٩ – ٢ ت

[٢] أ) – ١٠ ت   ب) ٧+ ٥ ت   جـ) – ٣ + ٦ ت   ء) ٥–٥ ت

[٣] أ) س = ٣ ، ص = –١   ب) س= – ٢ ، ص = –١

جـ) س = –٢ ، ص = ٦   ء) س = ١٠ ، ص = –١

هـ) س = ٢ ، ص = ٧

[٤] أ) $ع_١ + ع_٢$ = – ٤ –٢ ت   ب) $ع_٢ - ع_١$ = ٢ + ٨ ت

جـ) $ع_١ + ع_٢ - ع_٣$ = ١٥ + ١٣ ت

١ – ٣ ضرب وقسمة الأعداد المركبة

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

– يضرب الأعداد المركبة بالصيغة الجبرية .
– يتعرّف خواص النظام (م ، $\overset{*}{\cdot}$) .
– يوجد النظير الضربي لعدد مركب .
– يوجد مرافق عدد مركب .
– يقسم الأعداد المركبة .
– يتعرّف حقل الأعداد المركبة (م ، + ، ٠) .

تنفيذ حصص البند

يُنفَّذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : ضرب الأعداد المركبة وخواص النظام (م ، $\overset{*}{\cdot}$)
الحصة الثالثة : مرافق العدد المركب
الحصة الرابعة : قسمة الأعداد المركبة
الحصة الخامسة : الحقل (م ، + ، ٠)
الحصة السادسة : تمارين صفية

التقويم

يتم التقويم بنائياً و في نهاية الحصةالسادسة يُعطى السؤال الآتي أو سؤال شبيه به كخطوة تقويم :

إذا كان $ع_١$ = ٢ + ٣ ت ، $ع_٢$ = –٥ – ٤ ت

فأوجد أ) $ع_٢ \; ع_١$ ب) $\frac{ع_٢}{ع_١}$ جـ) $\frac{ع_١ \; ع_٢}{\overline{ع_١}}$

إرشادات وإجابات : تمارين (١ – ٣)

[١] أ) ٢٦ – ٨ ت   ب) (١٤ ، ٣٢)   جـ) –٢٣ + ٧ ت

ء) ٩١ + ٥٢ت   ه) $\frac{٤ + ٣ت}{٢٥}$ و) – $\frac{٨}{٤١}$ + $\frac{٣١}{٤١}$ ت

ز) – $\frac{٥}{٧}$ – $\frac{٤}{٧}$ ت .

[٢] أ) ٣٢   ب) – $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٤}$ ت   جـ) ٩ + ٢٢ ت

ء) $\frac{–٥ + ٢\sqrt{٣}}{٤}$ – $\frac{(٢ + ٥\sqrt{٣}) ت}{٤}$ هـ) –٣ + ٤ ت

[٣] أ) ت   ب) – ت –٣   جـ) ٢–٣ ت   د) – ٣

هـ) –١١ ت   و) $\sqrt{٣}$ – $\sqrt{٢}$ ت   ز) ت

[٤] أ) ($\frac{١}{٤}$ ، – $\frac{١}{٤}$)   ب) (– $\frac{٥}{٢٩}$ ، $\frac{–٢}{٢٩}$)

جـ) ($\frac{١١}{٣٧٢١}$ ، – $\frac{٦٠}{٣٧٢١}$)   ء) (٠ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$)

هـ) (– $\frac{١}{٤}$ ، – $\frac{١}{٢}$)   و) ($\frac{–١٠}{١٧}$ ، $\frac{–١١}{١٧}$)

[٥] أ) س = ٧ ، ص = ١   ب) س = – $\frac{٣}{٢}$ ، ص = $\frac{–٧}{٢}$

جـ) س = $\frac{١٤}{١٥}$ ، ص = – $\frac{١}{٥}$

[٦] أ) ٩ – ٨ ت   ب) ٩ + ٨ ت

جـ) ٤ + ٤ ت   ء) (– $\frac{١}{٢٩}$ ، $\frac{١٢}{٢٩}$)

هـ) $\frac{–١٤ –٢٣ ت}{٥}$ و) – ٦ ت

[٨] لإيجاد ٢٥ (أ^{٢} + ب^{٢} – ٤٨ أ ب)

نوجد أولاً أ^{٢} ، ب^{٢} ، أب ثم نعوّض في المطلوب السابق ، ويكون الناتج – ٥٧٦

[٩] س = ٢ ، ص = ١   ع$_{١}$ = ٢ + ت ، ع$_{٢}$ = ٢ – ت

[١٠] نعوض عن قيمة ع = $\frac{١ – ت}{٢ + ت}$ في $\frac{ع + ١}{ع}$

ثم يبسّط فيكون الجزء الحقيقي = $\frac{٣}{٢}$ والجزء التخيلي = $\frac{٣}{٢}$

[١٢] س^{٢} + ١ = (س – ت) (س + ت)

١ – ٤ الصورة القطبية للعدد المركب

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

– يوجد مقياس وسعة عدد مركب .
– يتعرّف الصيغة القطبية لعدد مركب .
– يحوّل العدد المركب من الصيغة الجبرية إلى الصيغة القطبية والعكس .
– يضرب الأعداد المركبة بالصيغة القطبية .
– يقسم الأعداد المركبة بالصيغة القطبية .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا الدرس في خمس حصص على النحو الآتي :
الحصة الأولى : التمثيل القطبي للأعداد المركبة .
الحصة الثانية : ضرب الأعداد المركبة بالصيغة القطبية .
الحصة الثالثة : تمارين صفية .
الحصة الرابعة : قسمة الأعداد المركبة بالصيغة القطبية .
الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائيًا و في نهاية الحصة الخامسة يُعطى سؤال كالسؤال الآتي كخطوة تقويم :

ليكن $ع_١ = (١ + \sqrt{٣} ت)$ ، $ع_٢ = [٢ ، \frac{٥\pi}{٣}]$

أوجد : أ) مقياس وسعة $ع_١ ع_٢$ ب) $\frac{ع_١}{ع_٢}$ بالصيغة القطبية .

إرشادات وإجابات : تمارين (١ – ٤)

[١] أ) المقياس ٢ ، السعة $\frac{\pi}{٦}$ ب) المقياس ٣ ، السعة π

جـ) المقياس ٤ ، السعة $\frac{\pi}{٢}$ ء) المقياس ٢ ، السعة $\frac{٥\pi}{٦}$

هـ) المقياس ٦ ، السعة $\frac{٢\pi}{٣}$ و) المقياس ١ ، السعة $\frac{\pi}{٣}$

[٢] أ) $٢\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$) ب) $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٣\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٤}$)

جـ) (جتا $\frac{\pi}{٦}$ + ت جا $\frac{\pi}{٦}$) ء) (جتا $\frac{٣\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{٣\pi}{٢}$)

هـ) ٤ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) و) ٢ (جتا صفر + ت جا صفر)

ز) ٢ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) ح) ٨ (جتا $\frac{٥\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{٥\pi}{٣}$)

ط) (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

[٣] أ) −١ + $\sqrt{٣}$ ت   ب) ٣ ت   جـ) −١

ء) $\frac{-\sqrt{٣} - ت}{٢}$ هـ) $\sqrt{٣}$ + ٣ ت   و) −١ − ت

[٤] ع = ٢ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°) = [٢ ، $\frac{\pi}{٣}$] = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

أ) ع = [٢ ، $\frac{\pi}{٣}$] ، −ع = [٢ ، $\frac{٤\pi}{٣}$] ، $\bar{ع}$ = [٢ ، −$\frac{\pi}{٣}$]

$\frac{١}{ع}$ = [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$] ، $\frac{١}{\bar{ع}}$ = [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٣}$]

ب) ع = [٢ ، $\frac{٥\pi}{٦}$] ، −ع = [٢ ، $\frac{١١\pi}{٦}$] ، $\bar{ع}$ = [٢ ، $\frac{-٥\pi}{٦}$]

$\frac{١}{ع}$ = [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{-٥\pi}{٦}$] ، $\frac{١}{\bar{ع}}$ = [$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$]

جـ) ع = [٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٧\pi}{٤}$] ، −ع = [٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$] ، $\bar{ع}$ = [٢$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]

$\frac{١}{ع}$ = [$\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-\pi}{٤}$] ، $\frac{١}{\bar{ع}}$ = [$\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$ ، $\frac{-٧\pi}{٤}$]

ء) ع = [٨ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] ، −ع = [٨ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، $\bar{ع}$ = [٨ ، $\frac{\pi}{٢}$]

$\frac{١}{ع}$ = [$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، $\frac{١}{\bar{ع}}$ = [$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

[٥] أ) $ع_١ \cdot ع_٢$ = [٦ ، ٧ هـ] ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = [$\frac{٢}{٣}$ ، − هـ]

ب) $ع_١ \cdot ع_٢$ = [١٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = [$\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$]

جـ) $ع_١ \cdot ع_٢$ = [٩ ، −٣٠°] ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = [١٦ ، ٢٧٠°]

ء) $ع_١ \cdot ع_٢$ = [٨ ، ١٢٠°] ، $\frac{ع_١}{ع_٢}$ = [$\frac{١}{٢}$ ، − π]

[٧] $\frac{٥ + ت}{٢ + ٣ ت} \times \frac{٢ - ٣ ت}{٢ - ٣ ت}$ = $\frac{١٣}{١٣}$ − $\frac{١٣}{١٣}$ ت = ١ − ت

س = ١ ، ص = −١ ، ر = $\sqrt{٢}$ ، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ ، ∴ هـ = − $\frac{\pi}{٤}$

$\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{٧\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{٧\pi}{٤}$)

[٨] أ) $ع_١$ = ١ − ت ، $ع_٢$ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت ، س = ١ ، ص = −١

ر = $\sqrt{٢}$ ، جتا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا هـ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ∴ هـ في الربع الرابع

هـ = ٢ π − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٨\pi}{٤}$ − $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{٧\pi}{٤}$

$\therefore$ ع$_1$ = [$\sqrt{2}$ ، $\frac{7\pi}{4}$] ،

ع$_2$ = ١ − $\sqrt{3}$ ت ، س = ١ ، ص = − $\sqrt{3}$ ، ر = ٢ ، جتا هـ = $\frac{1}{2}$ ، جا هـ = − $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ هـ تقع في الربع الرابع ، هـ = $\frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ ع$_2$ = [٢ ، $\frac{5\pi}{3}$] وهي الصيغة القطبية .

ب) ع$_1$. ع$_2$ = [$\sqrt{2}$ ، $\frac{7\pi}{4}$] [٢ ، $\frac{5\pi}{3}$] = [٢ $\sqrt{2}$ ، ٤١ $\frac{\pi}{12}$]

ع$_1$. ع$_2$ = (١ − ت) (١ − $\sqrt{3}$ ت) = (١ − $\sqrt{3}$) − ($\sqrt{3}$ + ١) ت وهي الصيغة الجبرية

[٩] ع$_1$ = ٥ (جتا٣ هـ + جا٣ هـ) ، ع$_2$ = ٣ (جتا هـ − ت جا هـ) = ٣ (جتا(− هـ) + ت جا (− هـ))

أ) ع$_1$. ع$_2$ = ١٥ [جتا ٢ هـ + ت جا(٢ هـ)] = [١٥ ، ٢ هـ] وهي الصيغة القطبية .

ب) ع$_1$. ع$_2^2$ = ٤٥ (جتاهـ + ت جا هـ) وهي الصيغة القطبية .

جـ) ع$_1$. $\overline{ع_2}$ = [١٥ ، − ٢ هـ] وهي الصيغة القطبية .

١ − ٥ القوى والجذور

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

– يتعرّف مبرهنة دي موافر .
– يستخدم مبرهنة دي موافر في إيجاد الجذور والقوى .
– يوجد الجذور التربيعية لعدد مركب بالصيغة الجبرية والصيغة القطبية .
– يوجد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .
– يتعرّف خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا الدرس في ست حصص على النحو الآتي :

الحصتان الأولى والثانية : مبرهنة دي موافر وتطبيقاتها

الحصتان الثالثة والرابعة : الجذور النونية للعدد المركب

الحصتان الخامسة والسادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى السؤال الآتي أو سؤال شبيه به كخطوة تقويم :

أ) احسب $\left(\frac{٥}{\sqrt{٣} + ت} \right)^{١٠}$

ب) إذا كانت $\sqrt{١ + \sqrt{٣}\,ت} = س + ت\,ص$ ، فأوجد قيم س ، ص .

إرشادات وإجابات : تمارين (١ – ٥)

[١] أ) $٤\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢}\,ت$ ب) $-٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$

جـ) ٢٥ (جتا ٨٠° + ت جا ٨٠°) ء) $-٨\,ت$

هـ) $-١٦ - ١٦\sqrt{٣}\,ت$ و) $\left[١ ، \frac{٢\pi}{٣} \right]$

[٢] أ) جتا هـ + ت جا هـ ب) جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ

جـ) جتا (هـ) + ت جا (هـ) د) $\frac{-١}{٨}$

هـ) $[١ ، \pi]$ و) جتا ١٤٧° + ت جا ١٤٧°

[٤] أ) $\pm (٢ + ٢\,ت)$ ب) $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{٢} + ١}{٢\sqrt{٢}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{٢} - ١}{٢\sqrt{٢}}}\,ت \right)$

جـ) $\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{١٦١٨}+٩}{٢}} - \sqrt{\frac{\sqrt{١٦١٨} - ٩}{٢}} \right)$ د) $\pm (٤ - ت)$

هـ) $\pm (٤ + ت)$ و) $\pm (٢ - ت)$

[٥] أ) $\left[\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤} \right] ، \left[\sqrt{٢} ، \frac{٧\pi}{٤} \right]$ ب) $\left[٢ ، \frac{\pi}{٢} \right] ، \left[٢ ، \frac{٣\pi}{٢} \right]$

جـ) $[\sqrt{٢} ، ١٦٥°] ، [\sqrt{٢} ، ٣٤٥°]$ د) $\left[٢ ، \frac{\pi}{٦} \right] ، \left[٢ ، \frac{٧\pi}{٦} \right]$

هـ) $\left[٢ ، \frac{٢\pi}{٣} \right] ، \left[٢ ، \frac{٥\pi}{٣} \right]$ و) $\left[٣ ، \frac{٥\pi}{٦} \right] ، \left[٣ ، \frac{١١\pi}{٦} \right]$

ز) $\left[١ ، \frac{-\pi}{١٢} \right] ، \left[١ ، \frac{١١\pi}{١٢} \right]$ ح) $\left[٢ ، \frac{\pi}{٣} \right] ، \left[٢ ، \frac{٤\pi}{٣} \right]$

ط) $\left[٢ ، \frac{\pi}{٦} \right] ، \left[٢ ، \frac{٧\pi}{٦} \right]$

[٦] أ) $\left[٢ ، \frac{\pi}{٩} \right] ، \left[٢ ، \frac{٧\pi}{٩} \right] ، \left[٢ ، \frac{١٣\pi}{٩} \right]$

ب) $[\sqrt{٢} ، ٤٥°] ، [\sqrt{٢} ، ١٦٥°] ، [\sqrt{٢} ، ٢٨٥°]$

جـ) $\left[\sqrt{٢} ، \frac{\pi}{٤} \right] ، \left[\sqrt{٢} ، \frac{٣\pi}{٤} \right] ، \left[\sqrt{٢} ، \frac{٥\pi}{٤} \right] ، \left[\sqrt{٢} ، \frac{٧\pi}{٤} \right]$

ء) ر = ١ ، $هـ_{١}$ = ٣٠° ثم اضافة ٤٠° حتى $هـ_{٩}$ = ٣٥٠°

هـ) $[٤\sqrt{٢} ، ١٥٠°] ، [٤\sqrt{٢} ، ٣٣٠°]$

و) $\pm (١ + ٢\,ت)$

[٧] أ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت ، $\frac{-\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}$ ت ، – ت

ب) ع^{٣} = $\sqrt{٢}$ + ت ⟸ [$\sqrt[٣]{٢}$ ، $\frac{\pi}{١٨}$] ، [$\sqrt[٣]{٢}$ ، $\frac{١٣\pi}{١٨}$] ، [$\sqrt[٣]{٢}$ ، $\frac{٢٥\pi}{١٨}$]

جـ) [$\sqrt[٤]{٢}$ ، $\frac{\pi}{٦}$] ، [$\sqrt[٤]{٢}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$] ، [$\sqrt[٤]{٢}$ ، $\frac{٧\pi}{٦}$] ، [$\sqrt[٤]{٢}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$]

د) $\sqrt{٣}$ – ت ، ٢ ت ، – $\sqrt{٣}$ – ت

هـ) ٣ ، $\frac{-٣ + ٣\sqrt{٣}\text{ ت}}{٢}$ ، $\frac{-٣ - ٣\sqrt{٣}\text{ ت}}{٢}$

و) [١ ، ٠] ، [١ ، $\frac{٢\pi}{٥}$] ، [١ ، $\frac{٤\pi}{٥}$] ، [١ ، $\frac{٦\pi}{٥}$] ، [١ ، $\frac{٨\pi}{٥}$]

[٨] أ = ± ٤ ، ب = ± ٣

[٩] أ) س = ± ٧ ، ص = ∓ ٢ ب) س = ± ٢ ، ص = ∓ ١

جـ) س = ± ١ ، ص = ± ٤ ء) س = ± ٣ ، ص = ∓ ١

هـ) س = ± $\frac{٣}{٢}$ ، ص = ± ١

[١٠] ع$_{١}^{٢}$ = ٢٥ (جتا٢ هـ – ت جا٢ هـ) الصيغة القطبية

ع$_{١}^{٢}$ = ٢٥ ($\frac{٧}{٢٥}$ – $\frac{٢٤}{٢٥}$ ت) الصيغة الجبرية

ع$_{١}$ · ع$_{٢}$ = ٣٠ (جتاهـ + ت جاهـ) الصيغة القطبية

ع$_{١}$ · ع$_{٢}$ = ٢٤ + ١٨ ت الصيغة الجبرية

[١١] ± $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (١ + ٣ ت)

١ – ٦ حل المعادلات من الدرجة الثانية

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

- يحل معادلات الدرجة الثانية في م .
- يكوّن معادلة من الدرجة الثانية بمعلومية جذريها .
- يوجد مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو الآتي :

الحصة الأولى : حل معادلات من الدرجة الثانية ف م .

الحصة الثانية : تكوين معادلة من الدرجة الثانية بمعلومية جذريها .

الحصة الثالثة : مجموع وحاصل ضرب جذري معادلة من الدرجة الثانية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا، و في نهاية الحصة الثالثة يُعطى سؤال كالآتي كخطوة تقويم :

حل المعادلة ع^{٢} − ٦ ع + ١٣ = ٠ (ع ∈ م)

ثم تحقق من الحل باستخدام مجموع وحاصل ضرب جذريها .

إرشادات وإجابات : تمارين (١ − ٦)

[١] أ) $\frac{-١ \pm \sqrt{٢٣}\,ت}{٦}$

ب) −١ + $\sqrt{٢}$ ت ، −١ − $\sqrt{٢}$ ت

جـ) ٤ + ت ، ٢ − ت

ء) $\sqrt{٢}$ (١ ± ت)

هـ) (١ + ت) ، (١ − $\frac{٣}{٢}$ ت)

و) ت ، ٢ − ت ، −٢ − ت

[٢] أ) ع^{٢} − ١٠ ع + ٣٤ = ٠

ب) ع^{٢} − (٤ + ت) ع + (٢ + ٨ ت) = ٠

جـ) ع^{٢} − (٤ − ٢ ت) ع + (٢ − ٤ ت) = ٠

[٣] أ) { ٣ − ت ، ت }

ب) { ١ + ٢ ت ، ١ − ت }

جـ) { ٠ ، ١ ، $\frac{-١ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢}$ }

ء) { ١ + ت ، ١ − ٢ ت }

هـ) { ٣ ، ت }

و) { ١ + ٢ ت ، ١ − ت }

[٤] س = ٥ ، ص = ± ٤

[٥] مجموعة الحل = { −١ ، ت ، − ت }

١ – ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

يُعطى الاختبار التالي ليقيس أهداف الوحدة حسب الجدول الآتي ، أو أي اختبار آخر من إعداد المدرس يحقق أهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

السؤال	١	٢	٣	٤	٥
الهدف	١ ، ٣	٥	٢ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٠	٤ ، ١١	٩ ، ١٠

الاختبار

١ – بسّط ما يأتي ومثّله بيانياً :

أ) ٢ ت (٤ – ٧ ت) – $\sqrt{-٩}$ (٥ – ٢ ت)

ب) $ت^{د}$ + $ت^{د+١}$ + $ت^{د+٢}$ + $ت^{د+٣}$

٢ – أثبت أن مرافق حاصل ضرب عددين مركبين يساوي حاصل ضرب مرافقيهما

٣ – إذا كان $ع_١$ = ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢$ = [$\frac{١}{٣}$ ، ٤٠°] فأوجد :

أ) $\frac{ع_٢}{ع_١}$ بالصيغة القطبية

ب) $\sqrt{ع_١}$

٤ – حل المعادلة الآتية :

$ع^٢$ – (٥ + ٧ ت) ع – ٦ + ١٧ ت = ٠

٥– أوجد ناتج ($\sqrt{٣}$ – ت $)^٦$

المصطلحات والرموز

Complex numbers	الأعداد المركبة
Imaginary number (i)	العدد التخيلي (ت)
Real Part	الجزء الحقيقي
Imaginary part	الجزء التخيلي
Conjugate	المرافق
Powers of (i)	قوى (ت)
Real Axis	المحور الحقيقي
Imaginery axis	المحور التخيلي
Argand plane	مستوى آرجاند
Argument	سعة
Imaginary number	عدد تخيلي
Reciprocal	مقلوب
Inverse	معكوس
Pure Imaginary number	عدد تخيلي صرف
Pure real number	عدد حقيقي صرف
Cubic roots of unity	الجذور التكعيبية للواحد الصحيح
Polar Form	الصيغة القطبية (المثلثية)
De Moivere's theorem	مبرهنة دي موافر
Modulus	مقياس

المراجع

١) التفاضل والتكامل ، د . محمد رجب ، دار المعارف ، القاهرة يناير ١٩٧٥ م

٢) الرياضيات (التفاضل والتكامل) . د . منير مرسي ، د . عبد الحميد ابراهيم .

٣) أصول تدريس الرياضيات / د . نظلة حسن خضر

4) Manaj Dubey R s Tomer, Question Bank in Mathematics for class IX, second edition,Published by Tata Mc Graw- Hill publishing Company Limited New Delhi 99

5) Allan Bellman,Sadie Chavis Bragg, Suzanne H . Chapin- Theodore J.Gardella Bettye C. Hall - Edward Manfre, Advanced Algebra , Prentice Hall - Needhan Massachusetts upper Saddle River, New Jersey .

6) Senior Secondary School Mathematics, Part A , for Class 12 Printed at B B Printers, Panta - 800 006 , 2000.

الوحدة الثانية

مبدأ العدّ ومبرهنة ذات الحدين

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٢ – ١	مبدأ العد	٣
٢ – ٢	التباديل	٤
٢ – ٣	التوافيق	٥
٢ – ٤	مبرهنة ذات الحدين	٦
٢ – ٥	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	٢٠

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١– يعرّف مبدأ العد ، ويعمِّمه .

٢– يطبّق مبدأ العد في حل بعض المسائل الحسابية من البيئة .

٣– يعرّف مضروب عدد صحيح موجب ويوجد قيمته .

٤– يعرّف مفهوم تباديل ن من العناصر .

٥– يطبّق قاعدة التباديل في حساب توافيق ن من العناصر. مأخوذة ر في كل مرة ($ر \leq ن$) ، ن ، ر $\in$ $ص_{+}$.

٦– يعرّف مفهوم توافيق ن من العناصر .

٧– يطبّق قاعدة التوافيق في حساب توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة ($ر \leq ن$) ، ن ، ر $\in$ $ص_{+}$.

٨– يوجد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ باستخدام مبرهنة ذات الحدين .

٩– يوجد الحد العام من مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ ويوجد أيّ حدّ عُلمت رتبته .

١٠– يوجد الحد الخالي من س ، ومعامل $س^{م}$ ($م \leq ن$) في مفكوك $(س + أ)^{ن}$.

١١– يوجد الحد الأوسط (الحدين الأوسطين) في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$.

المقدمة

سنقدِّم في هذه الوحدة مبادئ التحليل التوافقي ويسمى أيضاً الحساب التوافقي ؛ فنبدأ أولاً بمبدأ العد محاولين توظيف مختلف بنود الوحدة ، والذي سيشمل عناصر عدد ها ن مأخوذة كلها أو بعضًا منها.

ثم بعد ذلك ندرس التوافيق (الاختيار بدون ترتيب) لـ ر عنصراً من مجموعة عدد عناصرها ن (ر $\leq$ ن).

ويتم التمهيد بأمثلة حسية لدراسة التباديل والتوافيق والتي تساعد على استيعاب معنى التبديله والتوفيقة كما تساعد على استنباط القوانين الضرورية التي يتطلبها إثبات مبرهنة ذات الحدين وتطبيقاتها. وتعطى لكل بند من بنود هذه الوحدة مجموعة من التمارين والمسائل وتختتم الوحدة باختبار في كتاب التمارين لحله ومناقشته مع الطلبة في الصف، واختبار في الدليل لتنفيذه كاختبار فعلي نهاية الوحدة .

لمحة تاريخية

منذ القدم والإنسان مهتم بحساب عدد إمكانات حدوث ظاهرة معينة ، كما اهتمت الدولة بعدد إمكانات ترتيب وتوزيع الجيش على المواقع المختلفة أو عدد الطرق الممكنة لتحصيل الضرائب ، . . .

ومن خلال دراسة تاريخ قدماء المصريين والإغريق وغيرهم، ظهرت هناك دلائل تبين معرفتهم بطرق عدّ الإمكانات، وظهر التحليل التوافقي عند اللغويين من جهة وعند علماء الجبر من جهة أخرى ، ثم بعد ذلك تم الربط بينهم ليصبح التحليل التوافقي كأداة رياضية تستعمل في حالات متعددة : لغوية، فلسفية ، رياضية ،...إلخ .

في القرن التاسع للميلاد طرح اللغويون والفلاسفة مسائل تتعلق باللغة في ثلاثة ميادين خاصة :

علم المنطقيات والمعاجم وعلم الرموز. و سُجّل تاريخ هذه العلوم باسم الخليل بن أحمد الفراهيدي (٧١٨–٧٨٦م) الذي استعان بشكل صريح بحساب الترتيبات (التباديل) والتوافيق في سبيل إعداد علم المعاجم العربي، مستخدماً ترشيد (عقلنة) الممارسات التجريبية للمعجمين ، وتوصل إلى تعداد كلمات اللغة بطريقة وافية من جهة ، ووجد وسيلة لقيام تناظر متعاكس بين مجموعة الكلمات وخانات المعجم من جهة أخرى . وقال إن الترتيب من ر إلى ر حرفاً يعطينا مجموعة المصادر وبالتالى الكلمات الممكنة وعدد الترتيبات هو :

$\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = \dfrac{\underline{|\text{ن}}}{\underline{|\text{ن} - \text{ر}}}$ حيث ن هو عدد الأحرف الأبجدية جميعها (ن = ٢٨) ، ر عدد أحرف المصدر للكلمة العربية المراد ترتيبها (٥ $\leq$ ر $>$ ١) ولقد بدأ الخليل تأليف المعجم بحساب عدد التوافيق – دون تكرار – لأحرف الأبجدية من ر إلى ر حرفًا حيث ر $\in$ {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ثم حسب عدد التبديلات في كل مجموعة من ر حرفًا وبتعبير آخر قام بحساب $\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = \underline{|\text{ر}}\ \text{ق}_{\text{ر}}^{\text{ن}}$ حيث ن هو عدد الأحرف الأبجدية ، ٥ $\leq$ ر $>$ ١ ، .

وأثناء هذا النشاط التوافيقي أعلن علماء الجبر وبرهنوا في نهاية القرن العاشر الميلادي قاعدة تشكيل المثلث الحسابي لاحتساب معاملات مفكوك ذي الحدين . فقد أعطى الكرخي (٤٢١ هـ –١٠٢٠م) القاعدة :

$$ق^{ن}_{ر} = ق^{ن-١}_{ر-١} + ق^{ن-١}_{ر} .$$

والمفكوك : $(أ + ب)^{ن} = \sum_{ر=٠}^{ن} ق^{ن}_{ر} \; أ^{ن-ر} \; ب^{ر}$

وكانت هذه هي أول مرة يذكر فيها المثلث الحسابي في تاريخ الرياضيات قاطبة ، وقد أورد الكرخي كيفية برهان قاعدة تكوين هذا المثلث وكذلك حول فك ذي الحدين .

ولقد اكتشف الباحثان صلاح أحمد ورشدي راشد مخطوطة اسمها (الباهر في الجبر) للسموأل المغربي (١١٧٥م) في أسطنبول، توضح هذه المخطوطة أن مثلث معاملات ذات الحدين يجب أن ينسب لصاحبها الكرخي وليس كما يسميه علماء الغرب مثلث باسكال، كما كان لعالم الرياضيات العربي نصير الدين الطوسي (١٢٠١ – ١٢٧٤م) باع طويل في حساب عدد الإمكانات باستخدام التباديل والتوافيق . كما اهتم كاردان (١٥٠١–١٥٧٦م) بحساب عدد الإمكانات بطريقة تسمى بالمبدأ الأساسي للعد .

وفي عام ١٦٥٣م نشر الفرنسيان فيرمات (١٦٠١– ١٦٦٥م) وباسكال (١٦٢٣ – ١٦٦٢م) أول نظريات متكاملة عن العدد والاحتمالات، ويعتقد البعض أن الاستقراء الرياضي هو من منجزات القرن السابع عشر وينسب بالدرجة الأولى إلى باسكال، ولكن هناك من يقول إن موردليكو هو المكتشف الأول لمبدأ الأستقراء الرياضي ، وهو عالم رياضي من القرن السادس عشر للميلاد وليس باسكال . إلا أن رشدي راشد ذكر في كتابه تاريخ الرياضيات العربية ، أن هناك محاولات أكثر أهمية وسابقة ليس لموردليكو بل أيضاً لليفي بن جرسون وموجودة عند رياضيين عرب، أحدهما لديه أعمال معروفة من قِبَل المؤرخين وهو الكرخي والآخر اكتشف أهميته حديثاً وهو السموأل، حيث استخدما طرقًا جديدة من البراهين . والبعض الآخر يرى أن موضوع الاستقراء الرياضي موجود حتى عند إقليدس . أما بيانو (١٨٥٨ – ١٩٣٢م) فقد قدّم مفهوم الاستقراء الرياضي بأنه ذلك الاستدلال المبنى على الإثبات أو مكافئ له ، مثل : إذا كانت ج (ن) خاصية معرّفة لعدد ما $ن \in ط^{*}$ وإذا كانت ج (ن) $\Leftarrow$ ج (ن + ١) فإن ج (ن) صحيحة لكل $ن \in ط^{*}$.

وهذا مرتبط بنظام المسلّمات التام – المعروف بنظام بيانو للأعداد الطبيعية .

خلفية علمية

أولاً : المفاهيم والمصطلحات والرموز

– المبدأ الأساسي للعد .

– تباديل ن من العناصر ، $ل^{ن}_{ن}$

– مضروب العدد ن ، $\underline{|ن}$

– تباديل ن من العناصر مأخوذة ر اءً في كل مرة ، $ل^{ن}_{ر}$

– توافيق ن من العناصر مأخوذة ر اءً في كل مرة $ق^{ن}_{ر}$

– مفكوك ذي الحدين ، $(أ + ب)^{ن}$.

– الحد العام في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ ، $ح_{ر+١}$

– معامل الحد الذي يحوي $س^{م}$ ، $م \geq ن$.

– الحد الأوسط أو الحدان الأوسطان في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$.

ثانياً : حقائق وتعميمات

- $\underline{|ن} = ن\,(ن-1)\,(ن-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ • $\underline{|ن} = ن\,\underline{|ن-1}$
- $\underline{|ن} = ن\,(ن-1)\,\underline{|ن-2}$ • $\underline{|1} = 1$ ، $\underline{|0} = 1$
- ${}^{ن}ل_{ر} = ن\,(ن-1)\,(ن-2)\cdots(ن-ر+1)$ • ${}^{ن}ل_{ن} = ن\,(ن-1)\,(ن-2)\ldots\times 2 \times 1 = \underline{|ن}$
- ${}^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ • ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}}$
- ${}^{ن}ق_{ن} = 1$ ، ${}^{ن}ق_{0} = 1$ ،   • ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$
- ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

- $(أ+ب)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$ ، $ن \in ص_{+}$
- $(1+س)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\ س^{ر}$.

$= 1 + {}^{ن}ق_{1}\ س + {}^{ن}ق_{2}\ س^{2} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن}\ س^{ن}$

- $(1-س)^{ن} = \sum_{ر=0}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\ (-س)^{ر}$

$= 1 - {}^{ن}ق_{1}\ س + {}^{ن}ق_{2}\ س^{2} - \ldots \pm {}^{ن}ق_{ن}\ س^{ن}$

- ${}^{ن}ق_{0} + {}^{ن}ق_{1} + {}^{ن}ق_{2} + \ldots + {}^{ن}ق_{ن} = 2^{ن}$
- $ح_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\ أ^{ن-ر}\ ب^{ر}$ (الحد العام في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$)

فإذا كانت $ن$ زوجية فإنه يتعين حد أوسط واحد لمفكوك $(أ+ب)^{ن}$ ترتيبه $\frac{ن}{2} + 1$ ،
إما إذا كانت $ن$ فردية فإنه يتعين حدان أوسطان لمفكوك $(أ+ب)^{ن}$ ،
ترتيب الأول منهما هو $\frac{ن+1}{2}$ وترتيب الثاني $\frac{ن+1}{2} + 1 = \frac{ن+3}{2}$

المبدأ الأساسي للعد

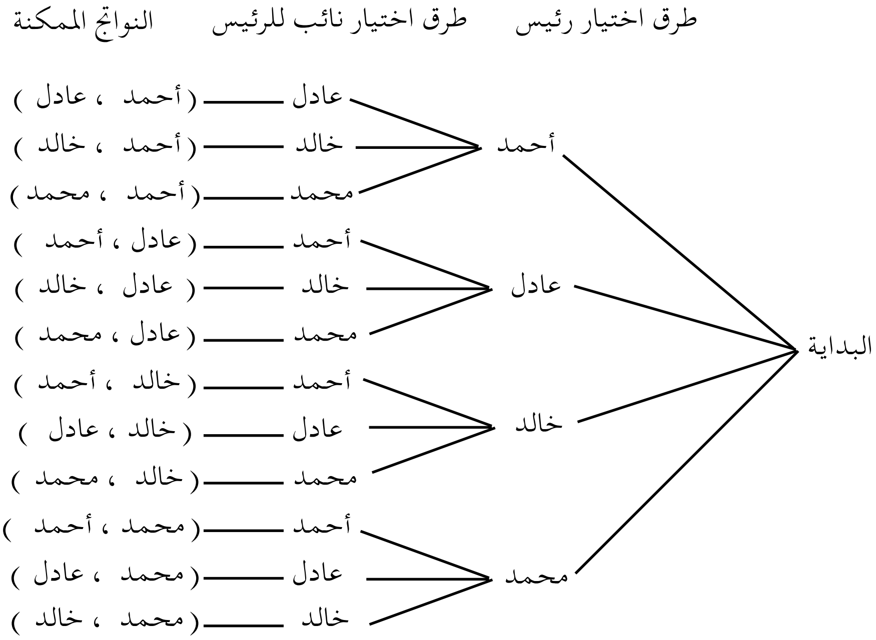
نقول عن مجموعة ما بأنها قابلة للعد في حال استطعنا تطبيقها على ط بواسطة تقابل ، أي نستطيع ترقيم عناصرها بهدف عدّها . ومسائل العد تشكل فرعاً هاماً من أبحاث الرياضيات ، وهناك طرق منتظمة تساعد على إيجاد عدد الطرق الممكنة لإجراء عملية مكونة مـن عدة خـطوات ، أو لإجـراء عدة عمليات معاً أو متتالية دون استخدام العد المباشر ، توفيراً للوقت والجهد ، وتحتوى طرق العد أيضاً موضوعات مثل التحليل (الحساب) التوافقي والترتيبات (التباديل) وكذلك التحليل العاملي (المضروبات) .

ويمكن توضيح مبدأ العد من خلال ما يأتي :

افترض أن مجلس إدارة إحدى الشركات يتكوّن من أربعة أشخاص هم : أحمد ، عادل ، خالد ، محمد ؛ وأردنا اختيار رئيس ونائب للرئيس من بينهم .

فإنه لمعرفة عدد الطرق الممكنة للقيام بهذا الاختيار بالعد المباشر، يلزمنا كتابة جميع النواتج الممكنة ثم عدّها .

والشكل التالي (ويسمّى مخطط الشجرة) يوضّح طرق اختيار الرئيس ونائب الرئيس والنواتج الممكنة :



عدد طرق اختيار الرئيس ٤ طرق ويقابل كل منها ٣ طرق لاختيار النائب ، فيصبح عدد النواتج الممكنة ١٢طريقة . ونلاحظ أن الاختيار (أحمد ، عادل) يختلف عن الاختيار (عادل ، أحمد) فالأول يعني أن أحمد هو الرئيس، وعادل نائبه؛ أما الثاني فيعني أن عادل هو الرئيس وأحمد نائبه؛ أي أن الترتيب هنا مهم .

إن اللجوء للعدّ والاستعانة بمخطط الشجرة لمعرفة عدد النواتج ليس دائماً بالأمر اليسير . فلو كان عدد أعضاء مجلس الإدارة خمسة وعشرين عضواً وأردنا اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين سر لأصبح من الصعب رسم المخطط الشجري ومعرفة عدد الطرق الممكنة لاختيارهم لذا سنتناول عملية الاختيار بطريقة أخرى :

ففي المثال السابق ، نجد أن اختيار رئيس ونائبه من بين الأعضاء الأربعة { أحمد ، خالد ، عادل ، محمد } يتم في عمليتين متتاليتين .

الأولى : هي عملية اختيار الرئيس وتتم بطرق عددها أربع حيث يمكن اختياره من الأشخاص الأربعة .

والثانية: هي عملية اختيار النائب وتتم بطرق عددها ثلاث حيث يمكن اختياره من الأشخاص الثلاثة الباقين بعد اختيار الرئيس ، أي أن مقابل كل طريقة لاختيار الرئيس توجد ثلاث طرق لاختيار النائب.

وعليه يكون عدد طرق اختيار الرئيس ونائبه = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة .

ومن تلك الحالة نستطيع الوصول إلى الصورة العامة ، إذا تمت عمليات $ع_1$ ، $ع_2$ ، . . . ، $ع_م$ وعددها م على التوالي وكان عدد إمكانات كل منها على الترتيب هو $ن_1$ ، $ن_2$ ، . . . ، $ن_م$ ؛ فإن :
عدد إمكانات العملية المركبة من هذه العمليات على التوالي = $ن_1 \times ن_2 \times . . . \times ن_م$.

ملحوظة عدد الطرق الممكنة لإجراء العمليات معاً (أو على التوالي) لا يتغير بتغير ترتيب إجراء العمليات .

تبـاديل ن من العناصـر

لتكن سہ = { ا ، ب ، جـ } يسمّى كل ترتيب للعناصر ا ، ب ، جـ تبديلاً لعناصر المجموعة سہ ، وتكون جميع التبديلات المختلفة لعناصر المجموعة سہ هي جميع الصور المختلفة لترتيب عناصرها ، وهذه التبديلات هي :

ا ب جـ　　　ب ا جـ　　　جـ ا ب
ا جـ ب　　　ب جـ ا　　　جـ ب ا

ونجد أن عدد التبديلات الممكنة لعناصر المجموعة سہ = ٦ ويمكننا استخدام مبدأ العد للحصول على عدد تباديل عناصر المجموعة سہ .فالمكان الأول في التبديل يمكن تعبئته بطرق عددها = ٣ وذلك بوضع ا أو ب أو جـ ؛ والمكان الثاني يمكن تعبئته بطريقتين، فإذا كان ا في المكان الأول فإننا نضع في المكان الثاني ب أو جـ والمكان الثالث يمكن تعبئته بطريقة واحدة فقط . وعليه يكون عدد التبديلات الممكنة لعناصر المجموعة سہ مساوياً ٣ × ٢ × ١ = ٦ تسمّى الصورة ٣ × ٢ × ١ مضروب العدد ٣ ويرمز لها بالرمز $\lfloor\underline{٣}$ أي أن
$\lfloor\underline{٣}$ = ٣ × ٢ × ١ وكما يرمز لها أيضاً بالرمز (٣ !)
بالمثل إذا كان عدد عناصر المجموعة سہ = ٤ فإن عدد التبديلات الممكنة لعناصرها
= ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $\lfloor\underline{٤}$. وبصورة عامة :
إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن عدد تباديل عناصر مختلفة عددها ن يساوي $\lfloor\underline{ن}$ (ويقرأ مضروب ن)
حيث : $\lfloor\underline{ن}$ = ن × (ن − ١) (ن − ٢) × . . . × ٣ × ٢ × ١ ، ن ∈ $ص_+$

ملحوظة إذا كان كل من م ، ن ∈ $ص_+$ وكان $\lfloor\underline{م}$ = $\lfloor\underline{ن}$ فإن م = ن .

عدد تباديل ن من الأشياء المختلفة مأخوذة ر في كل مرة

لنفرض أننا نرغب في تكوين الألفاظ ذات الثلاثة الأحرف من الحروف الخمسة س ، ص ، ع ، ن ، م لذلك نتصور أنه لدينا ثلاثة أماكن خالية ، ونريد أن نرتب فيها هذه الحروف الخمسة بجميع الطرق المختلفة فإنه يمكن أن نشغل المكان الأول بأخذ حرف من هذه الحروف الخمسة بطرق مختلفة عددها ٥ ، وحتى شغل المكان الأول بأية طريقة من هذه الطرق يمكن شغل المكان الثاني بأخذ حرف من الأحرف الأربعة الباقية بطرق عدد ها ٤ ، وكذلك يمكن شغل المكان الثالث بطرق عدد ها ٣ :

٥	٤	٣

بناء على قاعدة مبدأ العد يكون عدد طرق شغل الأماكن معا هو : ٥ × ٤ × ٣

إذن عدد طرق ترتيب خمسة عناصر مأخوذة ثلاثاً ثلاثاً يساوي ٥ × ٤ × ٣ ، ويرمز عادة لعدد طرق ترتيب أو تبديل خمسة أشياء مختلفة مأخوذة ثلاثاً ثلاثاً بالرمز $^{٥}ل_{٣}$ ؛ وتُقرأ "خمسة تبديل ثلاثة" ويدل الرمز ل على كلمة **تباديل** .

∴ $^{٥}ل_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ ، بالمثل

$^{٥}ل_{٤}$ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٢٠

$^{٧}ل_{٣}$ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٨٤٠

وعلى العموم يستعمل الرمز $^{د}ل_{ر}$ للدلالة على تباديل د من العناصر المختلفة ، مأخوذة راءً ، راءً حيث ر ≤ د .

إيجاد قيمة $^{د}ل_{ر}$

نفرض أنه توجد حروف مختلفة عددها د ، توجد أماكن خالية عددها ر.

إذن يمكن شغل المكان الأول بطرق عددها د ، وبعد شغل المكان الأول يمكن شغل المكان الثاني بطرق عددها د – ١ من الحروف . إذن يمكن شغل المكان الثاني بطرق عددها (د – ١) أي : د – (٢ – ١) .

وبعد شغل المكان الثاني بأحد الحروف يبقى (د – ٢) من الحروف . إذن يمكن شغل المكان الثالث بطرق عددها (د – ٢) أي أن : د – (٣ – ١)

وعلى العموم يمكن شغل المكان الرائى بطرق عددها د – (ر – ١) أي أن : د – ر + ١

وحيث أن جميع طرق شغل الأماكن مرتبطة ببعضها ينتج أن عدد الطرق التي يمكن أن تشغل بها الأماكن هي : د (د – ١) (د – ٢) . . . (د – ر + ١)

أي أن : $^{د}ل_{ر}$ = د (د – ١) (د – ٢) . . . (د – ر + ١)

وإن الرمز $^{د}ل_{ر}$ يدل على حاصل ضرب عوامل عددها ر تبدأ من د وكل عامل منها يصغر بقدر واحد عن سابقه ، ويلاحظ أن العامل الأخير في حاصل الضرب يزيد على الفرق بين د ، ر بقدر ١ ؛ فمثلاً :

$^{١٢}ل_{٧}$ = ١٢ × ١٠ × . . . × (١٢ – ٧ + ١)

= ١٢ × ١١ × ١٠ × . . . × ٦ .

وفي حالة ما إذا كان عدد الأشياء يساوي عدد المواضع إي ر = د فإن :

$^{د}ل_{د}$ = د (د – ١) (د – ٢) . . . (د – د + ١)

= د (د – ١) (د – ٢) . . . (١) .

= $\underline{|د}$.

مضروب ن هو حاصل ضرب عوامل أولها ن وكل عامل ينقص عن سابقه بمقدار الواحد (١) وآخر عامل من حاصل الضرب هو ١ .

فمثلاً $\underline{|٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$ ؛ أي إذا تبدلت ستة عناصر مختلفة في ستة أماكن يكون عدد الطرق = ٧٢٠

تأمل مايأتي :

$$\underline{|٨} = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

$$= ٨ \, \underline{|٧}$$

أو $\underline{|٨} = ٨ \times ٧ \, \underline{|٦}$

أو $\underline{|٨} = ٨ \times ٧ \times ٦ \, \underline{|٥}$ وهكذا

$$\therefore \underline{|ن} = ن\,(ن-١)\,\underline{|ن-٢} \ .$$

لتكن $ل^{ن}_{ر} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots(ن-ر+١)$

$$= \frac{ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots(ن-ر+١)\,\underline{|ن-ر}}{\underline{|ن-ر}}$$

$$= \frac{ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\cdots(ن-ر+١)\,(ن-ر)\,\underline{|(ن-ر-١)}}{\underline{|ن-ر}}$$

$$= \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$$

نتيجة : لإثبات أن : $\underline{|٠} = ١$ نتبع الآتي :

$\because ل^{ن}_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$ بوضع ر = ن ؛ ينتج أن $ل^{ن}_{ن} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ن}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٠}}$

$$\therefore \underline{|ن} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|٠}} \Leftarrow \underline{|٠} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن}} = ١$$

تعلم أن عدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة كلها = $\underline{|ن}$.

وعدد تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة ر في كل مرة = $ل^{ن}_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}}$

ماذا لو تشابهت بعض هذه العناصر ؟

للإجابة على هذا السؤال ، نعتبر أن المطلوب هو إيجاد عدد تباديل أحرف كلمة (حزيز)، على سبيل المثال، عدد تباديل الحروف الأربعة = $\underline{|٤}$ = ٢٤ ، ولكن في حالتنا هذه ستتطابق بعض التبديلات لعدم التمييز بين الحرفين ز ، ز فإذا رمزنا لهما بالرمزين $ز_١$ ، $ز_٢$ فإن ($ز_١$ ، ح ، ي ، $ز_٢$)،
($ز_٢$ ، ح ، ي ، $ز_١$) سيتطابقان ويظهران بالصورة (ز ، ح ، ي ، ز) ، (ز ، ح ، ي ، ز)

وحيث أن عدد تباديل الحرفين المتشابهين = $\underline{|٢} = ٢ \times ١ = ٢$

$\therefore$ عدد تباديل أحرف كلمة « حزيز » = $\frac{\underline{|٤}}{\underline{|٢}} = ١٢$

وعموماً إذا تشابهت بعض هذه العناصر فإننا نستخدم القاعدتين الآتيتين :

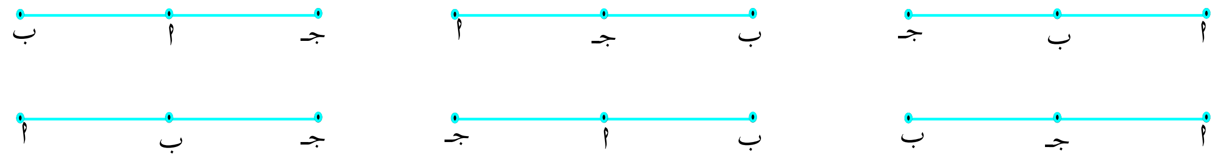
١) عدد تباديل ن من العناصر تضم م من العناصر المتشابهة $= \frac{\underline{|\,ن}}{\underline{|\,م}}$

٢) عدد تباديل ن من العناصر تضم م من العناصر المتشابهة وَ ل من العناصر الأخرى المتشابهة $= \frac{\underline{|\,ن}}{\underline{|\,م}\ \underline{|\,ل}}$ وهكذا .

ويوجد فرق بين عدد تباديل ن من العناصر على خط مستقيم (التبديل الخطي) وبين عدد تباديل ن من الأشياء على دائرة (التبديل الدائري) فعدد تباديل ٣ عناصر على خط مستقيم $= \underline{|\,٣} = ٣ \times ٢ \times ١ = ٦$،

أنظر لما يأتي :

التبديل على خط مستقيم :

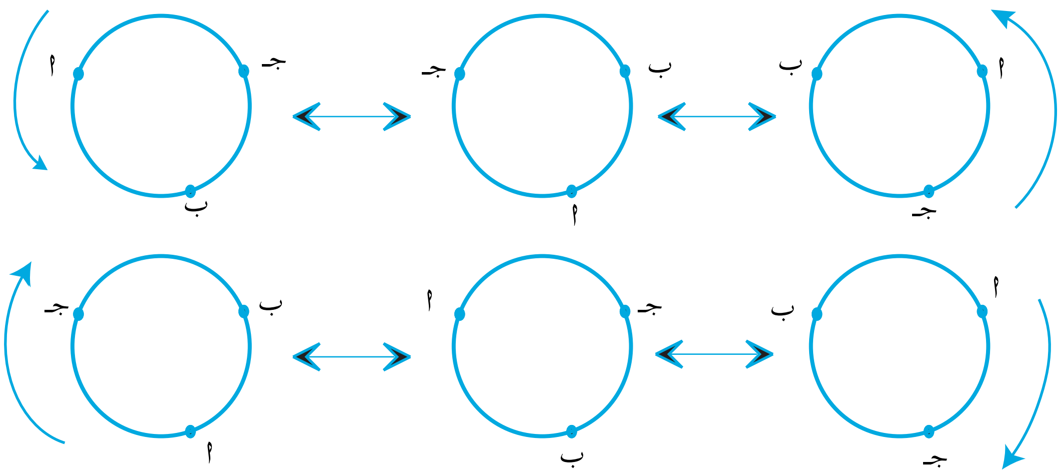


التبديل على خط مستقيم

نلاحظ أن عدد التبديلات على خط مستقيم = ٦

والآن ما عدد تباديل ٣ عناصر على دائرة ؟

١ – التبديل على دائرة : (بدون تثبيت أي نقطة) .



عدد التبديلات على دائرة = ٢ فقط .

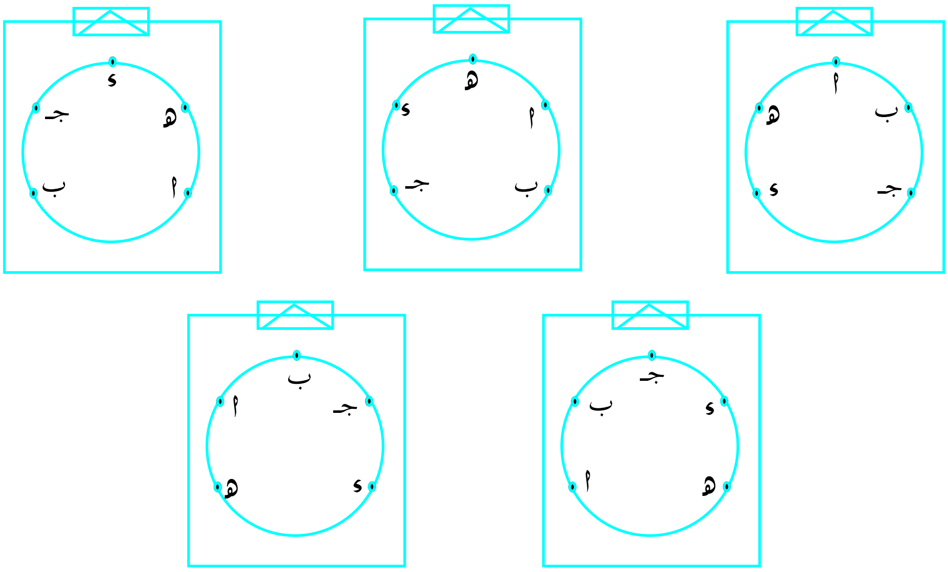
لأن التبديلات الثلاثة الأولى واحدة ، والتبديلات الثلاثة الثانية واحدة .

أي أن تباديل ٣ عناصر على دائرة $= \frac{\underline{|\,٣}}{٣} = ٢$

وبصورة عامة : ، عدد تباديل ن من العناصر على دائرة $= \underline{|\,ن - ١}$

٢ – التبديل على دائرة : (بتثبيت نقطة واحدة) : إذا قمنا بتبديل ن من العناصر على دائرة بالنسبة لنقطة ثابتة محددة فإننا نتعامل مع تبديل خطي ويكون عدد التباديل = |ن

فمثلاً بكم طريقة يمكن ترتيب ٥ تلاميذ على طاولة مستديرة بحيث يجلس أحدهم مجاوراً لنافذة الغرفة؟ (في الغرفة نافذة واحدة) نوضح ذلك كالآتي :



نجد أن هذه التبديلات جميعها مختلفة لأنه يجلس تلميذ مختلف مجاوراً للنافذة وعدد هذه التبديلات = |٥ = ١٢٠ .

التوافيق (الاختيار دون ترتيب)

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار ر من العناصر من مجموعة بها ن عنصراً دون اعتبار للترتيب يُسمّى **عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة راء راء .** إذا أمعنا النظر في هذ التعريف فإننا نلاحظ أن عدد هذه التوافيق ما هو إلا عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على ر من العناصر .

نرمز لعدد توافيق ن عنصراً مأخوذه ر كل مرة بالرمز قرن] كما يرمز لها أيضاً بالرمز ق(ن ، ر) أو (ن ر) .

ونلاحظ أن **الفرق الأساسي بين التباديل والتوافيق هو في الترتيب .**

فمثلاً ا ب جـ ، ب جـ ا تبديلان مختلفان للعناصر ا ، ب ، جـ ، بينما هما التوفيق نفسه .

توضيح آخر : إذا أراد الاتحاد العام لكرة القدم في اليمن إجراء مباريات ثنائية بين فرق النوادي { الأهلي ، الزهرة ، الوحدة ، الشعب } على نسق مباريات كؤوس العالم [أ ي لا يوجد ذهاب و إياب بين كل فريقين] . فإنه يقسّم هذه النوادي إلى مجموعات جزئية كل منها تحتوي على ناديين على النحو التالي :

(١) { الأهلي ، الزهرة }   (٢) { الأهلي ، الوحدة }   (٣) { الأهلي ، الشعب }

(٤) { الزهرة ، الوحدة }   (٥) { الزهرة ، الشعب }   (٦) { الوحدة ، الشعب }

نلاحظ أن عدد المجموعات الجزئية ٦ .

كما نلاحظ أن المباراة بين الأهلي والزهرة هي نفسها المباراة بين الزهرة والأهلي .

كل مجموعة من المجموعات الست السابقة تسمى توفيق بين شيئين مختارين من بين الأربعة الأشياء، ويكون عدد توافيق أربعة أشياء مأخوذة اثنين اثنين هو $ق^{٤}_{٢}$.

ربما يبادر لذهنك السؤال الآتي :

ما العلاقة بين $ق^{٤}_{٢}$ ، $ل^{٤}_{٢}$ ؟

والجواب عن ذلك هو :

إن التوفيق (الأهلي ، الزهرة) يمكن أن توضع على شكل تبديلين هما :

(الأهلي ، الزهرة) و (الزهرة ، الأهلي) وبالمثل يمكن إيجاد تبديلين لكل توفيق من التوافيق السته المذكورة

أي أن : $ق^{٤}_{٢} \times \underline{|٢} = ل^{٤}_{٢}$

مثال آخر :

كم عدداً مختلفاً ينتج من ضرب ثلاثة أعداد من مجموعة الأعداد { ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } ؟

إن عدد الاختيارات (التوافيق) هو $ق^{٥}_{٣}$ حيث يحتوي كل توفيق على ثلاثة أعداد مضروبة في بعضها

مثل ٣ × ٧ × ٩ ، ٣ × ٧ × ٤ ، . . . ، وهكذا

إن التوفيق ٣ × ٧ × ٩ ، يمكن أن يُرتب بطرق عددها $ل^{٣}_{٣} = \underline{|٣}$ وهذه التبادل هي :

٣ × ٧ × ٩	٣ × ٩ × ٧	٧ × ٩ × ٣
٧ × ٣ × ٩	٩ × ٧ × ٣	٩ × ٣ × ٧

وهذا صحيح لكل توفيق من التوافيق $ق^{٥}_{٣}$

إذن $ق^{٥}_{٣} \times \underline{|٣}$ = عدد تباديل مجموعة مكونة من خمسة عناصر مأخوذة ثلاثة ثلاثة

أي أن $ق^{٥}_{٣} \times \underline{|٣} = ل^{٥}_{٣}$

إن الأمثلة السابقة ومثيلاتها تقودنا بصورة عامة إلى ما يلي :

بما أن $ق^{ن}_{ر}$ يعني عدد توافيق (اختيارات) ن شيئاً مأخوذة راءً راءً ، وبما أنه يوجد $ل^{ر}_{ر} = \underline{|ر}$ من التباديل لكل اختيار فإن :

$ق^{ن}_{ر} \times \underline{|ر} = ل^{ن}_{ر}$ ؛ ومن ذلك نستنتج أن $ق^{ن}_{ر} = \dfrac{ل^{ن}_{ر}}{\underline{|ر}} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن-ر}}$

حيث . $ن \geq ر \geq$.

ملاحظات في كتاب الطالب برهنا على أن : $ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن-ر}$ ويقودنا ذلك لما يأتي :

١ – إذا كان $ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{هـ}$ فإن $ر = هـ$ أو $ر + هـ = ن$

٢ – $\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$

لإثبات ذلك : $\frac{ق^{ن}_{ر}}{ق^{ن}_{ر-١}} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \div \frac{ن!}{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!}$

$$= \frac{\cancel{ن!}}{ر!\,(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!}{\cancel{ن!}} = \frac{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!}{ر!\,(ن-ر)!}$$

$$= \frac{\cancel{(ر-١)!}\,(ن-ر+١)\,\cancel{(ن-ر)!}}{ر\,\cancel{(ر-١)!}\,\cancel{(ن-ر)!}} = \frac{ن-ر+١}{ر} \,.$$

مبرهنة ذات الحدين

كل مقدار جبري مكوّن من مجموع حدين أو فرقهما نسميهما ثنائي الحدين بينما نسمّي عملية ضرب ثنائي الحدين (س + أ) في ثنائي الحدين (س + أ) بمفكوك الضرب أو بمنشوره، ومبرهنة ذات الحدين تعطينا كل حد في مفكوك ضرب ذات الحدين عندما يكون مرفوعاً لقوة صحيحة ($ن^{+}$) ($ن \in ص_{+}$) دون المرور بالعمليات الحسابية .

وتنص مبرهنة ذات الحدين على أنه إذا كانت ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$(أ+ب)^{ن} = ق^{ن}_{٠}\, أ^{ن}\, ب^{٠} + ق^{ن}_{١}\, أ^{ن-١}\, ب + ق^{ن}_{٢}\, أ^{ن-٢}\, ب^{٢}$$
$$+ ق^{ن}_{٣}\, أ^{ن-٣}\, ب^{٣} + \dots + ق^{ن}_{ن}\, أ^{٠}\, ب^{ن}$$
$$= \sum_{ر=٠}^{ن} [\, ق^{ن}_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر} \,]$$

البرهان :

يمكن أن نثبت هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي كالآتي :

١) بوضع $ن = ١$ ، نجد أن الطرف الأيمن $= (أ + ب)^{١} = أ + ب$

والطرف الأيسر $= ق^{١}_{٠}\, أ^{١}\, ب^{٠} + ق^{١}_{١}\, أ^{٠}\, ب^{١} = أ + ب$

إذن المبرهنة صائبة في حالة $ن = ١$.

٢) نفرض صواب المبرهنة في حالة $ن = ك$. أي أن :

$$(أ + ب)^{ك} = ق^{ك}_{٠}\, أ^{ك}\, ب^{٠} + ق^{ك}_{١}\, أ^{ك-١}\, ب^{١} + ق^{ك}_{٢}\, أ^{ك-٢}\, ب^{٢} + \dots$$
$$+ ق^{ك}_{ر}\, أ^{ك-ر}\, ب^{ر} + \dots + ق^{ك}_{ك}\, أ^{٠}\, ب^{ك} \quad \dots\dots\dots (١)$$

٣) لكي نثبت صواب المبرهنة في حالة $ن = ك + ١$ ننطلق من العلاقة (١) ، فنضرب طرفي العلاقة (١) في (أ + ب) لنحصل على :

$$(أ + ب)(أ + ب)^{ك} = (أ + ب)[ق^{ك}_{٠} أ^{ك} + ق^{ك}_{١} أ^{ك-١} ب + ق^{ك}_{٢} أ^{ك-٢} ب^{٢} + \ldots + ق^{ك}_{ر} أ^{ك-ر} ب^{ر} + \ldots + ق^{ك}_{ك} ب^{ك}] .$$

$$\therefore (أ + ب)^{ك+١} = أ^{ك+١} + [ق^{ك}_{١} + ق^{ك}_{٠}] أ^{ك} ب + [ق^{ك}_{٢} + ق^{ك}_{١}] أ^{ك-١} ب^{٢} + \ldots + [ق^{ك}_{ر} + ق^{ك}_{ر-١}] أ^{ك+١-ر} ب^{ر} + \ldots + ب^{ك+١} .$$

وبما أن : $(ق^{ن}_{ر} + ق^{ن}_{ر-١} = ق^{ن+١}_{ر})$

$$\therefore (أ + ب)^{ك+١} = أ^{ك+١} + ق^{ك+١}_{١} أ^{ك} ب + ق^{ك+١}_{٢} أ^{ك-١} ب^{٢} + \ldots + ق^{ك+١}_{ر} أ^{ك+١-ر} ب^{ر} + \ldots + ب^{ك+١} \quad \ldots\ldots\ldots (٢)$$

وعلى هذا فإن المبرهنة صائبة $\forall\ ن \in ط^{*}$.

خـواص مـفكوك ذات الحـدين $(س + أ)^{ن}$

١ – تظهر قيمة س في الحد الأول من المفكوك بقوة ن ثم تبدأ في التناقص إلى أن تصل قيمتها الصفر في الحد الأخير . بينما قوه الحد الثاني من ثنائي الحدين تبدأ من الصفر وتأخذ بالتزايد إلى أن تصل قيمتها في الحد الأخير من المفكوك بقوة ن

٢ – مجموع قوتي س ، أ في أي حدين من حدود المفكوك تساوي دائماً ن .

٣ – أ) إذا كانت قيمة ن زوجية فيوجد في المفكوك حد أوسط واحد رتبته $\frac{ن}{٢} + ١$ في المفكوك العام

ب) إذا كانت ن فردية فيوجد في المفكوك حدين أوسطين رتبتهما $\frac{ن+١}{٢}$ ، $\frac{ن+١}{٢} + ١$

٤ – معاملات أي حدين متساويين في البعد عن طرفي المفكوك تكون متساوية ، وهذا يحقق الخاصية الأساسية للتوافيق $ق^{ن}_{ر} = ق^{ن}_{ن-ر}$

ومن هذه الخاصية يمكننا استنتاج العلاقات التالية :

$$ق^{ن}_{ر} = ق^{ن-١}_{ر} + ق^{ن-١}_{ر-١}$$

ويمكننا حساب هذه المعاملات من الصفر وحتى د من خلال مثلث الكرخي (المعروف بمثلث باسكال) .

د = ٠   ١
د = ١   ١   ١
د = ٢   ١   ٢   ١
د = ٣   ١   ٣   ٣   ١
د = ٤   ١   ٤   ٦   ٤   ١
د = ٥   ١   ٥   ١٠   ١٠   ٥   ١
د = ٦   ١   ٦   ١٥   ٢٠   ١٥   ٦   ١

٥ – الحد العام في مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{د}$ هو الحد الذي ترتيبه ر + ١ (لأننا نبدأ من ر = ٠)

$$\therefore\ ح_{ر+١} = ق^{د}_{ر}\ س^{د-ر}\ أ^{ر} \quad \text{حيث } ر+١ \leq د$$

٦ – مجموع معاملات مفكوك ذات الحدين = $٢^{د}$ أي أن : $\sum_{ر=٠}^{د} ق^{د}_{ر} = ٢^{د}$ ، وذلك لأن :

$$(١ + ١)^{د} = ق^{د}_{٠} + ق^{د}_{١} + ق^{د}_{٢} + ق^{د}_{٣} + \ldots + ق^{د}_{د}$$

$$\therefore\ ق^{د}_{٠} + ق^{د}_{١} + ق^{د}_{٢} + \ldots + ق^{د}_{د} = ٢^{د}$$

مفكوك ذات الحدين بأي أس

$$(١ + س)^{د} = ١ + د\ س + \frac{د(د-١)}{٢!} س^{٢} + \frac{د(د-١)(د-٢)}{٣!} س^{٣}$$

$$+ \ldots + \frac{د(د-١)(د-٢)\ldots(د-ر+١)}{ر!} س^{ر} + \ldots$$

الشرط هنا $|س| < ١$

ويلاحظ أنه إذا كانت $د \in ص_{+}$ فنجد (د+١) حداً يصبح أحد عوامل البسط في الحد العام مساوياً (د − د − ١ + ١) أي صفراً ، وتنتهي الحدود ويصبح عدد الحدود مساوياً د + ١ حداً .

اما إذا كانت د عدداً سالباً أو كسراً فإن المفكوك يستمر ولا ينتهي ، فمثلاً

$$(١ + س)^{-٣} = ١ + (-٣)\ س + \frac{-٣ \times -٤}{٢!} س^{٢}$$

$$+ \frac{-٣ \times -٤ \times -٥}{٣!} س^{٣} + \frac{-٣ \times -٤ \times -٥ \times -٦}{٤!} س^{٤} + \ldots$$

كذلك

$$(١ + س)^{\frac{٥}{٢}} = ١ + \frac{٥}{٢} س + \frac{\frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢}}{٢!} س^{٢} + \frac{\frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}}{٣!} س^{٣} + \frac{\frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \times -\frac{١}{٢}}{٤!} س^{٤} + \ldots$$

$$= ١ + \frac{٥}{٢} س + \frac{١٥}{٨} س^{٢} + \frac{٥}{١٦} س^{٣} - \frac{٥}{١٢٨} س^{٤} + \ldots$$

توجيهات طرائقية عامة

يفترض عند تدريس هذه الوحدة أن يراعي المدرس ما يأتي :

١ – الاعتماد على مواقف حياتية من بيئة الطالب عند تقديم كل من مبدأ العد والتباديل والتوافيق .

مثلاً : اختيار مواقف يكون فيها الترتيب عاملاً أساسياً وذلك عند تناول موضوع التباديل :

– تنظيم وقوف بعض الطلبة في صف واحد .

– تنظيم جلوس بعض الطلبة على عدد من المقاعد في صف

– تكوين عدد من بضعة أرقام « مع تكرار الرقم الواحد وعدم تكراره »

٢ – التوضيح للطلبة بأنه توجد طريقتان لحساب عدد التباديل وهما :

$${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \text{ن}\,(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+1)$$

وتستخدم هذه الطريقة إذا كانت ر عدداً صغيراً معلوماً

أو $${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$$ وتستخدم هذه الطريقة إذا كانت ر مجهولة أو عدداً كبيراً .

٣ – توضيح الفرق بين التباديل (الاختيار مع الترتيب) ويمثل الاختيار المميز، والتوافيق (الاختيار بدون ترتيب) ويمثل الاختيار غير المميز

٤ – توضيح أنه عند استخدام قانون التوافيق إذا كانت ر عدداً صغيراً معلوماً نستخدم $${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}}{\text{ر}!}$$

وإذا كانت ر مجهولة أو عدداً كبيراً نستخدم $${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!}$$.

وللتبسيط نستخدم القانون $${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ن}-\text{ر}}$$

٥ – توضيح الفرق بين التبديل الخطي والتبديل الدائري مع العلم أن التركيز في الموضوع يكون للتبديل الخطي .

٦ – التأكيد على الفرق بين تبديل ن من الأشياء المختلفة وتبديل ن من الأشياء من بينها عناصر مختلفة .

٧ – استخدام مخطط الشجرة لمزيد من التوضيح فقط، ولا يلزم الطلبة بضرورة استخدامه بصفة دائمة لأنه يحتاج وقتًا وجهدًا لا مبرر لهما .

٨ – توظيف المبدأ الأساسي للعد عند تقديم مفهوم التباديل ، وتوظيف التباديل عند تقديم التوافيق .

٩ – استخدام مواقف حياتية لايكون فيها الترتيب مهماً عند عرض موضوع التوافيق ومن أمثلة ذلك :

– اختيار عدد من الكتب من أحد رفوف مكتبة .

– اختيار فريق لكرة القدم من بين طلبة الصف .

– اختيار بعض الطلبة لتمثيل المدرسة في المسابقات الثقافية .

– إيجاد حاصل ضرب الأرقام مختارة من بين ٥ من الأرقام (مثلاً حاصل ضرب ٣ أرقام من بين ٥ أرقام) .

١٠ – يطلب من الطلبة اصطحاب الآلات الحاسبة عند دراسة الموضوع ، ويمكن استخدامها لحساب $\underline{|ن}$ عندما تكون ن عدداً كبيراً وذلك توفيراً للوقت والجهد .

١١ – توضيح أننا خلال دراسة هذه الوحدة نتعامل مع $ن \in ص_{+}$.

١٢ – عند حل معادلة على الصورة $\underline{|٣ن} = ٧٢٠$ يتم توضيح أنه لإيجاد ن نضع ٧٢٠ على صورة مضروب عدد صحيح موجب وذلك كما يلي :

نضرب اعداداً صحيحة موجبة متتالية أصغرها ١ لنحصل على العدد ٧٢٠ ونجد أن

$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ = ٧٢٠$ ، أي أن $٧٢٠ = \underline{|٦} \Leftarrow \underline{|٣ن} = \underline{|٦}$

ومنها $٣ن = ٦ \Leftarrow ن = ٢$

١٣ – ابراز الهدف من الحديث عن مثلث الكرخي المشهور باسم مثلث باسكال وهو :

أ) تعيين قيمة $ق^{ن}_{ر}$. ب) توضيح معاملات مفكوك ذات الحدين .

١٤ – يمكن استخدام الطريقة الاستقرائية للتوصل إلى القانون

$$(أ+ب)^{ن} = ق^{ن}_{٠}\, أ^{ن} + ق^{ن}_{١}\, أ^{ن-١}\, ب + ق^{ن}_{٢}\, أ^{ن-٢}\, ب^{٢}$$

$$+ \ldots + ق^{ن}_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر} + \ldots + ق^{ن}_{ن}\, ب^{ن} .$$

١٥ – تقديم قانون الحد العام في مفكوك $(أ+ب)^{ن}$ على النحو التالي :

$$ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر}\,(\text{الحد الأول})^{ن-ر}\,(\text{الحد الثاني})^{ر}$$

مع مراعاة أخذ كل من الحدين الأول والثاني بإشارته، وإدراك دور قانون الحد العام في تعيين أي حد في المفكوك دون الحاجة إلى إيجاد المفكوك كله .

يستنتج مع الطلبة قانون الحد العام كما يلي :

$ح_{١} = ق^{ن}_{٠}\, أ^{ن}$ ، $ح_{٢} = ق^{ن}_{١}\, أ^{ن-١}\, ب$

$ح_{٣} = ق^{ن}_{٢}\, أ^{ن-٢}\, ب^{٢}$ ، $ح_{٤} = ق^{ن}_{٣}\, أ^{ن-٣}\, ب^{٣}$ وهكذا

$\vdots$

$ح_{ر} = ق^{ن}_{ر-١}\, أ^{ن-ر+١}\, ب^{ر-١}$ ، $\therefore ح_{ر+١} = ق^{ن}_{ر}\, أ^{ن-ر}\, ب^{ر}$

وترتيبه (ر + ١) في المفكوك .

وبوضع ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . يمكن الحصول على أي حد في المفكوك .

١٦– يتم التوضيح بأنه يمكن استخدام مبرهنة ذات الحدين في إيجاد مفكوك مقادير جبرية تحتوي على أكثر من حدين إذا كانت هذه المقادير مرفوعة لأس صحيح موجب وذلك بوضع هذه المقادير على صورة حدين

واستخدام المبرهنة في فكها ، فمثلاً :

$(1 + س + س^2)^5$ يمكن كتابته على الصورة $[1 + (س + س^2)]^5$ أو $[(1 + س) + س^2]^5$

١٧– إذا طُلب الحد الخالي من س (أي الحد الذي يحوي $س^0$) في مفكوك ذات الحدين فأنه يحسب $ح_{ر+1}$ ثم نضع أس (س) = ٠ ؛ أما إذا طُلب الحد الذي يحوي $س^م$ نحسب $ح_{ر+1}$ ثم نضع أس (س) = م .

١٨– من خلال أمثلة يتم التوضيح لماذا يتعين في مفكوك ذات الحدين حداً أوسطاً واحداً عندما تكون ن عدداً زوجيًا، وحدين أوسطين عندما تكون ن عدداً فرديًا وذلك على النحو التالي :

(١) عدد حدود المفكوك = ن + ١

(٢) إذا كانت ن عدداً زوجيًا فإن عدد حدود المفكوك = ن + ١ = عدداً زوجيًا، وبإضافه ١ نحصل على عدداً فردياً.

(٣) إذا كانت ن عدداً فرديًا فإن عدد حدود المفكوك = ن + ١ = عدداً فرديًا وبإضافه ١ نحصل على عدداً زوجياً.

نستخدم الحد العام في إيجاد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين .

١٩ – توضيح أن النسبة بين حدين متتاليين في مفكوك $(س + ص)^ن$ هو :

$$\frac{ح_{ر+1}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{الحد الثاني (ص)}}{\text{الحد الأول (س)}}$$

وأن النسبة بين معاملي حدين متتاليين في مفكوك $(أ س + ب ص)$ هو :

$$\frac{\text{معامل } ح_{ر+1}}{\text{معامل } ح_ر} = \frac{ن - ر + 1}{ر} \times \frac{\text{ب (معامل الحد الثاني)}}{\text{أ (معامل الحد الأول)}}$$

٢٠– توضيح أن معامل الحد العام في مفكوك $(س + ص)^ن$ هو $ن_{ق_ر}$ بينما معامل الحد العام في مفكوك $(أ س + ب ص)^ن$ هو $ن_{ق_ر}$ $أ^{ن-ر} ب^ر$ حيث أ ، ب $\in$ ح ، وذلك من خلال توضيح المثال $(٢ س + ٣ ص)^ن$ فإن :

معامل $ح_{ر+1}$ = $ن_{ق_ر}$ $(٢)^{ن-ر} (٣)^ر$.

٢١ – محاولة ربط ما تم دراسته في الصف الحادي عشر من موضوع المتتاليات مع مبرهنة ذات الحدين والاستقراء الرياضي .

٢٢ – الأخطاء الشائعة : يتوقع أن يقع الطلبة في بعض الأخطاء التي قد شاع ملاحظاتها عند معالجة مواضيع هذه الوحدة، ونؤكد على أن تُعطى العلاقات التالية مع التركيز عليها حتى لا يتم ربط خاطئ بينها :

(١) $\underline{|٣ + ٢} \neq \underline{|٣} + \underline{|٢}$ (٢) $\underline{|٥} - \underline{|٣} \neq \underline{|٥ - ٣}$

(٣) $\underline{|٣ ن} \neq ٣ \underline{|ن}$. (٤) $\frac{\underline{|٦}}{\underline{|٢}} \neq \underline{|٣}$

(٥) $\underline{|٢} \times \underline{|٣} \neq \underline{|٦}$

٢ - ١ مبـــدأ العـــدّ

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

– يعرِّف المبدأ الأساسي للعد .
– يعمم مبدأ العدّ .
– يستخدم مبدأ العد في حل بعض المسائل الحياتية .
– يعرّف مضروب عدد صحيح موجب، ويحسبه

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : المبدأ الأساسي للعد .

الحصة الثانية : أمثلة متنوعة ، ومضروب عدد صحيح موجب .

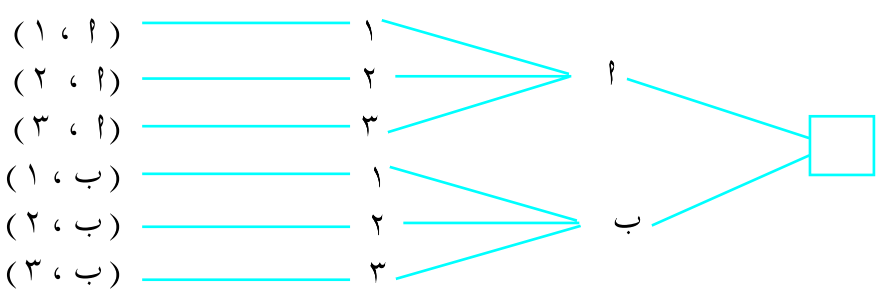
الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يقوّم المعلم الطلبة تقويماً بنائياً من خلال المناقشة أثناء الدرس ، ومن خلال متابعة حل التدريبات الصفية والواجب المنزلي . وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين التالي أو تمرينًا مشابهًا كخطوة تقويم :

إذا كان لدينا نوعان من الأقلام ولدينا ثلاثة أنواع من الكتب، كم عدد إمكانات اختيار قلم ثم كتاب .

الحل : نرمز لنوعي الأقلام بالحرفين أ ، ب ولأنواع الكتب بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ .



عدد الإمكانات = ٢ X ٣ = ٦

إرشادات وإجابات : تمارين (٢ - ١)

[١] عدد الطرق = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة .

[٢] عدد النتائج = ٦ × ٦ = ٣٦ نتيجة .

[٣] عدد النتائج = ٨ × ٦ = ٤٨ نتيجة .

[٤] أ) عدد الأعداد = ٥ × ٥ = ٢٥ عدداً

ب) عدد الأعداد = ٥ × ٤ = ٢٠ عدداً

[٥] عدد التطبيقات = (عدد عناصر المستقر)مرفوعة إلى عدد عناصر المنطلق = $٥^٣$ = ١٢٥ تطبيق .

[٦] ١) {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }.

أ) عدد الأعداد = ٤ × ٤ × ٤ × ٤ = ٢٥٦ عدد .

ب) عدد الأعداد = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ عدد .

٢) { ٠ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ }.

أ) ٥ × ٥ × ٥ × ٤ = ٥٠٠ عدد (الصفر ليس له قيمة في المنزلة الأخيرة) .

ب) ٤ × ٤ × ٣ × ٢ = ٩٦ عدد .

[٧] مع التكرار : عدد الطرق = ١ × ٤ × ٤ = ١٦ طريقة .

بدون التكرار : عدد الطرق = ١ × ٣ × ٢ = ٦ طرق .

[٨] عدد الارقام = ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ١٠ × ٢ = ٢ × $١٠^٥$.

[٩] أ) عدد الأعداد = ٤ × ٥ × ٤ = ٨٠ .

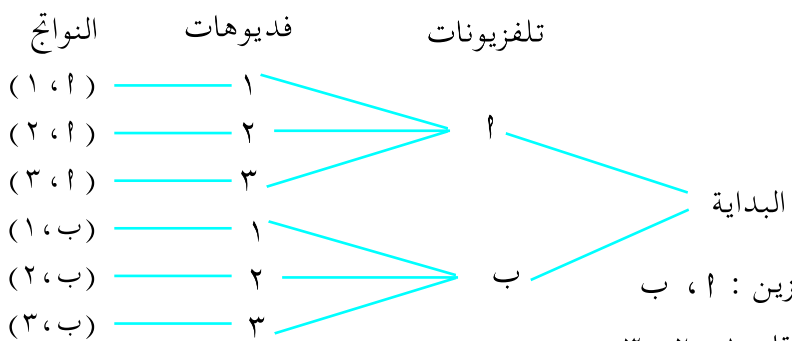
ب) مع التكرار : عدد الاعداد = ٦ × ٦ × ٦ × ٣ = ٦٤٨ .

بدون التكرار : عدد الاعداد = ٣ × ٤ × ٥ × ٣ = ١٨٠ .

[١٠] عدد الطرق = ٧ × ٥ × ٤ = ١٤٠ طريقة .

[١١] عدد الأعداد = ٢٤ عدداً .

[١٢] عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طرق .



رمزنا للتلفزيونات بالرمزين : أ ، ب

رمزنا للفيديوهات بالارقام ١ ، ٢ ، ٣

٢ – ٢ التباديل

عدد الحصص : (٤) حصص

الأهداف

– يعرِّف تباديل ن من العناصر .

– يوجد تباديل ن من العناصر .

– يعرِّف تباديل ن من العناصر مأخوذة راءً راءً ($ر \leq ن$) .

– يوجد تباديل ن من العناصر مأخوذة راءً راءً ($ر \leq ن$) .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التباديل

الحصة الثانية : تباديل ن من العناصر مأخوذة راءً راءً .

الحصة الثالثة : أمثلة و تمارين صفية .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يقوِّم المعلم الطلبة من خلال المناقشات ومتابعة حلهم للواجبات الصفية والمنزلية، وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى التمرين الآتي أو ما يشابهه كخطوة تقويم :

أ) أحسب قيمة $\underline{|٥} - \underline{|٣}$ ب) أوجد قيمة ن :إذا كان $٣\ \underline{|ن} = ٧٢$

جـ) أملأ الفراغ : $\underline{|٦} = ل^{\square}_{\square}$ ، $ل^{٩}_{٥} = \frac{\underline{|\square}}{\underline{|٤}}$

الحل :

أ) $٥ \times ٤ \times \underline{|٣} - \underline{|٣} = \underline{|٣}\ (٢٠ - ١) = ٦ \times ١٩ = ١١٤$

ب) $\underline{|ن} = ٢٤ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ = \underline{|٤}$ ، $\therefore ن = ٤$

جـ) $\underline{|٦} = ل^{٦}_{٦}$ ، $ل^{٩}_{٥} = \frac{\underline{|٩}}{\underline{|٤}}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٢ – ٢)

[١] ٢١٠ ، ١٣٢ ، ١١٦٢٨٠ ، ٦٣٧٥٦٠٠

[٢] أ) $ل^{١٣}_{٣}$

ب) أولاً نرتب الأعداد على النحو الآتي : $٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ل^{٦}_{٦} = \underline{|٦}$

جـ) ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $ل^{٤}_{٤}$ = $\underline{|٤}$

ء) ٧ × ٦ × ٥ = ٢١٠ = $ل^{٧}_{٣}$

هـ) $ل^{ن-١}_{٤}$ و) $ل^{ن+٢}_{٥}$

[٣] أ) $\underline{|ن}$ = ٥٠٤٠ ⇐ $\underline{|ن} = \underline{|٧}$ ⇐ ن = ٧

ب) $ل^{ن}_{ن} = \underline{|ن}$ = ٧٢٠ ⇐ $\underline{|ن} = \underline{|٦}$ ⇐ ن = ٦

جـ) ٧ $\underline{|ن-٢}$ = ٣٥٢٨٠ بقسمة الطرفين على ٧ .

$\underline{|ن-٢}$ = ٥٠٤٠ ⇐ $\underline{|ن-٢} = \underline{|٧}$ ⇐ ن − ٢ = ٧ ⇐ ن = ٩

د) ن(٥ × ٤ × ٣) = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ ⇐ ن = ٧ × ٦ ⇐ ن = ٤٢ .

هـ) ن(ن − ١) (ن − ٢)(ن − ٣) = ١٤(ن − ٢) (ن − ٣)(ن − ٤)

ن(ن − ١) = ١٤ (ن − ٤)

ن² − ن = ١٤ن − ٥٦

ن² − ١٥ن + ٥٦ = ٠ ⇐ (ن − ٨) (ن − ٧) = ٠ ⇐ أما ن = ٨ أو ن = ٧ .

و) ٧ (ن) (ن − ١) (ن − ٢) (ن − ٣) (ن − ٤) = ن(ن − ١) (ن − ٢) × ٩ × ٨ × ٧

⇐ (ن² − ٧ن + ١٢) = ٧٢ ⇐ ن² − ٧ن − ٦٠ = ٠

(ن + ٥) (ن − ١٢) = ٠ ⇐ ن = ١٢

ز) ٢ ن(٢ن − ١) = ٢ن (ن − ١) + ٥٠ ⇐ ٤ن² − ٢ن − ٢ن² + ٢ن − ٥٠ = ٠

⇐ ٢ن² − ٥٠ = ٠ ⇐ ن² − ٢٥ = ٠ ⇐ ن = ٥ .

[٤] أ) الطرف الأيمن = $\frac{(ن+٢)(ن+١)\underline{|ن}}{\underline{|ن}}$ = ن² + ٣ن + ٢ = الطرف الأيسر .

ب) الطرف الأيمن = $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ن-١-(ر-١)}}{\underline{|ن-١}} = \frac{ن\,\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر}} \times \frac{\underline{|ن-١-ر+١}}{\underline{|ن-١}}$

= $\frac{ن\,\underline{|ن-ر}}{\underline{|ن-ر}}$ = ن = الطرف الأيسر

جـ) الطرف الأيسر = $\frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر-١}} + \frac{ر\,\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-١-ر+١}} = \frac{\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر-١}} + \frac{ر\,\underline{|ن-١}}{(ن-ر)\,\underline{|ن-ر-١}}$

= $\frac{(ن-ر)\,\underline{|ن-١} + ر\,\underline{|ن-١}}{(ن-ر)\,\underline{|ن-ر-١}} = \frac{(ن-ر+ر)\,\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر}}$

= $\frac{ن\,\underline{|ن-١}}{\underline{|ن-ر}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} = ل^{ن}_{ر}$ = الطرف الأيمن

[5] $\text{ن} = 4$ ، ${}^{2\text{ن}}\text{ل}_{3} = {}^{8}\text{ل}_{3} = 8 \times 7 \times 6 = 336$

[6] ${}^{8}\text{ل}_{\text{ر}} = 6720 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^{8}\text{ل}_{5} \Leftarrow \text{ر} = 5$.

$|\underline{\text{ر}+1} = |\underline{6} = 720$.

[7] $\dfrac{|\underline{\text{ن}+1}}{|\underline{\text{ن}-1}} = 72 \Rightarrow \dfrac{(\text{ن}+1)(\text{ن})|\underline{\text{ن}-1}}{|\underline{\text{ن}-1}} = 72$

$\text{ن}^2 + \text{ن} - 72 = 0 \Rightarrow \text{ن} = 8$.

${}^{8}\text{ل}_{0} + {}^{8}\text{ل}_{5} + {}^{8}\text{ل}_{2} = \dfrac{|\underline{8}}{|\underline{8}} + \dfrac{|\underline{8}}{|\underline{3}} + \dfrac{|\underline{8}}{|\underline{6}} = 6776$.

[8] $\because\ |\underline{\text{ر}} = 720 \Rightarrow \text{ر} = 6$.

$\because\ \text{ن} = 9$ ، $\text{ر} = 6$ ، $\therefore\ {}^{9+1}\text{ل}_{\text{ر}-1} = {}^{10}\text{ل}_{5} = \dfrac{|\underline{10}}{|\underline{5}} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times |\underline{5}}{|\underline{5}} = 30240$

[9] $\dfrac{|\underline{2\text{ن}+1}}{|\underline{2\text{ن}-3}} \times \dfrac{|\underline{2\text{ن}-4}}{|\underline{2\text{ن}-1}} = \dfrac{72}{5} \Rightarrow \dfrac{(2\text{ن}+1)(2\text{ن})\,|\underline{2\text{ن}-1}}{(2\text{ن}-3)\,|\underline{2\text{ن}-4}} \times \dfrac{|\underline{2\text{ن}-4}}{|\underline{2\text{ن}-1}} = \dfrac{72}{5}$

$\dfrac{4\text{ن}^2 + 2\text{ن}}{(2\text{ن}-3)} = \dfrac{72}{5} \Rightarrow 20\text{ن}^2 + 10\text{ن} = 144\text{ن} - 216$

$20\text{ن}^2 - 134\text{ن} + 216 = 0$

$10\text{ن}^2 - 67\text{ن} + 108 = 0$

$(10\text{ن} - 27)(\text{ن} - 4) = 0 \Rightarrow \text{ن} = \dfrac{72}{10}$ وهذا مرفوض ، $\therefore\ \text{ن} = 4$

$\therefore\ |\underline{\text{ن}} = |\underline{4} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

[10] $\text{س} + \text{ص} = 6$ ...(1) حيث ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{4} = 360 = 6 \times 5 \times 4 \times 3$.

$|\underline{2\text{س}+\text{ص}} = |\underline{7} \Rightarrow 2\text{س} + \text{ص} = 7$ ...(2)

بحل المعادلتين : $\text{س} + \text{ص} = 6$ ، $2\text{س} + \text{ص} = 7$ ينتج أن $\text{س} = 1$ ، $\text{ص} = 5$ ، $\therefore\ {}^{\text{ص}}\text{ل}_{\text{س}} = {}^{5}\text{ل}_{1} = 5$.

[11] $(\text{س}+\text{ص})(\text{س}+\text{ص}-1)(\text{س}+\text{ص}-2) = 9 \times 8 \times 7$ ، $\therefore\ \text{س} + \text{ص} = 9$ ...(1)

$(\text{س}-\text{ص})(\text{س}-\text{ص}-1)(\text{س}-\text{ص}-2) = 5 \times 4 \times 3 \times 2$ ، $\therefore\ \text{س} - \text{ص} = 5$ ...(2)

وبحل المعادلتين : (1) ، (2) ينتج أن $\text{س} = 7$ ، $\text{ص} = 2$ ، $\therefore\ {}^{\text{س}}\text{ل}_{\text{ص}} = {}^{7}\text{ل}_{2} = 7 \times 6 = 42$.

[١٢] $\frac{\cancel{\lfloor\underline{٦}}}{\lfloor\underline{٦-ر}} = \frac{\cancel{\lfloor\underline{٦}}}{\lfloor\underline{٦-ر-١}} \Rightarrow \frac{١}{(٦-ر)\cancel{\lfloor\underline{٦-ر-١}}} = \frac{١}{\cancel{\lfloor\underline{٦-ر-١}}} \Rightarrow \frac{١}{٦-ر} = \frac{١}{١}$

$\therefore$ ٦ − ر = ١ $\Rightarrow$ ر = ٥

$\therefore \frac{\lfloor\underline{٦}}{\lfloor\underline{٧}} + \frac{\lfloor\underline{٥}}{\lfloor\underline{٦}} + \frac{\lfloor\underline{٣}}{\lfloor\underline{٤}} = \frac{٤٧}{٨٤}$

[١٣] عدد الطرق = $ل^{٤}_{٢}$ = ٤ × ٣ = ١٢ طريقة .

[١٤] عدد الطرق = $ل^{٥}_{٢}$ = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة .

[١٥] عدد الطرق = $ل^{٣٠}_{٤}$ = ٣٠ × ٢٩ × ٢٨ × ٢٧ = ٤٨٧٢٠ طريقة.

[١٦] عدد التطبيقات = $ل^{٥}_{٣}$ = ٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ تطبيقاً

[١٧] أ) عدد الطرق = $\lfloor\underline{٨}$ = ٤٠٣٢٠ طريقة .

ب) عدد الطرق = $\lfloor\underline{٧}$ = ٥٠٤٠ طريقة .

[١٨] عدد الطرق $ل^{٩}_{٤}$ = ٩ × ٨ × ٧ × ٦ = ٣٠٢٤ طريقة .

[١٩] يمكن ترتيب الطلاب والمدرسين بطرق عددها = ٢

ويمكن اختيار ٤ طلاب في وقت واحد بطرق عددها = $\lfloor\underline{٤}$

ويمكن اختيار ٤مدرسين في وقت واحد بطرق عددها = $\lfloor\underline{٤}$

وحسب مبدأ العد فإن :

عدد الطرق = ٢ $\lfloor\underline{٤}$. $\lfloor\underline{٤}$ = ٢ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١١٥٢ طريقة

٢ – ٣ التوافيق

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

– يعرِّف توافيق ن من العناصر .

– يوجد توافيق ن من العناصر .

– يعرِّف توافيق ن من العناصر مأخوذة راءً راءً ؛ ر ، ن ∋ ($ص_+$) .

– يوجد توافيق ن من العناصر مأخوذة راءً راءً ؛ ر ، ن ∋ $ص_+$.

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التوافيق

الحصة الثانية : توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة .

الحصة الثالثة : أمثلة .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

الحصة الخامسة : حالات خاصة وتمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشات ومتابعة أداء الطلبة لحل التمارين الصفية والمنزلية، ويُعطى التمرين الآتي أو تمريناً مشابهاً في نهاية الحصة الخامسة .

أ) أوجد قيمة $ق^{١٠}_{٠}$ ، $ق^{١٤}_{١٤}$ ، $ق^{٥}_{٢}$.

الإجابة : ١ ، ١ ، ١٠

ب) ضع علامة (√) أمام العبارة الصائبة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ مع توضيح السبب .

١ – $\lfloor\underline{٥} - \lfloor\underline{٣} = \lfloor\underline{٢}$ (X) لأن $\lfloor\underline{٥} - \lfloor\underline{٣} = ٢٠\lfloor\underline{٢}$

٢ – $ق^{٦}_{٥} = \lfloor\underline{٥}\ ل^{٦}_{٥}$ (X) لأن $ق^{٦}_{٥} = \dfrac{\lfloor\underline{٦}}{\lfloor\underline{٥}\ \lfloor\underline{١}} = ل^{٦}_{١}$

٣ – $\dfrac{\lfloor\underline{١٦}}{\lfloor\underline{٤}} = \lfloor\underline{٤}$ (X) لأن $\dfrac{\lfloor\underline{١٦}}{\lfloor\underline{٤}} = ل^{١٦}_{١٢}$

٤ – $\lfloor\underline{(٥-٣)} \times ٣ = \lfloor\underline{٣}$ (√) لأن $(\lfloor\underline{٥-٣}) \times ٣ = ٢ \times ٣ = ٣ \times ٢ \times ١ = \lfloor\underline{٣}$

إرشادات وإِجابات : تمارين (٢ – ٣)

[١] $ق^{٨}_{٥} = \dfrac{\lfloor\underline{٨}}{\lfloor\underline{٥} \times \lfloor\underline{٣}} = \dfrac{٨ \times ٧ \times ٦ \lfloor\underline{٥}}{\lfloor\underline{٥} \times ٣ \times ٢} = ٥٦$

$$ق^{٤٥}_{٤٥} = \frac{\underline{|٤٥}}{\underline{|٤٥}\ \underline{|٠}} = ١$$

$$ق^{١٣}_{٦} = \frac{\underline{|١٣}}{\underline{|٦}\ \underline{|٧}} = \frac{١٣\times١٢\times١١\times١٠\times٩\times٨\ \underline{|٧}}{٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١\ \underline{|٧}} = ١٧١٦$$

$$ق^{١٠٠}_{٩٨} = \frac{\underline{|١٠٠}}{\underline{|٩٨}\ \underline{|٢}} = \frac{١٠٠\times٩٩\ \underline{|٩٨}}{٢\ \underline{|٩٨}} = ٤٩٥٠$$

$$ق^{٢٠}_{٤} = \frac{\underline{|٢٠}}{\underline{|٤}\ \underline{|١٦}} = \frac{٢٠\times١٩\times١٨\times١٧\ \underline{|١٦}}{٤\times٣\times٢\times١\ \underline{|١٦}} = ٤٨٤٥$$

[٢] أ) إما $ر + ٤ = ر - ٢$ وهذا مرفوض .

أو $ر + ٤ + ر - ٢ = ٢٨ \Leftarrow ٢ر = ٢٦$ ، $\therefore ر = ١٣$.

ب) إما $٢ر = ر + ٢ \Leftarrow ر = ٢$

أو $٢ر + ر + ٢ = ٢٠ \Leftarrow ٣ر = ١٨ \Leftarrow ر = ٦$

جـ) $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}} = \frac{١٢٠\ \underline{|ن}}{\underline{|ن-ر}\ \underline{|ن-ن+ر}}$

$$١ = \frac{١٢٠}{\underline{|ر}} \Leftarrow \underline{|ر} = ١٢٠ \Leftarrow \underline{|ر} = \underline{|٥} \Leftarrow ر = ٥$$

[٣] أ) $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|٢}\ .\ \underline{|ن-٢}} = ٤٣٥ \Leftarrow \frac{ن(ن-١)\ \underline{|ن-٢}}{٢\ \underline{|ن-٢}} = ٤٣٥$

$ن^٢ - ن = ٨٧٠ \Leftarrow ن^٢ - ن - ٨٧٠ = ٠ \Leftarrow (ن-٣٠)(ن+٢٩) = ٠$ ، $\therefore ن = ٣٠$

ب) $\frac{٥\ \underline{|ن}}{\underline{|٦}\times\underline{|ن-٦}} = \frac{١٢\ \underline{|ن}}{\underline{|٤}\times\underline{|ن-٤}} \Leftarrow \frac{٥\ \underline{|ن}}{٦\times٥\ \underline{|٤}\times\underline{|ن-٦}} = \frac{١٢\ \underline{|ن}}{\underline{|٤}\times(ن-٤)(ن-٥)\ \underline{|ن-٦}}$

$$\Leftarrow \frac{١}{٦} = \frac{١٢}{ن^٢ - ٩ن + ٢٠} \Leftarrow ن^٢ - ٩ن + ٢٠ = ٧٢$$

$$ن^٢ - ٩ن - ٥٢ = ٠ \Leftarrow (ن-١٣)(ن+٤) = ٠ \Leftarrow ن = ١٣$$

جـ) $\frac{٢\ \underline{|ن}}{\underline{|٤}\times\underline{|ن-٤}} = \frac{٣٥\ \underline{|\frac{ن}{٢}}}{\underline{|\frac{ن}{٢}-٣}\times\underline{|٣}}$

$$\frac{٢ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)\ \underline{|ن-٤}}{٤\times٣\times٢\ \underline{|ن-٤}} = \frac{٣٥\frac{ن}{٢}(\frac{ن}{٢}-١)(\frac{ن}{٢}-٢)\ \underline{|\frac{ن}{٢}-٣}}{\underline{|\frac{ن}{٢}-٣}\times٣\times٢}$$

$$\frac{٢ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٤} = ٣٥\frac{ن}{٢}\left(\frac{ن-٢}{٢}\right)\left(\frac{ن-٤}{٢}\right)$$

$$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)}{٢} = ٣٥\frac{ن}{٢}\left(\frac{ن-٢}{٢}\right)\left(\frac{ن-٤}{٢}\right)$$

$$٤ن^٢ - ١٦ن + ١٢ = ٣٥ن - ١٤٠$$

$$٤ن^٢ - ٥١ن + ١٥٢ = ٠ \Leftarrow (٤ن - ١٩)(ن - ٨) = ٠$$

إما $٤ن - ١٩ = ٠ \Leftarrow ن = \frac{١٩}{٤}$ وهذا مرفوض .

أو $(ن - ٨) = ٠ \Leftarrow ن = ٨$

[٤] عدد الطرق $= \text{ق}^{15}_{5} = \dfrac{15!}{5!\;10!} = \dfrac{15\times14\times13\times12\times11\times10!}{5\times4\times3\times2\;\;10!} = 3003$ طريقة .

[٥] عدد الحالات $= \text{ق}^{6}_{5} = \dfrac{6!}{5!\;1!} = 6$ حالات .

[٦] عدد الطرق $= \text{ق}^{4}_{2} = \dfrac{4!}{2!\;2!} = \dfrac{4\times3\times2!}{2\times1\;\;2!} = 6$ طرق .

[٧] عدد الطرق $= \text{ق}^{8}_{4} + \text{ق}^{8}_{5} + \text{ق}^{8}_{6} + \text{ق}^{8}_{7} + \text{ق}^{8}_{8}$

$= \dfrac{8!}{4!\;4!} + \dfrac{8!}{5!\;3!} + \dfrac{8!}{6!\;2!} + \dfrac{8!}{7!\;1!} + \dfrac{8!}{8!\;0!} = 163$ طزيقة

[٨] عدد الطرق $= \text{ق}^{8}_{3} + \text{ق}^{8}_{2} + \text{ق}^{8}_{1} + \text{ق}^{8}_{0} = 93$ طريقه

[٩] عدد الطرق = ٣٠٢٤٠ طريقة.

[١٠] عدد الطرق $= \text{ق}^{1}_{1} \cdot \text{ق}^{5}_{4} = 1 \times \dfrac{5!}{4!\;1!} = 1 \times 5 = 5$ طرق

[١١] عدد الطرق $= \text{ق}^{10}_{4} \cdot \text{ق}^{6}_{4}$

$= \dfrac{10!}{4!\;6!} \quad \dfrac{6!}{4!\;2!} = 3150$ طريقة

[١٢] عدد الطرق $= \text{ق}^{5}_{3} \cdot \text{ق}^{9}_{4} = \dfrac{5!}{3!\;2!} \times \dfrac{9!}{4!\;5!} = \dfrac{9!}{3!\;2!\;4!} = 1260$ طريقه

[١٣] عدد الطرق $= \dbinom{15}{8 ،\ 4 ،\ 3} = 225225$ طريقة

[١٤] عدد الطرق $= \text{ق}^{15}_{5} \cdot \text{ق}^{8}_{3}$

[١٥] عدد الطرق $= \text{ق}^{20}_{5} \cdot \text{ق}^{15}_{11} \cdot \text{ق}^{4}_{4}$

[١٦] عدد الطرق $= \text{ق}^{10}_{2} \cdot \text{ق}^{20}_{3} = \dfrac{10!}{8!\;2!} \times \dfrac{20!}{3!\;17!} = 51300$ طريقة

[١٧] عدد الطرق $= \text{ق}^{12}_{10} = \dfrac{12!}{10!\;2!} = \dfrac{12\times11\;10!}{2\;10!} = 66$ طريقة

أ) عدد الطرق $= \text{ق}^{11}_{9} = \dfrac{11!}{9!\;2!} = 55$ طريقة

ب) عدد الطرق $= \text{ق}^{11}_{10} = \dfrac{11!}{10!\;1!} = 11$ طريقة

[١٨] أ) الأيمن $= (\text{ق}^{ن}_{ر} + \text{ق}^{ن}_{ر-1}) + (\text{ق}^{ن}_{ر-1} + \text{ق}^{ن}_{ر-2})$

$= \text{ق}^{ن+1}_{ر} + \text{ق}^{ن+1}_{ر-1} = \text{ق}^{ن+2}_{ر} =$ الأيسر

ب) يتم الإِثبات بالطريقة نفسها في الفقرة السابقة.

٢ – ٤ مبرهنة ذات الحدين

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

- يتعرَّف مبرهنة ذات الحدين .
- يوجد مفكوك $(أ + ب)^{ن}$.
- يوجد الحد العام ، وأي حد آخر في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$.
- يوجد الحد الخالي من س .
- يوجد معامل أي قوة للمتغير في المفكوك .
- يوجد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين في مفكوك ذات الحدين .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مبرهنة ذات الحدين.

الحصة الثانية : أمثلة .

الحصة الثالثة : الحد العام في مفكوك $(أ + ب)^{ن}$

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

الحصة الخامسة : الحد الأوسط أو الحدان الأوسطان .

الحصة السادسة :تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال المناقشة ومتابعة أداء الطلبة لحل التدريبات الصفية والواجب المنزلي، ويُعطى التمرين الآتي أو تمريناً مشابهاً في نهاية الحصة السادسة :

أوجد معامل $س^{٥}$ في مفكوك $(٣ س^{٢} - س^{-٣})^{١٠}$

الحل : $ح_{ر+١} = ق^{١٠}_{ر} \; (٣ س^{٢})^{١٠-ر} \; (- س^{-٣})^{ر}$

$= ق^{١٠}_{ر} \; (-١)^{ر} \; ٣^{١٠-ر} \; (س)^{٢٠-٥ر}$

$\therefore$ $٢٠ - ٥ ر = ٥$ (الأس المطلوب) $\Leftarrow ر = ٣$

$\therefore$ المعامل هو $ق^{١٠}_{٣} \; (-١)^{٣} \; (٣)^{٧} = -٢٦٢٤٤٠$

إرشادات وإجابات : تمارين (٢ – ٤)

[١] أ) $١٦\text{س}^{٤} + ٩٦\,\text{س}^{٣}\text{ص} + ٢١٦\,\text{س}^{٢}\text{ص}^{٢} + ٢١٦\,\text{س ص}^{٣} + ٨١\,\text{ص}^{٤}$

ب) $\text{ص}^{٥} - \frac{٥}{٢}\,\text{ص}^{٣} + \frac{٥}{٢}\,\text{ص} - \frac{٥}{٤\text{ص}} + \frac{٥}{١٦\text{ص}^{٣}} - \frac{١}{٣٢\text{ص}^{٥}}$

جـ) $٦٤\text{أ}^{٦} + ٩٦\text{أ}^{٤} + ٦٠\text{أ}^{٢} + ٢٠ + \frac{١٥}{٤\text{أ}^{٢}} + \frac{٣}{٨\text{أ}^{٤}} + \frac{١}{٦٤\text{أ}^{٦}}$

د) $١ - ١٨\,\text{س} + ١٣٥\,\text{س}^{٢} - ٥٤٠\,\text{س}^{٣} + ١٢١٥\,\text{س}^{٤} - ١٤٥٨\,\text{س}^{٥} + ٧٢٩\,\text{س}^{٦}$.

هـ) $١٠٢٤ + ١٢٨٠\,\text{س} + ٦٤٠\,\text{س}^{٢} + ١٦٠\,\text{س}^{٣} + ٢٠\,\text{س}^{٤} + \text{س}^{٥}$

و) $\text{س}^{١٦} - ٨\,\text{س}^{١٤} + ٢٨\,\text{س}^{١٢} - ٥٦\,\text{س}^{١٠} + ٧٠\,\text{س}^{٨} - ٥٦\,\text{س}^{٦} + ٢٨\,\text{س}^{٤} - ٨\,\text{س}^{٢} + ١$

ز) $(١ + (\text{س} - ٢\,\text{س}^{٢}))^{٨} = ١ + ٨\,\text{س} + ١٢\,\text{س}^{٢} - ٥٦\,\text{س}^{٣} + \ldots$

[٢] أ) $\text{ح}_{\text{ر}+١} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}\ (\text{الحد الأول})^{\text{ن}-\text{ر}}\ (\text{الحد الثاني})^{\text{ر}}$

$\text{ح}_{٥} = \text{ق}^{١٢}_{٤}\ (\text{س})^{٤} = ٤٩٥\,\text{س}^{٤}$

ب) $-٣٣٠\,\text{س}^{٧}$ جـ) -٢٠ د) $٤٦٢\,\text{س}$

هـ) $\frac{٥١٢٠٠٠٠}{٢٧}\,\text{س}^{-١١}$ و) $\frac{٣١٦٨}{\text{س}}$

[٣] أ) $\text{ح}_{٦+١} = \text{ق}^{١١}_{٦}\ (٣\text{س}^{٢})^{٥}\ (-\frac{٢\text{س}}{٣})^{٦}$

$= \underbrace{\text{ق}^{١١}_{٦} \times ٣^{٥} \times \frac{٢^{٦}}{٣^{٦}}}_{\text{المعامل}}\ \text{س}^{١٠}\ \text{س}^{٦}$

∴ معامل $\text{ح}_{٧} = ٩٨٥٦$

ب) -٥٩٤٠

جـ) -٨٠٦٤

د) -٣٠٤١٢٨٠

[٤] أ) الطرف الأيمن = $(س + س^{-١})^{٦} - (س - س)^{٦}$

$= (ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ح_{٤} + ح_{٥} + ح_{٦} + ح_{٧}) - (ح_{١} - ح_{٢} + ح_{٣} - ح_{٤} + ح_{٥} - ح_{٦} + ح_{٧})$

$= ٢ح_{٢} + ٢ح_{٤} + ٢ح_{٦}$

$= ٢ \; {}^{٦}ق_{١} \; س^{٥} (س^{-١}) + ٢ \; {}^{٦}ق_{٣} (س^{٣}) (س^{-١})^{٣} + ٢ \; {}^{٦}ق_{٥} (س) (س^{-١})^{٥}$

$= ١٢ (س^{٤} + س^{-٤} + ٣\frac{١}{٣})$ = الطرف الأيسر .

ب) ∵ $ن = ٢١$

∴ يوجد حدان أوسطان هما : $ح_{١١}$ ، $ح_{١٢}$

$ح_{١١} = \binom{٢١}{١٠} س^{١١} ص^{١٠}$ ، $ح_{١٢} = \binom{٢١}{١١} س^{١٠} ص^{١١}$

∴ معامل $ح_{١١}$ هو $\binom{٢١}{١٠}$ ، ومعامل $ح_{١٢} = \binom{٢١}{١١}$ وهما متساويان .

[٥] أ) $٥٨ \sqrt{٢}$ ب) $٤٠ \sqrt{٦}$

جـ) $(١ + س)^{٤} + (١ - \sqrt{س})^{٤} = ٢ (١ + ٦ س + س^{٢})$

د) $(س - ٢ ص)^{٥} - (س + ٢ ص)^{٥}$

$= (ح_{١} - ح_{٢} + ح_{٣} - ح_{٤} + ح_{٥} - ح_{٦}) - (ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣} + ح_{٤} + ح_{٥} + ح_{٦})$

$= -٢ ح_{٢} - ٢ ح_{٤} - ٢ ح_{٦})$

$= -٢ \; {}^{٥}ق_{١} \; س^{٤} (٢ ص) - ٢ \; {}^{٥}ق_{٣} \; س^{٢} (٢ص)^{٣} - ٢ \; {}^{٥}ق_{٥} \; س^{٠} (٢ ص)^{٥}$

$= -٤ ص (٥س^{٤} + ٤٠ س^{٢} ص^{٢} + ١٦ ص^{٤})$

[٦] أ) $٣٤٣٢ س^{١٤}$ ب) ٧٠

جـ) $\frac{٦٣}{١٦} س^{٥} ص^{٤}$ ، $-\frac{٦٣}{٨} س^{٤} ص^{٥}$

د) $ح_{ر+١} = {}^{ن}ق_{ر} \; س^{ن-ر} \; أ^{ر}$

$ح_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-١} \; س^{ن-ر+١} \; أ^{ر-١}$

$\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{{}^{ن}ق_{ر} \; س^{ن-ر} \; أ^{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١} \; س^{ن-ر+١} \; أ^{ر-١}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{أ}{س}$

$\frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} = \frac{٥ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{-\frac{١}{٤س^{٢}}}{٢س} = \frac{١}{-١٦ س^{٣}}$

$ح_{٤} : ح_{٥} = -١٦ س^{٣} : ١$

هـ) $(١ + \text{س} + \text{س}^٢)^٥ = [\,(١ + \text{س}) + \text{س}^٢\,]^٥$

$= (١ + \text{س})^٥ + \text{ق}^٥_١\,(١ + \text{س})^٤\,(\text{س}^٢) + \text{ق}^٥_٢\,(١+\text{س})^٣\,(\text{س}^٢)^٢ + \ldots$

واضح أن الحدود التي تلي الحد الثاني في المفكوك تحتوي على قوى س أعلى من $\text{س}^٢$ فلا داعي للبحث فيها

∴ معامل $\text{س}^٢$ في مفكوك $(١ + \text{س} + \text{س}^٢)^٥$

= مجموع معاملي $\text{س}^٢$ في كل من $(١+\text{س})^٥$ ، $٥\,(\text{س}^٢)\,(١ + \text{س})^٤$ فقط أي $= \text{ق}^٥_٢ + ٥ = ١٥$

[٧] أ) ١٫٣٤٤ تقريباً ب) ٠,٩٩ تقريباً جـ) ٦٧٦٫٥٢

[٩] نفرض الحدود $\text{ح}_{\text{ر}}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}+٢}$

$$\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} = \frac{١٩٠}{٢٠} \quad \ldots(١)$$

$$\frac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+٢}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}+١}} = \frac{\text{ن}-(\text{ر}+١)+١}{\text{ر}+١} = \frac{١١٤٠}{١٩٠} \quad \ldots(٢)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن : $\text{ن} = ٢٠$ ، $\text{ر} = ٢$ ، والحدود هي : $\text{ح}_٢$ ، $\text{ح}_٣$ ، $\text{ح}_٤$.

[١٠] $\frac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢} = \frac{١١٢}{١٦}$ ، ∴ $\frac{\text{ن}-٢+١}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٧ \quad \ldots(١)$

$\frac{\text{ح}_٤}{\text{ح}_٣} = \frac{٤٤٨}{١١٢}$ ، ∴ $\frac{\text{ن}-٣+١}{٣} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٤ \quad \ldots(٢)$

∴ $\frac{\text{ن}-١}{\text{ن}-٢} \times \frac{٣}{٢} = \frac{٧}{٤} \Leftarrow \text{ن} = ٨$

∴ $\frac{٧\,\text{ص}}{٢\,\text{س}} = ٧$ ، ∴ $\text{ص} = ٢\text{س}$

$\text{ح}_٢ = ١٦$ ، ∴ $\text{ق}^{\text{ن}}_١\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ص} = ١٦$ ، $\text{ق}^٨_١\,(٢\text{س})\,(\text{س})^٧ = ١٦$

∴ $\text{س}^٨ = ١$ ، ∴ $\text{س} = \pm ١$ ، $\text{ص} = \pm ٢$

[١١] رتبتا الحدين الأوسطين هما $\frac{(٢\text{ن}+١)+١}{٢}$ وما يليه . إذن الحدان الأوسطان هما : $\text{ح}_{\text{ن}+١}$ ، $\text{ح}_{\text{ن}+٢}$

$$\frac{\text{ح}_{\text{ن}+٢}}{\text{ح}_{\text{ن}+١}} = \frac{(٢\text{ن}+١)-(\text{ن}+١)+١}{\text{ن}+١} \times \frac{٣\,\text{ص}}{٢\,\text{س}} = \frac{٣\,\text{ص}}{٢\,\text{س}}$$

وبما أنهما متساويان ، ∴ $٣\,\text{ص} = ٢\,\text{س}$ ، ∴ ص : س = ٣ : ٢

[١٢] $\frac{\text{ح}_٤}{\text{ح}_٣} \times \frac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢} = ٣$ ، $\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥} = \frac{٣}{٥}$

$\frac{\text{ن}-٣+١}{٣} \times \frac{١}{\text{س}} \times \frac{\text{ن}-٢+١}{٢} \times \frac{١}{\text{س}} = ٣$ ، $\frac{\text{ن}-٥+١}{٥} \times \frac{١}{\text{س}} = \frac{٣}{٥}$

∴ $(\text{ن}-٢)\,(\text{ن}-١) = ١٨\,\text{س}^٢ \quad \ldots(١)$

$(\text{ن}-٤)^٢ = ٩\,\text{س}^٢ \quad \ldots(٢)$

بحل (١) ، (٢) نحصل على $\text{ن} = ٣$ مرفوض أو $\text{ن} = ١٠$ ، ∴ $\text{س} = ٢$

٢ – ٥ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان

الهدف يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

ينفذ هذا البند في حصتين يُعطى فيهما الاختبار الذي في دليل المعلم أو اختبار آخر من إعداد المدرس بحيث يغطي أهداف الوحدة والجدول الآتي يوضح تغطية أهداف الوحدة . حسب الاختبار الذي في الدليل .

رقم السؤال	رقم الهدف
[١] أ)	١ ، ٥
ب)	٤ ، ٥
[٢] أ)	٢، ٦ ، ٧ ، ٣
ب)	٩ ، ١٠، ١١
[٣] أ)	١١ ، ١٢
ب)	٥ ، ٦ ، ٧

الاختبار

[١] أ) يتكون مجلس إدارة إحدى الشركات من سبعة أعضاء . كم عدد الطرق التي يمكن بها اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين للسر ؟

ب) كم عدداً مكوناً من خمسة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ؟

[٢] أ) لإجراء بحث عن أمراض السكر في اليمن يُراد اختيار ست مناطق من بين تسع لإجراء الدراسات على سكانها ؛ فما عدد الطرق التي يمكن بها اختيار العينة ؟

ب) أوجد ما يأتي :

١– مفكوك $(٢ س + ٣ ص)^{٥}$

٢ – الحد الخالي من س في مفكوك $(٢س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$

[٣] أوجد ما يأتي

أ) الحد الأوسط في مفكوك $(ص - \frac{١}{ص})^{١٢}$

ب) مجموعة من الطلاب عددهم ١٠ ، أوجد عدد طرق اختيار ٣ طلاب من هذه المجموعة :

أولاً للقيام بأعمال مختلفة ،

ثانياً للقيام بالعمل نفسه .

المصطلحات

Counting principle	مبدأ العدّ
Fundamental Principle of counting	المبدأ الأساسي للعدّ
Choice	اختيار
Way	طريقة
With repetition	بالتكرار
Without repetition	بدون تكرار
Permutation	التباديل
Factorial	مضروب (د)
Combinations	التوافيق
Subset	مجموعة جزئية
Mathematical induction	الإستقراء الرياضي
Mathematical deduction	الإستنتاج الرياضي
Binomial theorem	مبرهنة ذات الحدين
Binomial expansion	مفكوك ذات الحدين
Binomial coefficient	معامل ذات الحدين
General term	الحد العام
Middle term	الحد الأوسط
Order	رتبة

المراجع

١ – علي عبد الله الدفاع ، إسهام علماء المسلمين في الرياضيات ، الطبعة الأولى ١٩٨١م دار الشروق بيروت والقاهرة .

٢ – موريس شربل ، الرياضيات في الحضارة الاسلامية ١٩٨٨م ، جروس برس ، لبنان .

٣ – عدنان دعنا ، موسوعة علماء الرياضات الطبعة الأولى ٢٠٠١م دار أسامة للنشر والتوزيع ، الأردن .

٤ – رشدي راشد : تاريخ الرياضيات العربية بين الجبر والحساب ، مركز دراسات الوحدة العربية بيروت ١٩٨٩م.

٥ – عدنان جميل الحسوّن ، أسس الرياضيات الطبعة الأولى ١٩٨٤م ، دار الفرقان للنشر والتوزيع ، عمّان الأردن

٦ – الرياضيات للصف الثاني الثانوي (علمي) الجزء الثاني مكتب التربية العربي لدول الخليج ، دولة الإمارات العربية المتحدة . الطبعة الثالثة ٢٠٠٠ – ٢٠٠١ م .

٧ – الرياضيات للصف الثاني الثانوي (علمي) ، وزارة المعارف المملكة العربية السعودية ١٩٩٩م

8 . E Swokawski and J. cole , Fundamental of Algeber and Trigonometry, PWSKemt Publising Company , Boston , USA .

9 . B. Kolman , M. Levitan , A. Shapiro , College Algebra and Trigonometry , 1993 , B arcourt Brace . Pub lishing Company .

10.T. Wesner and H. Nustad , Intermediate Algebra 1988 , Wm. C. Broan Publishers , Iwa, USA .

الوحدة الثالثة

الاحـــــــتـــــــمـــــالات

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٣ – ١	بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات	٦
٣ – ٢	بناء النموذج الاحتمالي	٥
٣ – ٣	الاحتمال الشرطي وقانون الضرب، والحوادث المستقلة	٦
٣ – ٤	متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي	٤
٣ – ٥	السحب مع الإعادة، وبدون إعادة	٦
٣ – ٦	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	٢٩

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

١– يثبت بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات.

٢– يحسب احتمال وقوع حادثة باستخدام المبرهنات الأساسية في الاحتمالات .

٣– يبني نموذجاً احتمالياً مناسباً لمسألة احتمالية معطاة .

٤– يتعرَّف الاحتمال الشرطي، وقانون الضرب، والحوادث المستقلة .

٥– يتعرَّف متتالية التكرارات المستقلة، وقانون الاحتمال الثنائي .

٦– يستخدم طريقة السحب مع الإعادة، وبدون إعادة .

المقدمة

لقد نشأت نظرية الاحتمالات على أساس رياضي في عام (١٤٩٤م) بواسطة باسيولى، ومن الدراسات الفلكية لكل من كبلر (١٥١٧– ١٦٣٠م) وجاليلو (١٥٦٤ – ١٦٤٢م) اللذين قاما بتطوير نماذج الاحتمالات غير أن التاريخ الحقيقي لنظرية الاحتمالات بدأت في منتصف القرن السابع عشر، ويبدو أن ذلك كان نتيجةً للأبحاث التي قام بها العالمان الفرنسيان باسكال (١٦٢٣ – ١٦٦٢م) وفيرمات (١٦٠٨ – ١٦٦٥م) عند دراستهما لأرقام معينة في عالم المراهنه وألعاب الحظ. وكان العمل الذي قام به هيجينز (١٦٢٩– ١٦٩٥م) في موضوع المعالجة الرياضية لغرض الفوز في مباريات ورق اللعب وزهرة النرد دافعاً للكثيرين في متابعة هذا العلم، منهم برونوللي (١٦٥٤– ١٧٠٥م) ودي موافر (١٦٦٧– ١٧٥٤م) واربوثنوت ولا بلاس (١٧٤٩–١٨٢٧م) وجاوس (١٧٧٧– ١٨٥٥م). وأوضح كيتيليه (١٧٩٦– ١٨٢٧م) عالم الفلك الاجتماعي البلجيكي إمكانية استخدام الاحتمالات والإحصاء في وصف وتفسير الظواهر الاجتماعية والاقتصادية، وقدم مساهمات هامة في الطرق الإحصائية وفي تنظيم وإدارة الإحصاءات الرسمية وقدم كذلك طريقة عامه للقياس في الأنثر بولوجيا وساهم العالم النفسي الانجليزي فرنسيس جالتون (١٨٢٢–١٩١١م) في تطبيق الطرق الإحصائية في علم النفس وأوضح أساس علم القياس النفسي . وعلى الرغم من أن الإحصاء علم قديم، إلاَّ أن الجانب الأعظم من النظريات الإحصائية تم إكتشافه بعد عام ١٩٢٠م تقريباً . وظهرت في الفترة الأخيرة مجموعة من التخصصات المختلفة تهتم بمجالات وأهداف خاصة بالإحتمالات، وبلغ هذا التطور قدراً هائلاً يكاد يظهر علم الاحتمال وكأنه علم مستقل بذاته. ومن أهم التخصصات التي ظهرت في الفترة الأخيرة بحوث العمليات والإحصاءات السكانية ومراقبة الجودة والاقتصاد والقياس وغيرها .

ونظراً لاعتماد العلوم المختلفة على علم الرياضيات في فهم ظواهرها وقياسها وتفسيرها فقد أفردت لها فروعاً خاصة تهتم بدراسة ظواهرها باستخدام الأساليب الإحصائية والرياضية، منها على سبيل المثال: الإحصاء الحيوي، والاجتماع الرياضى، والقياس الاجتماعي، وعلم النفس الرياضي، والاقتصاد الرياضي. وكبرت أهمية الاحتمال بكثرة في السنوات الأخيرة مما جعل هذا العلم يحتل مركزاً متميّزاً بين أساسيات الرياضيات حيث أصبح أداة هامة في مجالات متعددة مثل الطبيعة والطب والهندسة والكيمياء والبيولوجيا والاقتصاد، وفي شتى المجالات المختلفة.

والجدير بالذكر أن قضايا الحظ والصدفة كانت تعتبر في الماضي من الأمور الغامضة التي لا تخضع للتحليل رياضي، ولكن الرياضيين أثبتوا مؤخراً عكس ذلك، حين استطاعوا أن يحولوا أكثر هذه القضايا إلى علم يساهم في التنمية وتقدم البشر .

وأكثر ما يهتم به علم الاحتمال دراسة التجارب العشوائية التي تصادفنا كثيراً في معظم حياتنا اليومية، وتعتبر دروس هذه الوحدة مدخلاً أساسياً وبداية مهمة لدراسة علم الاحتمال .

خلفية علمية

إن ما سنقدمه من مادة علمية هنا يأتي بغرض إثراء معارف المدرس حول بنود الوحدة، ويجب ألا يقدم للطالب بأي حال من الأحوال، وإنما نأمل أن ينعكس أثره على أداء المدرس من خلال تقديمه لمحتوى الوحدة بوعي وإدراك .

مفاهيم أساسية في الاحتمالات

عند معالجة هذه الوحدة ، نبدأ بتعريف التجربة العشوائية على أنها إجراء أو محاولة نعلم مسبقاً جميع النواتج الممكنة لها، وإن كنا لا نستطيع أن نثبت أي هذه النواتج سيقع أو سيتحقق فعلاً . ومجموعة النواتج الممكنة للتجربة العشوائية تكوِّن فضاءً يسمى فضاء العينة، ونرمز له بالرمز (ع) وكل عنصر في هذا الفضاء هو نتيجة ممكنة للتجربة العشوائية .

أحياناً يكون الاهتمام منصباً على بعض نتائج التجربة العشوائية، في هذه الحالة سوف ينحصر اهتمامنا على العناصر المناظرة لهذه النتائج . وهذه العناصر تكون مجموعة جزئية من فضاء العينة ، وكل مجموعة جزئية من فضاء العينة تسمى حادثة ونرمز لها بأحد الأحرف أ ، ب ، ... أو $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، ... ونقول أن الحادثة قد وقعت إذا ظهر أحد عناصرها عند إجراء التجربة .

وحيث إن المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة؛ وبالتالي فإن $\emptyset$ حادثة، وتسمى الحادثة المستحيلة، وتمثل الحالة التي لا يكون فيها نواتج للتجربة .

ونعلم أن المجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها؛ وبالتالي فإن (ع) حادثة، وتسمى الحادثة المؤكدة لأنه لا بد وإن يظهر أحد عناصر الفضاء (ع) عند إجراء التجربة .

إن مجموعة الحوادث التي يمكن تكوينها من فضاء العينة تكوّن فضاء يسمى فضاء الحوادث ويرمز له بالرمز ك ؛ أي أن ك مجموعة كل المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها من الفضاء (ع) .

فإذا كان لدينا فضاء عينة (ع) يحتوي على ن عنصراً فإن عدد الحوادث المعرفة في هذا الفضاء هي $٢^{ن}$ حادثة .

يقال إن أ ، ب حادثتان متنافيتان أو ما نعتان بالتبادل (Mutually Exclusion) ، إذا كان وقوع إحداهما يمنع وقوع الأخرى، أي أن أ $\cap$ ب $= \emptyset$ وهذا يعني أنه لا يمكن وقوع الحادثتين معاً .

ويقال أن $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، . . . . ، $أ_{ن}$ هي (ن) حادثة مانعة وشاملة إذا كانت مانعة (بمعنى أن $أ_{ر} \cap أ_{ل} = \emptyset$ ، ل $\neq$ ر) وكانت أيضاً تكوّن فضاء العينة (بمعنى أن ع $=$ $أ_{١} \cup أ_{٢} \cup \dots \cup أ_{ن}$ $=$ ع)

تعريف احتمال الحادثة

يوجد للاحتمال عدة تعاريف مختلفة أيضاً منها :

أ) **التعريف القديم (الكلاسيكي) للاحتمال** : (Classical Definition of Probability) :

إذاكان عدد الطرق التي يمكن أن تظهر بها نتائج تجربة ما هو (ن) طريقة وكانت هذه النتائج لها نفس فرصة الظهور وكان من بينها (م) طريقة تظهر بها الحادثة (أ) ؛ فإنه يقال إن احتمال وقوع الحادثة (أ) هو $\frac{م}{ن}$ ، ونكتب ذلك رمزياً كما يلي : $حا(أ) = \frac{م\ (\text{الملائمة})}{ن\ (\text{الممكنة})}$

ب) التعريف التجريبي للاحتمال : (Exeperimental Definition of Probability)

هذا التعريف لا يشترط تساوي فرص ظهور النتائج، ولكنه مبنى على أساس إجراء التجربة لعدد كبير من المرات، وتحديد نتائجها، وبعد ذلك يتم استنباط قيمة الاحتمال . فإذا كان عدد المرات التي أجريت بها تجربة «ما» تحت نفس الظروف هو (ﻧ) وكان عدد المرات التي لوحظ فيها الحدث (ا) هو (م) فإن احتمال وقوع الحدث (ا) يعطى بالقانون التالي :

حا (ا) = $\lim_{ﻧ \to \infty} \frac{م}{ﻧ}$ ، (حيث : $\frac{م}{ﻧ}$ هو التكرار النسبي للحدث (ا))

وقد لوحظ أنه عندما تزداد عدد المحاولات أو التجارب فإن النسبة تكتسب بعض الانتظام الاحصائي وتستقر حول قيمة ثابتة يرمز لها بالرمز حا (ا) .

ولذلك عُرف الاحتمال بأنه نهاية النسبة $\frac{م}{ﻧ}$ عند ما يزداد عدد المحاولات .

جـ) التعريف الرياضي للاحتمال (Mathematical Definition of Probability) :

إن من عيوب التعريف الكلاسيكي للاحتمال أنه يشترط تساوي فرص ظهور النتائج الممكنة للتجربة العشوائية لأنه في بعض التجارب يكون لبعض النتائج فرص في الظهور أكثر من غيرها ،وفي مثل هذه التجارب لا يمكن استخدام هذا التعريف .

أما التعريف التجريبي للاحتمال فمن عيوبه أنه يشترط لإجراء التجربة عدداً كبيراً من المرات حتى يمكننا حساب احتمال ظهور نتيجة ما ، وغالباً يكون هذا صعباً أو متعذراً .

ولتفادي هذه العيوب في التعريفين السابقين وضع التعريف الرياضي، والذي بُني على أساس افتراض بعض المسلّمات والتي تسمى مسلّمات نظرية الاحتمالات، ومنها تشتق نظرية الاحتمالات. وهذه المسلمات هي :

١ – يرافق كل حادثة (ا) عدد معين حا(ا) يسمى احتمال ا ويحقق: حا (ا) $\geqslant$ ٠

٢ – احتمال وقوع حادثة مؤكدة يساوي واحدا ، أي أن حا (ع) = ١

٣ – إذا كانت ا ، ب حادثتين متنافيتين فإن حا (ا $\cup$ ب) = حا (ا) + حا(ب)

المسلمة (٣) يمكن تعميمها إلى أكثر من حادثتين فإذا كانت $ا_١$ ، $ا_٢$ ، ... ، $ا_ﻧ$ هي ﻧ حادثة متنافية بالتبادل فيما بينها، بمعنى أن $ا_ر \cap ا_ﻫ = \emptyset$ فإن حا ($\bigcup_{ر=١}^{ﻧ} ا_ر$) = $\sum_{ر=١}^{ﻧ}$ حا ($ا_ر$)

ومن المسلمات السابقة يمكن إثبات المبرهنات والنتائج الآتية :

– إذا كانت $\bar{ا}$ هي مكملة الحادثة ا فإن حا ($\bar{ا}$) = ١ – حا (ا) .

– احتمال وقوع حادثة مستحيلة يساوي صفراً ، أي أن حا ($\emptyset$) = ٠ .

– إذا كانت ا $\supset$ ب فإن حا (ا) $\geqslant$ حا (ب) .

– إذا كانت $ا_١ \supset ا_٢ \supset ا_٣ \supset \dots \supset ا_ﻧ$ ، فإن حا($ا_١$) $\geqslant$ حا ($ا_٢$) < حا($ا_٣$) $\geqslant$ حا($ا_ﻧ$) .

– إذا كانت ا أي حادثة ، فإن :

حا(ا) $\leqslant$ ١ وبالتالي . $\leqslant$ حا(ا) $\leqslant$ ١

إذا كانت ا ، ب أي حادثتين فإن :

١) حا (ا $\bar{ب}$) = حا (ا) – حا (ا ب)

٢) حا (ا $\cup$ ب) = حا (ا) + حا (ب) – حا (ا ب)، ومنها حا (ا $\cup$ ب) $\leqq$ حا (ا) + حا (ب)

الاحتمال الشرطي (Conditional Probability)

إذا كانت ا ، ب حادثتين في فضاء الحوادث ى لتجربة عشوائية ما ، ولا نعلم أي شئ عن الحادثة ب فإن احتمال وقوع الحادثة (ا)، وهو حا(ا)، ويسمى الاحتمال غير المشروط للحادثة ا (وللسهولة يسمى احتمال الحادثة ا) . أما إذا كانت لدينا معلومات عن وقوع الحادثة ب فإن معرفة هذه المعلومات قد يؤثر على احتمال وقوع الحادثة (ا) لذلك نحتاج إلى إيجاد احتمال وقوع الحادثة ا بشرط وقوع الحادثة ب، ويسمى هذا الاحتمال المشروط (الاحتمال الشرطي)، ويرمز له بالرمز حا (ا | ب) أي احتمال وقوع الحادثة ا شرط وقوع الحادثة ب، وتتحدد قيمة هذا الاحتمال من التعريف التالي :

إذا كانت ا ، ب حادثتين في فضاء الحوادث ى و كانت حا (ب) $\neq$ ٠ فإن حا(ا | ب) = $\frac{\text{حا (ا ب)}}{\text{حا (ب)}}$

لا حظ أنه في حالة حا (ب) = ٠ فلا معنى للاحتمال المشروط، ومن التعريف السابق نجد أن :

$$\left.\begin{array}{l}\text{حا}(ا \cap ب) = \text{حا}(ب) \,.\, \text{حا}(ا|ب)\\ \text{حا}(ا \cap ب) = \text{حا}(ا) \,.\, \text{حا}(ب|ا)\end{array}\right\} \quad *$$

وهذا يتوقف على كونه أي الحادثتين قد وقع أولاً .

وتسمى القاعدة (*) بقاعدة الضرب أو قانون الضرب ، ويمكن تعميمها لأكثر من حادثتين على النحو التالي :

$$\text{حا}(ا_1 \cap ا_2 \cap ا_3 \cap \dots \cap ا_د) = \text{حا}(ا_1) \,.\, \text{حا}(ا_2|ا_1) \,.\, \text{حا}(ا_3|ا_1، ا_2) \dots \text{حا}(ا_د|ا_1، ا_2، \dots، ا_{د-1})$$

الحوادث المستقلة (Independent Events)

من الواضح أن هناك فرقًا بين احتمال الحادثة ا ، واحتمال الحادثة ا بشرط وقوع الحادثة ب [أي أن هناك فرقًا بين حا(ا) ، حا (ا|ب)] ولكن إذا حدث أن حا(ا) = حا(ا | ب) فإن هذا يعني أنَّ احتمال الحادثة ا لا يعتمد على وقوع الحادثة ب، ولا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحادثة ب؛ وفي هذه الحالة يقال إن ا مستقلة عن ب، ويكون :

حا(ا $\cap$ ب) = حا (ا) . حا (ب) (**) . وإذا كانت ا مستقلة عن ب تكون ب مستقلة عن ا .

هناك علاقة وثيقة بين الحوادث المتنافية واستقلال الحوادث، فقد يتبادر إلى الذهن أن الحوادث المتنافية يجب أن تكون مستقلة ولكن العكس هو الصحيح .

إن الحوادث المتنافية ذات الاحتمال الموجب لا يمكن أن تكون مستقلة. يتضح ذلك من خلال شروط الاستقلال (*) حيث تنافي الحادثتين ا ، ب يجعل حا (ا $\cap$ ب) = ٠ بينما حا (ا) $\neq$ ٠ ، حا(ب) $\neq$ ٠ وبالتالي فإن الشرط (**) لا يتحقق

يمكن تعميم مفهوم الاستقلال إلى أكثر من حادثتين . فيقال إن الحوادث $أ_١ ، أ_٢ ، . . . ، أ_ن$ مستقلة إذا تحققت الشروط الآتية :

– $حا(أ_ر \; أ_هـ) = حا(أ_ر) . حا(أ_هـ)$ ، $١ \leqslant ر \leqslant هـ \leqslant ن$

– $حا(أ_ر \; أ_هـ \; أ_و) = حا(أ_ر) . حا(أ_هـ) . حا(أ_و)$ ، $١ \leqslant ر \leqslant هـ \leqslant ن$

– $حا(أ_١ ، أ_٢ ، . . . ، أ_ن) = حا(أ_١) \, حا(أ_٢) . . . حا(أ_ن)$

لا حظ أن تحقيق أحد الشروط السابقة بمفرده يشكل شرطاً لازماً لاستقلال الحوادث، ولكنه ليس كافياً .

أما تحقق الشروط مجتمعة فيشكل شرطاً ضرورياً كافياً لاستقلال الحوادث $أ_١ ، أ_٢ ، . . . ، أ_ن$

متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي

عند دراسة مسألة احتمالية ما ، قد ينصب اهتمامنا فقط على وقوع حادثة محددة من بين عناصر فضاء الحوادث دون أن نكون بحاجة إلى دراسة تفاصيل وقوع بقية حوادث الفضاء؛ وبالتالي تؤول المسألة إلى تجربة عشوائية ذات احتمالين فقط، مثل هذه التجارب التي تنسب إلى العالم برنوللي (Bernoulli)، وفيها يشار إلى وقوع الحادثة محل البحث بكلمة (نجاح) ويرمز لها بالرمز (ح)، ويشار إلى عدم وقوع الحادثة بكلمة (فشل) ويرمز لها بالرمز (ف) .

واستناداً إلى مسلمات الاحتمالات وفكرة بناء النموذج الاحتمالي نجد بسهولة أن $ف = ١ - ح$.

فإذا كررنا تنفيذ التجربة بصورة مستقلة (ن) مرة فما احتمال الحصول على س نجاحاً من هذه التكرارات (حيث $س \leqslant ن$) ؟

لاحظ أولاً : إن احتمال الحصول على متتالية محدودة من النتائج (كل منها إما نجاح أو فشل) هو حاصل ضرب ن من الأعداد كل منها ح أو ف .

ثانياً : إن وجود س من النجاحات يعني أن متتالية النتائج لـ ن مرة يجب أن تتضمن س نجاحاً ، $ن - س$ فشلاً وأن احتمال كل متتالية من هذا النوع هو $ح^{س} . ف^{ن-س}$

ولكن ما عدد هذه الأشكال المختلفة ؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن أن نكتب متتالية من ن كلمة بحيث تتضمن كلمة نجاح س مرة وتتضمن كلمة فشل $ن - س$ مرة ؟ والجواب هو :

عدد توافيق ن مأخوذ س منها في وقت واحد أو $\binom{ن}{س}$ ويكون الاحتمال المطلوب هو :

$$\text{احتمال الحصول على س نجاحاً} = \binom{ن}{س} ح^{س} ف^{ن-س}$$

$$= \binom{ن}{س} ح^{س} (١ - ح)^{ن-س}$$

وهذا ما يعرف بقانون الاحتمال الثنائي (أو توزيع ذات الحدين) .

توجيهات طرائقية عامة

نقدم في هذا البند الإرشادات الطرائقية التي نتوخّى أن تساعد المدرس على التعامل مع محتوى الوحدة بوعي وإدراك، بما يمكّنه من تحقيق أهداف الوحدة . نوجز هذه الإرشادات بالنقاط الآتية :

- على المدرس التأكد من مدى توفر المتطلبات الأساسية للتعلم الجديد وذلك قبل البدء في تدريس بنود الوحدة ، وفي هذا الصدد نذكِّر المدرس بأهم هذه المواضيع وهي : التباديل والتوافيق ومبدأ العد ، التجربة العشوائية ، فضاء العينة ، دالة الاحتمال .
- قد يبدو أن البند الأول تكرار لمفاهيم أساسية سبق للطالب دراستها في الصف السابق ، ولكننا نشير إلى أننا نهدف من تقديم هذا البند إلى تحقيق غرضين :أولهما تعميق فهم الطالب للمفاهيم والقوانين المتضمنة في البند لأنها تشكل أساساً يصعب على الطالب استيعاب بقية بنود الوحدة دون أن يكون مستوعباً لتلك الأساسيات؛ والغرض الآخر هو تنمية قدرة الطالب على البرهنة الرياضية كخطوة لتنمية قدراته على التفكير الرياضي السليم. ولهذا قدمت تلك الأسس بصورة مبرهنات تعتمد في برهانها على مسلمات الاحتمالات .
- على المدرس أن يربط بين مواضيع الوحدة ببنودها الخمسة؛ وذلك لإبراز التسلسل المنطقي في محتويات الوحدة من ناحية، ومن ناحية أخرى إبراز التكامل والاتساق وعدم التناقض بين بنود الوحدة كبناء رياضي ، ذلك من شأنه أن يجعل الطالب يفهم طبيعة بناء الرياضيات وخصوصيتها .
- عند تناول موضوع بناء النموذج الاحتمالي على المدرس إتاحة الفرصة للطلاب، للمشاركة في بناء النموذج الاحتمالي للمسألة الاحتمالية وفق معطياتها، وهنا ننصح بتنويع الأمثلة بحيث تشمل تناول تجارب عشوائية وكيف حدوث الحوادث متساوية. ويتم تناول مسائل احتمالية تستند إلى تجارب ثبت فيها عدم تساوي فرص الظهور للحوادث ، ثم تناول مسائل احتمالية يكون للطالب النظر فيها بطريقتين مختلفتين (فرص متساوية أو غير متساوية) .
- عند تناول موضوع الاحتمال الشرطي والحوادث المستقلة ينبغي على المدرس مراعاة ما يلي :
  - يتم تقديم مفهوم الاحتمال الشرطي بأمثلة بسيطة أولاً ، يستطيع الطالب معها أن يدرك بسهولة التفريق بين الاحتمال غير المشروط لحادثة والاحتمال المشروط لتلك الحادثة، وبالتالي يتم استنتاج قانون الاحتمال الشرطي، ومنه قانون الضرب، ومن ثم شرط استقلال حادثتين .
  - بعد ذلك تتم مناقشة أمثلة تحتوي على مسائل احتمالية يصعب فيها على الطالب التفريق بين الاحتمال غير المشروط والاحتمال المشروط دون اللجوء إلى شرط الاستقلال ، فتبرز هنا أهمية صيغة شروط الاستقلال .
  - من المهم هنا دراسة العلاقة بين تنافي القضايا واستقلالها ، حتى يدرك الطالب أن التنافي في قضيتين يقتضي عدم استقلالهما والعكس غير صحيح كما قد يبدو له ظاهرياً .
- عند تناول موضوع متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي ، من الضروري أن يدرك الطالب الفكرة الأساسية التي اعتمدنا عليها في استنتاج قانون الاحتمال الثنائي، وهي مسلّمات الاحتمال ، وفكرة بناء النموذج الاحتمالى ، و قانون الضرب الاحتمالي .
- في موضوع السحب مع الإعادة وبدون إعادة ينبغي معالجة مسائل احتمالية بشمولية، بحيث يتم توظيف معظم المفاهيم الاحتمالية التي درسها الطالب خلال دراسته للوحدة كاملة؛ وبذلك يبدو الموضوع أمامه متكامل ومتماسك.

٣ – ١ بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

– يتقن المفاهيم الأساسية في الاحتمال .
– يثبت بعض المبرهنات الأساسية في الاحتمالات .
– يستخدم المبرهنات الأساسية في حساب احتمال وقوع حادثة .
– يستنتج قانون الاحتمال الكلي .
– يميِّز الحالات الخاصة للمبرهنات الأساسية في الاحتمالات وقانون الاحتمال الكلي .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ست حصص، على النحو التالي :
الحصة الأولى : مراجعة .
الحصة الثانية : المبرهنتان (٣ – ١) ، (٣ – ٢) .
الحصتان الثالثة والرابعة : المبرهنتان (٣ –٣) ، (٣ – ٤) ونتائجهما .
الحصتان الخامسة والسادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال ملاحظة مناقشات الطلبة عند إثبات المبرهنات، وحل الأمثلةعليها، وكذلك من خلال متابعة أداء الطلبة عند حل الواجبات المنزلية. وفي نهاية الحصة السادسة يقدِّم تمرين كالتالي كخطوة تقويم:
بيِّن وجه الخطأ في كلٍ من العبارات الآتية :
١ – احتمال أن ينجح طالب في الامتحان ٠,٨٧ واحتمال أن يفشل ٠,١٣ .
٢ – احتمال أن يهطل مطر في يوم مشمس ٠,٦٧ واحتمال أن يهطل أو يتساقط الثلج في ذلك اليوم ٠,٥٥ .
٣ – احتمال أن ينجح طالب في الرياضيات ٠,٨٢ واحتمال أن ينجح الطالب نفسه في الرياضيات والفيزياء معاً ٠,٨٦

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ – ١)

[١] ع = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ } ⇐ ن(ع) = ١١

∴ أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ } ، ب = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ } ⇐ ن(أ) = ٦ ، ن(ب) = ٤

∴ ١) حا(أ) $=\frac{٦}{١١}$ ، ٢) حا(ب) = $\frac{٤}{١١}$

٣) حيث أن أ ب = Ø ⇐ حا(أ ب) = ٠

٤) ∴ حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب) = $\frac{٦}{١١} + \frac{٤}{١١} = \frac{١٠}{١١}$

[٢] نفرض أن : ح = حادثة سحب كرة حمراء ، ب = حادثة سحب كرة بيضاء ، س = حادثة سحب كرة سوداء

∴ ن(ع) = ٦ + ٤ + ٥ = ١٥

١) حا(س) = $\frac{٥}{١٥}$ = $\frac{١}{٣}$ ٢) حا($\bar{ح}$) = ١ − حا(ح)

وحيث أن حا(ح) = $\frac{٦}{١٥}$ = $\frac{٢}{٥}$ ⇐ حا($\bar{ح}$) = ١ − $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

٣) حا(ح ∪ ب) = حا(ح) + حا(ب) لأن ح ، ب متنافيتين

∵ حا(ب) = $\frac{٤}{١٥}$ ، ∴ حا(ح ∪ ب) = $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{٤}{١٥}$ = $\frac{٢}{٣}$

[٣] :١) حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب) − حا(أ ب)

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٣}{٨}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٥}{٨}$

٢) حا(أ ∪ $\bar{ب}$) = حا(أ) + حا($\bar{ب}$) − حا(أ $\bar{ب}$)

∵ حا(أ $\bar{ب}$) = حا(أ) − حا(أ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

∴ حا(أ ∪ $\bar{ب}$) = حا(أ) + حا($\bar{ب}$) − حا(أ $\bar{ب}$)

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{٨}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{٨}$

[٤] :١) ∵ أ ، ب متنافيتان ، ∴ حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب)

∴ $\frac{١}{٣}$ = س + $\frac{١}{٤}$ ⇐ س = $\frac{١}{١٢}$

٢) عندما ب ⊃ أ ⇐ حا(أ) = حا(أ ∪ ب) ، ∴ س = $\frac{١}{٣}$

[٥] لاحظ أن : ن(ع) = ٨٠ ، ن(أ) = ٦٠ ، ن(ب) = ٤٠ ، ن(أ ب) = ٣٠ .

∴ حا(أ) = $\frac{٦٠}{٨٠}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، حا(ب) = $\frac{٤٠}{٨٠}$ = $\frac{١}{٢}$ ، حا(أ ب) = $\frac{٣٠}{٨٠}$ = $\frac{٣}{٨}$.

١) حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب) − حا(أ ب) = $\frac{٣}{٤}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٧}{٨}$.

٢) حا($\bar{أ}$ ب) = حا(ب) − حا(أ ب) = $\frac{١}{٢}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$.

٣) حا(أ $\bar{ب}$) = حا(أ) − حا(أ ب) = $\frac{٣}{٤}$ − $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٣}{٨}$.

[٦] : ١) ∵ أ ⊃ ب ، ب = أ ∪ ب ⇐ حا(ب) = حا(أ ∪ ب) = ٠,٧

٢) حا(أ $\bar{ب}$) = حا(أ) − حا(أ ب) ، ∵ أ ⊃ ب ⇐ حا(أ ب) = حا(أ)

∵ حا(أ $\bar{ب}$) = ٠

٣) حا($\bar{أ}$ ب) = حا(ب) − حا(أ ب) = ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٤

٣ – ٢ بناء النموذج الاحتمالي

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

– يبني نموذجاً احتمالياً لمسألة (احتمالية معطاة) .
– يحسب احتمال وقوع حادثة باستخدام فكرة بناء النموذج الاحتمالي الذي يشمل تلك الحادثة .
– يميز الاحتمال المنتظم .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :
الحصص الثلاث الأولى : فكرة بناء نموذج احتمالي لمسألة احتمالية معطاة ، ومناقشة أمثلة متنوعة .
الحصتان الأخيرتان : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال ملاحظة مشاركة الطلبة في بناء نماذج احتمالية لمسائل مختارة، وكذلك من خلال متابعة أدائهم في حل الواجبات الصفية والمنزلية . وفي نهاية الحصة الخامسة يقدِّم التمرين التالي :
صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة يساوي ضعف احتمال ظهور الكتابة عند رميها . أوجد :
١) حا (ك) ٢) حا (ص)
٣) حا (ك ∪ ص) ، حيث ك حادثة ظهور الكتابة و ص حادثة ظهور الصورة .

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ – ٢)

[١] : أ) نفرض أن : أ هي حادثة الحصول على العدد نفسه في المكعبين

∴ أ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

∴ ن (أ) = ٦ ، ن (ع) = ٣٦ ، ∴ حا (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

ب) بصورة مماثلة نفرض أن ب هي حادثه الحصول على مجموع أكبر من ٩

∴ ب = { (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٤) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

∴ ن (ب) = ٦ ، ∴ حا (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

جـ) نفرض جـ هي حادثة الحصول على العدد ٣ من المكعب الأول فيكون

جـ = { (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٣ ، ٦) }

∴ ن (جـ) = ٦ ، ∴ حا (جـ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

[٢] للتمييز بين الكرات دعنا نرمز للكرات الحمراء بالرمز ح (ح$_١$ ، ح$_٢$ ، ح$_٣$ ، ح$_٤$) وللكرات البيضاء بالرمز ب (ب$_١$ ، ب$_٢$ ، ب$_٣$) وللكرات السوداء بالرمز س (س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، س$_٤$ ، س$_٥$)

فيكون ن(ح) = ٤ ، ن(ب) = ٣ ، ن(س) = ٥

∴ ع = { ح$_١$ ، ح$_٢$ ، ح$_٣$ ، ح$_٤$ ، ب$_١$ ، ب$_٢$ ، ب$_٣$ ، س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، س$_٤$ ، س$_٥$ } ⟸ ن(ع) = ١٢

∴ احتمال سحب كرة حمراء = $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$ ، احتمال سحب كرة بيضاء = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

واحتمال سحب كرة سوداء = $\frac{٥}{١٢}$

١) حا (ح ∪ س) = حا (ح) + حا (س) = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

٢) حا (ح ∪ ب) = حا (ح) + حا (ب) = $\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٧}{١٢}$

٣) حا (ح ∪ ب ∪ س) = حا (ع) = ١

[٣] : لاحظ أن ن(ع) = ٨٠

∴ ١) نفرض أن أ هي حادثة أن يكون الطالب المختار يدرس اللغة الانجليزية ⟸ حا (أ) = $\frac{٣٥}{٨٠}$ = $\frac{٧}{١٦}$

٢) نفرض أن ب هي حادثة أن يكون الطالب المختار يدرس اللغة الفرنسية ⟸ حا (ب) = $\frac{٢٥}{٨٠}$ = $\frac{٥}{١٦}$

٣) نفرض أن جـ هي حادثة أن يكون الطالب المختار يدرس اللغة الألمانية ⟸ حا (جـ) = $\frac{٢٠}{٨٠}$ = $\frac{١}{٤}$

حا(جـ ∪ ب) = حا(جـ) + حا (ب) = $\frac{٥}{١٦}$ + $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٩}{١٦}$

[٤] أولاً ع = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ، ∴ ن(ع) = ٨

ثانياً ١) أ هي حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل هذا يعني ظهور صورة واحدة أو صورتين أو ثلاث صور

∴ أ = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) } ، ∴ ن(أ) = ٧

∴ حا (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ع)}$ = $\frac{٧}{٨}$

٢) ب هي حادثه ظهور صورتين على الأقل يعني ظهور صورتين أو ثلاث صور

∴ ب = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) }

∴ ن(ب) = ٤ ، ∴ حا (ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ع)}$ = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

٣) جـ هي حادثة ظهور كتابة واحدة على الأقل يعني ظهور كتابة واحدة أو كتابتين أو ثلاث كتابات

∴ ن(جـ) = ٧ ، ∴ حا (جـ) = $\frac{ن(جـ)}{ن(ع)}$ = $\frac{٧}{٨}$

٤) ء هي حادثة ظهور كتابتين متتاليتين ⟸ ، ن(ء) = ٢ ، ∴ حا (ء) = $\frac{١}{٤}$ ،

٥) هـ هي حادثة ظهور صورتين فقط ∴ ن(هـ) = ٣ ⟸ حا (هـ) = $\frac{٣}{٨}$

٦) و هي حادثة ظهور صورتين على الأكثر يعني ظهور صورتين أو صورة واحدة أو عدم ظهور صورة

∴ ن(و) = ٧ حا(و) = $\frac{٧}{٨}$

[٥] ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . . ، ١٠٠ } ، ∴ ن (ع) = ١٠٠

أ) ∵ أ هي حادثة أن العدد يقبل القسمة على ١٠ = { ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، . . . ، ١٠٠ }

∴ ن (أ) = ١٠ ، ∴ حا (أ) = $\frac{١٠}{١٠٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

ب) ∵ ب حادثة أن العدد على البطاقة يقبل القسمة على ١٧ ، ∴ ب ={ ١٧ ، ٣٤ ، ٥١ ، ٦٨ ، ٨٥}

∴ ن (ب) = ٥ ، ∴ حا(ب) = $\frac{٥}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٢٠}$ ، ∵ جـ هي حادثة العدديقبل القسمة على ١٠ أو ١٧

جـ) أي : جـ = أ ∪ ب ⟸ حا(جـ) = حا (أ ∪ ب) = حا (أ) + حا (ب) لأن أ ∩ ب = Ø

∴ حا (جـ) = $\frac{١}{١٠}$ + $\frac{١}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٢٠}$

[٦] ن (ع) = ٣٦

نفرض أن أ هي حادثة مجموع الرقمين يكون عدداً زوجياً ، ∴ أ هي نصف فضاء العينة ، ∴ ن (أ) = ١٨

∴ حا (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ع)}$ = $\frac{١٨}{٣٦}$ = $\frac{١}{٢}$

ب حادثة مجموع الرقمين يساوي ٧

∴ ب = {(١ ، ٦) ، (٦ ، ١)،(٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣)،(٢ ، ٥) ، (٥ ، ٢) }

∴ ن (ب) = ٦ ، ∴ حا (ب) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$

حـ حادثة الحصول على العدد ٤ في الرمية الأولى وعلى العدد ٣ في الرمية الثانية

∴ جـ = {(٤ ، ٣)} ، ∴ ن (جـ) = ١ ، ∴ حا (جـ) = $\frac{١}{٣٦}$

[٧] ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٦٠ } ، ∴ ن (ع) = ٦٠

أ) نفرض أن أ هي أن يكون العدد المختار زوجياً ، ∴ أ هي نصف فضاء العينة

∴ ن (أ) = ٣٠ ، ∴ حا (أ) = $\frac{٣٠}{٦٠}$ = $\frac{١}{٢}$

ب) نفرض أن ب هي أن يكون العدد مربعاً كاملاً ، ∴ ب = {١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٣٦ ، ٤٩}

∴ ن (ب) = ٧ ، ∴ حا(ب) = $\frac{٧}{٦٠}$

جـ) نفرض أن جـ هي حادثة أن العدد يقبل القسمة على ٧

∴ جـ = {٧ ، ١٤ ، ٢١ ، ٢٨ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٤٩ ، ٥٦ } ، ∴ ن (جـ) = ٨

∴ حا (جـ) = $\frac{٨}{٦٠}$ = $\frac{٢}{١٥}$

ء) ء = هي حادثة أن العدد يقبل القسمة على ٧ أو ١٧ .

∴ ء = { ٧ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢١ ، ٢٨ ٣٤ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٤٩ ، ٥١ ، ٥٦ } ، ∴ ن (ء) = ١١

∴ حا(ء) = $\frac{١١}{٦٠}$

[٨] تمييزاً للكرات عن بعضها نرمز للكرات البيضاء التي في الصندوق الأول بالرمز ب$_١$ ، ب$_٢$ وللكرة السوداء بالرمز س$_١$ وللكرة البيضاء في الصندوق الثاني بالرمز ب$_٣$ و للكرة السوداء بالرمز س$_٢$ فيكون :

ع = {(ب$_١$، ب$_١$) ، (ب$_١$، ب$_٣$) ، (ب$_١$، س$_٢$)، (ب$_٢$، ب$_٢$) ، (ب$_٢$، ب$_٣$) ، (ب$_٢$، س$_٢$) ، (س$_١$ ، س$_١$) ، (س$_١$ ، ب$_٣$) ، (س$_١$ ، س$_٢$) } ، ∴ د (ع) = ٩ حيث المسقط الأول في كل زوج مرتب يرمز لنتيجة السحب من الصندوق الأول والمسقط الثاني يرمز لنتيجة السحب من الصندوق الثاني .

١) إذا خصصنا لكل نقطة من نقاط العينة احتمالاً = $\frac{١}{٩}$ فإننا في هذه الحالة نكون قد كوّنا النموذج الاحتمالي الآتي :

حا {(ب$_١$، ب$_١$)} = حا {(ب$_١$، ب$_٣$)} = . . . = حا {(س$_١$، س$_٢$)} = $\frac{١}{٩}$

وهو النموذج الاحتمالي المطلوب .

٢) نفرض أن أ = حادثة سحب كرة بيضاء من الصندوق الثاني

∴ أ = {(ب$_١$، ب$_١$)، (ب$_١$، ب$_٣$)، (ب$_٢$، ب$_٢$) ، (ب$_٢$، ب$_٣$) ، (س$_١$ ، ب$_٣$) }

∴ د (أ) = ٥ ، ∴ حا (أ) = $\frac{٥}{٩}$

[٩] أ) د (ع) = ٥٢ وحيث إن عدد صور الولد وعدد صور البنت = ٨ صور

نفرض أن (أ) = حادثة أن تكون الورقة المسحوبة تحمل صورة الولد أو صورة البنت

∴ د (أ) = ٨ ، ∴ حا(أ) = $\frac{٨}{٥٢}$ = $\frac{٢}{١٣}$

ب) نفرض أن (ب) = حادثة أن تكون الورقة المسحوبة سوداء

∴ د (ب) = ٢٦ ، ∴ حا(ب) = $\frac{٢٦}{٥٢}$ = $\frac{١}{٢}$

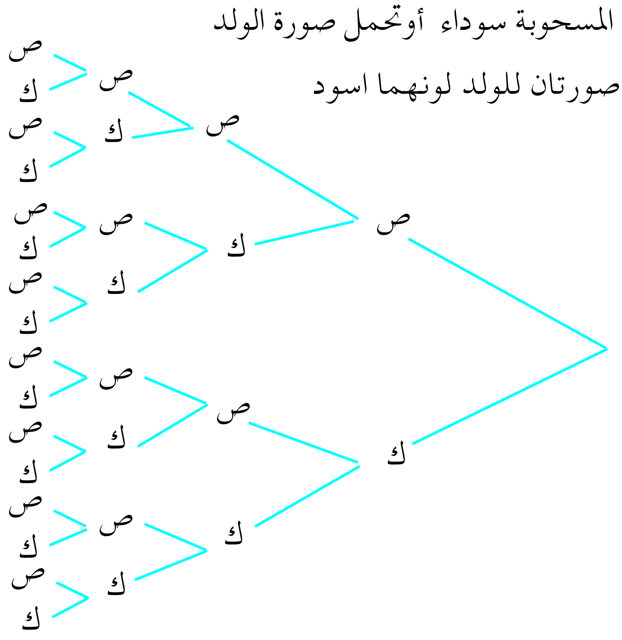
جـ) نفرض أن (جـ) = حادثة أن تكون الورقة المسحوبة سوداء أوتحمل صورة الولد

لاحظ أن الورق السوداء = ٢٦ ورقة ، صورتان للولد لونهما اسود

∴ د (جـ) = ٢٦ + ٢ = ٢٨ ورقة

∴ حا (جـ) = $\frac{٢٨}{٥٢}$ = $\frac{٧}{١٣}$

[١٠] نوجد ع باستخدام الشجرة البيانية كما يلي :



أولاً ع = { (ص ، ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ص ، ك) ، (ص ، ص ، ك ، ص) ، (ص ، ص ، ك ، ك) ،
(ص ، ك ، ص ، ص) ، (ص ، ك ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك ، ك) ،
(ك ، ص ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ص ، ك) ، (ك ، ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ك ، ك) ،
(ك ، ك ، ص ، ص) ، (ك ، ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك ، ك) }

∴ ء (ع) = ١٦ زوج

ثانياً أ) نفرض أن ا هي حادثة أن تكون نتيجة الرمية الثانية ظهور الصورة فيكون ء (ا) = ٨ ، ∴ حا (ا) = $\frac{٨}{١٦}$ = $\frac{١}{٢}$

٣) نفرض أن ب هي حادثة ظهور الصورة ثلاث مرات على الأقل ، ∴ ء (ب) = ٥ ، ∴ حا (ب) = $\frac{٥}{١٦}$

٤) نفرض أن جـ هي حادثة ظهور الكتابة مرتين على الأقل ، ∴ ء (جـ) = ١١ ، ∴ حا (جـ) = $\frac{١١}{١٦}$

[١١] : أ) ع = نفس فضاء العينة لحل مسألة رقم [١٠] بعد وضع « ب » بدلاً من « ك » حيث « ص » ترمز للصبي (ولد) ، ب ترمز لبنت ، ∴ ء (ع) = ١٦

نفرض أن ا هي حادثة لدى أسرة بنتان ، ∴ ء (ا) = ٦ ، ∴ حا (ا) = $\frac{٦}{١٦}$ = $\frac{٣}{٨}$

وبصورة مماثلة نفرض أن ب هي حادثة لدى الأسرة ولد واحد على الأقل ، ∴ ء (ب) = ١٥

∴ حا (ب) = $\frac{١٥}{١٦}$ ، وبصورة مماثلة نفرض أن جـ هي حادثة عدد الذكور اكثر من عدد الإناث

∴ ء (جـ) = ٥ ، ∴ حا (جـ) = $\frac{٥}{١٦}$

٣ – ٣ الاحتمال الشرطي وقانون الضرب والحوادث المستقلة

عدد الحصص : (٦) حصص .

الأهداف

- يتعرّف الاحتمال الشرطي .
- يحسب احتمال وقوع حادثة ما باستخدام قانون الاحتمال الشرطي .
- يدرك معيار استقلال حادثتين .
- يدرك العلاقة بين الاحتمال الشرطي واستقلال الحوادث .
- يميّز بين استقلال الحوادث وانفصالها (تنافيها) .

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى والثانية : الاحتمال الشرطي .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

الحصتان الرابعة والخامسة : قانون الضرب والحوادث المستقلة .

الحصة السادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال ملاحظة المناقشات ومتابعة أداء الطلبة في حل الواجبات المنزلية ، وفي نهاية الحصة السادسة يقدم التمرين التالي أو تمرينًا مكافئًا كخطوة تقويم :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }   فإذا كانت ﺃ = { ١ ، ٢ }   ب = { ١ ، ٣ }

ليكن ع فضاء عينة متساوي الاحتمال ، فهل الحادثتان ﺃ ، ب مستقلتان ؟

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ – ٣)

[١] $\text{حا}(\bar{أ}|\text{ب}) = \dfrac{\text{حا}(\bar{أ}\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \dfrac{\text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(أ\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})}$

$\therefore ٠,٤ = \dfrac{٠,٨ - \text{حا}(أ\text{ب})}{٠,٨} \Leftarrow ٠,٣٢ = ٠,٨ - \text{حا}(أ\text{ب}) \Leftarrow \text{حا}(أ\text{ب}) = ٠,٤٨$

[٢] ﺃ ، ب حادثتان مستقلتان ، $\therefore \text{حا}(أ\text{ب}) = \text{حا}(أ) \times \text{حا}(\text{ب})$

١) $\text{حا}(أ \cup \text{ب}) = \text{حا}(أ) + \text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(أ\text{ب})$

$= \text{حا}(أ) + \text{حا}(\text{ب}) - [\text{حا}(أ) \times \text{جا}(\text{ب})]$

$= \text{حا}(أ) + \text{حا}(\text{ب})[١ - \text{حا}(أ)]$

$\dfrac{٢}{٣} = \dfrac{١}{٢} + \text{حا}(\text{ب})[١ - \dfrac{١}{٢}]$

$\therefore \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{١}{٢} + \dfrac{١}{٢}\,\text{حا}(\text{ب})$ ، $\therefore \text{حا}(\text{ب}) = \dfrac{١}{٣}$

٢) $\text{حا}(أ|\text{ب}) = \dfrac{\text{حا}(أ\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})}$ ؛ $\because \text{حا}(أ \cup \text{ب}) = \text{حا}(أ) + \text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(أ\text{ب})$

$\therefore \dfrac{٢}{٣} = \dfrac{١}{٢} + \dfrac{١}{٣} - \text{حا}(أ\text{ب}) \Leftarrow \text{حا}(أ\text{ب}) = \dfrac{١}{٦}$ ، $\because \text{حا}(أ|\text{ب}) = \dfrac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٣}} = \dfrac{١}{٢}$

٣) $\text{حا}(\bar{\text{ب}}|أ) = \dfrac{\text{حا}(\bar{\text{ب}}أ)}{\text{حا}(أ)} = \dfrac{\text{حا}(أ) - \text{حا}(أ\text{ب})}{\text{حا}(أ)} = \dfrac{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \dfrac{٢}{٣}$

[٣] $\text{حا}(\bar{أ}|\text{ب}) = \dfrac{\text{حا}(\bar{أ}\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \dfrac{\text{حا}(\text{ب}) - \text{حا}(أ\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = \dfrac{\text{حا}(\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} - \dfrac{\text{حا}(أ\text{ب})}{\text{حا}(\text{ب})} = ١ - \text{حا}(أ|\text{ب})$

[٤] نفرض أن ﺃ هي حادثة سحب المصباح الأول سليماً ، $\therefore \text{حا}(أ) = \dfrac{١٢}{١٦}$

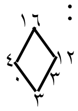
نفرض أن ب هي حادثة سحب المصباح الثاني سليماً أيضاً ، $\therefore \text{حا}(\text{ب}) = \dfrac{١١}{١٥}$

نفرض أن جـ هي حادثة سحب المصباح الثالث سليماً أيضاً ، $\therefore \text{حا}(\text{جـ}) = \dfrac{١٠}{١٤}$

نفرض أن و هي حادثة أن يكون الثلاثة المصابيح سليمة .

$\therefore \text{حا}(\text{و}) = \text{حا}(أ) \times \text{حا}(\text{ب}) \times \text{حا}(\text{جـ}) = \dfrac{١٢}{١٦} \times \dfrac{١١}{١٥} \times \dfrac{١٠}{١٤} = \dfrac{١١}{٢٨}$

أو حل آخر بطريقة المعين كما يلي :



$\text{حا}(\text{و}) = \dfrac{\binom{١٢}{٣}\binom{٤}{٠}}{\binom{١٦}{٣}}$

$= \dfrac{١١}{٢٨}$

[٥] لاحظ أن مجموع الكرات في الصندوق = ٧ + ٣ = ١٠ كرات ، ∴ ن(ع) = ١٠

نفرض أن أ هي حادثة أن تكون الكرة الأولى حمراء ، ∴ حا(أ) = $\frac{٧}{١٠}$ ،

وبالمثل عندما ب هي الكرة الثانية حمراء ، ∴ حا(ب) = $\frac{٦}{٩}$ ،

نفرض أن الثالثة جـ تكون بيضاء ، ∴ حا(جـ) = $\frac{٣}{٨}$ نفرض أن و هي حادثة الأولى والثانية حمراوان

والثالثة بيضاء فيكون حا(و) = حا(أ) × حا(ب) × حا(جـ) = $\frac{٧}{١٠}$ × $\frac{٦}{٩}$ × $\frac{٣}{٨}$ = $\frac{٧}{٤٠}$

[٦] ١) نبحث عن تحقق الشرط حا(أ ب̄) = حا(أ) × حا(ب̄)

بأخذ الطرف الأيمن : حا(أ ب̄) = حا(أ) − حا(أ ب) وحيث أ ، ب مستقلان

∴ حا(أ ب̄) = حا(أ) − حا(أ) × حا(ب) = حا(أ) [١ − حا(ب)] = حا(أ) × حا(ب̄)

∴ أ ، ب̄ مستقلتان .

٢) بصورة مماثلة نبحث عن تحقق الشرط حا(أ̄ ب) = حا(أ̄) × حا(ب)

بأخذ الطرف الأيمن : حا(ب أ̄) = حا(ب) − حا(أ ب) = حا(ب) − حا(أ) × حا(ب)

∴ حا(ب أ̄) = حا(ب) [١ − حا(أ)] = حا(ب) × حا(أ̄)

∴ ب ، أ̄ مستقلتان .

٣) بالأسلوب السابق نفسه نجد أن أ̄ ، ب̄ مستقلتان .

[٧] نفرض أن أ هي حادثة أن يصيب هشام الهدف، ∴ حا(أ) = $\frac{١}{٤}$

نفرض أن ب هي حادثة أن يصيب محمد الهدف، ∴ حا(ب) = $\frac{٢}{٥}$

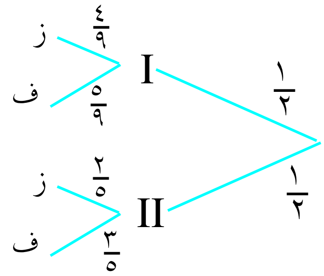
والمطلوب هو حا(أ ∪ ب) وحيث إن احتمال أن يصيب أ أو ب الهدف لا يتأثر احدهم نتيجة الآخر

وهذا يعني أن أ يصيب الهدف مستقل عن ب

∴ حا(أ ب) = حا(أ) × حا(ب) = $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٢}{٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

∴ حا(أ ∪ ب) = حا(أ) + حا(ب) − حا(أ ب) = $\frac{١}{٤}$ + $\frac{٢}{٥}$ − $\frac{١}{١٠}$ = $\frac{١١}{٢٠}$

[٨] نرمز للصندوق الأول بالرمز (I) وللصندوق الثاني بالرمز (II) ونفرض أن ز هي حادثة سحب بطاقة زوجية من الصندوق I وعليه يكون المطلوب هو حا (I | ز) وهو احتمال أن يكون الصندوق I قد اختير بمعلومية أن البطاقة المسحوبة فيه زوجية . وللتوضيح نمثّل هذه التجربة بشكل شجرة .



{ لأن عدد الأرقام الزوجية (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨) في الصندوق الأول يساوي ٤ }

{ لأن عدد الأرقام الزوجية (٢ ، ٤) في الصندوق الثاني يساوي ٢ }

∴ احتمال أن يكون الصندوق I قد اختير وأن يكون الرقم المسحوب منه زوجياً هو :

حا (I ∩ ز) $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٢}{٩}$ وحيث إنه يوجد مساران يؤديان إلى رقم زوجي

∴ حا (ز) $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١٩}{٤٥}$ ، ∵ حا (I | ز) $= \frac{\text{حا}(I \cap \text{ز})}{\text{حا}(\text{ز})} = \frac{\frac{٢}{٩}}{\frac{١٩}{٤٥}} = \frac{١٠}{١٩}$

[٩] نفرض أن أ هي حادثة الطلبة الراسبين في الرياضيات

، ب هي حادثة الطلبة الراسبين في الكيمياء

، أ ب هي حادثة الطلبة الراسبين في الرياضيات والكيمياء

∴ حا(أ) $= \frac{٢٥}{١٠٠} = ٠{,}٢٥$ ، حا(ب) $= \frac{١٥}{١٠٠} = ٠{,}١٥$ ، حا(أ ب) $= \frac{١٠}{١٠٠} = ٠{,}١$

١) حا(أ | ب) $= \frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا (ب)}} = \frac{٠{,}١}{٠{,}١٥} = \frac{٢}{٣}$

٢) حا(ب | أ) $= \frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا (أ)}} = \frac{٠{,}١}{٠{,}٢٥} = \frac{٢}{٥}$

[١٠] ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، ∴ ن (ع) = ٦

أ = { ٤ } ، ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ } ، جـ = { ١ ، ٢ } ، ∴ حا (أ) $= \frac{١}{٦}$

حا (ب) $= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ، حا (جـ) $= \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

١) حا (ب حـ) = حا (ب) × حا (جـ) $= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

٢) حا (أ | ب) $= \frac{\text{حا(أ ب)}}{\text{حا (ب)}}$. وحيث إن : أ ∩ ب = { ٤ } ، ∴ حا (أ ب) $= \frac{١}{٦}$

∴ حا (أ | ب) $= \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣}$.

٣) حا (ب | جـ) = $\frac{\text{حا(ب جـ)}}{\text{حا(جـ)}} = \frac{\frac{١}{٦}}{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{٢}$

٤) لبيان أن الحادثتين أ ، ب مستقلتان نحسب حا(أ) × حا(ب) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٢}$

ولكن حا (أ ب) = $\frac{١}{٦}$ أي $\frac{١}{٦} \neq \frac{١}{١٢}$ ، ∴ أ ، ب حادثتان غير مستقلتين

وبصورة مماثلة نحسب : حا(أ) × حا(جـ) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{١٨}$ ولكن أ ∩ جـ = $\varnothing$

∴ حا(أ جـ) = حا($\varnothing$) = ٠ ، ∵ ٠ $\neq \frac{١}{١٨}$ ، ∴ أ ، جـ حادثتان غير مستقلتين

وبصورة مماثلة نحسب : حا(ب) × حا(جـ) = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$ ، حا(ب جـ) = $\frac{١}{٦}$

∴ ب ، جـ حادثتان مستقلتان .

[١١] نرمز لفضاء العينة في السباق الأول بالرمز $ع_١$ ، ∴ $ع_١$ = { أ ، ب ، جـ }

ونرمز لفضاء العينة للسباق المكرر مرتين بالرمز $ع_٢$ فيكون $ع_٢ = ع_١ \times ع_١$.

١) $ع_٢$ = { أ ، ب ، جـ } × { أ ، ب ، جـ } = { (أ ، أ) ، (أ ، ب) ، (أ ، جـ) ، (ب ، أ)

، (ب ، ب) ، (ب ، جـ) ، (جـ ، أ) ، (جـ ، ب) ، (جـ ، جـ) }

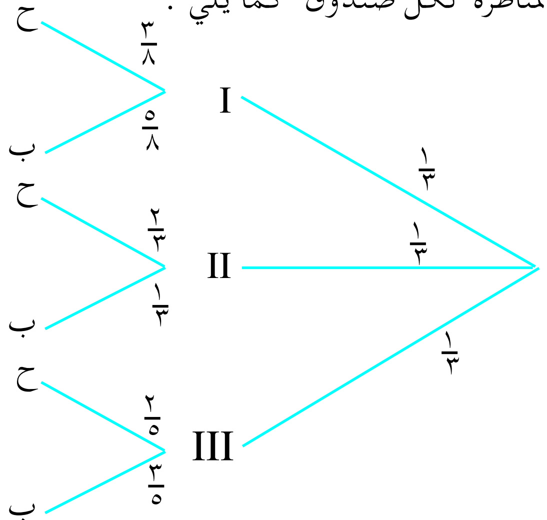
٢) احتمال فوز الطالب جـ بالسباق الأول، أ بالسباق الثاني هو حا(جـ أ) = حا(جـ) × حا(أ)

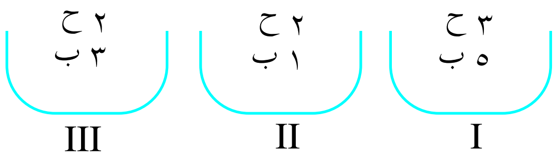
وحيث إن حا(جـ) = $\frac{١}{٦}$ ، حا (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ∴ حا (جـ أ) = $\frac{١}{٦} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٢}$

[١٢] نرمز للصندوق الأول بالرمز I ، نرمز للصندوق الثاني بالرمز II ونرمز للصندوق الثالث بالرمز III

ونرمز للكرات الحمراء بالرمز ح وللكرات البيضاء بالرمز ب ونكوِّن الشجرة البيانية للاحتمالات

المناظرة لكل صندوق كما يلي :





سنبحث أن يكون الصندوق I قد اختير بمعلومية أن الكرة المسحوبة منه حمراء، أي نبحث عن حا(I | ح) ولإيجاد حا(I | ح) من الضروري أولاً حساب حا(I ∩ ح) ، حا (ح)

∴ احتمال أن يكون الصندوق الأول I قد اختير وأن تكون كرة حمراء قد سحبت منه هو

$$\text{حا}(I \cap \text{ح}) = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٨} = \frac{١}{٨}$$

والآن نوجد حا(ح) وحيث إنه توجد ثلاث مسارات تؤدي إلى كرة حمراء

$$\therefore \text{حا}(\text{ح}) = \frac{١}{٣} \times \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{١٧٣}{٣٦٠}$$

$$\because \text{حا}(I \mid \text{ح}) = \frac{\text{حا}(I \cap \text{ح})}{\text{حا}(\text{ح})} = \frac{١}{٨} \div \frac{١٧٣}{٣٦٠} = \frac{٤٥}{١٧٣}$$

٣ : ٤ متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي

عدد الحصص : (٤) حصص

الأهداف

- يتعرَّف مدلول متتالية التكرارات المستقلة .
- يتعرَّف قانون الاحتمال الثنائي .
- يوجد احتمال وقوع حادثة باستخدام قانون الاحتمال الثنائي .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : متتالية التكرارات المستقلة .

الحصتان الثانية والثالثة : قانون الاحتمال الثنائي .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال ملاحظة مشاركة الطلبة في استنتاج متتالية التكرارات المستقلة وقانون الاحتمال الثنائي وكذلك متابعة أدائهم في حل الواجبات الصفية والمنزلية . وفي نهاية الحصة الرابعة يعطى تمرين شبيه بالتمرين التالي كخطوة تقويم:

في تجربة رمي مكعب نرد سبع مرات . أوجد احتمال ظهور العدد ١ :

أ) مرتين.

ب) عدداً فردياً من المرات .

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ – ٤)

[١] ع = { (ص ، ص ، ص) ، (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ص ، ك ، ك) ،
(ك ، ص ، ص) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك) } ، ∴ ن(ع) = ٨

أ) تظهر الصورة ٣ مرات (ص ، ص ، ص) في نقطة واحدةفقط من النقاط الثمان،
وإذا فرضنا أن أ هي حادثة ظهور الصورة ٣ مرات ، ∴ ن(أ) = ١ ، ∴ ح(أ) = $\frac{١}{٨}$

ب) نفرض ب هي حادثة ظهور الصورة مرتين
∴ ب = { (ص ، ص ، ك) ، (ص ، ك ، ص) ، (ك ، ص ، ص) } ، ∴ ن(ب) = ٣
∴ ح(ب) = $\frac{٣}{٨}$

جـ) نفرض جـ هي حادثة ظهور الصور مرة واحدة
∴ جـ = {(ص ، ك ، ك) ، (ك ، ص ، ك) ، (ك ، ك ، ص) } ، ∴ ن(جـ) = ٣ ، ∴ ح(جـ) = $\frac{٣}{٨}$

د) نفرض ى هي حادثة عدم ظهور الصورة ≡ ظهور الكتابة ٣ مرات أي
ى = {(ك ، ك ، ك) } ، ∴ ن(ى) = ١ ، ∴ ح(ى) = $\frac{١}{٨}$

حل آخر : ١) س = ٣ ، ح = ف = $\frac{١}{٢}$ ، ∴ ح(س = ٣) = $\text{ق}^{٣}_{٣} \times (\frac{١}{٢})^{٣} (\frac{١}{٢})^{٠}$

وبصورة مماثلة ٢) س = ٢ ٣) س = ١ ٤) س = ٠ ونطبق القانون

[٢] يجب إيجاد الاحتمالات عندما س = ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ وفي مثل هذه الحالات يكون من السهل إيجاد مجموع الاحتمالات عند ما س = ٠ ، ١ أي إذا لم تحدث أيُّ إصابة للهدف أو حدوث إصابة واحدة فقط ثم طرح هذه الاحتمالات من «١» ، ∵ ن = ٧ ، ح = $\frac{١}{٤}$ ، ف = $\frac{٣}{٤}$

∴ ح(عدم الإصابة أي س = ٠) = $\text{ف}^{\text{ن}}$ ، ∴ $\text{ف}^{\text{ن}} = (\frac{٣}{٤})^{٧} = \frac{٢١٨٧}{١٦٣٨٤}$

ح (إصابة واحدة) = $\text{ق}^{٧}_{١} \times (\frac{١}{٤}) (\frac{٣}{٤})^{٦} = \frac{٥١٠٣}{١٦٣٨٤}$

∴ احتمال أن يصيب الصياد الهدف على الأقل مرتين

$= ١ - (\frac{٢١٨٧}{١٦٣٨٤} + \frac{٥١٠٣}{١٦٣٨٤}) = ١ - \frac{٧٢٩٠}{١٦٣٨٤} = \frac{٤٥٤٧}{٨١٩٢}$

[٣] ن = ٤ ، ح = $\frac{٢}{٣}$ ، ∴ ف = ١ − $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

١) س = ٢ ، ح(س) = $\text{ق}^{٤}_{٢} \times (\frac{٢}{٣})^{٢} \times (\frac{١}{٣})^{٢} = \frac{٨}{٢٧}$

٢) احتمال الفشل في كل المحاولات = $\text{ف}^{\text{ن}}$ ، ∴ $\text{ف}^{\text{ن}} = (\frac{١}{٣})^{٤} = \frac{١}{٨١}$

وحيث إن احتمال نجاح واحد على الأقل = ١ − $\text{ف}^{\text{ن}}$ = ١ − $\frac{١}{٨١}$ = $\frac{٨٠}{٨١}$

٣) يكسب الفريق أكثر من نصف المباريات إذا كسب ٣ أو ٤ مباريات

∴ حا (س = ٣ أو ٤) $= \text{ق}^{٤}_{٣} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٣}\right) + \text{ق}^{٤}_{٤} \times \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٤} = \frac{١٦}{٢٧}$

[٤] ن = ٦ ، ح = ف $= \frac{١}{٢}$

١) س = ٣ ، حا(س = ٣) $= \text{ق}^{٦}_{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{٥}{١٦}$

٢) أن يكون عدد الأولاد أقل من عدد البنات إذا كان س = ١ أو ٢ وإذا فرضنا أن ﻫ هي الحادثة المطلوبة

فإن حا (ﻫ) = حا (ولد واحد) + حا(ولدان)

$= \text{ق}^{٦}_{١} \times \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} + \text{ق}^{٦}_{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{٢١}{٦٤}$

[٥] ن = ٤ ، ح = ٠,٣ ، ف = ٠,٧

أ) حا (س = ٢) $= \text{ق}^{٤}_{٢} \times (٠,٣)^{٢}\,(٠,٧)^{٢} = ٠,٢٦٤٦$

ب) احتمال أن يصيب الكرة مرة واحدة على الأقل $= ١ - \text{ف}^{\text{ن}} = ١ - (٠,٧)^{٤} = ٠,٧٥٩٩$

[٦] أ) نفرض أن أ هي حادثة لا يتخرج أي طالب من الكلية (أي س = ٠) وحيث ن = ٥ ، ح = ٠,٤

∴ ف = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

∴ حا (س = ٠) $= \text{ق}^{٥}_{٠} \times (٠,٤)^{٠}\,(٠,٦)^{٥} = ٠,٠٧٧٧٦$

ب) حا (يتخرج طالب واحد على الأقل) = ١ − ح (ألاّ يتخرج أحد)

= ١ − ٠,٠٧٧٧٦ = ٠,٩٢٢٢٤ ≃ ٠,٩٢

٣ – ٥ السحب مع الإعادة وبدون إعادة

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

– يتعرَّف السحب بدون إعادة .
– يتعرَّف السحب مع الإعادة .
– يميّز بين السحب مع الإعادة والسحب بدون إعادة .
– يحل مسائل احتمالية باستخدام الطريقتين للسحب .

تنفيذ حصص البند

ينفيذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : السحب مع الإعادة .
الحصة الثانية : أمثلة وتمارين صفية .
الحصة الثالثة : السحب بدون الإعادة .
الحصة الرابعة : أمثلة وتمارين صفية .
الحصتان الخامسة والسادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال ملاحظة مشاركة الطلاب في مناقشة الأمثلة ومتابعة أدائهم في حل الواجبات الصفية والمنزلية، وفي نهاية الحصة السادسة يعطى التمرين التالي أو تمرين مشابه له كخطوة تقويم :
في صندوق عشر ورقات مرقمة من ١ إلى ١٠ ، سحبت عشوائياً ورقتان . فما احتمال أن يكون المجموع عدداً فردياً ؟ إذا كان : أ) السحب مع الإعادة ، ب) السحب بدون إعادة

إرشادات وإجابات : تمارين (٣ – ٥)

[١] (١ : مع الإعادة :

حيث إن أ هي حادثة الحصول على كرتين حمراوين ،

$\therefore$ ح (أ) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$.

، ب هي حادثة الأولى حمراء والثانية سوداء ،

$\therefore$ ح (ب) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٥}{١٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٩}$.

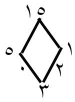
جـ هي حادثة واحدة حمراء وواحدة سوداء $\equiv$ الكرتين من لونين مختلفين

$\therefore$ جـ = حمراء ، سوداء أو سوداء ، حمراء

$\therefore$ ح (جـ) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٥}{١٥} + \frac{٥}{١٥} \times \frac{١٠}{١٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٩}$.

٢) : بدون إعادة

$\therefore$ ح (أ) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٩}{١٤} = \frac{٣}{٧}$

حل آخر : باستخدام طريقة المعين : حا (أ)  $= \frac{\binom{١٠}{٢}\binom{٥}{٠}}{\binom{١٥}{٢}} = \frac{٣}{٧}$ أو بالشكل :

∴ حا (أ) $= \frac{^{١٠}\text{ق}_{٢} \times {^{٥}\text{ق}_{٠}}}{^{١٥}\text{ق}_{٢}} = \frac{٣}{٧}$ ، ∴ حا (ب) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٥}{١٤} = \frac{٥}{٢١}$

∴ حا (جـ) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٥}{١٤} + \frac{٥}{١٥} \times \frac{١٠}{١٤} = \frac{١٠}{٢١}$

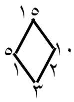
[٢] أولاً : السحب مع الإعادة

أ) حا (المصابيح الثلاثة سليمة) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{١٠}{١٥} \times \frac{١٠}{١٥} = \frac{٨}{٢٧}$

ب) حا (مصباح واحد غير سليم) $= {^{٣}\text{ق}_{١}} \times (\frac{١}{٣}) (\frac{٢}{٣})^{٢} = \frac{٤}{٩}$

ثانياً : السحب بدون إعادة

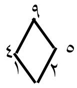
أ) حا (المصابيح الثلاثة سليمة) $= \frac{١٠}{١٥} \times \frac{٩}{١٤} \times \frac{٨}{١٣} = \frac{٢٤}{٩١}$

ب) حا (مصباح واحد غير سليم) $= \frac{^{١٠}\text{ق}_{٢} \times {^{٥}\text{ق}_{١}}}{^{١٥}\text{ق}_{٣}} = \frac{٤٥}{٩١}$ 

[٣] السحب هنا بدون إعادة وبدون ترتيب ، ∴ د (ع) $= {^{ن}\text{ق}_{ر}} = {^{٩}\text{ق}_{٣}} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} = ٨٤$ طريقة

نفرض أن أ هي حادثة سحب كرة سوداء وكرتين بيضاوين فيكون عدد طرق سحب كرة سوداء

$= {^{٤}\text{ق}_{١}}$، عدد طرق سحب كرتين بيضاوين $= {^{٥}\text{ق}_{٢}}$ ، ∴ عدد الحالات الملائمة $= {^{٤}\text{ق}_{١}} \times {^{٥}\text{ق}_{٢}} = ٤٠$ طريقة

∴ حا (أ) $= \frac{٤٠}{٨٤} = \frac{١٠}{٢١}$ حل آخر  حا (أ) $= \frac{^{٥}\text{ق}_{٢} \times {^{٤}\text{ق}_{١}}}{^{٩}\text{ق}_{٣}} = \frac{١٠}{٢١}$

[٤]: ١) د (ع) $= {^{ن}\text{ق}_{ر}} = {^{٥٢}\text{ق}_{٢}} = \frac{٥٢ \times ٥١}{٢ \times ١} = ١٣٢٦$

٢) التجربة تتم في مرحلتين :

المرحلة الأولى : وهو اختيار الورقة الأولى يتم بأربع طرق

المرحلة الثانية : يتم أيضاً بأربع طرق ، ∴ عدد الحالات الملائمة $= ٤ \times ٤ = ١٦$ طريقة

∴ حا (الورقتان احداهما بنت والأخرى عشرة) $= \frac{١٦}{١٣٢٦} = \frac{٨}{٦٦٣}$

[٥] أولاً : السحب مع الإعادة :

حا (أن تكون الكرات المسحوبة من لون واحد) = حا (الكرات البيضاء) + حا (الكرات السوداء)

١) حا (الكرات البيضاء) + حا (الكرات السوداء) $= \frac{٦}{١٥} \times \frac{٦}{١٥} \times \frac{٦}{١٥} + \frac{٩}{١٥} \times \frac{٩}{١٥} \times \frac{٩}{١٥} = \frac{٧}{٢٥}$

٢) حا (كرة واحدة سوداء) $= {^{٣}\text{ق}} \times (\frac{٩}{١٥}) (\frac{٦}{١٥})^{٢} = \frac{٣٦}{١٢٥}$ (حيث د = ٣، ح = $\frac{٩}{١٥}$، ف = $\frac{٦}{١٥}$)

ثانياً : السحب بدون إعادة :

١) حا (الكرات البيضاء) + حا (الكرات السوداء) = $\frac{٦}{١٥} \times \frac{٥}{١٤} \times \frac{٤}{١٣} + \frac{٩}{١٥} \times \frac{٨}{١٤} \times \frac{٧}{١٣} = \frac{١٠٤}{٤٥٥}$

٢) حا(كرة واحدة سوداء) = $\frac{ق^{٦}_{٢} \times ق^{٩}_{١}}{ق^{١٥}_{٣}} = \frac{٢٧}{٩١}$

[٦] الاختيار هنا بدون إعادة وبدون ترتيب

$\therefore$ د (ع) = $ق^{ن}_{ر} = ق^{٩}_{٣} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{٣ \times ٢ \times ١} = ٨٤$

$\therefore$ د (أ) = $ق^{٥}_{٣} = \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٠$ ، $\therefore$ حا (أ) = $\frac{١٠}{٨٤} = \frac{٥}{٤٢}$

$\because$ د (ب) = $ق^{٤}_{٣} = \frac{٤ \times ٣ \times ٢}{٣ \times ٢ \times ١} = ٤$ ، $\therefore$ حا (ب) = $\frac{٤}{٨٤} = \frac{١}{٢١}$

$\therefore$ د (جـ) = $ق^{٤}_{١} \times ق^{٥}_{٢} = ٤ \times ١٠ = ٤٠$ ، $\therefore$ حا (جـ) = $\frac{٤٠}{٨٤} = \frac{١٠}{٢١}$

[٧] د (ع) = $ق^{ن}_{ر} = ق^{١٤}_{٢} = \frac{١٤ \times ١٣}{٢ \times ١} = ٩١$

١) نفرض أ هي حادثة أن كلاً من الشخصين المختارين ذكرًا ،

$\therefore$ د (أ) = $ق^{٩}_{٢} = \frac{٩ \times ٨}{٢ \times ١} = ٣٦$ ، $\therefore$ حا(أ) = $\frac{٣٦}{٩١}$

٢) نفرض ب هي حادثة أن يكون أحد الشخصين المختارين على الأقل ذكرًا

$\therefore$ د (ب) = $ق^{٩}_{١} \times ق^{٥}_{١} + ق^{٩}_{٢} = ٤٥ + ٣٦ = ٨١$ ، $\therefore$ حا (ب) = $\frac{٨١}{٩١}$

٣) نفرض جـ هي حادثة أن يكون أحد الشخصين ذكرًا والآخر أنثى

$\therefore$ د (جـ) = $ق^{٩}_{١} \times ق^{٥}_{١} = ٤٥$ ، $\therefore$ حا (جـ) = $\frac{٤٥}{٩١}$

[٨] السحب هنا بدون إعادة وبدون ترتيب :

$\therefore$ د (ع) = $ق^{ن}_{ر} = ق^{١٤}_{٢} = \frac{١٤ \times ١٣}{٢ \times ١} = ٩١$ طريقة

١) نفرض (ب) هي حادثة سحب كرتين من نفس اللون من أصل ١٤ كرة في الصندوق ، وهذا يعني أن عدد الطرق الملائمة د (ب) هي : د (ب) = سحب كرتين حمراوين أو سحب كرتين بيضاوين أو سحب كرتين صفراوين ، $\therefore$ د (ب) = $ق^{٦}_{٢} + ق^{٥}_{٢} + ق^{٣}_{٢} = ٢٨$ طريقة ،

$\therefore$ حا(أ) = $\frac{٢٨}{٩١} = \frac{٤}{١٣}$

٢) حا (من لونين مختلفين) = ١ − حا (من نفس اللون) = $١ - \frac{٤}{١٣} = \frac{٩}{١٣}$

[٩] لاحظ إن ق (ع) = $\text{ق}^{٢٥}_{٣} = \frac{٢٥ \times ٢٤ \times ٢٣}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٣٠٠$

١) ق (أ) = $\text{ق}^{١٠}_{١} \times \text{ق}^{٩}_{١} \times \text{ق}^{٦}_{١} = ٥٤٠$ ، ∴ حا (أ) = $\frac{٥٤٠}{٢٣٠٠} = \frac{٢٧}{١١٥}$

٢) ق (ب) = حا (ب) = $\frac{\text{ق}^{١٠}_{٣} + \text{ق}^{١٠}_{١} \cdot \text{ق}^{٦}_{٢} + \text{ق}^{١٠}_{٢} \cdot \text{ق}^{٦}_{١} + \text{ق}^{٦}_{٣}}{\text{ق}^{٢٥}_{٣}} = \frac{٥٦٠}{٢٣٠٠}$

٣) ق (جـ) = $\text{ق}^{١٠}_{١} \times \text{ق}^{٩}_{٢} + \text{ق}^{١٠}_{٢} \times \text{ق}^{٩}_{١} = ٧٦٥$ ، ∴ حا (جـ) = $\frac{٧٦٥}{٢٣٠٠} = \frac{١٥٣}{٤٦٠}$

[١٠] أولاً: السحب مع الإعادة

جا (المجموع فردي) = $\binom{٢}{١،١}^{٢} \left(\frac{٥}{١٠}\right)^{٢} \left(\frac{٥}{١٠}\right)$

ثانياً: السحب بدون إعادة

جا (المجموع فردي) = $\frac{\binom{٥}{١}\binom{٥}{١}}{\binom{١٠}{٢}}$

[١١] نفس حل المسألة السابقة.

٣ – ٦ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

ينفّذ هذا البند في حصتين على النحو التالي : حل الاختبار الوارد في كتاب التمارين بمشاركة الطلبة أو يُعطى كواجب منزلي ، ثم يُعطى الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه له بحيث يغطي أهداف الوحدة حسب الجدول المرسوم جانباً .

رقم السؤال	رقم الهدف
[١]	١
[٢]	٢ ، ٣
[٣] (أ)	٤
(ب) ، (جـ)	٢
[٤]	٥
[٥]	٦

الاختبار

[١] لتكن ٫ ب حادثتين بحيث ب ⊇ ٫ ،
برهن أن : حا (ب) ≤ حا (٫)

[٢] في أحد أحياء أمانة العاصمة وُجد إن احتمال إنجاب ولد ضعف احتمال إنجاب بنت .
اختيرت أسرة من أسر هذا الحي بطريقة عشوائية ولوحظ أن لديها ٣ أطفال :
أ) ابنِ نموذجاً احتمالياً مناسباً لهذه المسألة ب) احسب احتمال أن يكون أطفال العائلة المختارة بنتين وولد .

[٣] إذا كان حا (٫ | ب) = ٠,٦ ، حا (ب) = ٠,٢ فاحسب :
أ) حا (٫ ب) ب) حا ($\overline{٫}$ ب) جـ) حا (٫)
ء) هل ٫ ، ب مستقلتان ؟ هـ) هل ٫ ، ب متنافيتان ؟

[٤] إذا كان احتمال أن يفوز فريق في أي مباراة يلعبها $\frac{٢}{٣}$
فما احتمال أن يفوز هذا الفريق في مباريتين من أربع مباريات سيلعبها ؟

[٥] سحبت عشوائياً ورقتان من بين أوراق اللعب العادي [عددها ٥٢ ورقة]
ما احتمال ان تكون الورقتان من نوع « ولد » . إذا كانت الورقة الأولى :
أ) تعاد إلى المجموعة . ب) لا تعاد إلى المجموعة .

قائمة المصطلحات

Probability	إحتمال
Probability function	دالة الإحتمال
Events	حوادث
Random variable	متغير عشوائى
Samble space	فضاء العينة
Mutually exclusive events	حادثتان متنافيتان
Certually event	حادث أكيد
Complementary event	حادث مكمل (أو متمم)
Null event	حادث مستحيل
Independent event	حادثة مستقلة
Conditional probability	الإحتمال الشرطى
Binomial random variable	متغير عشوائى ذو الحدين
Prime number	عدد أولي
Data	بيانات
Data, ordered	بيانات مرتبة
Hypothesis	فرض
Multiplicand	مضروب
Assess	يُقدر (يخمن)
Error	مقدار الخطأ
Outcome	الناتج
Some probability laws	بعض قوانين الإحتمالات
Rejection of hypothesis	رفض الفرض
Ratio	نسبة

المراجع

١– نظريات وسائل في الاحتمالات (سلسلة ملخصات سيشوم)

٢– الممتاز في الجبر والاحتمالات (جمهورية مصر العربية)

٣ – كتب المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم في الرياضيات

٤ – مبادئ في الإحصاء ، د / مدني دسوقي

٥ – مبادئ علم الإحصاء (جمهورية مصر العربية)

٦ – الطرق الإحصائية في التربية والعلوم الإنسانية (الأردن)

الوحدة الرابعة

القطــوع المخـــــــــروطيــــــــة

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٤ – ١	تمهيد	١
٤ – ٢	القطع المكافئ	٥
٤ – ٣	القطع الناقص	٥
٤ – ٤	القطع الزائد	٦
٤ – ٥	سحب المحاور الإحداثية	٣
٤ – ٦	دوران المحاور الإحداثية	٣
٤ – ٧	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	٢٥

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١– يعرِّف القطوع المخروطية : القطع المكافئ ، القطع الناقص والقطع الزائد .

٢– يتعرَّف معادلات القطوع المخروطية، ويتعرّف الصور المختلفة لها .

٣– يرسم القطوع المخروطية ويوجد معادلتها .

٤–يوجد طولي محوري القطع الناقص وتخالفه المركزي بمعلومية معادلته .

٥– يوجد محوري القطع الزائد ويعين إحداثيات رأسَية وبؤرته وتخالفه المركزي بمعلومية معادلته.

٦– يعيِّن الخطين المتقاربين لقطع زائد .

٧– يكتب معادلة القطوع المخروطية بواسطة الانسحاب .

٨ – يحدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله معادلة معطاة من الدرجة الثانية .

٩ – يحدِّد قياس زاوية دوران المحاور اللازمة للتخلص من الحد س ص في معادلة الدرجة الثانية في المتغيرين س ، ص ويحدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله .

المقدمة

استناداً إلى ما سبق أن درسه الطلبة من معارف في الهندسة التحليلية ، تتناول هذه الوحدة ثلاثة أنواع من القطوع المخروطية وهي القطع المكافئ ، والقطع الناقص، والقطع الزائد . ومن خلال مميزات معينة يتعرَّف الطلبة الصيغة العامة لمعادلة كل من هذه القطوع . ويتعرَّف الطلبة على إجراء بعض عمليات الانسحاب أو الدوران لتحوير معادلة معطاة إلى الصيغة العامة لمعادلة أحد القطوع .

وكالعادة تختتم الوحدة بالاختبار .

لمحة تاريخية

كانت المحاولات الأولى للكشف عن القطوع المخروطيةقد تمت من قبل العالم الاغريقي منياكموس Menaechmus حوالي عام ٣٥٠ قبل الميلاد ، وهو ممن شاركوا افلاطون Plato (٤٢٧ – ٣٤٧ ق . م) في تأسيس المدرسة الأفلاطونية في العام ٣٨٩ ق ، م واحد طلبة أيودوكسى Eudoxus (٤٠٨ – ٣٥٥ ق . م) وقد كانت هذه المحاولات كنتائج لتقاطع مخروط دائري قائم الزاوية مع مستويات في أوضاع مختلفه اسفرت عما يسمى الآن القطع المكافئ ، القطع الناقص والقطع الزائد .

وكتب ارستاكيوس Aristacus (٣١٠ – ٢٣٠ ق . م) المعاصر لاقليدس Euclids (٣٦٠ – ٢٩٠ ق . م) عن القطوع المخروطية مبيناً التقدم الذي حصل في دراستها .

بالرغم من أن شهرة إقليدس اقترنت بكتابة الأصول (Elements) المكون من ١٥ فصلاً، إلاّ أن هناك أعمالاً أخرى قام بكتابتها، منها المعلومات (Data) يتناول فيه التحليل التطبيقي والظاهرة (Phoenomena) يختص بالهندسة الكروية؛ أما كتابة النتائج (Porismus) إضافة إلى المحاولات التي تمت من قبل كل من روبرت سيمسن. Simson وتشاسيس .Chasles M من خلال الكثير من الملاحظات التي كتبت على الواح البردي فقد بينت أن الكتاب الأخير تناول القطوع المخروطية في أربعة فصول اعتمد عليها ابولونيوس Apollonius (٢٦٢ – ١٩٠ ق.م) في ثمانية فصول عن المحل الهندسي على سطح .

تشير بعض المراجع أن العالم العربي أبو الوفاء البوزجاني (٩٤٠ – ٩٩٨م) قام بحل المعادلة

$س^٤ + ب س^٣ = جـ$ بطريقة تقاطع القطع الزائد $ص^٢ + ب س ص - جـ = ٠$ والقطع المكافئ $س^٢ = ص$

وان العالم ابن الهيثم (توفي في عام ١٠٣٨م) والذي يعد أول من أنشأ علم الضوء ؛ قد بحث في المعادلات التكعيبية بواسطة القطوع المخروطية والتي رجع إليها عمر الخيام (١٠٤٨ – ١١٢١م) واستعملها في حل المعادلات حيث يعتبر أول من طرح السؤال التالي : هل يمكن دراسة المعادلات من الدرجة الثالثة وإيجاد حلولها بطريقة منهجية مثل حل المعادلات من الدرجة الثانية ؟

ويلاحظ من حلول الرياضيين العرب أنهم جمعوا بين الهندسة والجبر وبذلك يكونون أول من وضع أسس الهندسة التحليلية التي تنسب للعالم الفرنسي ديكارت . Descartes (١٥٩٦ – ١٦٥٠م) ، باستخدامهم الشكل الهندسي مساعداً للحل ، حيث نجد دراسة حلول المعادلات التي تمت كتقاطع لمنحنيات مخروطية

فإن التقاطع قد تم بطريقة جبرية أي بواسطة معادلات المنحنيات . ونجد في مؤلفات الخيام وكذلك الطوسي (١٢٠١ – ١٢٧٤م) أن الطريقة المتبعة لحل المعادلات $س^٣ + ا س = ب$ تعود لحل المعادلتين التاليتين آنيًا :

$(س - \frac{ب}{٢ا})^٢ + ص^٢ = (\frac{ب}{٢ا})^٢$ وهي معادلة دائرة ، $س = \sqrt{ا}\, ص$ وهي معادلة قطع مكافئ .

والطريقة المتبعة لإيجاد الحلول غير التافهة (غير الصفرية) للمعادلة $س(س^٣ + ا س - ب) = ٠$ تعود لحل المعادلتين التاليتين آنياً :

$س = \sqrt{٢}\, ص$ وهي معادلة قطع مكافئ ، $س(\frac{ب}{ا} + س) = ص^٢$ وهي معادلة قطع زائد اشتهر بهما الكاهن الألماني جوهانز فيرنير Werner Johanes (١٤٦٨ – ١٥٢٨م) باهتمامه بالرياضيات لحاجته إليها كرسام خرائط حيث نشر أول دراسة معمقة في أوربا عن القطوع الزائدة والمكافئة، أما الناقصة فلم يدرسها . وبالطريقة نفسها درس فرانسيسكوس مايروليكس(Maurolycuns Franciscus ١٤٩٤– ١٥٧٥م) القطوع المخروطية بعده حيث حاول من خلال الملاحظات التي وردت على أوراق البردي تحديث وإعادة صياغة كتاب ابولونيوس التاسع الضائع حول القيم العظمى والدنيا Maxima and Minima ؛ أما كتابه حول القطوع المخروطية فقد كان عن المماسات والتقاربيات (ويتعمق أكثر من أبولونيوس) .

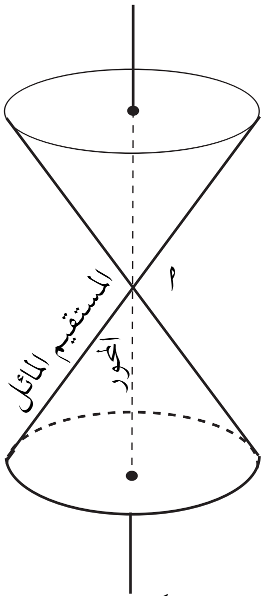
وعن تطبيقات ذلك على المسائل الفيزيائية والفلكية وضع فيثا (Viete) (١٥٤٠ – ١٦٠٣م) الرموز ليمثل بها الأشياء الهندسية والحسابية واهتم بالتحليل الذي أدى تطبيقه على الهندسة إلى وضع الهندسة التحليلية من قبل ديكارت وفيرما Fermat (١٦٢٦ – ١٦٤٣م) كل بصورة مستقلة عن الآخر . ومن خلال حل المسائل الهندسية اكتشف ديكارت لاول مرة الإحداثيات س ، ص وكتابة المعادلة ق (س ، ص) = ٠ التي تصف المنحنى ، وبذلك وضع أسس الهندسة التحليلية ، ويعتبر من أعظم علماء فرنسا في القرن السابع عشر فقد اشترك مع العالم الفلكي جوهانس كيبلر Kepler Johannes (١٥٧١ – ١٦٣٠م) في وصف العلوم الطبيعية بلغة الرياضيات ، وأن كل شئ في هذا العالم هو عدد ورياضيات ، إضافة لذلك فقد أوجد كيبلر أن محيط القطع الناقص الذي طول محورية ٢ا ، ٢ب حوالي ط (ا + ب)

ويُعد جون ويلز Wallis John (١٦١٦ – ١٧٠٣م) ، أول من وضح في كتابة "القطوع المخروطية" أن منحنيات القطوع المخروطية ليست تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم فحسب ، وإنما هي منحنيات من الدرجة الثانية ودرست تحليلياً باستخدام الاحداثيات الكارتزية المتعامدة .

خلفية علمية

عُرفت القطوع المخروطية قديماً على أنها تقاطع مستوى س مع المخروط الدائري القائم المزدوج [شكل(٤–١)] ومن ذلك تكونت أشكال التقاطع وهي الدائرة ، القطع المكافئ ، القطع الناقص، والقطع الزائد حسب ميلان المستوى القاطع بالنسبة للمخروط القائم . وهناك حالتان أساسيتان لمثل هذه القطوع :

الحالة الأولى : عندما يحتوي المستوى القاطع نقطة رأس المخروط المزدوج أ ، تتكون لدينا أربع حالات فرعية لشكل القطع ، وهي :(١) نقطة والتي هي رأس المخروط، ، أو (٢) مستقيم مائل، أو (٣) مستقيمان مائلان متقاطعان في أ (رأس المخروط)، أو (٤) مستقيمان مائلان متوازيان وتسمى هذه الأشكال للقطع (أشكال تقاطع غير حقيقية).



شكل (٤ – ١)

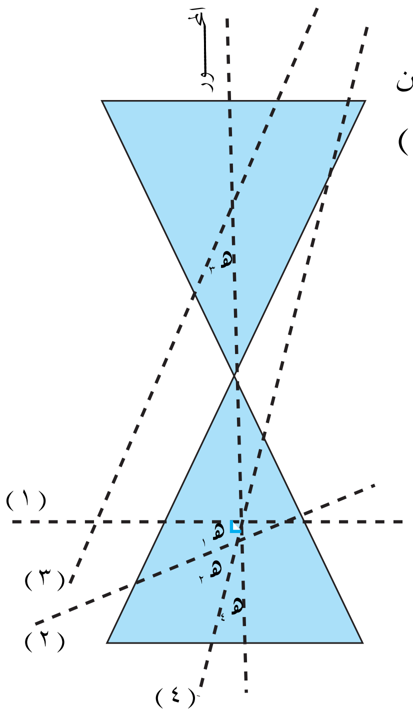
الحالة الثانية : عندما لا يحتوي المستوى على رأس المخروط المزدوج القائم وتسمى هذه القطوع قطوع حقيقية، وهنا لدينا أربع حالات فرعية أيضاً: وهي أن يكون المستوى القاطع (١) عمودياً على محور المخروط فيكون شكل التقاطع عبارة عن دائرة، أو (٢) يكون المستوى موازياً لمستقيم مائل، فإن شكل التقاطع يكون عبارة عن قطع مكافئ، أو (٣) ألاّ يكون المستوى القاطع عمودياً على محور المخروط وليس موازياً لأي مستقيم مائل فإن شكل التقاطع عبارة عن قطع ناقص ، أو (٤) خلاف الحالات السابقة فإن شكل التقاطع عبارة عن قطع زائد .

القطوع المخروطية الحقيقية

إذا لم يمر المستوى القاطع برأس المخروط القائم المزدوج، فإن الشكل الناتج من تقاطع المستوى والمخروط عبارة عن قطع مخروطي حقيقي جدول (٤–١) حسب قياس زاوية ميلان المستوى مع محور المخروط شكل (٤ –٢) وهي :

رقم الشكل	زاوية ميل المستوى مع المحور	اسم القطع المخروطي	خواص خاصة
(١)	$ه_{١} = ٩٠^\circ$	دائرة	منحنى مغلق ومتماثل
(٢)	$\alpha < ه_{٢} < ٩٠^\circ$	قطع ناقص	منحنى مغلق
(٣)	$ه_{٣} = \alpha$	قطع مكافئ	منحنى مفتوح من جهة واحدة
(٤)	$٠^\circ \leq ه_{٤} < \alpha$	قطع زائد	فرعان منفصلان ومفتوحان من جهة واحدة

جدول رقم (٤ – ١)



شكل (٤ – ٢)

الخصائص المشتركة للقطوع المخروطية

ليكن $\frac{\text{جتا } هـ}{\text{جتا } \alpha}$ = ي ، يمكن تسمية القطع المخروطي من خلال معرفة قيمة النسبة (ي) بين جيب تمام زاوية ميل المستوى مع المخروط المزدوج (هـ) وجيب تمام نصف زاوية انفراج المخروط المزدوج (α) كالتالي :

قيمة النسبة ي	زاوية ميلان المستوى مع المحور	اسم القطع المخروطي
ي = ٠	هـ = ٩٠°	دائرة
١ > ي > ٠	α < هـ < ٩٠°	قطع ناقص
ي = ١	هـ = α	قطع مكافئ
ي > ١	هـ < α	قطع زائد

القطع المكافئ

يمكن تعريف القطع المكافئ كمحل هندسي (كمسار لنقطة يكون بعدها من نقطة ثابتة (البؤرة) في نفس المستوى مساوياً لبعدها عن مستقيم معلوم (الدليل) في المستوى نفسه .

نوضح طريقة رسم القطع المكافئ كالتالي :

١ – يُحدَّد مستقيم ل ونقطة م .

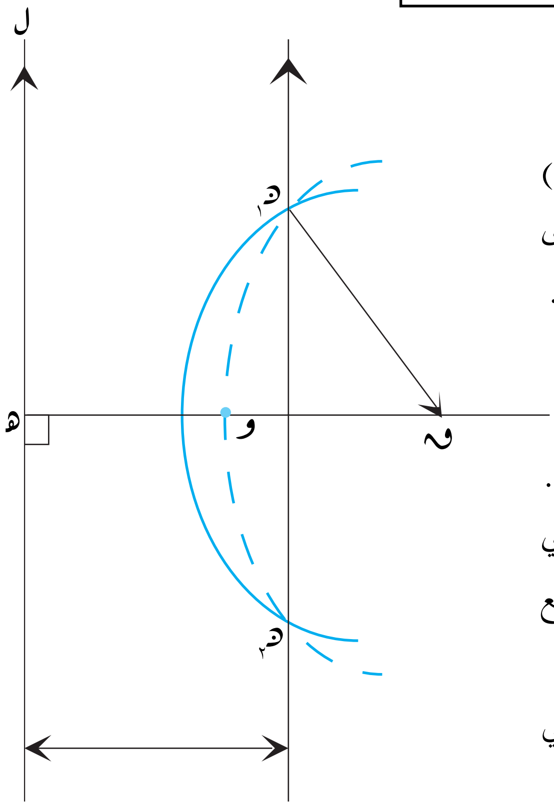
٢ – يُرسَم مستقيم موازٍ للمستقيم ل وعلى مسافة معينة منه .

٣ – تُرسَم دائرة مركزها النقطة م ، وطول نصف قطرها يساوي البعد بين المستقيمين المتوازيين، هذه الدائرة تقطع القطع المكافئ في نقطتين هما د$_1$ ، د$_2$

٤ – المستقيم العمودي المار بالنقطة م يقطع المستقيم ل في النقطة هـ .

٥ – منتصف القطعة $\overline{\text{م هـ}}$ هي رأس القطع المكافئ (و)

٦ – المنحنى (المنقط) الواصل بين النقاط د$_1$ ، و ، د$_2$ هي القطع المكافئ شكل (٤ – ٣) .



شكل (٤ – ٣)

ملاحظات

١ – كي يمكن رسم القطع المكافئ يجب أن يكون طول نصف القطر ليس أقصر من نصف المسافة بين المستقيم ل والبؤرة (ف) ، وفي حالة أن طول نصف قطر الدائرة يساوي نصف المسافة بين المستقيم ل والبؤرة ف ، فإن القطع المكافئ عبارة عن نقطة هي رأس القطع (و)

٢ – المستقيم الواصل بين النقطتين ف، و، والعمودي على المستقيم ل هو محور القطع المكافئ ، وهو أيضاً محور تماثل للقطع المكافئ .

القطع الناقص

يمكن تعريف القطع الناقص كمحل هندسي (كمسار) لنقطة تتحرك في مستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) في المستوى نفسه مقداراً ثابتاً .

وخطوات رسم القطع الناقص هي :

١ – نحدّد نقطتين ف١ ، ف٢ ، (|ف١ ف٢| = ٢ جـ) وقطعة مستقيمة طولها ٢ أ .

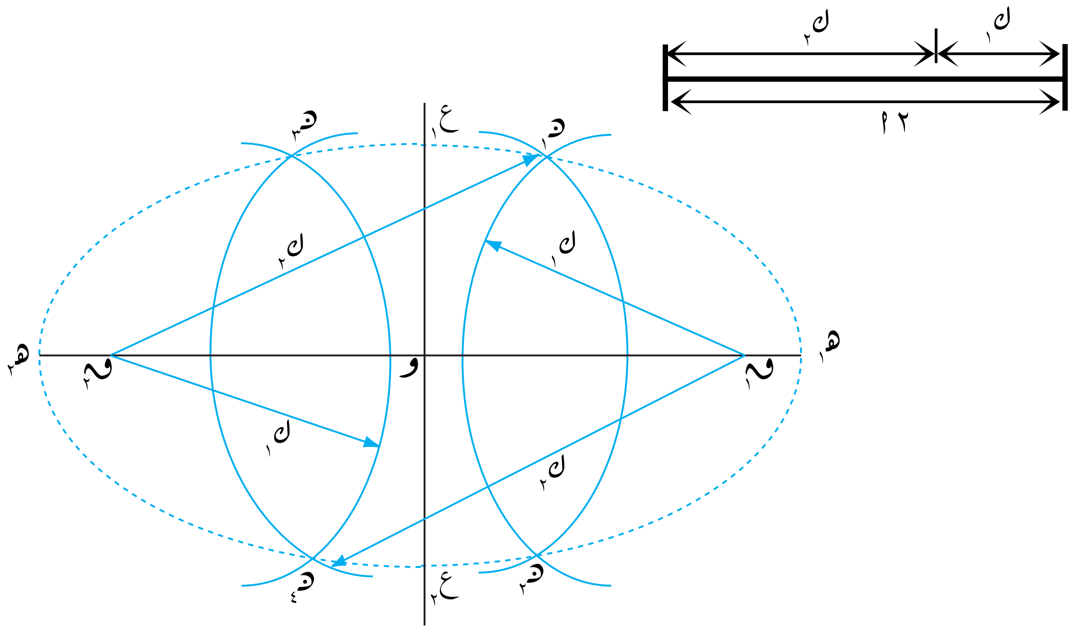
٢ – نقسم القطعة المستقيمة من الداخل بنسبة ل١ : ل٢ .

٣ – نرسم دائرتين مركزهما ف١ وطول نصف قطرهما ل١ ، ل٢ . ودائرتين مركزهما ف٢ وطول نصف قطرهما ل١ ، ل٢ . هذه الدوائر الأربع تقطع القطع الناقص في النقاط د١ ، د٢ ، د٣ ، د٤

٤ – نحدّد رأسي القطع الناقص هـ١ ، هـ٢ بحيث أن المسافة بينهما = ٢ أ ، وعلى بعدين متساويين من البؤرتين.

٥ – ننصّف القطعة $\overline{ف١ف٢}$ فيكون منتصفها مركز القطع الناقص (و)

٦ – المنحنى (المتقطع) الواصل بين النقاط هـ١ ، هـ٢ ، د١ ، د٢ ، د٣ ، د٤ هو القطع الناقص شكل (٤ – ٤).



شكل (٤ – ٤)

ملاحظات

١ – إن ٢ ا للقطع الناقص أكبر من البعد بين البؤرتين .

٢ – اذاكان أصغر جزء من جزئي ٢ ا أصغر من (ا – $\frac{1}{2}$ | $و_١$ $و_٢$ |) فإنه لا توجد نقاط تقاطع .

وإذا كان مساوياً لـ (ا – $\frac{1}{2}$ | $و_١$ $و_٢$ |) فإنه توجد نقطتان فقط تتقاطعان مع القطع الناقص .

٣ – المستقيم المار ببؤرتي القطع الناقص هو المحور الرئيسي (المحورالأكبر) للقطع الناقص وهو محور مماثل .

٤ – هناك أيضاً محور مماثل آخر للقطع الناقص عمودي على المحور الرئيسي وينصف القطعة $و_١$ $و_٢$ ،يسمى المحور المرافق (المحور الأصغر) للقطع الناقص، نقطة تقاطع المحورين (و) هي مركز تماثل للقطع الناقص .

٥ – نقاط القطع الناقص التي تنتمي للمحورين تسمى رؤوس القطع الناقص ووهي اربعة رؤوس $هـ_١$ ، $هـ_٢$ وهما الرأسان الرئيسان ويقعان على المحور الرئيسي ؛ $ع_١$ ، $ع_٢$ وهما الرأسان المرافقان ويقعان على المحور المرافق

القطع الزائد

يمكن تعريف القطع الزائد كمحل هندسي (كمسار) لنقطة تتحرك في مستوى بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) في المستوى نفسه مقداراً ثابتاً.

خطوات رسم القطع الزائد كالتالي :

١ – نحـــدد نقطتين $و_١$ ، $و_٢$ ، (| $و_١$ $و_٢$ | = ٢ جـ) وقطعة مستقيمة طولها ٢ ا .

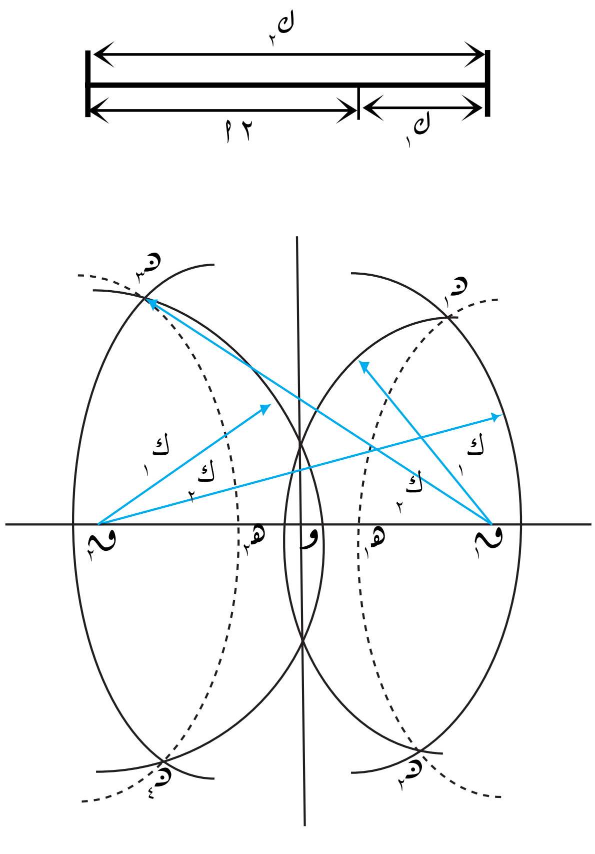
٢ – نقسم القطعة المستقيمة من الخارج بنسبة $ل_١$: $ل_٢$.

٣ – نرسم دائرتين مركزاهما $و_١$ وطول نصف قطريهما $ل_١$ ، $ل_٢$ ودائرتين مركزيهما $و_٢$ وطول نصف قطريهما $ل_١$ ، $ل_٢$ هذه الدوائر تقطع القطع الزائد في النقـــاط $د_١$ ، $د_٢$ ، $د_٣$ ، $د_٤$.

٤ – نحدّد رأسي القطع الزائد $هـ_١$ ، $هـ_٢$ بحيث أن المسافة بينهما ٢ ا ، وعلى بعدين متساويين من البؤرتين .

٥ – ننصّف القطعـة $و_١$ $و_٢$ في النقطة و ، وهي نقطة تقاطع المحورين الرئيس والمرافق للقطع الزائد .

٦ – المنحنى (المتقطع) الواصل بين النقـــــــــــــــاط $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، $د_١$ ، $د_٢$ ، $د_٣$ ، $د_٤$ هو القطع الزائد شكل (٤ – ٥)



شكل (٤ – ٥)

ملاحظات

١ – طريقة رسم القطع الناقص والقطع الزائد تختلف في عملية تقسيم القطعة المستقيمة إما من الداخل ، أو من الخارج على الترتيب .

٢ – ٢ ﺃ القطع الزائد ، أصغر من البعد بين البؤرتين .

٣ – الملاحظات (٢) ، (٣) ،(٤) بالنسبة للقطع الناقص لها المعنى نفسه هنا، وعلاقات القطع الناقص هي نفسها بالنسبة للقطع الزائد أيضاً .

٤ – للقطع الزائد فقط رأسان يقعان على المحور الرئيس، لا توجد نقاط مشتركة بين المحور المرافق للقطع الزائد ، والقطع الزائد نفسه ، وبالتالي لا توجد رؤوس للقطع الزائد تقع على المحور المرافق .

ميل ومعادلة المماس للقطوع المخروطية

يمكن إيجاد معادلة مماس كل من القطوع المخروطية بالطريقة نفسها عند إيجاد معادلة مماس الدائزة . ميل معادلة مماس القطع المخروطي عند النقطة د($س_١$ ، $ص_١$) هو تفاضل معادلة القطع المخروطي عند النقطة د .

معادلة مماس القطع المكافئ

لتكن معادلة القطع المكافئ $ص^٢ = ٤ ﺃ س$

$$\therefore ٢ ص ص' = ٤ ﺃ \Leftarrow ص' = \frac{٢ ﺃ}{ص}$$

$\Leftarrow$ ميل المماس عند النقطة د ($س_١$ ، $ص_١$) = $ص' = \frac{٢ ﺃ}{ص_١}$ ، إذن معادلة المماس بمعلومية ميله ونقطة عليه

هي : $ص' = \frac{ص - ص_١}{س - س_١} \Leftarrow ص' (س - س_١) = ص - ص_١$

وبالتعويض عن $ص' = \frac{٢ ﺃ}{ص_١}$ نحصل على المعادلة التالية : $٢ ﺃ (س - س_١) = ص_١ (ص - ص_١)$

وبالتعويض عن $ص_١^٢ = ٤ ﺃ س_١$ من معادلة القطع ينتج الآتي :

$٢ ﺃ س - ٢ ﺃ س_١ = ص ص_١ - ٤ ﺃ س_١$ ؛ أي أن

$\Leftarrow ٢ ﺃ س - ٢ ﺃ س_١ + ٤ ﺃ س_١ = ص ص_١ \quad \Leftarrow ٢ ﺃ س + ٢ ﺃ س_١ = ص ص_١$

$$\Leftarrow \boxed{ص ص_١ = ٢ ﺃ (س + س_١)}$$

وهي معادلة مماس القطع المكافئ عند النقطة د ($س_١$ ، $ص_١$) .

بما أن معادلتي القطع الناقص والقطع الزائد عند النقطة د (س$_1$ ، ص$_1$) هما $\frac{س_1^2}{أ^2} \pm \frac{ص_1^2}{ب^2} = 1$

∴ الميلان عند النقطة د (س$_1$ ، ص$_1$) يساوي $\frac{2س_1}{أ^2} \pm \frac{2ص_1 ص'}{ب^2} = 0$

ومنه $ص' = \mp \frac{2ب^2 س_1}{2أ^2 ص_1} = \mp \frac{ب^2 س_1}{أ^2 ص_1}$

∴ معادلة المماس $ص' (س - س_1) = ص - ص_1$

وبالتعويض عن ص' نحصل على $\mp \frac{ب^2 س_1}{أ^2 ص_1} (س - س_1) = ص - ص_1$

أي $\mp \frac{ب^2 س_1 س}{أ^2 ص_1} \pm \frac{ب^2 س_1^2}{أ^2 ص_1} = ص - ص_1$

وبضرب طرفي المعادلة في $\frac{ص_1}{ب^2}$ نحصل على : $\mp \frac{س س_1}{أ^2} \pm \frac{س^2}{أ^2} = \frac{ص ص_1}{ب^2} - \frac{ص_1^2}{ب^2}$

$\Leftarrow \frac{ص_1^2}{ب^2} \pm \frac{س_1^2}{أ^2} = \frac{ص ص_1}{ب^2} \pm \frac{س س_1}{أ^2}$

∵ $\frac{ص_1^2}{ب^2} \pm \frac{س_1^2}{أ^2} = \frac{س_1^2}{أ^2} \pm \frac{ص_1^2}{ب^2} = \pm 1$

∴ $\boxed{\frac{س س_1}{أ^2} \pm \frac{ص ص_1}{ب^2} = 1}$

وهي معادلتا المماسين للقطع الناقص والقطع الزائد عند النقطة د (س$_1$ ، ص$_1$) .

مثال : أوجد معادلة مماس القطع الناقص $\frac{(س+1)^2}{25} + \frac{(ص-2)^2}{16} = 1$ ، عند النقطة د (2 ، $-\frac{6}{5}$)

الحل : معادلة المماس للقطع الناقص أعلاه عند النقطة د (س$_1$ ، ص$_1$) هي :

$$\frac{(س+1)(س_1+1)}{25} + \frac{(ص-2)(ص_1-2)}{16} = 1$$

بالتعويض عن س$_1$ = 2 ، ص$_1$ = $\frac{-6}{5}$ نحصل على المعادلة التالية :

$$\frac{(س+1)(2+1)}{25} + \frac{(ص-2)(-\frac{6}{5}-2)}{16} = 1$$

$\Leftarrow \frac{3(س+1)}{25} - \frac{\frac{16}{5}(ص-2)}{16} = 1 \Leftarrow 48 (س + 1) - 80 (ص - 2) = 400$

(بضرب طرفي المعادلة في 400)

$\Leftarrow$ 48 س + 48 − 80 ص + 160 = 400 $\Leftarrow$ 48 س − 80 ص = 192

$\Leftarrow$ 3 س − 5 ص = 12 (بقسمة الطرفين على 16) $\Leftarrow$ 5 ص = 3 س − 12

(وهي معادلة المماس المطلوب)

ويمكن تلخيص ما تقدّم عن ميل المماس لقطع مخروطي عند نقطة معلومة ومعادلة المماس عند تلك النقطة في الجدول (٤ – ٢)

القطع المخروطي	نقطة الرأس	معادلة القطع المخروطي	ميل المماس عند نقطة د $(س_١، ص_١)$	معادلة المماس عند النقطة د $(س_١، ص_١)$
القطع المكافئ	و$(٠، ٠)$	$ص^٢ = ٤أ س$	$\frac{٢أ}{ص_١}$	$ص ص_١ = ٢أ (س + س_١)$
	و$(ك ، ل)$	$(ص - ل)^٢ = ٤أ (س - ك)$	$\frac{٢أ}{ص_١ - ل}$	$(ص - ل)(ص_١ - ل) = ٢أ [(س - ك) + (س_١ - ك)]$
القطع الناقص	و$(٠، ٠)$	$\frac{س^٢}{أ^٢} + \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$	$- \frac{ب^٢}{أ^٢} \left(\frac{س_١}{ص_١} \right)$	$\frac{س س_١}{أ^٢} + \frac{ص ص_١}{ب^٢} = ١$
	و$(ك ، ل)$	$\frac{(س - ك)^٢}{أ^٢} + \frac{(ص - ل)^٢}{ب^٢} = ١$	$- \frac{ب^٢}{أ^٢} \left(\frac{س_١ - ك}{ص_١ - ل} \right)$	$\frac{(س - ك)(س_١ - ك)}{أ^٢} + \frac{(ص - ل)(ص_١ - ل)}{ب^٢} = ١$
القطع الزائد	و$(٠، ٠)$	$\frac{س^٢}{أ^٢} - \frac{ص^٢}{ب^٢} = ١$ $= ١١$	$\frac{ب^٢}{أ^٢} \left(\frac{س_١}{ص_١} \right)$	$\frac{س س_١}{أ^٢} - \frac{ص ص_١}{ب^٢} = ١$
	و$(ك ، ل)$	$\frac{(س - ك)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص - ل)^٢}{ب^٢} = ١$	$\frac{ب^٢}{أ^٢} \left(\frac{س_١ - ك}{ص_١ - ل} \right)$	$\frac{(س - ك)(س_١ - ك)}{أ^٢} - \frac{(ص - ل)(ص_١ - ل)}{ب^٢} = ١$

جدول رقم (٤ – ٢)

المعـادلة العـامـة من الدرجـة الثـانيـة

تكتب المعادلة العامة من الدرجة الثانية بمتغيرين س ، ص على النحو التالي :

$$أ س^٢ + ب س ص + جـ ص^٢ + هـ س + ح ص + ط = ٠$$

حيث أ ، ب ، جـ ، هـ ، ح ، ط أعداد حقيقية ؛ أ ، ب ، جـ غير صفرية معاً (أو بمعنى أن اثنين منها على الأكثر ممكن تكون صفرية)، أي واحد منها على الأقل لا يكون صفراً . من خلال هذه المعادلة يمكن رسم منحنى في مستوى الإحداثيات الكارتيرية المتعامدة الذي يعتمد نوعه على معاملات متغيرات المعادلة، (يعتمد تحديد نوع المنحنى على المعاملات) وهذا يحقق المبرهنة التالية :

المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين هي معادلة لأحد القطوع المخروطية

الحـد المحتـوى على المتـغـيـرين س ، ص

يمكن التخلّص من هذا الحد (الذي يطلق عليه أحياناً الحد المستطيل) بدوران محوري الإحداثيات الكارتيزية ، أي بواسطة التحويل

$$س = سَ جتا \alpha - صَ جا \alpha$$

$$ص = سَ جا \alpha + صَ جتا \alpha$$

يمكن اختيار قياس الزاوية α التي يكون عندها الحد المحتوى على س ص مساوياً للصفر .

فإذا كان ا = جـ نختار $\alpha = 45^\circ$ أما إذا كان ا $\neq$ جـ نختار α بحيث يكون ظا $2\alpha = \frac{ب}{ا - جـ}$ ،

وبهذه الطريقة نحصل على معادلة في متغيرين سَ، صَ وإذا رمزنا لهذين المتغيرين بـ س ، ص نحصل على المعادلة : $ا_1 س^2 + جـ_1 ص^2 + هـ_1 س + ح_1 ص + ط_1 = 0$ وهذا يعني هندسياً أن محور أو محوري القطع المخروطي تتوازى مع محور أو محوري الإحداثيات .

الحدود الخطية

يمكن التخلّص من الحدود الخطية في المعادلة العامة من الدرجة الثانية بمتغيرين آخرين من خلال انسحاب المحاور بواسطة التحويل .

$$س = سَ + ء \quad ، \quad ص = صَ + ك$$

بحيث إن الحدود الخطية $هـ_1$ س ،$ح_1$ ص تساوي صفراً ، وبتطبيق هذا الانسحاب نحصل على المعادلة :

$$ا_1 سَ^2 + جـ_1 صَ^2 + (2 ا_1 ء + هـ_1) سَ + (2جـ_1 ك + ح_1) صَ + ا_1 ء^2 + جـ_1 ك^2 + هـ_1 ء + ح_1 ك + ط_1 = 0$$

وهناك حالتان لهذه المعادلة :

أولاً : الحالة الأولى :

عندما $ا_1 \neq 0$ ، $جـ_1 \neq 0$ فإنه يمكن التخلّص من الحدود الخطية بوضع $ء = \frac{-هـ_1}{2 ا_1}$ ، $ك = -\frac{ح_1}{2 جـ_1}$

فنحصل على المعادلة التالية :

$$ا_1 سَ^2 + جـ_1 صَ^2 = د \quad \text{حيث أن} \quad د = \frac{هـ_1^2}{4 ا_1} + \frac{ح_1^2}{4 جـ_1} - ط_1 \ .$$

هناك ثلاثة احتمالات لقيمة د وهي :

(١) $د > 0$ (٢) $د = 0$ (٣) $د < 0$

(١) $د > 0$:

أ) إذا كان $ا_1$ ، $جـ_1$ موجبين فإن المنحنى عبارة عن قطع ناقص ، معادلته $\frac{سَ^2}{\frac{د}{ا_1}} + \frac{صَ^2}{\frac{د}{جـ_1}} = 1$

ب) إذا كان $ا_1$ ، $جـ_1$ سالبين فإنه لا يوجد منحنى حقيقي .

جـ) إذا كان $ا_1$ ، $جـ_1$ مختلفين في الإشارة فإن المنحنى عبارة عن قطع زائد

(٢) $د = ٠$:

أ) إذا كان $أ_١$ ، $جـ_١$ متساويين في الإشارة فإن المنحنى عبارة عن نقطة فقط .

ب) إذا كان $أ_١$ ، $جـ_١$ مختلفين في الإشارة فإن المنحنى عبارة عن مستقيمين متقاطعين

(٣) $د > ٠$:

نتحصل على القطوع المخروطية نفسها كما في حالة $د < ٠$

ثانياً : الحالة الثانية :

عندما $| أ_١ جـ_١ | = ٠$ فإن هناك ثلاثة احتمالات :

(١) $أ_١ = ٠$ ، $جـ_١ \neq ٠$ (٢) $أ_١ \neq ٠$ ، $جـ_١ = ٠$ (٣) $أ_١ = ٠$ ، $جـ_١ = ٠$

(١) $أ_١ = ٠$ ، $جـ_١ \neq ٠$ ؛ وهنا أيضًا حالتان فرعيتان ، هما :

أ) إذا كان $هـ_١ \neq ٠$ فإنه يمكن اختيار ى ، ك بحيث يكون ، $٢جـ_١ ك + ح_١ \neq ٠$

$جـ_١ ك^٢ + هـ_١ ى + ح_١ ك + ط_١ = ٠$ وبذلك نحصل على المعادلة التالية : $ص^٢ = \frac{- هـ_١ س}{جـ_١}$

وهي معادلة قطع مكافئ .

ب) إذا كان $هـ_١ = ٠$ فإن الشكل الناتج عبارة عن مستقيمين متوازيين منطبقين في حالة أن

$ح_١^٢ - ٤ ط_١ جـ_١ = ٠$

(٢) $أ_١ \neq ٠$ ، $جـ_١ = ٠$ ، وهنا أيضًا حالتان فرعيتان ، هما :

أ) إذا كان $ح_١ \neq ٠$ فإن المنحنى قطع مكافئ .

ب) إذا كان $ح_١ = ٠$ فإن الشكل إما مستقيمان متوازيان أو منطبقان .

(٣) $أ_١ = ٠$ ، $جـ_١ = ٠$ ، وهنا أيضًا حالتان فرعيتان ، هما :

أ) إذا كان $هـ_١$ ، $ح_١$ ليس كلاهما مساوياً للصفر فإن المنحنى عبارة عن مستقيم

ب) إذا كان $هـ_١ = ح_١ = ٠$ فإن $ط_١ = ٠$

ويمكن تلخيص هذه الحالات في الجدول (٤ – ٣)

المعادلة $أ_١ س^٢ + جـ_١ ص^٢ + هـ_١ س + ح_١ ص + ط_١ = ٠$

$أ_1 جـ_1 \ne ٠$	$د = \frac{هـ_1^2}{٤أ_1} + \frac{ح_1^2}{٤جـ_1} - ط_1$		
	$د > ٠$	$أ_1 > ٠ ،\ جـ_1 > ٠$	قطع ناقص
		$أ_1 < ٠ ،\ جـ_1 < ٠$	لا يوجد منحنى
		$أ_1 جـ_1 < ٠$	قطع زائد
	$د = ٠$	$أ_1 جـ_1 > ٠$	نقطة
		$أ_1 جـ_1 < ٠$	مستقيمان متقاطعان
	$د < ٠$	$أ_1 > ٠ ،\ جـ_1 > ٠$	لا يوجد منحنى حقيقي
		$أ_1 < ٠ ،\ جـ_1 < ٠$	قطع ناقص
		$أ_1 جـ_1 < ٠$	قطع زائد
$أ_1 جـ_1 = ٠$	$أ_1 = ٠ ،\ جـ_1 \ne ٠$	$هـ_1 \ne ٠$	قطع مكافئ
		$هـ_1 = ٠$	مستقيمان متوازيان ينطبقان إذا كان $ح_1^2 - ٤ ط_1 جـ_1 = ٠$
	$أ_1 \ne ٠ ،\ جـ_1 = ٠$	$ح_1 \ne ٠$	قطع مكافئ
		$ح_1 = ٠$	مستقيمان متوازيان ينطبقان إذا كان $هـ_1^2 - ٤ط_1 أ_1 = ٠$
	$أ_1 = ٠ ،\ جـ_1 = ٠$	ليس $هـ_1 = ح_1 = ٠$	مستقيم
		$هـ_1 = ح_1 = ٠$	تافه (غير جدير بالدراسة)

جدول (٤ – ٣)

حالات خاصة في معادلة الدرجة الثانية

$أ س^2 + جـ ص^2 + هـ س + ح ص + ط = ٠$

أ) إذا كان أ ، جـ لهما الإشارة نفسها ، فإن هذه المعادلة تمثل قطعاً ناقصاً (في حالة خاصة دائرة وذلك عندما أ = جـ) ، أو نقطة ، أو تكون مجموعة خالية .

ب) إذا كان أ ، جـ لهما إشارتين متعاكستين فإن المعادلة تمثل قطعاً زائداً ، أو مستقيمين متقاطعين .

جـ) إذا كان أحد العددين أ أو جـ صفراً فإن المعادلة تمثل قطعاً مكافئًا أو مستقيمين متوازيين، أو مستقيمًا واحداً ، أو تكون مجموعة خالية .

البرهان :

لنفرض أولاً أن كلاً من ا ، جـ ليست صفراً وعليه يمكن أن نكتب المعادلة

$$ا\,س^{٢} + جـ\,ص^{٢} + هـ\,س + ح\,ص + ط = ٠$$

على الشكل :

$$ا\left(س^{٢} + \frac{هـ}{ا}\,س\right) + جـ\left(ص^{٢} + \frac{ح}{جـ}\,ص\right) = -ط$$

أو $$ا\left(س + \frac{هـ}{٢ا}\right)^{٢} + جـ\left(ص + \frac{ح}{٢جـ}\right)^{٢} = \frac{هـ^{٢}}{٤ا} + \frac{ح^{٢}}{٤جـ} - ط$$

لنرمز لـ $\frac{هـ}{٢ا}$ بالرمز $هـ'$ و لـ $\frac{ح}{٢جـ}$ بالرمز $ح'$ وللطرف الأيسر بالرمز $ط'$ فتأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$ا\,(س + هـ')^{٢} + جـ\,(ص + ح')^{٢} = ط'$$

لنضع $س' = س + هـ'$ ، $ص' = ص + ح'$ فنأخذ المعادلة الشكل :

$$ا\,س'^{٢} + جـ\,ص'^{٢} = ط' \qquad \ldots (١)$$

أ) عندما ا ، جـ لهما أشارة واحدة موجبة مثلاً عندئذٍ نميز الحالات التالية :

إذا كانت $ط'$ موجبة فاننا نكتب المعادلة بالشكل :

$$\frac{س'^{٢}}{\left(\frac{ط'}{ا}\right)} + \frac{ص'^{٢}}{\left(\frac{ط'}{جـ}\right)} = ١ \qquad \ldots (٢)$$

وهذه معادلة قطع ناقص ويتحول هذا القطع إلى دائرة إذا كان ا = جـ

إذا كانت $ط'$ صفراً فالمعادلة لا تتحقق إلا بالنقطة (٠ ، ٠)

إذا كانت $ط'$ سالبة فلا توجد أية نقطة (س ، ص) تحقق المعادلة .

وعندما ا ، جـ سالبان معاً ، فإننا نحصل على الحالات نفسها .

ب) عندما ا ، جـ لهما إشارتين متعاكستين عندئذٍ نميز الحالات التالية :

إذا كانت $ط' \neq$ صفراً فإن المعادلة (٢) يكون فيها معاملي $س'^{٢}$ ، $ص'^{٢}$ لهما اشارتين متعاكستين وتكون المعادلة معادلة قطع زائد .

إذا كانت $ط'$ = صفر فتأخذ المعادلة (١) الشكل :

$$ا\,س'^{٢} + جـ\,ص'^{٢} = ٠ \qquad \ldots (٣)$$

وبما أن ا ، جـ لهما أشارتين متعاكستين ولنفرض جـ سالبًا ولنضع $جـ = -جـ'$ فيكون $جـ'$ موجباً وتأخذ المعادلة (٣) الشكل :

$$ا\,س'^{٢} = جـ'\,ص'^{٢} \quad \text{أو} \quad س' = \pm\sqrt{\frac{جـ'}{ا}}\;ص'$$

وهذه معادلة مستقيمين متقاطعين .

جـ) إذا كان أحد العددين ا ، أو جـ صفراً وليكن جـ = ٠

عندئذٍ يمكن كتابة المعادلة بالشكل :

$$\text{ا س}^{٢} + \text{هـ س} + \text{ح ص} + \text{ط} = ٠ \quad ، \quad \text{ح} \neq ٠$$

أو $$\text{ا} \left(\text{س} + \frac{\text{هـ}}{٢\text{ا}} \right)^{٢} = -\text{ح} \left(\text{ص} + \frac{\text{ط}}{\text{ح}} - \frac{\text{هـ}^{٢}}{٤\text{ا ح}} \right)$$

لنرمز لـ $\frac{\text{هـ}}{٢\text{ا}}$ بـ $\text{هـ}'$ ولـ $\left(\frac{\text{ط}}{\text{ح}} - \frac{\text{هـ}^{٢}}{٤\text{ا ح}} \right)$ بـ $\text{ح}'$ فتأخذ المعادلة الأخيرة الشكل :

$$\text{ا} \left(\text{س} + \text{هـ}' \right)^{٢} = -\text{ح} \left(\text{ص} + \text{ح}' \right)$$

وبوضع $\text{س}' = \text{س} + \text{هـ}'$ ، $\text{ص}' = \text{ص} + \text{ح}'$ نجد أن :

$\text{ا س}'^{٢} = -\text{ح ص}'$ وهذه معادلة قطع مكافئ .

إذا كان ح = ٠ فالمعادلة يمكن أن تكتب بالشكل :

$\text{ا س}^{٢} + \text{هـ س} + \text{ط} = ٠$ ، وهذه معادلة من الدرجة الثانية في س .

فإذا كان مميزها موجباً أعطتنا $\text{س} = \text{س}_{١}$ ، $\text{س} = \text{س}_{٢}$ ، وهذان يمثلان مستقيمين متوازيين .

إما إذا كان المميز صفراً فإن لمعادلة الدرجة الثانية حلاً مضاعفاً يمثل مستقيماً واحداً .

وأخيراً إذا كان المميز سالباً تكون المعادلة مستحيلة الحل أي مجموعة خالية .

في معادلة الدرجة الثانية :

$$\text{ا س}^{٢} + \text{ب س ص} + \text{جـ ص}^{٢} + \text{هـ س} + \text{ح ص} + \text{ط} = ٠ \qquad \ldots (١)$$

إذا كان : أ) ا = جـ فإن زاوية الدوران ٤٥°

ب) ا ≠ جـ فإن زاوية الدوران تعطى بالعلاقة $\text{ظا } ٢\text{ هـ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا} - \text{جـ}}$

البرهان : بتعويض معادلة الدوران

$$\text{س} = \text{س}' \text{ جتا هـ} - \text{ص}' \text{ جا هـ} \quad ، \quad \text{ص} = \text{س}' \text{ جا هـ} + \text{ص}' \text{ جتا هـ}$$

في المعادلة (١) نجد :

$$(\text{ا جتا}^{٢}\text{هـ} + \text{ب جا هـ جتا هـ} + \text{جـ جا}^{٢}\text{هـ})\ \text{س}'^{٢}$$
$$+ (\text{ا جا}^{٢}\text{هـ} - \text{ب جا هـ جتا هـ} + \text{جـ جتا}^{٢}\text{هـ})\ \text{ص}'^{٢}$$
$$+ (-\text{ا جا}٢\text{هـ} + \text{ب جتا}٢\text{هـ} + \text{جـ جا}٢\text{هـ})\ \text{س}' \text{ص}'$$
$$+ (\text{هـ جتا هـ} + \text{ح جا هـ})\ \text{س}' + (-\text{هـ جا هـ} + \text{ح جتا هـ})\ \text{ص}' + \text{ط} = ٠$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية . فإذا أخترنا هـ بحيث يكتب معامل $\text{س}'\text{ص}'$ مساوياً للصفر أي :

$$-\text{ا جا } ٢\text{ هـ} + \text{ب جتا } ٢\text{ هـ} + \text{جـ جا } ٢\text{ هـ} = ٠ \qquad \ldots (٢)$$

فإذا كان ا = جـ فإن المعادلة (٢) تأخذ الشكل :

ب جتا ٢ هـ = ٠ وتكتب الزاوية هـ = ٤٥° (هي حل لهذه المعادلة) .

اما إذا كان ا ≠ جـ فإن المعادلة (٢) تكتب بالشكل :

$$(\text{جـ} - \text{ا})\ \text{جا } ٢\text{ هـ} = -\text{ب جتا } ٢\text{ هـ} \quad ، \quad \text{ومنه ظا } ٢\text{ هـ} = \frac{\text{ب}}{\text{ا} - \text{جـ}} \ .$$

توجيهات طرائقية عامة

على المدرس عند تدريس هذه الوحدة مراعاة الآتي :

١ – مراجعة ما سبق دراسته عن الدائرة وبشكل خاص المعادلة القياسية للدائرة، والمعادلة العامة للدائرة (عندما يكون مركز الدائرة في نقطة الأصل أو في غير نقطة الأصل) على أساس أنها معادلة من الدرجة الثانية بمجهولين وعلاقة طول نصف قطر الدائرة (نـوـم) بثوابت المعادلة ﺃ ، ب ، جـ ومتى تكون الدائرة تخيلية (مجموعة خالية من النقاط) أو نقطة واحدة أو دائرة حقيقية .

٢ – تتم في الحصص المعنية مراجعة معادلة المستقيم وصورها المختلفة، ومتى تكون المستقيمات متوازية أو متعامدة، وكيفية إيجاد ميل المستقيم، والبعد العمودي لمستقيم معلوم من نقطة معلومة لا تقع عليه.

٣ – التأكد قبل البدء بتدريس أي بند من بنود هذه الوحدة من أن الطلاب يمتلكون المعارف التي سبق أن درسوها والضرورية لفهم البند المعني (من مفاهيم ، وتعميمات ومهارات) .

٤ – على المدرس أن يطلب من الطلاب عمل مجسمات ورقية لمخاريط دائرية قائمة منفردة ومزدوجة لعمل قطوع مختلفة بواسطة موس (أو مشرط) كمدخل للقطوع المخروطية الحقيقية وغير الحقيقية والتركيز على الحقيقية بشكل خاص لأنها موضوع الدراسة .

٥ – على المدرس تسمية القطوع المخروطية الحقيقية ، وهي أربعة : الدائرة ، القطع المكافئ ، القطع الناقص ، والقطع الزائد ؛ على أن يبيّن للطلاب أنه قد تم دراسة أحدها وهي الدائرة ويراجع ما تقدم شرحه كما ورد أعلاه في (١) ومن ثم يبدأ في دراسة الوحدة .

٦ – لابد من استخدام الأشكال الهندسية لتقريب المفاهيم الرياضية لأذهان الطلاب قدر الإمكان .

٧ – استخدام الوسائل التعليمية بأنواعها أثناء تنفيذ الدروس لجعل الموضوع شيقاً وأكثر وضوحاً .

٨ – إشراك الطلاب دائماً في تحديد المعطيات في التمارين أو المسائل والتدريبات والمطلوبات(سواء كانت مطلوبات إيجاد أو إثبات) لمحاولة الربط بين الخطوة الأخيرة (المطلوب) والخطوة الأولى (المعطيات) وردم الفجوة بينهما . وغالباً ما يتم استخدام الطريقة التحليلية التركيبية للحل .

٩ – حل الأمثلة في كل بند بمشاركة الطلاب قدر الإمكان ، حتى يتمكنوا من الإلمام بالطرق المختلفة للحل وكيفية تنظيم خطوات الحل في تسلسل منطقي .

١٠– تعويد الطلاب على تعليل كل خطوة من خطوات الحل، وذلك عن طريق الإجابة عن السؤال التالي : كيف ولماذا ؟ بعد كل خطوة يقومون بها .

١١– تقديم أمثلة منوّعة وتدريبات كافية لكل قطع مخروطي لتعميق فهم المادة العلمية .

١٢– إعطاء بعض التمارين والمسائل كواجب منزلي من أجل التثبيت وتطوير المعارف والمهارات .

١٣– مناقشة حل التمارين الصعبة من الواجب المنزلي بمشاركة الطلاب .

١٤– تبيان أن انسحاب المحاور الإحداثية هو لغرض إعادة كتابة المعادلة العامة للقطوع المخروطية لصورتها القياسية، من أجل تحديد نوع القطع المخروطي، وتقدم أمثلة كافية لتوضيح ذلك .

١٥– تبيان أن الهدف من دوران المحاور الإحداثية هو التخلص من الحد المحتوى على المتغيرين س ، ص في المعادلة العامة للقطوع المخروطية، من أجل إعادة كتابتها بصيغتها القياسية لتحديد نوع القطع المخروطي ، وتعطى أمثلة توضّح كيفية اختيار قياس زاوية الدوران .

٤ – ١ تمهيد

عدد الحصص : حصة واحدة

الأهداف

– يتعرَّف القطوع المخروطية .

– يثبت المعارف حول الدائرة.

تنفيذ حصص البند

يتم تنفيذ هذا البند في حصة واحدةيتعرف فيها الطالب على القطوع المخروطية بشكل عام، وبشكل خاص القطوع المخروطية غير الدائرية ذلك من خلال عمل قطع في المجسمات الورقية للمخاريط الدائرية القائمة المنفردة أو المزدوجة. وبعد ذلك يتم تثبيت المعارف السابقة حول الدائرة كمدخل نظامي للقطوع المخروطية.

٤ – ٢ القطع المكافئ

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

– يعرِّف القطع المكافئ وبؤرته ، ودليله ، ومحور تماثله (محوره)، ورأسه .

– يستنتج معادلة القطع المكافئ ، ويتعرَّف الصور المختلفة لها .

– يرسم قطعًا مكافئاً ، ويوجد معادلته بمعلومية: (١) رأسه وبؤرته ، (٢) رأسه ودليله، (٣) رأسه ومحوره وبؤرته، (٤) بؤرته ودليله .

– يحدّد كلاً من : بؤرة القطع المكافئ ، دليله ، رأسه ، ومحور تماثله من خلال معادلته .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالى :

الحصة الأولى : معادلة القطع المكافئ .

الحصة الثانية : الصور المختلفة للقطع المكافئ .

الحصتان الثالثة والرابعة : أمثلة .

الحصة الخامسة : تمارين صفية.

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال تتبع المدرس لنشاط الطلاب أثناء المناقشات الصفية وحل الواجبات الصفية والمنزلية ، كما يُعطى تمرين كالتالي في نهاية الحصة الخامسة :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه على محور السينات ويمر بالنقطة (٢ ، ٤) :

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ − ٢)

[١] أ) س^{٢} = ٢٤ ص   ب) ص^{٢} = −١٢ س

جـ) س^{٢} = −٨ ص   د) س^{٢} = −١٠ ص

[٢] أ) البؤرة (٢ ، ٠) ، الدليل س = −٢   ب) البؤرة (٠ ، $\frac{٣}{٢}$) ، الدليل ص = −$\frac{٣}{٢}$

جـ) البؤرة ($\frac{١}{٤}$ ، ٠) ، الدليل س = −$\frac{١}{٤}$ د) البؤرة (٠ ، −$\frac{٥}{٢}$) ، الدليل ص = $\frac{٥}{٢}$

هـ) البؤرة (٠ ، $\frac{٢}{٥}$) ، الدليل ص = −$\frac{٢}{٥}$ و) البؤرة (٠ ، $\frac{١}{٩}$) ، الدليل ص = −$\frac{١}{٩}$

[٣] ص^{٢} = $\frac{-٣٢}{٣}$ س

[٤] بؤرة القطع المكافئ هي ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) ومعادلة دليله س = −$\frac{٣}{٢}$.
بُعد النقطة (٣ ، ٣) عن البؤرة يساوي $\frac{٣}{٢}\sqrt{٥}$ وبُعد النقطة (٣ ، ٣) عن المستقيم س = −$\frac{٣}{٢}$ يساوي $\frac{٩}{٢}$. بما أن $\frac{٩}{٢}$ > $\frac{٣}{٢}\sqrt{٥}$ فإن النقطة (٣ ، ٣) تقع داخل القطع المكافئ ص^{٢} = ٦ س .

[٥] أ) ص^{٢} − ١٠ ص + ١٦ س + ٩ = ٠ ، ب) ص^{٢} − ٤ ص + ١٢ س − ٥٦ = ٠

جـ) س^{٢} − ٤ س − ١٦ ص − ٤٤ = ٠ ، ء) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص − ١٠ س − ١٤ ص + ٢٥ = ٠

٤ − ٣ القطع الناقص

عدد الحصص : (٥) حصص

الأهداف

– يعرِّف القطع الناقص وبؤرتيه ، ورأسَيه ، ودليليه ، ومحوريه ، والتخالف المركزي .
– يستنتج معادلة القطع الناقص ، والصور المختلفة لها .
– يرسم القطع الناقص ، ويوجد معادلته بمعلومية :
(١) رأسَيه وبؤرتَيه ، (٢) بؤرتيه وتخالفه المركزي ،
(٣) محوريه ونقطتين واقعتين عليه ، (٤) بؤرتيه ومعادلة أحد دليليه ، (٥) بؤرتيه فقط .
– يوجد بمعلومية معادلة القطع الناقص كل من :
(١) طولي محوريه ، (٢) تخالفه المركزي ، (٣) بؤرتيه
(٤) رأسيه ، (٥) معادلتي دليليه .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : القطع الناقص ومعادلته.

الحصة الثانية : عناصر القطع الناقص .

الحصتان الثالثة والرابعة : أمثلة .

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم من خلال تتبع المدرس لنشاط الطلاب أثناء المناقشات الصفية وحل الواجبات الصفية والمنزلية ، كما يُعطى في نهاية الحصة الخامسة تمرينًا مشابهاً للتمرين التالي :

أوجد معادلة القطع الناقص الذي طول نصف أحد محوريه يساوي خمسة وحدة طول ويمر بالنقطة (٣ ، ـ٨)

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ – ٣)

[١] أ) $٢أ = ١٠$ ، $٢ب = ٦$ ، $ي = \frac{٤}{٥}$ ، $(\pm ٤ ، ٠)$ ، $(\pm ٥ ، ٠)$ ، $س = \pm \frac{٢٥}{٤}$.

ب) $٢أ = ٨$ ، $٢ب = ٦$ ، $ي = \frac{\sqrt{٧}}{٤}$ ، $(\pm \sqrt{٧} ، ٠)$ ، $(\pm ٤ ، ٠)$ ، $س = \pm \frac{١٦}{\sqrt{٧}}$.

جـ) $٢أ = ١٠$ ، $٢ب = ٨$ ، $ي = \frac{٣}{٥}$ ، $(٠ ، \pm ٣)$ ، $(٠ ، \pm ٥)$ ، $ص = \pm \frac{٢٥}{٣}$.

ء) $٢أ = ١$ ، $٢ب = \frac{٢}{٣}$ ، $ي = \frac{\sqrt{٥}}{٣}$ ، $(\pm \frac{\sqrt{٥}}{٦} ، ٠)$ ، $(\pm \frac{١}{٢} ، ٠)$ ، $س = \pm \frac{٣}{٢\sqrt{٥}}$.

[٢] أ) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$ ، $س = \pm \frac{٢٥}{٤}$

ب) $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ ، $ص = \pm \frac{٢٥}{٣}$

جـ) $\frac{س^٢}{١٦} + \frac{ص^٢}{١٢} = ١$ ، $س = \pm ٨$

ء) $\frac{س^٢}{٩} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ ، $ص = \pm \frac{٢٥}{٤}$

هـ) $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

و) $٧س^٢ + ١٥ص^٢ = ٢٤٧$

ز) $\frac{س^٢}{١٨} + \frac{ص^٢}{٩} = ١$

ح) $٧س^٢ + ١٦ص^٢ = ٥٠٨$

[٣] $٣س^٢ + ٤ص^٢ - ٣٦س = ٠$

[٤] $\frac{س^٢}{٢٤} + \frac{ص^٢}{٨} = ١$.

٤ – ٤ القطع الزائد

عدد الحصص : (٦) حصص

الأهداف

– يعرّف القطع الزائد وبؤرتيه ، ورأسية ، ودليليه ، ومحوريه ،ومركزه ، وتخالفه المركزي .

– يستنتج معادلة القطع الزائد ، ويتعرَّف على الصور المختلفة لها .

– يرسم القطع الزائد ، ويوجد معادلته بمعلومية:

(١) رأسية وبؤرتيه ، (٢) رأسية وتخالفه المركزي

(٣) بؤرتيه ومعادلة احد دليليه .

– يوجد بمعلومية معادلة القطع الزائد كل من :

(١) محوريه ، (٢) تخالفه المركزي ، (٣) بؤرتيه

(٤) معادلتي دليله ، (٥) رأسيه ، (٦) معادلتي مستقيميه التقاربيين .

– يعيّـن المستقيمين التقاربيين لقطع زائد .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ست حصص على النحو التالى :

الحصة الأولى : تعريف القطع الزائد ومعادلته.

الحصة الثانية : عناصر القطع الزائد .

الحصة الثالثة : معادلة المستقيمين التقاربيين .

الحصتان الرابعة والخامسة : أمثلة .

الحصة السادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيا من خلال تقويم نشاط الطلاب أثناء مناقشة الأمثلة وحل الواجبات الصفية والمنزلية ، كما يُعطى في نهاية الحصة السادسة تمريناً مكافئًا للتمرين التالي :

إذا كان معادلة القطع الزائد هي : ٤ ص^{٢} – ٢٥س^{٢} = ١٠٠ ، فأوجد :

أ) إحداثيات رأسية .

ب) إحداثيات بؤرتيه .

جـ) معادلتي مستقيميه التقاربيين .

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ – ٤)

[١] أ) $(\pm ٣ ، ٠)$ ، $(\pm \sqrt{١٣} ، ٠)$ ، $ص = \pm \frac{٢}{٣} س$

ب) $(\pm ٣ ، ٠)$ ، $(\pm ٥ ، ٠)$ ، $ص = \pm \frac{٤}{٣} س$

جـ) $(\pm ٤ ، ٠)$ ، $(\pm \sqrt{٤١} ، ٠)$ ، $ص = \pm \frac{٥}{٤} س$

ء) $(\pm \frac{٢}{٣} ، ٠)$ ، $(\pm \frac{٢}{٣}\sqrt{٢} ، ٠)$ ، $ص = \pm س$

[٢] أ) $ي = \frac{\sqrt{١٣}}{٣}$ ، $س = \pm \frac{٩}{\sqrt{١٣}}$ ب) $ي = \frac{\sqrt{١٠}}{٣}$ ، $ص = \pm \frac{٩}{\sqrt{١٠}}$

جـ) $ي = \frac{\sqrt{٤١}}{٤}$ ، $س = \pm \frac{١٦}{\sqrt{٤١}}$ د) $ي = \frac{\sqrt{٣٣}}{٥}$ ، $ص = \pm \frac{٢٥}{\sqrt{٣٣}}$

[٣] أ) $\frac{ص^٢}{١٦} - \frac{س^٢}{٢٠} = ١$ ب) $\frac{س^٢}{٢٥} - \frac{ص^٢}{٢٤} = ١$

جـ) $\frac{س^٢}{١٦} - \frac{ص^٢}{٢٠} = ١$ ء) $٧ ص^٢ - ٩ س^٢ = ٣٤٣$

هـ) $\frac{س^٢}{٥٥} - \frac{ص^٢}{٩} = ١$ و) $٤ ص^٢ - ٩ س^٢ = ٦٤$

[٤] $٤ س^٢ - ص^٢ = ٣٢$

[٥] $٢٠ س^٢ - ٥ ص^٢ = ١٤٤$

[٦] $٣٦ ص^٢ - ٨١ س^٢ = ٨٣٢$

[٧] $٢٥٢ س^٢ - ٣٠٢٤ س - ٤ ص^٢ + ٩٠٠٩ = ٠$

٤ – ٥ انسحاب المحاور الإحداثية

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

– يكتب معادلة قطع مخروطي معطاة باستخدام انسحاب معين .

– يحدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله معادلة من الدرجة الثانية في متغيرين بانسحاب معين.

تنفيذ حصص البند ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : انسحاب المحاور الإحداثية .

الحصة الثانية : أمثلة .

الحصة الثالثة : تمارين صفية

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة أداء الطلاب أثناء مناقشة الأمثلة وحل الواجبات الصفية والمنزلية ، كما يُعطى في نهاية الحصة الثالثة سؤالا مشابه للسؤال التالي :

بيّن نوع المنحنى الذي تمثله المعادلة:

س^2 – ٣ ص^2 + ٨ س + ١٢ ص – ٥ = ٠

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ – ٥)

[١] أ) ص^2 + ٤ ص – ١٦ س – ٢٨ = ٠

ب) ١٦س^2 + ٢٥ ص^2 + ٩٦س – ٢٥٦ = ٠

جـ) ٧ س^2 – ٩ ص^2 – ٤٢ س + ٣٦ ص – ٣٦ = ٠

ء) ٣ س^2 + ٤ ص^2 – ١٨ س – ١٦ ص + ٣١ = ٠

[٢] أ) قطع مكافئ   ب) قطع ناقص   جـ) قطع زائد

د) قطع ناقص   هـ) مستقيمان متقاطعان .

[٣] أ) ٢ سَ^{2} + ٣ صَ^{2} = ٠ وتمثل نقطة .

رأسَية (٢+ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ١) ، (٢ – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ١) ؛ بؤرتيه (٢+ $\frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، ١) ، (٢ – $\frac{١}{\sqrt{٦}}$ ، ١)

ب) س^2 = ٨ صَ تمثل قطعاً مكافئاً حيث سَ = س + ٣ ، صَ = ص + ١

الرأس (–٣ ، –١) ؛ البؤرة (–٣ ، ١) .

جـ) $\frac{صَ^2}{٩}$ – $\frac{سَ^2}{٤}$ = ١ ،

تمثّل قطعاً زائداً حيث سَ = س + ١ ، صَ = ص – ٢ ،

رأسَيه (–١ ، ٥) وَ (–١ ، –١) وبؤرتيه (–١ ، ٢ ± $\sqrt{١٣}$)

[٤] الرأس (–٣ ، ٢) ، البؤرة (–٢ ، ٢) ، الدليل س = – ٤

[٥] أ = $\sqrt{٣}$ ، ب = ٤ ، ي = $\sqrt{\frac{١٩}{٣}}$ ،

المركز (١ ، –٢) رأسَيه (١ ± $\sqrt{٣}$ ، –٢) ،

بؤرتيه (١ ± $\sqrt{١٩}$ ، – ٢)

٤ – ٦ دوران المحاور الإحداثية

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

– يحدِّد قياس زاوية دوران المحاور الإحداثية اللازمة للتخلص من الحد المحتوي على س ص في المعادلة العامة من الدرجة الثانية في متغيرين س ، ص .

– يحدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله معادلة معطاة من الدرجة الثانية في متغيرين باستخدام دوران معين.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالى :

الحصة الأولى : دوران المحاور الإحداثية .

الحصة الثانية : أمثلة .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم البنائي من خلال متابعة المدرس لنشاط الطلاب أثناء مناقشة الأمثلة وحل الواجبات الصفية والمنزلية ، كما يُعطى في نهاية الحصة الثالثة تمرين كالتالي :

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي معادلته: س^{٢} + ٤ س ص + ص^{٢} – ٢س + ٣ ص = ٠

إرشادات وإجابات : تمارين (٤ – ٦)

[١] أ) ٥ س^{٢} + ٢٦ س ص + ٥ ص^{٢} – ٢٨٨ = ٠

[٢] أ) مستقيمان متقاطعان.

ب) قطع ناقص .

جـ) مستقيمان متقاطعان.

ء) قطع ناقص.

هـ) قطع زائد .

و) مجموعة خالية.

ز) قطع مكافئ.

ح) مستقيمان متطابقان.

٤ – ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

ينفذ هذا البند في حصتين ، والجدول التالي يبيّن الأهداف التي يحققها كل سؤال من أسئلة الاختبار

رقم السؤال	رقم الهدف
[١]	١ ، ٢ ، ٣
[٢]	٤
[٣]	٥ ، ٦
[٤]	٧ ، ٨ ، ٩

ويمكن للمدرس أن يعدّ اختباراً آخر للوحدة مراعياً في أسئلته تحقيق جميع أهداف الوحدة .

الاختبار

[١] أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته (– ٢ ، ٠) ومعادلة دليله س = ٢

[٢] أوجدطولي المحورين الأكبر والأصغر ، والتخالف المركزي للقطع الناقص

١٦ س^{٢} + ٤ ص^{٢} = ٦٤ .

[٣] قطع زائد، رأساه (٠ ، ± ٤) وبؤرتاه (٠ ، ± ٦) .أوجد :

أ) معادلته

ب) معادلتي الدليلين والمستقيمين المتقاربين .

[٤] بيّن ماذا تمثّل المعادلات التالية :

أ) ص^{٢} – س + ٢ ص = ٠

ب) س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٦ .

المصطلحات العلمية الواردة في الوحدة	
Conic sections	قطوع مخروطية
Parabola	قطع مكافئ
Vertex	رأس
Focus	بؤرة
Directrix	دليل
Ellipse	قاطع ناقص
Major axis	المحور الأساسي (الأكبر)
Minor axis	المحور الثانوي (الأصغر)
Hyperbola	قطع زائد
Transverse axis	المحور القاطع
Conjugate axis	المحور المرافق
Asympotates lines	المستقيمات التقاربية
Eccentricity	التخالف المركزي
Translation of axes	انسحاب المحاور
Rotation of axes	دوران المحاور

الوحدة الخامسة

الهندسة الفضائية

جدول توزيع الحصص

رقم البند		عدد الحصص
٥ – ١	مراجعة	٢
٥ – ٢	المستقيم العمودي على مستوى	٤
٥ – ٣	العمود والمائل	٣
٥ – ٤	الزاوية الزوجية	٣
٥ – ٥	اختبار الوحدة	٢
	إِجمالي عدد الحصص	١٤

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يذكر شروط تعامد مستقيم مع مستوى، ويستخدمها في حل بعض المسائل .

٢ – يعرِّف المستقيم المائل ، ويتعرَّف على علاقته بالمستقيم العمودي .

٣ – يعرِّف الزاوية الزوجية والزاوية الخطية ، ويستخدمهما في حل بعض المسائل .

٤ – يثبت بعض المبرهنات والنتائج المتعلقة بالمستقيمات والمستويات المتعامدة، ويستخدمها في حل المسائل.

المقدمة

في هذه الوحدة تم تقديم موضوع جديد من موضوعات الهندسة الفضائية ، وهو موضوع التعامد .

نتناول أولاً مراجعة لبعض المفاهيم والعلاقات الاساسية التي دُرست فيما سبق والتي ستفيد الطالب في هذه الوحدة ، وهذا موضوع البند الأول .

أمّا البند الثاني فيناقش شروط تعامد مستقيم مع مستوى، وبعض المبرهنات المتعلقة بالتعامد مدعمة بالأمثلة البسيطة والمتنوعة .

وفي البند الثالث موضوع العمود والمائل ، أما البند الرابع فيناقش موضوع الزاوية المزدوجة وكيفية تحديد قياسها ، وكذلك شروط تعامدمستويين . أما البند الخامس فيناقش الإسقاط وأنواعه .

وفي نهاية كل بند من هذه البنود الخمسة مجموعة من التمارين المتنوعة لكي يختار المدرس منها مجموعة تمارين كواجب منزلي للطالب والبعض الآخر يحلها صفياً .

لمحة تاريخية

منذُ آلاف السنين والهندسة الفضائية ، وكانت تسمى بهندسة المجسمات هي العلم الذي يبحث في خواص الأجسام من حيث وضعها وشكلها وحجمها دون التعرض إلى خواص المواد المكونة لها . والدليل على قدم نشأة الهندسة الفضائية تلك الدقة والإبداع في الآثار القديمة والمعابد والأهرام الموجودة في مصر ، وكذلك الآثار القديمة والمعابد والمباني الموجودة في اليمن .

كل ذلك يكشف عن مدى تقدم دراسة المجسمات، فبدون هذه الهندسة ماكانت لتقام مثل هذه الآثار . والتاريخ يحدثنا عن رحلات طاليس وفيثاغورث إلى مصر وبابل فقد تتلمذوا على يدكهنة طيبه وعلماء آشور وبابل وقد أرسوا قواعد الهندسة النظرية على أساس تعاليم ونظريات استقوها من علوم أهل النيل والفرات .

ومن العلماء أيضاً أقليدس (٣٦٠ – ٢٩٠ ق . م) مؤلف الكتاب الشهير (الأصول) Element الذي يتكون من ١٥ مجلداً (جزءاً) خصِّص الأجزاء الثلاثة الأخيرة منها للهندسة الفضائية، وقد عالجها بدقة ووضوح و بنفس أسلوب معالجته للهندسة المستوية .

وبالرغم من أن شهرة أقليدس اقترنت بكتابه الأصول إلا أن هناك أعمالاً أخرى قام بكتابتها، منها المعلومات (Data) والذي يتناول فيه التحليل التطبيقي والظاهرة (phoenomna) ويختص بالهندسة الكروية، أما كتابه النتائج (porismns) والمحاولات (Fallacies) فلم يُعثر عليهما؛ إلاّ أن المحاولات التي تمت من قبل كلّ من روبرت سيمسن .Simson R وتشاسليس .Chasles M من خلال الكثير من الملاحظات التي كتبت على ألواح البردي بيَّنت أن الكتاب الأخير تناول القطوع المخروطية في أربعة أجزاء اعتمد عليها أبولوينوس Apollonius (٢٦٢–١٩٠ ق . م) في عمله (المحل الهندسي على سطح) المكون من ثمانية مجلدات (أجزاء ، فصول) .

أيضاً دور أرخميذس في هندسة المسميات، وله من المؤلفات الكتاب الشهير (الكرة والأسطوانة) .

وامتدت الهندسة التحليلية من معالجة الأشكال المستوية إلى تناول الفضاء ككل ، وهكذا ظهرت الثلاثيات المرتبة(س ، ص ، ع) بعد الأزواج المرتبة، والثلاثيات المرتبة توضح موقع النقطة أي بعدها عن كل من المحاور السينيه والصاديه والعينيه .

أخيراً نذكِّر بأهمية الهندسة الفراغية في الإبداع وتطور المباني الحديثة مثل ناطحات السحاب، وكثيراً من الجسور المعلقة والانفاق وما شابه ذلك.

خلفية علمية

أولاً : المفاهيم الأساسية :

– المستقيم العمودي على مستوى ، ونرمز له $\overleftrightarrow{ل} \perp$ س

– المستقيم المائل على مستوى ، ونكتبه رمزياً : و $\overleftrightarrow{ل} \not\perp$ س ، $\overleftrightarrow{ل} \not\parallel$ س

– الزاوية الزوجية بين مستويين س، ص ، ورمزها ∡ (س $\overleftrightarrow{ل}$ ص)

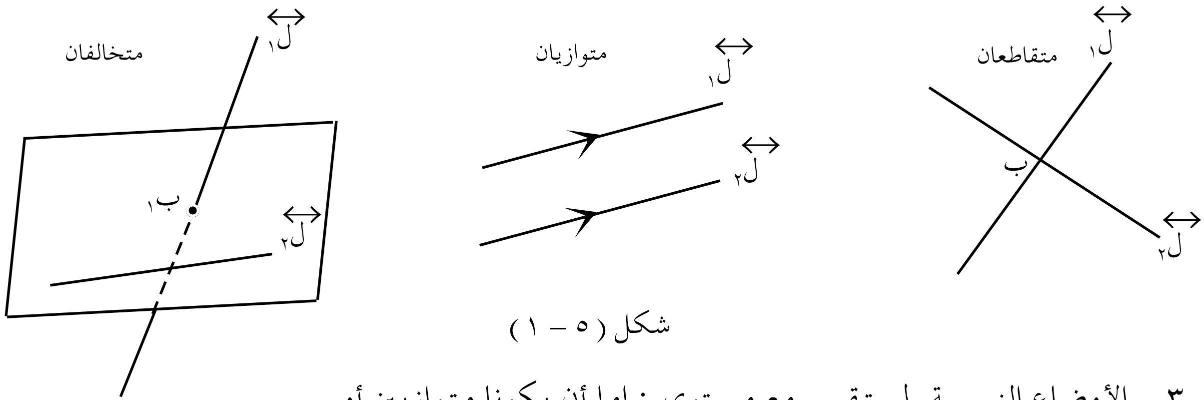
– المساقط .

– مساقط د على س بإسقاط عمودي أو موازٍ لـ $\overleftrightarrow{ل}$

ثانياً :أساسيات وحقائق

١– المستوى هو سطح مستوٍ ، يرمز له برموز مختلفة مثل : س أو ص أو ع ؛ ويكوّن من مجموعة لا نهائية من النقاط ، شرط أنه إذا كانت أ ، ب نقطتين في المستوى س فإن المستقيم المار بهما يقع بكامله في س

٢ – الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفراغ : إما يكونا متوازيين أو متقاطعان أو متخالفين، شكل (٥ – ١)

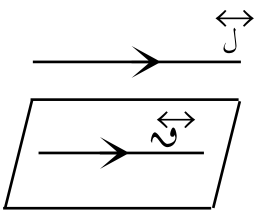


شكل (٥ – ١)

٣ – الأوضاع النسبية لمستقيم مع مستوى : إما أن يكونا متوازيين أو المستوى يحوي المستقيم، أو المستقيم يقطع المستوى .

٤ – الأوضاع النسبية لمستوى مع مستوى: إما أن يكونا متقاطعين ، أو متوازيين أو متطابقين .

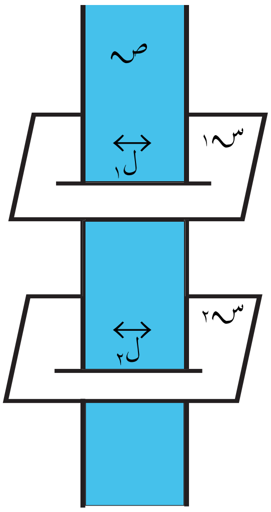
٥ – في [شكل (٥ – ٢)] : $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{و}$ ، $\overleftrightarrow{و} \subset$ س فإن $\overleftrightarrow{ل} \parallel$ س



شكل (٥ –٢)

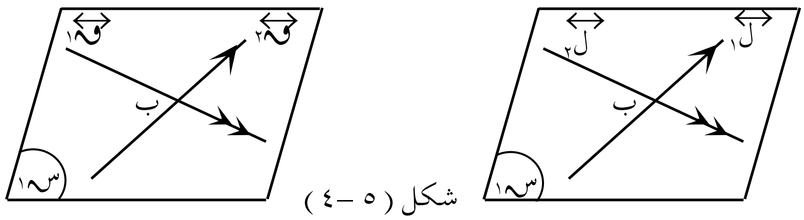
٦- إذا كان $س_1 \parallel س_2$ ، ص قاطعاً لهما في $\overleftrightarrow{ل_1}$ ، $\overleftrightarrow{ل_2}$

فإن $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$ ؛ [شكل (٥ - ٣)]



شكل (٥ - ٣)

٧ - يتوازي مستويان $س_1$ ، $س_2$ إذا كان في أحدهما مستقيمان متقاطعان يوازيان مستقيمين متقاطعين في المستوى الآخر [شكل (٥ - ٤)]



شكل (٥ -٤)

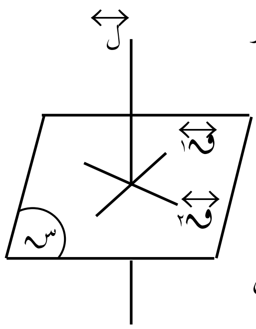
ثالثاً : المستقيمات والمستويات المتعامدة :

١ - يتعامد المستقيم ل مع المستوى س إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ عمودياً على مستقيمين غير متوازيين واقعين في المستوى س ،

$\overleftrightarrow{ل} \perp \overleftrightarrow{ق_1} \wedge \overleftrightarrow{ل} \perp \overleftrightarrow{ق_2} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{ل} \perp س$ ، [شكل (٥ - ٥)].

٢- إذا كان $\overleftrightarrow{ل} \perp س$ فإن $\overleftrightarrow{ل}$ عمودي على جميع المستقيمات في س .

٣- من نقطة ب الواقعة في المستوى س أو خارجة عنه ، لا يمكن رسم سوى مستقيماً وحيداً عمودياً على س.



شكل (٥ -٥)

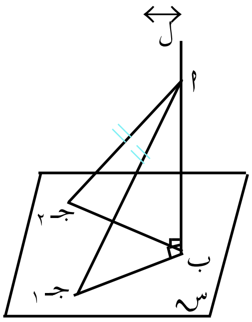
رابعاً : العمود والمائل .

١ - المائل هو كل مستقيم يقطع مستوى س وليس عمودياً عليه.

٢ - إذا كان هناك ثلاثة مستقيمات متعامدة فكل مستقيم منها عمودي على مستوى المستقيمين الآخرين .

٣ - ليكن $\overleftrightarrow{ل} \perp س$ ؛ النقطتان $جـ_1$ ، $جـ_2$ واقعتين في س .

فإذا كان $|أجـ_1| = |أجـ_2|$ ، فإن $|بجـ_1| = |بجـ_2|$ [(شكل ٥ -٦)]



شكل (٥ - ٦)

البرهان : $\overline{أب} \perp س$ ، $\overline{أب} \subset \overleftrightarrow{ل}$ (معطى)

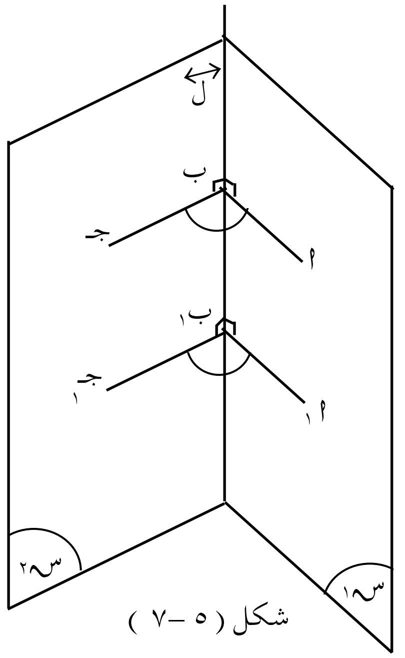
$\therefore \overline{أب} \perp \overline{بجـ_1}$ ، $\overline{أب} \perp \overline{بجـ_2}$ حقيقة (٤-١)

$\triangle\triangle$ أب$جـ_1$ ، أب$جـ_2$ القائمان في ب ، فيهما : $\left\{ \begin{array}{ll} \overline{أب} & \text{مشترك} \\ |أجـ_1| = |أجـ_2| & \text{(معطى)} \end{array} \right.$

$\therefore \triangle$ أب$جـ_1 \cong \triangle$ أب$جـ_2$ ، وينتج أن $|بجـ_1| = |بجـ_2|$

خامسًا : الزاوية الزوجية :

١– الزاوية الزوجية : هي اتحاد نصفي مستويين بجبهة مشتركة $\overleftrightarrow{ل}$ تسمى الجبهة المشتركة بحرف الزاوية، ويسمى نصفا المستويين وجهي الزاوية شكل (٥ –٧)

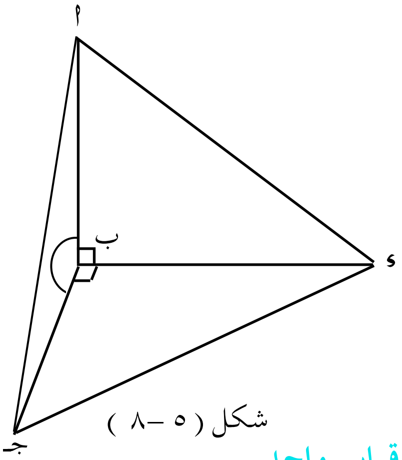


شكل (٥ –٧)

يرمز للزاوية الزوجية بين المستويين $س_١$ ، $س_٢$ بالرمز : $\measuredangle$ ($س_١$ $\overleftrightarrow{ل}$ $س_٢$) أو $\measuredangle$ ($س_١$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ ، $س_٢$) أو $\measuredangle$ ($\overleftrightarrow{ل}$).

[في الشكل (٥ – ٨) .يرمز للزاوية الزوجية بين المستويين (أ ب ء) ، (ب جـ ء) بالرمز $\measuredangle$ (أ ، $\overline{ء ب}$ ، جـ) أو بالرمز $\measuredangle$ (أ $\overline{ء ب}$ جـ) أو بالرمز $\measuredangle$ (أ – ء ب – جـ) أو بالرمز $\measuredangle$ ($\overleftrightarrow{ء ب}$)] .

٢– والزاوية الخطية هي كل زاوية مستوية مرسومة في وجهي الزاوية الزوجية بحيث يكون ضلعاها عموديين على الفاصل المشترك (حرف الزاوية) .



شكل (٥ –٨)

فنجد في الشكل (٥ – ٧) : $س_١ \cap س_٢ = \overleftrightarrow{ل}$

$\overline{أ ب} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، $\overline{ب جـ} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ($\overleftrightarrow{ل}$ حرف الزاوية الزوجية)

$\therefore$ $\measuredangle$ (أ ب جـ) هي زاوية خطية للزاوية الزوجية ($س_١$ $\overleftrightarrow{ل}$ $س_٢$).

كذلك $\overline{أ_١ ب_١} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، $\overline{ب_١ جـ_١} \perp \overleftrightarrow{ل}$

$\measuredangle$ ($أ_١ ب_١ جـ_١$) هي أيضاً زاوية خطية للزاوية الزوجية ($س_١$ $\overleftrightarrow{ل}$ $س_٢$) .

مما سبق نستنتج أن الزوايا الخطية لزاوية زوجية واحدة لها جميعًا قياس واحد .

توجيهات طرائقية عامة

١ – على المدرس أن يبدأ بمراجعة بعض العلاقات والمفاهيم الأساسية وبعض المبرهنات السابقة كمدخل لهذه الوحدة .

٢ – يجب استخدام وسائل تعليمية بسيطة يصنعها المدرس بمشاركة الطلاب، مثل بعض الأسلاك للتعبير عن المستقيمات، وبعض الورق المقوى للتعبير عن المستويات .

٣ – الاهتمام بالرسم واستخدام الألوان لتوضيح المستويات والخطوط المختلفة المتقاطعة والمتداخلة .

٤ – الانتباه إلى بعض الأخطاء الشائعة التي قد يقع فيها الطلاب، مثلاً عندما يرسم المدرس شكلاً مجسمًا على السبورة يعتقد بعض الطلاب أن كل المستقيمات واقعة في مستوى واحد .

٥ – التأكيد على أنه يمكن رسم التمرين الواحد بأكثر من طريقة .

٦ – يجب إشراك الطلاب في مناقشة الأمثلة والتمارين وتشجيعهم على الحل .

٧ – على المدرس متابعة حل التدريبات الصفية والواجبات المنزلية .

٨ – استرجاع جميع المبرهنات والنتائج والحقائق في نهاية الوحدة .

٥ – ١ المستقيم العمودي على مستوى

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

– يعيّن الزاوية بين مستقيمين في الفضاء .

– يطبّق شروط تعامد مستقيم مع مستوى .

– يثبت المبرهنات المتعلقة بالمستقيم العمودي على مستوى ، ويطبقها في حل التمارين.

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

الحصتان الثانية والثالثة : تعامد مستقيم مع مستوى، وأمثلة .

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

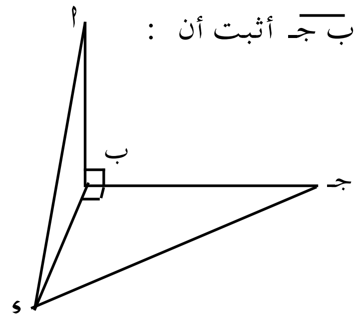
التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة أداء الطلبة أثناء المناقشات وحل الواجبات الصفية والمنزلية. وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

في الشكل المرسوم جانباً ب جـ ء مثلث قائم في ب ، $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ أثبت أن :

١ – $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء) .

٢ – المستويان (جـ ب ء) ، (أ ب ء) متعامدان .



شكل (٥ – ٩)

[**البرهان** :

∵ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء) (وهو المطلوب أولاً)

∵ $\overline{\text{جـ ب}} \subset$ المستوى (ب جـ ء) ، $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء) (إثباتاً)

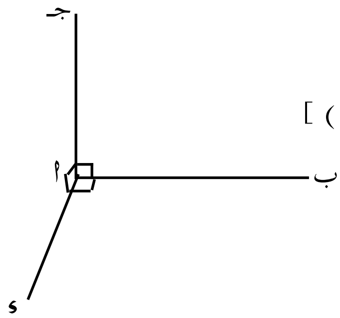
∴ المستوى (ب جـ ء) $\perp$ المستوى (أ ب ء) [وهو المطلوب ثانياً] .

[٢] نفرض المستقيمات المتعامدة هي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ [شكل (٥ – ١٠)]

لنأخذ المستقيم $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ونثبت أنه عمودي على المستوى (ب أ ء)

∵ $\overline{\text{جـ أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ أ}} \perp \overline{\text{ء أ}}$ ،

∴ $\overline{\text{جـ أ}} \perp$ المستوى (ب أ ء).



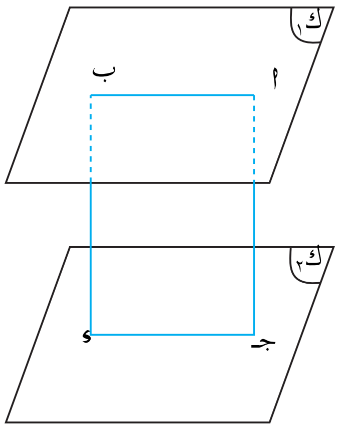
شكل (٥ – ١٠)

[٣] شكل (٥ – ١١)

∵ ك$_1$ // ك$_2$ ، المستوى أ جـ ء ب قاطع لهما في $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$:

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ ، ∵ $\overline{\text{أ جـ}} \perp$ ك$_2$ ، ∴ $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$

∵ $\overline{\text{ب ء}} \perp$ ك$_2$ ، ∴ $\overline{\text{ب ء}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ الشكل أ جـ ء ب مستطيل.



شكل (٥ – ١١)

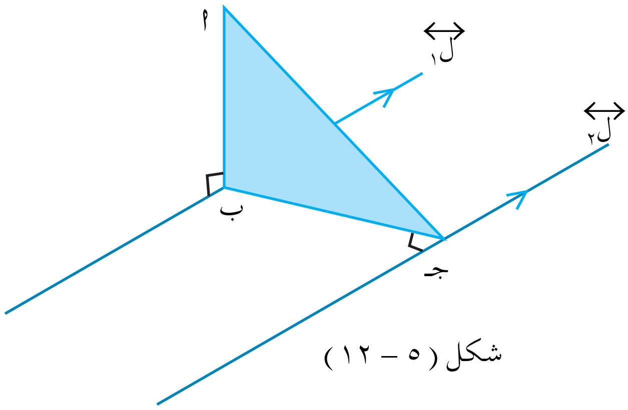
[٤] شكل (٥ – ١٢)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}_2} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ . . . (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{ل}_2}$ // $\overleftrightarrow{\text{ل}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_1} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، ∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}_2} \perp \overline{\text{أ ب}}$ . . . (٢)

من (١) ، (٢) ينتج $\overleftrightarrow{\text{ل}_2} \perp$ المستوى (أ ب جـ)

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}_2} \perp \overline{\text{أ جـ}}$



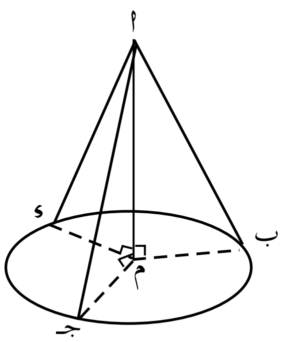
شكل (٥ – ١٢)

[٥] شكل (٥ –١٣) من خلال تطابق المثلثات

أ م ب ، أ م جـ ، أ م ء ينتج أن :

| أ ب | = | أ جـ | = | أ ء |

أو استخدام مبرهنة فيثاغورث .



شكل (٥ –١٣)

٥ – ٢ العمود والمائل

عدد الحصص : (٣) حصص.

الأهداف

– يعرِّف العمودي والمائل .
– يثبت مبرهنة الأعمدة الثلاثة ويطبقها .

تنفيذ حصص البند

يُنفّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :
الحصة الأولى : العمودي، والمائل .
الحصة الثانية : مبرهنة الأعمدة الثلاثة .
الحصة الثالثة : تمارين صفية .

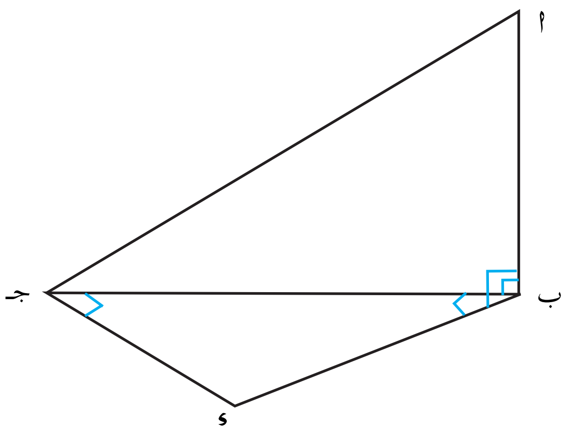
التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة أداء الطلبة أثناء المناقشات وحل الواجبات الصفية والمنزلية . وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

في الشكل (٥ – ١٤) : ب جـ ء مثلث قائم في جـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوى (ب جـ ء) ؛
أثبت أن $\overline{\text{ء جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ جـ}}$.

البرهان :

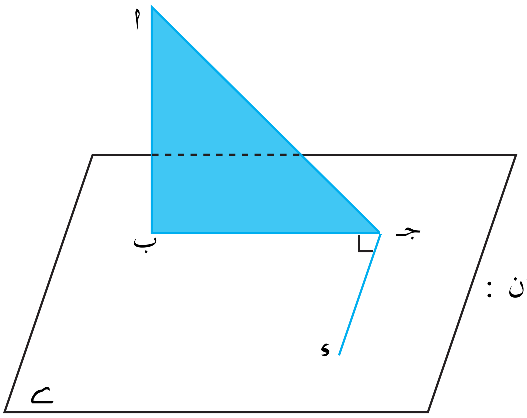
∵ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ المستوى (ب جـ ء)   (معطى)
∴ $\overline{\text{أ ب}}$ $\perp$ $\overline{\text{ء جـ}}$ (حقيقة (٤–١))
∵ $\overline{\text{ء جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{ب جـ}}$
∴ $\overline{\text{ء جـ}}$ $\perp$ المستوى (أ ب جـ)
∴ $\overline{\text{ء جـ}}$ $\perp$ $\overline{\text{أ جـ}}$.



شكل (٥ –١٤)

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ – ٢)

[١] شكل (٥ – ١٥) :



شكل (٥ – ١٥)

∵ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ ح

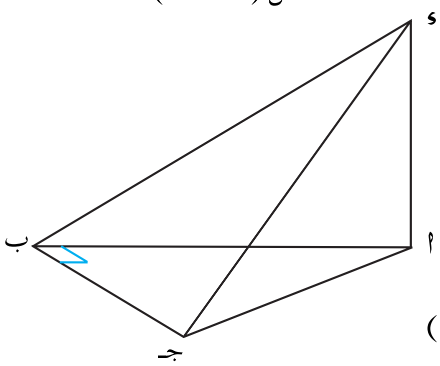
∴ $\overline{\text{أب}}$ ⊥ $\overline{\text{ءجـ}}$ ... (١)

∵ $\overline{\text{جـب}}$ ⊥ $\overline{\text{ءجـ}}$ ... (٢) ، من (١)، (٢) ينتج أن :

$\overline{\text{ءجـ}}$ ⊥ المستوى (أ ب جـ)

∴ $\overline{\text{ءجـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أجـ}}$ (وهو المطلوب)

[٣] شكل (٥ – ١٦) :



شكل (٥ – ١٦)

نطبق مبرهنة فيثاغورث على △△ ءأجـ، أب جـ

|ءجـ|^2 = |أء|^2 + |أجـ|^2 ... (١)

|أجـ|^2 = |أب|^2 + |ب جـ|^2 ... (٢)

نعوض من (٢) في (١) فينتج :

|ءجـ|^2 = |أء|^2 + |أب|^2 + |ب جـ|^2 (وهو المطلوب أولاً)

∵ $\overline{\text{جـب}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$ ، ∵ $\overline{\text{جـب}}$ ⊥ $\overline{\text{أء}}$

∴ $\overline{\text{جـب}}$ ⊥ المستوى (أب ء)

∴ $\overline{\text{جـب}}$ ⊥ $\overline{\text{ءب}}$ وهو المطلوب ثانياً

[٤] شكل (٥ – ١٧) :

أولاً ∵ $\overline{\text{بهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{مهـ}}$ ، ∵ $\overline{\text{بهـ}}$ ⊥ $\overline{\text{مد}}$

∴ $\overline{\text{بهـ}}$ ⊥ المستوى (م د هـ) ، $\overline{\text{أب}}$ ⊥ $\overline{\text{د هـ}}$

ثانياً ∵ |م ب| = |م أ| ، ∴ |د أ| = |د ب| .

ثالثاً لإيجاد |د هـ| نطبق مبرهنة فيثاغورث على △ د م هـ

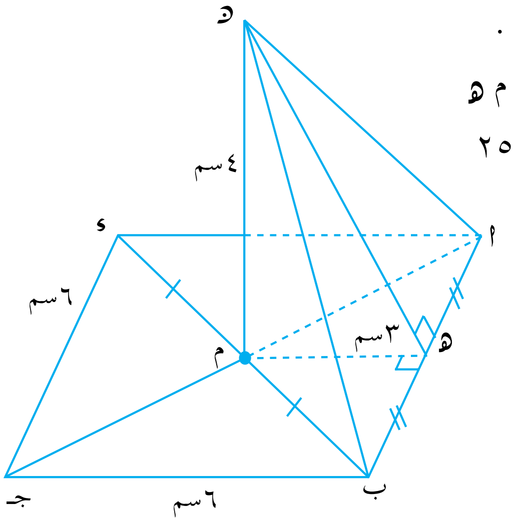
|د هـ|^2 = |د م|^2 + |م هـ|^2 ، |د هـ|^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥

∴ |د هـ| = ٥سم

مساحة △ د م هـ = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ سم^2

مساحة △أ ب د = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٥ = ١٥ سم^2

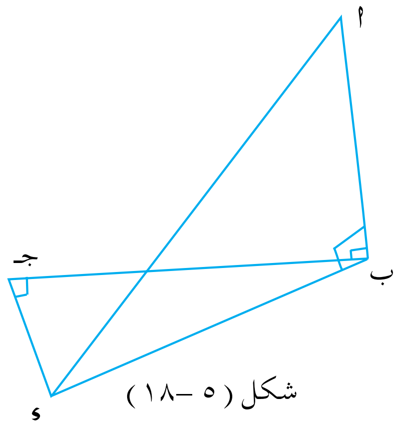
مساحة △أ ب م = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ سم^2



شكل (٥ – ١٧)

[٥] المثلث ب جـ د قائم الزاوية في جـ وليس في ب كما ورد في كتاب الطالب.

نطبق مبرهنة فيثاغورث على △△ أ ب ء ، ب جـ ء [شكل (٥ –١٨)]



شكل (٥ –١٨)

$$|\text{أ ء}|^{2} = |\text{أ ب}|^{2} + |\text{ب ء}|^{2}$$

$$\because |\text{أ ب}| = ٢\,|\text{ب جـ}|$$

$$\therefore |\text{أ ء}|^{2} = ٤\,|\text{ب جـ}|^{2} + |\text{ب ء}|^{2} \quad \dots (١)$$

$$\because |\text{ب ء}|^{2} = |\text{ب جـ}|^{2} + |\text{ء جـ}|^{2} \;،\; |\text{ء جـ}| = ٢\,|\text{ب جـ}|$$

$$\because |\text{ب ء}|^{2} = |\text{ب جـ}|^{2} + ٤\,|\text{ب جـ}|^{2} \quad \dots (٢)$$

من (١) ، (٢) نحصل على :

$$|\text{أ ء}|^{2} = ٤\,|\text{ب جـ}|^{2} + |\text{ب جـ}|^{2} + ٤\,|\text{ب جـ}|^{2}$$

$$\therefore |\text{أ ء}|^{2} = ٩\,|\text{ب جـ}|^{2} \;،\; \therefore |\text{أ ء}| = ٣\,|\text{ب جـ}|$$ (وهو المطلوب).

٥ – ٣ الزاوية الزوجية (الثنائية)

عدد الحصص : (٣) حصص

الأهداف

– يعرِّف الزاوية الزوجية والزاوية الخطية.

– يتعرَّف شروط تعامد مستويين، ويطبقها في حل بعض التمارين والمسائل .

– يثبت المبرهنات المتعلقة بالزاوية الزوجية ، ويطبقها في حل التمارين والمسائل.

تنفيذ حصص البند

ينفّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : الزاويتان الزوجية والخطية .

الحصة الثانية : المبرهنات المتعلقة بالزاويتين الزوجية والخطية ونتائجهما .

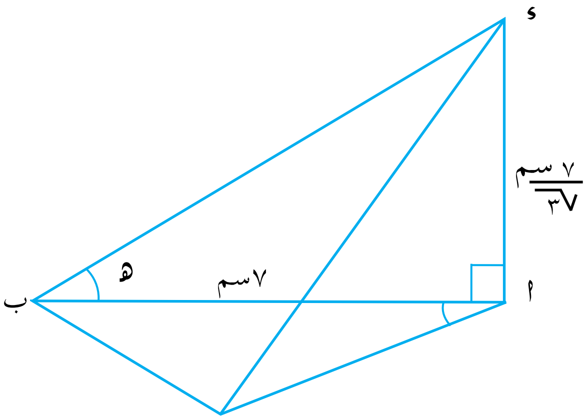
الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة أداء الطلبة أثناء المناقشات وحل الواجبات الصفية والمنزلية ، وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

في الشكل (٥ – ١٩) $\overline{ءا}$ ⊥ المستوى (ا ب جـ) ؛

|ا ء| = $\frac{٧}{\sqrt{٣}}$ سم ، |ا ب| = ٧ سم ؛ أوجد ق(∠ا ب ء) .



شكل (٥ – ١٩)

[**الحل** : ∵ $\overline{ءا}$ ⊥ المستوى (ا ب جـ)

∴ $\overline{ءا}$ ⊥ $\overline{اب}$ [حقيقة (٥ – ١)]

∴ △ ء ا ب قائم في ا ،

∴ ظاهـ = $\frac{|ا ء|}{|ا ب|}$

∴ ظاهـ = $\frac{\frac{٧}{\sqrt{٣}}}{٧}$

∴ ظاهـ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ هـ = ٣٠° .

إرشادات وإجابات : تمارين (٥ – ٣)

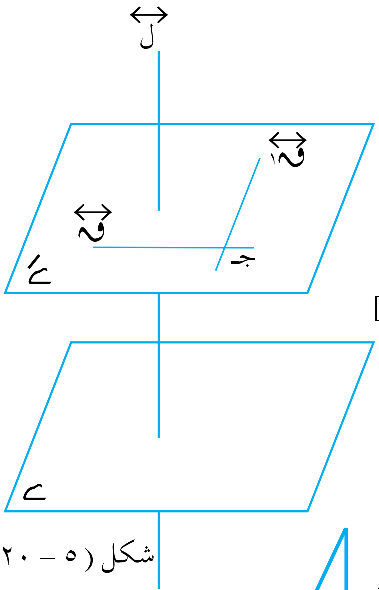
[٢] نأخذ نقطة جـ ∈ $\overleftrightarrow{و}$ ونرسم منها المستقيم و، ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ [شكل (٥ – ٢٠)]

∵ $\overleftrightarrow{و}$ ، $\overleftrightarrow{و،}$ متقاطعان فهما يعينان مستوٍ ليكن حَ

∵ $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ $\overleftrightarrow{و}$ ، $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ $\overleftrightarrow{و،}$ ، ∴ $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ حَ [مبرهنة (٥ – ١)]

∴ ح // حَ [مبرهنة (٥ – ٣)]

∴ أي مستقيم في أحدهما يوازي الآخر ، ∴ $\overleftrightarrow{و}$ // ح .



شكل (٥ – ٢٠)

[٣] نرسم من نقطة ء ∈ ك عموداً $\overline{ءجـ}$ على ح [شكل (٥ – ٢١)]

∵ ء ∈ ك ، $\overline{ءجـ}$ ⊥ ح (عملاً)

∴ $\overline{ءجـ}$ ⊂ ك ،

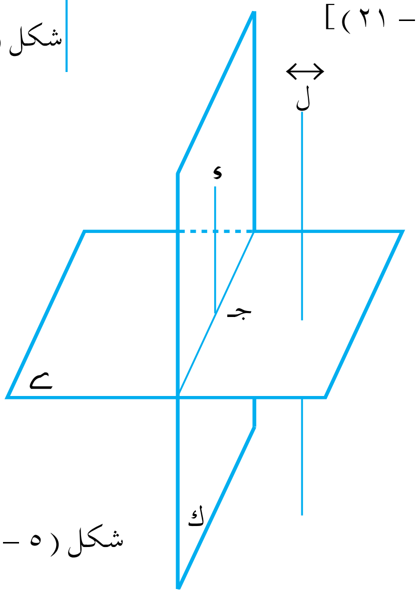
∵ $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ ح (معطى)

∵ $\overline{ءجـ}$ ⊥ ح (عملاً)

∴ العمودان على مستوٍ واحد متوازيان

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overline{ءجـ}$ ، ∵ $\overline{ءجـ}$ ⊂ ك

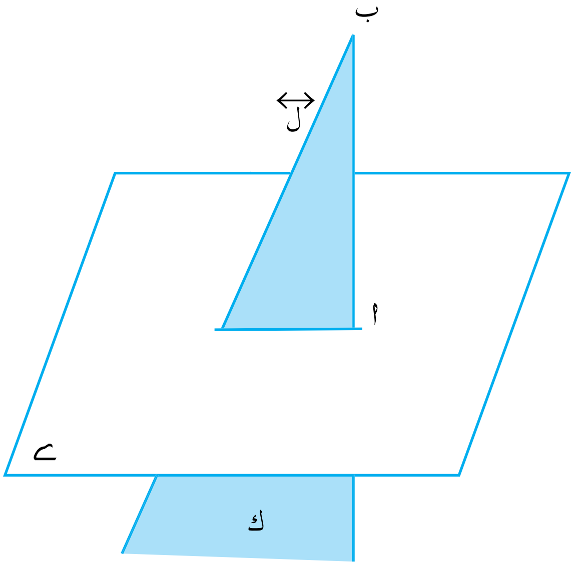
∴ $\overleftrightarrow{ل}$ // ك (وهو المطلوب)



شكل (٥ – ٢١)

[٤] نأخذ نقطة ب ∌ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ثم نرسم منها

$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ⊥ ى [شكل (٥ – ٢٢)]



شكل (٥ – ٢٢)

١ – ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مستقيمان متقاطعان

∴ فهما يعينان مستوى ليكن ك

∵ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ⊥ ى ، ∵ $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ⊂ ك

∴ ك ⊥ ى (مبرهنة (٥ –٨))

٢ – الآن نثبت أن المستوى ك وحيد

لنفرض وجود مستويين ك ، ك، يمران بالمستقيم $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ويتعامدان مع المستوى ى

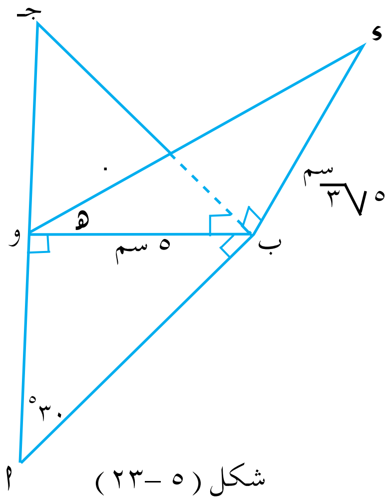
أي أن ك ∩ ك، = $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، ك ⊥ ى ، ك، ⊥ ى

∴ $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ⊥ ى [مبرهنة (٥–٩)] .

وهذا مخالف للفرض لأن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ $\not\perp$ ى .

∴ المستوى ك وحيد .

[٥] في الشكل (٥ – ٢٣) :



شكل (٥ –٢٣)

أ) جا ٣٠° = $\frac{|\text{ب و}|}{|\text{أ ب}|}$ ⟸ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٥}{|\text{أ ب}|}$

∴ |أ ب| = ١٠ سم

ب) ∵ $\overline{\text{ء ب}}$ ⊥ (ب جـ أ) (معطى)

∵ $\overline{\text{ب و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ء و}}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

جـ) ظا هـ = $\frac{|\text{ب ء}|}{|\text{ب و}|}$ = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٥}$ = $\sqrt{٣}$ ⟸ هـ = ٦٠°

∴ هـ (∡ ء و ب) = ٦٠°

[٦] في الشكل (٥ – ٢٤) :

أ) ∵ $\overline{\text{جـ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{ء ب}}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

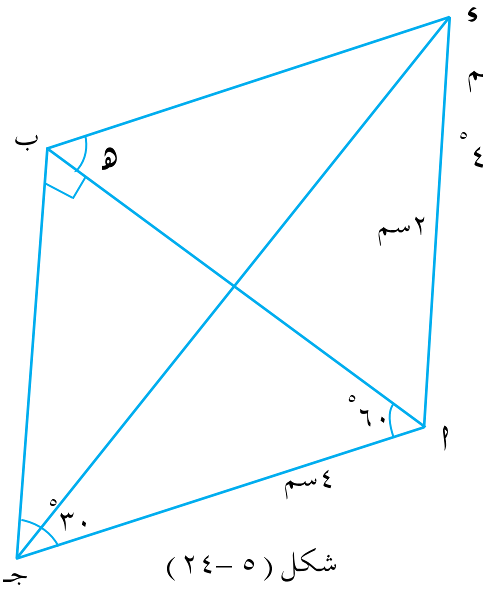
∴ ∡ (أ ب ء) هي الزاوية الخطية للمستويين (أ ب جـ) ، (جـ ب ء)

∴ ظا هـ = $\frac{|\text{ء أ}|}{|\text{أ ب}|}$

نوجد |أ ب| .

∵ جتا ٦٠° $= \frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أ جـ}|}$ ⇐ $\frac{١}{٢} = \frac{|\text{أ ب}|}{٤}$ ⇐ |أ ب| = ٢ سم

∴ ظا هـ $= \frac{|\text{ء أ}|}{|\text{أ ب}|} = \frac{٢}{٢}$ ⇐ ، ∴ ظا هـ = ١ ⇐ هـ = ٤٥°



شكل (٥ – ٢٤)

ب) $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ (معطى)

∵ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{ب ء}}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

∴ $\overline{\text{جـ ب}} \perp$ المستوى (أ ب ء)

∵ $\overline{\text{جـ ب}} \subset$ المستوى (أ ب جـ)

∴ المستوى (أ ب جـ) $\perp$ المستوى (أ ب ء).

٥ – ٤ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان

الهدف

يهدف هذا الاختبار إِلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ البند

يُنفذ هذا البند في حصتين حيث يُعطى هذا الاختبار أو اختبار مشابه بحيث يشمل جميع أهداف الوحدة . و الجدول المرسوم جانباً يوضح السؤال والهدف الذي يحققه :

السؤال	الهدف
[١]	١ ، ٢
[٢]	١ ، ٣ ، ٤
[٣]	٥
[٤]	٣ ، ٥

الاختبار

[١] ضع علامة (√) أمام العبارة الصائبة وعلامة (X) أمام العبارة الخطأ مع ذكر السبب .

أ) من نقطة خارج مستوى س ، لا يمكن رسم سوى مستوٍ واحداً عمودياً على س.

ب) إذا كان $\overleftrightarrow{ل} \perp$ ے ، $\overleftrightarrow{ل} \subset$ ك فإن ك $\perp$ ے .

[٢] أكمل الفراغ في كل مما يأتي :

أ) المستقيمات العمودية على مستوى واحد . . .

ب) إذا تقاطع مستويان فإنهما لا يتقاطعان الا بمستقيم . . . يسمى . . .

[٣] أثبت أن المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين عمودي على الآخر .

[٤] ا ب جـ مثلث قائم في ا ، | ا ب | = | ا جـ | = ٤ سم ، أقيم من ا العمود $\overline{\text{ا ء}}$ على المستوى (ا ب جـ) بحيث كان | ء ا | = ٢ $\sqrt{٧}$ سم ، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$:

١ – أثبت أن : $\overline{\text{جـ ء}}$ $\perp$ المستوى (ء ا د)

٢ – احسب قياس الزاوية الخطية للمستويين (ء ب جـ) ، (ا ب جـ)

قائمة المصطلحات	
الخط العمودي	Normal line
زاوية	Angle
عمودي	Perpendicular
مسقط	Projection
الزاوية بين مستويين	Angle between two planes
مستقيمات متعامدة	Perpendicular lines
مستويات متعامدة	Perpendicular plans

المراجع

١ – ج . ب توماس ، الهندسة التحليلية ، جامعة الفاتح ليبيا ، الطبعة الثانية ١٩٧٩م .

٢ – معوض محمد ، الهندسة الإقليدية ، دار النهضة العربية ، القاهرة ، ١٩٩٣م .

٣ – إقليدس ، هندسة إقليدس ، دار النشر ، عمان ١٩٩١م .

٤ – ن . يفيموف ، الهندسة التحليلية ، دار مير ، موسكو .

٥ – عادل سودان ، الهندسة التحليلية ، مؤسسة الرسالة ، بيروت ١٩٩٦م .

6 - P.k. yoin and Khalil Ahmmad , Analytical Geometry of two Dimentions, Delhi, 1986.

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٦ – ١	نهايات واتصال الدوال المثلثية	٥
٦ – ٢	المشتقات	٢
٦ – ٣	مشتقة تركيب دالتين (قاعدة التسلسل)	٣
٦ – ٤	مشتقة الدوال الضمنية	٣
٦ – ٥	مشتقة الدالة اللوغارتمية والأسية	٣
٦ – ٦	مشتقة الدوال المثلثية	٥
٦ – ٧	مبرهنتا روول والقيمة المتوسطة	٤
٦ – ٨	القيم القصوى	٥
٦ – ٩	دراسة تغيّر الدالة	٦
٦ – ١٠	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	٣٨

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد الانتهاء من دراسته للوحدة أن يكون قادراً على أن:

١– يوجد المشتقة الأولى للدوال الحقيقية باستخدام قواعد الاشتقاق المباشرة .

٢ – يوجد المشتقة الثانية والمشتقات الأعلى لدوال مختلفة .

٣ – يوجد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة التسلسل .

٤– يوجد مشتقة كل من الدالتين اللوغاريتمية والأسيّة .

٥ – يوجد مشتقة الدوال المثلثية باستخدام قواعد الاشتقاق المباشرة .

٦ –يميز بين خصائص الدوال الصريحة وغير الصريحة .

٧ – يوجد مشتقة الدوال غير الصريحة باستخدام قواعد الاشتقاق الضمني .

٨ – يستخدم اختبار المشتقتين الأولى والثانية في دراسة تغيرات الدوال .

٩ – يفسّر مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة هندسياً وجبريًا باستخدام قواعد المشتقات.

١٠– يطبق مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة في تحديد إشارات الدوال .

١١ – يفسّر مفهوم تزايد الدالة وتناقصها جبرياً وهندسياً .

١٢ – يحدّد النقاط الحرجة للدالة التي تجعل قيمة دالة الميل (صفراً) .

١٣ – يحدّد فترات تزايد الدوال وتناقصها جبرياً باستخدام قواعد المشتقات.

١٤ – يوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لدالة باستخدام قواعد المشتقات .

١٥ – يحل مسائل وتطبيقات فيزيائية وهندسية على القيم القصوى باستخدام قواعد المشتقات .

١٦ – يفسّر مفهوم التقعر والا نعطاف (الانقلاب) هندسيًا وجبريًا باستخدام قواعد المشتقات لمنحنى الدالة .

١٧ – يحدد فترات التقعر والانعطاف باستخدام قواعد المشتقات .

١٨ – يطبق استراتيجيات دراسة تغير الدالة .

المقدمة

تتناول هذه الوحدة ، مجموعة خبرات التعلم المباشرة للمشتقات وتطبيقاتها في ثمانية بنود ، تتناول قواعد الاشتقاق والعمليات عليها بحسب نوع الدالة ، والمشتقات ذات الرتب العليا لبعض الدوال وتركيب دالتين، ومشتقة الدالتين الأسية واللوغاريتمية ، والدوال المثلثية والضمنية من جهة، والتطبيقات على المشتقات من جهة أخرى، لإيجاد المعدّلات الزمنية المرتبطة. كما تتناول الوحدة مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة، ودراسة تغيرات الدالة بأوضاعها المختلفة ، موضحة بالأمثلة والأشكال الهندسية والجداول ، وتعطي للطالب قدراً كافياً من التدريبات والتمارين والمسائل ، وتختتم كبقية الوحدات باختبار الوحدة .

لمحة تاريخية

تشير الكثير من الكتابات والدراسات الحديثة لتأريخ الرياضيات ، أن أوربا والغرب عامة لم يشهد أي تطور يُذكر حتى القرن الخامس عشر الميلادي، في حين شهدت الحضارة العربية والإسلامية نهضة في كثير من مجالات العلم والمعرفة حتى ذلك الوقت، حيث استطاع ابو الوفاء (المولود عام ٩٤٠هـ) من اكتشاف بعض العلاقات الهامة بين الجيب والمماس ونظائرها بصورتها الأولية تمهيداً لاكتشاف قواعد التفاضل والتكامل فيما بعد على يد العالم العربي شرف الدين الطوسي (المتوفي عام ٦١٠هـ) المشار إليها في كتابه « قوام الحساب » ، موضحاً فيه من خلال دراسته للمعادلات التي درجتها أصغر من أو تساوي ٣ خصائص الدوال دون تعريفها كمشتق كما عُرف لاحقاً.

كما تمكن من دراسة القيمة العظمى للمقادير الجبرية لتلك المعادلات بأخذ [المشتق الأول لهذه المقادير دون يذكر ذلك وبالتالي برهن على أن جذري المعادلة اللذين حصل عليهما إذا ما عوضت في المقدار الجبري أعطى القيمة العظمى للمعادلة .

ويأتي عصر النهضة التي شهدتها أوروبا للتأكيد على مدى استفادة الغربيين الشئ الكثير من علوم العرب وعلمائهم، ومن ثم تطويره حتى نشأ علم التفاضل والتكامل بصورتهما الأولية كما عرفها باسكال Pascal (١٦٢٣-١٦٦٢م) ، في حين - قام العالم نيوتن Newton (١٦٤٢-١٧٢٧م) باستعمالها وتطبيقها ، بينما وضع العالم ليبنز Leibniz(١٦٤٦-١٧١٦م) رموزاً لهذا العلم مثل : $\frac{ءص}{ءس}$ ، ⌉، ...،وغيرها .

ومع نهاية القرن الثامن عشر تطور موضوع التفاضل والتكامل ، وتطبيقاته في علم الفلك والمساحة وطبق هذا العلم في مسائل متنوعة ومختلفة، حيث قام لجرانج Joseph Lagrange (١٧٣٦-١٨١٣م) بتطبيقه على الديناميكا وحساب متغيرات الدوال ،في حين قدم العالم اولير Euler (١٧٠٧-١٧٨٣م) التفاضل الجزئي وحساب التغير وتطبيقاتهما.

ويأتي لابلاس Laplace (١٧٤٩-١٨٢٧م) فيما بعد لتقديم مفهوم تحويلات لا بلاس (Laplace Transforms) كأساس للنظرية التي قدّمها في حساب التفاضل والتكامل، ذي العمليات(Operational Calculas) بينما وضع العالم فيرستراس Weierstrass(١٨١٥-١٨٩٧م) أساس نظرية الدوال ذات المتغير المركب على متسلسلات القوى ، والكثير من المفاهيم عن التكامل الناقص الزائدي والمعادلات التفاضلية الجبرية .

ويأتي القرن التاسع عشر وما بعده ليشهد تطوراً حقيقياً للتحليل الحقيقي في وضع الأساس المنطقي له من خلال أعمال أرشميدس Archimideis (١٨٢٦-١٨٦٦م) وريمان Riemann، (١٧٩٨-١٨٥٧م) وكوشى Cauchy الأكثرتميزا بوضع نظرية أكثر تجريداً للنهايات عام (١٨٢١م) موضحاً فيها تعاريف مقبولة للتقارب والاستمرار للدوال التفاضلية والتكامل المحدودمع العلم أن أساسيات الأعداد الحقيقية في تلك الفترة لم تنل أي تطور حتى جاء ديدكند Dedkand، (١٨٣١-١٩١٦) وكانتور Weierstrass, Contoor (١٨١٥-١٨٩٧) على إثر تقديم تعاريف الأعداد غير القياسية مع نهاية القرن التاسع عشر والتي دفعت كانتور إلى اكتشاف نظرية الفئات اللانهائية ، والاعداد لما وراء اللا نهائيات (١٨٩٠-١٨٩٧م) . ومن ثم تواصلت الجهود العلمية في هذا المجال من قبل كل من جالو Golois (١٨١١-١٨٣٢م) و جاوس Gauss وريمان. أحد تلامذة جاوس . وريمان أكثر الرياضيين تأثيراً في الرياضيات الحديثة بأعماله المشهوره حول المتسلسلات المثلثية، وأساسيات التحليل، وتقديم تعريف التكامل الريماني .

ويأتي ليبيه (١٩٠٢م) أخيراًمستفيداً من مشاكل الميكانيكا الإحصائية في نظرية القياس لتطوير الرياضيات البحتة ، على نحو أدى إلى الوصول بعلم التكامل إلى عالم الفراغات المجردة أبعد ما توصّل إليه كل من أرشميدس وكوشي وريمان .

خلفية علمية

نضع أمام المدرس بعض التوضيحات والملاحظات التي ينبغي أن يستوعبها تعميقاً لمعارفه، كما عليه أن يراعيها عند تدريس المادة حتى يتمكن من تقديم مادة صحيحة علمية وميسرة فهمًا؛ إلاّ أنه يجب على المدرس أن يدرك إن هذه الخلفية العلمية هي له كمدرس وليس للطلبة ، لأنها أبعد من المادة المقررة لهم .

أولاً : المفاهيم ذات الصلة بمحتوى الوحدة :

١) المفاهيم والمصطلحات :

تعريف النهاية للمشتقة الأولى تُعطى بالعلاقة :

$$\text{دَ}(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}} \text{ ، } \Delta\text{س} \neq ٠$$

وعن المشتقات ذات الرتب العليا للدالة ص = د (س) يعبر عنها بالرموز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للمشتقة الأولى $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ للمشتقة الثانية ، $\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ للمشتقة الثالثة ، . . . ، $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}}$ للمشتقة النونية .

٢) مفاهيم النهايات والاتصالات للدوال المثلثية :

$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ جا س} = ٠ \text{ ، } \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ جتا س} = ١ \text{ ، } \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ ظا س} = ٠$$

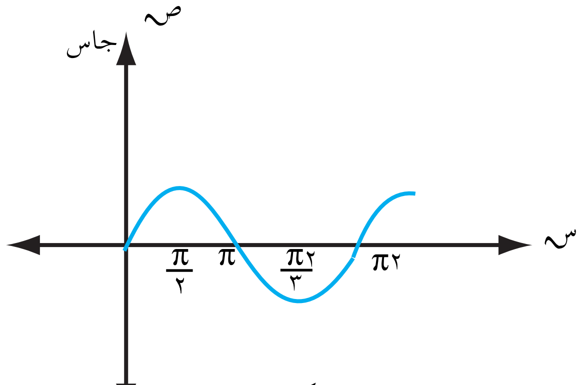
$$\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = \underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$$

ذلك لأن : $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \frac{١}{\text{جتا س}}$ ، س $\neq$ ٠ ، جتا س $\neq$ ٠ ، وأن :

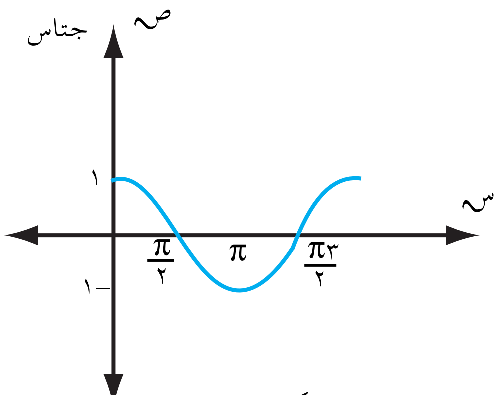
$$\underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ جا}(\text{س} + \Delta\text{س}) = \text{جا س} \text{ ، } \underset{\Delta\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \text{ جتا}(\text{س} + \Delta\text{س}) = \text{جتا س} \text{ ، }$$

$$\underset{(\text{س} + \Delta\text{س}) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{س} + \Delta\text{س})}{(\text{س} + \Delta\text{س})} = ١ \text{ ، س} + \Delta\text{س} \neq ٠ \text{ ، }$$

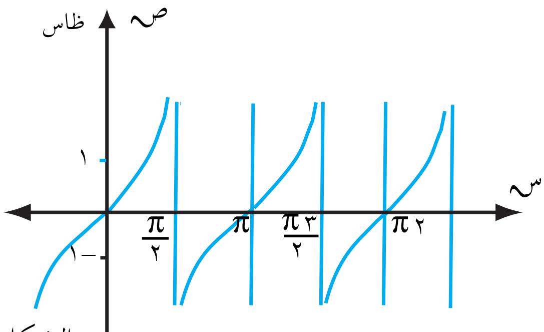
ويمكن توضح ذلك بيانياً على النحو الموضح في الشكل (٦ – ١) لدالة الجيب، والشكل (٦ – ٢) لدالة جيب التمام ، والشكل (٦ –٣) لدالة الظل، والشكل (٦ –٤) لبيان الدالة على الصورة د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ ، س $\neq$ ٠ المتصلة على مجالها .



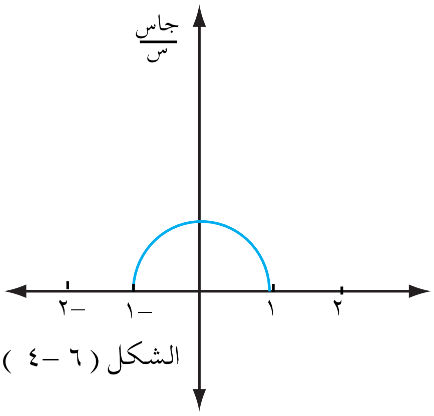
الشكل (٦ – ١)



الشكل (٦ – ٢)



الشكل (٦ – ٣)



الشكل (٦ – ٤)

٣) قاعدة التحويل من الدرجات إلى الراديان (التقدير الدائري)

إذا اعتبرنا الزاوية س° قياساً لزاوية بالدرجات فليس صحيحاً أن :

نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ = ١ ، ولكن يمكن الحصول على نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ بعد تحويل الدرجات الستينية إلى تقدير دائرة مقدرة بالراديان بالصورة :

$$\text{س}^\circ = \left(\frac{\text{س}}{١٨٠} \times \pi\right) \text{ر} \qquad \text{مثلاً } ٣٠^\circ = \frac{\pi}{٦} \text{ ر}$$

ثانياً : بعض قواعد الاشتقاق :

١) يقصد بالمعنى الهندسي لمتوسط التغير (ميل القاطع) ولمعدل التغير (بميل المماس) .

٢) يُعرّف مجال الدالة د(س) بمجموعة قيم س التي تكون عندها دَ(س) موجودة ، بذلك يمكن القول أن دَ(س) معرفة وأن مجال دَ(س) محتواه في مجال الدالة د(س) .

٣) تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق بصفة عامة في كل من الحالات الآتية :

أ) إذا كان مجال الدالة فترة مغلقة ف = [أ ، جـ] فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند كل من طرفيها ، يقابلها على منحنى الدالة طرفا (المنحنى) ، ذلك لأن الدالة غير معرفة في جوار أيسر للعدد أ من جهة ، وغير معرفة في جوار أيمن للعدد جـ من جهة أخرى .

ب) كل نقطة تكون الدالة عندها متصلة في حالة أن تكون المشتّقة اليمنى للدالة لا تساوي المشتّقة اليسرى عند النقاط نفسها .

جـ) جميع النقاط التي تكون عندها الدالة غير متصلة .

٤) دالة القوى د (س) = $\text{س}^{ن}$ ، مشتقّتها تُعطى بالقاعدة دَ(س) = ن $\text{س}^{ن-١}$

٥)الدالة الجذرية د(س) = $\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}$ ، هـ(س) ≥ ٠ ، مشتقتها تعطى بالقاعدة دَ (س)

$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$ هـَ(س) ، هـ (س) > ٠

٦) الدالة الأُسية د (س) = $\text{أ}^{\text{هـ}(\text{س})}$ ∀ س ∈ ح ، أ ≠ ١ مشتقتها تعطى بالقاعدة دَ(س) = $\text{أ}^{\text{هـ}(\text{س})}$ لو أ هـَ(س)

٧) الدالة اللوغاريتمية د (س) = لو س ، س > ٠ مشتقتها تعطى بالقاعدة دَ (س) = $\frac{\text{هـَ}(\text{س})}{\text{هـ}(\text{س})}$

= لو هـ(س) ، هـ(س) >

كما تستخدم خواص اللوغاريتمات وقاعدة اشتقاقها في تبسيط حساب المشتقة الأولى للدوال المعقدة في حالتين. هما :

الأولى : عندما تكون الدالة أسيّة والأس مقدارين متغيرين عندئذ يجب أخذ لوغاريتم الطرفين قبل إجراء عملية الاشتقاق ،

فمثلاً : $ص = (١ + س^٢)^{٥ س} \Leftrightarrow$ لو ص = ٥ س لو (١ + س٢)

الثانية : عند ما تكون الدالة مكونة من حاصل ضرب أو خارج قسمة عدة دوال عندئذ يفضل أخذ لوغاريتم الطرفين قبل إجراء الاشتقاق للدالة :

فمثلاً : $ص = \frac{(٢س+٧)(٦-٤س)(٣س+١)}{(س+٥)(س-١)}$ عند أخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على :

$\Leftarrow$ لو ص = لو (٢ س + ٧) + لو (٦ – ٤ س) + لو (٣ س + ١) – لو (س + ٥) – لو (س – ١).

٨) قاعدة الاشتقاق لتركيب دالتين (قاعدة التسلسل) تعطى بالقاعدة :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} \quad ، \quad ص = د(ع) \quad ، \quad ع = د(س)$$

٩) المشتقة الأولى للدوال المثلثية تعطى بالقواعد التالية :

$$\frac{ء}{ءس}(\text{جاس}) = \text{جتا س} \quad ، \quad \frac{ء}{ءس}(\text{جتا س}) = -\text{ جا س}$$

$$\frac{ء}{ءس}(\text{ظاس}) = \text{قا}^٢\text{س} = \text{ظا}^٢\text{س} + ١ \quad ، \quad \frac{ء}{ءس}(\text{ظتا س}) = -\text{ قتا}^٢\text{س} = -(١ + \text{ظتا}^٢\text{ س})$$

$$\frac{ء}{ءس}(\text{قاس}) = \text{قاس ظاس} \quad ، \quad \frac{ء}{ءس}(\text{قتا س}) = -\text{ قتا س ظتا س}$$

١٠) تُعطى المشتقة الأولى للدوال الضمنية بالقاعدة :

$$\frac{ء}{ءس}(ص^{ن}) = ن\, ص^{ن-١} \times \frac{ءص}{ءس} \quad ،$$ حيث ن عدد نسبي .

أو بالصورة : $(ص^{ن})' = ن\, ص^{ن-١} .\, ص'$

١١) تعطى مشتقة الدوال العكسية المثلثية بالقواعد الآتية :

$$\frac{ء}{ءس}(\text{جا}^{-١}\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{١-س^٢}} \quad ، \quad \frac{ء}{ءس}(\text{جتا}^{-١}\text{س}) = \frac{-١}{\sqrt{١-س^٢}}$$

$$\frac{ء}{ءس}(\text{ظا}^{-١}\text{س}) = \frac{١}{١+س^٢} \quad ، \quad \frac{ء}{ءس}(\text{ظتا}^{-١}\text{س}) = \frac{-١}{١+س^٢}$$

$$\frac{ء}{ءس}(\text{قا}^{-١}\text{س}) = \frac{١}{س\sqrt{س^٢-١}} \quad ، \quad \frac{ء}{ءس}(\text{قتا}^{-١}\text{س}) = \frac{-١}{س\sqrt{س^٢-١}}$$

فإذا كانت ع أية دالة في المتغير س ، وكان $ص = \text{جا}^{-١}ع$ ، فإنه باستخدام تعريف دالة الدالة نحصل على :

$$\frac{ء}{ءس}(\text{جا}^{-١}ع) = \frac{١}{\sqrt{١-ع^٢}} \times \frac{ءع}{ءس} \quad ،$$

وهكذا بالطريقة نفسها يمكن الحصول على مشتقات بقية الدوال.

ثالثاً : ملاحظات حول مفاهيم الاشتقاق وتطبيقاته :

١) بعض التعميمات الهامة للمشتقات ذات الرتب العليا :

أ) إذا كانت $\text{ص} = \text{س}^{\text{ن}}$: فإن $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} = \lfloor \text{ن} = \text{ن}!$

ب) إذا كانت $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{أس}}$ ، أ ثابت ، فإن $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} = \text{أ}^{\text{ن}}\,\text{هـ}^{\text{أس}}$

جـ) إذا كانت $\text{ص} = \frac{1}{\text{أس} + \text{ب}}$ ، أ ، ب ثابتين ، فإن : $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} = \frac{(-1)^{\text{ن}}\,\lfloor \text{ن}\ \text{أ}^{\text{ن}}}{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}}$

د) إذا كانت ص = لو (أس + ب) ، أ ، ب ثابتين فإن :

$$\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} = \frac{(-1)^{\text{ن}-1}\,\lfloor \text{ن}-1\ \text{أ}^{\text{ن}}}{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}}$$

هـ) إذا كانت ص = جا س فإن : $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} = \text{جا}\left(\text{س} + \text{ن}\,\frac{\pi}{2}\right)$

و) إذا كانت ص = جتا س : فإن : $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} = \text{جتا}\left(\text{س} + \text{ن}\,\frac{\pi}{2}\right)$

ز) إذا كانت ص = د(س) ، ع = د (س) فإن :

$$\frac{\text{ء}^{\text{ن}}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}}(\text{ص}\cdot\text{ع}) = \text{ع}\,\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}} + \text{ن}\,\frac{\text{ء}^{\text{ن}-1}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}-1}} \times \frac{\text{ء}\,\text{ع}}{\text{ء}\,\text{س}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2} \times \frac{\text{ء}^{\text{ن}-2}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}-2}} \times \frac{\text{ء}^{2}\text{ع}}{\text{ء}\text{س}^{2}} + \ldots + \text{ص}\,\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ع}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}}$$

، أو بالصورة :

$$\frac{\text{ء}^{\text{ن}}}{\text{ء}\text{س}^{\text{ن}}}(\text{ص}\cdot\text{ع}) = \text{ص}^{(\text{ن})}\,\text{ع} + \text{ق}^{\text{ن}}_{1}\,\text{ص}^{(\text{ن}-1)}\cdot\text{ع}^{(1)} + \text{ق}^{\text{ن}}_{2}\,\text{ص}^{(\text{ن}-2)}\,\text{ع}^{(2)} + \ldots + \text{ص}\,\text{ع}^{(\text{ن})}$$

٢) إذا كانت جـ نقطة حرجة للدالة $\text{د}'(\text{س})$ فليس بالضرورة أن تكون د (جـ) قيمة قصوى محلية

٣) لإيجاد النقاط الحرجة للدالة ، نبحث عن قيم المتغير في مجال الدالة التي تكون عندها المشتقة الأولى = صفراً أوغير موجودة ، وهما شرطان ضروريان ولكنهما غير كافيين ، وذلك يبدو واضحا فيما لو أخذنا دالة على الصورة : $\text{ص} = \text{س}^{3}$ ، ذلك لأن $\text{ص}' = 3\,\text{س}^{2} \geqslant 0$ دائماً .

٤) هناك علاقة تربط بين تزايد الدالة وتناقصها وإشارة المشتقة الأولى والثانية لدالة ما، وهذا يوضح أن المشتقات وسيلة هامة لتحديد فترات تزايد وتناقص الدوال القابلة للاشتقاق، ورسم منحنياتها ، وبالتالي فإن :

أ) جميع المماسات لبيان منحنى الدوال تكون ذات ميل موجب، إذا كانت $\text{د}'(\text{س}) > 0$ ، وعند ئذ يقال أن الدالة متزايدة على مجموعة تعريفها .

ب) جميع المماسات لبيان منحنى الدوال تكون ذات ميل سالب إذا كانت $\text{د}'(\text{س}) < 0$ ، وعندئذ يقال أن الدالة تناقصية على مجموعة تعريفها .

جـ) المماسات التي تكون ذات ميل = صفراً ، إذا كانت $\text{د}'(\text{س})$ = صفراً وعند ئذ يقال أن الدالة ثابتة.

د) إذا كانت الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق على جوار محذوف ف(ب) ، وكان :

١) $\text{د}'(\text{ب}) = 0$ ، $\text{د}''(\text{ب}) < 0$ ، فإنه تكون للدالة قيمة عظمى محلية عند النقطة ب .

٢) $\text{د}'(\text{ب}) = 0$ ، $\text{د}''(\text{ب}) > 0$ ، فإنه تكون للدالة قيمة صغرى محلية عند النقطة ب .

علمًا بأن هذه الشروط كافية لإثبات وجود نقاط تكون للدالة عندها قيم قصوى محلية، ولكنها ليست لازمة لإثبات أن الدوال لها قيمة قصوى محلية .

هـ) إذا كانت الدالة معرفة على الفترة ف ، ∀ ف ⊇ ح فإنه :

١– عندما دً(س) > ٠ ، ∀ س ∈ ف ، فإن منحنى الدالة مقعّر للأعلى (محدّب للأسفل) .

٢– عندما دً(س) < ٠ ، ∀ س ∈ ف ، فإن منحنى الدالة مقعر للأسفل (محدّب للأعلى) .

٥) المعنى الهندسي لنقطة انعطاف (انقلاب) بيان الدالة المتصلة يتمثل بحالة التغير لبيان منحنى الدالة عند هذه النقطة . فإذا كانت النقطة (ب ، د(ب)) هي نقطة انعطاف، عندئذ توجد فترة ولتكن] ا ، جـ [بحيث تكون ب ∈] ا ، جـ [، ليتحقق بذلك إحدى الخاصتين :

الأولى : دَ(س) تزايدية على]ا ، ب[وتناقصية على] ب ، جـ[.

أو الثانية : دَ(س) تناقصية على]ا ، ب[وتزايدية على] ب ، جـ[.

- فإذا كانت الخاصية الأولى صحيحة ، و دً(س) موجودة، فإن دَ(س) دالة متصلة عند ب ، دَ(س) تزايدية على] ا ، ب] وتناقصية على [ب ، جـ[لتكون بذلك دَ(ب) قيمة عظمى محلية للدالة دَ(س) وبالتالي تكون دً(س) = ٠ .
- أما في حالة أن تكون الخاصية الثانية صحيحة عندئذ فإن دَ(ب) قيمة صغرى محلية للدالة دَ(س).

في حين إذا كانت ب ∈ د(س) ، دَ(ب) = ٠ فإن :

أ) عندما دً(ب) > ٠ فإن د(ب) قيمة صغرى محلية للدالة .

ب) عندما دً(ب) < ٠ فإن د(ب) قيمة عظمى محلية للدالة .

وبالتالي لا تستخدم المشتقة الثانية للاختبار فيما إذا كان للدالة قيم قصوى محلية في الحالة التي تكون فيها دَ(ب) = ٠ ، دً(ب) = ٠ أو دً(ب) غير موجودة ، .

٦) إذا كانت الدالة متصلة على مجالها (أياً كان هذا المجال) وكان لها قيمة قصوى محلية وحيدة ، فإن هذه القيمة أيضا تمثّل قيماً قصوى مطلقة .

رابعاً : توجيهات طرائقية :

١) من حيث البنية المفاهيمية للمعرفة :

أ) التمهيد والمراجعة للمشتقات وقواعدها، وتطبيق بعض تلك القواعد على المشتقات ذات الرتب العليا .

ب) مراجعة خواص اللوغاريتمات نظراً لأهميتها في تبسيط عمليات الاشتقاق للدوال ذات الأس المتغير والمقادير الجبرية للدوال الكسرية قبل إجراء عملية الاشتقاق .

جـ) تناول مفهوم النهايات والاتصال للدوال المثلثية وتعريفها قبل إجراء عملية الاشتقاق عليها .

ء) تتطلب دراسة مشتقة الدوال الضمنية (غير الصريحة) التمهيد لها بدوال صريحة على الصورة $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}$ (د(س)) لإيضاح كيفية تطبيق قواعد الاشتقاق لدوال صريحة أثناء التعامل مع دوال غير صريحة نظراً لصعوبة التعبير عن المتغير ص بدلالة س مباشرة .

هـ) تقديم مفهوم المعدل الزمني المرتبط في ضوء ما تم دراسته عن المعدلات الزمنية غير المرتبطة لقوانين الحركة ، والسرعة ، والعجلة والمسافة كمتجهات جبرية .

و) التأكيد على أهمية تطبيق استراتيجية حل المسألة على مسائل المعدلات الزمنية المرتبطة .

ز) التمهيد لمبرهنتي رول والقيمة المتوسطة بمراجعة للفترات بأنواعها المختلفة (المفتوحة، المغلقة ونصف المفتوحة) .

ح) توضيح العلاقة بين القيم القصوى المحلية (النسبية) والمطلقة باستخدام الأمثلة والأشكال البيانية .

ط) إيضاح العلاقة بين مفهومي التقعر ونقاط الانعطاف بالقيم القصوى المحلية والمطلقة ، موضّحة بالأمثلة والأشكال البيانية والجداول والرموز المتعلِّقة بها .

ي) التنبيه للأخطاء المتوقّعة من قبل الطلاب والتي نشير إِلى بعضها ، وتستدعي من المدرس التنبيه لها أثناء عملية التدريس منها :

- $\underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \ \frac{\text{د(س)} - \text{د(س}_1\text{)}}{\text{س} - \text{س}_1} \neq \underset{\text{س} \leftarrow \text{س}_1}{\text{نهـا}} \ \text{د(س)}$ (خاصة بمرهنة القيمة المتوسطة) .
- $\text{د}'(\text{ا}) \neq [\text{ د (ا) }]'$ حيث $\text{د}'(\text{ا})$ تعني قيمة المشتقة عند العدد ا ، بينما $[\text{ د (ا) }]'$ تعني مشتقة العدد الثابت د(ا) بالنسبة لـ س .
- $[\text{د(هـ(س))}]'$ تعني مشتقة تركيب الدالتين د ، هـ أما $\text{د}'(\text{ هـ(س) })$ فهي صورة هـ(س) في $\text{د}'(\text{ س })$.
- أخطاء التعامل مع الرموز من حيث التسمية والاستخدام بمقارنتها مع الصيغ والمعاني التي تم استخدامها سابقاً ، أو التعامل معها بمعانٍ ودلالات أخرى في المواد الأخرى.

٢) من حيث الأهداف :

إنّ تفهُّم الطلاب لمبادئ المشتقات من القواعد والمبرهنات يعتمد على الفهم المسبق لمعاني ودلالات المفاهيم والحقائق المتعلقة بها ، وبالتالي ننصح المعلم عند تدريس المشتقات مراعاة ما يلي :

أ) تقديم المفاهيم البحتة للمشتقات كرمز، وتسميتها بشكل مستقل عن بعضها بحسب دلالتها الخاصة بها ، ليأتي تناول خواصها نتيجة مباشرة للطريقة التي توضح استخدامها وتطبيقها في حل المسائل بحسب قواعد الاشتقاق ونوع العمليات عليها .

ب) تناول جميع المستويات المعرفية العليا لمفاهيم المشتقات ومبادئها (القواعد والمبرهنات) من جهة، وجوانب الاهتمام بالأهداف التربوية والوجدانية اللازمة لتحسين اتجاهات الطلاب نحو الرياضيات من جهة أخرى باستخدام نماذج متنوعة من الأسئلة حول المعرفة المطلوب قياسها لدى الطلاب .

جـ) من المعروف أن الرياضيات غايتها العليا هي تنمية تفكير الإنسان وتربية مسؤلياته نحو نشاطاته والوعي بها، مما يؤكد على أهمية اكتساب الطلاب لمهارات التفكير الرياضية ، بحيث لا تصبح خالية من المعاني ما لم تكن مصحوبة بعمليات تطبيق واضحة المعالم، وفي مواقف مختلفة .

وفيما يلى نضع أمام المدرس تصوراً حول بعض المهارات الرياضية المتوقع إكسابها للطلاب، والتأكيد عليها دائماً أثناء عملية التدريس والمناقشات والتقويم للطلاب، وهي كما يلي :

- **المهارات البصرية :**

تتحدَّد المهارات البصرية بالمعاينة المباشرة للرموز والمسميات ومعاني الصيغ للتعريفات والقواعد والمبرهنات ، وملاحظة الأشكال والجداول والإرشادات بحسب مكوناتها، وطبيعة العلاقة بين أجزائها ؛ مع العلم أن الملاحظة ليست غاية بحد ذاتها ، بل مهارة لتمكين الطلاب من القيام بعمليات الإدراك والتحليل واكتشاف العلاقات واستنتاج المعلومات، و استكمال شروط بناء الموقف الرياضي ، و حل المسألة .

- **المهارات الوصفية :**

تتحدَّد المهارات الوصفية باللفظ والكتابة للرموز والمصطلحات والمسميات والتعريف للدوال وصياغة التعريفات واستخدامها في عملية الوصف لقواعد الاشتقاق للدوال من ضمنها الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والضمنية ، وبرهنة المبرهنات والتعبير عن العناصر والشروط اللازمة للحل وتفسير الأشكال المعطاة ، وتطبيق خطوات استراتيجية الحل لكل مسألة من مسائل الوحدة .

- **المهارات الإنشائية :**

تتحدَّد المهارات الإنشائية بقدرة الطلاب على رسم الأشكال والمنحنيات والتمثيل للدوال، وتوضيح المعنى الهندسي لمفهوم النهاية، والاتصال، والاشتقاق، ومبرهنتا رول والقيمة المتوسطة، ربطاً بدلالاتها الجبرية، ودراسة تغيرات الدوال ، وإيضاح القيم القصوى المطلقة والمحلية ، وتحديد فترات التقعر ونقاط الانعطاف، دون إغفال أهمية إنشاء الجداول اللازمة لتلخيص البيانات .

- **المهارات المنطقية :**

تتحدَّد المهارات المنطقية ذات العلاقة بالتغيرات الإدراكية والقياسية للموقف الرياضي لصيغ لفظية أو مصورة من خلال قدرة الطلاب على التمييز والتصنيف والتحديد والتجريد لبيانات معطاة ضمن مسائل التطبيقات الفيزيائية والهندسية للمشتقات وإدراك العلاقة بين البيانات كماً ونوعاً، وتقدير الحل وإجراء التحويلات المختلفة إن وجدت، وتمييز الحالات وتصنيفها، والقدرة على الاختيار من بين البدائل المختلفة عند الحل .

- **المهارات التطبيقية :**

تتحدَّد المهارات التطبيقية بقدرة الطلاب على استخدام التعريفات والقواعد والمبرهنات في اشتقاق الدوال وحل المسائل والوصول إلى تعميمات من خلال حل مسائل المشتقات وتطبيقاتها ، والتحقق من شروط مبرهنة رول والقيمة المتوسطة ، وكل ما يتعلق بدراسة تغيرات الدوال باستخدام اختبار المشتقة الأولى والثانية .

٦ – ١ نهايات واتصال الدوال المثلثية

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

– يذكر العلاقات الأساسية للدوال المثلثية .
– يذكر قواعد التحويل من مجموع أو فرق جيبي أو جيبي تمام زاويتين إلى حاصل ضرب والعكس .
– يطبّق مبرهنة (٦ – ١) ونتائجها على الدوال المثلثية .
– يوجد نهاية دوال مثلثية .
– يميّز الدوال المثلثية المتصلة عن غير المتصلة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة العلاقة الأساسية للدوال المثلثية والمتطابقات الشهيرة

الحصة الثانية : المبرهنة $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$

الحصة الثالثة : اتصال الدوال المثلثية .

الحصتان الرابعة والخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال متابعة أداء الطلبة أثناء الحصص وحل الواجبات الصفية والمنزلية . وفي نهاية الحصة الخامسة يُعطى التمرين التالي أو تمرين شبيه به كخطوة تقويم :

أوجد ١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١ - \text{جتاس}}$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٦}}{\text{نهـا}} \dfrac{١ - ٢\ \text{جا س}}{\text{جا}\left(\text{س} - \frac{\pi}{٦}\right)}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ١)

[١] ١) ٢

٢) $\dfrac{٣}{٥}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{س}^{٢} \times \dfrac{١}{\text{جا ٥ س}^{٢}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٥\ \text{س}^{٢}}{٥\ \text{جا ٥ س}^{٢}} = \dfrac{١}{٥}$

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{٥ س}}{\text{س ظا ٣ س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{٥ س}}{(\text{٥ س})^{٢}} \times \dfrac{\text{٣ س}}{\text{ظا ٣ س}} \times \dfrac{١}{\text{س}} \times \dfrac{(\text{٥ س})^{٢}}{\text{٣ س}} = \dfrac{٢٥}{٣}$

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{(١ - \text{جتا س})(١ + \text{جتا س} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{جا س}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\ \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}(١ + \text{جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س})}{\text{جا س}} = ٠$

٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢}\left(١ + ٣\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}\right)}{٢\ \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}} = ٨$

٧) $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{2\,\text{جا}^2\text{س}}}{\text{س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{2}\,|\text{جا س}|}{\text{س}}$

$\therefore \underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{2}\,\text{جا س}}{\text{س}} = \sqrt{2}$ ، $\underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نهـا}} \dfrac{-\sqrt{2}\,\text{جا س}}{\text{س}} = -\sqrt{2}$

$\because \underset{\text{س}\to 0^+}{\text{نهـا}}\, \text{د(س)} \neq \underset{\text{س}\to 0^-}{\text{نهـا}}\, \text{د(س)}$ ، $\therefore$ النهاية غير موجودة .

٨) ∞

٩) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,\pi(1-\text{س})}{(\text{س}-1)(\text{س}+1)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}\,\pi(1-\text{س})}{-\pi(1-\text{س})} \times \dfrac{\pi}{\text{س}+1} = \dfrac{-\pi}{2}$

١٠) $\underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}-1}{\text{جا}\,\pi(\text{س}^2-1)} = \underset{\text{س}\to 1}{\text{نهـا}} \dfrac{\pi(\text{س}^2-1)}{\text{جا}\,\pi(\text{س}^2-1)} \times \dfrac{1}{\pi(\text{س}+1)} = \dfrac{1}{2\pi}$

١١) $\dfrac{-1}{2}$

١٢) $\underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} (\text{س}-3)(\text{س}+1)\ \text{ظتا}\ \dfrac{\pi}{2}(\text{س}-3) = \underset{\text{س}\to 3}{\text{نهـا}} \dfrac{-\frac{\pi}{2}(\text{س}-3)(\text{س}+1)}{\frac{\pi}{2}\ \text{ظا}\ \frac{\pi}{2}(\text{س}-3)} = \dfrac{-8}{\pi}$

١٣) $\dfrac{-\pi}{4}$　　١٤) -1　　١٥) 3π

١٦) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{3}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س}-\frac{\pi}{3})}{2(\text{جتا}\frac{\pi}{3} - \text{جتا س})} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

١٧) $\underset{\text{س}\to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جتا}^2\frac{\text{س}}{2} - \text{جا س}}{\text{س}-\frac{\pi}{2}} = \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}\left(\text{جتا}\frac{\text{س}}{2} - \text{جا}\frac{\text{س}}{2}\right)}{\text{س}-\frac{\pi}{2}}$

$= \underset{\text{س}\to \frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جتا}\frac{\text{س}}{2}\left[\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{\text{س}}{2}) - \text{جا}\frac{\text{س}}{2}\right]}{\text{س}-\frac{\pi}{2}} = -1$

١٨) 1　　١٩) $-\dfrac{\pi}{2}$

[٢] أ) غير متصلة عند س = ٠ ، ويمكن اعادة تعريفها كالتالي: $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}\,3\text{س}}{\text{ظا}\,2\text{س}} \text{، عند س} \neq 0 \\ \dfrac{3}{2} \text{، عند س} = 0 \end{cases}$

ب) غير متصلة عند س = ٠ ، ويعاد تعريفها كالتالي : $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\text{جا}3\text{س} - \text{ظاس}} \text{، عند س} \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} \text{، عند س} = 0 \end{cases}$

جـ) غير متصلة ولايمكن اعادة التعريف .

[٣] $\underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{1-\text{جتا}\,2\text{س}}{1-\text{جتا س}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{2\,\text{جا}^2\text{س}}{2\,\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}} = \underset{\text{س}\to 0}{\text{نهـا}} \dfrac{\frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{س}^2} \times \text{س}^2}{\frac{\text{جا}^2\frac{\text{س}}{2}}{(\frac{\text{س}}{2})^2} \times (\frac{\text{س}}{2})^2} = 4$

$\text{د}(0) = \text{أ} + 1$ ، $\therefore \text{أ} = 3$

٦ – ٢ المشتقات

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الأهداف

– يوجد مشتقات الدوال الجبرية .
– يتعرَّف قاعدة القوى عند ما ($د \in ص$) وعندما $د \in ن^*$: حيث $ن^*$ عدد نسبي.
– يطبّق قواعد الاشتقاق في إيجاد المشتقة الأولى لعدد من الدوال الحقيقية .
– يتعرَّف صيغ ورموز المشتقات من الرتب العليا .
– يوجد مشتقات من الرتب العليا لبعض الدوال.

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا البند في حصتين، على النحو التالي :

الحصة الأولى : مراجعة قواعد المشتقات .

الحصة الثانية : المشتقات ذات الرتب العليا .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا ، وفي نهاية الحصة الثانية يُعطى تمرين كالتالي :

أوجد مشتقة الدالة د (س) $= \left(\frac{أ}{ب + جـ س}\right)^{ن}$ ، $ب + جـ س \neq ٠$.

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٢)

١) $د'(س) = (ب)' = ٠$

٢) $د'(س) = (\sqrt{٥})' = ٠$

٣) $د'(س) = (س + ٦)' = ١$

٤) $د'(س) = (س^{٢+ل})' = (٢ + ل)\, س^{٢+ل-١} = (٢ + ل)\, س^{ل+١}$

٥) $د'(س) = (س^{٤})' + ٢(س^{٢})' - (٤)' = ٤س^{٣} + ٤س - ٠ = ٤س^{٣} + ٤س = ٤س(س^{٢}+١)$

٦) $د'(س) = (س^{-١})' + (س^{٢})' + (٨)' = -س^{-٢} + ٢س + ٠ = -س^{-٢} + ٢س$

٧) يلاحظ أن الدالة كثيرة حدود ، ومشتقتها تعطى بالصورة :

$$د'(س) = -٢س^{-٣} - ٣(-٣س^{-٤}) - ٤(-٤س^{-٥})$$
$$= \frac{-٢}{س^{٣}} + \frac{٩}{س^{٤}} + \frac{١٦}{س^{٥}} = \frac{-٢س^{٢} + ٩س + ١٦}{س^{٥}}$$

٨) لاحظ أن لدينا حاصل ضرب دالتين، عندئذ تعطى مشتقتها بالصورة :

$$د'(س) = (س^٢ + ٢س)(٣) + (٣س + ١)(٢س + ٢)$$
$$= ٣س^٢ + ٦س + ٦س^٢ + ٦س + ٢س + ٢$$
$$= ٩س^٢ + ١٤س + ٢$$

٩) نضع الدالة بالصورة $د(س) = [(٢س + ٣)(س^٢ - ١)](٣س^٣ + ٢)$

$$\therefore د'(س) = [(٢س+٣)(س^٢-١)](٩س^٢) + [٢(س^٢-١) + ٢س(٢س+٣)](٣س^٣+٢)$$
$$= (٢س^٣ - ٢س + ٣س^٢ - ٣)(٩س^٢) + (٢س^٢ - ٢ + ٤س^٢ + ٦س)(٣س^٣ + ٢)$$
$$= ٣٦س^٥ + ٤٥س^٤ - ٢٤س^٣ - ١٥س^٢ + ١٢س - ٤$$

١٠) لاحظ أن لدينا دالة كسرية ، مشتقتها تعطى بالصورة :

$$د'(س) = \left(\frac{س^٢ - ٥}{٢س^٢ + ١}\right)' = \frac{٢س(٢س^٢ + ١) - ٤س(س^٢ - ٥)}{(٢س^٢ + ١)^٢}$$
$$= \frac{٤س^٣ + ٢س - ٤س^٣ + ٢٠س}{(٢س^٢ + ١)^٢} = \frac{٢٢س}{(٢س^٢ + ١)^٢}$$

١١) $د'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}} - \frac{١}{٢}(س)^{-\frac{١}{٢}-١} = \frac{١}{٢\sqrt{س}} - \frac{١}{٢}س^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{\sqrt{س}} - \frac{١}{\sqrt{س^٣}}\right)$

٦ – ٣ مشتقة تركيب دالتين (قاعدة التسلسل)

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

– يعرِّف قاعدة التسلسل.

– يطبِّق قاعدة التسلسل في إيجاد مشتقة دالة مركبة.

– يستخدم قاعدة التسلسل في تعميم قاعدة القوى بالصورة : $\frac{ء}{ءس}[د(س)]^{ن} = ن[د(س)]^{ن-١} . د'(س)$

– يوجدمشتقات دالة القوى .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص، على النحو التالي :

الحصة الأولى : مبرهنة قابلية الاشتقاق .

الحصة الثانية : قاعدة تسلسل الاشتقاق والنتيجة

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى التمرين الآتي كخطوة تقويم :

أوجد مشتقة الدالة $ص = \left(\frac{ع}{ع + ١}\right)^٢$ ، $ع = \sqrt{س}$ ، عند $س = ٢$

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٣)

[١] حل التمارين من (أ – ء)

أ) $\because (ق \circ د)'(س) = ق'(د(س)) \cdot د'(س)$ ، $ق'(س) = ٢\,س - ١$ ، $د'(س) = ١$

$\therefore ق'(د(س)) = ٢\,(د(س)) - ١ = ٢\,(س+١) - ١ = ٢\,س + ١$

أي أن $(ق \circ د)'(س) = ٢\,س + ١ \Leftarrow (ق \circ د)'(-١) = -١$

ب) $ق'(س) = ٢\,س$ ، $د'(س) = \frac{-١}{س^٢}$ ، $(ق \circ د)'(س) = \left(\frac{٢}{س}\right) \times \frac{-١}{س^٢} = \frac{-٢}{س^٣}$

$\therefore (ق \circ د)'(١) = -٢$

جـ) $(ق \circ د)'(س) = ق'(د(س)) \cdot د'(س)$ ؛ $ق'(س) = ٢\,س$ ، $د'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$\therefore ق'(د(س)) = ٢\,(\sqrt{س} + ١)$

$\Leftarrow (ق \circ د)'(س) = ٢\,(\sqrt{س} + ١)\left(\frac{١}{٢\sqrt{س}}\right) = \frac{\sqrt{س}+١}{\sqrt{س}}$

د) $\because ق'(س) = ١$ ، $د'(س) = ٦\,(س - ١)^٥$

$\therefore (ق \circ د)'(س) = ١ \times ٦\,(س - ١)^٥ = ٦(س - ١)^٥$

[٢] حل التمارين من (أ – جـ)

أ) بتطبيق قاعدة التسلسل نحصل على :

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \cdot \frac{دع}{دس} = (٦ع+٦)\,(٢س+٢) = [٦\,(س^٢+٢\,س)+٦]\,(٢\,س+٢)$

$= (٦\,س^٢+١٢\,س+٦)(٢س+٢) = ١٢(س+١)^٣$

ب) نفرض أن $ع = س^٢ + ٣\,س$ فتكون $ص = ع^٣$

$\because \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \cdot \frac{دع}{دس}$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٣\,ع^٢ \cdot (٢س+٣) = ٣\,(س^٢ + ٣\,س)^٢ \cdot (٢\,س + ٣)$

جـ) نفرض أن $ع = س^٥ + ١٠$ ، $ص = ع^{١٢}$

$\because \frac{دص}{دع} = ١٢ع^{١١}$ ، $\frac{دع}{دس} = ٥\,س^٤$

$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \cdot \frac{دع}{دس} = ١٢(ع^{١١}) \times ٥\,س^٤ = ٦٠\,ع^{١١}\,س^٤ = ٦٠\,س^٤\,(س^٥+١٠)^{١١}$

[٣] حل التمارين من (أ – ب) :

أ) لإيجاد $ر'(٣\,س)$ نوجد أولاً : $ر'(س) = ٤\,س - ٣$ وبالتالي فإن :

$ر'(٣\,س) = ٤\,(٣\,س) - ٣ = ١٢\,س - ٣ = ٣\,(٤\,س - ١)$

ب) $\frac{د}{دس}\left(ر(ع)\right) = ١٢$

[٤] حل تمارين (أ – و) فيكون :

أ) $\text{ص} = (\text{س}^2 + \text{س} - 2)^{\frac{1}{2}}$ ، وبفرض أن $\text{ع} = \text{س}^2 + \text{س} - 2$

$\Leftarrow \text{ص} = \text{ع}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{ع}}$

$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{1}{2}\text{ع}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 2\text{س} + 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{ع}}}(2\text{س}+1) = \frac{(2\text{س}+1)}{2\sqrt{\text{س}^2+\text{س}-2}}$

ب) $\text{ص} = (\text{س}^2 + \text{س} - 2)^{-6}$ ، وبفرض أن $\text{ع} = \text{س}^2 + \text{س} - 2 \Leftarrow \text{ص} = \text{ع}^{-6}$

$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = -6\text{ع}^{-7}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = 2\text{س} + 1$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -6\text{ع}^{-7} \times (2\text{س}+1) = \frac{-6(2\text{س}+1)}{(\text{س}^2+\text{س}-2)^7}$

جـ) نضع $\text{ع} = \text{س}^2 + 2\text{س} + 6 \Leftarrow \text{ص} = \text{ع}^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{3}{2}\text{ع}^{\frac{1}{2}}(2\text{س}+2) = \frac{3}{2}\sqrt{\text{س}^2+2\text{س}+6}\,(2\text{س}+2)$

$= 3\sqrt{\text{س}^2+2\text{س}+6}\,(\text{س}+1) = 3(\text{س}+1)\sqrt{\text{س}^2+2\text{س}+6}$

د) $\text{د}'(\text{س}) = \frac{3}{4}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{(\text{س}+1)-\text{س}}{(\text{س}+1)^2}\right) = \frac{3}{4(\text{س}+1)^2} \times \left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right)^{-\frac{1}{4}}$

هـ) $\because \text{د}(\text{س}) = (\text{س}^2 - 2\text{س})^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \frac{-2}{3}(\text{س}^2-2\text{س})^{-\frac{2}{3}-1}(2\text{س}-2) = \frac{-4(\text{س}-1)}{3\sqrt[3]{(\text{س}^2-2\text{س})^5}}$

و) نفرض أن $\text{ع} = \frac{1-\text{س}}{1+\text{س}} \Leftarrow \text{ص} = \sqrt{\text{ع}}$

$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{ع}}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{(\text{س}+1)(-1)-(1-\text{س})}{(\text{س}+1)^2} = \frac{-2}{(\text{س}+1)^2}$

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} =$.

$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\text{س}}{1+\text{س}}}\,(\text{س}+1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-\text{س})(\text{س}+1)^3}}$

٦ : ٤ مشتقة الدالة الضمنية

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

- يوضِّح خصائص الدالة الضمنية .
- يطبِّق قاعدة الاشتقاق الضمني عندما يكون الأس عدداً صحيحاً .
- يطبق قاعدة الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقة الدوال عند نقطة معينة .
- يبرهن قاعدة الاشتقاق الضمني لدالة القوى عندما يكون الأس عدداً نسبياً .
- يحل مسائل باستخدام قاعدة الاشتقاق الضمني .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص كما يلي :

الحصة الأولى : مشتقة الدالة الضمنية. الحصة الثانية : أمثلة . الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدالة $\text{لو}^{٢}\text{ص} - \text{جتا}\sqrt{\text{س}} = ٢$

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٤)

[١] حل التمارين من (أ – هـ) :

أ) $٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{س}^{٢}\,\text{ص}' = ٤ \Leftarrow \text{ص}' = \frac{٤ - ٢\,\text{س}\,\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$

ب) $\frac{-١}{\text{س}^{٢}} + \frac{(-١)}{\text{ص}^{٢}}\,\text{ص}' = ٠ \Leftarrow \text{ص}' = \frac{١}{\text{س}^{٢}} \times \frac{\text{ص}^{٢}}{(-١)} = \frac{-\text{ص}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$

جـ) $٢\,\text{س} + \frac{(\text{س}\,\text{ص}' + \text{ص})}{٢\sqrt{\text{س}\,\text{ص}}} = ٠ \Leftarrow (\text{س}\,\text{ص}' + \text{ص}) = ٢\sqrt{\text{س}\,\text{ص}}\,(-٢\,\text{س})$

$\therefore \quad \text{ص}' = \frac{-٤\,\text{س}\sqrt{\text{س}\,\text{ص}} - \text{ص}}{\text{س}}$

د) $٢\,\text{س} + ٢\,\text{ص}\,\text{ص}' = \text{س}\,\text{ص}' + \text{ص} \Leftarrow ٢\,\text{ص}\,\text{ص}' - \text{س}\,\text{ص}' = \text{ص} - ٢\,\text{س}$

$\Leftarrow \text{ص}'(٢\,\text{ص} - \text{س}) = \text{ص} - ٢\,\text{س} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{\text{ص} - ٢\,\text{س}}{٢\,\text{ص} - \text{س}}$

هـ) $\text{ص}' = ٦\,\text{س}^{٢} + \frac{٤\,\text{ص}'}{٢\sqrt{\text{ص}}} \Leftarrow \text{ص}' - \frac{٢\,\text{ص}'}{\sqrt{\text{ص}}} = ٦\,\text{س}^{٢}$

$\Leftarrow \text{ص}'(\sqrt{\text{ص}} - ٢) = ٦\,\text{س}^{٢}\sqrt{\text{ص}} \Leftarrow \text{ص}' = \frac{٦\,\text{س}^{٢}\sqrt{\text{ص}}}{\sqrt{\text{ص}} - ٢}$

[٢] حل التمرينان (أ ، ب) :

أ) $٢\text{س} + \dfrac{٢\text{س}\,\text{ص}' + ٢\text{ص}}{\pi} = ٠ \Leftarrow ٢\text{س}\,\text{ص}' = -٢(\pi\text{س} + \text{ص})$

$\Leftarrow \text{ص}' = \dfrac{-٢(\pi\text{س} + \text{ص})}{٢\text{س}} = \dfrac{-(\pi\text{س} + \text{ص})}{\text{س}}$

$\therefore \text{ص}'\Big|_{(١ ، \pi)} = \dfrac{-(\pi + \pi)}{١} = -٢\pi$.

ب) $٦\text{س}^٢ + ٤\text{س}\,\text{ص}' + ٤\text{ص} + ٢\text{س} = ٠ \Leftarrow ٤\text{س}\,\text{ص}' = -(٦\text{س}^٢ + ٤\text{ص} + ٢\text{س})$

$\Leftarrow \text{ص}' = \dfrac{-(٦\text{س}^٢ + ٤\text{ص} + ٢\text{س})}{٤\text{س}}$ ، $\therefore \text{ص}'\Big|_{(١ ، ١)} = \dfrac{-(٦\times(١)^٢ + ٤\times١ + ٢\times١)}{٤\times١} = \dfrac{-(١٢)}{٤} = -٣$

[٣] $\text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{(٣ ، -١)}$ ، $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{١-\text{س}}{\text{ص}+٣}$ ، $\text{ظا هـ} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\Big|_{(٣ ، -١)} = -١$

$\therefore \text{هـ} = \dfrac{٣\pi}{٤}$

٦ : ٥ مشتقة الدالة اللوغاريتمية والأسية

عدد الحصص : (٣) حصص.

الأهداف

- يتعرّف العلاقة بين الدالة الأسية والدالة اللوغاريتمية .
- يتعرّف قاعدة إيجاد المشتقة للدالة الأسية التي أساسها العدد الطبيعي هـ .
- يذكر خواص الدالة اللوغاريتمية.
- يستخدم خواص اللوغاريتمات في تبسيط الدوال قبل إجراء عملية الاشتقاق .
- يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية .
- يوجد مشتقة الدالة الأسية .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو الآتي :

الحصة الأولى : مشتقة الدالة اللوغاريتمية .

الحصة الثانية : مشتقة الدالة الأسية .

الحصة الثالثة : تمارين صفية.

التقويم

يتم التقويم بنائياً في الحصص الثلاث وفي نهاية الحصة الثالثة تنفذ خطوة تقويم يُعطى فيها تمرين كالتالي :

أوجد مشتقة كل من :

أ) $\text{د}(\text{س}) = \text{هـ}^{٢\,\text{د}(\text{س})}$ ب) $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{لو}(٢\text{س}^٢ + ٣)}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٥)

[١] ١) $د'(س) = (\text{لو } س)' = \frac{١}{س}$

٢) $ص' = (\text{لو}(س^{٢} + ١))' = \frac{٢\,س}{س^{٢} + ١}$

٣) $د'(س) = (\text{لو}(س^{٢} - ٢\,س))' = \frac{٢\,س - ٢}{س^{٢} - ٢\,س} = \frac{٢(س - ١)}{س(س - ٢)}$

٤) $ص' = \frac{س^{٢}}{س} + ٢\,س\ \text{لو}\,س = س + ٢\,س\ \text{لو}\,س = س(١ + ٢\ \text{لو}\,س)$

٥) $د'(س) = [\text{لو}(٣س^{٢} - ٢\,س + ١)]' = \frac{٦\,س - ٢}{٣س^{٢} - ٢\,س + ١} = \frac{٢(٣س - ١)}{٣س^{٢} - ٢\,س + ١}$

٦) $ص' = (\text{لو}\sqrt{٢س^{٢} + ٤\,س})' = \frac{١}{\sqrt{٢س^{٢} + ٤\,س}} \times \frac{٤\,س + ٤}{٢\sqrt{٢س^{٢} + ٤\,س}} = \frac{س + ١}{س(س + ٢)}$

٧) $\because\ ص = \text{لو}(س)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}\,\text{لو}(س)$

$\therefore\ ص' = \frac{١}{٢}(\text{لو}(س))' = \frac{١}{٢} \cdot \frac{١}{س} = \frac{١}{٢س}$ ، $س > ٠$

٨) $ص' = \frac{س(\text{لو}(س))' - (\text{لو}س)\cdot(س)'}{س^{٢}} = \frac{س \cdot \frac{١}{س} - \text{لو}س(١)}{س^{٢}} = \frac{١ - \text{لو}س}{س^{٢}}$ ، $س > ٠$

[٢] لحل التمارين من (١ – ٤) باستخدام خواص اللوغاريتمات نجد أن :

١) $[\text{لو}(١ + س)\,أ^{س}]' = [\text{لو}(١ + س) + س\ \text{لو}\,أ]'$

$\therefore\ ص' = \frac{١}{١ + س} + \text{لو}\,أ$

٢) $ص' = ٥[\text{لو}(٣س^{٢} + ٢)]' = \frac{٥(٦س + ٠)}{٣س^{٢} + ٢} = \frac{٣٠\,س}{٣س^{٢} + ٢}$

٣) $ص' = [\text{لو}(س^{٢} + ١) + \frac{١}{س}\ \text{لو}\,١٠]' = \frac{٢\,س}{س^{٢} + ١} - \frac{١}{س^{٢}}\ \text{لو}\,١٠$

٤) الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين، وبالتالي فإن مشتقتها تعطى بالصورة :

$ص' = (١ - ٢\,س)'\ \text{لو}(١ - ٢\,س) + (١ - ٢س)[\text{لو}(١ - ٢س)]'$

$= -٢\ \text{لو}(١ - ٢س) + (١ - ٢\,س)\frac{-٢}{١ - ٢\,س} = -٢[١ + \text{لو}(١ - ٢\,س)]$

[٣] حل التمارين (١ – ٧) :

١) $ص = \text{لو}\,س + \text{لو}(س + ١) - ٢\ \text{لو}(س + ٢)$

$\therefore\ ص' = \frac{١}{س} + \frac{١}{س + ١} - \frac{٢}{س + ٢}$

٢) باخذ اللوغاريتم للطرفين نجد أن :

$\text{لو}\,ص = \text{لو}\left(\frac{س\sqrt{س + ١}}{\sqrt{س + ٢\,س}}\right)$ ، $\text{لو}\,ص = \text{لو}\,س + \text{لو}\sqrt{س + ١} - \text{لو}\sqrt{س + ٣}$

بالاشتقاق بالنسبة لـ س نجد أن $\frac{ص'}{ص} = \frac{١}{س} + \frac{١}{٢(س+١)} - \frac{١}{٢(س+٣)}$

$∴ ص' = ص\left[\frac{١}{س} + \frac{١}{٢(س+١)} - \frac{١}{٢(س+٣)}\right] = \frac{س(س+٢)^٢}{\sqrt{(س+١)(س+٣)^٣}}$

$ص' = \frac{س\sqrt{س+١}}{\sqrt{س+٣}}\left[\frac{١}{س} + \frac{١}{٢(س+١)} - \frac{١}{٢(س+٣)}\right]$.

٣) $د'(س) = (س)' \times (٥^س)\ لو\ ٥ = ٥^س\ لو\ ٥$

٤) $ص' = هـ^{\sqrt{٢س}} \times \frac{٢}{٢\sqrt{٢س}} = \frac{هـ^{\sqrt{٢س}}}{\sqrt{٢س}}$

٥) $ص' = ٢(٢س - ٣) \times (٢) \times هـ^{(٢س-٣)^٢} = ٤(٢س-٣) \times هـ^{(٢س-٣)^٢}$

٦) $ص' = (س)'\ هـ^س + س\ (هـ^س)'$

$= (١)\ هـ^س + س\ هـ^س = هـ^س + س\ هـ^س = هـ^س(١+س)$.

٧) باستخدام قاعدة الاشتقاق لحاصل الضرب نحصل على :

$ص' = س^٢(هـ^{س^٢})' + (س^٢)'\ هـ^{س^٢} = ٢\ س^٢\ هـ^{س^٢} + ٢س\ هـ^{س^٢} = ٢\ س\ هـ^{س^٢}\ (س+١)$

[٤] أ) $(د \circ ر)'(س) = \frac{١}{س}\ هـ^{لو س}$ ب) $(ر \circ د)'(س) = ١$

[٥] حل التمارين (١ – ٥)

١) $د'(س) = (هـ^٣)' + (هـ^{-٣س})' = ٠ + (-٣)\ هـ^{-٣س} = -٣\ هـ^{-٣س}$

٢) $د'(س) = (١ + \sqrt{س})'\ هـ^س + (١ + \sqrt{س})(هـ^س)' = \frac{١}{٢\sqrt{س}}\ هـ^س + (١ + \sqrt{س})\ هـ^س$

$= هـ^س\left(\frac{١}{٢\sqrt{س}} + ١ + \sqrt{س}\right) = هـ^س\left(\frac{١ + ٢\sqrt{س} + ٢س}{٢\sqrt{س}}\right)$

٣) $د'(س) = (لو س)'\ هـ^{-(٢س+١)} + لو س\ (هـ^{-(٢س+١)})'$

$= \frac{١}{س}\ هـ^{-(٢س+١)} + لو س\ (-٢)\ هـ^{-(٢س+١)}$

$= \frac{١}{س(هـ^{٢س+١})} - \frac{٢\ لو س}{هـ^{٢س+١}} = \frac{١ - ٢\ س\ لو س}{س(هـ^{٢س+١})}$

٤) $لو\ د(س) = ٢\ س\ لو\ (س^٢+١)$ ، وبتطبيق قاعدة الاشتقاق اللوغاريتمي للطرفين نحصل على :

$[لو د(س)]' = (٢س)'\ لو\ (س^٢+١) + ٢\ س\ (لو\ (س^٢+١))'$

$\frac{د'(س)}{د(س)} = ٢\ لو\ (س^٢+١) + ٢\ س\ \left(\frac{٢س}{س^٢+١}\right) = ٢\left[لو\ (س^٢+١) + \frac{٢س^٢}{س^٢+١}\right]$

$∴ د'(س) = ٢\ (س^٢+١)^{٢س}\left[لو(س^٢+١) + \frac{٢س^٢}{س^٢+١}\right]$.

٥) باستخدام قاعدة الاشتقاق لحاصل الضرب : $ص' = (س^٢+١)(٤)\ هـ^{٤س} + ٢\ س\ هـ^{٤س}$

$= ٢\ هـ^{٤س}\ [٢\ (س^٢+١) + س] = ٢\ هـ^{٤س}\ (٢س^٢ + س + ٢)$

٦ – ٦ مشتقة الدوال المثلثية

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

– يبرهن قواعد الإشتقاق للدوال المثلثية .
– يوجد مشتقات الدوال المثلثية .
– يوجد المشتقات المتتالية للدالتين جا س ، جتا س .
– يتعرَّف قواعد الاشتقاق للدوال المثلثية العكسية، ويطبقها في حل المسائل.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :
الحصتان الأولى والثانية : اشتقاق الدوال المثلثية .
الحصتان الثالثة والرابعة : المشتقات المتتالية للدالتين جا س ، جتا س .
الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال متابعة أداء الطلبة في المناقشات وحل الواجبات الصفية والمنزلية، وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى تمرين كالتالي:

أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ للدالة $\text{ص} = \frac{١}{\text{أ}}\ \text{جتا}^{٢}\ \text{أ س} + \text{أ جا}^{٢}\ \text{س}$ (أ عدد ثابت)

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٦)

[١] حل التمارين من (أ – ح) :

أ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\,\text{س}^{٢}\ \text{قتا س} + (-\text{قتاس ظتا س})\ \text{س}^{٣} = \text{س}^{٢}\ \text{قتا س}\ (٣ - \text{س ظتا س})$ ، س $\neq$ ك π

ب) $\text{ص} = \frac{\text{جتا س}}{\text{س}} \Rightarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-(\text{س جا س} + \text{جتا س})}{\text{س}^{٢}}$ ، س $\neq ٠$

جـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢\ \text{س قا}\sqrt{\text{س}} + \text{قا}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}} \times \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{س}^{٢} = \text{س قا}\sqrt{\text{س}}\ (٢ + \frac{١}{٢}\sqrt{\text{س}}\ \text{ظا}\sqrt{\text{س}})$

ء) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٥ \times ٢\ \text{جتا س} \times -\text{جا س} = -(\frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٥\ \text{جا ٢ س})$

هـ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{(٠ + \text{جا س})(٢ + \text{جتا س}) - (٠ - \text{جا س})(٢ - \text{جتا س})}{(٢ + \text{جتا س})^{٢}}$

$= \text{جاس}\ [\frac{٢ + \text{جتا س} + ٢ - \text{جتا س}}{(٢ + \text{جتا س})^{٢}}] = \frac{٤\ \text{جا س}}{(٢ + \text{جتا س})^{٢}}$ ، $٢ + \text{جتا س} \neq ٠$

و) $\frac{ءص}{ءس}$ = (– قتا س ظتا س) + قا س ظا س جتا س + (– جا س) قا س

= – قتا س ظتا س + قا س ظا س جتا س – جا س قا س

ز) مشتقات الدالة الأسية تساوي نفس الدالة × مشتقة الأس × لوغاريتم الاساس

= ٢ جاس × جتاس × لو ٢ = لو ٢ × ٢$^{\text{جاس}}$ جتا س

[٢] حل التمارين من (أ – جـ) :

أ) ∵ دالة الميل م = دَ (س) = جتا س + جا س

∴ دَ ($\frac{\pi}{4}$) = جتا $\frac{\pi}{4}$ + جا $\frac{\pi}{4}$ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = $\frac{2}{\sqrt{2}}$ = $\sqrt{2}$

ومعادلة المماس هي : ص – د (س$_1$) = م (س – س$_1$) ⟸ ص – د ($\frac{\pi}{4}$) = $\sqrt{2}$ (س – $\frac{\pi}{4}$)

⟸ ص – ٠ = $\sqrt{2}$ (س – $\frac{\pi}{4}$) ⟸ ص = $\sqrt{2}$ س – $\frac{\pi}{4}$ $\sqrt{2}$ ،

ومعادلة العمودي هي : ص = $\frac{-\text{س}}{\sqrt{2}}$ + $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

ب) باستخدم قاعدة اشتقاق الدالة الكسرية ومن ثم التعويض عن س = $\frac{\pi}{2}$

لتحصل على قيمة الميل ثم أكمل الحل كما سبق في الفقرة (أ) .

جـ) لإيجاد دالة الميل نستخدم قاعدة اشتقاق مجموع دالتين بالصورة: دَ (س) = (٣ س)َ + (س ظا س)َ

= (٣ س)َ + (س)َ (ظاس) + س (ظا س)َ ، ثم استكمل الحل كما في الفقرة (أ).

[٤] حل التمارين من (١–١٠) :

١) ص$^{(ن)}$ = (ن + س) هـ$^{\text{س}}$

٢) ص$^{(ن)}$ = ن!

٣) ∵ ص = $\frac{1}{\text{س}^2}$ = س$^{-2}$ ⟸ صَ = –٢ × س$^{-3}$

صً = –٢ × –٣ × س$^{-4}$ = (–١)^4 × ٣! س$^{-4}$

صٌ = –٢ × –٣ × –٤ × س$^{-5}$ = (–١)^3 × ٤! س$^{-5}$

⋮

ص$^{(ن)}$ = (–١)^{ن} (ن+١)! س$^{-(ن+2)}$ ⟸ ص$^{(ن)}$ = $\frac{(-1)^{ن}\,(ن+1)!}{\text{س}^{ن+2}}$

٤) $ص^{(ن)} = \frac{(-جـ)^{ن}\ ن!\ أ}{(ب + جـ س)^{ن+١}}$ ، $س \neq \frac{-ب}{جـ}$

٥) $ص^{(ن)} = (-٢)^{ن}\ (ن+١)!\ (٢س - ١)^{-(ن+٢)} = \frac{(-٢)^{ن}\ (ن+١)!}{(٢س - ١)^{ن+٢}}$

٦) $ص^{(ن)} = ن\ جتا\left(س + \frac{ن-١}{٢}\pi\right) + جتا\left(س + \frac{ن}{٢}\pi\right)$

٧) نفس خطوات الحل في (٥).

٨) $ص^{(ن)} = ٢^{ن-١} \times جا\left(٢س + \frac{(ن-١)\pi}{٢}\right)$

٩) $ص^{(ن)} = ص(ب\ لو\ أ)^{ن}$

١٠) $ص^{(ن)} = \frac{(-١)^{ن-١} \times (ن-١)!}{س^{ن}}$

[٥]

أ) $د''(س) = هـ^{س}$

ب) $تا''(س) = -\frac{١}{س^{٢}}$

جـ) $(د \circ تا)''(س) = ٠$

د) $(تا \circ د)''(س) = \frac{هـ^{س}}{(١ + هـ^{س})^{٢}}$

هـ) $(تا \circ د)''(٠) = \frac{١}{٤}$

٦ – ٧ مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

– يفسِّر مفهوم مبرهنة رول والقيمة المتوسطة جبرياً وهندسياً .
– يطبِّق مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة في حل بعض المسائل .
– يطبِّق مبرهنة القيمة المتوسطة في إيجاد قيم تقريبية للأعداد .
– يطبِّق مبرهنة القيمة المتوسطة في بحث إشارات الدوال المختلفة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :
الحصة الأولى : المعنى الهندسي لمبرهنة رول .
الحصة الثانية : مبرهنة القيمة المتوسطة .
الحصة الثالثة : بعض النتائج الهامة لمبرهنة القيمة المتوسطة .
الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائياً ، وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى تمرين يشابه التمرين التالي :

اذا كنت $د(س) = س + \frac{١}{س}$ ، $س \in [\frac{١}{٢} ، ٢]$ ابحث شروط رول ثم أوجد قيمة ب التي تعيّنها المبرهنة .

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٧)

[١] أ) ∵ الدالة كثيرة حدود

∴ الدالة تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة

$$\because د'(س) = ٣س^{٢} \quad ، \quad د'(جـ) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ}$$

$$\therefore ٣جـ^{٢} = \frac{٦٥ + ٧}{٦} \Leftarrow ٣جـ^{٢} = ١٢ \Leftarrow جـ^{٢} = ٤ \Leftarrow جـ = \pm ٢$$

$$\therefore جـ = ٢ \in]-٢ ، ٤[$$

ب) الدالة متصلة $س \in [١ ، ٣]$

$$د'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س - ١}} \Leftarrow \text{أن الدالة قابلة للاشتقاق } \forall\, س \in]١ ، ٣[$$

∴ الدالة تحقق شرطي مبرهنة القيمة المتوسطة ،

$$\because د'(جـ) = \frac{د(ب) - د(أ)}{ب - أ} \Leftarrow \frac{١}{٢\sqrt{جـ - ١}} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} \Leftarrow \sqrt{٢}\,\sqrt{جـ - ١} = ١$$

$$\Leftarrow جـ - ١ = \frac{١}{٢} \Leftarrow جـ = \frac{٣}{٢} \in]١ ، ٣[$$

[٢] ∵ الدالة هـ كثيرة حدود

∴ هي متصلة على الفترة [−٢، ٢] وقابلة للاشتقاق على الفترة]−٢، ٢[

∵ هـ(−٢) = ٢ ، هـ(٢) = ٢ ، ∴ هـ(−٢) = هـ(٢) = ٢ ،

وهذا يحقق شروط مبرهنة رول على الفترة [−٢ ، ٢]

∴ يوجد عدد واحد على الأقل جـ $\in$]−٢ ، ٢[حيث هَ(جـ) = ٠

ولإيجاد هذه القيمة (القيم) يلاحظ أن هَ(س) = ٣ س^{٢} − ٤ $\Leftarrow$ هَ(جـ) = ٣ جـ^{٢} − ٤

وتكون هَ(جـ) = ٠ عندما ٣ جـ^{٢} − ٤ = ٠ أي عندما ($\sqrt{٣}$ جـ − ٢)($\sqrt{٣}$ جـ + ٢) = ٠

فإن جـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، جـ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$ وهما ينتميان إلى]−٢ ، ٢[، ∴ توجد قيمتان للعدد ب هما:

جـ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، جـ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

[٣] ∴ الدالة تحقق مبرهنة رول ،

∴ د(−٢) = د(ب) $\Leftarrow$ $-\frac{٥}{٢}$ = ب + $\frac{١}{ب}$ $\Leftarrow$ ٢ ب^{٢} + ٥ ب + ٢ = ٠

$\Leftarrow$ إمّا ب = −٢ أو ب = $-\frac{١}{٢}$ ، ∴ ب = $-\frac{١}{٢}$ ، ∵ دَ(س) = ١ − $\frac{١}{س^{٢}}$

∴ دَ(جـ) = ١ − $\frac{١}{ب^{٢}}$ = ٠ $\Leftarrow$ جـ^{٢} = ١ $\Leftarrow$ جـ = $\pm$ ١ $\Leftarrow$ جـ = −١ $\in$]−٢ ، $\frac{-١}{٢}$[

٦ − ٨ القيم القصوى

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

- يستخدم اختبار المشتقتين الأولى والثانية في دراسة فترات تزايد الدوال وتناقصها .
- يفسِّر مفهوم القيمة القصوى المحلية (النسبية) والمطلقة .
- يوجد النقاط الحرجة للدوال باستخدام اختبار المشتقة.
- يميِّز حالات الاتفاق والاختلاف بين القيم القصوى المحلية والمطلقة .
- يوجد النقاط القصوى للدوال على فترة باستخدام اختبار المشتقتين الأولى والثانية .
- يحل مسائل تطبيقية على القيم القصوى باستخدام الاستراتيجية المعنية بذلك .
- يفسِّر مفهومي التقعّر ونقاط الانعطاف (الانقلاب) .
- يستخدم اختبار المشتقتين الأولى والثانية في إيجاد فترات تقعر الدوال المحتملة للدوال المختلفة .

تنفيذ حصص البند

ينفذ هذا البند في خمس حصص كما يلي :

الحصة الأولى : تزايد وتناقص الدوال .

الحصة الثانية : القيم القصوى المحلية والمطلقة .

الحصة الثالثة : التقعّر ونقاط الانعطاف .

الحصة الرابعة : تطبيقات على القيم القصوى

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٨)

[١] حل التمارين (أ – هـ) :

أ) الدالة متصلة على [٠ ، ٤] وقابلة للاشتقاق على] ٠ ، ٤ [لأنها حدودية ،

دَ(س) = ٢ س – ٤ = ٢ (س – ٢) ⟸ س = ٢ لتكون دَ(س) = ٠ .

والجدول التالي (٦ – ١) يوضّح إشارة دَ(س) وفترات تزايد الدالة وتناقصها .

جدول (٦ – ١)

س	٤		٢		٠
دَ(س)		+	٠	–	
د(س)		↗		↘	

يلاحظ عندما دَ(س) > ٠ ، ∀ س ∈] ٢ ، ٤ [فتكون الدالة متزايدة على [٢ ، ٤]

وعندما دَ(س) < ٠ ، ∀ س ∈] ٠ ، ٢ [فتكون الدالة متناقصة على [٠ ، ٢]

ب) الدالة هـ(س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ١ ، ∀ س ∈ ح ، يلاحظ أن الدالة هـ متصلة على ح وقابلةللإشتقاق على ح (دالة حدودية) .

∴ هَـ(س) = ٣ س^{٢} – ٦ س ⟸ ٣ س (س–٢) = ٠ ⟸ س = ٠ أو س = ٢ لتكون هَـ(س) = ٠

والجدول (٦ – ٢) التالي يوضح اشارة هَـ(س) وفترات تزايد الدالة وتناقصها .

جدول (٦ – ٢)

س		٢		٠	
هَـ(س)	+	٠	–	٠	+
هـ(س)	↗		↘		↗

وعليه تكون الدالة هـ(س) متزايدة على كل من] ٢ ، ∞ [،] –∞ ، ٠ [ومتناقصة على] ٠ ، ٢ [

جـ) الدالة متناقصة على] –∞ ، ٢ [∪] ٢ ، ∞ [

ء) الدالة متصلة على] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [لحاصل ضرب دالتين متصلتين ، وقابلة للاشتقاق على] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

حيث هـَ (س) = ٢ جا س جتا س = جا٢س

وبالبحث عن إشارة هـَ(س) نجد أن :

جا ٢س > ٠ ، $\forall$ س $\in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [أي أن هـَ (س) > ٠ ، $\forall$ س $\in$] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [

وعليه فإن الدالة ى(س) دالة متزايدة على] ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ [.

هـ) متزايدة على ح .

[٢] اتبع الطريقة نفسها لحل المسألة كما ورد في الفقرة (ء) من التمرين [١] .

[٣] ل = –٢ ، م = ٤ .

[٤] يُلاحظ أنه بالإمكان أن تكون النقطة س = ٠ نقطة حرجة نتيجة تعريف الدالة بقاعدتين مختلفتين على يمين الصفر وعلى يساره ، لذلك نحاول حساب المشتقة عند الصفر ، وكما هو معتاد في مثل هذه الحالات ، نحسب المشتقة اليمنى واليسرى كلاً على حده ، كما يلي :

عندما س < ٠ ، نجد أن :

دَ(س) = ٢ (س + ٣) ⟸ دَ(س) = ٠ عندما س = –٣ ، –٣ $\notin$ [–٢ ، ٢] لذلك لا تؤخذ في الاعتبار.

عندما س > ٠ نجد أن :

دَ(س) = ٢ (س–٣) ⟸ دَ(س) = ٠ عندما س = ٣ ، ٣ $\notin$ [–٢ ، ٢] لذلك لا تؤخذ في الاعتبار.

لتكن دَ(٠^+) = –٦ ، دَ(٠^-) = ٦ ، ∵ دَ(٠^+) ≠ دَ(٠^-) أي أن دَ(٠) غير موجودة ،

عندئذ تكون النقطة س = ٠ نقطة حرجة .

وهذا يعني أن مجموعة النقاط الحرجة للدالة تقتصر على المجموعة { ٠ } و قيمة الدالة عند هذه النقطة بالإضافة إلى نقطتي اطراف الفترة هي :

{ د(٠) ، د(–٢) ، د(٢) } = { ٩ ، ١ ، ١ } = { ٩ ، ١ } ، وعلى ذلك فإن القيمة العظمى المطلقة هي (٩) وتبلغها عند كل من طرفي الفترة [–٢ ، ٢]

[٥] العددان هما : ٨ ، ٨

[٦] حل التمارين من (أ – ء) :

أ) القيمة الصغرى = ٢

ب) القيمة العظمى = $\frac{٤}{٢٧}$ والقيمة الصغرى = ٠

جـ) القيمة العظمى = ٠ ، والصغرى = ٤

ء) القيمة العظمى = ٤ ، والصغرى = ٠

[٧] $\acute{د}$(س) = ٣ س^٢ − ٦ س ، $\acute{\acute{د}}$(س) = ٦ س − ٦ ، بوضع $\acute{\acute{د}}$(س) = ٠ تكون ٦ س − ٦ = ٠ $\Leftrightarrow$ س = ١

والجدول (٦ − ٣) يوضح إشارة $\acute{\acute{د}}$(س) وفترات تقعر منحنى الدالة المعطاة .

جدول (٦ − ٣)

س		١	
$\acute{\acute{د}}$(س)	+	٠	−
د (س)	‿	٠	⁀

يلاحظ من الجدول أن منحنى الدالة مقعَّر للأعلى على] ١ ، ∞ [وللأسفل على] − ∞ ، ١ [

ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة هي (١ ، −١) ذلك لأن د(١) = −١

[٨] − أوجد النقاط التي عندها $\acute{د}$(س) = ٠ وهي س = ± ١ ، س = ٠

− حدّد إشارة المشتقة الثانية عند كل نقطة حصلت عليها سابقاً لتصل إلى $\acute{\acute{د}}$(٠) = −٤ < ٠

أي أن للدالة قيمة عظمى محلية عند س = ٠ وهي د (٠) = صفراً

$\acute{\acute{د}}$(١) = ٨ > ٠ ، أي أن للدالة قيمة صغرى محلية عند س = ١ وهي د (١) = −١ ، $\acute{\acute{د}}$(−١) = ٨ > ٠

عندئذ يكون للدالة قيمة صغرى محلية عند س = −١ وهي د (−١) = −١ ،

ومن ثم استكمل الحل بحسب المطلوب في ضوء المعلومات السابقة .

[٩] ∵ د (س) = $\frac{١}{٣}$س^٣ − ٣ س^٢ + ٨ س

∴ $\acute{د}$(س) = س^٢ − ٦ س + ٨ ، $\acute{\acute{د}}$(س) = ٢ س − ٦ ، وعلى ذلك فإن منحنى الدالة يكون محدباً إلى أعلى (مقعراً للأسفل) ، إذا كان ٢ س − ٦ < ٠ (أي عندما س < ٣) أي أن س = ٣ ، تمثل الاحداثي السيني لنقطة الفصل بين منطقتي التحدب إلى الأعلى والأسفل للمنحنى (نقطة انعطاف) .

ولحساب الإحداثي الصادي المقابل لنقطة الانقلاب (٣ ، د (٣)) نجد أن :

د(٣) = $\frac{١}{٣}$ × ٢٧ − ٣ × ٩ + ٨ × ٣ = ٦ ، أي أن نقطة الإنقلاب هي (٣ ، ٦) .

[١٠] ∵ النقطة (١ ، ٣) $\in$ د(س) فهي تحقق معادلته أي أن :

٣ = ا + ب ... (١)

وعند س = ١ يوجد للمنحنى نقطة انعطاف

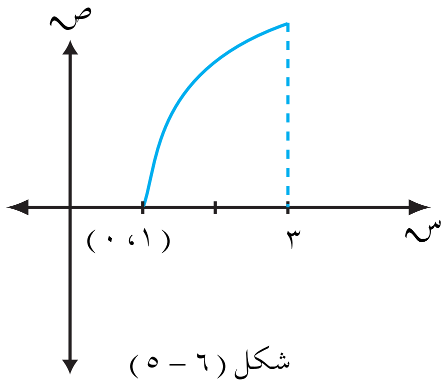
∴ $\acute{\acute{د}}$(١) = ٠ $\Leftarrow$ $\acute{\acute{د}}$(س) = ٦ ا س + ٢ ب

$\Leftarrow$ ٦ا س + ٢ ب = ٠ $\Leftarrow$ ٣ ا + ب = ٠ ... (٢)

بحل (١) ، (٢) نجد أن :

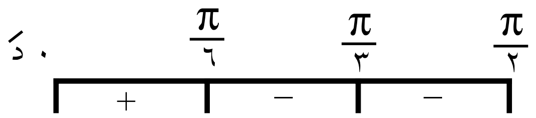
ا = $\frac{-٣}{٢}$ ، ب = $\frac{٩}{٢}$

[١١] لرسم محوري الإحداثيات لنظام إحداثي متعامد ومن المعلومة
(١) في التمرين نفسه نجد أن النقطتين
(١ ، ٠) ، (٣ ، ٤) $\in$ د(س) ، أي أن المنحنى يصل بينهما .
ومن المعلومة (٣) أيضاً نجد أن :
المنحنى يتزايد مع تزايد س
ومن المعلومة (٤) نستنتج أن المنحنى يكون محدباً إلى أعلى وعلى النحو الموضح في الشكل (٦– ٥)



شكل (٦ – ٥)

[١٢] دَ (س) = ٣ جتا ٣ س

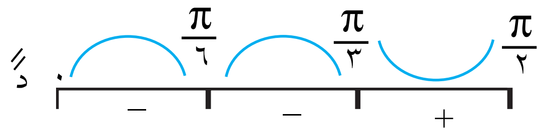


د : متزايدة على [٠ ، $\frac{\pi}{٦}$] ومتناقصة على الفترة [$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

(٠ ، د (٠)) = (٠ ، ٠) نقطة قيمة صغرى ، وكذلك ($\frac{\pi}{٢}$ ، د ($\frac{\pi}{٢}$)) = ($\frac{\pi}{٢}$ ، –١)
نقطة قيمة صغرى.

إمّا ($\frac{\pi}{٦}$ ، د ($\frac{\pi}{٦}$)) = ($\frac{\pi}{٦}$ ، ١) نقطة قيمة عظمى.

دً (س) = – ٩ جا ٣ س

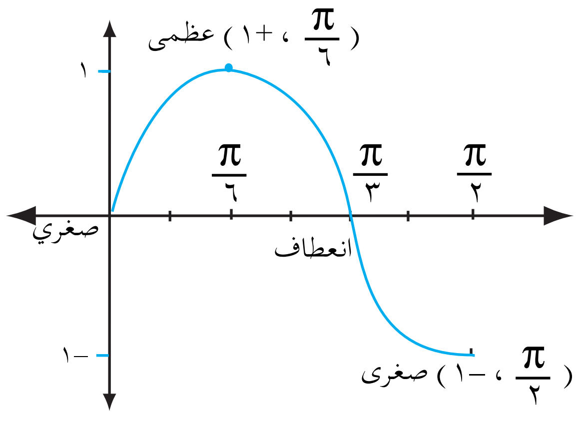


د : مقعّرة للأعلى على الفترة [$\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$]

ومقعرة للأسفل على الفترة [٠ ، $\frac{\pi}{٣}$] .

ونقطة الانعطاف هي :

($\frac{\pi}{٣}$ ، د ($\frac{\pi}{٣}$)) = ($\frac{\pi}{٣}$ ، ٠)



شكل (٦ – ٦)

عدد الحصص : (٦) حصص .

الاهداف

– يتعرَّف الفروع اللا نهائية والمستقيمات المقاربة بأنواعها .
– يستخدم القيم القصوي في دراسة تغيّـر الدالة .
– يمثّل الدالة بيانياً .
– يستخدم استراتيجية دراسة تغيّر الدالة.

تنفيذ حصص البند

ينفذ هدا الدرس في ست حصص كالآتي :
الحصتان الأول والثانية : دراسة تغيّر الدوال كثيرة الحدود والمقياس.
الحصة الثالثة : المستقيمات المقاربة بأنواعها .
الحصص الرابعة والخامسة والسادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى السؤال الآتي أو سؤال مشابه كخطوة تقويم :
ادرس تغيرات الدالة : د (س) = $\frac{س^{٢} + س}{س + ١}$ وارسم بيانها.

إرشادات وإجابات : تمارين (٦ – ٩)

[١] (١) بما أن د (س) = س^{٣} – ٣ س + ٢ ، فإن م ∴ ت = ح

(٢) $\lim_{س \to -\infty}$ (س^{٣} – ٣ س + ٢) = – ∞ ، $\lim_{س \to \infty}$ (س^{٣} – ٣ س + ٢) = ∞
للدالة فرعان لا نهائيان ولا توجد مستقيمات مقاربة لأنها كثيرة حدود

(٣) دَ (س) = ٣ س^{٢} –٣
بوضع دَ (س) = ٠ ⇐ ٣ س^{٢} – ٣ = ٠ ⇐ س = ± ١
∴ د (١) = ٠ ، (١ ، ٠) نقطة قصوى
د (–١) = ٤ ، (–١ ، ٤) نقطة قصوى

س	∞ +		١		١–		∞ –
دَ (س)		+	٠	–	٠	+	
د (س)		↗	٠	↘	٤	↗	

(٤) دً (س) = ٦ س
بوضع دً (س) = ٠ ⇐ ٦ س = ٠ ⇐ س = ٠ .
∴ د (٠) = ٢ ، (٠ ، ٢) نقطة انعطاف

س	∞ +		٠		∞ –
دً (س)		+		–	
د (س)		◡	٢	◠	

٥) النقاط المساعدة :

عند س = ٠ ⟸ ص = ٢ ، د (٠) = ٢ ، ∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

عند ص = ٠ ⟸ $س^٣$ − ٣ س + ٢ = ٠ ، ولإيجاد قيم س نأخذ أحد عوامل الحد المطلق وليكن (١)

فيكون د (١) = ١ − ٣ + ٢ = ٠ ، ∴ س − ١ أحد عوامل الدالة ولإيجادالبقية نقسم

د (س) على (س − ١) كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} & س^٢ + س − ٢ \\ \hline س − ١ & س^٣ \quad − ٣ س + ٢ \\ & \mp س^٣ \pm س^٢ \\ \hline & س^٢ − ٣ س + ٢ \\ & \pm س^٢ \pm س \\ \hline & − ٢ س + ٢ \\ & \pm ٢ س \mp ٢ \\ \hline & ٠ \quad ٠ \quad ٠ \end{array}$$

فيكون د (س) = ٠ ⟸ (س − ١) ($س^٢$ + س − ٢) = ٠

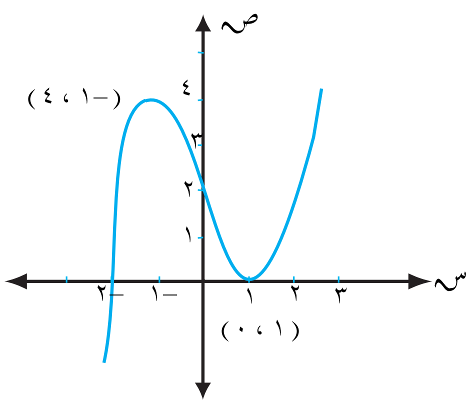
⟸ (س − ١) (س − ١) (س + ٢) = ٠ ⟸ $(س − ١)^٢$ (س + ٢) = ٠

إمّا س − ١ = ٠ ⟸ س = ١ أو س + ٢ = ٠ ⟸ س = − ٢

∴ د (−٢) = ٠ ، د (١) = ٠ فالمنحنى يقطع محورالسينات في (−٢ ، ٠) ، (١ ، ٠)

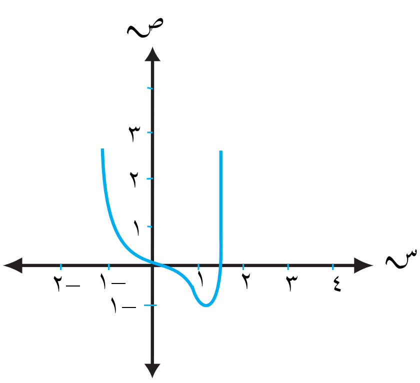
٦) نلخص ما سبق في الجدول التالي :

س	+∞		١		٠		−١		−٢	−∞
د'(س)		+	٠	−			٠		+	+
د''(س)			+		٠		−			
د (س)	+∞	↗	٠	↘	٢	↘	٤	↗		−∞

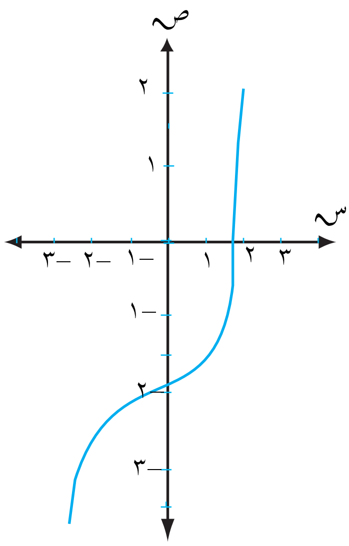


[٢] د (س) = ٣ $س^٤$ − ٤ $س^٣$

س	+∞		١		$\frac{٢}{٣}$		٠		−∞
د'(س)		+	٠	−		−	٠	−	
د''(س)		+		+		−		+	
د (س)	+∞	↗	−١	↘	$\frac{−١٦}{٢٧}$	↘	٠	↘	+∞



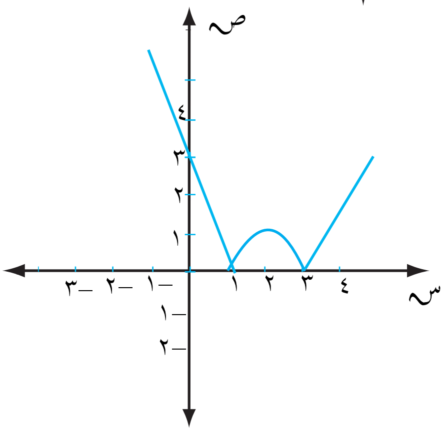
[٣] د (س) = $\frac{س^{٣}}{٦}$ + $\frac{س^{٢}}{٢}$ + س − ٢



س	+∞		٠		−١		−∞
دَ (س)		+		+		+	
دً (س)		+		+		−	
د (س)	+∞	↗	−٢	↗	$-\frac{٨}{٣}$	↗	−∞

[٤] يشابه السؤال رقم (٣).

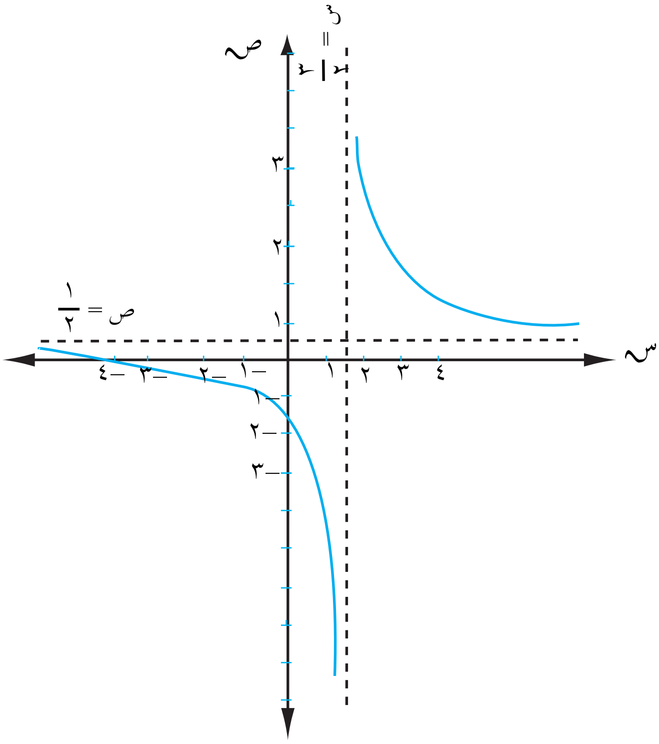
[٥] د (س) = | س٢ − ٤ س + ٣ |



س	+∞		٣		٢		١		−∞
دَ (س)		+	٠	−	٠	+	٠	−	
دً (س)		+			−			+	
د (س)	+∞	↗	٠	↘	١	↗	٠	↘	+∞

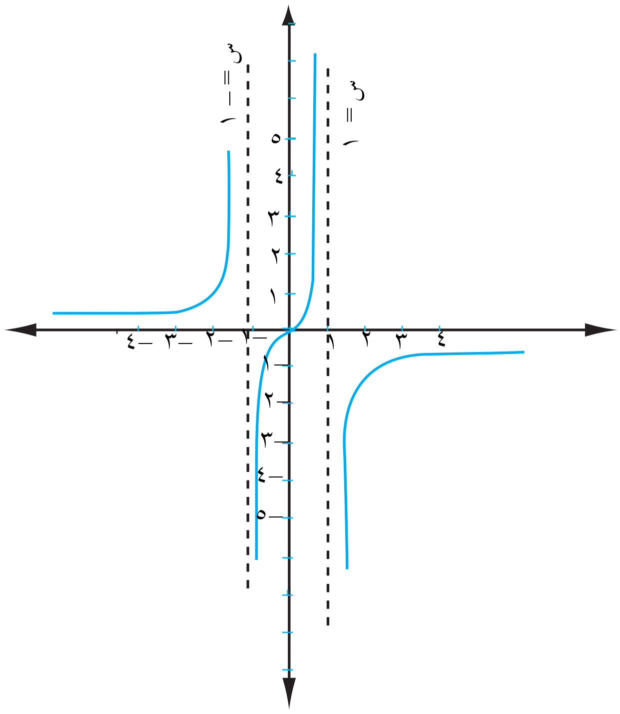
[٦] يشابه حل السؤال رقم (٥)

[٧] د (س) = $\frac{س + ٤}{٢ س - ٣}$



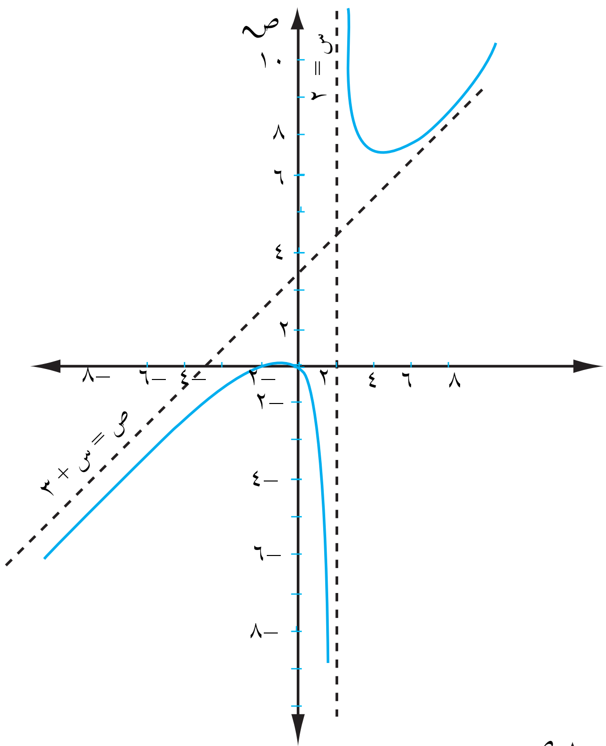
س	+∞		$\frac{٣}{٢}$		−∞
دَ (س)		− − −		− − −	
دً (س)		+		−	
د (س)	$\frac{١}{٢}$	↘	+∞ ‖ −∞	↘	$\frac{١}{٢}$

[٨] د (س) = $\frac{٢\,س}{١ - س^{٢}}$



س	∞+		١		٠		١−		∞−
دَ (س)		+		+		+		+	
دً (س)		⌢ −		⌣ +		⌢ −		⌣ +	
د (س)	٠	↗	∞− ∣ ∞+	↗	٠	↗	∞− ∣ ∞+	↗	٠

[٩] د (س) = $\frac{س^{٢} + س}{س - ٢}$



س	∞+		٢+$\sqrt{٦}$ ٤,٤		٢		٢−$\sqrt{٦}$ −٠,٤		∞−
دَ (س)		+	٠	−		−	٠	+	
دً (س)		⌣ +		⌣ +		⌢ −		⌢ −	
د (س)	∞+	↗	٩,٩	↘	∞+ ∣ ∞−	↘	٠,١	↗	∞−

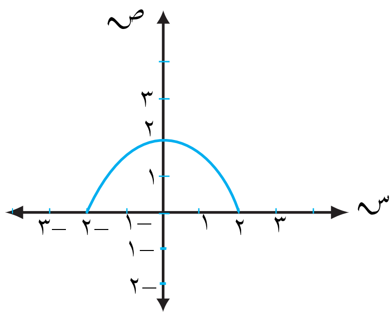
[١٠] يشابه السؤال رقم (٩)

[١١] يشابه السؤال رقم (٩)

[١٢] يشابه السؤال رقم (٩)

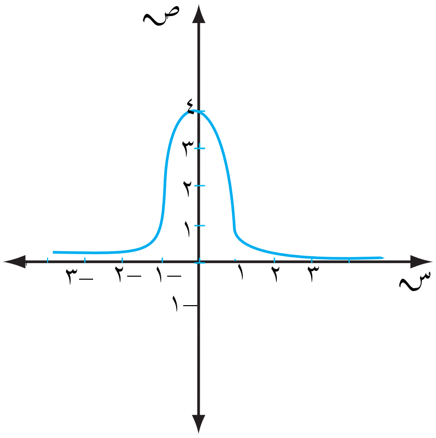
[١٣] د (س) = $\sqrt{٤ - س^{٢}}$

س	٢		٠		٢−
دَ (س)		−		+	
دً (س)		⌢ −		⌢ −	
د (س)	٠	↘	٢	↗	٠



[١٤] $د(س) = \frac{٤}{١ + س^{٢}}$

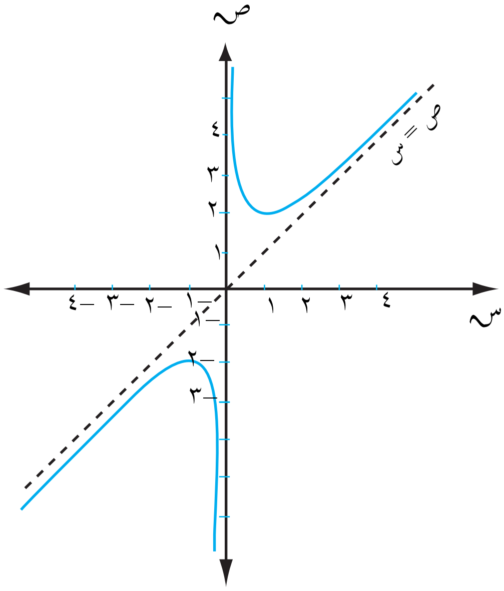
س	$+\infty$		$\frac{١}{\sqrt{٣}}$		٠		$\frac{-١}{\sqrt{٣}}$		$-\infty$
دَ(س)		−		−	٠	+		+	
دً(س)		+	٠	−		−	٠	+	
د(س)	٠	↘	٣	↘	٤	↗	٣	↗	٠



[١٥] يشابه السؤال رقم (١٤)

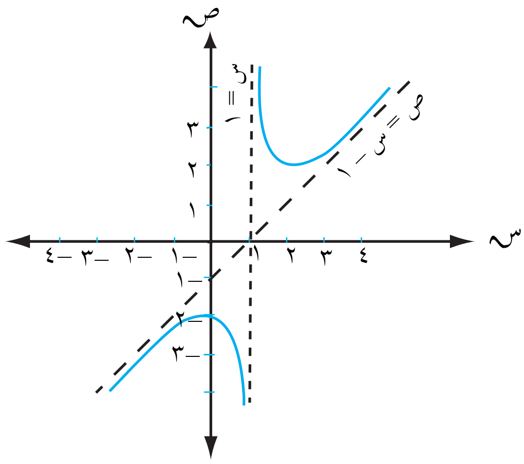
[١٦] $ص = س + \frac{١}{س}$

س	$+\infty$		١		−١		$-\infty$
دَ(س)		+		−		+	
دً(س)			+		−		
د(س)	$+\infty$		٢		−٢		$-\infty$



[١٧] $ص = (س - ١) + \frac{١}{س - ١}$

س	$+\infty$		٢		١		٠		$-\infty$
دَ(س)		+	٠	−		−	٠	+	
دً(س)			+				−		
د(س)	$+\infty$		٢	$-\infty$		$-\infty$	−٢		$-\infty$



٦ – ١٠ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق اهداف الوحدة .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ الاختبار الذي في الدليل أو اختبار شبيه (مماثل) له من إعداد المدرس بعد أن يُعطى الاختبار الذي في كتاب التمارين كواجب منزلي والجدول المرسوم جانباً يوضح الأسئلة والأهداف التي تغطي كل سؤال :

رقم السؤال	رقم الهدف
[١]	١ ، ٢
[٢]	٥ ، ٧
[٣]	١ ، ٥ ، ١٠
[٤]	١٤ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨

الاختبار

[١] إذا كانت ص = جا٢س + ٩ فأثبت أن ٤$($ص$')^{٢}$ + $($ص$'')^{٢}$ = ١٦

[٢] أو جد معادلتي المماس والناظم لمنحنى الدالة س ص = $\dfrac{\text{هـ}^{\text{جتا س}} - ١}{١ + \text{جتا س}}$ عند النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

[٣] إذا كانت ص = د (س) ، استعن بالشكل (٦ – ٧) الذي يمثل بيان الدالة د والمعرّفة على الفترة [–٢ ، ٢] والقابلة للاشتقاق على] – ٢ ، ٢ [في إيجاد :

أ) الفترة (الفترات) التي يكون فيها د$'$(س) > ٠

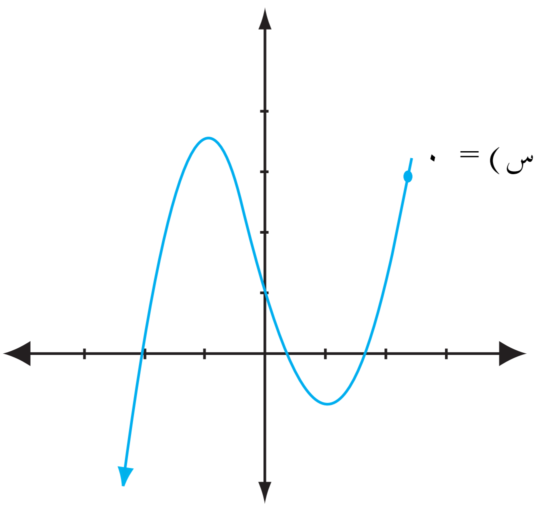
ب) الفترة (الفترات) التي يكون فيها د$'$(س) < ٠

جـ) مجموعة النقاط الحرجة لقيم س التي تكون عندها د$'$(س) = ٠

د) القيم القصوى المحلية والمطلقة

هـ) نقاط الانعطاف للمنحنى

و) فترات تقعّر المنحنى



شكل (٦ – ٧)

[٤] ارسم منحنى الدالة د(س) = س (س – ١)^{٣}

قائمة المصطلحات

Absolute maximum	قيمة عظمى مطلقة
Absolute minimum	قيمة صغرى مطلقة
Chain rule	قاعدة التسلسل
Common logarithms	اللوغاريتمات الاعتيادية
Composite function	الدالة المركبة
Continuity	الاتصال
Continuity on interval	الاتصال على فترة
Cos x	جتا س
Cosec x	قتا س
Cot x	ظتا س
Derivative	المشتقة
Derivative test	اختبار المشتقة
Differentiable function	دالة قابلة للاشتقاق
Distance between two points	البعد بين نقطتين
Differentiation	التفاضل
Left-hand limit	النهاية من اليسار
Limit	نهاية
Limits of trigonomatric function	النهايات للدوال المثلثية
Local maximum	قيمة عظمى محلية
Local minimum	قيمة صغرى محلية
Logarthmic functions	الدوال اللوغارتمية
Low of sine	قانون الجيب
Low of cosines	قانون جيب التمام
Natural logarithms	اللوغاريتم الطبيعي
Perpendicular	عمودي
Point of inflection	نقطة انعطاف
Related rates	المعدلات الزمنية
Right-hand limit	النهاية من اليمين
Sec x	قا س
Sin x	جا س
Tan x	ظا س
Tangent	مماس
Techniques of differentiation	قواعد الاشتقاق
Trigonomatric function	الدوال المثلثية

المراجع

١– تايلور رويد (١٩٨٢م) (ترجمة محمد عادل سودان ، علي عبد الله) ، **حساب التفاضل والتكامل للجامعات والهندسة التحليلية – الجزء الأول** ، الطبعة الثانية ، دار وا ئل للنشر – مؤسسة الرسالة بيروت ، لبنان .

٢ – محمد حسن المسوري (١٩٩٤م) **استراتيجية مقترحة لحل المسألة الرياضية** ، رسالة ماجستير غير منشورة ، جامعة اليرموك – اربد الأردن .

٣ – هادي حميد الحداد (١٩٩٧م) ، مبادئ الرياضيات ، دار المريخ ، الرياض ، المملكة العربية السعودية .

٤ – فتحي خليل حمدان (٢٠٠٠م) ، **أساسيات التفاضل والتكامل** ، الطبعة الأولى ، دار وائل للنشر ، عمّان – الأردن .

5 - Grossman, S .(1984) **Calculus, Academic Press,** Inc, Londan , U. K .

6 - Euis & Gulick (1990) . **Calculus , Harcaurt Rrace Jovanauich,** Inc , 7 Tj . ed . USA

الوحدة السابعة

التـــكامل

جدول توزيع الحصص

رقم البند	الموضوع	عدد الحصص
٧ – ١	التكامل المحدد	٨
٧ – ٢	التكامل غير المحدد	١٠
٧ – ٣	التكامل بالتعويض	٦
٧ – ٤	التكامل بالتجزئة	٣
٧ – ٥	تكامل الدوال الكسرية	٤
٧ – ٦	تطبيقات التكامل	
٧ – ٦ – ١	حساب مساحات بعض المناطق المستوية	٤
٧ – ٦ – ٢	الحجوم الدورانية	٥
٧ – ٧	اختبار الوحدة	٢
	إجمالي عدد الحصص	٤٢

أهداف الوحدة

يتوقّع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن :

١ – يوجد المساحة التقريبية تحت منحنى دالة وفوق الفترة [؟ ، ب] .

٢ – يعرِّف التكامل (المحدد) وخواصه .

٣ – يثبت مبرهنتي المقارنة والحدين الأدنى والأعلى ويستخدمهما .

٤ – يتعرَّف التكامل غير المحدد وخواصه .

٥ – يطبّق قواعد التكاملات الشهيرة .

٦ – يوجد ثابت التكامل .

٧ – يتعرَّف العلاقة بين التكامل غير المحدد والتكامل المحدد ومبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل .

٨ – يتعرَّف طرق التكامل : التعويض ، التجزئة ، الدوال الكسرية .

٩ – يوجد مساحة مناطق مستوية .

١٠ – يوجد حجم مجسم ناتج عن دوران منطقة مستوية محددة حول أحد المحاور .

المقدمة

قُسِّمت هذه الوحدة في كتاب الطالب إلى سبعة بنود، هي :

البند الأول : التكامل المحدَّد .

البند الثاني : التكامل غير المحدَّد .

البند الثالث : التكامل بالتعويض .

البند الرابع : التكامل بالتجزئة .

البند الخامس : تكامل الدوال الكسرية.

البند السادس : تطبيقات التكامل .

أولاً : حساب مساحات بعض المناطق المستوية .

ثانياً : الحجوم الدورانية .

وتختتم هذه الوحدة في دليل المعلم باختبار الوحدة .

تم تخصيص (٤٢) حصة لتنفيذ هذه الوحدة كاملة ، بما في ذلك تنفيذ الاختبار. وسيجد القارئ أن كل بند يشتمل أمثلة محلولة مدعمة بالشرح والرسوم التوضيحية الضرورية وبعد كل بند يجد الطالب مجموعة من التمارين المتنوّعة التي تثري الموضوع .

لمحة تاريخية

تعود نشأة حساب التفاضل والتكامل إلى مسألتين قديمتين، تبحث الأولى في تعيين مماس منحنى معطى عند نقطة من نقاطه، وتبحث الأخرى في حساب مساحة منطقة مستوية يحدها منحنى معطى .

كان حل المسألة الثانية منطلقاً لتسمية حساب التكامل، والاهتمام بحلها كان قديماً جداً . فقد عثر بعض الباحثين على مجموعة من أوراق البردي يعود تاريخها إلى عام (١٦٥٠ ق . م)، وفيها ٨٥ مسألة، يدّعى كاتبها أنه نقلها عن أوراق قديمة ، ويذكر منطوق المسألة الخمسين منها أن مساحة دائرة قطرها تسع وحدات تكافئ مساحة مربع طول ضلعه ثمان وحدات .

إن التاريخ العام للعلوم هو مجال علمي جديد نسبياً، وهو وإن كان قد مُدح بحرارة من قبل « الموسعين » إلا أن ازدهاره الحق يعود إلى مطلع عصرنا . وإذا كان تاريخ بعض العلوم موضوع دراسات معمقة وبالذات الرياضيات، فإنه لم تقم أية محاولة جدية حتى الآن ، لرسم لوحة جامعة لتطور مادة الرياضيات خاصة، ومختلف العلوم عامة .

في هذه اللمحة التاريخية نقدم جزءاً من التطورات التي شملت حساب التكامل .

وجد الفراعنة طريقة حسابية لإيجاد القيمة التقريبية لـ π وهي ٣,١٦ . لم يستطع أحد إيجاد قيمة أدق منها ولم يقتصر اهتمام اليونانيين بعد ذلك على حساب مساحات الدوائر بل حاولوا حساب مناطق مستوية تحدها منحنيات أخرى . وضعت تعاريف ليبنز (Leibaiz) ونيوتن (Newton) للتكامل المحدّد مفهوم المساحة على أسس عامة وقوية ، ولكن هذه التعاريف لم تغط كل المواقف الممكنة للمساحة كمفهوم وإن كان قد قدما تعميمًا لمفهوم المساحة وجعلاه حديثاً.

بقى الأمر لرياضيين آخرين ساهموا في توسيع هذا التعميم و صاغوه على أسس رياضية أفضل .

وقد وضع الرياضي كوشي (Cauchy) التفاضل والتكامل على أسس منطقية قوية ، فوضع تعريفه للتكامل المحدد على أنه نهاية مجاميع مساحات مستطيلة. ثم أطلق عليه اسم تكامل منجولي كوشي . ويتطلب تعريفه للتكامل المحدد أن تكون الدالة متصلة، واستخدم ريمان (Remman) عام ١٨٥٤م مجاميع داربو العليا والسفلى لتعميم تعريف منجولي كوشى ، لكي يمكن تكامل الدوال المحددة التي بها عدد منتهي من نقاط عدم الاتصال.

وقد بين الرياضي الفرنسي جاستون داربو (١٨٤٢ – ١٩١٧م) والذي سميت المجاميع باسمه أن الدالة المحددة فوق فترة ما يكون لها تكامل ريمان فوق هذه الفترة إذا وفقط إذا كانت مجموعة عدم الاتصال على هذه الفترة هي مجموعة مقياسها الصفري، وهذا يعنى أن الدالة التي لها عدد نهائى من نقاط عدم الاتصال على فترة يمكن أن يكون لها تكامل باستخدام تعريف ريمان للتكامل المحدود .

تعريف منجولي كوشى للتكامل المحدد كالآتي :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \underset{\Delta \text{س}_{\text{ر}} \to ٠}{\text{نهـا}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}_{\text{ر}})\, \Delta \text{س}_{\text{ر}}$$

تعريف ريمان للتكامل المحدد للدالة د(س) هو :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \underset{\Delta \text{س}_{\text{ر}} \to ٠}{\text{نهـا}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ل}_{\text{ر}}\, \Delta \text{س}_{\text{ر}}$$

حيث Δ س$_{\text{ر}}$ هي فترات صغيرة تجزئ محور السينات وكل ل$_{\text{ر}}$ هي أكبر حد سفلى للدالة د(س) في الفترة Δ س$_{\text{ر}}$ بشرط أن هذه النهاية تساوي النهاية المثالية

$\underset{\Delta \text{س}_{\text{ر}} \to ٠}{\text{نهـا}} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ع}_{\text{ر}}\, \Delta \text{س}_{\text{ر}}$ حيث ع$_{\text{ر}}$ هو أصغر حد علوى للدالة د(س) في الفترة Δ س$_{\text{ر}}$

تُسمى النهاية الأولى مجموع داربو السفلي وتسمى النهاية الثانية مجموع داربو العلوي .

خلفية علمية

إن عملية التكامل ماهي إلاعملية عكسية للتفاضل؛ فمثلاً إذا كان دَ (س) = ٣س^{٢} ، فإن د (س) = س^{٣}+ ث .

وكذلك إذا عُلمت المشتقة الثانية نستطيع الحصول على الدالة الاصلية وذلك لتكامل المشتقة الثانية مرتين .

ومن التفاضل نعرف أن كل دالة قابلة للاشتقاق متصلة والعكس غير صحيح ؛ وهنا في التكامل كل دالة متصلة قابلة للتكامل وليس بالضرورة أن كل دالة قابلة للتكامل تكون متصلة والتكامل الذي له قيمة محددة يسمى بالتكامل المحدد بينما التكامل غير المحدد ليس له قيمة محددة .

كما لاحظت في التفاضل قواعد للمشتقات، وهنا في التكامل توجد قواعد شهيرة للتكاملات ، وإذا كانت الدالة المراد تكاملها ليست بصورة القاعدة الشهيرة، نجري لها بعض التحويلات الرياضية أو الفرضيات المناسبة لكي تصبح في صورة قاعدة شهيرة يسهل لنا مكاملتها .

كما لاحظت أن للتفاضل تطبيقات هندسية، فالتكامل له تطبيقات مماثلة مثل: إذا علم ميل المماس لمنحنى دالة تستطيع بالتكامل أن تحصل على معادلة المنحنى . وإذا عُلمت العجلة والزمن لجسم متحرك نستطيع الحصول على السرعة و إذا علمت السرعة تستطيع الحصول على المسافة بالتكامل .

وبواسطة التكامل نستطيع إيجاد مساحة مستوية لأشكال مختلفة من المضلعات المنتظمة ، وهنا نستطيع القول إن كل تكامل ليس مساحة، ولكن كل مساحة يمكن التعبير عنها بتكامل .

وإذا كانت المساحة المطلوبة محصورة بين منحنى دالتين د (س) ، تا (س) ونقاط تقاطعها ﺃ ، ب فإن :

$$سط_{ﺃ}^{ب} = \int_{ﺃ}^{ب} |د(س) - تا(س)|\, ءس .$$

وعند إيجاد مساحة أي شكل مستوٍ يجب أن نتعرف أولاً على المعادلة العامة له ، وثانياً تمثلة بيانياً

فمثلاً الدائرة : التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها نـو عند رسمها نجد أن محور السينات يقسمها إلى جزئين متماثلين هما ص = $\pm \sqrt{نو^{٢} - س^{٢}}$

ومساحة الجزء الذي فوق محور السينات = $\int_{-نو}^{+نو} \sqrt{نو^{٢} - س^{٢}}\, ءس$

ومساحة الجزء الذي تحت محور السينات = $- \int_{-نو}^{نو} \sqrt{نو^{٢} - س^{٢}}\, ءس$

والمساحة الكلية = مجموع مساحة الجزئين أو مساحة أحد الجزئين مضروب في (٢).

وبالمثل القطع الناقص الذي معادلته :

$$\frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ﺃ^{٢}} = ١ \Leftarrow ص = \pm \frac{ب}{ﺃ} \sqrt{ﺃ^{٢} - س^{٢}}$$

وبالنسبة للحجوم الدورانية حول أحد المحاور الإحداثيه ، يتطلب منا التعرف على المستقيم أو المنحنى أو المنطقة التي ستدور؛ وماهي نقاط البداية والنهاية ، وهي التي تمثل حدود التكامل ؛ فمثلاً :

– حجم الكرة نستطيع الحصول عليه من دوران نصف دائرة أي أن :

$$\text{ح} = \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} \left(\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}\right)^{٢} \text{ء س} = \pi \int_{-\text{نق}}^{\text{نق}} (\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}) \text{ ء س}$$

$$= \pi \left[\text{نق}^{٢}\text{ س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{-\text{نق}}^{\text{نق}}$$

$$= \pi \left[\text{نق}^{٣} - \frac{\text{نق}^{٣}}{٣} - \left(-\text{نق}^{٣} + \frac{\text{نق}^{٣}}{٣}\right)\right]$$

$$= \frac{٤}{٣} \pi \text{ نق}^{٣}$$

– ونستطيع الحصول على حجم المخروط من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعي القائمة .

– يمكن الحصول على حجم الاسطوانة من دوران مستطيل حول أحد أضلاعه .

وإضافة إلى ما سبق نجد أن للتكامل تطبيقات كثيرة في الفيزياء والديناميكا وعلم الفلك .

توجيهات طرائقية عامة

عند تدريس هذه الوحدة ينبغي مراعاة مايلي :

– التمهيد لكل درس بما يناسبه، مثلاً مراجعة المعارف الأساسية السابقة التي يحتاجها الطلبة في الدرس الجديد .

– إعطاء أمثلة وتدريبات صفية كافية لكل مفهوم يُعطى

– عدم الانتقال من درس إلى آخر إلا بعد التأكد من تحقق أهداف الدرس السابق .

– إعطاء نهاية كل حصة واجب منزلي بما يتناسب مع ما أنجز في تلك الحصة ، ومتابعة إنجاز الطلبة له في الحصة التالية؛ حتى يتسنى له معالجة القصور لدى الطلاب ؛ وعلى المدرس أن يعمل على تعزيز الجانب الإيجابي للواجبات المنزلية .

– لايجاد المساحة التقريبية لمنطقة مستوية فوق محور السينات ، محصورة ببيان الدالة د(س) والمستقيمات س = ا ، س = ب نتبع الخطوات التالية :

١ – تقسيم الفترة [ا ، ب] إلى ن من الفترات الجزئية المتساوية الطول بحيث يكون طول كل فترة يساوي $\frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}}$ ، أي أن $\Delta \text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}}$ حيث $\Delta \text{س}_{\text{ر}}$ يمثل طول الفترة .

٢ – التأكيد على اختيار النقطة $\text{س}^{*}_{\text{ر}}$ من الفترة $[\text{س}_{\text{ر}-١} ، \text{س}_{\text{ر}}]$ أي أن $\text{س}^{*}_{\text{ر}} = \text{ا} + \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}} \text{ر}$ حيث ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . ، ن ثم يوجد $\text{د}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})$.

٣ – توضيح أن مساحة المستطيل الذي قاعدته Δ س$_ر$ وارتفاعه د(س$^*_ر$) تساوي [د(س$^*_ر$) Δ س$_ر$]
أي أن سط$_ر$ = د(س$^*_ر$) . Δ س$_ر$ ،حيث سط$_ر$ هي مساحة المستطيل الذي رتبته ر .

٤ – توضيح أن مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين الدالة د (س) والمستقيمات س = أ ، س = ب تساوي مجموع مساحات المستطيلات ، أي أن سط$_أ^ب$ = مجـ$_{ر=١}^{ن}$ د(س$^*_ر$) Δ س$_ر$.

٥ – توضيح أنه كلما زاد عدد الفترات ن إلى ما لانهاية فإن طول الفترة تقترب من الصفر ، أي أن :

ن $\leftarrow \infty \Leftrightarrow \Delta$ س$_ر$ $\leftarrow$ ٠

وعلى هذا تكون المساحة كما يلي سط$_أ^ب$ = نهـــا$_{ن \leftarrow \infty}$ مجـ$_{ر=١}^{ن}$ د(س$^*_ر$) . Δ س$_ر$

٦– تأكيد تعريف التكامل المحدد ، وكيفية التكامل باستخدام التعريف . أي أن :

$\int_{أ}^{ب}$ د (س) ى س = نهـــا$_{ن \leftarrow \infty}$ مجـ$_{ر=١}^{ن}$ د (س$^*_ر$) Δ س$_ر$ ،

والرمز $\int_{أ}^{ب}$ د (س) ى س يُقرأ : "تكامل الدالة د(س) بالنسبة لـ س من س = أ (الحد الأدنى للتكامل) إلى س = ب (الحد الأعلى للتكامل)" .

– توضيح أن التكامل المحدد يمثل قيمة حقيقية .
– توضيح أن الدوال المراد تكاملها متصلة على مجموعة تعريفها، أو على الفترة المعطاة في التكامل .
– إعطاء خواص التكامل المحدد ويدعم كل خاصية بأمثلة كافية .
– إعطاء المبرهنات الخاصة بالتكامل المحدد ؛ والتأكيد على برهنة مبرهنتي المقارنة والحدين الأعلى والأدنى ويدعم كل منهما بالأمثلة والتدريبات الصفية الكافية .
– يمهد للتكامل غير المحدود بالأساليب المناسبة والشيقة .

وبشكل عام على المدرس مراعات ما يلي عند تدريس هذه الوحدة:

١ – اعطاء بعض الدوال، ويُطلب من الطلبة إيجاد المشتقة الأولى لكل منها .
٢ – اعطاء مشتقات بعض الدوال ، ويُطلَب من الطلبة إيجاد هذه الدوال .
٣– استنتاج تعريف التكامل غير المحدد، ويُبيّن سبب تسميته ويدعم ذلك بالأمثلة والتدريبات الصفية .
– التأكيد على أن التكامل هو عملية البحث عن دالة،معطى لدينا مشتقتها الأولى .
– إعطاء قواعد تكاملات الدوال الشهيرة ودعمها بالأمثلة والتدريبات الصفية .
– التأكيد على صحة التكامل باشتقاق الطرف الأيسر،ومساواته بالدوال المراد تكاملها قبل إجراء عملية التكامل مباشرة .
– إعطاء مبرهنة العلاقة بين التكامل غير المحدد، والتكامل المحدد واستخدامها في حل الأمثلة والتمارين.
– إعطاء مبرهنة القيمة المتوسطة في حساب التكامل واستخدامها في حلول الأمثلة والتمارين
– التركيز على تكامل الدوال المثلثية التي قاعدتها ليست مباشرة، وذلك بتحويلها إلى قواعد شهيرة مثل جا^٢ س ، جتا^٤ س ، جا أ س جتا ب س

– استخدام التعويض المناسب للدوال التي ليس لها قواعد تكامل مباشرة .

– التأكيد على القاعدة $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}}\ \text{د}'(\text{س})\ \text{ءس} = \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}$ ، ن $\neq -1$

– في حالة التكامل بالتعويض في التكامل المحدد يؤكِّد على إيجاد حدي التكامل بالنسبة للمتغير الجديد .

– توضيح الحالات التي يُستخدم فيها طريقة التكامل بالتجزئة التي يكون فيها التكامل عبارة عن حاصل ضرب دالتين إحداهما على الأقل غير قياسية مثل :

كثيرة حدود × (دالة مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية) .

– عند تكامل الدوال الكسرية التي بسطها لا يمثّل مشتقة المقام يؤكد على توضيح ما يلي :

أ) إذا كان احد عوامل المقام من الدرجة الثانية ، $\Delta > 0$ ، يُجزأ الكسر كما في كتاب الطالب .

ب) إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام، يحلل المقام إلى عوامل أولية، وتُجزئ هذه العوامل كما في كتاب الطالب .

جـ) إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام تُجرى خوارزمية القسمة .

د) إذا كان المقام على صورة أ س^2 + ب س + جـ ، $\Delta > 0$ ، نحلل المقدار بإكمال المربع، كما في كتاب الطالب.

– لإيجاد نقاط تقاطع الدالة : ص = تا(س) : مع الدالة : ص = ر(س) ، نضع تا (س) = ر(س) ولإيجاد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات ص = ٠ ، نضع تا (س) = ٠ ولإيجاد نقاط تقاطع الدالة : س = تا (ص) مع محور الصادات : س = ٠ نضع تا (ص) = ٠

– عند إيجاد مساحة السطح المحصور بين بيان دالة : ص = د(س) والمستقيم ص = جـ ، حيث جـ ثابتاً ؛ نعتبر ص = جـ دالة ثابتة ونوجد نقاط تقاطع د معها ثم نتابع الحل . (تماماً كما نسلك في حلنا عندما يكون المستقيم ص = ٠ (محور السينات)

– من منطلق الفكرة السابقة يمكننا تقديم تمارين إضافية لطلابنا في الحجوم الدورانية ، حيث يكون الدوران حول المستقيم ص = جـ ، أو حول المستقيم س = د

إذا كانت الحدود (حدود التكامل) تنتمي إلى المحور الصادي.

– مساحة السطح المحصور بين دالتين د(س) ، هـ(س) هو الفرق بين مساحة السطح المحصور بين إحداهما ومحور السينات ومساحة السطح المحصور بين الآخر ومحور السينات (كقيمة مطلقة)، أما إذا كان في جهتين مختلفتين من محور السينات فمساحة السطح المحصور بينهما يساوي مجموع المساحتين المذكورتين آنفاً .

– عند إيجاد الحجم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنى الدالتين د(س) ، هـ(س) يكون :

$\text{ح} = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} [(\text{د}(\text{س}))^2 - (\text{هـ}(\text{س}))^2]\ \text{ءس}$ حيث أ ، ب هما نقطتا تقاطع الدالتين د(س) ، هـ(س)

– الحجم والمساحة قيم قياسية و دائماً موجبة ، مهما كانت نتائج التكاملات .

– للرسم أهمية كبيرة في تطبيقات التكامل، فهي تقدِّم صورة واضحة عن معطيات المسألة وتسهِّل عملية الحل .

٧ – ١ التكامل المحدَّد

عدد الحصص : (٨) حصص .

الأهداف

– يقسم الفترة [ا ،ب] إلى ن فترة جزئية متساوية الطول .
– يوجد طول فترة معطاة .
– يوجد سط ر لدالة معطاة عند س = ا ، س = ب .
– يعرِّف التكامل المحدد .
– يميز الدوال القابلة للتكامل .
– يكامل دوالاً باستخدام تعريف التكامل .
– يذكر خواص التكامل .
– يقارن بين تكامل دالتين .
– يوجد الحدين الأدنى والأعلى لتكامل دالة .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا البند في ثمان حصص على النحو التالي :

الحصتان الأولى : المساحة التقريبية .
الحصة الثانية : أمثلة وتمارين صفية .
الحصة الثالثة : التكامل المحدد .
الحصة الرابعة : أمثلة وتمارين صفية .
الحصتان الخامسة والسادسة : خواص التكامل المحدد ومبرهناته
الحصتان السابعة والثامنة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة الثامنة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

أ – أيهما أكبر $\int_{1}^{3} \text{س}^{2}\, \text{ءس}$ أم $\int_{1}^{3} \text{س}\, \text{ءس}$

ب– أوجد الحدين الأدنى والأعلى لـ $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \text{جتا س}\, \text{ءس}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ – ١)

لحل التمرين [١] تتبع الخطوات التالية :

– تجزئة الفترة [ا ، ب] إلى ن فترة جزئية متساوية بحيث $\Delta \text{س}_{\text{ر}} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}}$
– يوجد $\text{س}^{*}_{\text{ر}}$ ؛ $\text{د}(\text{س}^{*}_{\text{ر}}) = \text{ا} + \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ن}}\,\text{ر}$
– يستخدم التعريف $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{د}(\text{س})\, \text{ءس} = \lim\limits_{\text{ن} \to \infty} \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{د}(\text{س}^{*}_{\text{ر}})\, \Delta \text{س}_{\text{ر}}$
– يستخدم قيم المجاميع المناسبة .

أ) ٩ ب) ٣٦

جـ) $\frac{ب^٢-أ^٢}{٢}$ د) $\frac{أ}{٣}$

هـ) $\int_{-٢}^{٣} |س - ٢| ء س = \int_{-٢}^{٢} -(س-٢) ء س + \int_{٢}^{٣} (س-٢) ء س$

ثم نتبع الخطوات نفسها فيكون الناتج $\frac{١٧}{٢}$

[٢] أ) $\forall$ س $\in$ [١ ، ٢] نجد أن: $(٢ س - ٤) \leqslant ٠ \Leftarrow \int_{١}^{٢} (٢ س - ٤) ء س \leqslant ٠$

[٣] أ) نضع $\sqrt{س} - س^٢ = \sqrt{س}(١ - س\sqrt{س})$

$\therefore ٠ \leqslant س \leqslant ١ \Leftarrow س \leqslant ١ \Leftarrow س^٢ \leqslant ١ \Leftarrow س^٤ \leqslant س$

$\Leftarrow س^٢ \leqslant \sqrt{س} \Leftarrow \sqrt{س} \geqslant س^٢$

$\therefore \int_{٠}^{١} \sqrt{س}$ ء س أكبر من $\int_{٠}^{١} س^٢$ ء س

ب) $س^{\frac{١}{٣}} - س^{\frac{١}{٥}} = س^{\frac{١}{٥}} (س^{\frac{٢}{١٥}} - ١)$

$\because -١ \leqslant س \leqslant ٠ \Leftarrow س^{\frac{١}{٥}} \leqslant ٠$ ، $س^{\frac{٢}{١٥}} - ١ \leqslant ٠ \Leftarrow س^{\frac{١}{٥}} (س^{\frac{٢}{١٥}} - ١) \geqslant ٠$

$\therefore س^{\frac{١}{٣}} - س^{\frac{١}{٥}} \geqslant ٠ \Leftarrow س^{\frac{١}{٣}} \geqslant س^{\frac{١}{٥}} \Leftarrow \int_{-١}^{٠} \sqrt[٣]{س}$ ء س $\geqslant \int_{-١}^{٠} \sqrt[٥]{س}$ ء س

[٤] أ) نضع $س^٢ - س^٣ = س^٢ (١ - س)$

$\forall$ س $\in$ [١ ، ٢] ، $س^٢ \geqslant ١$ ؛ $(١ - س) \leqslant ٠$

$\therefore س^٢(١ - س) \leqslant ٠ \Leftarrow س^٢ \leqslant س^٣ \Leftarrow \int_{١}^{٢} س^٢$ ء س $\leqslant \int_{١}^{٢} س^٣$ ء س

د) نضع $س^٢ - ٢ س + ١ = (س - ١)^٢$

$\forall$ س $\in$ [١ ، ٤]، $(س - ١)^٢ \geqslant ٠ \Leftarrow س^٢ \geqslant ٢ س - ١$

$\therefore \int_{١}^{٤} س^٢$ ء س $\geqslant \int_{١}^{٤} (٢ س - ١)$ ء س

هـ) نضع جتا س - جا س = جتا س - جتا $(\frac{\pi}{٢} - س) = -\sqrt{٢}$ جا $(س - \frac{\pi}{٤})$

$\forall$ س $\in$] $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ [نجد أن : $-\sqrt{٢}$ جا $(س - \frac{\pi}{٤}) \leqslant ٠ \Leftarrow$ جتا س - جا س $\leqslant ٠$

$\therefore$ جتا س $\leqslant$ جاس $\Leftarrow \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا س ء س $\leqslant \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س ء س

[٥] أ) ٢ ، ٥ ، ب) صفر ، ١٢ ، جـ) ـ ٥ ، ٧٥ ، د) $\frac{١}{٧}$ ، ١ ، هـ) ١ ، ٢

و) $\frac{\pi}{٨\sqrt{٣}}$ ، $\frac{\pi}{١٢}$ ، ز) $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{\sqrt{٣}}$ ، ح) $-\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، ط) ٠ ، ٤ لوه ، ي) ٣ ، ٣ $هـ^٣$

٧ – ٢ التكامل غير المحدَّد

عدد الحصص : (١٠) حصص .

الأهداف

– يعرِّف التكامل غير المحدد .
– يثبت مبرهنة (٧ –٧) .
– يطبِّق القاعدة $\int س^{ن}\, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ ، حيث ن $\neq$ –١ .
– يوجد ثابت التكامل .
– يثبت مبرهنة (٧ – ٩) ويستخدمها .
– يثبت مبرهنة (٧ – ١٠) ويستخدمها .
– يطبّق قواعد تكاملات الدوال الشهيرة .

تنفيذ حصص البند

ينفِّذ هذا البند في عشر حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التكامل غير المحدَّد

الحصتان الثانية والثالثة : القاعدة $\int س^{ن}\, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$ وإيجاد ثابت التكامل

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

الحصة الخامسة : المبرهنة (٧–٩) .

الحصة السادسة : المبرهنة (٧– ١٠) .

الحصتان السابعةوالثامنة : قواعد تكاملات الدوال الشهيرة.

الحصتان التاسعة والعاشرة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائياً من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة العاشرة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

احسب ما يلي :

١ – $\int (٣ س^{٢} – هـ^{س} + \frac{٣}{س})\, ء س$

٢ – $\int (س^{٢} + ٣ س – ٥)^{٣}\, ء س$

٣ – $\int (ظا^{٢} س – قتا س ظتا س)\, ء س$

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ – ٢)

[١] صفر

[٢] $\frac{٢}{٧} س^{\frac{٧}{٢}} – \frac{٤}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} – س + ث$

[٣] $\frac{١٣}{٣}$

[٤] $\frac{س^{٢}}{٢} – ٦ س + ٩ لو |س| + ث$

[٥] $\frac{٣}{٢} – ٢ لو ٢$

[٦] ١٠ لو ٢

[٧] $٢\sqrt{س} – ٤\sqrt[٤]{س} + ث$

[٨] ١٩,٩

[٩] $\text{٣}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}} + \frac{\text{٢}}{\sqrt{\text{س}}} + \text{ث}$

[١٠] $\frac{\text{٩}}{\text{٤}} + \sqrt{\text{٣}} - \sqrt{\text{٢}}$

[١١] $\frac{\text{٣٤}}{\text{٣}}$

[١٢] ٥

[١٣] $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٥}}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \text{ث}$

[١٤] $\frac{\text{٤٦}}{\text{٣}}$

[١٥] ١

[١٦] $-\sqrt{\text{٣}} + \text{٢}$

[١٧] $\text{ظا س} - \text{س} + \text{ث}$

[١٨] $\frac{\text{ظا ا س}}{\text{ا}} + \text{ث}$

[١٩] $\text{٢} - \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

[٢٠] $\frac{-\text{قتا ا س}}{\text{ا}} + \text{ث}$

[٢١] $\text{س}^{\text{٢}} - \frac{\text{٣ظتا ٥ س}}{\text{٥}} - \text{٣ س} + \text{ث}$

[٢٢] $\frac{\pi}{\text{٦}} - \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٨}}$

[٢٣] $\frac{\text{ظا ٣ س}}{\text{٣}} - \text{٢} \frac{\text{ظتا ٥س}}{\text{٥}} + \text{ث}$

[٢٤] $-\text{٣} \frac{\text{ظتا ٥س}}{\text{٥}} + \text{٥ لو} |\text{س}| + \text{ث}$

[٢٥] $\text{هـ}^{\text{٢}} - \text{١}$

[٢٦] $-\frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{هـ}^{-\text{٣س}} + \frac{\text{٢}^{\text{س}}}{\text{لو٢}} + \text{٣ س} + \text{ث}$

[٢٧] $\frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{٢}} + \text{هـ}^{\text{س}} + \text{س} + \text{ث}$

[٢٨] $-\frac{\text{جتا ٥ س}}{\text{١٠}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{٢}} + \text{ث}$

[٢٩] $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٨}}$

[٣٠] $-\frac{\text{جا ٧ س}}{\text{١٤}} + \frac{\text{جا٣س}}{\text{٦}} + \text{ث}$

[٣١] $-\frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{قا} (\text{١} - \text{٢س}) + \text{ث}$

[٣٢] $\text{١} - \text{٢ لو ٢}$

[٣٣] $\text{٤ س} - \text{٢ هـ}^{\text{س}} + \frac{\text{هـ}^{\text{٢س}}}{\text{٢}} + \text{ث}$

[٣٤] ٢

[٣٥] ٤

[٣٦] ٣

[٣٧] صفر أو $-\text{٢}$

[٣٨] جـ = ٠ أو جـ = $\sqrt{\text{٢}}$

[٣٩] جـ = $\frac{-\text{٤}}{\text{٣}}$ أو جـ = ٢

[٤٠] جـ = −١ أو جـ = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$

[٤١] جـ = ٠ أو جـ = ٢

[٤٢] $\text{ل} (\text{س}) = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٣ س} - \text{٩}$

[٤٣] $\text{ص} = \text{لو} \left| \frac{\text{س}}{\text{٢}} \right| + \text{٣}$

[٤٤] $\text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}} \text{جتا ٣ س} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

[٤٥] $\text{ص} = \text{لو} |\text{س}| + \text{٢}$

[٤٦] لوص = لو س

[٤٧] $\text{ص}^{\text{٢}} = \text{س}^{\text{٢}} + \text{٩}$

[٤٨] $\text{ص} = \frac{\text{١}}{\text{٥} - \text{٢ س}}$

٧- ٣ التكامل بالتعويض

عدد الحصص : (٦) حصص .

الأهداف

- يتعرَّف التعويض في التكامل .
- يوجد التكامل باستخدام التعويض .
- يوجد التكامل المحدد باستخدام التعويض .
- يحدّد التعويض المناسب لإِيجاد تكامل محدود أو غير محدود .
- يطبِّق القاعدة $\int [\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}} \cdot \text{دَ}(\text{س})\, \text{ءس} = \frac{[\text{د}(\text{س})]^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$ ، $\text{ن} \neq -١$.
- يوجد حدي التكامل في المتغير الجديد (بعد التعويض).

تنفيذ حصص البند

ينفَّذ هذا البند في ست حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التعريف بالتعويض في التكامل .

الحصة الثانية : صيغة التكامل بالتعويض في التكامل .

الحصة الثالثة : التكامل بالتعويض في التكامل المحدَّد .

الحصة الرابعة : التعويضات .

الحصتان الخامسة والسادسة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائياً من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة السادسة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

احسب $\int (٣\text{س}^٢ + ٢)^٥ \, \text{س} \, \text{ءس}$

إرشادات وإِجابات : تمارين (٧ - ٣)

[١] $\frac{١}{٣٥}(٥\text{س} + ٤)^٧ + \text{ث}$

[٢] $\frac{-١}{٢}(\frac{١}{٣}\text{س} - ٦)^{-٦} + \text{ث}$

[٣] $\frac{٤}{٩}(٣\text{ص} + ١)^{\frac{٤}{٣}} + \text{ث}$

[٤] $\frac{-١}{١٠(٥\text{ع} + ١)^٢} + \text{ث}$

[٥] $(٣\text{ع} + ٥)^{\frac{١}{٣}} + \text{ث}$

[٦] $\frac{١}{١٢}(\text{ص}^٢ + ٤)^٦ + \text{ث}$

[٧] $-\frac{١}{٨}(٧ - ٢\text{س}^٢)^٢ + \text{ث}$

[٨] $٣(\text{س}^٢ - ١)^{\frac{١}{٢}} + \text{ث}$

[٩] $\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{ص}^{٣}+٣\text{ص}^{٢}+٧}+\text{ث}$

[١٠] $\frac{٣٤٧١}{٢٠٤٨}$

[١١] $\frac{٥}{٣٩}(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{١٣}{٥}}-\frac{٥}{١٢}(\text{س}^{٣}+٢)^{\frac{٨}{٥}}+\text{ث}$

[١٢] $\frac{\text{جا}^{٨}\text{س}}{٨}+\text{ث}$

[١٣] $\frac{٣}{٥}(\sqrt[٣]{\text{س}}+٤)^{٥}+\text{ث}$

[١٤] ٠

[١٥] $-\frac{١}{٣}$

[١٦] ١

[١٧] $١+\frac{\pi}{٢}$

[١٨] $\text{لو}\,|\text{جا س}|+\text{ث}$

[١٩] $\frac{-٢}{١٥}(٩-٥\,\text{جا س})^{\frac{٣}{٢}}+\text{ث}$

[٢٠] $\frac{٣}{٨}\text{س}-\frac{١}{٤}\text{جا ٢س}+\frac{١}{٣٢}\text{جا ٤س}+\text{ث}$

[٢١] $\text{هـ}^{-\text{جتاس}}+\text{ث}$

[٢٢] $-\text{لو}\,|\text{جتا س}|+\text{ث}$

[٢٣] $\int\frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٨}+\text{س}}=\int\frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٨}(١+\frac{١}{\text{س}^{٧}})}$ ثم ضع

$\text{ص}=(١+\frac{١}{\text{س}^{٧}})$ والجواب $\frac{١}{٧}\text{لو}\,\left|\frac{\text{س}^{٧}}{\text{س}^{٧}+١}\right|+\text{ث}$

[٢٤] $\frac{١}{٣}(\text{لو س})^{٣}+\text{ث}$

[٢٥] $\text{جا}\,(\text{لوس})+\text{ث}$

[٢٦] $-\frac{١}{٢}\text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}^{٢}}}+\text{ث}$

[٢٧] $٤\,(\text{جا}^{٢}\text{ص}+٥)^{\frac{١}{٢}}+\text{ث}$

[٢٨] لو٢

[٢٩] $\text{لو}\,|\text{جا}^{٢}\text{ع}+٥\,\text{جاع}|+\text{ث}$

[٣٠] $\frac{-١}{٤}\text{جتا}^{٤}\text{ع}+\text{ث}$

[٣١] $\text{هـ}^{٢\text{س}}+\text{هـ}^{٣\text{س}}+\text{ث}$

[٣٢] $\frac{٢}{٥}(\text{س}+٢)^{\frac{٥}{٢}}-\frac{٤}{٣}(\text{س}+٢)^{\frac{٣}{٢}}+\text{ث}$

[٣٣] $\frac{١}{١+\text{جتا س}}+\text{ث}$

[٣٤] نفس أسلوب حل التمرين [٢٣]

والجواب $\frac{١}{٣}\text{لو}\,\left|\frac{\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٣}+١}\right|+\text{ث}$

[٣٥] $-\text{ظتا هـ}^{\text{س}}+\text{ث}$

[٣٦] $-\frac{١}{٢}\text{ظا}\,(٢\text{هـ}^{-\text{س}}+٥)+\text{ث}$

[٣٧] $\frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢}+\text{لو}\,|\text{جتا س}|+\text{ث}$

٧ : ٤ التكامل بالتجزئة

عدد الحصص : (٣) حصص .

الأهداف

– يكتب صيغة التكامل بالتجزئة .
– يوجد تكامل حاصل ضرب دالتين باستخدام التجزئة .
– يميِّز التكاملات المعطاة له ويحدد متى يستخدم التجزئة .

تنفيذ حصص البند

ينفَّذ هذا البند في ثلاث حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : التكامل بالتجزئة .

الحصة الثانية : أمثلة إضافية وتمارين صفية .

الحصة الثالثة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة الثالثة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

أوجد $\int$ جتا^{٣} س ء س باستخدام التجزئة .

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ – ٤)

[١] – س^{٢} جتا س + ٢ س جا س + ٢ جتا س + ث

[٢] $\frac{\pi}{٨}$

[٣] $\frac{١}{٢}$ س جا ٢ س + $\frac{١}{٤}$ جتا ٢ س + ث

[٤] – $\frac{١}{٢}$ (س+٤) جتا٢ س + $\frac{١}{٤}$ جا٢ س + ث

[٥] $\frac{١}{٢}$ س (٣س + ١ + ٣ جا ٢ س)
+ $\frac{١}{٤}$ (جا ٢ س + ٣ جتا ٢ س) + ث

[٦] هـ^{٢}

[٧] – (س^{٢}–١) جتاس +٢س جاس+٢جتاس+ث

[٨] – جا^{٢} س جتاس – $\frac{٢}{٣}$ جتا^{٣} س + ث

[٩] $\frac{١}{٢}$ هـ^{س} (جاس + جتاس) + ث

[١٠] س^{٣} جاس + ٣ س^{٢} جتاس – ٦ س جا س
– ٦ جتا س + ث

[١١] (س^{٢} + س) هـ^{س} – (٢س+١) هـ^{س} +٢ هـ^{س} + ث

[١٢] – $\frac{١}{٢}$ س^{٢} جتاس^{٢} + $\frac{١}{٢}$ جاس^{٢} + ث

[١٣] –٢ $\sqrt{س}$ جتا $\sqrt{س}$ + ٢ جا $\sqrt{س}$ + ث

[١٤] ١

[١٥] – س ظتا س + لو |جاس| + ث

[١٦] س^{٣} هـ^{س} – ٣ س^{٢} هـ^{س} + ٦س هـ^{س} – ٦ هـ^{س} + ث

[١٧] $\frac{١}{٤}$ س^{٤} لو ٢ س – $\frac{١}{١٦}$ س^{٤} + ث

[١٨] س ظا س + لو |جتا س| + ث

٧ ـ ٥ تكامل الدوال الكسرية

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

– يوجد تكامل دالة كسرية، درجة بسطها أصغر من درجة مقامها .
– يجزئ الكسر إذا كان المقام من الدرجة الأولى .
– يجزئ الكسر إذا كان المقام على صورة ﺃ س^{٢} + ب س + جـ ، Δ > ٠ ، ويوجد الثوابت التي فرضها ٠ .
– يجزئ الكسر إذا كان أحد عوامل المقام من الدرجة الثانية ، Δ > ٠ .
– يوجد خوارزمية القسمة في حالة درجة البسط أكبر من أو يساوي درجة المقام .

تنفيذ حصص البند

ينفَّذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :
الحصة الأولى : الحالتان الأولى والثانية للدوال الكسرية .
الحصة الثانية : الحالة الثالثة مع الحالة التي يكون فيها درجة البسط أكبر أو يساوي درجة المقام .
الحصة الثالثة : أمثلة متنوعة .
الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

أوجد $\int \frac{\text{٢س} + ٣}{\text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٣)}\, \text{ءس}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٧ – ٥)

[١] $\frac{٤}{٥}\,\text{لو}\,|\text{س} - ٤| + \frac{١}{٥}\,\text{لو}\,|\text{س} + ١| + \text{ث}$

[٢] $\frac{١}{٤}\,\text{لو}\,\left|\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ١}\right| + \text{ث}$

[٣] $\text{لو}\,\sqrt{\frac{١ + \text{س}}{١ - \text{س}}} + \text{ث}$

[٤] $\frac{١}{٦}\,\text{لو}\,\left|\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٣}\right| + \text{ث}$

[٥] $\text{لو}\,\left|\frac{(\text{س} - ٢)^{٢}}{\text{س}}\right| + \text{ث}$

[٦] $-\frac{١}{٤}$ لو | س | $-\frac{١}{٨}$ لو | س + ٢ | + $\frac{٣}{٨}$ لو | س − ٢ | + ث

[٧] س + $\frac{١}{٢}$ لو | $\frac{س - ١}{س + ١}$ | + ث

[٨] س − ٣ لو | س − ٢ | + ٨ لو | س − ٣ | + ث

[٩] س + لو | س − ١ | − لو | س + ١ | + ث

[١٠] − لو | س | + ٣ لو | س − ١ | + ث

[١١] − لو | س | + لو | (س − ١)^{٣} (س + ١) | + ث

[١٢] $\frac{س^{٢}}{٢}$ + س − $\frac{٢}{٣}$ لو | س − ٢ | + لو | س | − $\frac{١}{٣}$ لو | س + ١ | + ث

[١٣] − لو | س | + $\frac{٢ + \sqrt{٢}}{٤}$ لو | س − $\sqrt{٢}$ | + $\frac{٢ - \sqrt{٢}}{٤}$ لو | س + $\sqrt{٢}$ | + ث

[١٤] $\frac{١}{٢}$ لو | $\frac{\text{ظتا س} - ١}{\text{ظتا س} + ١}$ | + ث

[١٥] $\frac{١}{٢}$ لو | $\frac{١ + هـ^{س}}{١ - هـ^{س}}$ | + ث

٧ − ٦ تطبيقات التكامل

ينفذ هذا البند في ٩ حصص على النحو التالي :

٧−٦−١ حساب بعض المساحات المستوية

عدد الحصص : (٤) حصص .

الأهداف

− يوجد مساحةسطح مستوٍ محصور بين بيان دالة ص = د (س) ومحور السينات ، س = ﺍ ، س = ب
− يوجد مساحة سطح مستوٍ محصور بين بيان الدالة تا س = (ص) والمستقيمات س = ٠ ، ص = ﺍ ، ص = ب
− يوجد مساحة سطح مستوٍ محصور بين بيان دالة تقطع مستقيم .
− يوجد مساحة سطح مستوٍ محصور بين بيان دالتين .

تنفيذ حصص البند

يُنفذ هذا البند في أربع حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : مساحة سطح محصور بين منحنى دالة ص = د(س) والمستقيمات ص = ٠ ، س = أ ، س = ب

الحصة الثانية : مساحة سطح محصور بين منحنى دالة س = تا (ص) والمستقيمات س = ٠، ص = أ ، ص = ب

الحصة الثالثة : مساحة سطح محصور بين دالتين د ، هـ أو أكثر.

الحصة الرابعة : تمارين صفية .

التقويم

يتم التقويم بنائيًا من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة الرابعة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

احسب مساحة السطح المحدد بالمنحنيين : $\text{ص}_{١} = \text{س}^{٣}$ ، $\text{ص}_{٢} = \sqrt{\text{س}}$

إرشادات وإجابات : تمارين (٧-٦-١)

[٢] $\frac{١٢٥}{٦}$ وحدة مربعة

[٣] $\text{ص}^{٢} = ٤\,\text{س} \Rightarrow \text{ص} = \pm ٢\sqrt{\text{س}}$

$$\text{ص} = ٠ \text{ ، } \text{س} = ٠ \Rightarrow \text{سط}_{٤}^{٩} = \int_{٤}^{٩} \left(٢\sqrt{\text{س}} - (-٢\sqrt{\text{س}}) \right) \text{ءس}$$

$$= ٤ \int_{٤}^{٩} \sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{٤ \times ٢}{٣}\ \text{س}^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٤}^{٩} = \frac{١٥٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

[٤] $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة

[٦] ($\text{ب}^{٢}$ لو ٢) وحدة مربعة

[٧] (٤ لو ٢ $- \frac{٣}{٢}$) وحدة مربعة

[٨] $\frac{١}{٢}$ وحدة مربعة

[٩] $\frac{٢٤٤}{٣}$ وحدة مربعة

٧-٦-٢ الحجوم الدورانية

عدد الحصص : (٥) حصص .

الأهداف

- يوجدحجم الشكل الناتج من دوران منطقة مستوية حول محور السينات
- يوجد حجم الشكل الناتج من دوران منطقة مستوية حول محور الصادات

تنفيذ حصص البند

يُنفِّذ هذا البند في خمس حصص على النحو التالي :

الحصة الأولى : حجم الشكل الناتج من الدوران حول محور السينات لمنطقة محصورة بين منحنى دالة د (س) والفترة [ٲ ، ب] .

الحصة الثانية : حجم الشكل الناتج من الدوران حول محور الصادات لمنطقة محصورة بين منحنى دالة د (س) والفترة [ٲ ، ب] .

الحصة الثالثة : حجوم الأجسام الدورانية : الإسطوانة – المخروط الدائري القائم – المخروط الدائري القائم الناقص بالقاعدتين المتوازيتين – الكرة

الحصة الرابعة : حجم الجسم الدوراني الناتج من دوران سطح حول مستقيم يوازي محور الصادات ولا ينطبق على ايٍّ منهما .

الحصة الخامسة : تمارين صفية .

التقويم يتم التقويم بنائياً من خلال متابعة مشاركة التلاميذ أثناء الشرح، وأدائهم لحلول الواجبات الصفية أو المنزلية وفي نهاية الحصة الخامسة يُعطى تمرين مشابه للتمرين التالي :

أوجد حجم الشكل الناتج من دوران المنطقة المستوية والمحدَّد بالمنحنى :

ص = س هـ^س والمستقيمات س = ٠ ، س = ١ ، ص = ٠ دورة كاملة حول محور السينات .

إرشادات وإجابات : تمارين (٧-٦-٢)

[١] ٲ) $\frac{٨\pi}{٣}$ وحدة مكعبة

ب) $\frac{٤\pi}{٥}$ وحدة مكعبة

جـ) $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ وحدة مكعبة

ء) π (هـ^{٢} – هـ$^{-٢}$) وحدة مكعبة

ﻫ) ١٦ π وحدة مكعبة

[٢] ٲ) ٩ π وحدة مكعبة

ب) π وحدة مكعبة

[٤] $\frac{\pi}{٢}$ وحدة مكعبة

[٥] $\frac{\pi^{٢}}{٤}$ وحدة مكعبة

[٦] ٢ π [(لو٢)^{٢} – ٢لو٢ +١] وحدة مكعبة

٧ – ٧ اختبار الوحدة

عدد الحصص : (٢) حصتان .

الهدف

يهدف هذا الاختبار إلى قياس مدى تحقق أهداف الوحدة .

تنفيذ الاختبار

يُعطى الاختبار الذي في الدليل أو اختبار مشابه يقوم المدرس بإعداده بحيث يغطيِ أهداف الوحدة حسب الجدول التالي :

رقم السؤال	الفقرة	رقم الهدف
[١]	أ	١ ، ٢
	ب	٣
	جـ	٣
[٢]	أ	٧
	ب	٦
	جـ	٤، ٥، ٨
[٣]	أ	٩
	ب	٥ ، ٨
[٤]	أ	٥ ، ١٠
	ب	٢ ،٤ ، ٥ ، ٨

الاختبار

أجب عن جميع الأسئلة التالية

[١] أ) باستخدام تعريف التكامل المحدَّد : احسب $\int_{١}^{٣} (\text{س}^{٢} - ١)\,\text{ء}\text{س}$

ب) برهن أن : $\int_{١}^{٣} \text{س}^{٢}\,\text{ء}\text{س} \leqslant \int_{١}^{٣} ٤\,\text{س}\,\text{ء}\text{س}$

جـ) أوجد الحدين الأدنى والأعلى للتكامل الآتي :

$$\int_{-١}^{٢} \frac{\text{ء}\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$$

[٢] أ) أوجد قيمة جـ التي تحقِّق مبرهنة القيمة الوسطى إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - \text{س}$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٣]$

ب) إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى دالة يساوي $٣\text{س}^{٢} + \text{س} - ١$ والمنحنى يمر بالنقطة $(٢ ، -٣)$

فأوجد معادلة المنحنى

جـ) احسب ما يلي : ١) $\int \frac{(١ - \text{س})\,\text{ء}\text{س}}{\sqrt{٢\,\text{س} - \text{س}^{٢}}}$

٢) $\int \text{جتا}\sqrt{\text{س}}\;\text{ء}\text{س}$

[٣] أ) احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $\text{ص}^{٢} = ٤\,\text{س}$ والمستقيم $\text{ص} = \text{س}$

ب) احسب ما يلي : ١) $\int \text{جتا}\,٣\,\text{س}\;\text{جا}\,٢\,\text{س}\;\text{ء}\text{س}$

٢) $\int \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}}\,\text{ء}\text{س}$

[٤] أ) احسب الحجم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمستقيمات

$\text{ص} = \text{س} + ١$ ، $\text{ص} = ٠$ ، $\text{س} = ٠$ ، $\text{س} = ٣$

ب) احسب ما يلي :

١) $\int (\text{طا}^{٢}\,\text{أ}\,\text{س} + ٣^{\text{س}})\,\text{ء}\text{س}$

٢) $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}{\text{س}^{٣}}\,\text{ء}\text{س}$

المصطلحات العلمية

Calculus	علم التفاضل والتكامل
Integration	التكامل
Infinite Integral	تكامل غير محدود
Finite Integral	تكامل محدود
Antiderivative of a Function	الدالة الأصلية
Integration Rules	قوانين التكامل
Integration of Trigonometric Functions	تكامل الدوال المثلثية
Integration of Exponential Functions	تكامل الدوال الأسية
Integration by Substitution	التكامل بالتعويض
Integration by Parts	التكامل بالتجزئ
Trigonometric Substitution	التعويضات المثلثية
Mean Value Theorem	مبرهنة القيمة الوسطى
Lower Bound	الحد الأدنى
Upper Bound	الحد الأعلى
Modulus Arithmetic	حساب القياس

المراجع

١– إسهام علماء المسلمين في الرياضيات ، علي عبد الله الرفاع ، المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، دار الشروق بيروت والقاهرة، الطبعة الأولى، ١٩٨١م .

٢ – موسوعة علماء الرياضيات ، عدنان دعنا ، دار أسامة للنشر والتوزيع الأردن، الطبعة الأولى ، ٢٠٠١م .

٣ – أساسيات التفاضل والتكامل ، خالد قاسم سمور ، دار الفكر للطباعة والنشر والتوزيع، الأردن ، عمان، الطبعة الأولى، ٢٠٠٢م .

٤ – سلسلة الشامل في الرياضيات «التفاضل والتكامل» الجزء الثاني ، محمد أبو صالح وآخرون ، دار الفرقان عمان، الطبعة الثانية، ١٩٨٤م

٥ – التفاضل والتكامل الجزء الأول ، عدنان عوض وآخرون، دار الفكر للنشر والتوزيع، عمان ، ١٩٩٠م .

٦ – حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، الجزء الأول ، ج ، ب توماس، منشورات جامعة الفاتح، الطبعة الثانية ١٩٧٩م .

تم دليل المعلم
بحمد الله