موقع منهجي
www.mnhaji.com

وزارة التعليم
Ministry of Education

ملخص مادة الرياضيات 3-1

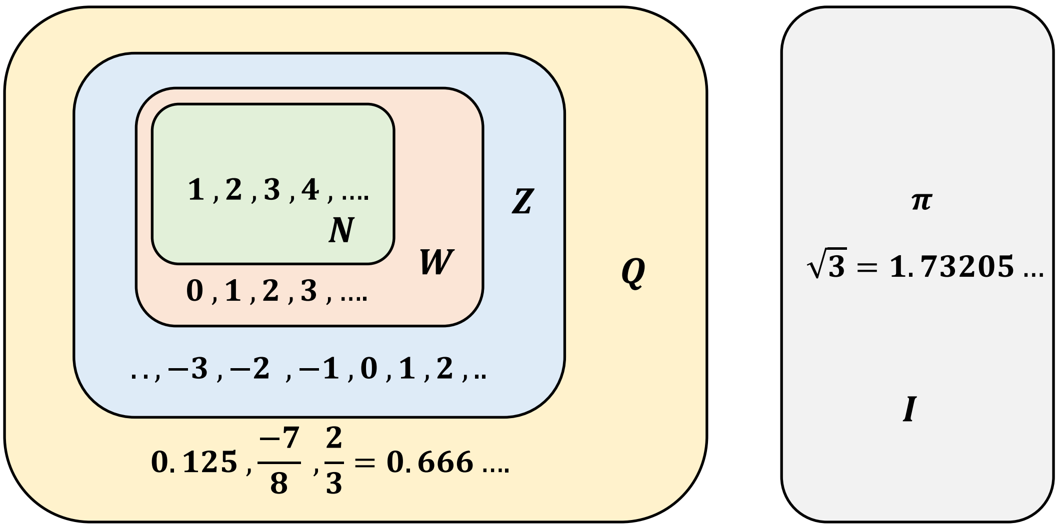
التعليم الثانوي
نظام المسارات
السنة الثالثة

الفصل الأول

تحليل الدوال

مجموعة الأعداد الحقيقية R

$R = Q \cup I$



$N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$ $\qquad$ $I \subset R$

الصفة المميزة للمجموعة

$$\{x \mid -2 < x < 5 , x \in R\}$$

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد	x لها هذه الخصائص ..	الأعداد x حيث ...

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة :

$$x \leq -3$$

الحل :

$$\{x \mid x \leq -3 , x \in R\}$$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي **تقل أو تساوي** -3

رموز الفترات

تستعمل لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

فيستعمل الرمزان " [" أو "] " للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها

بينما يستعمل الرمزان " (" أو ") " للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها .

أما الرمزان " $-\infty$ " أو " ∞ " فيستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة .

فترات محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$
$a < x < b$	(a, b)
$a \le x < b$	$[a, b)$
$a < x \le b$	$(a, b]$

فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة
$x \ge a$	$[a, \infty)$
$x \le a$	$(-\infty, a]$
$x > a$	(a, ∞)
$x < a$	$(-\infty, a)$
$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

الرمزان

$\cup$ رمز الاتحاد: ويعني جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين .

$\cap$ رمز التقاطع: ويعني جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين .

مثال

اكتب المجموعة التالية باستعمال رمز الفترة :

$x < -2$ أو $x > 9$

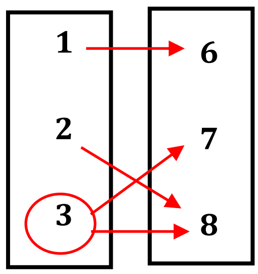
الحل :

$(-\infty, -2) \cup (9, \infty)$

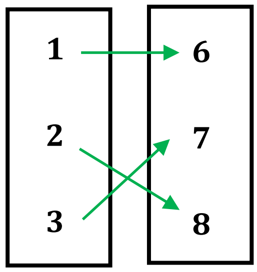
المخطط السهمي — عدديًا

علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B .

مجموعة A

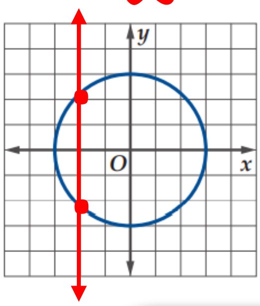


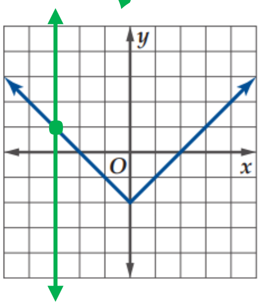
مجموعة B



اختبار الخط الرأسي — بيانيًا

تمثل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة .





تمييز الدالة

متى تكون العلاقة دالة ؟؟

الجداول — عدديًا

تكون دالة عندما ترتبط كل قيمة من x بقيمة واحدة لِـ y

x	y
-2	3
-2	5
1	2

x	y
-2	3
0	5
1	2

المعادلات — جبريًا

$y^2 - 2x = 5$

$3y + 6x = 18$

تكون y دالة في x

نحل المعادلة بالنسبة لـ y

وعندما لا ترتبط أي قيمة لِـ x بقيمتين من y تكون دالة .

رمز الدالة

يستعمل $f(x)$ رمزًا للدالة ويعني قيمة الدالة f عند x وبما أن $f(x)$ تمثل قيمة y التي ترتبط بقيمة x فإننا نكتب $y = f(x)$

المعادلة : $y = -6x$ الدالة المرتبطة بالمعادلة : $f(x) = -6x$

x المتغير المستقل ويمثل قيم المجال

y المتغير التابع ويمثل قيم المدى

إيجاد قيم الدالة

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x .

مثال : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2)^2 + 3(2) + 1$$

$$f(2) = 15$$

إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

الدالة متعددة التعريف : هي التي تعرف بقاعدتين أو أكثر على فترات مختلفة .

نوجد قيمة الدالة $f(x)$ عند قيمة محددة معطاة لـ x

وذلك بتحديد الفترة المناسبة لقيمة x .

مثال : أوجد $f(10)$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 3 \ , & x < 3 \\ -x^3 \ , & 3 \le x \le 8 \\ 3x^2 + 1 \ , & x > 8 \end{cases}$$

أولًا : نحدد الفترة المناسبة لـ $x = 10$

هي الفترة الثالثة

ثم نعوض فيها عن قيمة x

$$f(10) = 3(10)^2 + 1$$

$$f(10) = 301$$

إيجاد مجال الدالة جبرياً

أمثلة	المجال	الدالة
$f(x) = x + 3$ المجال = R	المجال : R	كثيرة حدود
$f(x) = \frac{2+x}{x^2 - 7x}$ $x^2 - 7x \neq 0$ $x(x-7) \neq 0$ $x \neq 0$ $x - 7 \neq 0 \quad \rightarrow x \neq 7$ المجال : $\{x \mid x \neq 0 , x \neq 7 , x \in R\}$	كثيرة حدود / كثيرة حدود المقام $\neq 0$ نوجد قيم x ونستبعدهم من المقام المجال = أصفار المقام $- R$ المجال : $\{x \mid x \neq$ أصفار المقام $, x \in R\}$	كسرية
$f(x) = \sqrt{x-5}$ $x - 5 \geq 0$ $x \geq 5$ المجال : $\{x \mid x \geq 5 , x \in R\}$	$\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}$ ما تحت الجذر ≥ 0 ونحلها وتتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \mid$ الصفة المميزة $, x \in R\}$	جذرية تربيعية
$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x+6}}$ $2x + 6 > 0$ $2x > -6$ $x > -3$ المجال : $\{x \mid x > -3 , x \in R\}$	كثيرة حدود / $\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}$ ما تحت الجذر > 0 ونحلها وتتكون الصفة المميزة المجال : $\{x \mid$ الصفة المميزة $, x \in R\}$	كسرية البسط كثيرة حدود والمقام جذر تربيعي
$f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x-5}$ نوجد البسط: $2x - 3 \geq 0$ المجال : $x \geq \frac{3}{2}$ نوجد أصفار المقام $x - 5 \neq 0$ $x \neq 5$ المجال : $x \neq 5$ المجال : $\{x \mid x \geq \frac{3}{2} , x \neq 5 , x \in R\}$	$\sqrt{\text{ما تحت الجذر}}$ / كثيرة حدود لإيجاد المجال : نستخدم طريقة الجذر للبسط وطريقة الكسرية للمقام	كسرية البسط جذر تربيعي والمقام كثيرة حدود

تقدير قيم الدوال

يستعمل التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة .

في المثال : استعمل التمثيل البياني لتقدير $g(-8)$

ثم تحقق جبريًا وقرب الناتج إلى أقرب جزء من مئة

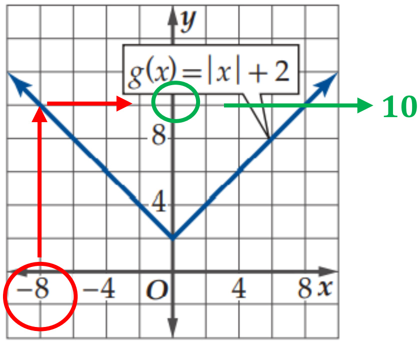
جبريًا :

$g(-8) = |-8| + 2$

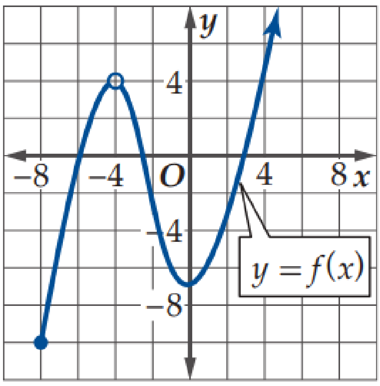
$g(-8) = 8 + 2$

$g(-8) = 10$

بيانيًا :



إيجاد المجال والمدى من خلال التمثيل البياني



المجال

يحدد بيانيًا من محور x

يبدأ المجال من $x = -8$

$x = -4$ ليست في المجال

السهم يدل على استمرارية المجال في الجهة الأخرى .

المجال = $[-8 , -4) \cup (-4 , \infty)$

المدى

يحدد بيانيًا من محور y

يبدأ المدى من $y = -10$

وتزداد قيمة الدالة بلا حدود كما يدل السهم الممتد لأعلى .

المدى = $[-10 , \infty)$

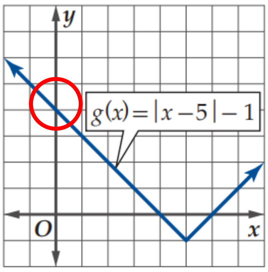
إيجاد المقطع y

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور.

ويمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة.

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y ثم أوجده جبريًا :



بيانيًا : المنحنى يقطع محور y عند النقطة $(0, 4)$

إذن المقطع y هو 4 .

جبريًا : نعوض عن الـ x بـ صفر

$$g(0) = |0 - 5| - 1$$

$$g(0) = 4$$

إيجاد الأصفار

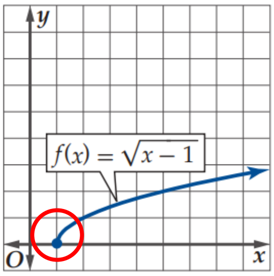
تسمى المقاطع x لمنحنى الدالة أصفار الدالة وتسمى حلول المعادلة

المرافقة للدالة جذور المعادلة ولإيجاد أصفار دالة f

فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل .

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمة تقريبية لأصفارها ثم أوجدها جبريًا :



بيانيًا: المنحنى يقطع محور x عند النقطة $(1, 0)$

إذن المقطع x هو 1.

جبريًا : نعوض عن الـ y بـ صفر

$$0 = \sqrt{x - 1}$$

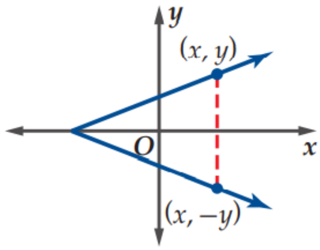
بالتربيع للطرفين

$$x = 1 \leftarrow \quad 0 = x - 1$$

اختبارات التماثل

التماثل حول محور x

بيانياً:



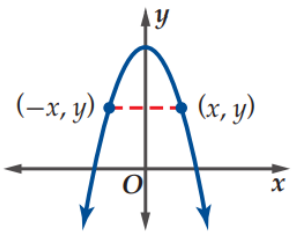
جبرياً:

نعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور y

بيانياً:



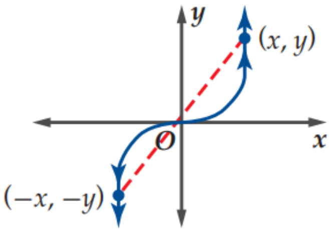
جبرياً:

نعوض عن x بـ $-x$

فيعطي معادلة مكافئة.

التماثل حول محور نقطة الأصل

بيانياً:



جبرياً:

نعوض عن x بـ $-x$

ونعوض عن y بـ $-y$

فيعطي معادلة مكافئة.

الدوال الزوجية والفردية

زوجية متماثلة حول محور y

جبرياً:

لكل x في مجال f

$f(-x) = f(x)$

فردية متماثلة حول نقطة الأصل

جبرياً:

لكل x في مجال f

$f(-x) = -f(x)$

مثال

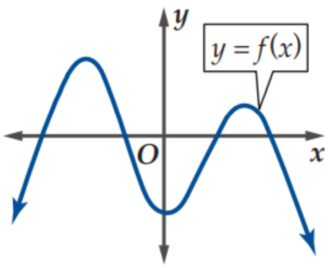
$$f(x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = (-x)^4 + 2$$
$$f(-x) = x^4 + 2$$
$$f(-x) = f(x)$$

ليست زوجية وليست فردية

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$
$$f(-x) = 4\sqrt{-x}$$
$$f(-x) \neq f(x)$$
$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$f(x) = x^3 - 2x$$
$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$$
$$f(-x) = -x^3 + 2x$$
$$f(-x) = -(x^3 - 2x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة المتصلة



تكون الدالة متصلة إذا لم يكن في تمثيلها البياني أي انقطاع أو قفزة.

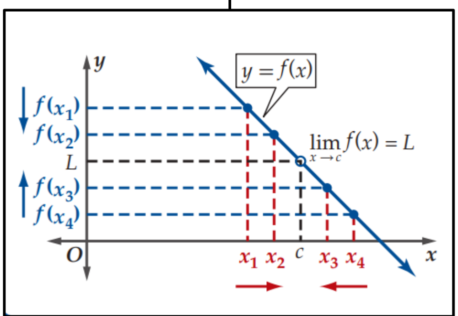
وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه .

نهاية الدالة

اقتراب قيم الدالة من قيمة واحدة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة .

وهي أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ بأن تقترب من قيمة واحدة عندما تقترب x من c من جهتي اليمين واليسار .

النهايات



إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L

عندما تقترب x من c من الجهتين ،

فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L .

ويرمز لها بالرمز :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

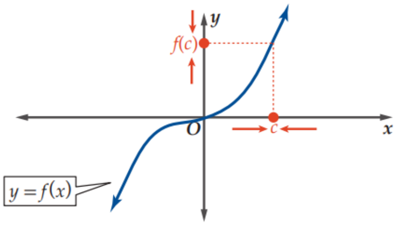
أي : نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L

اختبار الاتصال

يقال أن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حققت الشروط التالية :

1 $f(x)$ معرفة عند c

أي أن $f(c)$ موجودة .



3 $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

2 $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين

أي أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.

مثال

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = x^3$ متصلة عند $x = 0$

الحل :

نتحقق من الشروط الثلاثة .

1 هل $f(0)$ موجودة ؟

$f(0) = 0$ ، الدالة معرفة عند $x = 0$

2 هل $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجودة ؟

نكون جدول يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 0 من اليسار واليمين .

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-1×10^{-6}	-1×10^{-9}		1×10^{-9}	1×10^{-6}	0.001

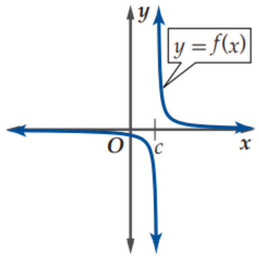
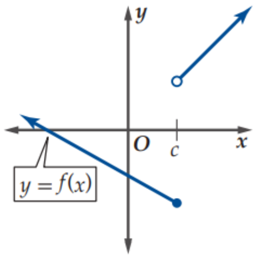
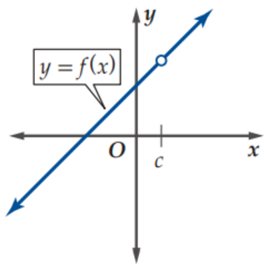
الجدول يبين أنه عندما تقترب قيم x من 0 من اليمين واليسار ، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 0

أي أن : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

3 هل $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ؟

بما أن $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ ، $f(0) = 0$ فإن $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 0$

أنواع عدم الاتصال

التمثيل البياني	نوع عدم الاتصال	شروطها
 إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.	عدم اتصال لانهائي عدم اتصال غير قابل للإزالة	تكون كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\frac{\text{عدد}}{0}$ أي غير معرف .
 إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.	عدم اتصال قفزي عدم اتصال غير قابل للإزالة	تكون الدالة متعددة التعريف $f(x) = \begin{cases} f_1(x) , & x > c \\ f_2(x) , & x \le c \end{cases}$ عند إيجاد النهايات للطرفين من اليمين واليسار تكون غير متساوية $\lim\limits_{x \to c^+} f_1(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f_2(x)$
 إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ويشار إليها بدائرة صغيرة غير مظللة لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.	عدم اتصال قابل للإزالة	تكون الدالة كسرية وعند التعويض بقيمة x الناتج يكون : $\frac{0}{0}$ أي غير معرف . فنعمل على تحليلها لنعيد تعريفها من جديد لتصبح متصلة .

أمثلة على أنواع عدم الاتصال

1

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

عند $x = 0$

$f(0) = \frac{1}{0}$

غير معرف

غير متصل نوعه لانهائي

2

$f(x) = \begin{cases} 5x+4 , & x > 2 \\ 2-x , & x \le 2 \end{cases}$

عند $x = 2$

$f(2) = 2 - x$

$= 2 - 2 = 0$

$\lim_{x \to 2^-} 2 - x = 0$

$\lim_{x \to 2^+} 5x + 4 = 14$

$\neq$

النهايات غير متساوية

غير متصل نوعه قفزي

3

$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

عند $x = 4$

$f(4) = \frac{(4)^2 - 16}{4 - 4} = \frac{0}{0}$

غير معرف

نعيد تعريفها :

$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$

$= \frac{(x-4)(x+4)}{x-4}$

$f(x) = x + 4$

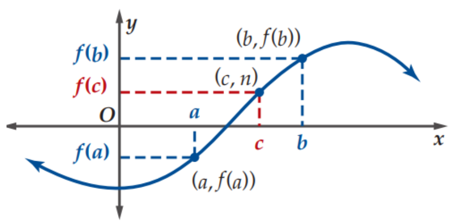
$f(4) = 4 + 4 = 8$

$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} , & x \neq 4 \\ 8 , & x = 4 \end{cases}$

نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$ وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b ، بحيث $f(c) = n$

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة ، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b بحيث $f(c) = 0$ أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:
$f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4 , 4]$

الحل :

أولًا: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

ثانيًا: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهي بين قيم الدالة التي فيها تغير بالإشارات بين العددين -3 و -2

و بين العددين 0 و 1 وبين العددين 1 و 2 .

تقريب الأصفار دون تغيّر الإشارة

مثال

حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة:
$f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$

الحل :

أولًا: نوجد قيم الدالة في الفترة المحددة

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

ثانيًا: نوجد الأعداد الصحيحة التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة

وهنا قيم الدالة لا تتغير إشاراتها عند قيم x المعطاة ولكن $f(x)$ تتناقص عندما

تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار ، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$

من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0.

سلوك طرفي التمثيل البياني

يصف شكل الدالة عند طرفي منحناها ، أي يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x

أو تنقص بلا حدود ، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$

ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني نستعمل مفهوم النهاية .

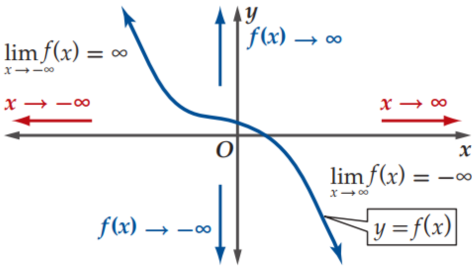
دراسة سلوك طرفي التمثيل البياني

من اليمين

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

من اليسار

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$



كثيرة حدود

من الرسم نحدد السلوك

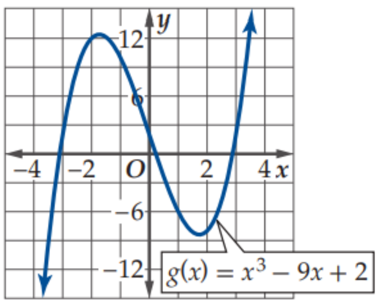
إذا كان :

اتجاه السهم إلى أعلى ∞

اتجاه السهم إلى أسفل $-\infty$

مثال

استعمل التمثيل البياني للدالة لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني :



الحل :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

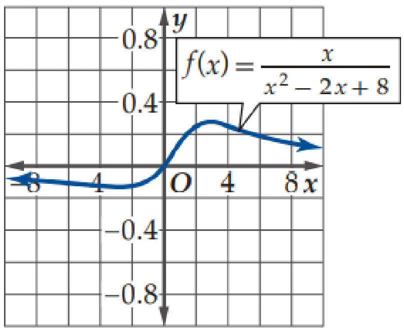
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

كسرية

درجة البسط < درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

مثال :



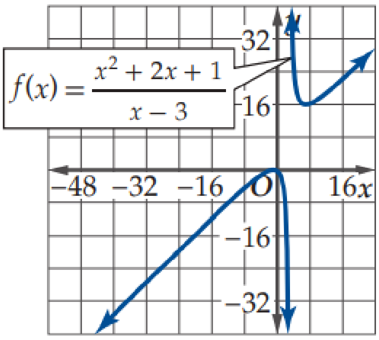
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

درجة البسط > درجة المقام

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

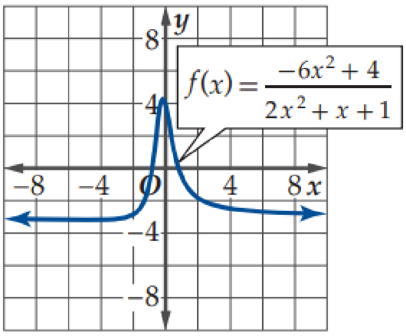
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

درجة البسط = درجة المقام

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) =$

معامل الحد الرئيس
―――――――
معامل الحد الرئيس

مثال :



$$\lim_{x\to\infty} f(x) =$$

$$= \frac{-6}{2} = -3$$

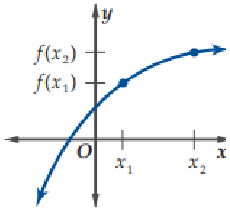
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

خصائص الدالة (متزايدة – متناقصة – ثابتة) :

متزايدة

تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

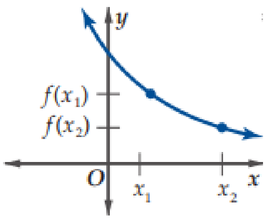
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) < f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$



متناقصة

تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

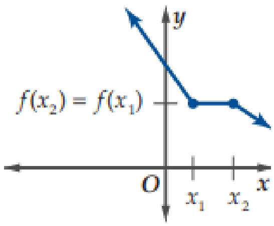
لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$



ثابتة

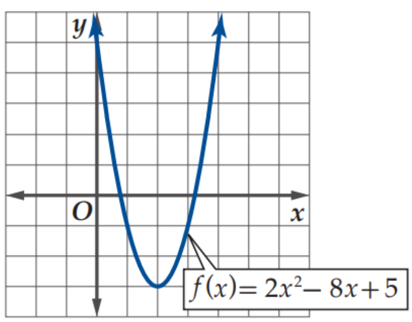
تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة .

لكل x_1 و x_2 في الفترة ، فإن : $f(x_1) = f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$



مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة :

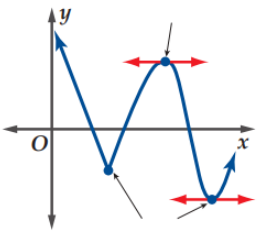


الحل :

الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty , 2)$

الدالة متزايدة في الفترة $(2 , \infty)$

النقاط الحرجة

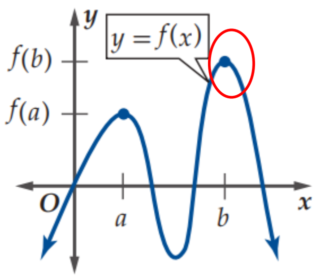
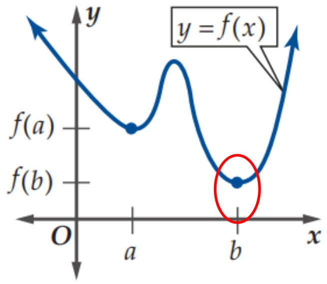


هي النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها

فتكون قمة أو قاعًا في منحنى الدالة .

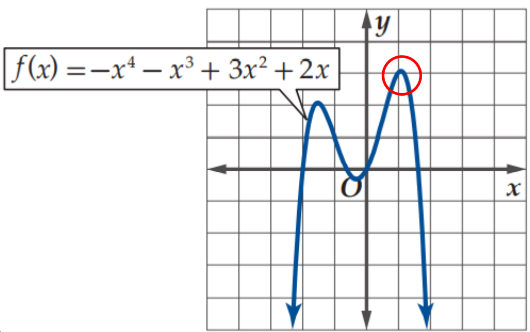
يكون المماس المرسوم للمنحنى عندها إما أفقيًا (ميله صفر) أو عموديًا (ميله غير معرف)
أو أنه لا يوجد عندها مماس ويدل ذلك على وجود قيمة عظمى أو صغرى للدالة .

القيم القصوى المطلقة

العظمى	الصغرى
	
لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأسفل والأكثر علواً هي القيمة العظمى المطلقة . وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في مجالها . يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = b$	لابد أن يكون اتجاه الأسهم للأعلى والأكثر نزولاً هي القيمة الصغرى المطلقة . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في مجالها . يوجد قيمة صغرى مطلقة عند $x = b$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى مطلقة
ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

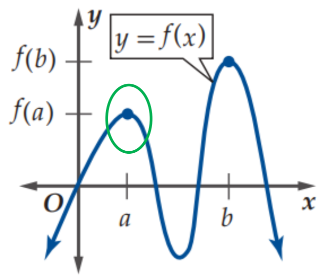
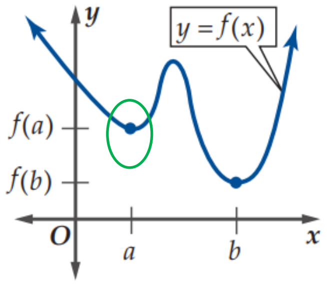


الحل :

توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$

مقدارها $= 3$

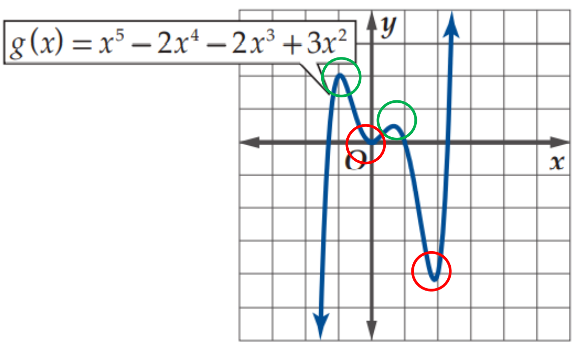
القيم القصوى المحلية

العظمى	الصغرى
	
لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل ارتفاعًا هي قيمة عظمى محلية. وهي القيمة الأكبر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة عظمى محلية عند $x = a$	لا يشترط أن تكون الأسهم في نفس الاتجاه . الأقل نزولًا هي قيمة صغرى محلية . وهي القيمة الأصغر من جميع القيم في فترة من المجال . توجد قيمة صغرى محلية عند $x = a$

مثال

استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي عندها قيمة قصوى محلية مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة ، ثم أوجد قيمة الدالة عندها:

الحل :



توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$

مقدارها $= 2$

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0.5$

مقدارها $= 0.5$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 0$

مقدارها $= 0$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$

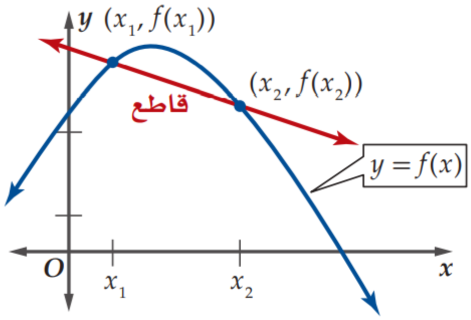
مقدارها $= -4$

متوسط معدل التغير

متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين .

متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو :

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



القاطع : هو المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة .

مثال

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

في الفترة $[2 , 3]$

الحل :

$$f(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 3(3) + 2$$

$$f(3) = 2$$

$$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 3(2) + 2$$

$$f(2) = -4$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_1 = 2 , x_2 = 3$$

$$m_{sec} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2}$$

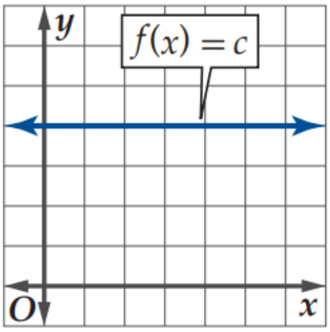
$$= \frac{2 - (-4)}{3 - 2}$$

$$= 6$$

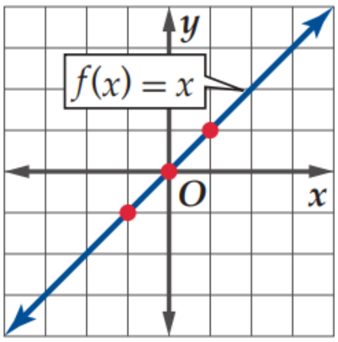
متوسط معدل التغير = السرعة المتوسطة

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

1 — الدالة الثابتة $f(x) = c$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$	 c عدد حقيقي
المدى	$\{C\}$	
المقطع	تقطع y عند النقطة $(0 , c)$	
التماثل	متماثلة حول محور y	
نوع الدالة	زوجية	
الاتصال	متصلة	
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$	
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty , \infty)$	

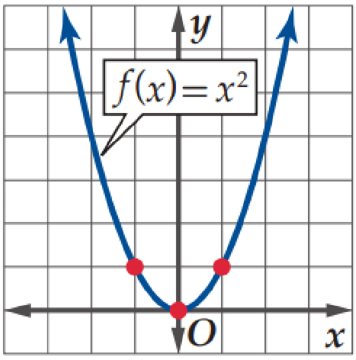
2 — الدالة المحايدة $f(x) = x$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$	 جميع النقاط الذي تمر بها الدالة إحداثياتها (a , a)
المدى	$R \quad (-\infty , \infty)$	
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$	
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل	
نوع الدالة	فردية	
الاتصال	متصلة	
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$	
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty , \infty)$	

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

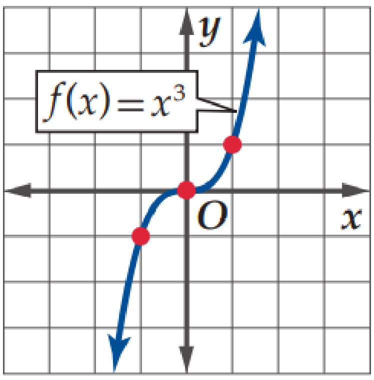
3 الدالة التربيعية $f(x) = x^2$

المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0 , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty , 0)$ متزايدة في الفترة $(0 , \infty)$



4 الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$

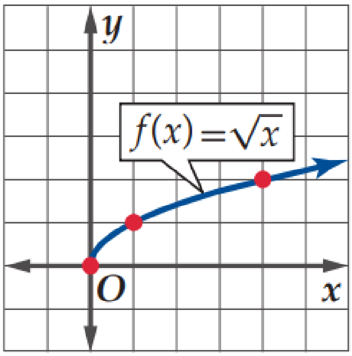
المجال	$R \quad (-\infty , \infty)$
المدى	$R \quad (-\infty , \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0, 0)$
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	متزايدة في الفترة $(-\infty , \infty)$



خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

5 دالة الجذر التربيعي $f(x)=\sqrt{x}$

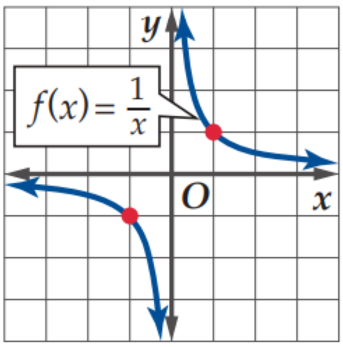
المجال	$R^+ \quad [0,\infty)$
المدى	$R^+ \quad [0,\infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة في الفترة $(-\infty,\infty)$



$x \geq 0$

6 دالة المقلوب $f(x)=\frac{1}{x}$

المجال	$R-\{0\}$
المدى	$R-\{0\}$
المقطع	لا يوجد
التماثل	متماثلة حول نقطة الأصل
نوع الدالة	فردية
الاتصال	غير متصلة (لا نهائي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty,0),(0,\infty)$

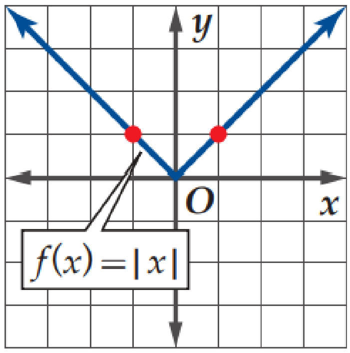


$x \neq 0$

خصائص الدوال الرئيسة (الأم)

7 دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$

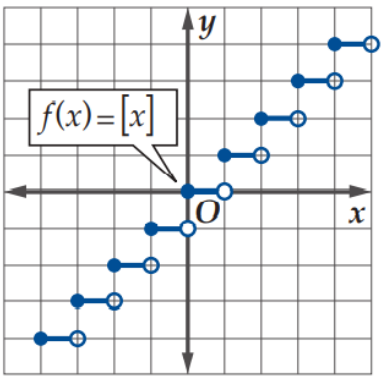
المجال	$R \quad (-\infty, \infty)$
المدى	$R^+ \quad [0, \infty)$
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	متماثلة حول محور y
نوع الدالة	زوجية
الاتصال	متصلة
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
فترات التزايد والتناقص	متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ متزايدة في الفترة $(0, \infty)$



$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

8 دالة أكبر عدد صحيح $f(x) = [x]$

المجال	$R \quad (-\infty, \infty)$
المدى	Z
المقطع	تقطع محور x و y في $(0,0)$
التماثل	غير متماثلة
نوع الدالة	ليست زوجية وليست فردية
الاتصال	غير متصلة (قفزي)
سلوك طرفي التمثيل	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
فترات التزايد والتناقص	ثابتة عندما $x \notin Z$ متزايدة عندما $x \in Z$



أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x

دالة أكبر عدد صحيح هي أحد الأمثلة المشهورة على الدالة الدرجية .

التحويلات الهندسية

قياسية

تغير موقع المنحنى
ولا تغير أبعاده أو شكله .

غير قياسية

تغير موقع المنحنى
تغير شكل المنحنى .

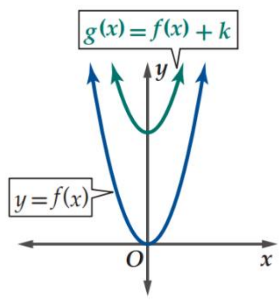
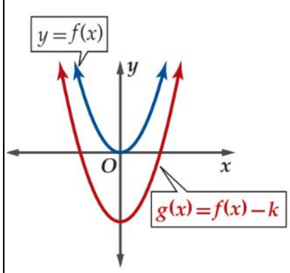
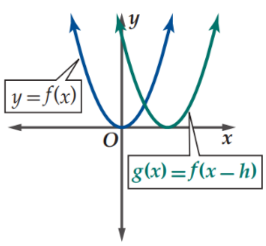
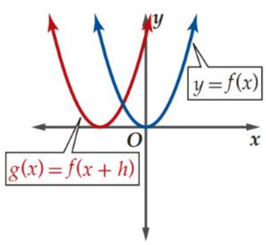
مثال

الانسحاب - الانعكاس

التمدد - تحويلات القيمة المطلقة

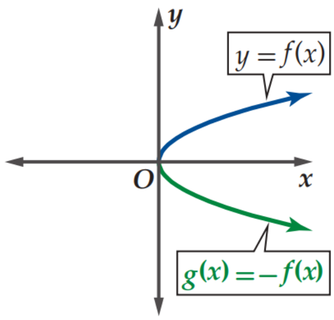
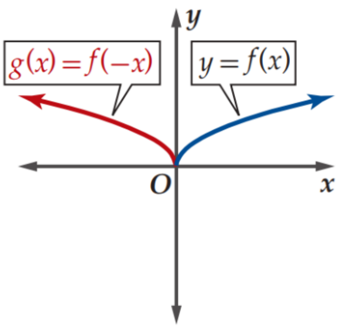
الانسحاب

تحويل ينقل منحنى الدالة فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة إلى أعلى أو أسفل ، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو اليسار.

<table>
<tr><th colspan="4">الانسحاب</th></tr>
<tr><th colspan="2">رأسي</th><th colspan="2">أفقي</th></tr>
<tr><td colspan="2">$g(x) = f(x) + k$</td><td colspan="2">$g(x) = f(x - h)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">k خارج</td><td colspan="2">h داخل</td></tr>
<tr><td>أعلى $(+)$</td><td>أسفل $(-)$</td><td>يمين $(-)$</td><td>يسار $(+)$</td></tr>
<tr><td>$g(x) = f(x) + k$</td><td>$g(x) = f(x) - k$</td><td>$g(x) = f(x - h)$</td><td>$g(x) = f(x + h)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

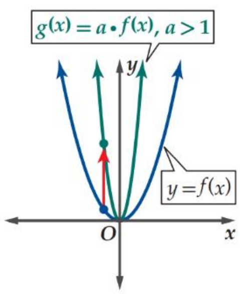
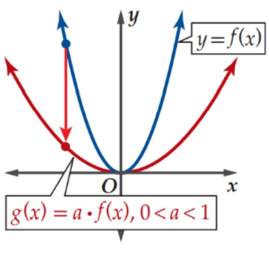
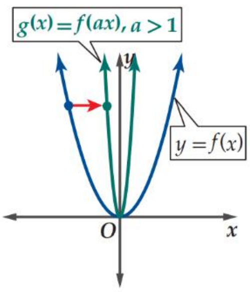
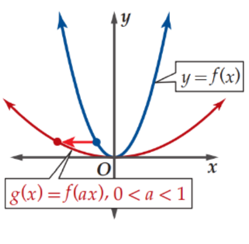
الانعكاس

تحويل يكون لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدد .

الانعكاس	
الانعكاس حول محور x	الانعكاس حول محور y
(−) خارج	(−) داخل
$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$
	

التمدد

تحويل يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة .

التمدد			
رأسي		أفقي	
(a خارج الدالة)		(a داخل الدالة)	
$g(x) = a.f(x)$		$g(x) = f(a.x)$	
توسع	تضيق	توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$
اتجاه الحركة			
↑ ↓	↓ ↑	← →	→ ←
			

التوسع الرأسي ≈ التضيق الأفقي ، التضيق الرأسي ≈ التوسع الأفقي

تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانياً

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانياً باستعمال التحويلات الهندسية.

مثال

مثل الدالة بيانياً :

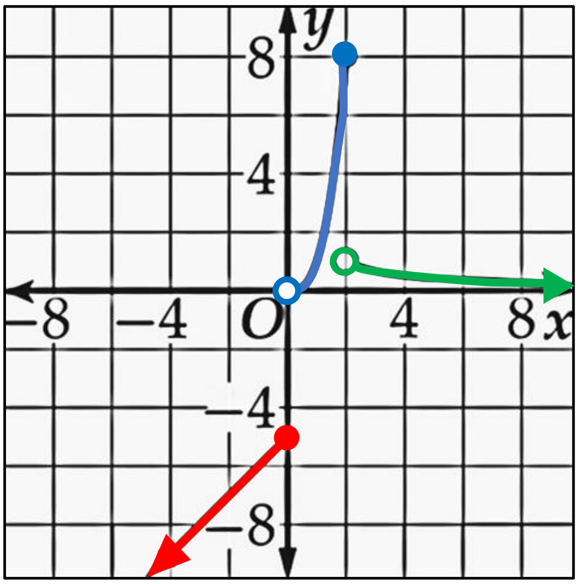
$$g(x)=\begin{cases} x-5 & , \quad x\le 0 \\ x^3 & , \quad 0<x\le 2 \\ \dfrac{2}{x} & , \quad x>2 \end{cases}$$

الحل :

في الفترة $(-\infty, 0]$ ، أمثل الدالة $y=x-5$

في الفترة $(0, 2]$ ، أمثل الدالة $y=x^3$

في الفترة $(2, \infty)$ ، أمثل الدالة $y=\frac{2}{x}$



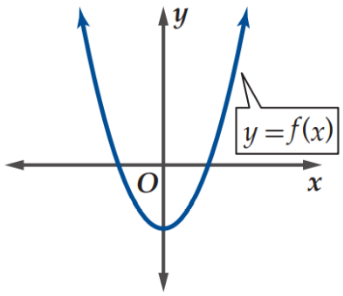
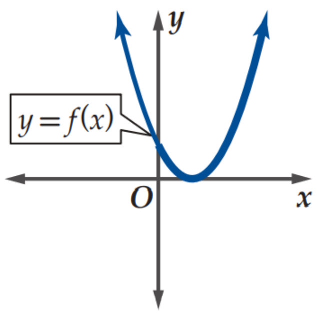
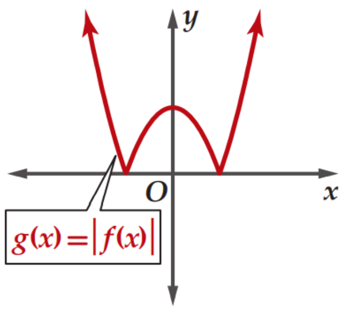
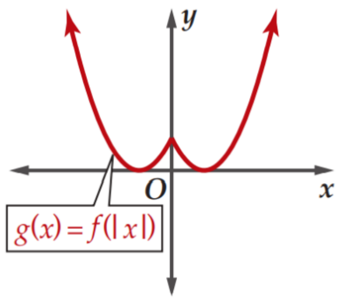
ضع دائرة مفتوحة عند

النقطة $(0\ ,0)$ والنقطة $(2, 1)$

ضع دائرة مغلقة عند

النقطة $(0\ ,-5)$ والنقطة $(2, 8)$

التحويلات الهندسية لدوال القيمة المطلقة

القيمة المطلقة	
خارج	**داخل**
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	$g(x) = f(\lvert x \rvert)$
الرسم قبل التحويل	
	
الرسم بعد التحويل	
	
طريقة الرسم	
نعكس كل جزء موجود تحت محور x ونجعله فوق محور x ثم نزيل السابق .	نزيل الجزء الموجود يسار محور y ثم نعكس المتبقي فقط حول محور y .

العمليات على الدوال

إذا كانت g , f دالتين يتقاطع مجالاهما ، فإننا نعرف عمليات الجمع ، والطرح ، والضرب والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب :** $(f.g)(x) = f(x).g(x)$

الطرح : $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة :** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

إيجاد المجال

مجال $(f+g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f-g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $(f.g)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$

مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ = مجال $f(x)$ $\cap$ مجال $g(x)$ − أصفار المقام

مثال

$f(x) = x^2 - 6x - 8 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$

أوجد كلا من الدوال الآتية ، ثم حدد مجالها :

الحل :

مجال $f(x)$ هو R $(-\infty, \infty)$ و مجال $g(x)$ هو $[0, \infty)$

$(f.g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$

المجال : $[0, \infty)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 6x - 8}{\sqrt{x}}$

المجال : $(0, \infty)$

$(f+g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$

المجال : $[0, \infty)$

$(f-g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$

المجال : $[0, \infty)$

تركيب الدوال

تركيب الدوال يعني دمج دالتين ، وهذا الدمج لا ينتج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة وهو يعني إيجاد قيمة دالة عند دالة أخرى .

تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

تقرأ الدالة $g \circ f$ على النحو f تركيب g أو f بعد g

حيث تطبق الدالة g أولًا ثم الدالة f

مثال

إذا كانت $g(x) = x - 4$ ، $f(x) = x^2 + 1$ فأوجد :

الحل :

1

$[f \circ g](x)$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$
$$= f(x - 4)$$
$$= (x - 4)^2 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 1$$
$$= x^2 - 8x + 17$$

2

$[g \circ f](x)$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$
$$= g(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1) - 4$$
$$= x^2 - 3$$

3

$[f \circ g](2) =$

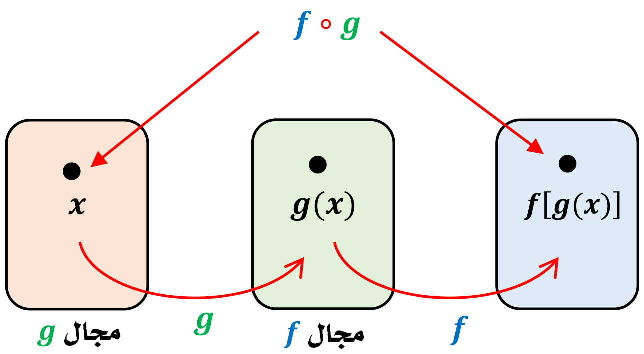
$$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$$
$$= (2)^2 - 8(2) + 17$$
$$= 5$$

مجال دالة التركيب

يتكون مجال الدالة $g \circ f$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f

نوجد مجالي الدالتين f و g قبل تركيبهما وعند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال

$g \circ f$ يكون مقيداً بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودة في مجال f



$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ايجاد مجال دالة التركيب

نوجد مجال كلًا من الدالتين f , g

- $R =$ ⟵ مجال $f \circ g$ يساوي R
- مجال $f \neq R$ أو مجال $g \neq R$ ⟵ نوجد مجال $f \circ g$ قبل التبسيط

مثال

حدد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية ثم أوجد $f \circ g$ فيما يلي :

$$f(x) = \frac{5}{x} \quad , \quad g(x) = x^2 + x$$

الحل :

مجال $f(x)$ هو $R - \{0\}$

مجال $g(x)$ هو R

نوجد التركيب

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f[x^2 + x]$$

$$= \frac{5}{x^2 + x}$$

نوجد مجال $f \circ g$

الدالة كسرية إذن : المقام $\neq 0$

$$x^2 + x \neq 0$$

$$x(x+1) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1$$

المجال $\{x | x \neq 0, x \neq -1 , x \in R\}$

كتابة الدالة كتركيب دالتين

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها .

أي أنه لتفكيك دالة مثل h ، فإنك تجد دالتين g , f مثلًا بحيث يكون تركيبهما هو h .

$$h(x) = [f \circ g](x)$$

مثال

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ فيما يلي :

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

الحل :

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل :

$$h(x) = (x-1)(x-1)$$

$$h(x) = (x-1)^2$$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين :

$$g(x) = x - 1 \quad , \quad f(x) = x^2$$

وعندئذٍ :

$$h(x) = (x-1)^2$$

$$\boxed{g(x) = x - 1} \qquad \boxed{f(x) = x^2}$$

$$h(x) = [g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

العلاقات والعلاقات العكسية

يقال أن العلاقة A علاقة **عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (a , b) موجوداً في أحد العلاقتين ، فإن الزوج المرتب (b , a) موجودٌ في العلاقة الأخرى .

مثال :

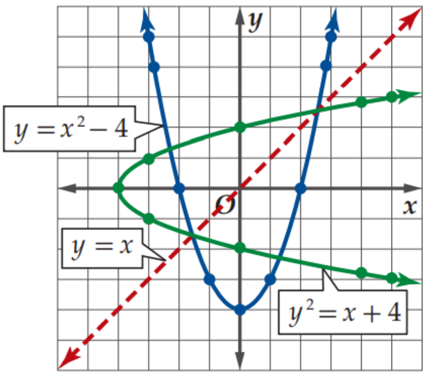
العلاقة $A = \{(1 , 5) , (2 , 10)\}$ هي علاقة **عكسية** لـ العلاقة $B = \{(5 , 1) , (10 , 2)\}$

وإذا مثلت العلاقة **بمعادلة** فيمكن إيجاد علاقتها **العكسية** بتبديل **المتغير المستقل** **بالمتغير التابع** .

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$x = y^2 - 4$

x	y
5	-3
0	-2
-3	-1
-4	0
-3	1
0	2
5	3

ملاحظة

كل علاقة من هاتين العلاقتين **المتعاكستين**

هي **انعكاس** للأخرى حول **المستقيم** $y = x$

الدالة العكسية

هي العلاقة العكسية لدالة f والتي تمثل دالة ، يرمز لها بالرمز f^{-1} .

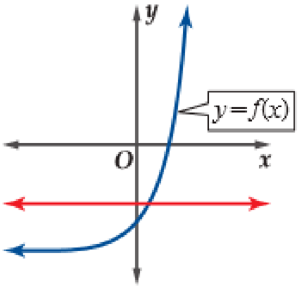
اختبار الخط الأفقي

يوجد لأي دالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر .

مثال :

بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة

فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة .

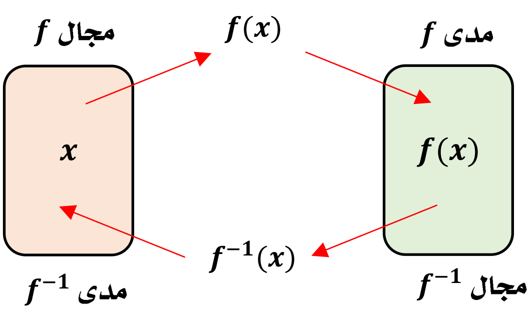


الدالة المتباينة

هي الدالة التي تحقق اختبار الخط الأفقي .

لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y ، ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x .

إذا كانت الدالة متباينة فإن لها دالة عكسية .



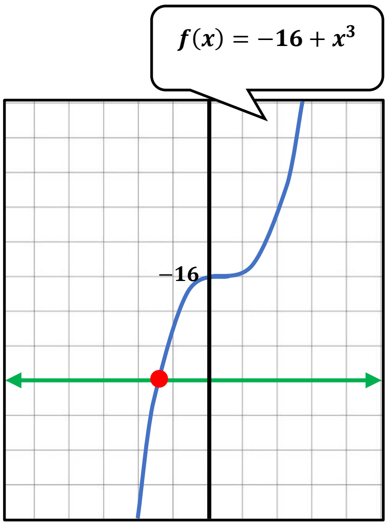
إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1	التحقق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي .
الخطوة 2	ضع y مكان $f(x)$
الخطوة 3	بدل موقعي x , y
الخطوة 4	حل المعادلة بالنسبة للمتغير y
الخطوة 5	ضع $f^{-1}(x)$ مكان y

مثال

أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن .

$$f(x) = -16 + x^3$$



الحل :

الدالة متباينة باختبار الخط الأفقي

إذن يوجد دالة عكسية

$$y = -16 + x^3$$

$$x = -16 + y^3$$

$$y^3 = x + 16$$

$$y = \sqrt[3]{x + 16}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 16}$$

تركيب الدالة ودالتها العكسية

تكون كل من الدالتين f و f^{-1} دالة عكسية للأخرى ، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان :

1. $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$
2. $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$

مثال

أثبت جبريًا أن كلًا من الدالتين g , f تمثل دالة عكسية للأخرى :

$f(x) = 18 - 3x$, $g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

الحل :

$$[f \circ g](x) = f[g(x)] = f\left[6 - \frac{x}{3}\right] = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right) = 18 - 18 + \frac{3x}{3} = x$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)] = g[18 - 3x] = 6 - \frac{18 - 3x}{3} = \frac{18 - 18 + 3x}{3} = x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ فإن كلا الدالتين $g(x)$, $f(x)$ دالة عكسية للأخرى.

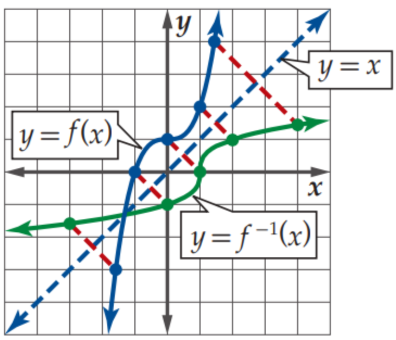
إيجاد الدالة العكسية بيانيًا

يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية

بانعكاس الدالة الأصلية

حول المستقيم $y = x$

كما في المثال :



إذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل في اختبار الخط الأفقي ومن ثم لا تكون دالة متباينة .

الفصل الثاني

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

الدالة الأسية

دالة يمكن وصفها بمعادلة على الصورة : $y = ab^x$

$a \neq 0 , b > 0 , b \neq 1$

أمثلة

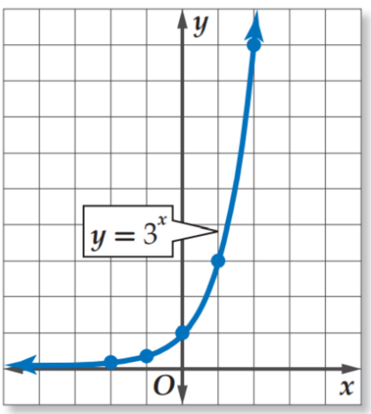
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad$ $y = 4^x$ $\quad$ $y = 2(3)^x$

تمثيل الدالة الأسية

1 عندما $a > 0$, $b > 1$

تمثيل الدالة الأسية $y = 3^x$

x	$(3)^x$	y
-2	$(3)^{-2}$	$\frac{1}{9}$
-1	$(3)^{-1}$	$\frac{1}{3}$
0	$(3)^0$	1
1	$(3)^1$	3
2	$(3)^2$	9



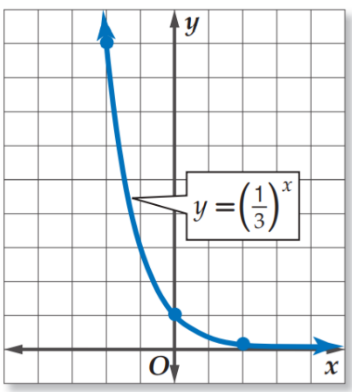
نوعها	تزايدية
المجال	R
المدى	R^+
المقطع y	$a = 1$
خط التقارب	(خط أفقي) محور x

تمثيل الدالة الأسية

2 عندما $a > 0$, $0 < b < 1$

تمثيل الدالة الأسية $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0}$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$	$\frac{1}{9}$

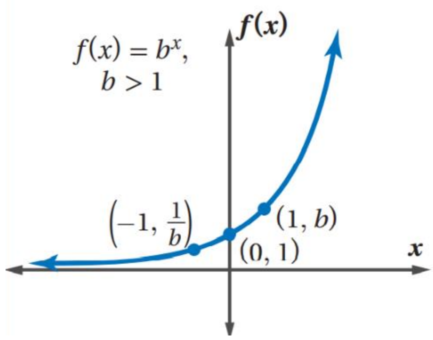
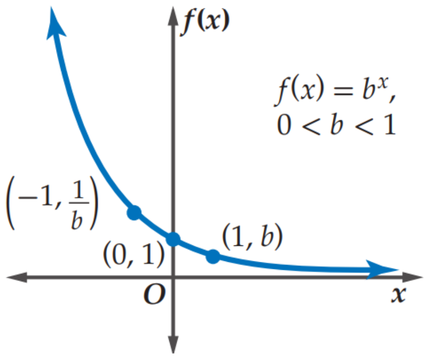


نوعها	تناقصية
المجال	R
المدى	R^{+}
المقطع y	$a = 1$
خط التقارب	(خط أفقي) محور x

ملاحظات

- إذا كانت $b < 0$ فإن $y = ab^{2}$ تكون غير معرفة عند بعض القيم ، فمثلًا تكون غير معرفة عند $x = \frac{1}{2}$
- إذا كانت $b = 1$ فإن الدالة تصبح على الصورة $y = a$ وهذه هي الدالة الثابتة .
- إذا كانت $a < 0$ أي قيمة a سالبة ، فإن منحنى الدالة ينعكس حول المحور x

الدوال الرئيسة " الأم " للدوال الأسية

الدوال الرئيسة " الأم " لدوال النمو الأسي	الدوال الرئيسة " الأم " لدوال الاضمحلال الأسي
صورتها	
$f(x) = b^x \quad , b > 1$	$f(x) = b^x \quad , \quad 0 < b < 1$
تمثيلها البياني	
	
خصائص منحى الدالة	
متصل – متباين – متزايد	متصل – متباين – متناقص
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
خط التقارب	
المحور x	المحور x
مقطع المحور y	
1	1

النمو الأسي

$$A(t) = a(1+r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للنمو

الأساس $(1+r)$ يسمى عامل النمو.

تستعمل عادةً لتمثيل النمو السكاني .

مثال

بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني في المملكة خلال الفترة $1425 - 1431$ 2% تقريبًا .

إذا كان عدد سكان المملكة 22678262 نسمة عام 1425هـ

أوجد معادلة أسية تمثل النمو السكاني للمملكة خلال هذه الفترة .

الحل :

$$y = a(1+r)^t$$
$$y = 22678262(1+0.02)^t$$

الاضمحلال الأسي

$$A(t) = a(1-r)^t$$

t الفترة الزمنية ، a القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للاضمحلال

الأساس $(1-r)$ يسمى عامل الاضمحلال .

وتستعمل عادةً في التطبيقات المالية .

مثال

سيارة كان سعرها 80000 ريال ، ثم بدأ يتناقص بمعدل 15% كل سنة

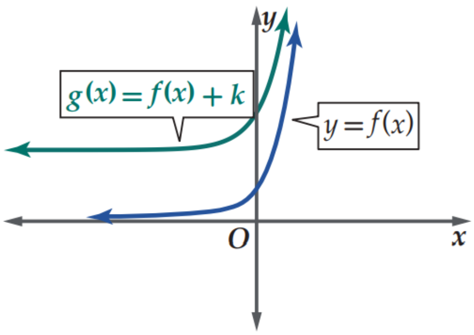
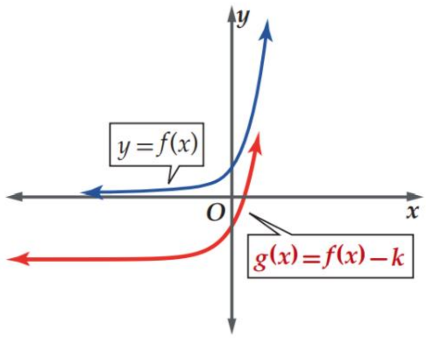
أوجد دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد t سنة من شرائها .

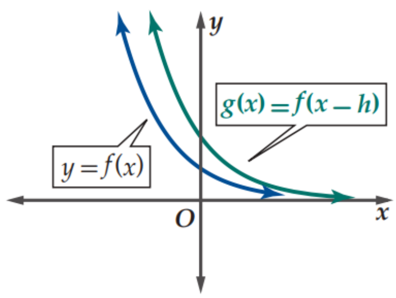
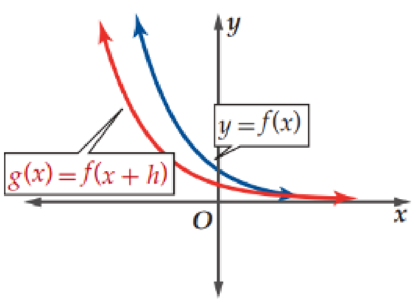
الحل :

$$y = a(1-r)^t$$
$$y = 80000(1-0.15)^t$$

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)

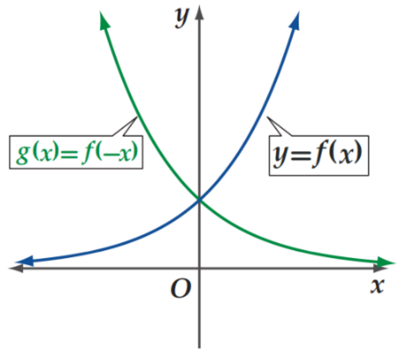
لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

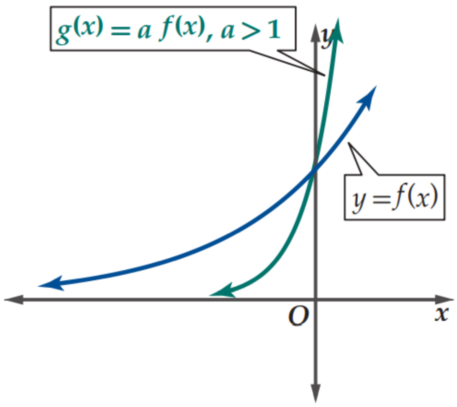
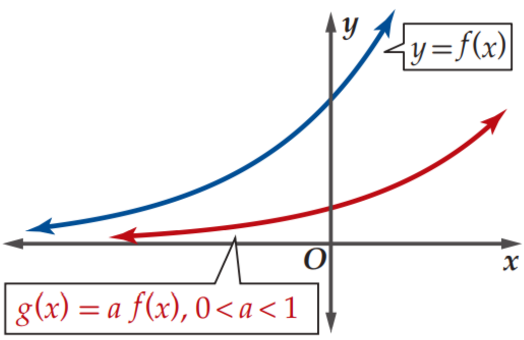
<table>
<tr><th colspan="2">الانسحاب</th></tr>
<tr><th colspan="2">رأسي</th></tr>
<tr><td colspan="2">$g(x) = f(x) + k$</td></tr>
<tr><td colspan="2">k خارج</td></tr>
<tr><td>أعلى$(+)$</td><td>أسفل$(-)$</td></tr>
<tr><td>$g(x) = f(x) + k$</td><td>$g(x) = f(x) - k$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">الانسحاب</th></tr>
<tr><th colspan="2">أفقي</th></tr>
<tr><td colspan="2">$g(x) = f(x - h)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">h داخل</td></tr>
<tr><td>يمين $(-)$</td><td>يسار $(+)$</td></tr>
<tr><td>$g(x) = f(x - h)$</td><td>$g(x) = f(x + h)$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم)

لدالتي النمو الأسي والاضمحلال الأسي

الانعكاس
الانعكاس حول المحور y
$g(x) = f(-x)$


التمدد	
رأسي	
$g(x) = a.f(x)$	
توسع	تضيق
$a > 1$	$0 < a < 1$
	

إيجاد مدى الدالة الأسية

الصورة الأصلية

$f(x) = b^x$

$f(x) = ab^x$

$a > 0$

$b > 1$

مثال : $y = 2^x$

المدى

R^+ ، $(0, \infty)$

$\{y | y > 0\}$

$0 < b < 1$

مثال : $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

المدى

R^+ ، $(0, \infty)$

$\{y | y > 0\}$

الدالة متأثرة بالانسحاب

الانسحاب الرأسي

للأعلى $(+)$	للأسفل $(-)$
$y = 2^x + 1$	$y = 2^{x+3} - 5$
المدى	
$\{y \vert y > 1\}$	$\{y \vert y > -5\}$
$y = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} + 3$	$y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 1$
المدى	
$\{y \vert y > 3\}$	$\{y \vert y > -1\}$

الانسحاب الأفقي لا يؤثر على المدى

الدالة متأثرة بالانعكاس

حول محور x

$f(x) = -f(x)$

نغير اتجاه إشارة التباين $(<)$

$y = -2^x$

المدى

$\{y | y < 0\}$

$y = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

المدى

$\{y | y < 2\}$

الانعكاس حول محور y لا يؤثر على المدى

المعادلة الأسية

هي معادلة تتضمن متغيرات في موقع الأس .

خاصية المساواة للدوال الأسية

إذا كان $b \neq 1$, $b > 0$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$ وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$

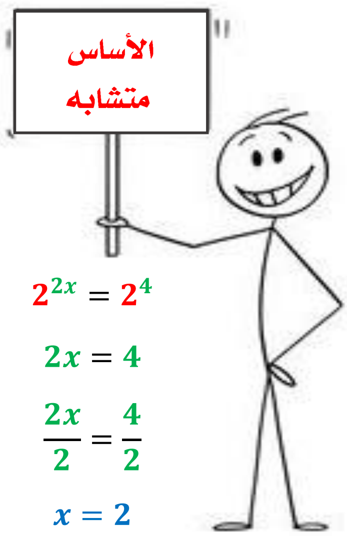
مثال

حل كل معادلة مما يأتي :

$2^{2x} = 2^4$

$2^x = 8^3$

الحل :

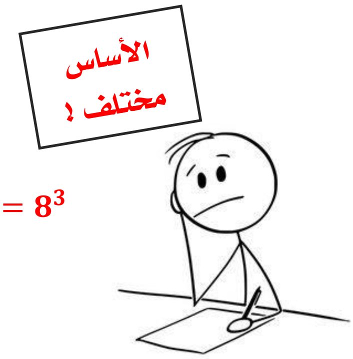


$2^{2x} = 2^4$

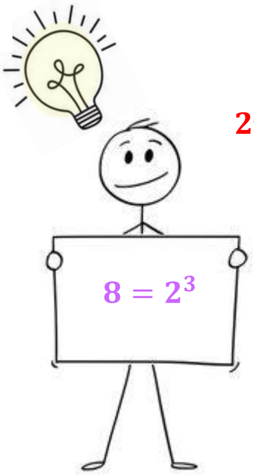
$2x = 4$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$



$2^x = 8^3$



$2^x = (2^3)^3$

$2^x = 2^9$

$x = 9$

الربح المركب

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

A المبلغ الكلي بعد t سنة ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة.

مثال

استثمر حسن مبلغ 70000 ريال متوقعًا ربحًا سنويًا نسبته 4.3% ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . ما المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين ؟

الحل :

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 70000\left(1+\frac{0.043}{12}\right)^{(12)(7)}$$

$$A \approx 94533.78$$

المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر ، حيث الأساس موجب.

حل المتباينات الأسية

لدالة النمو

إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$

لدالة الاضمحلال

إذا كان $0 < b < 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال: إذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$ ، فإن $x < 5$ ، وإذا كان $x < 5$ ، فإن $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

مثال

حل المتباينة :

$$10^{5b+2} > 1000$$

الحل :

$$10^{5b+2} > 10^3$$

$$5b+2 > 3$$

$$5b > 1$$

$$b > \frac{1}{5}$$

حل المتباينة :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \ge \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$$

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(3t+5)} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{5(t-6)}$$

$$2(3t+5) \le 5(t-6)$$

$$6t+10 \le 5t-30$$

$$t \le -40$$

$3^2 = 9$

$3^5 = 243$

اللوغاريتم للأساس b

اللوغاريتم : هو الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة .

فإذا كان b , x عددين موجبين و $b \neq 1$ تكتب على الصورة $y = \log_b x$

الصورة اللوغاريتمية — **الصورة الأسية**

$x , b > 0 , b \neq 1$

$\log_b x = y$ ⟷ $b^y = x$

التحويل من ...

الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

$\log_4 16 = 2$

$4^2 = 16$

الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

$125^{\frac{1}{3}} = 5$

$\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

مثال

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد قيمة ما يلي :

$\log_3 81$

الحل :

$\log_3 81 = y$

$3^y = 81$

$3^y = 3^4$

$y = 4$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $b \neq 1 , b > 0$

x عدد حقيقي فإن :

1

$\log_b 1 = 0$

التبرير :

$b^0 = 1$

مثال :

$\log_6 1 = 0$

2

$\log_b b = 1$

التبرير :

$b^1 = b$

مثال :

$\log_{10} 10 = 1$

3

$\log_b b^x = x$

التبرير :

$b^x = b^x$

مثال :

$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

4

$b^{\log_b x} = x , x > 0$

التبرير :

$\log_b x = \log_b x$

مثال :

$3^{\log_3 1} = 1$

ملاحظات

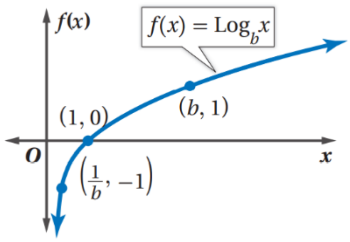
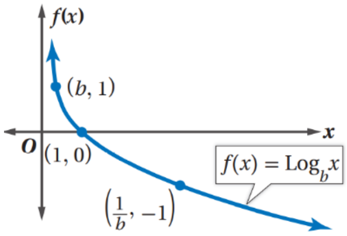
- لأي $b \neq 0$ فإن $b^0 = 1$
- $\log_b 0$ غير معرف لأن $b^x \neq 0$ لأي قيمة لـ x

الدالة اللوغاريتمية

هي دالة تكتب على الصورة : $f(x) = \log_b x$

حيث $b \neq 1$ و $x , b > 0$

الدالة الرئيسة (الأم) للدوال اللوغاريتمية

الدوال الرئيسة " الأم "	
صورتها	
$f(x) = \log_b x \quad , b > 1$	$f(x) = \log_b x \quad , 0 < b < 1$
تمثيلها البياني	
	
خصائص منحى الدالة	
متصل – متباين – متزايد	متصل – متباين – متناقص
المجال	
مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+	مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+
المدى	
مجموعة الأعداد الحقيقية R	مجموعة الأعداد الحقيقية R
خط التقارب	
المحور y	المحور y
مقطع المحور x	
1	1

مثال

مثل الدالة $f(x) = \log_5 x$ بيانياً :

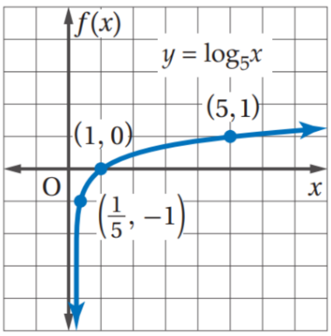
الحل :

-1	$\frac{1}{b}$
0	1
1	b

الأساس $b = 5 > 1$

-1	$\frac{1}{5}$
0	1
1	5

المنحنى متصل ومتزايد.



مثال

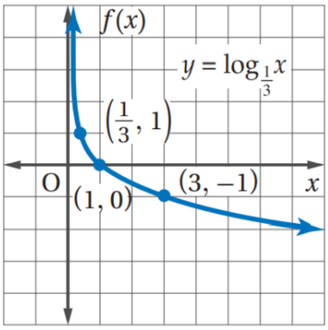
مثل الدالة $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ بيانياً :

الحل :

$\frac{1}{b}$	-1
1	0
b	1

الأساس $b = \frac{1}{3},\ 0 < \frac{1}{3} < 1$

3	-1
1	0
$\frac{1}{3}$	1



المنحنى متصل ومتناقص.

ملاحظة

يمكن تطبيق التحويلات الهندسية لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًا تماماً كما في الدوال الأسية .

إيجاد الدوال العكسية للدوال الأسية

لابد أن تكون الدالة متباينة .

نستبدل x بـ y والعكس .

نحول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية ونجعل y في طرف .

مثال

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = 0.5^x$

الحل :

$y = 0.5^x$ متباينة فإن لها دالة عكسية

$x = 0.5^y$

$y = \log_{0.5} x$

خاصية المساواة في الدوال اللوغاريتمية

إذا كان b عدداً موجباً حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ ، فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

خصائص اللوغاريتمات

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله .

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

مثال :

استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$

الحل :

$\log_4 32 = \log_4 (16 \times 2)$

$= \log_4 (4^2 \times 2)$

$= \log_4 4^2 + \log_4 2$

$= 2 + 0.5$

$= 2.5$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحاً منه لوغاريتم المقسوم عليه.

إذا كانت x, y, b أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1$

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

مثال:

استعمل $\log_3 2 \approx 0.63$ لتقريب قيمة $\log_3 4.5$

الحل :

$\log_3 4.5 = \log_3 \left(\frac{9}{2}\right)$

$= \log_3 9 - \log_3 2$

$= \log_3 3^2 - \log_3 2$

$= 2 - 0.63$

$= 1.37$

خاصية لوغاريتم القوة

لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.

لأي عدد حقيقي m وأي عددين موجبين x, b حيث $b \neq 1$

$\log_b x^m = m \log_b x$

مثال:

استعمل $\log_3 7 \approx 1.7712$ فقرب قيمة $\log_3 49$

الحل :

$\log_3 49 = \log_3 (7)^2$

$= 2 \log_3 7$

$= 2\,(1.7712)$

$= 3.5424$

ملاحظة

لوغاريتم المجموع أو الفرق لا يساوي مجموع أو فرق اللوغاريتمات .

$$\log_a(x \pm 4) \neq \log_a x \pm \log_a 4$$

تبسيط العبارات اللوغاريتمية

مثال

دون استعمال الآلة الحاسبة ، احسب قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

الحل :

بما أن الأساس 6 نعبر عن $\sqrt[3]{36}$ على صورة قوة 6

$$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 36^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_6 (6^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \log_6 (6)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} \log_6 6$$

$$= \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

كتابة العبارات اللوغاريتمية

مثال

الصورة المطولة

اكتب العبارة بالصورة المطولة :

$$\log_{13} 6a^3bc^4$$

الحل :

$$= \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4$$

$$= \log_{13} 6 + 3\log_{13} a + \log_{13} b + 4\log_{13} c$$

الصورة المختصرة

اكتب العبارة بالصورة المختصرة :

$$= -5\log_2 (x+1) + 3\log_2 (6x)$$

الحل :

$$= \log_2 (x+1)^{-5} + \log_2 (6x)^3$$

$$= \log_2 (x+1)^{-5}(6x)^3$$

$$\log_2 \frac{(6x)^3}{(x+1)^5}$$

$$\log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5}$$

حل المعادلات اللوغاريتمية

1

تحتوي على لوغاريتم واحد .
تحول إلى الصيغة الأسية ثم نوجد الحل .

مثال

حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$

الحل :

$$9^{\frac{3}{2}} = x$$

$$(3)^{2\left(\frac{3}{2}\right)} = x$$

$$x = 27$$

2

تحتوي على لوغاريتمات في كلا الطرفين .
تستخدم خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية للمساواة
ثم نوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال

حل المعادلة $\log_2 x^3 = \log_2 8$

الحل :

$$x^3 = 8$$

$$x^3 = 2^3$$

$$x = 2$$

3

تحتوي على أكثر من لوغاريتم في الطرف الواحد .
نختصرها باستخدام خصائص اللوغاريتمات ثم تحول
إلى الصورة الأسية ونوجد الحل مع استبعاد الحلول الدخيلة .

مثال

حل المعادلة $2\log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3$

الحل :

$$\log_7 x^2 = \log_7 (27)(3)$$

$$x^2 = 81$$

$$x = \pm 9$$

$x = 9$ و نستبعد $x = -9$ لأنه لا يوجد لوغاريتم لعدد سالب .

حل المتباينات اللوغاريتمية

1

تحتوي على **لوغاريتم واحد** .

إذا كان $x > 0 , b > 1$ و $\log_b x > y$

فإن $x > b^y$

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 x \geq 3$

الحل :

$x \geq 4^3$

$x \geq 64$

مجموعة الحل :

$\{x|\ x \geq 64 , x \in R\}$

عند حل متباينة لوغاريتمية **يستثنى** قيم المتغير التي **لا يكون** اللوغاريتم عندها **معرفًا**

2

تحتوي على **لوغاريتمات في كلا الطرفين** .

إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$

إذا وفقط إذا كان $x > y$

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة

$\log_8(2x) > \log_8(6x-8)$

الحل :

1

$2x > 6x - 8$

$-4x > -8$

$\frac{-4x}{-4} < \frac{-8}{-4}$

$x < 2$

2

لتحديد الفترة كاملة

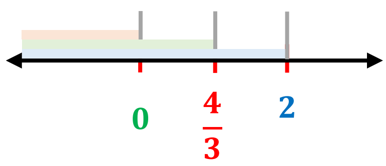
- $2x \leq 0$

$x \leq 0$

- $6x - 8 \leq 0$

$6x \leq 8$

$x \leq \frac{4}{3}$



3

مجموعة الحل :

$\left\{x|\frac{4}{3} < x < 2 , x \in R\right\}$

اللوغاريتمات العشرية

هو لوغاريتم أساسه 10

تكتب دون كتابة الأساس 10

$$\log_{10} x = \log x \ , \quad x > 0$$

إيجاد قيمة اللوغاريتم العشري

تحتوي معظم الحاسبات العلمية $\log\ x$ كونه أمرًا أساسيًا

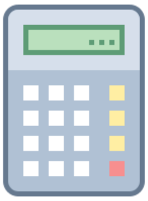
ويستعمل المفتاح $\boxed{\text{LOG}}$ لإيجاد قيمته.

مثال

استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ما يأتي مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

$\log 7$

الحل :



اضغط على المفاتيح : $= \ \boxed{\text{ENTER}} \ 7 \ \boxed{\text{LOG}}$

$$\log 7 \approx 0.8451$$

خصائص اللوغاريتمات العشرية

1	$10^y = x$	$\log x = y$
2	$10^0 = 1$	$\log 1 = 0$
3	$10^1 = 10$	$\log 10 = 1$
4	$10^m = 10^m$	$\log 10^m = m$

حل معادلات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

إذا كان من الصعب كتابة طرفي المعادلة الأسية بدلالة الأساس نفسه ، فإنه يمكنك حلها بأخذ اللوغاريتم العشري لكلا الطرفين .

مثال

حل المعادلة $3^x = 15$ وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$3^x = 15$$

$$\log 3^x = \log 15$$

$$x \log 3 = \log 15$$

$$x = \frac{\log 15}{\log 3}$$

$$x \approx 2.4650$$

حل متباينات أسية باستعمال اللوغاريتم العشري

يمكن استعمال استراتيجيات حل المعادلات الأسية لحل متباينات أسية .

مثال

أوجد مجموعة حل المتباينة $3^{2x} \geq 6^{x+1}$

وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1}$$

$$2x \log 3 \geq (x+1) \log 6$$

$$2x \log 3 \geq x \log 6 + \log 6$$

$$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$$

$$x(2\log 3 - \log 6) \geq \log 6$$

$$x \geq \frac{\log 6}{2\log 3 - \log 6}$$

$$\{x | x \geq 4.4190 , x \in R\}$$

عند الضرب أو القسمة على عدد سالب يتغير اتجاه إشارة التباين . لذا لابد قبل القسمة على المقدار $2\log 3 - \log 6$ معرفة إذا كان موجبًا أم سالبًا .

هنا المقدار موجب لذا تبقى إشارة التباين كما هي .

صيغة تغيير الأساس

هي صيغة تستخدم لكتابة عبارات لوغاريتمية مكافئة لأخرى بأساس مختلف .

لأي أعداد موجبة n, b, a ، حيث $a \neq 1$ ، $b \neq 1$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

لوغاريتم العدد الأصلي للأساس b ← $\log_b n$

لوغاريتم الأساس القديم للأساس b ← $\log_b a$

مثال :

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3}$$

مثال

اكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد قيمته مقربًا إلى أقرب جزء من عشرة آلاف .

الحل :

$$\log_6 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 6} = \frac{\log 8}{\log 6}$$

$$\approx 1.1606$$