المحاضرة الثانية

السنة الثالثة ـ إحصاء رياضي

نظرية الخدمات

سابعاً: الانحراف المعياري لمقاييس الأداء:

1- الانحراف المعياري لزمن الانتظار في الطابور يعطى بالعلاقة :

$$\sigma_{W_q} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}\left(W_q(n) - W_q\right)^2}{N}}$$

2- الانحراف المعياري لزمن الانتظار في النظام يحسب من خلال العلاقة التالية :

$$\sigma_{W_s} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{N}(W_s(n) - W_s)^2}{N}}$$

3- الانحراف المعياري لعدد الزبائن في الطابور يحسب بالعلاقة :

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e}\left(L_q(n) - L_q\right)^2 dt}{t_s - t_e}}$$

4- الانحراف المعياري لعدد الزبائن في النظام يعطى بالعلاقة :

$$\sigma_{L_s} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e}(L_s(n) - L_s)^2 dt}{t_s - t_e}}$$

ثامناً: صيغ ليتل Little's Formula:

نستخدم صيغة ليتل في حال كان النظام خالٍ في بداية الفترة الزمنية وفي نهايتها، أي الفترة الزمنية تبدأ وتنتهي بعدم وجود زبائن في النظام، أي أن: $L_S(t_S) = 0$ و $L_S(t_e) = 0$.

تعطى صيغ ليتل بالعلاقات التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} L_q &= \lambda W_q \\ L_s &= \lambda W_S \end{aligned}}$$

علماً أن λ هو معدل وصول الزبائن خلال واحدة الزمن أو الفترة الزمنية، يحسب من العلاقة:

$$\boxed{\lambda = \frac{N}{t_e - t_s}}$$

تاسعاً: تمرين شامل:

بفرض أنه تم تسجيل دخول الزبائن لتلقي خدمة ما خلال فترة زمنية مقدارها نصف ساعة في يوم معين، يوضح الجدول التالي بيانات الزبائن من الساعة 09:30 وحتى الساعة 10:00:

الزبون	زمن الوصول	زمن المغادرة من الطابور	زمن المغادرة من النظام
1	9:36	9:36	9:40
2	9:37	9:40	9:44
3	9:38	9:44	9:48
4	9:40	9:48	9:52
5	9:45	9:52	9:56

والمطلوب:

1- وصف النظام.

2- حساب مقاييس الأداء للنظام.

3- حساب الانحراف المعياري لمقاييس الأداء L_q و L_s.

4- حساب كل من L_q و L_s باستخدام صيغة ليتل.

الحل:

1- نلاحظ من الجدول السابق أن هذا النظام بمخدم واحد لأن الزبون الثاني عندما وصـــل اضـــطر للانتظار، كما أن كل زبون يبدأ بالخدمة بمجرد انتهاء الزبون الذي يسبقه، أي أن نظام الخدمة هو $FIFO$ أي من يأتي أولاً يخدم أولاً.

2- لحساب مقاييس الأداء نتبع الخطوات التالية:

نحسب أولاً زمن مغادرة الطابور وزمن مغادرة النظام لكل زبون كما يلي:

$W_s(n)$	$W_q(n)$	الزبون
4	0	1
7	3	2
10	6	3
12	8	4
11	7	5

علماً أنه تم حساب $W_q(n)$ من خلال طرح زمن مغادرة كل زبون من الطابور من زمن الوصول، و نحسب $W_s(n)$ بطرح زمن مغادرة كل زبون من الطابور من زمن الوصول.

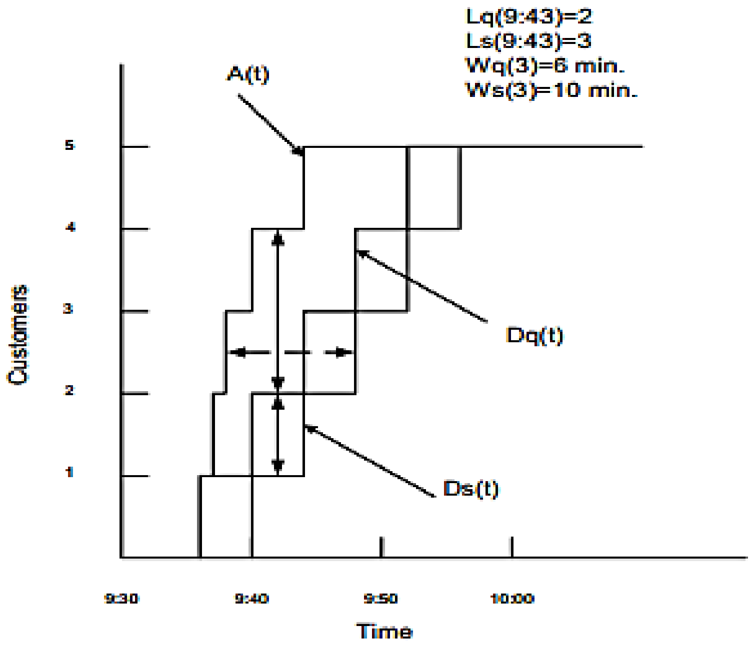
وبالتالي متوسط زمن الانتظار في الطابور يحسب من العلاقة:

$$W_q = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_q(n) = \frac{0+3+6+8+7}{5} = 4.8$$

ومتوسط زمن الانتظار في النظام: يحسب من العلاقة:

$$W_s = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_s(n) = \frac{4+7+10+12+11}{5} = 8.8$$

يوضح الشكل التالي شكل الوصول والمغادرة التراكمي:



ومتوسط طول الطابور (أي متوسط عدد الزبائن في الطابور): يعطى بالعلاقة التالية:

$$L_q = \frac{\int_{t_s}^{t_e} L_q(t)dt}{t_e - t_s}$$

مثلاً يكون لدينا عند الزمن $t = 9:43$، $A(t) = 4$ و $D_q(t) = 2$

وبالتالي:

$$L_q(t) = A(t) - D_q(t) = 2$$

و t_e هي بداية الفترة الزمنية أي عند 9:30 ، t_s تعتبر نهاية الفترة الزمنية أي 10:00، يوضح الجدول التالي عدد الزبائن في الطابور عند كل فترة زمنية:

زمن الوصول (طول الفترة)	$L_q(t)$
30 :09–37 :09 (7دقائق)	0
37 :09–38 :09 (1 دقيقة)	1
38 :09–44 :09 (6 دقائق)	2
44 :09–45 :09 (1 دقيقة)	1
45 :09–48 :09 (3 دقائق)	2
48 :09–52 :09 (4 دقائق)	1
52 :09–00 :10 (8 دقائق)	0

أي:

$$L_q = \frac{\int_{t_s}^{t_e} L_q(t)dt}{t_e - t_s} = \frac{\sum_{t_s}^{t_e} L_q(t)}{30}$$

$$= \frac{7*0+1*1+6*2+1*1+3*2+4*1+8*0}{30}$$

$$= 0.8$$

من أجل حساب L_S نحسب انتظار كل زبون في النظام، يوضح الجدول التالي عدد الزبائن في النظام عند كل فترة زمنية:

$L_q(t)$	الفترات الزمنية
0	09:30-09:37 (7دقائق)
0	09:37-09:38 (1 دقيقة)
1	09:38-09:44 (6 دقائق)
1	09:44-09:45 (1 دقيقة)
0	09:45-09:48 (3 دقائق)
1	09:48-09:52 (4 دقائق)
2	09:52-10:00 (8 دقائق)

متوسط عدد الزبائن في النظام: يعطى بالعلاقة التالية:

$$L_s = \frac{\int_{t_s}^{t_e} L_s(t)dt}{t_e - t_s}$$
$$= \frac{7*0 + 0*1 + 6*1 + 1*1 + 3*0 + 4*1 + 8*0}{30}$$
$$= 0.37$$

3- الانحراف المعياري لـ L_q:

$$\sigma_{L_q} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e}\left(L_q(n) - L_q\right)^2 dt}{t_s - t_e}}$$
$$= \sqrt{\frac{(7+8)*(0-0.8)^2 + (1+1+4)*(1-0.8)^2 + (6+3)*(2-0.8)^2}{30}}$$
$$= 0.872$$

الانحراف المعياري لـ L_s:

$$\sigma_{L_s} = \sqrt{\frac{\int_{t_s}^{t_e}(L_s(n) - L_s)^2 dt}{t_s - t_e}}$$

$$= \sqrt{\frac{(7+1+3)*(0-0.8)^2 + (6+1+4)*(1-0.8)^2 + 8*(2-0.8)^2}{30}}$$

$$= 0.795$$

4- صيغ ليتل:

$$L_q = \lambda W_q = 0.167 * 4.8 = 0.8$$

$$L_s = \lambda W_S = 0.167 * 8.8 = 1.47$$

علماً أن:

$$\lambda = \frac{5}{30} = 0.167$$