أولاً:

السؤال الأول:

المعادلة $2\ln a-\ln b=\ln(2a+3b)$ تكافئ

$$\ln a^2-\ln b=\ln(2a+3b)$$

$$\ln\frac{a^2}{b}=\ln(2a+3b)$$

$$\frac{a^2}{b}=2a+3b$$

$$(1)\dots\ a^2=2ab+3b^2$$

نفترض أن $\frac{a}{b}=k$ ومنه يكون $a=kb$ ، نعوض في (1) فنجد:

$$k^2b^2=2kb^2+3b^2$$

بما أن $b>0$ فإن المعادلة تصبح $k^2=2k+3$ وهي تكافئ $(k-3)(k+1)=0$

إما $k=-1$ مرفوض لأن $b>0$ و $a>0$

أو $k=3$ وبالتالي $\frac{a}{b}=3$.

السؤال الثاني:

نهاية التابع $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$ يجب إزالتها:

نفرض $X=\frac{1}{x}$ ومنه $x=\frac{1}{X}$

عندما x تسعى إلى $+\infty$ فإن X تسعى إلى الصفر ومنه يكون:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{X\to0}\frac{1}{X}\ln(1+X)=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

$y=1$ مقارب أفقي للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$

نهاية التابع $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند الصفر هي حالة عدم تعيين من الشكل $0\times\infty$ يجب إزالتها:

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)=x\ln(x+1)-x\ln x$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=0-0=0$$

السؤال الثالث:

لدينا $f(x)=1-\ln x$ ومنه $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$

نوجد معادلة المماس للتابع f في نقطة منه فاصلتها a فتكون:

$$T: y=f'(a)(x-a)+f(a)=-\frac{1}{a}(x-a)+1-\ln a=-\frac{1}{a}x+1+1-\ln a=-\frac{1}{a}x+2-\ln a$$

الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x)-y_T=1-\ln x+\dfrac{1}{a}x-2+\ln a=-\ln x+\dfrac{1}{a}x-1+\ln a$

نفرض التابع $g(x)=-\ln x+\dfrac{1}{a}x-1+\ln a$ المعرف على المجال $]0,+\infty[$

لدينا $g'(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{x-a}{ax}$

عندما $g'(x)=0$ فإن $x=a$ حيث $g(a)=-\ln a+1-1+\ln a=0$ وبالتالي:

x	0		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

من جدول اطراد g نجد أن $g(x)\geq 0$ وبالتالي $f(x)-y_T\geq 0$ أي أن C يقع فوق أي مماس له.

السؤال الرابع:

جملة المعادلتين $\begin{pmatrix} \ln xy=2 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{pmatrix}$ تكافئ $\begin{pmatrix} \ln x+\ln y=2 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{pmatrix}$ أي

$$(1)\ldots\ -2\ln x-2\ln y=-4$$

$$(2)\ldots\ \ 2\ln x-3\ln y=-1$$

بجمع (1) و (2) نجد $-5\ln y=-5$ أي $\ln y=1$ وبالتالي $y=e$

نعوض في (1) فنجد $\ln x=1$ وبالتالي $x=e$

وبالتالي حل الجملة هو $(x,y)\in\{(e,e)\}$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x} \text{ و } D_f=\mathbb{R}=]0,+\infty[$$

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\ln x}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0+0=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

2) $$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $\ln x=0$ أي $x=1$ حيث $f(1)=\frac{1+\ln 1}{1}=1$ وبالتالي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

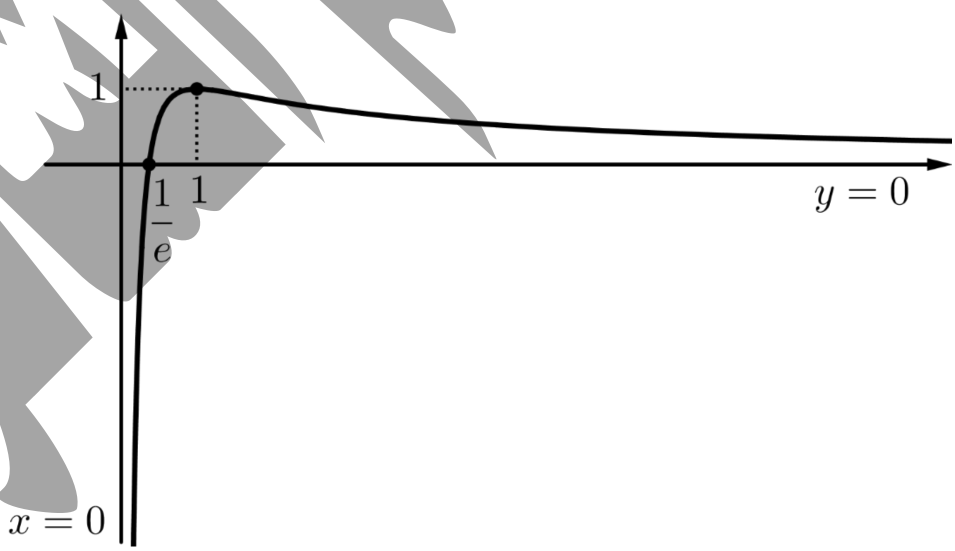
$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى

3) على المجال $]0,1[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $0\in f(]0,1[)=]-\infty,1[$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد في المجال $]0,1[$ وقيمته الحقيقية هي:

عندما $f(x)=0$ فإن $1+\ln x=0$ أي $\ln x=-1$ وبالتالي $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

4)



5)

$$1-mx+\ln x=0$$

$$1+\ln x=mx$$

$$m=\frac{1+\ln x}{x}=f(x)$$

عندما $m \in]-\infty,0]$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m \in]0,1[$ للمعادلة حلين مختلفين

عندما $m=1$ للمعادلة حل وحيد

عندما $m \in]1,+\infty[$ ليس للمعادلة حل

المسألة الثانية:

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

1) f معرف بشرط $1+\frac{2}{x}>0$ أي $\frac{x+2}{x}>0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
الكسر		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
المتراجحة		محققة		//////////////		محققة	

وبالتالي $D_f=]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\ln 1=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ وبالتالي $x=-2$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

لدينا $f(x)=\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=\ln(x+2)-\ln x$ وبالتالي:

$$f'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-2}{x(x+2)}=\frac{-2}{x(x+2)}<0$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$		$\|\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$		$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0

3) الشرط: أياً كان $-1+h\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[=D_f$

$$h\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

$$-h\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

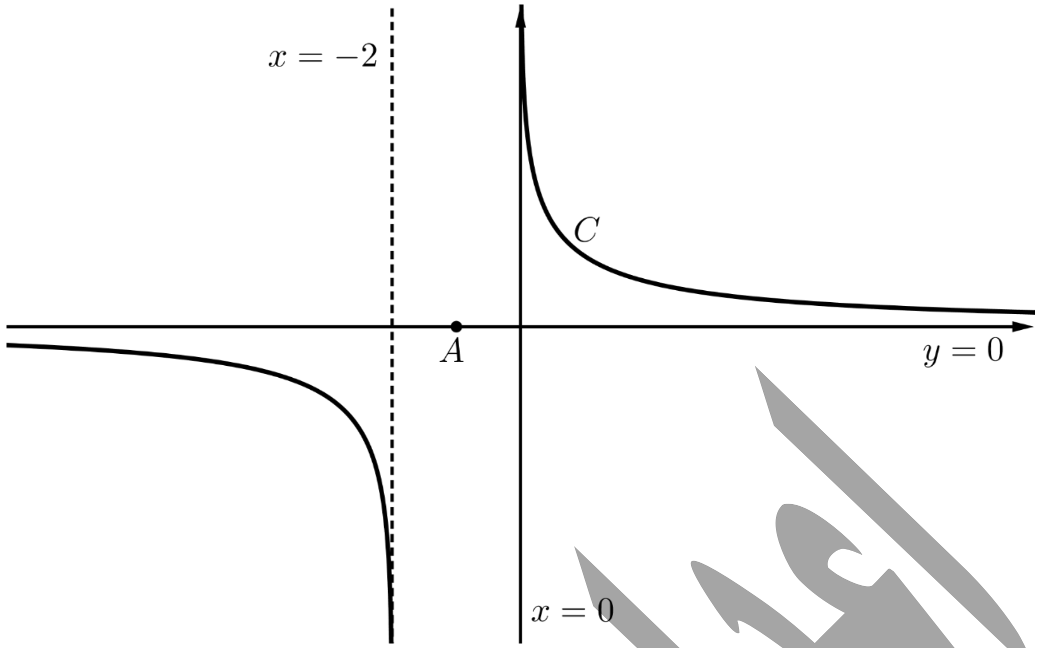
$-1-h\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[=D_f$ الشرط محقق

$$\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}=\frac{\ln\left(1+\frac{2}{-1+h}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{-1-h}\right)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{-1+h+2}{-1+h}\right)+\ln\left(\frac{-1-h+2}{-1-h}\right)}{2}$$

$$\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{h+1}{h-1}\right)+\ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{h+1}{h-1}\times\frac{h-1}{h+1}\right)}{2}=\frac{\ln 1}{2}=\frac{0}{2}=0$$

وبالتالي النقطة $A(-1,0)$ مركز تناظر للخط البياني C.

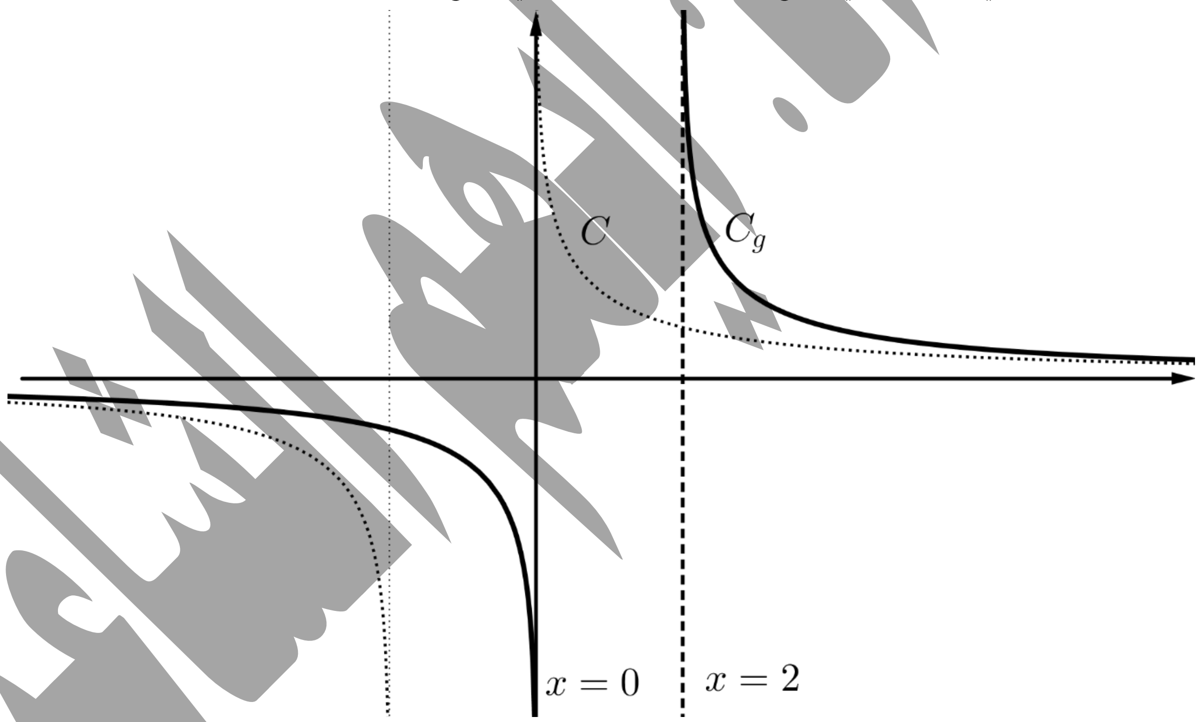
(4



(5

$$f(-x)=\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)=\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)=-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)=-g(x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



(6

$$u_n=f(n)=\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)=\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=\ln\frac{3}{1}+\ln\frac{4}{2}+\ln\frac{5}{3}+\ln\frac{6}{4}+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)+\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$S_n=\ln\left(\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\ldots\times\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n+2}{n}\right)=\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$$

ملاحظة: يمكن الاثبات بالتدريج ويمكن كتابة u_n بالشكل $u_n=\ln(n+2)-\ln n$

انتهى حل النموذج الأول

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

$(\ln x)^2-2\ln x-3\geq 0$ شرط الحل $x\in]0,+\infty[$

نفرض $X=\ln x$ فتصبح المتراجحة $X^2-2X-3\geq 0$

$$(X-3)(X+1)\geq 0$$

$$(\ln x-3)(\ln x+1)\geq 0$$

x	$-\infty$		e^{-1}		e^{2}		$+\infty$
$(\ln x-3)(\ln x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		//////		محققة	

ومنه $x\in\left]-\infty,\frac{1}{e}\right[\cup\left]e^2,+\infty\right[$

نقاطع مع الشرط ومنه يكون حل المتراجحة $x\in\left]0,\frac{1}{e}\right[\cup\left]e^2,+\infty\right[$

السؤال الثاني:

للتابع $f(x)=ax+b+\frac{\ln x}{x}$ مماس أفقي في النقطة $A(1,0)$ فإن $f(1)=0$ و $f'(1)=0$

بما أن $f(1)=0$ فإن $f(1)=a+b+\frac{\ln 1}{1}=0$ أي $a+b=0$ ... (1)

لدينا $f'(x)=a+\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=a+\frac{1-\ln x}{x^2}$

وبما أن $f'(1)=0$ فإن $f'(1)=a+\frac{1-\ln 1}{(1)^2}=0$

أي $a+1=0$ ... (2)

وبالتالي يكون $a=-1$

نعوض في (2) فنجد $b=-a=1$

السؤال الثالث:

بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x-\ln x}=\dfrac{0}{0-(-\infty)}=\dfrac{0}{\infty}=0=f(0)$ فإن f مستمر عند الصفر

و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{x-\ln x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x-\ln x}=\dfrac{1}{\infty}=0=f'(0)$ فإن f اشتقاقي عند الصفر

ويقبل مماساً أفقياً في المبدأ معادلته $y=0$

السؤال الرابع:

$\begin{cases}(\ln x).(\ln y)=-2\\ \ln x-\ln y=3\end{cases}$ نفرض $X=\ln x$ و $Y=\ln y$ فتصبح الجملة:

$$X.Y=-2 \quad (1)$$
$$X-Y=3 \quad (2)$$

من (2) نجد $X=Y+3$ ...(3)

نعوض في (1) فنجد $(Y+3).Y=-2$

$$Y^2+3Y+2=0$$
$$(Y+2)(Y+1)=0$$

إما $Y=-2$ أي $\ln y=-2$ ومنه $y=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$ ، نعوض في (3) فنجد $X=1$ أي $\ln x=1$ ومنه $x=e$

إما $Y=-1$ أي $\ln y=-1$ ومنه $y=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ ، نعوض في (3) فنجد $X=2$ أي $\ln x=2$ ومنه $x=e^2$

وبالتالي حل الجملة $(x,y)\in\left\{\left(e,\dfrac{1}{e^2}\right),\left(e^2,\dfrac{1}{e}\right)\right\}$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\frac{\ln|x|}{x} \text{ و } x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$$

1) الشرط: $x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=D_f$ و $-x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=D_f$

$$f(-x)=\frac{\ln|-x|}{-x}=-\frac{\ln|x|}{x}=-f(x)$$

وبالتالي التابع f فردي خطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات.

2) على المجال $]0,+\infty[$ فإن $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ وبالتالي:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

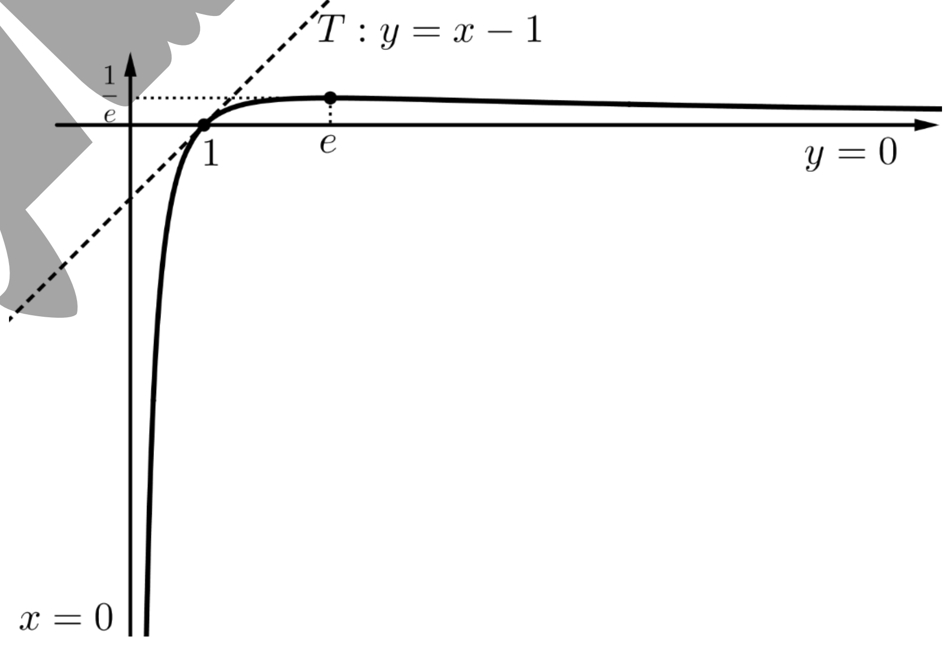
عندما $f'(x)=0$ فإن $\ln x=1$ أي $x=e$ حيث $f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

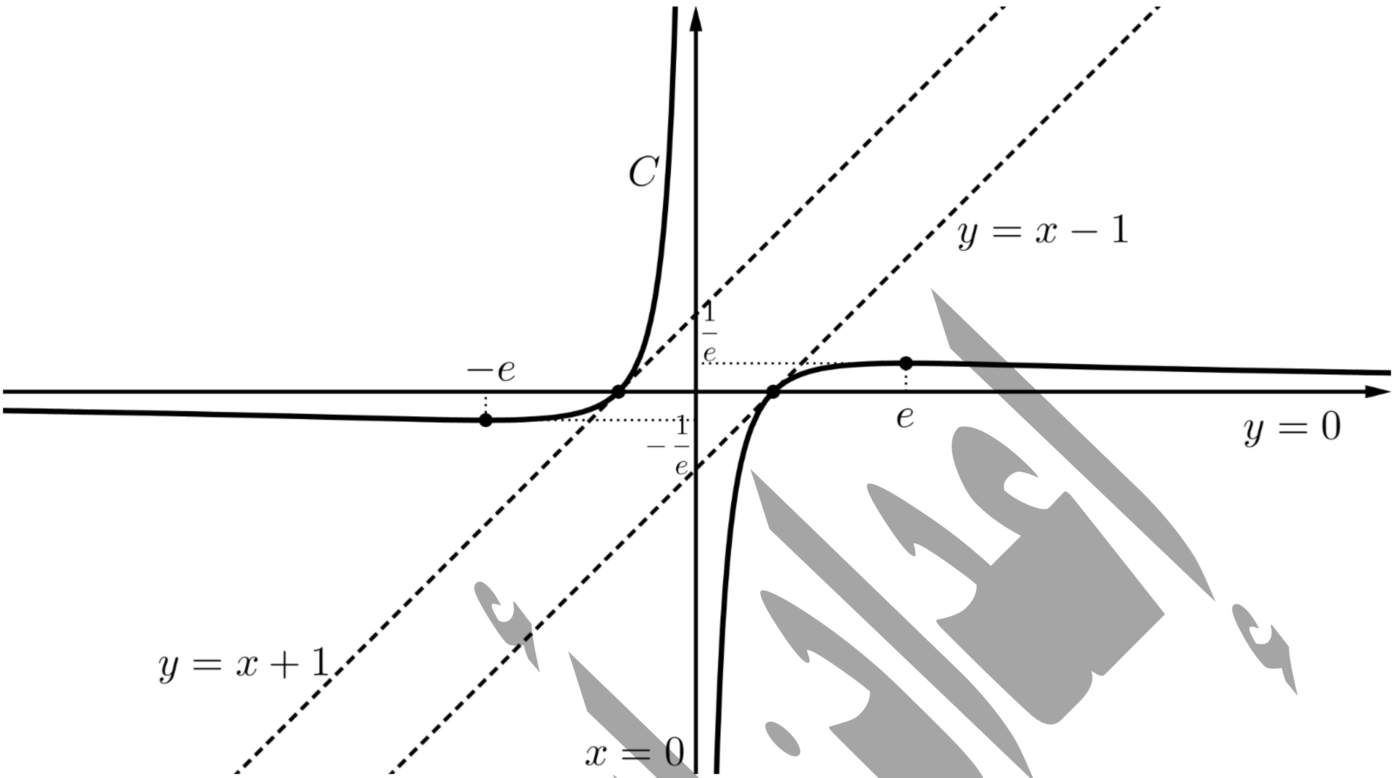
$f(e)=\frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى

3) $$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$$

4) رسم الخط البياني للتابع f على المجال $]0,+\infty[$

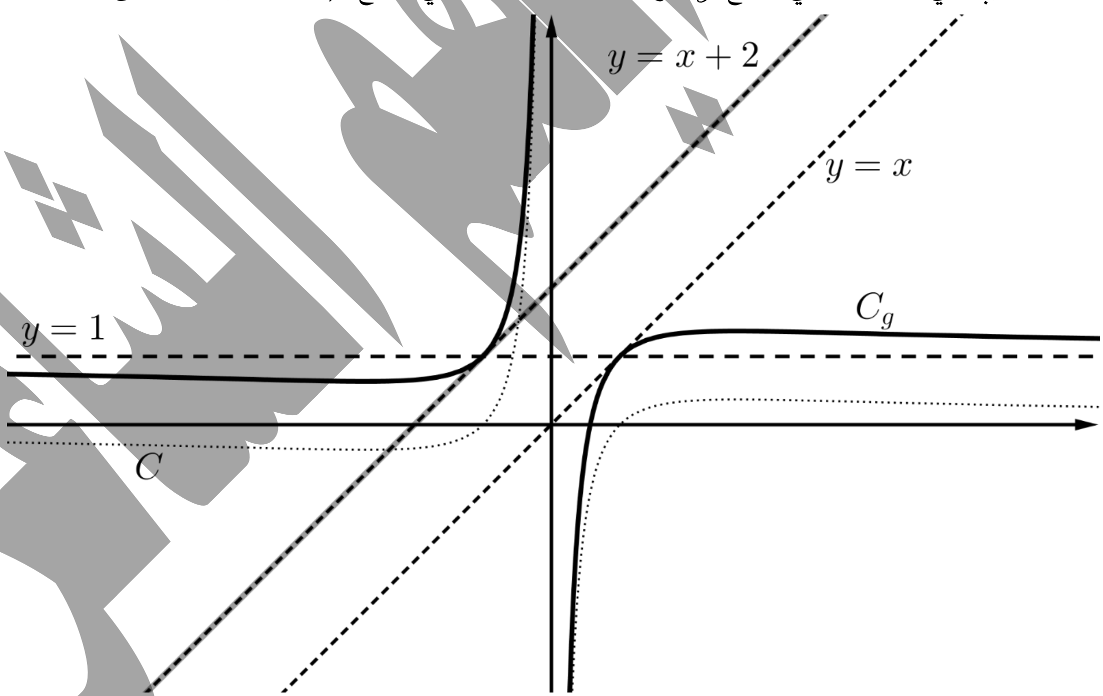


وبما أن التابع f فردي فإن خطه البياني على المجال $]0,+\infty[\bigcup]0,+\infty[$ يكون:



5) $$g(x)=\frac{\ln|x|+x}{x}=\frac{\ln|x|}{x}+1=f(x)+1$$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو انسحاب الخط البياني للتابع f بمقدار واحد للأعلى.



المسألة الثانية:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \text{ و } D_f=\left]-1,3\right[$$

1) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ و $x=-1$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$ و $x=3$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

2) $$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(3-x)$$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{-1}{3-x}=\dfrac{3-x+1+x}{(1+x)(3-x)}=\dfrac{4}{(1+x)(3-x)}>0$ التابع f متزايد تماماً

x	-1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) نقطة تقاطع C مع محور الفواصل تحقق $f(x)=0$

$$\ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right)=0=\ln 1$$

$$\frac{1+x}{3-x}=1$$

$1+x=3-x$ ومنه $x=1$ أي أن نقطة تقاطع C مع محور الفواصل هي $A(1,0)$

الشرط: $1+h\in D_f=\left]-1,3\right[$

$$h\in\left]-2,2\right[$$

$$-h\in\left]-2,2\right[$$

الشرط محقق $1-h\in D_f=\left]-1,3\right[$

$$\frac{f(1+h)+f(1-h)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{1+1+h}{3-1-h}\right)+\ln\left(\frac{1+1-h}{3-1+h}\right)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\right)+\ln\left(\frac{2-h}{2+h}\right)}{2}$$

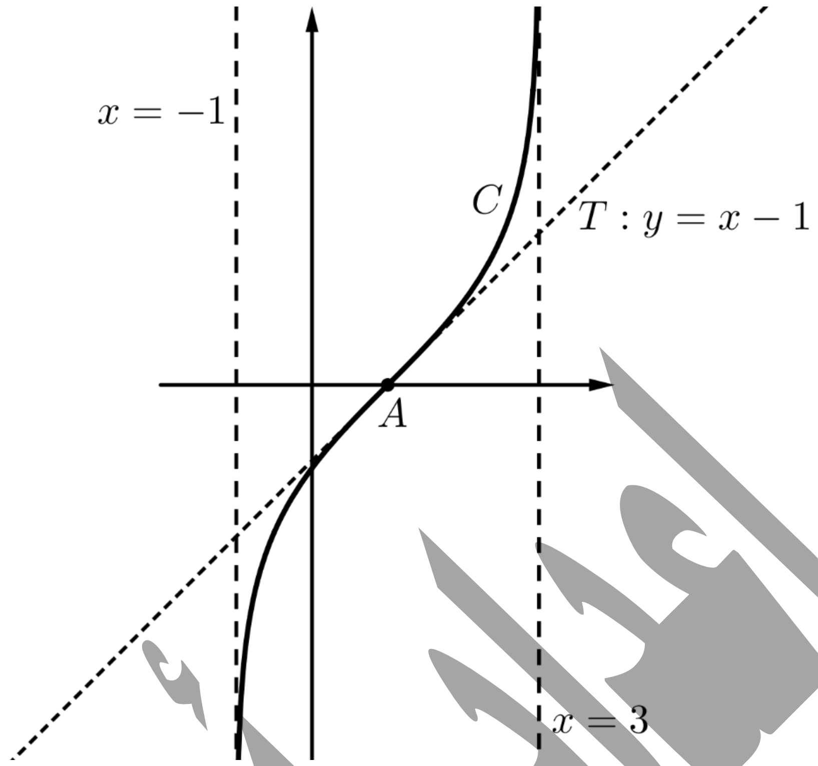
$$=\frac{\ln\left(\frac{2+h}{2-h}\times\frac{2-h}{2+h}\right)}{2}=\frac{\ln 1}{2}=\frac{\ln 0}{2}=0$$

وبالتالي النقطة $A(1,0)$ مركز تناظر للخط C

4) $$T: y=f'(1)(x-1)+f(1)$$

$$T: y=x-1$$

(5



(6

$$u_0 = 0 \text{ و } u_{n+1} = e^{f(u_n)} = e^{\ln\left(\frac{u_n+1}{3-u_n}\right)} = \frac{u_n+1}{3-u_n}$$

نفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1} < 1$

- نثبت صحة القضية $E(0)$ من أجل $n=0$: $u_0 = 0 < u_1 = \dfrac{1}{3} < 1$ محققة.
- نفرض صحة القضية $E(n)$ من أجل n : $u_n < u_{n+1} < 1$ محققة.
- نثبت صحة القضية $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ ؟

التابع الممثل للمتتالية u_n هو $f(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$ ومتزايد تماماً لأن $f'(x) = \dfrac{4}{(3-x)^2} > 0$

من الفرض $u_n < u_{n+1} < 1$ وبما أن التابع f متزايد تماماً فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(1)$$

$$u_{n+1} < u_{n+2} < 1$$

والعلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n .

- $u_n < u_{n+1}$ وبالتالي المتتالية u_n متزايدة تماماً.
- $u_n < 1$ وبالتالي المتتالية u_n محدودة من الأعلى.

وبالتالي المتتالية u_n متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ أي $\dfrac{x+1}{3-x} = x$ وتكافئ $x^2 - 2x + 1 = 0$ أي $(x-1)^2 = 0$

أي $x = 1$ وبالتالي $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$

انتهى حل النموذج الثاني

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

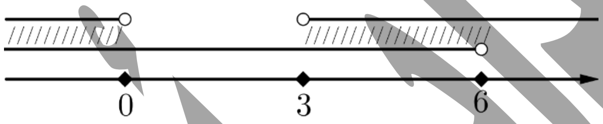
$$\ln(x^2-3x)\geq 2\ln(6-x)$$

شرط الحل: $6-x>0$ ومنه $x<6$ أي $x\in]-\infty,6[$

و $x^2-3x>0$ أي $x\in]-\infty,0[\cup]3,+\infty[$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		//////		محققة	

نقاطع الشرطين



وبالتالي شرط الحل: $x\in]-\infty,0[\cup]3,6[$

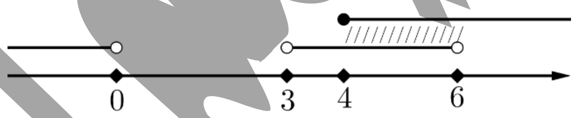
$$\ln(x^2-3x)\geq 2\ln(6-x)$$

$$\ln(x^2-3x)\geq \ln(6-x)^2$$

$$x^2-3x\geq 36-12x+x^2$$

$9x\geq 36$ وبالتالي $x\geq 4$

وبالتالي $x\in[4,+\infty[$ نقاطع مع الشرط فنجد



حل المتراجحة $x\in[4,6[$

السؤال الثاني:

المتراجحة $2+\ln x\leq 2\sqrt{x}$ تكافئ $2+\ln x-2\sqrt{x}\leq 0$

نفرض التابع $g(x)=2+\ln x-2\sqrt{x}$ المعرف على المجال $x\in]0,+\infty[$

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$$

عندما $g'(x)=0$ فإن $x=1$ حيث $g(1)=0$ وبالتالي

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول اطراد التابع g نجد أن $g(x)\leq 0$

$$2+\ln x-2\sqrt{x}\leq 0$$

وبالتالي العلاقة محققة $2+\ln x\leq 2\sqrt{x}$

السؤال الثالث:

التابع $f(x)=\dfrac{-1}{\ln x}$ معرف بشرط $(\ln x\neq 0 \ , \ x>0)$ أي $(x\neq 1 \ , \ x>0)$ وبالتالي $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{-1}{-\infty}=0$ وبالتالي النقطة $(0,0)$ نقطة مقاربة

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

و بالتالي $x=1$ مقارب شاقولي عند $\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\dfrac{-1}{+\infty}=0$ و بالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

السؤال الرابع:

جملة المعادلتين $\begin{pmatrix}\ln(x+y)=2\ln 2\\ \ln x+\ln y=\ln 3\end{pmatrix}$ تكافئ $\begin{pmatrix}\ln(x+y)=\ln 4\\ \ln x.y=\ln 3\end{pmatrix}$ أي $\begin{matrix}x+y=4 \ (1)\\ xy=3 \quad (2)\end{matrix}$

من (1) نجد $x=4-y \ ...(3)$

نعوض في (2) فنجد $(4-y).y=3$ و تكافئ $y^2-4y+3=0$

$(y-3)(y-1)=0$

إما $y=3$ ومنه $x=1$

أو $y=1$ ومنه $x=3$

وبالتالي حل الجملة $(x,y)\in\{(1,3),(3,1)\}$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2} \text{ و } D_f=]0,+\infty[$$

1) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}.\frac{1}{x}=0\times 0=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $1-2\ln x=0$ أي $\ln x=\frac{1}{2}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\ln\sqrt{e}$

ومنه $x=\sqrt{e}$ حيث $f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2}=\frac{\frac{1}{2}}{e}=\frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$ قيمة حدية كبرى

2) الوضع النسبي: $f(x)-y_\Delta=\frac{\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f(x)-y_\Delta$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		C تحت المقارب		C فوق المقارب	

3) f يقبل مماساً T يوازي المستقيم $y=x$ إذا كان $f'(x)=1$

$\frac{1-2\ln x}{x^3}=1$ أي $1-2\ln x=x^3$ وتكافئ $1-2\ln x-x^3=0$

نفرض التابع $h(x)=1-2\ln x-x^3$ المعرف على المجال $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0}h(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$

$h'(x)=-\frac{2}{x}-3x^2<0$ التابع متناقص تماماً

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

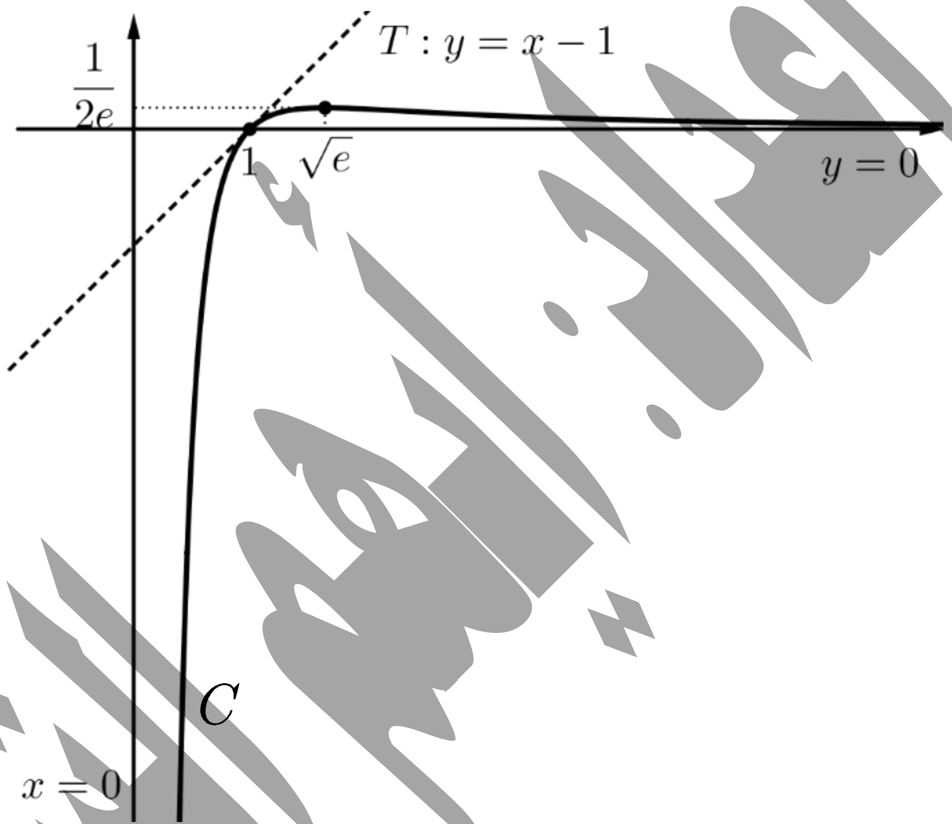
على المجال $]0,+\infty[$ التابع مستمر ومتناقص تماماً و $0\in h(]0,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

وبالتالي للمعادلة $h(x)=0$ حل وحيد هو $x=1$ لأن $h(1)=1-2\ln 1-(1)^3=1-1=0$

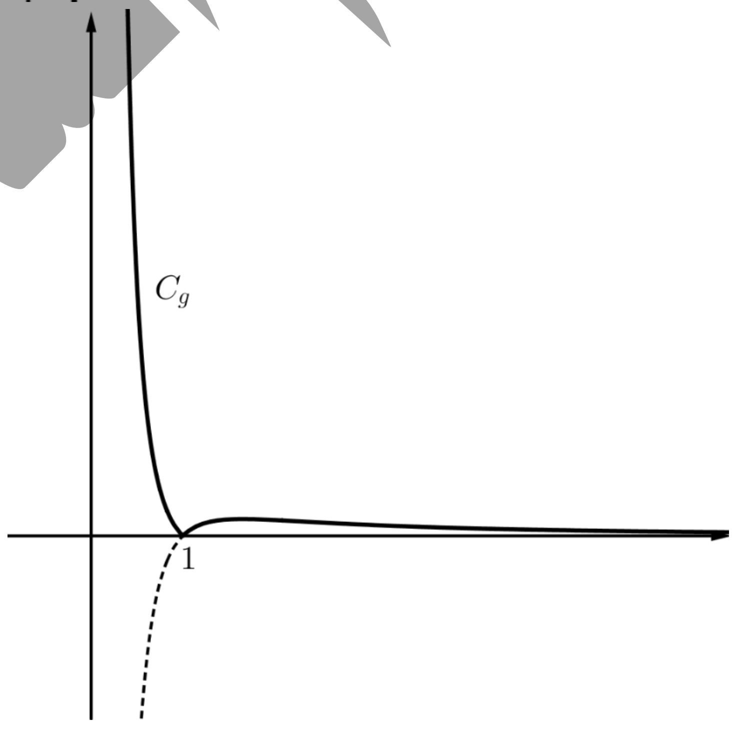
أي أن للمعادلة $f'(x)=1$ حل وحيد وبالتالي الخط C يقبل مماساً واحداً يوازي المستقيم $y=x$ في النقطة التي فاصلتها 1

معادلته $T:y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$

(4



(5



المسألة الثانية:

$f(x)=x+1-\ln|x|$ و $D_f=\mathbb{R}^*=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1) $$f(x)=\begin{cases} x+1-\ln x & : \ x>0 \\ x+1-\ln(-x) & : \ x<0 \end{cases}$$

2) على المجال $]-\infty,0[$ فإن التابع يكتب بالشكل $f(x)=x+1-\ln(-x)$ ومنه:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$$f'(x)=1-\frac{-1}{-x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $x=1\notin]-\infty,0[$ مرفوض

وبالتالي $f'(x)>0$ ومنه التابع f متزايد تماماً على المجال $]-\infty,0[$

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

على المجال $]0,+\infty[$ فإن التابع يكتب بالشكل $f(x)=x+1-\ln x$ ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $x=1\in]0,+\infty[$ مقبول ، حيث $f(1)=2$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه يكون جدول تغيرات التابع f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1)=2$ قيمة حدية صغرى

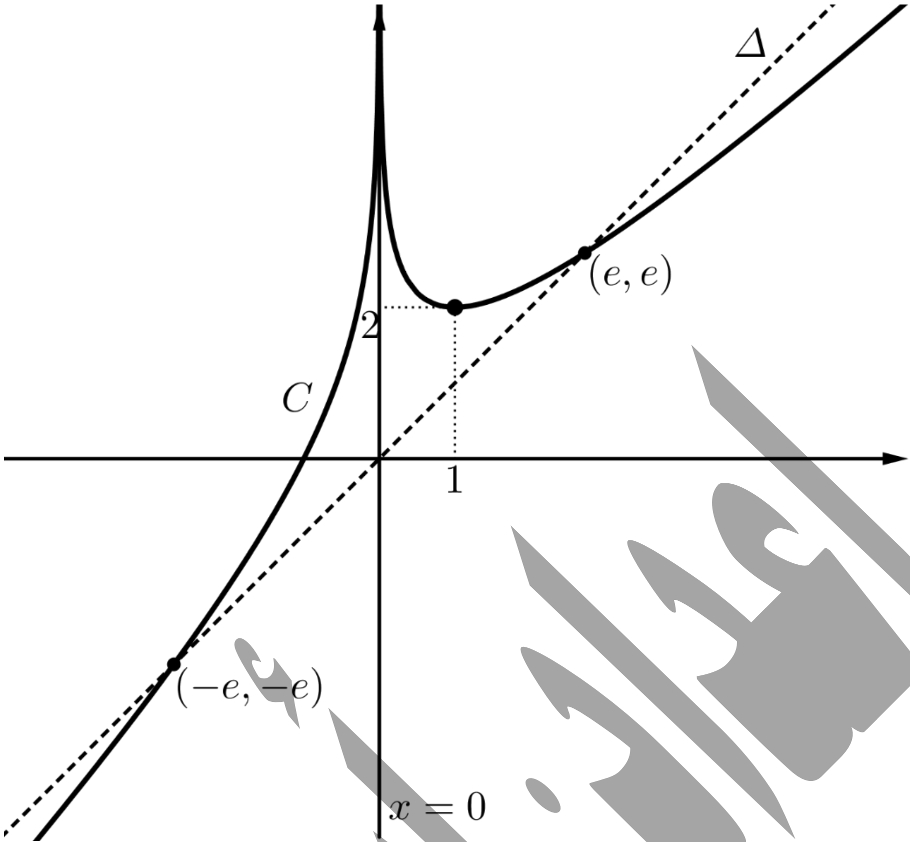
3) نقاط تقاطع C مع المستقيم $\Delta: y=x$ تحقق $f(x)=x$

$x+1-\ln|x|=x$ أي $\ln|x|=1=\ln e$ أي $|x|=e$

إما $x=e$ ومنه $y=e$ وبالتالي (e,e)

إما $x=-e$ ومنه $y=-e$ وبالتالي $(-e,-e)$

4)



5) $f(x)=\lambda$

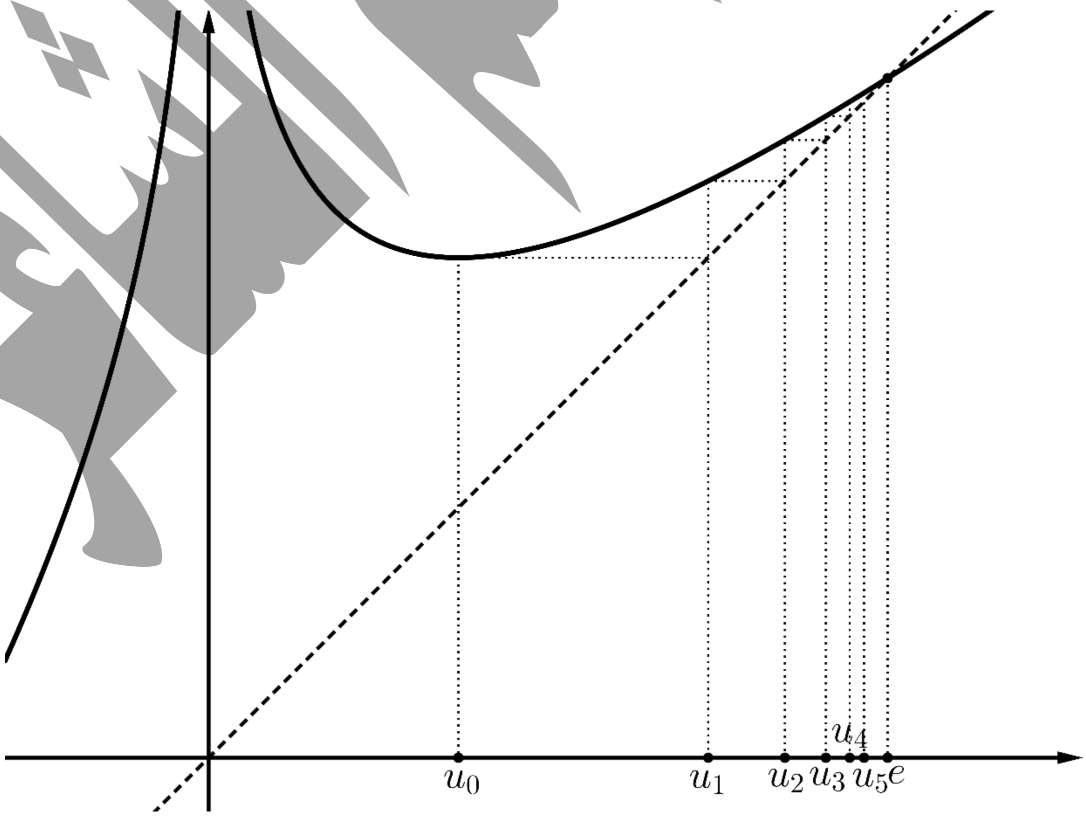
$\lambda \in]-\infty,2[$ للمعادلة حل وحيد

$\lambda = 2$ للمعادلة حلين مختلفين

$\lambda \in]2,+\infty[$ للمعادلة ثلاث حلول مختلفة

6) $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + 1 - \ln|u_n|$

a)



نخمن أن المتتالية متزايدة ونهايتها المحتملة e

b) نفرض القضية $E(n): 1 \le u_n < e$

- نثبت صحة القضية $E(0)$ من أجل $n = 0$: $1 \le u_0 = 1 < e$ محققة
- نفرض صحة القضية $E(n)$ من أجل n : $1 \le u_n < e$ محققة
- نثبت صحة القضية $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $1 \le u_{n+1} < e$ ؟

من الفرض $1 \le u_n < e$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $[1,e[$ فإن:

$$f(1) \le f(u_n) < f(e)$$

$$1 \le 2 \le u_{n+1} < e$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

c) نفرض القضية $E(n): u_n < u_{n+1}$

- نثبت صحة القضية $E(0)$ من أجل $n = 0$: $u_0 = 1 < u_1 = 2$ محققة
- نفرض صحة القضية $E(n)$ من أجل n : $u_n < u_{n+1}$ محققة
- نثبت صحة القضية $E(n+1)$ من أجل $n+1$: $u_{n+1} < u_{n+2}$ ؟

من الفرض $u_n < u_{n+1}$ وبما أن التابع f متزايد تماماً على المجال $[1,e[$ فإن:

$$f(u_n) < f(u_{n+1})$$

$$u_{n+1} < u_{n+2}$$

العلاقة محققة من أجل $n+1$ فهي محققة أياً كان العدد الطبيعي n.

- بما أن المتتالية u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(x) = x$ أي $\lim_{n\to\infty} u_n = e$.

انتهى حل النموذج الثالث

التابع اللوغاريتمي

أولاً:

السؤال الأول:

$$\ln|x+1|+\ln(2-x)=2\ln 2$$

شرط الحل: $(0 < x-2\ ,\ 0 \neq 1+x)$ أي $(2 > x\ ,\ -1 \neq x)$ وبالتالي $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,2[$

$$\ln|x+1|(2-x)=\ln 4$$

$$|x+1|(2-x)=4$$

إما $(x+1)(2-x)=4$ أي $-x^2+2x-x+2=4$ وتكافئ $x^2-x+2=0$

$\Delta = 1-8=-7<0$ ليس للمعادلة حل

أو $(x+1)(2-x)=-4$ أي $-x^2+2x-x+2=-4$ وتكافئ $x^2-x-6=0$

$$(x-3)(x+2)=0$$

إما $x=3$ مرفوض

أو $x=-2$ مقبول

السؤال الثاني:

$$f(x) \geq g(x)$$

$\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$ وتكافئ $\ln x - \dfrac{x-1}{x} \geq 0$

نفرض التابع $h(x)=\ln x-\dfrac{x-1}{x}$ المعرف على المجال $]0,+\infty[$

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

عندما $h'(x)=0$ يكون $x=1$ حيث $h(1)=0$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

من جدول اطراد التابع h نجد أن $h(x) \geq 0$

أي $\ln x - \dfrac{x-1}{x} \geq 0$ أي $\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$

وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ أياً كان العدد الطبيعي $n > 0$

السؤال الثالث:

$$f(x)=\ln\sqrt{x+3}-\frac{1}{2}\ln x$$

f معرف بشرط $(x+3>0\ ,\ x>0)$ أي $(x>-3\ ,\ x>0)$

وبالتالي $D_f=]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\sqrt{x+3}-\frac{1}{2}\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\sqrt{x+3}-\ln\sqrt{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\sqrt{\frac{x+3}{x}}=\ln\sqrt{1}=\ln 1=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

السؤال الرابع:

الجملة $\begin{pmatrix}\ln(x-y)=2\ln 2\\ \ln x-\ln y=\ln 3\end{pmatrix}$ تكافئ $\begin{pmatrix}\ln(x-y)=\ln 4\\ \ln\dfrac{x}{y}=\ln 3\end{pmatrix}$ وبالتالي $\begin{matrix}x-y=4 & (1)\\ \dfrac{x}{y}=3 & (2)\end{matrix}$

من (2) نجد $x=3y$

نعوض في (1) فنجد $3y-y=4$ أي $y=2$

ومنه $x=3(2)=6$

وبالتالي حل الجملة $(x,y)=\{(6,2)\}$

ثانياً:

المسألة الأولى:

$$D_f =]0,+\infty[\text{ و } f(x)=\frac{1+2\ln x}{x^2}$$

1) $\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}.\frac{\ln x}{x}\right)=0$ وبالتالي $y=0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}.x^2-2x(1+2\ln x)}{x^4}=\frac{2x-2x(1+2\ln x)}{x^4}=\frac{2-2(1+2\ln x)}{x^3}=\frac{2-2+4\ln x}{x^3}=\frac{4\ln x}{x^3}$$

عندما $f'(x)=0$ فإن $\ln x=0$ أي $x=1$ حيث $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(1)=1$ قيمة حدية كبرى

2) المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 1 أفقي معادلته $y=1$

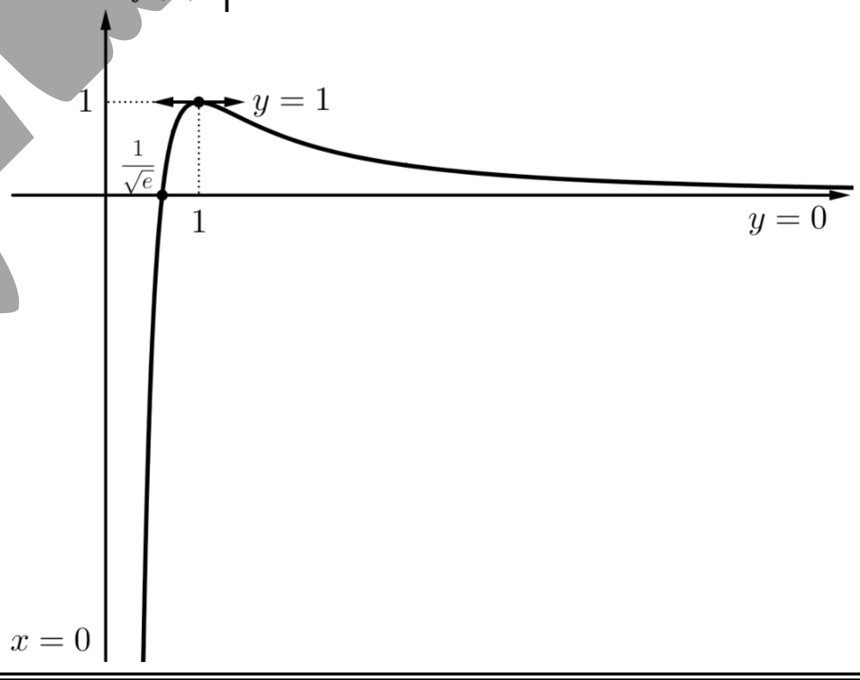
3) $f(x)=0$ أي $\frac{1+2\ln x}{x^2}=0$ أي $1+2\ln x=0$

$$\ln x=-\frac{1}{2}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$$

أي أن $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ ومنه إشارة $f(x)$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4)



5) المعادلة $\frac{1+2\ln a}{1+2\ln b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$ تكافئ

$$\frac{1+2\ln a}{1+2\ln b}=\frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{1+2\ln a}{a^2}=\frac{1+2\ln b}{b^2}$$

$$f(a)=f(b)$$

على المجال $m\in]0,1[$ للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان

وبالتالي يوجد عددين a و b بحيث $f(a)=f(b)$

المسألة الثانية:

$$f(x)=x+1-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

1) f معرف بشرط $\frac{x}{x-2}>0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
الكسر		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
المتراجحة		محققة	$\|$	//////////	$\|$	محققة	

وبالتالي $D_f=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

2) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ وبالتالي $x=0$ مقارب شاقولي عند $+\infty$

$\lim_{x\to2^-}f(x)=-\infty$ وبالتالي $x=2$ مقارب شاقولي عند $-\infty$

$$f(x)=x+1-\ln x+\ln(x-2)$$

التابع متزايد تماماً $f'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=1-\frac{x-2}{x(x-2)}+\frac{x}{x(x-2)}=1+\frac{2}{x(x-2)}>0$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$		$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$		$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $$f(x)+f(2-x)\overset{?}{=}4$$

$$f(x)+f(2-x)=x+1-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)+2-x+1-\ln\left(\frac{2-x}{2-x-2}\right)=4-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)-\ln\left(\frac{2-x}{-x}\right)$$

$$f(x)+f(2-x)=4-\left(\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)+\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)\right)=4-\ln\left(\frac{x}{x-2}\times\frac{x-2}{x}\right)=4-\ln1=4$$

> قاعدة: تكون النقطة (a,b) مركز تناظر للخط البياني للتابع f إذا تحقق:
> أياً كان x من D_f كان $2a-x$ من D_f و $f(x)+f(2a-x)=2b$

الشرط : أياً كان x من المجال $D_f=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

فإن $-x$ من المجال $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ وبالتالي $2-x$ من المجال $D_f=]-\infty,0[\cup]2,+\infty[$

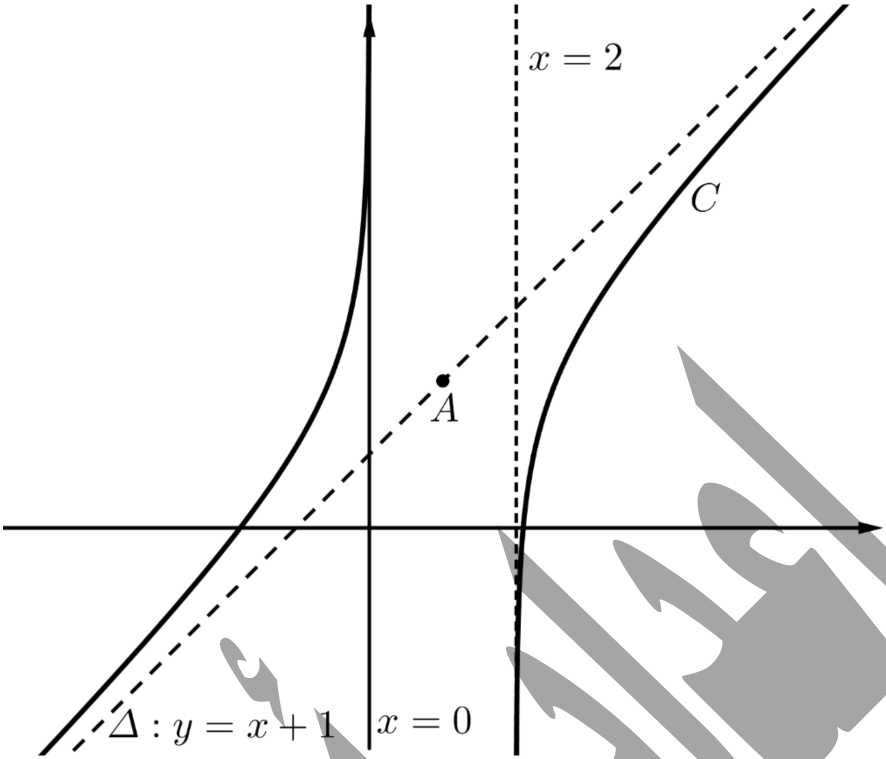
ووجدنا سابقاً أن $f(x)+f(2-x)=4=2(2)$

أي أن النقطة $A(1,2)$ مركز تناظر للخط البياني C.

4) $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(-\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)\right)=-\ln1=0$$

وبالتالي المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقارب مائل للخط C.

5)



6) على المجال $]-\infty,0[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $m\in f(]-\infty,0[)=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد في المجال $]-\infty,0[$

على المجال $]2,+\infty[$ التابع مستمر ومتزايد تماماً و $m\in f(]2,+\infty[)=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

وبالتالي للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد في المجال $]2,+\infty[$

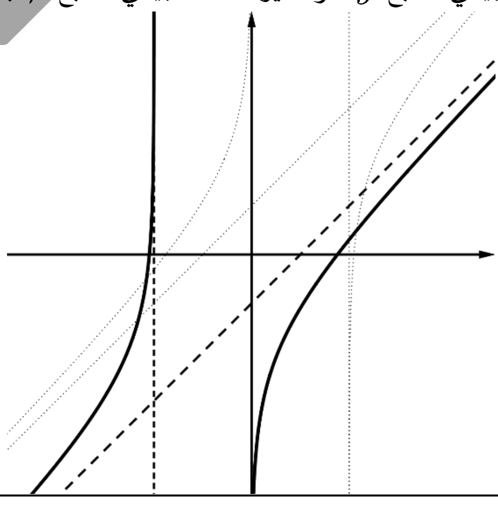
وبالتالي للمعادلة $f(x)=m$ حلين مختلفين أياً كان العدد الحقيقي m.

7)

$$f(-x)=-x+1-\ln\left(\frac{-x}{-x-2}\right)=-x+1-\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)=-x+1+\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$f(-x)=-x+1+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=-\left(x-1-\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right)=-g(x)$$

وبالتالي الخط البياني للتابع g هو نظير الخط البياني للتابع f بالنسبة للمبدأ



انتهى حل النموذج الرابع

التابع اللوغاريتمي