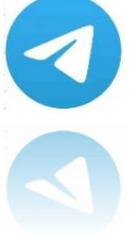


تم تحميل الملف بواسطة : بوت مكتبتى التعليمية



انقر هنا للوصول إلى بوت مكتبتى التعليمية



بوت مكتبتى التعليمية : عبارة عن مكتبة إلكترونية تعليمية شاملة لغالبية ملفات المراحل الدراسية على تطبيق تيليجرام - يمكن الوصول لها عن طريق الرابط :

https://t.me/Science_2022bot

2024

للبيكالوريا
العلمي



ACADEMY

مكتفة

الرياضيات

إعداد: MK Academy

by: Hisham Labanieh
099 88 175 22

f Kousay Albaba f Majd AlFaqeer

K: 0945856883

M: 0935089230

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x; & +\infty \\ -x; & -\infty \end{cases}$$

تنكر:

حالة $0 \times \infty$ أو $\frac{0}{0}$

نوع وجود تابع مثلثي:

نحلل باستخدام إحدى الطرق التالية

إخراج عامل مشترك.

تحليل مباشر.

تحليل باستخدام Δ

تحليل باستخدام قسمة إقليدية.

مطابقات.

التجميع إلى فئات.

الضرب بالمرافق والقسمة عليه في حالة وجود جذر.

ثم نختصر ونوجد النهائية

حالات عدم التعيين

$+\infty - \infty$

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x}$$

ذهنياً نخرج مسطر الجذر الأول ومسطر الجذر الثاني ونميز:

مختلفان

عامل مشترك x^2 من تحت كل جذر ثم x من حذي الناتج.

متشابهان

ضرب بالمرافق والقسمة عليه.

إذا كان مو نفسو:

نخرج x^2 من تحت الجذر عامل مشترك وهي ثم x من حدود الناتج عامل مشترك ثم نأخذ النهائية.

مع وجود تابع مثلثي:

دسائير

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$1 - \cos(x) = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \sqrt{x} \pm \sqrt{x}$$

ذهنياً نخرج المسطر تحت الجذر ونقارنه مع المقار:

نخرج عامل مشترك من البسط والمقام ونختصر ونوجد النهائية.

إذا كان نفسو:

نضرب بالمرافق ونقسم عليه ونميز:

مقار $\frac{\text{نخرج عامل مشترك.}}{\text{مقار}}$

عدد $\frac{\text{فالجواب صفر.}}{\text{مقار}}$

مبرهنة

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot \sin(x) (1 + \cos(x))}{\sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{\sin(x)} (1 + \cos(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \times (1 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \quad \text{لأن:}$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{\sin(3x) - \sin(x)}{\sin(2x)} \quad a = 0$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{3x \frac{\sin(3x)}{3x} - x \frac{\sin(x)}{x}}{2x \frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x \left(3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} \right)}{2x \frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x}}{2 \times \frac{\sin(2x)}{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3 \times 1 - 1}{2 \times 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\cos(3x) - \cos(x)}{x \cdot \sin(x)} \quad a = 0$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-2 \sin\left(\frac{4x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2x}{2}\right)}{x \cdot \sin(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-2 \sin(2x) \sin(x)}{x \cdot \sin(x)} = \frac{-2 \sin(2x) \times 2}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4 \times 1 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

مثال: احسب نهاية كل من التوابع الآتية عند a المعطاة:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \quad a = +\infty$$

هناك عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

$$\textcircled{2} f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x \quad a = -\infty$$

هناك عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} + x)(\sqrt{x^2 + 2x} - x)}{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x}$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right)} - x} = \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x}{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} - x} = \frac{2x}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{-1 - 1} = -1$$

$$\textcircled{3} f(x) = \frac{x \cdot \sin(x)}{1 - \cos(x)} \quad a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{x \cdot \sin(x) (1 + \cos(x))}{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot \sin(x) (1 + \cos(x))}{1 - \cos^2(x)}$$

الإحاطة

الحالة ③

مبرهنة

$$f(x) \leq g(x)$$

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

إذا الكبير $-\infty$

الأصغر منه حصراً $-\infty$

$$f(x) \geq g(x)$$

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

إذا الصغير $+\infty$

الأكبر منه حصراً $+\infty$

الحالة ②

f و g تابعان يحققان:

$$|f(x) - 1| \leq g(x)$$

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

الحالة ①

f و g و h

ثلاث توابع تحقق:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

إذا كان:

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 1$$

نستنتج أن:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

سؤال: كيف نبدأ بحصر التابع؟
الجواب: نبدأ من إحدى عناصر الحصر التالية:

سؤال: متى نحن نحصر تابع؟
الجواب: عندما نحصل على $\sin(\infty)$ أو $\cos(\infty)$ أو نهاية تابع يحوي $E(x)$ عند ∞

مثاليات

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$n! \geq n$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$0 \leq |\sin(x)| \leq +1$$

$$0 \leq |\cos(x)| \leq +1$$

$$0 \leq \sin^2(x) \leq +1$$

$$0 \leq \cos^2(x) \leq +1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq +1$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq +1$$

مثال: ليكن f معرف على $R \setminus \{1\}$ وفق: $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$

أوجد قيمة α التي تحقق الشرط: $x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$

عندما $f(x) > 10^2$

الحل:

$$f(x) > 10^2 \Rightarrow \frac{x}{(x-1)^2} > 10^2$$

$$\Rightarrow x > 10^2(x-1)^2 \Rightarrow 0 > 10^2(x-1)^2 - x$$

$$\Rightarrow 10^2(x-1)^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow 10^2(x-1)^2 - x + 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10^2(x-1)^2 - (x-1) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 10^2 t^2 - t - 1 = 0 \quad \text{بفرض } x-1 = t$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - 4 \times 10^2(-1) = 401 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \approx 20$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 20}{2 \times 100} \approx 0.1$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 20}{2 \times 100} \approx -0.1$$

$t = x - 1$	$-\infty$	-0.1	0.1	$+\infty$
$10^2 t^2 - t - 1$	+	0	-	+
$10^2(x-1)^2 - x$				
$10^2 t^2 - t - 1 < 0$	غير محققة	محققة	غير محققة	
$t \in]-0.1, 0.1[\Rightarrow x - 1 \in]-0.1, 0.1[$				

$$\Rightarrow x \in]1 - 0.1, 1 + 0.1[\Rightarrow \alpha = 0.1 = \frac{1}{10}$$

نهاية التابع المركب:

لإيجاد النهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$

نوجد: $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

نوجد: $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$

فيكون: $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$

تذكر: عندما يعطينا $f(x)$ أو u_n ويطلب تعيين عدد A يحقق:

إذا كان: $x > A$ فإن $f(x) \in]a, b[$

نستخدم: $|f(x) - C| < r$

$$C \text{ مركز المجال} = \frac{b+a}{2}, \quad r \text{ نصف القطر} = \frac{b-a}{2}$$

مثال: احسب نهاية كل من التوابع الآتية عند a المعطاة:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{3E(x) + 5}{x-1} \quad a = +\infty$$

نعلم أن: $x-1 < E(x) \leq x$

$$\text{نضرب بـ (3)} \quad 3x-3 < 3E(x) \leq 3x$$

$$\text{نضيف (5)} \quad 3x+2 < 3E(x)+5 \leq 3x+5$$

نقسم على $(x-1)$ حيث $x-1 > 0$ في جوار $+\infty$

$$\frac{3x+2}{x-1} < \frac{3E(x)+5}{x-1} \leq \frac{3x+5}{x-1}$$

$$\frac{3x+2}{x-1} < f(x) \leq \frac{3x+5}{x-1}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+2}{x-1} \right) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x+5}{x-1} \right) &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{حسب مبرهنة الإحاطة} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{x + \cos(x)}{3 + 2 \sin(x)} \quad a = +\infty$$

$$-1 \leq \cos(x) \leq +1$$

$$\Rightarrow x-1 \leq x + \cos(x) \leq x+1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq +1$$

$$\Rightarrow -2 \leq 2 \sin(x) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 3 + 2 \sin(x) \leq 5$$

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{1}{3 + 2 \sin(x)} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{3 + 2 \sin(x)} \leq 1$$

بضرب المتراجعتين:

$$\Rightarrow \frac{x-1}{5} \leq \frac{x + \cos(x)}{3 + 2 \sin(x)} \leq x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{5} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\textcircled{3} |2f(x) - 3| \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \quad a = +\infty$$

$$g(x) = x \cdot \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - 1 = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2} \quad \text{حسب مبرهنة الإحاطة}$$

مثال: ليكن f معرف على $R \setminus \{1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ واستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

(2) عن قيمة A التي تحقق عندما $x > A$ يكون:

$$f(x) \in]1.95, 2.05[$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{1} = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = 5$$

$$|f(x) - C| < r \quad (2)$$

$$C = \frac{b + a}{2} = \frac{2.05 + 1.95}{2} = 2$$

$$r = \frac{b - a}{2} = \frac{2.05 - 1.95}{2} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x + 1}{x - 1} - 2 \right| < \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2x + 1 - 2x + 2}{x - 1} \right| < \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3}{x - 1} \right| < \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{3}{x - 1} < \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 60 < x - 1 \Rightarrow 61 < x$$

$$\Rightarrow A = 61$$

المقاربات:

1 إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ فإن:

$y = a$ مقارب أفقي في جوار $\pm\infty$

2 إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ فإن:

$x = a$ مقارب شاقولي نحو oy^\pm

3 إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ فإن:

النقطة (a, b) نقطة مقاربة.

4 إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ فإنه:

نتوقع وجود مقارب مائل.

المقارب المائل: معادلته: $y = ax + b$

② استنتاج مستقيم $\Delta: y = ax + b$
مقارب مائل:

① إثبات أن $\Delta: y = ax + b$ مقارب
مائل للخط البياني C للتابع f

إذا أخذنا:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b))$
وكان الجواب 0

③ إيجاد معادلة المقارب المائل:

نستنتج أن:
 $\Delta: y = ax + b$
مقارب مائل للخط C في جوار ∞

(3) توجد:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - y_{\Delta})$$

ويجب أن يكون الجواب 0

(1) توجد $f(x) - y_{\Delta}$

(2) نسبة الشكل

تعيين الثوابت a و b

عندما نحصل على نهاية لـ f
من الشكل:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

نتوقع وجود مقارب مائل:

$$\Delta: y = ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

لحساب a :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

لحساب b :

لا تحتاج إلى إثبات

تابع كسري ودرجة البسط أعلى من
درجة المقام بدرجة واحدة:

نجري قسمة إقليدية ونتذكر أن:

$$\frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}} = \frac{\text{الناتج}}{\text{المقسوم عليه}}$$

فيكون الناتج $\Delta: y = ax + b$ هو
المقارب المائل وثبت ذلك.

كثير جود من
درجة الثانية

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + \beta x + \gamma}$$

نكتب ما تحت الجذر بالصيغة
القانونية فيصبح التابع:

$$f(x) = \sqrt{(ax + b)^2 + \text{عدد}}$$

نستنتج أن المقارب المائل وثبت ذلك:

$$\Delta: y = -ax - b$$

$$\Delta: y = ax + b$$

عند $+\infty$

مثال ②: ليكن C الخط البياني للتابع f المعروف على R وفق:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 8x + 10}$$

(1) اكتب $4x^2 - 8x + 10$ بالصيغة القانونية.

(2) استنتج Δ المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$.

(3) استنتج وضع C مع Δ

الحل:

$$4x^2 - 8x + 10 = 4(x^2 - 2x) + 10 \quad (1)$$

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 10 = 4((x - 1)^2 - 1) + 10$$

$$4(x - 1)^2 - 4 + 10 = 4(x - 1)^2 + 6$$

$$\Rightarrow 4(x - 1)^2 + 6 = (2x - 2)^2 + 6$$

$$f(x) = \sqrt{(2x - 2)^2 + 6} \quad (2)$$

نفرض $\Delta: y = 2x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(2x - 2)^2 + 6} - (2x - 2)$$

هناك عدم تعيين $+\infty - \infty$

بعد الضرب بالمرافق والقسمة عليه:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{6}{\sqrt{(2x - 2)^2 + 6} + (2x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

(3) ندرس إشارة:

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(2x - 2)^2 + 6} - (2x - 2)$$

$$\sqrt{(2x - 2)^2 + 6} - (2x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2x - 2)^2 + 6} = (2x - 2)$$

نربع الطرفين بشرط: $2x - 2 \geq 0$ أي: $x \geq 1$

$$(2x - 2)^2 + 6 = (2x - 2)^2 \Rightarrow 6 \neq 0$$

مستحيلة الحل، بتجريب قيمة $x = 1$ بالمقدار $f(x) - y_\Delta$

نلاحظ: $f(x) - y_\Delta > 0$

C فوق Δ

مثال ①: ليكن f تابع معرف على R وفق:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) أثبت وجود عدد حقيقي يحقق: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

وأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b$

(3) استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط C عند $-\infty$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad (1)$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{x} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x}$$

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow |x| = -x$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = a$$

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + x$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x)(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$\Rightarrow f(x) + x = \frac{x^2 + 2x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$\Rightarrow f(x) + x = \frac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$$

$$\Rightarrow f(x) + x = \frac{x \left(2 + \frac{4}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) + x = \frac{2 + \frac{4}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \frac{2}{-2} = -1 = b$$

(3) نستنتج أن المقارب المائل: $\Delta: y = ax + b$

$$\Rightarrow \Delta: y = -x - 1$$

الاستمرار

نقول أن f مستمر عند a إذا تحقق:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

مثال ①: ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 \tan(x)}{2x} - \frac{1}{2} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

أثبت أن f مستمر على R

الحل:

f مستمر على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ حتى يكون f مستمر عند 0 يجب أن يحقق:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

الحل:

(1)

$$f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{\sin(x)}{x \cdot \cos(x)} - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

f مستمر عند 0 فهو مستمر على R

مثال ②: f معرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R ؟

الحل:

بما أن f مستمراً على R نجد أن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\cos(x) - 1)(\cos(x) + 1)}{x^2(\cos(x) + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2(\cos(x) + 1)} = \frac{-\sin^2(x)}{x^2(\cos(x) + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{-1}{(\cos(x) + 1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \times 1 \times \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

مثال ③: ليكن f معرف على $[0, 2]$ وفق:

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

(1) اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (أي لا تحوي $E(x)$)

(2) أثبت أن f مستمر على $[0, 2]$

$$E(x) = 0 \quad E(x) = 1 \quad E(x) = 2$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 + (x - 0)^2 & ; x \in [0, 1[\\ 1 + (x - 1)^2 & ; x \in [1, 2[\\ 2 + (2 - 2)^2 = 2 & ; x = 2 \end{cases}$$

(2) ندرس استمرار f عند $x = 1$

$$f(1) = 1 + (1 - 1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 + (1 - 0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

فالتابع f مستمر عند $x = 1$

ندرس استمرار f عند $x = 2$

$$f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 + (2 - 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

فالتابع مستمر عند $x = 2$

إذا: التابع مستمر على $[0, 2]$

جد نهاية التابع f عند a الموافقة:

① $|2f(x) + 3| \leq \frac{3x - E(x)}{x^2 + 1}$ $a = +\infty$

② $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 7} - 3}{x^3 - 1}$ $a = 1$

③ $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ $a = -\infty$

④ $f(x) = \frac{|\sin(x)| - 3}{x}$ $a = +\infty$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \frac{1}{3 + \cos(x)}$$

(1) أثبت أن f محدود.

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3 + \cos(x)}$

السؤال الثالث:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = x + \sqrt{|9x^2 - 1|}$$

(1) أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أثبت أن $y = 4x$ Δ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ (3) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع:

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(2) عيّن قيمة α التي تحقق:

$$f(x) > 10^6 \text{ عندما } x \in]1 - \alpha, 1 + \alpha[$$

السؤال الخامس:

ليكن التابع f المعرفة على $R \setminus \{3\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

(2) عيّن مجالاً I مركزه 5 ويحقق الشرط:

$$f(x) \in]3.95, 4.05[\text{ فإن } x \in I$$

حل ورقة العمل اليدوية لبحث النهايات

السؤال الأول:

③ $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x \quad a = -\infty$

حالة عدم تعيين $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 - x} + x)(\sqrt{x^2 - x} - x)}{(\sqrt{x^2 - x} - x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} - x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} - x}$$

حالة عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{-x}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x}$$

عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{-x}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x} = \frac{-x}{-x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

④ $f(x) = \frac{|\sin(x)| - 3}{x} \quad a = +\infty$

$$0 \leq |\sin(x)| \leq 1$$

$$-3 \leq |\sin(x)| - 3 \leq -2$$

$$-\frac{3}{x} \leq \frac{|\sin(x)| - 3}{x} \leq -\frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{حسب مبرهنة الإحاطة:}$$

السؤال الثاني:

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad (1)$$

$$2 \leq 3 + \cos(x) \leq 4$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3 + \cos(x)} \geq \frac{1}{4}$$

f محدود من الأدنى بالعدد $\frac{1}{4}$ ومحدود من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$

① $|2f(x) + 3| \leq \frac{3x - E(x)}{x^2 + 1} \quad a = +\infty$

$$g(x) = \frac{3x - E(x)}{x^2 + 1}$$

$$x - 1 < E(x) \leq x$$

$$-x + 1 > -E(x) \geq -x$$

$$2x + 1 > 3x - E(x) \geq 2x$$

$$\frac{2x + 1}{x^2 + 1} > \frac{3x - E(x)}{x^2 + 1} \geq \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{حسب مبرهنة الإحاطة:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{3}{2} \quad \text{حسب مبرهنة الإحاطة:}$$

② $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x + 7} - 3}{x^3 - 1} \quad a = 1$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + x + 7} - 3)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}{(x^3 - 1)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x + 7 - 9}{(x^3 - 1)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x^3 - 1)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x + 2}{(x^2 + x + 1)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x + 2}{(x^2 + x + 1)(\sqrt{x^2 + x + 7} + 3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{3 \times 6} = \frac{1}{6}$$

الحالة الثانية: $|9x^2 - 1| = -9x^2 + 1$

$$\Rightarrow -9x^2 + 1 = 9x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{18}$$

إما: $x = \frac{1}{3\sqrt{2}} > 0$ مقبول

أو: $x = -\frac{1}{3\sqrt{2}} < 0$ مرفوض

x	$-\infty$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x) - y_\Delta$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	Δ فوق C	نقطة تقاطع: $(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}})$	Δ تحت C

السؤال الرابع:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty \quad (1)$$

$$f(x) > 10^6 \quad (2)$$

$$\frac{4}{(x-1)^2} > 10^6 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} < \frac{1}{10^6}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 < \frac{4}{10^6} \Rightarrow |x-1| < \frac{2}{10^3}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{10^3} < x-1 < \frac{2}{10^3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{10^3} < x < 1 + \frac{2}{10^3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{10^3}$$

السؤال الخامس:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{8}{2} = 4 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x+3}{x-3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x-3} \Big| \frac{x+3}{x-3}$$

$$\frac{-x \pm 3}{6}$$

$$f(x) = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$3.95 < f(x) < 4.05$$

$$3.95 < 1 + \frac{6}{x-3} < 4.05$$

$$2.95 < \frac{6}{x-3} < 3.05 \Rightarrow \frac{2.95}{6} < \frac{1}{x-3} < \frac{3.05}{6}$$

$$\frac{6}{2.95} > x-3 > \frac{6}{3.05} \Rightarrow 2.03 > x-3 > 1.97$$

$$5.03 > x > 4.97 \Rightarrow I \in]4.97, 5.03[$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3+\cos(x)} \geq \frac{1}{4} \quad (2)$$

نضرب بـ $x^2 > 0$ حيث

$$\frac{x^2}{2} \geq \frac{x^2}{3+\cos(x)} \geq \frac{x^2}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$$

حسب مبرهنة المقارنة: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3+\cos(x)} = +\infty$

السؤال الثالث:

$$f(x) = x + \sqrt{|9x^2 - 1|} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{|9x^2 - 1|} - 3x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta)$$

حالة عدم تعيين $(+\infty - \infty)$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{(\sqrt{|9x^2 - 1|} - 3x)(\sqrt{|9x^2 - 1|} + 3x)}{\sqrt{|9x^2 - 1|} + 3x}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{|9x^2 - 1| - 9x^2}{\sqrt{|9x^2 - 1|} + 3x}$$

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن: $|9x^2 - 1| = 9x^2 - 1$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{9x^2 - 1 - 9x^2}{\sqrt{|9x^2 - 1|} + 3x} = \frac{-1}{\sqrt{|9x^2 - 1|} + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

إذاً المستقيم $y = 4x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

(3) الوضع النسبي، ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{|9x^2 - 1|} - 3x$$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \sqrt{|9x^2 - 1|} - 3x = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{|9x^2 - 1|} = 3x$$

نربع الطرفين مع ذكر الشرط: $3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$|9x^2 - 1| = 9x^2$$

نميز حالتين:

$$|9x^2 - 1| = 9x^2 - 1 \quad \text{الحالة الأولى:}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 1 = 9x^2 \Rightarrow -1 \neq 0 \text{ مستحيلة}$$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

هل f مستمر عند 0 ؟

السؤال الخامس:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على $]-\infty, 0[$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1 + \cos^2(x)}{x}$$

(1) أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته: $y = 2x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

(2) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

ورقة عمل منزلية في بحق النهايات

السؤال الأول:

جد نهاية التابع f عند a الموافقة:

$$\textcircled{1} f(x) = -3 + \frac{\cos^2(x)}{x-1} \quad a = +\infty$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{3-x} \quad a = 3$$

$$\textcircled{3} f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - x \quad a = +\infty$$

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{\cos(5x) - \cos(x)}{x \cdot \cos(x)} \quad a = 0$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4} - 2} \quad a = 0$$

السؤال الثاني:

ليكن التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

(3) عين قيمة A التي تحقق عندما $x > A$ فإن:

$$f(x) \in]0.9, 1.1[$$

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 - \sin(x)}{x}$$

(1) أثبت أن: $f(x) \geq \frac{x^2-1}{x}$

(2) استنتج نهاية f عند $+\infty$ واحسب نهاية التابع عند 0

$$\textcircled{4} f(x) = \frac{\cos(5x) - \cos(x)}{x \cdot \cos(x)} \quad a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{-2 \sin(3x) \sin(2x)}{x \cdot \cos(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = -2 \times 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 \times 3 \times 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

$$\textcircled{5} f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sqrt{x+4} - 2} \quad a = 0$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{\sin(3x) (\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\sin(3x) (\sqrt{x+4} + 2)}{x + 4 - 4}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} (\sqrt{x+4} + 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \times 1 \times 4 = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

السؤال الثاني:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = 2 \quad (3)$$

$$|f(x) - C| < r$$

$$C = \frac{b+a}{2} = \frac{1.1+0.9}{2} = 1$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{1.1-0.9}{2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} - 1 \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{x} > 10$$

$$\Rightarrow x > 100 \Rightarrow A = 100$$

$$\textcircled{1} f(x) = -3 + \frac{\cos^2(x)}{x-1} \quad a = +\infty$$

$$0 \leq \cos^2(x) \leq 1$$

$$x - 1 > 0$$

عند $+\infty$

$$0 \leq \frac{\cos^2(x)}{x-1} \leq \frac{1}{x-1}$$

$$-3 \leq -3 + \frac{\cos^2(x)}{x-1} \leq -3 + \frac{1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{x-1} \right) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3 \quad \text{حسب مبرهنة الإحاطة:}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 2}{3-x} \quad a = 3$$

حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+1-4}{(3-x)(\sqrt{x+1} + 2)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x-3}{-(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \frac{-1}{\sqrt{x+1} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{-1}{4}$$

$$\textcircled{3} f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - x \quad a = +\infty$$

حالة عدم تعيين $(+\infty - \infty)$

$$f(x) = |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x$$

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $|x| = x$

$$f(x) = x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x = x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(2-1) = +\infty$$

السؤال الثالث:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad (1)$$

$$1 \geq -\sin(x) \geq -1$$

$$x^2 + 1 \geq x^2 - \sin(x) \geq x^2 - 1$$

نقسم على x حيث $x > 0$ عندما $x \in]0, +\infty[$

$$\frac{x^2 + 1}{x} \geq \frac{x^2 - \sin(x)}{x} \geq \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} \right) = +\infty \quad (2)$$

حسب مبرهنة المقارنة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x} - \frac{\sin(x)}{x} = x - \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - 1 = -1$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

السؤال الرابع:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = 0$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$\leftarrow f$ مستمر عند الـ (0)

السؤال الخامس:

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 + 1 + \cos^2(x)}{x} - 2x \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 + 1 + \cos^2(x) - 2x^2}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) - y_\Delta = \frac{1 + \cos^2(x)}{x}$$

$$0 \leq \cos^2(x) \leq 1$$

$$1 \leq 1 + \cos^2(x) \leq 2$$

نقسم على x حيث $x < 0$ في جوار $-\infty$

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1 + \cos^2(x)}{x} \geq \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$$

$\leftarrow \Delta: y = 2x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

(2) لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \frac{1 + \cos^2(x)}{x} \neq 0$$

x	$-\infty$			0
$1 + \cos^2(x)$		+	+	+
x		-	-	0
$f(x) - y_\Delta$		-	-	
الوضع النسبي		Δ تحت C		

الإشتقاق

قابلية الإشتقاق

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \boxed{\text{عدد}}$$

نمیز:

$$\boxed{\infty} = \infty$$

f غير إشتقاقي عند a
 $f'(a) \Leftarrow$ غير معرف
 التاويل الهندسي:
 C يقبل مماساً شاقولياً عند a معادلته:
 $x = a$

$$\boxed{0} = 0$$

f إشتقاقي عند a
 $f'(a) = 0$
 التاويل الهندسي:
 C يقبل مماساً أفقياً عند a معادلته:
 $y = f(a)$

$$\boxed{\text{عدد}} \neq 0$$

f إشتقاقي عند a
 $f'(a) = \boxed{\text{عدد}}$
 التاويل الهندسي:
 C يقبل مماساً مائلاً عند a ميته:
 $m = \boxed{\text{عدد}}$

معادلة المماس

شكلها:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

نحتاج إلى:

① نقطة المماس: $(a, f(a))$ أو (x_0, y_0)

② ميل: $m = f'(a)$

حالات إيجاد نقطة التماس:

② نقطة التقاطع مع محور الترتيب

$$\Rightarrow x = 0$$

هي فاصلة نقطة التماس

① نقطة التقاطع مع محور الفواصل

$$\Rightarrow f(x) = 0$$

نحل المعادلة:
 $x = a$
 تكون a هي فاصلة نقطة التماس

حالات إيجاد الميل:

⑤ مماس مار من نقطتين:

$$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

④ معادلة المماس الذي يعامد المستقيم Δ :

$$\Delta: y = ax + b$$

$$\Rightarrow m_T = -\frac{1}{m_A} = -\frac{1}{a}$$

③ معادلة المماس الموازي لمستقيم Δ :

$$\Delta: y = ax + b$$

$$\Rightarrow m_A = m_T = a$$

② معادلة المماس الأفقي:

$$\Rightarrow m = 0$$

① معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها a

$$\Rightarrow m = f'(a)$$

قواعد الإشتقاق

$f(x)$	$f'(x)$
a	0
ax	a
x^n	nx^{n-1}
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{(h(x))^2}$
$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$
$\sqrt{g(x)}$	$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$e^{g(x)}$	$g'(x)e^{g(x)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(g(x))$	$g'(x) \cdot \cos(g(x))$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cos(g(x))$	$-g'(x) \sin(g(x))$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$a(f(x))^n$	$a \cdot n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$

تنمة مخطط الإشتقاق

التابع الدوري

الشرط الأول: (في حالة الدور هو $a\pi$)
أياً كانت $x \in D_f$: فإن $x + a\pi \in D_f$

الشرط الثاني:
 $f(x + a\pi) = f(x)$

دراسة زوجية أو فردية تابع

الشرط الأول:
أياً كانت $x \in D_f$: فإن $-x \in D_f$

الشرط الثاني:
نأخذ $f(-x)$ ونميز:

$$f(-x) = -f(x)$$

التابع فردي و C_f متناظر بالنسبة للمبدأ

$$f(-x) = f(x)$$

التابع زوجي و C_f متناظر بالنسبة للمحور yy'

التقريب التآلفي المحلي

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$$

لحساب:

$$f(a, b), \quad h = 0, b$$

مشتق تابع مركب

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

نهاية حسب تعريف العدد المشتق

إذا عطانا تابع f وطلب:

$$f'(a), f'(x), f(a)$$

ثم طلب حساب نهاية تكرر أن:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = f'(a)$$

خطوات الرسم:

- 1) ترسم المقاربات
- 2) تعين النقاط المقاربة.
- 3) تعين القيم الحدية.
- 4) توجد نقاط تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل (نحل المعادلة $f(x) = 0$) ومع محور الترتيب $(f(0))$.
- 5) ترسم التابع بالإستفادة من جدول التغيرات.

خطوات دراسة تغيرات تابع f :

- 1) توجد مجموعة تعريف التابع إن لم تكن موجودة في نص السؤال
- 2) توجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريف ونستنتج المقاربات الأفقية والשאوقية.
- 3) نشق التابع.
- 4) ندرس إشارة المشتق.
- 5) نعين القيم الحدية إن وجد.
- 6) ننظم جدولاً بتغيرات التابع.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2 - 10x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g(x) = f(\sin(x)) \quad (2)$$

$$g'(x) = f'(\sin(x)) \cdot (\sin(x))'$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{-3 \sin^2(x) - 10 \sin(x) + 3}{(\sin^2(x) + 1)^2} \cdot \cos(x)$$

$$h(x) = f(\sqrt{x}) \Rightarrow h'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{-3x - 10\sqrt{x} + 3}{(x + 1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{-3x - 10\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{|x|+8}{2x-4} \quad \text{مثال 2: ليكن لدينا التابع:}$$

(1) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين واستنتج معادلة نصف المماس عند الصفر من اليمين.

(2) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار واستنتج معادلة نصف المماس عند الصفر من اليسار.

(3) هل f اشتقاقي عند الصفر؟

الحل:

(1) في حالة $x > 0$ فإن: $|x| = x$

$$f(x) = \frac{x+8}{2x-4}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x+8}{2x-4} + 2}{x} = \frac{x+8+4x-8}{x(2x-4)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{5x}{x(2x-4)} = \frac{5}{2x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{2x-4} = -\frac{5}{4}$$

f قابل للاشتقاق عند الصفر من اليمين ونصف المماس المائل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{5}{4}(x - 0) - 2 \Rightarrow y = -\frac{5}{4}x - 2$$

مثال: (دورة 2023 تمرين ثنائي لطلب الأول)

ليكن التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

أثبت أن $f(x) = \frac{x}{2}(1 + x^4)f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x^4 + 1} - \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}} \cdot x^2}{x^4 + 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x^4 + 1) - 4x^5}{2\sqrt{x^4 + 1}(x^4 + 1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x^5 + 4x - 4x^5}{2\sqrt{x^4 + 1}(x^4 + 1)} = \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}(x^4 + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(1 + x^4)f'(x) = \frac{x}{2}(1 + x^4) \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^4 + 1}(x^4 + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(1 + x^4)f'(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(1 + x^4)f'(x) = f(x)$$

مثال: أوجد مشتق التابع الآتي على R^* :

$$f(x) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

الحل:

$$f'(x) = 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

مشتق تابع مركب:

مثال 1: ليكن f تابع معرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

(1) أوجد $f'(x)$

$$h(x) = \frac{3\sqrt{x}+5}{x+1} \text{ و } g(x) = \frac{3\sin(x)+5}{\sin^2(x)+1} \text{ استنتج مشتق}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+5)}{(x^2+1)^2} \quad (1)$$

مثال ④: ليكن لدينا التابع f المعرف وفق:

$$f(x) = \cos(x)$$

أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$ وأثبت بالترتيب مهما كان

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{أن: } n \geq 1$$

الحل:

$$f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$E(n): f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{نسمي القضية:}$$

$$E(1): f'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{محققة:} \quad \text{نثبت صحة:}$$

$$E(n): \boxed{f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)} \dots * \quad \text{نفرض صحة:}$$

نثبت صحة:

$$E(n+1): f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{نبدأ من:}$$

$$(f^{(n)}(x))' = -\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{نشتق:}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أيًا كانت $n \geq 1$

(2) في حالة $x < 0$ فإن: $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{-x+8}{2x-4}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{-x+8}{2x-4} + 2}{x} = \frac{-x+8+4x-8}{x(2x-4)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3x}{x(2x-4)} = \frac{3}{2x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{2x-4} = -\frac{3}{4}$$

f قابل للإشتقاق عند الصفر من اليسار ونصف المماس المائل:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}(x - 0) - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Rightarrow -\frac{5}{4} \neq -\frac{3}{4} \quad (3)$$

فالتابع f غير قابل للإشتقاق عند الصفر.

مثال ③: f معرف على $]-\frac{5}{2}, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \sqrt{2x+5}$$

(1) احسب $f(2)$ و $f'(2)$

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$

(3) احسب القيمة التقريبية لـ $f(2,1)$

الحل:

$$f(2) = \sqrt{4+5} = 3 \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$f'(2) = \frac{1}{\sqrt{4+5}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$f(a+h) \simeq f(a) + h \cdot f'(a) \quad (3)$$

$$a = 2, \quad h = 0,1 = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow f(2,1) \simeq 3 + \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} \simeq 3 + \frac{1}{30} \simeq \frac{91}{30}$$

مثال ⑤: ليكن لدينا التابع f المعروف وفق:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + 1}$$

عين a و b علماً ان التابع f يقبل قيمة حدية عند (-2) قيمتها (-1)

الحل:

$$f(-2) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{4a - 2b + 3}{-1} = -4a + 2b - 3$$

$$\Rightarrow -4a + 2b - 3 = -1 \Rightarrow -4a + 2b = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{b - 2a = 1} \dots *$$

قيمة حدية $\Leftrightarrow f'(-2) = 0$

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x + 1) - (ax^2 + bx + 3)}{(x + 1)^2}$$

$$f'(-2) = \frac{(-4a + b)(-1) - (4a - 2b + 3)}{(-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{4a - b - 4a + 2b - 3}{1}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$$

نعوض في (*): $3 - 2a = 1 \Rightarrow a = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

مثال ⑥: اكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع

$f(x) = \sqrt{2x + 3}$ في نقطة ميل المماس عندها (1)

الحل:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2x + 3}} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x + 3}} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x + 3} = 1 \Rightarrow 2x + 3 = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = 1$$

$$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$$

$$\Rightarrow y = 1(x + 1) + 1 \Rightarrow y = x + 2$$

مثال ⑦: ليكن لدينا التابع f المعروف على R وفق:

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

(1) أوجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1))$ ثم استنتج وجود مقارب مائل في جوار $+\infty$

(2) أثبت أن $y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

(3) ادرس تغيرات f وأثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α وتحقق أن $\alpha = 0$

(4) ارسم كلاً من Δ_1 و Δ_2 ثم ارسم C_f

الحل:

$$f(x) - (x + 1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} - 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} - 1$$

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $|x| = x$

$$\Rightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + 1)) = 1 - 1 = 0$$

نستنتج أن $y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$f(x) - (x - 1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} + 1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow f(x) - (x - 1) = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} + 1$$

$$\Rightarrow f(x) - (x - 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} + 1$$

عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$\Rightarrow f(x) - (x - 1) = \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} + 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 1)) = -1 + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow y = x - 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

(3) f معرف ومستمر واشتقاقى على $]-\infty, +\infty[$

حالة عدم تعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن $|x| = x$

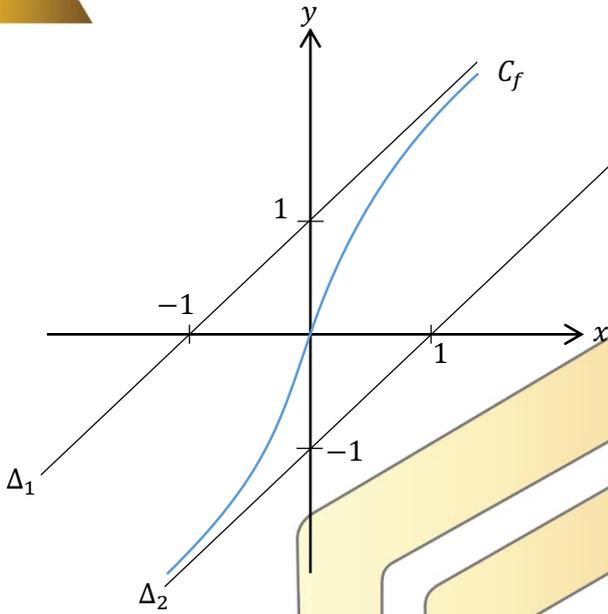
x	-1	0
y	0	1
x	1	0
y	0	-1

(4) لرسم $\Delta_1: y = x + 1$

لرسم $\Delta_2: y = x - 1$

نقطة تقاطع التابع مع محور الترتيب نحسب $f(0)$

$$f(0) = 0 + \frac{0}{\sqrt{0+9}} = 0$$



$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = x + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

حالة عدم تعيين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x): \frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = x + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$$

عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $|x| = -x$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}} = x + \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{9}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2 + 9} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \cdot x}{(\sqrt{x^2 + 9})^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{x^2 + 9 - x^2}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{9}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}} > 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	+++	++++	+++
$f(x)$		↗	$+\infty$

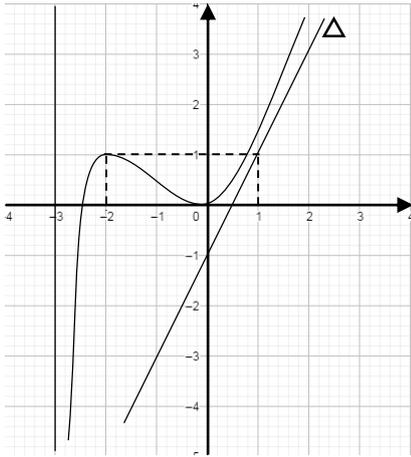
f معرف و متزايد تماماً على $]-\infty, +\infty[$

$$0 \in f(]-\infty, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]-\infty, +\infty[$

$$f(0) = 0 + 0 = 0$$

مثال 9: فيما يأتي C هو الخط البياني للتابع f المعروف على $]-3, +\infty[$



المطلوب:

1) احسب $f(-2)$ و $f(0)$ و $f'(-2)$

2) احسب $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ وما التأويل الهندسي للنتيجة

3) أوجد ميل Δ

4) ما حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$

5) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$

6) أوجد $f([-2, 0])$

7) دل على القيم الحدية وبيّن نوعها.

الحل:

$$f(-2) = 1, \quad f(0) = 0 \quad (1)$$

$$f'(-2) = 0 \quad (\text{قيمة حدية})$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \quad (2)$$

$x = -3$ مقارب شاقولي في جوار $-\infty$

3) نختار نقطتين من Δ $A(0, -1)$, $B(1, 1)$

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - (-1)}{0 - 1} = \frac{1 + 1}{1 - 0}$$

$$\Rightarrow m = 2$$

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-2, 0] \quad (4)$$

$$f(x) = 1 \quad \text{حلان.} \quad (5)$$

$$f([-2, 0]) = [0, 1] \quad (6)$$

$$f(0) = 0 \quad \text{قيمة حدية صغرى} \quad (7)$$

$$f(-2) = 1 \quad \text{قيمة حدية كبرى}$$

مثال 6: ليكن لدينا الجدول الآتي للتابع f :

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	3	\searrow	2	\searrow
		-1		$-\infty$

1) أوجد D_f و $f(D_f)$ (المستقر الفعلي)

2) أوجد معادلة المقارب الأفقي للخط C

3) اكتب معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 3

4) أوجد مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

5) ما عدد حلول المعادلة $f(x) - 1 = 0$

6) أوجد $f(]-\infty, 3])$

الحل:

$$D_f =]-\infty, +\infty[\quad (1)$$

$$f(D_f) =]-\infty, 3[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \quad (2)$$

$y = 3$ مقارب أفقي لـ C

3) $x = 3$ مماس شاقولي

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 3[\quad (4)$$

5) $f(x) = 1$ لها ثلاثة حلول

$$f(]-\infty, 3]) = [-1, 3[\quad (6)$$

السؤال السادس:

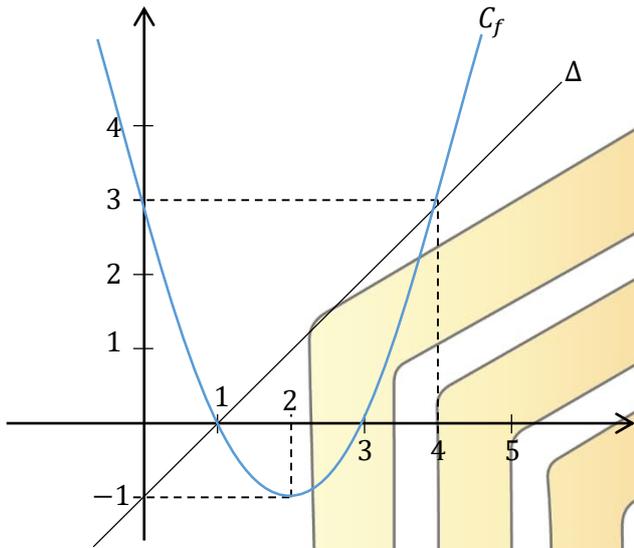
ليكن التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

- (1) أثبت أن f تابع زوجي وبيّن الصفة التناظرية.
- (2) أثبت أن f تابع دوري وبقبل 2π دوراً له.
- (3) ادرس تغيرات f على المجال $[0, \pi]$

السؤال السابع:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R :



- (1) دل على القيمة الحدية الصغرى للتابع f
- (2) جد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- (3) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = y_{\Delta}$
- (4) اكتب معادلة المستقيم Δ .
- (5) أوجد $f([1,3])$
- (6) ما هي حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$

السؤال الثامن:

في الجدول الذي يمثل تغيرات f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		\nearrow	1
	$-\infty$		0

- (1) ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$
- (2) ما عدد القيم الحدية للتابع f
- (3) اكتب معادلة المماس للتابع عند نقطة فاصلتها $x = 1$
- (4) أوجد $f([0,1])$
- (5) ما هي حلول المتراجحة $f'(x) < 0$
- (6) أوجد المستقر الفعلي.

ورقة عمل يدوية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعرفة وفق:

$$f(x) = x\sqrt{x(2-x)}$$

هل f اشتقاقي عند 2؟

السؤال الثاني:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = e^{2x}$$

أوجد $f'(x)$ و $f''(x)$ ثم أثبت بالتدريج $f^n(x) = 2^n e^{2x}$ حيث $n \geq 1$

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- (1) أثبت أن f اشتقاقي عند $x = 0$
- (2) احسب $f'(x)$
- (3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 5}$$

- (1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.
- (2) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً يقع في المجال $]1,2[$
- (3) استنتج مشتق التابع g المعرفة وفق:

$$g(x) = 2 \sin(x) - \sqrt{\sin^2(x) + 5}$$

السؤال الخامس:

ليكن التابع f المعرفة وفق:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4} - 2}{x}$$

- (1) نفرض $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ أوجد $g(0)$ و $g'(0)$ ثم استنتج نهاية $f(x)$ عند 0
- (2) اكتب معادلة المماس عند $x = 0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

في حالة $x > 0$

$$-x \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

في حالة $x < 0$

$$-x \geq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) = 0$$

حسب مبرهنة الإحاطة:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

f اشتقافي عند الصفر

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) x^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

(3) هناك عدم تعيين $(\infty \times 0)$

$$f(x) = x \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

$$f(2) = 2\sqrt{2(2-2)} = 0$$

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)} - 0}{x - 2} = \frac{x\sqrt{x(2-x)}}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{x\sqrt{x}\sqrt{2-x}}{-(2-x)} = \frac{x\sqrt{x}}{-\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2\sqrt{2}}{-0} = -\infty$$

f غير اشتقافي عند $x = 2$

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x}$$

$$E(n): f^n(x) = 2^n e^{2x} \quad \text{نسمي القضية:}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$E(1): f'(x) = 2e^{2x}$$

محقة

نفرض صحة $E(n)$

$$E(n): f^n(x) = 2^n e^{2x} \dots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$E(n+1): f^{n+1}(x) = 2^{n+1} e^{2x}$$

$$f^{n+1}(x) = (f^n(x))' = 2^n \times 2e^{2x} = 2^{n+1} e^{2x}$$

محقة من أجل $n+1$ فهي محقة من أجل أي كانت $n \geq 1$

السؤال الرابع:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $+\infty - \infty$

$$f(x) = \left(2x - |x| \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \right)$$

عندما $x \rightarrow +\infty$ فإن: $|x| = x$

$$f(x) = \left(2x - x \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \right) = x \left(2 - \sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(2 - 1) = +\infty$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} = 2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 5} - x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 5} - x = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 5} = x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 5} = \frac{x}{2}$$

نربع الطرفين، بشرط: $\frac{x}{2} > 0 \Rightarrow x > 0$

$$x^2 + 5 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow 4x^2 + 20 = x^2 \Rightarrow 3x^2 + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = -\frac{20}{3} \text{ مستحيلة}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		\nearrow

(2) f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]-\infty, +\infty[$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد

$$f(1) = 2 - \sqrt{6} < 0$$

$$f(2) = 1 > 0$$

$$f(1) \times f(2) < 0$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد ضمن المجال $]1, 2[$

(3) g اشتقاقي على R

$$g(x) = f(\sin(x))$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(\sin(x)) \cdot (\sin(x))'$$

$$g'(x) = \frac{(2\sqrt{\sin^2(x) + 5} - \sin(x))}{\sqrt{\sin^2(x) + 5}} \cdot \cos(x)$$

السؤال الخامس:

$$g(0) = 2 \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 4}}$$

$$g'(0) = -\frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = -\frac{3}{4}$$

(2) C يقبل مماساً مائلاً عند $x = 0$ ميله $m = -\frac{3}{4}$

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 2$$

السؤال السادس:

(1) أيأ كانت $x \in]-\infty, +\infty[$ كان: $-x \in]-\infty, +\infty[$

$$f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

f زوجي ومتناظر لمحور yy'

(2) أيأ كانت $x \in]-\infty, +\infty[$ كان: $x + 2\pi \in]-\infty, +\infty[$

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \sin^2(x + 2\pi)$$

$$\Rightarrow f(x + 2\pi) = \cos(x) + \sin^2(x)$$

$$\Rightarrow f(x + 2\pi) = f(x)$$

f دوري

السؤال الثامن:

(1) حل وحيد

(2) قيمة حدية واحدة: $f(1) = 1$

(3) $x = 1$

(مماس أفقي) $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$

معادلته: $y = y_0 \Rightarrow y = 1$

(4) $f(]0,1]) =]-\infty, 1]$

(5) $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in]1, +\infty[$

(6) $f(]0, +\infty[) =]-\infty, 1]$

(3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0, \pi]$

$f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$

$f'(x) = -\sin(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$

$f'(x) = \sin(x) (-1 + 2 \cos(x))$

$f'(x) = 0$

إما: $\sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k$

عند $k = 0$ يكون $x = \pi(0) \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 1$

عند $k = 1$ يكون $x = \pi(1) \Rightarrow x = \pi$

$f(\pi) = -1$

أو: $2 \cos(x) = 1 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$

عند $k = 0$ يكون $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi(0) = \frac{\pi}{3}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

عند $k = 1$ يكون $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \notin D_f$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	1	$\frac{5}{4}$	-1

السؤال السابع:

(1) $f(2) = -1$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(3) عدد الحلول هو عدد مرّات التقاطع بين C_f و y_Δ أي: حلين.

(4) $A(1,0)$, $B(4,3)$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{4 - 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow \Delta: y = x - 1$$

(5) $f(]1,3]) = [-1,0]$

(6) $f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$

السؤال الرابع:

اكتب معادلة المماس عند α في كل من الحالات الآتية:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

α فاصلة نقطة تقاطع f مع محور الفواصل.

$$\textcircled{2} g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

α فاصلة نقطة تقاطع f مع محور الترتيب.

السؤال الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على $R \setminus \{2\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$$

(1) أوجد مشتق التابع f

(2) استنتج مشتق التوابع الآتية:

$$g(x) = \frac{x + 3\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$h(x) = \frac{\cos^2(x) + 3 \cos(x) + 1}{\cos(x) - 2}$$

ورقة عمل منزلية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

اشتق كلاً من التوابع الآتية:

$$\textcircled{1} f(x) = (3x^2 + 2x + 7)^4$$

$$\textcircled{2} f(x) = \sin\left(\frac{3x+1}{x+5}\right)$$

$$\textcircled{3} f(x) = x \cdot \cos(\sqrt{x})$$

السؤال الثاني:

ليكن f التابع المعرفة وفق:

$$f(x) = \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

(1) بفرض $g(x) = \tan(x)$ ، أوجد $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(2) استنتج نهاية f عند $\frac{\pi}{4}$

ليكن f التابع المعرفة وفق:

$$f(x) = \frac{\cos(x) + 1}{x - \pi}$$

(1) بفرض $g(x) = \cos(x)$ ، أوجد $g(\pi)$ و $g'(\pi)$

(2) استنتج نهاية f عند π

السؤال الثالث:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x + 1}$$

(1) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليمين واطرح التاويل الهندسي.

(2) ادرس قابلية الاشتقاق عند الصفر من اليسار واطرح التاويل الهندسي.

(3) هل f قابل للاشتقاق عند الصفر؟

السؤال الثالث:

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x + 1}$$

(1) عندما $x > 0$ فإن: $|x| = x$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 + x}{x + 1} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 + x}{x(x + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(x + 1)}{x(x + 1)} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليمين ويقبل نصف مماس مائل عند الصفر من اليمين ميله $m = 1$

(2) عندما $x < 0$ فإن: $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x^2 - x}{x + 1} - 0}{x - 0} = \frac{x^2 - x}{x(x + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(x - 1)}{x(x + 1)} = \frac{x - 1}{x + 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

التابع اشتقاقي عند الصفر من اليسار ويقبل نصف مماس مائل عند الصفر من اليسار ميله $m = -1$

(3) التابع غير اشتقاقي عند الصفر لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث الإشتقاق

السؤال الأول:

$$\textcircled{1} f(x) = (3x^2 + 2x + 7)^4$$

$$f'(x) = 4(3x^2 + 2x + 7)^3(6x + 2)$$

$$\textcircled{2} f(x) = \sin\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

$$f'(x) = \frac{3(x + 5) - 1(3x + 1)}{(x + 5)^2} \cdot \cos\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3x + 15 - 3x - 1}{(x + 5)^2} \cdot \cos\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{14}{(x + 5)^2} \cdot \cos\left(\frac{3x + 1}{x + 5}\right)$$

$$\textcircled{3} f(x) = x \cdot \cos(\sqrt{x})$$

$$f'(x) = 1 \cdot \cos(\sqrt{x}) + \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(\sqrt{x})\right) \cdot x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos(\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2} \cdot \sin(\sqrt{x})$$

السؤال الثاني:

$$g(x) = \tan(x) \quad (1) \textcircled{1}$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$g'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{g(x) - g\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \quad (2)$$

$$g(x) = \cos(x) \quad (1) \textcircled{2}$$

$$g(\pi) = -1$$

$$g'(x) = -\sin(x) \Rightarrow g'(\pi) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} = g'(\pi) = 0 \quad (2)$$

السؤال الخامس:

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(x-2) - 1(x^2+3x+1)}{(x-2)^2} \quad (1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3x - 6 - x^2 - 3x - 1}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x-2)^2}$$

$$g(x) = f(\sqrt{x}) \quad (2)$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})'$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{x - 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 2)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x - 4\sqrt{x} - 7}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)^2}$$

$$h(x) = f(\cos(x))$$

$$\Rightarrow h'(x) = f'(\cos(x)) \cdot (\cos(x))'$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{\cos^2(x) - 4\cos(x) - 7}{(\cos(x) - 2)^2} \cdot (-\sin(x))$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{-\sin(x) (\cos^2(x) - 4\cos(x) - 7)}{(\cos(x) - 2)^2}$$

السؤال الرابع:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

نقطة التقاطع مع محور فواصل: $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x+1} = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1(x+1) - 1(x+3)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x-3}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$$

$$f'(-3) = -\frac{1}{2}$$

$$y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x+3) + 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{2} g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

نقطة التقاطع مع محور الترتيب: $x = 0$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$f'(0) = 0$$

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\Rightarrow y = 1$$

مخطط المتتاليات

مجموع

هندسية

حسابية

لمعرفة حد قاصر

لمعرفة حد راجح

لحساب النهاية

هندسية

حسابية

تغير شكلها فتحصل على:

$u_n = \text{عدد} + \text{عدد}$
عندها (عدد) هو العنصر القاصر لأن:

$$u_n - \text{عدد} = 0 \Rightarrow u_n \geq \text{عدد}$$

تغير شكلها فتحصل على:

$u_n = \text{عدد} - \text{عدد}$
عندها (عدد) هو العنصر الراجح لأن:

$$u_n - \text{عدد} = 0 \Rightarrow u_n \leq \text{عدد}$$

لنحصرها:

عدد الحدود $\geq u_n \geq$ عدد الحدود
 \times اصغر حد \times اكبر حد

تغير شكلها

فكرة: يتم دراسة التقارب في المتتاليات المسابقة عن طريق النهاية:

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ فالمتتالية مقاربة من a

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ فالمتتالية متباعدة

عند حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$

$q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, $q = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

ليس لها نهاية $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, $q \leq -1$ ليس لها نهاية $q = -1$

مخطط المتتاليات

مجموع

هندسية

حسابية

لمعرفة حد قاصر

لمعرفة حد راجح

لحساب النهاية

هندسية

حسابية

تغير شكلها فتحصل على:

$u_n = \text{عدد} + \text{عدد}$
عندها (عدد) هو العنصر القاصر لأن:

$$u_n - \text{عدد} = 0 \Rightarrow u_n \geq \text{عدد}$$

تغير شكلها فتحصل على:

$u_n = \text{عدد} - \text{عدد}$
عندها (عدد) هو العنصر الراجح لأن:

$$u_n - \text{عدد} = 0 \Rightarrow u_n \leq \text{عدد}$$

لنحصرها:

عدد الحدود $\geq u_n \geq$ عدد الحدود
 \times اصغر حد \times اكبر حد

تغير شكلها

فكرة: يتم دراسة التقارب في المتتاليات المسابقة عن طريق النهاية:

① $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ فالمتتالية مقاربة من a

② $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \infty$ فالمتتالية متباعدة

عند حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$

$q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, $q = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

ليس لها نهاية $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, $q \leq -1$ ليس لها نهاية $q = -1$

هي المتتالية التي ينتج كل حد من حدودها عن الحد الذي يسبقه بضربه بعدد حقيقي (أساس)

$$u_{n+1} = q u_n$$

لاختبار أن متتالية حسابية:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

نستط.

- لازم ينتج عن العملية السابقة عدد حقيقي

ولكن q .

لايجاد u_n بدلالة n أو لإيجاد حد معين:

$$u_n = u_0 q^{n-p}$$

وإذا كان u_0 موجود:

$$u_n = u_0 q^n$$

لحساب مجموع حدود متتالية هندسية:

$$S = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

حيث: n هي عدد الحدود و q هو الأساس

و a هو الحد الأول.

إذا كان a و b و c ثلاث حدود متتالية هندسية:

$$b^2 = a \cdot c$$

لاختبار أن متتالية هندسية:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \in \mathbb{R}$$

هي المتتالية التي ينتج كل حد من حدودها عن الحد الذي يسبقه بإضافة عدد حقيقي (أساس)

$$u_{n+1} = u_n + r$$

لاختبار أن متتالية حسابية:

$$u_{n+1} - u_n = r$$

نستط.

- لازم ينتج عن العملية السابقة عدد حقيقي

ولكن r .

لايجاد u_n بدلالة n أو لإيجاد حد معين:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

وإذا كان u_0 موجود:

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

لحساب مجموع حدود متتالية حسابية:

$$S = \frac{n(a + l)}{2}$$

حيث: n هي عدد الحدود و a و l هو الحد الأول

و l هي الحد الأخير.

إذا كان a و b و c ثلاث حدود متتالية حسابية:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

لاختبار أن متتالية حسابية:

تنهة المخطط

متتالية شبيهة بتابع:

لإثبات أن a راجح

نشكل الفرق $u_n - a$ وندرس إشارته فنجد أن:

$$u_n - a \leq 0$$

أي: $u_n \leq a$

لإثبات أن b قاصر:

نشكل الفرق $u_n - b$ وندرس إشارته فنجد أن:

$$u_n - b \geq 0$$

أي: $u_n \geq b$

لمعرفة حدود المتتالية نحولها إلى تابع وندرس

تغيراته على مجال u_n ومن جدول التغيرات في

خانة $f(x)$ نجد حدود u_n

لإثبات أن متناهيين متجاورتين:

يجب أن يتحقق:

① إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.

② نهاية فرقهما معدومة.

متتالية تدريجية:

① لإثبات أن $a \leq u_n \leq b$ نستخدم الإثبات بالتدرج

② لإثبات أن u_n متزايدة:

نثبت $u_{n+1} \geq u_n$ بالتدرج

③ لإثبات أن u_n متناقصة:

نثبت $u_{n+1} \leq u_n$ بالتدرج

④ لإثبات أن u_n ثابتة:

نثبت $u_{n+1} = u_n$ بالتدرج

لمعرفة التقارب:

يجب تحقق أحد الشرطين:

① u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى.

② u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى.

لحساب النهاية:

بعد دراسة التقارب، نحل المعادلة:

$$f(x) = x$$

والحل المقبول هو النهاية.

حالات خاصة:

إذا طلب إثبات أن:

$$a \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نستفيد منها أن u_n متناقصة ومحدودة

من الأعلى.

إذا طلب إثبات أن:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq b$$

نستفيد منها أن u_n متزايدة ومحدودة

من الأعلى.

إطراد المتتالية

مجاميع

نوجد $u_{n+1} - u_n$ ونميز:

① $u_{n+1} - u_n \geq 0$ متزايدة

② $u_{n+1} - u_n \leq 0$ متناقصة

③ $u_{n+1} - u_n = 0$ ثابتة

إذا كانت جميع الحدود موجبة

نوجد $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ونميز:

① $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ متزايدة

② $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ متناقصة

③ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ ثابتة

صریحة

تشبه تابع:

$$u_n = f(n)$$

ندرس إطراد التابع فيكون إطراد

المتتالية نفس إطراد التابع.

مثال ①: متتالية حسابية أساسها (3) وفيها $-2 = u_1$ مثال ③: متتالية هندسية أساسها (3) وفيها $-2 = u_1$

(1) احسب u_n بدلالة n .

(2) استنتج المجموع: $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{20}$

الحل:

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad -1$$

$$u_n = u_1 + (n - 1).3 \Rightarrow u_n = -2 + 3n - 3$$

$$u_n = 3n - 5$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} \quad -2$$

$$S = n \cdot \frac{(a + l)}{2}$$

$$n = 20 - 1 + 1 = 20 \text{ عدد الحدود}$$

$$a = u_1 = -2$$

$$l = u_{20} = 3(20) - 5 = 55$$

$$S = \frac{20(-2 + 55)}{2} = 530$$

مثال ②: احسب المجموع:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + 3 + \dots + 10$$

الحل:

نضرب بـ (2) للتخلص من المقام:

$$2S = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2(1) + 2\left(\frac{3}{2}\right) + 2(2) + \dots + 2(10)$$

$$2S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية أساسها $r = 1$

حدها أول: $a = (1)$ حدها الأخير: $l = (20)$

$$n = 20 - 1 + 1 = 20 \text{ عددها}$$

$$2S = n \left(\frac{a + l}{2} \right) = 20 \left(\frac{1 + 20}{2} \right)$$

$$2S = 10(21) = 210 \Rightarrow S = \frac{210}{2} = 105$$

(1) احسب u_n بدلالة n .

(2) احسب بدلالة n : $S_n = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n}$

(3) احسب نهاية S_n .

الحل:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad (1)$$

$$u_n = -2 \cdot 3^{n-1}$$

$$S_n = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{2n} \quad (2)$$

مجموعة حدود غير متعاقبة المتتالية هندسية. (القفزة (2))
نطبق نفس القانون مع اختلاف:

$$n = \frac{\text{أول-أخير}}{\text{قفزة}} + 1 \quad \text{و} \quad q' = q^{\text{قفزة}}$$

$$S = a \cdot \frac{1 - q'^n}{1 - q'}$$

$$a = u_2 = -2 \cdot 3^{2-1} = -6$$

$$n = \frac{2n - 2}{2} + 1 = n - 1 + 1 = n$$

$$q' = q^2 = (3)^2 = 9$$

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q'^n}{1 - q'}$$

$$S_n = -6 \cdot \frac{1 - 9^n}{1 - 9} \Rightarrow S_n = \frac{3}{4}(1 - 9^n)$$

$$9 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}(1 - \infty) = -\infty \quad (3)$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{3} \in R$$

إذن المتتالية y_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$y_0 = x_0 + 3 = 3 + 3 = 6 \quad (b)$$

$$y_n = y_0 \cdot q^n = y_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$y_n = x_n + 3 \Rightarrow x_n = y_n - 3 \quad \text{لدينا:}$$

$$x_n = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n \quad (a \ 2)$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها: $q = \frac{1}{3}$

$$n = n - 0 + 1 = n + 1 \quad \text{عددها:}$$

$$y_0 = 6 \quad \text{حدها الأول:}$$

$$S_n = a \cdot \frac{(1 - q^n)}{1 - q} = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = 6 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot 6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

مجموع حدود متعاقبة ما يعرف نوعها بس بعرف نوع رفيقتها.

$$x_n = y_n - 3 \quad \text{لدينا:}$$

$$x_0 = y_0 - 3$$

$$x_1 = y_1 - 3$$

$$x_2 = y_2 - 3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_n = y_n - 3$$

$$S'_n = S_n - 3(n + 1)$$

$$S'_n = 9 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - 3(n + 1)$$

ملاحظة:

وجود (-3) مع كل حد فإن جمعهم هو (-3) ضرب عدد الحدود.

$$-1 < \frac{1}{3} < +1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n = 9(1 - 0) = 9$$

مثال ④: مجاميع مع عقدية.

$$S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^6 \quad \text{لدينا:}$$

1- احسب المجموع بدلالة α .

2- إذا كان $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ أثبت أن:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^6 = 0$$

الحل:

$$S = \alpha^0 + \alpha^1 + \dots + \alpha^6$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \alpha$

$$a = \alpha^0 = 1 \quad \text{حدها الأول:}$$

$$n = 6 - 0 + 1 = 7 \quad \text{عدد حدودها:}$$

$$S = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

2- عندما: $\alpha = e^{\frac{2\pi}{7}i}$ لازم يطلع $S = 0$.

$$S = \frac{1 - \left(e^{\frac{2\pi}{7}i}\right)^7}{1 - e^{\frac{2\pi}{7}i}} \quad \text{نحسب:}$$

$$S = \frac{1 - e^{\frac{7 \cdot 2\pi}{7}i}}{1 - e^{\frac{2\pi}{7}i}} \Rightarrow S = \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{\frac{2\pi}{7}i}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1 - e^{0i}}{1 - e^{\frac{2\pi}{7}i}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{\frac{2\pi}{7}i}} = 0 \quad \text{محقة}$$

مثال ⑤: نتأمل المتتاليتين $(x_n)_{n \geq 0}$ و $(y_n)_{n \geq 0}$

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2, \quad y_n = x_n + 3 \end{cases}$$

(a) أثبت أن المتتالية $(y_n)_{n \geq 0}$ هندسية.

(b) احسب y_n ثم احسب x_n بدلالة n .

$$S_n = y_0 + y_1 + \dots + y_n \quad \text{نضع:}$$

$$S'_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

a- احسب S_n و S'_n بدلالة n .

b- استنتج نهاية $(S_n)_{n \geq 0}$

الحل:

(a) 1) نوجد:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1} + 3}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}x_n - 2 + 3}{x_n + 3}$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\frac{1}{3}x_n + 1}{x_n + 3} = \frac{\frac{1}{3}(x_n + 3)}{x_n + 3}$$

مثال 7: لتكن المتتالية: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

1- احسب نهاية u_n .

2- نضع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

اكتب S_n بدلالة n .

3- ادرس نهاية S_n .

الحل:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln(1) = 0 \quad -1$$

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n) \quad -2$$

$$u_1 = \ln(2) - \ln(1)$$

$$u_2 = \ln(3) - \ln(2)$$

$$u_3 = \ln(4) - \ln(3)$$

$$u_4 = \ln(5) - \ln(4)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$S_n = -\ln(1) + \ln(n+1)$$

$$S_n = \ln(n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \quad -3$$

مثال 8: احسب نهاية المتتالية: $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$

الحل:

نعلم أن:

$$-1 \leq (-1)^n \leq +1$$

نضيف $(2n)$

$$2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1$$

نقسم على $(3n > 0)$

$$\frac{2n-1}{3n} \leq \frac{2n+(-1)^n}{3n} \leq \frac{2n+1}{3n}$$

$$\frac{2n-1}{3n} \leq u_n \leq \frac{2n+1}{3n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$$

حسب الاضافة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$$

مثال 6: ليكن $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

في حالة n غير معدوم.

1) اوجد a و b ليكون:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

2) ليكن:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

احسب S_n بدلالة n ثم احسب نهاية S_n .

الحل:

1) لإيجاد a و b نجعل u_n بالشكل الجديد يشبه الأصلي ونقارن بينهما.

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{an+a+bn}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{a+(a+b)n}{n(n+1)}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

نقارن مع:

$$a+(a+b)n = 1+0n$$

$$a=1 \dots \textcircled{1}$$

الثوابت:

$$a+b=0 \dots \textcircled{2}$$

أمثال n :

نعوض $\textcircled{1}$ في $\textcircled{2}$:

$$1+b=0 \Rightarrow b=-1$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \quad (2)$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$u_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$u_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1 - 0 = 1$$

مثال (11): $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

1- أثبت أن:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

2- استنتج تقارب u_n .

الحل:

1- u_n متتالية مجاميع:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ أكبرها:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \text{ أصغرها:}$$

$$n = n - 1 + 1 = n \text{ عددها:}$$

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \end{aligned}$$

حسب الإحاطة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

u_n متقاربة نحو (1).

مثال (9): ادرس تقارب: $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$

الحل:

هناك حالة عدم تعيين: $\frac{\infty - \infty}{\infty}$

$$u_n = \frac{3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n \left(1 - \frac{1^n}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

u_n متقاربة نحو العدد (1).

مثال (10): احسب نهاية: $u_n = \frac{n! - 2}{n!}$

الحل:

$$u_n = \frac{n! - 2}{n!} \Rightarrow u_n = 1 - \frac{2}{n!}$$

نعلم أن: $n! \geq n$

$$\frac{n!}{2} \geq \frac{n}{2}$$

$$0 < \frac{2}{n!} \leq \frac{2}{n}$$

$$0 > -\frac{2}{n!} \geq -\frac{2}{n}$$

$$1 > 1 - \frac{2}{n!} > 1 - \frac{2}{n}$$

$$1 > u_n \geq 1 - \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1$$

حسب الإحاطة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

المتتاليان المتجاورتان

مثال ①: $(t_n)_{n \geq 1}$ و $(S_n)_{n \geq 1}$ متتاليتان معرفتان وفق:

$$S_n = 1 + \frac{1}{n^2}, \quad t_n = \frac{n-1}{n}$$

أثبت أن المتتاليتين متجاورتان.

الحل:

ندرس إطراد t_n :

بفرض: $f(x) = \frac{x-1}{x}$

f إشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{x-1(x-1)}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

f متزايدة تماماً على المجال $]0, +\infty[$ $t_n \Leftarrow$ متزايدة تماماً بدءاً من $n = 1$

ندرس إطراد S_n :

بفرض: $g(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

g إشتقاقي على $]0, +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{-2x}{x^4} < 0$$

g متناقصة تماماً على المجال $]0, +\infty[$ $S_n \Leftarrow$ متناقصة تماماً بدءاً من $n = 1$

نوجد:

$$S_n - t_n = 1 + \frac{1}{n^2} - \frac{n-1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - t_n) = 1 + 0 - 1 = 0$$

المتتاليتان t_n و S_n متجاورتان.

مثال ②: $(u_n)_{n \geq 1}$ و $(v_n)_{n \geq 1}$ معرفتان وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1- ادرس إطراد u_n .

2- ادرس إطراد v_n .

3- أثبت أن المتتاليتين متجاورتان.

الحل:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

u_n متزايدة تماماً بدءاً من $n = 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-n-1}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n-n-1}{n(n+1)^2} < 0$$

v_n متناقصة تماماً بدءاً من $n = 1$

3- لدينا:

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [v_n - u_n] = 0$$

\Leftarrow المتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.

مثال ②: ليكن $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ و $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_0 = 2 \cos \theta, \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

1- احسب u_1 و u_2 .

2- أثبت بالتدريج أن: $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

3- احسب نهاية $(u_n)_{n \geq 0}$

الحل:

1- عندما يكون لدينا علاقة تدرجية للمتتالية لحساب أي حد نعوض الحد يلي قبلو.

$$u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$$

$$u_1 = \sqrt{2(1 + \cos \theta)} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$u_1 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$u_2 = \sqrt{2 \cdot \left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right)}$$

$$u_2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{4}\right)$$

$$1 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{4}\right) \quad \text{تذكر:}$$

2- نسمي القضية: $E(n): u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

نثبت صحة $E(0)$: $l_1 = u_0 = 2 \cos \theta$

$$l_2 = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = 2 \cos \theta = l_1$$

محقة.

نفرض صحة $E(n)$: $u_n = 2 \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \dots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$u_{n+1} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

$$l_1 = u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

$$l_1 = \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2 \left(1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}$$

$$l_1 = \sqrt{2 \cdot 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = l_2$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة مهما كان n عدد طبيعي.

$$2 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n) = +\infty \quad -3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \cos(0) = 2$$

الإثبات بالتدريج (الإستقراء الرياضي)

مثال ①: في حالة $n \geq 1$ لدينا:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

1- احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 ثم عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n .

2- أثبت بالتدريج أن: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

الحل:

$$S_1 = 1^2 = 1 \quad -1$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$S_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

2- نسمي القضية: $E(n): S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نثبت صحة $E(1)$: $l_1 = S_1 = 1$

$$l_2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$$

$l_1 = l_2$ محقة.

نفرض صحة $E(n)$: $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \dots *$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

نبدأ من l_1 ونستعين ب* حتى نصل إلى l_2 .

$$l_1 = S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$l_1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$l_1 = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6}$$

$$l_1 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

وبالنشر للطرف الثاني:

$$l_2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6}$$

$$l_2 = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = l_1$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة مهما كان $n \geq 1$

$$l_1 = 12k - 15 = 3(4k - 5) = 3k' = l_2$$

محقة من أجل $(n + 1)$ فهي محقة مهما كان n عدد طبيعي و $4^n + 5$ مضاعف لـ (3)

تقارب المتتالية المعرفة بالتدريج

مثال ①: المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

1- أثبت أن: $u_n > 0$ أيًا يكن n .

2- المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق: $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n \geq 0}$ هندسية واكتبها بدلالة n واحسب نهايتها.

3- احسب نهاية $(u_n)_{n \geq 0}$ واستنتج أنها متقاربة.

الحل:

1- نسمي القضية: $E(n): u_n > 0$

نثبت صحة $E(0)$: محقة $u_0 > 0 \Rightarrow 3 > 0$

نفرض صحة $E(n)$: $u_n > 0 \dots *$

نثبت صحة $E(n + 1)$:

$$u_{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{2}{u_n + 1} > 0$$

لإثبات أن متراجحة أكبر من الصفر يكفي إثبات أن بسطها موجب ومقامها موجب.

لدينا: $2 > 0$ بسط موجب.

من الفرض: $u_n > 0 \Leftrightarrow u_n + 1 > 0$ مقام موجب.

$$\frac{2}{u_n + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{u_n + 1} > 0$$

محقة من أجل $(n + 1)$ فهي محقة مهما كان n

$$-2 \quad t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

نوجد:

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} = \frac{\frac{2}{u_n + 1} - 1}{\frac{2}{u_n + 1} + 1}$$

$$t_{n+1} = \frac{2 - u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{2(u_n + 2)}$$

مثال ③: ليكن $x > -1$ في حالة عدد n طبيعي

نرمز إلى المتراجحة $E(n)$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

أثبت أن المتراجحة $E(n)$ محقة.

الحل:

نثبت صحة $E(0)$:

$$(1 + x)^0 \geq 1 + 0x \Rightarrow 1 \geq 1$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \dots *$$

نثبت صحة $E(n + 1)$:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

في إثبات صحة المتراجحات ننتقل من الفرض للوصول إلى الشكل من أجل $(n + 1)$

نبدأ من *:

$$(1 + x)^n \geq (1 + nx)$$

نضرب بـ $(1 + x)$ حيث: $x > -1$

$$(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + nx + x + nx^2$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2$$

حذف مقدار موجب من الطرف الصغير يعني تصغير الصغير.

نحذف $nx^2 > 0$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$$

محقة من أجل $(n + 1)$ فهي محقة مهما كان n .

مثال ④: أثبت بالتدريج صحة $(4^n + 5)$ مضاعف للعدد (3)

مهما كان n طبيعي.

الحل:

بفرض أن $E(n)$ هي:

$$4^n + 5 = 3k$$

نثبت $E(0)$:

$$l_1 = 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6 = 3k = l_2$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$4^n + 5 = 3k \dots *$$

نثبت صحة $E(n + 1)$:

$$4^{n+1} + 5 = 3k'$$

ساوي الأس مثل يلي بـ*:

$$l_1 = 4^{n+1} + 5 = 4 \cdot 4^n + 5$$

من * نعزل يلي له أس:

$$4^n = 3k - 5$$

نعوض في l_1 :

$$l_1 = 4(3k - 5) + 5 = 12k - 20 + 5$$

2- نسمي القضية:

$$E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

نثبت صحة $E(0)$:

$$2 \leq u_1 \leq u_0$$

$$2 \leq \frac{u_0}{2} + \frac{2}{u_0} \leq u_0$$

$$2 \leq \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \leq 3$$

$$2 \leq \frac{13}{6} \leq 3 \quad \text{محقة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \dots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

نبدأ من *:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

عندما يكون لدينا التابع متزايد للمتتالية التدرجية يفيدنا في الإثبات من أجل $(n+1)$ فقط نصور *.

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Leftarrow f \text{ متزايد}$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة من أجل n .

3- المتتالية u_n تحقق $u_{n+1} \leq u_n$ فهي متناقصة $2 \leq u_n$ ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة.

حساب النهاية يتم بحل المعادلة:

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x$$

نضرب بـ $2x$:

$$2x \cdot \frac{x}{2} + 2x \cdot \frac{2}{x} = 2x \cdot x \Rightarrow x^2 + 4 = 2x^2$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$$

إما $x = 2$ مقبول ، أو $x = -2$ مرفوض.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$$

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{1 - u_n}{2(u_n + 2)} = \frac{(1 - u_n)}{2(u_n + 2)} \times \frac{(u_n + 2)}{(u_n - 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{t_{n+1}}{t_n} = -\frac{1}{2} \in R$$

إذن t_n هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$.

$$t_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3 - 1}{3 + 2} = \frac{2}{5}$$

$$t_n = t_0 \cdot q^n \Rightarrow t_n = \frac{2}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$-1 < -\frac{1}{2} < +1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \frac{2}{5} (0) = 0$$

$$\frac{t_n}{1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \quad -3$$

جاء تقاطعي لنعزل u_n :

$$t_n \cdot u_n + 2t_n = u_n - 1$$

$$t_n \cdot u_n - u_n = -2t_n - 1$$

$$\Rightarrow (t_n - 1)u_n = -2t_n - 1$$

$$u_n = \frac{-2t_n - 1}{t_n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{-2(0) - 1}{0 - 1} = 1$$

u_n متقاربة نحو 1

مثال 2: نتامل المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \end{cases}$$

عند كل $n \geq 0$ والمطلوب:

1- أثبت أن التابع: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$.

2- أثبت بالتدرج أن: $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

أياً كان العدد الطبيعي n .

3- استنتج أن المتتالية متقاربة واحسب نهايتها.

الحل:

$$-1 \quad f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

f اشتقاقي على $[2, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

$f' \geq 0 \Leftarrow f$ متزايد تماماً عندما $x \in [2, +\infty[$

مثال (3): $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

1- أثبت أن u_n متزايدة تماماً.

2- أثبت أن u_n تكتب بالشكل:

$$u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3- استنتج أن u_n تقبل عنصراً راجحاً.

4- أثبت أن u_n متقاربة.

الحل:

1-

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

$u_n \leftarrow$ متزايدة تماماً.

2-

$$u_n = \frac{1^0}{3^0} + \frac{1^1}{3^1} + \frac{1^2}{3^2} + \dots + \frac{1^n}{3^n}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$a = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \text{ أولها:}$$

$$n = n - 0 + 1 = n + 1 \text{ عددها:}$$

$$u_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q}\right)$$

$$u_n = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$u_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$u_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

3- لازم يكون (عدد $u_n <$)

لدينا:

$$u_n - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} < 0$$

$$u_n - \frac{3}{2} < 0$$

$$u_n < \frac{3}{2}$$

إذن $\left(\frac{3}{2}\right)$ هو حد راجح على u_n

4- المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

مثال (4): المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة عند $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

1- أثبت بالتدرج أن: $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

2- استنتج أن العدد (3) راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$.

3- أثبت أن $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

الحل:

1- نسمي القضية:

$$E(n): \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0} \Rightarrow 1 \leq 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \dots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

نبدأ من *:

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضرب المقامات بـ $(n+1)$:

$$\frac{1}{(n+1)n!} \leq \frac{1}{(n+1)2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)2^n}$$

تصغير المقام يعني تكبير الكسر \Leftarrow تكبير الكبير.

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة مهما كان $n \geq 1$

2- ليكون العدد (3) راجح على المتتالية لازم يتحقق:

$$u_n \leq 3$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{لدينا:}$$

نستفيد من المتراجحة ونعوض فيها أعداد توصلنا إلى u_n .

$$\frac{1}{1!} \leq \frac{1}{2^0}$$

$$\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2^1}$$

$$\frac{1}{3!} \leq \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!} \leq \frac{1}{2^3}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

نضيف (1) للطرفين:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1^0}{2^0} + \frac{1^1}{2^1} + \dots + \frac{1^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$u_n \leq 1 + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}_{S_n}$$

$$u_n \leq 1 + S_n \dots **$$

حساب S_n :

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \quad \text{أولها:}$$

$$n = n - 1 - 0 + 1 = n \quad \text{عددها:}$$

$$S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$S_n = 1 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

نعوض في **:

$$u_n \leq 1 + 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n \leq 3 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إلغاء السالب يعني تكبير الكبير $u_n \leq 3$

إذن العدد (3) راجح على المتتالية.

3- ندرس إطاراد:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

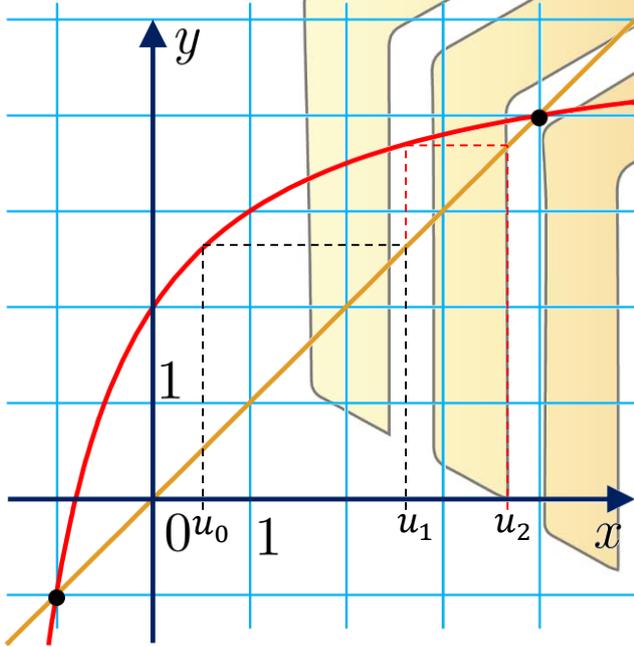
\Leftarrow المتتالية u_n متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد (3) فهي متقاربة نحو (3)

تعيين حدود متتالية على الرسم:

نعرف المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2} \end{cases}$$

باستعمال الرسم، مثل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_3 و u_2 و u_1 و u_0



طريقة الحل:

- 1) نعين u_0 على محور الفواصل.
- 2) من u_0 نرسم مستقيم شاقولي إلى الخط البياني فيقطعه بنقطة.
- 3) من النقطة السابقة، نرسم مستقيم أفقي إلى منتصف الربعين الأول والثالث، فيقطعه بنقطة.
- 4) من هذه النقطة نرسم مستقيم شاقولي إلى محور الفواصل فيعين u_1
- 5) نكرر العملية لتعيين باقي الحدود.

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_1 = 4$ و $u_3 = 16$ (1) اكتب u_n بدلالة n وأوجد u_5 (2) نعرّف المتتالية S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

اكتب S_n بدلالة n ثم احسب نهايتها.

السؤال الثاني:

 a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها q وأن: $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية.المطلوب حساب q

السؤال الثالث:

 $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q فيها:

$$u_0 = k, u_1 = k + 1, u_2 = k + 3$$

(1) احسب k (2) بفرض $k = 1$ عبر عن u_n بدلالة n

(3) احسب المجموع:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$$

السؤال الرابع:

اكتب S_n بدلالة n في كل من الحالات الآتية:

$$\textcircled{1} S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}$$

$$\textcircled{2} S = 3 + 6 + 9 + \dots + 3n$$

السؤال الخامس:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$$

ولتكن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

أثبت أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية واكتب v_n بدلالة n

السؤال السادس:

أثبت كلاً من القضايا الآتية مستخدماً الإستقراء الرياضي:

(1) أثبت بالتدرج من أجل $n \geq 0$ أن: $10^n - 1$ من مضاعفات العدد 9(2) أثبت بالتدرج من أجل $n \geq 3$ أن: $3^n \geq (n + 2)^2$

السؤال السابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2u_n + 6} \end{cases}$$

(1) بفرض التابع $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$ ادرس اطراد التابع f (2) أثبت أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ (3) أثبت أن u_n متناقصة

(4) استنتج تقارب المتتالية

(5) احسب نهاية u_n

السؤال الثامن:

ليكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}$$

(1) أثبت بالتدرج أن $n \leq 2^n$ (2) استنتج حداً راجحاً على u_n

السؤال التاسع:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$u_n = \frac{2n - 1}{n + 1}$$

(1) ادرس إطراد المتتالية.

(2) أثبت أن العدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ (3) احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ثم جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق: $n > n_0$ عندما تكون: $u_n \in]1.9, 2.1[$

السؤال العاشر:

نعرّف المتتالية $(x_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

أثبت أن 1 راجح على x_n

السؤال الثالث:

$$(u_1)^2 = u_0 \times u_2 \Rightarrow (k+1)^2 = k \times (k+3) \quad (1)$$

$$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 3k \Rightarrow k = 1$$

$$u_2 = 4 \text{ و } u_1 = 2 \text{ و } u_0 = 1 \quad (2)$$

$$u_1 = qu_0 \Rightarrow \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2 = q$$

$$\Rightarrow u_n = 1 \times 2^n \Rightarrow u_n = 2^n$$

$$S = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) \quad (3)$$

$$a = u_0 = 1, \quad q = 2$$

$$n = 19 - 0 + 1 = 20$$

$$S = 1 \left(\frac{1-2^{20}}{1-2} \right) = -1 + 2^{20}$$

السؤال الرابع:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1^2}{3^2} + \dots + \frac{1^n}{3^n} \quad (1)$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{1}{3} \right)^1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$S = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{\frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)$$

$$S = 3 + 6 + 9 + \dots + 3n \quad (2)$$

$$S = 3(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\Rightarrow S = 3 \left(\frac{n(a+l)}{2} \right) \Rightarrow S = 3 \left(\frac{n(1+n)}{2} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{3n^2 + 3n}{2}$$

حل ورقة العمل اليدوية لبحث المتتاليات ونهايتها

السؤال الأول:

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \quad (1)$$

$$u_3 = u_1 \times q^{3-1} \Rightarrow 16 = 4 \times q^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = 2$$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} \Rightarrow u_n = 4 \times 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow u_n = 4 \times 2^n \times 2^{-1} = \frac{4}{2} \times 2^n$$

$$\Rightarrow u_n = 2(2)^n$$

$$u_5 = 2 \times 2^5 = 64$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (2)$$

$$S_n = a \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

$$a = u_1 = 4, \quad q = 2$$

$$n = n - 1 + 1 = n$$

$$S_n = 4 \left(\frac{1-2^n}{1-2} \right) = 4 \times \frac{1-2^n}{-1}$$

$$\Rightarrow S_n = -4(1-2^n)$$

$$2 > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -4(1 - (+\infty)) = +\infty$$

السؤال الثاني:

بما أن a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فهي تحقق:

$$b = qa \dots (1)$$

$$c = q^2a \dots (2)$$

وبما أن $3a$ و $2b$ و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية فهي تحقق:

$$2b = \frac{3a+c}{2} \Rightarrow 4b = 3a+c \dots (3)$$

نعوض (1) و (2) في (3):

$$4qa = 3a + q^2a$$

نقسم على $a \neq 0$ حيث

$$4q = 3 + q^2 \Rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (q-3)(q-1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} q = 1 \\ q = 3 \end{matrix}$$

$$3^n \geq (n+2)^2 \quad \text{نبدأ من } *:$$

$$3^{n+1} \geq 3(n^2 + 4n + 4)$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq 3n^2 + 12n + 12$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq n^2 + 6n + 9 + 2n^2 + 6n + 3$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2 + 2n^2 + 6n + 3$$

$$(2n^2 + 6n + 3 > 0) \text{ نحذف}$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} \geq (n+3)^2$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة أياً كانت $n \geq 3$

السؤال السابع:

$$f(x) = \frac{3x+2}{2x+6} \quad (1)$$

f معرف ومستمر واشتقائي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{3(2x+6) - 2(3x+2)}{(2x+6)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x+18-6x-4}{(2x+6)^2} = \frac{14}{(2x+6)^2} > 0$$

f متزايد تماماً

$$E(n): \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$$

(2) نسمة القضية:

$$E(0): \frac{1}{2} \leq 1 \leq 1 \text{ محقة: نثبت صحة:}$$

$$E(n): \left[\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \right] \dots * \text{ نفرض صحة:}$$

$$E(n+1): \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1 \text{ نثبت صحة:}$$

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \text{ نبدأ من } *:$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{8} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة أياً كانت n عدد طبيعي

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} = \frac{\frac{1}{5}(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)}{(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)} \quad \text{نوجد } \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{5} \in R$$

v_n هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{5}u_0 = 1$$

$$v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

السؤال السادس:

$$E(n): 10^n - 1 = 9k \quad \text{(1) نسمة القضية:}$$

$$E(0): 10^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{نثبت صحة:}$$

(0) من مضاعفات العدد (9) فهي محقة

$$E(n): \boxed{10^n - 1 = 9k} \dots * \text{ نفرض صحة:}$$

$$E(n+1): \underbrace{10^{n+1} - 1}_{l_1} = \underbrace{9k'}_{l_2} \quad \text{نثبت صحة:}$$

$$10^n - 1 = 9k \Rightarrow 10^n = 9k + 1 \quad \text{من } *:$$

$$l_1 = 10^n \times 10 - 1 = (9k + 1) \times 10 - 1$$

$$\Rightarrow l_1 = 90k + 10 - 1 = 90k + 9$$

$$\Rightarrow l_1 = 9(10k + 1) = 9k' = l_2$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة من أجل أياً كانت $n \geq 0$

$$E(n): 3^n \geq (n+2)^2 \quad \text{(2) نسمة القضية:}$$

$$E(3): 27 \geq (5)^2 \quad \text{نثبت صحة } E(3):$$

$$\Rightarrow 27 \geq 25 \text{ محقة}$$

$$E(n): \boxed{3^n \geq (n+2)^2} \dots * \text{ نفرض صحة:}$$

$$E(n+1): 3^{n+1} \geq (n+3)^2 \quad \text{نثبت صحة:}$$

(2) لدينا $n \leq 2^n$

نقسّم على $(0 < 3^n)$

$$\frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n}$$

$$n = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2}{3^2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{3}{3^3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

\vdots

$$n = n \Rightarrow \frac{n}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بالجمع: $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$

$$S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$a = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{2}{3}$$

$$n = n - 1 + 1 = n$$

$$S_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} \right)$$

$$\Rightarrow S_n = 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$

$$\Rightarrow u_n \leq 2 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \Rightarrow u_n \leq 2$$

2 راجع على u_n

(3) نسّم القضية: $E(n): u_{n+1} \leq u_n$

نثبت صحة: $E(0): u_1 \leq u_0$

$$\Rightarrow \frac{5}{8} \leq 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة: $E(n): \boxed{u_{n+1} \leq u_n} \dots *$

نثبت صحة: $E(n+1): u_{n+2} \leq u_{n+1}$

نبدأ من *: $u_{n+1} \leq u_n$

نصوّر: $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت n عدد طبيعي

(4) u_n متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة

(5) لحساب النهاية، نحل المعادلة: $f(x) = x$

$$\frac{3x+2}{2x+6} = x \Rightarrow 3x+2 = 2x^2+6x$$

$$\Rightarrow 2x^2+3x-2=0$$

$$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 25$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \text{ مقبول}$$

$$x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2 \text{ مرفوض}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

السؤال الثامن:

(1) نسّم القضية: $E(n): n \leq 2^n$

نثبت صحة: $E(1): 1 \leq 2^1$

$$\Rightarrow 1 \leq 2 \text{ محققة}$$

نفرض صحة: $E(n): \boxed{n \leq 2^n} \dots *$

نثبت صحة: $E(n+1): n+1 \leq 2^{n+1}$

نبدأ من *: $n \leq 2^n$

$$2n \leq 2^{n+1} \Rightarrow n+1 \leq n+n \leq 2^{n+1}$$

$$\Rightarrow n+1 \leq 2^{n+1}$$

محققة من أجل n فهي محققة أياً كانت $n \geq 1$

السؤال العاشر:

$$x_n - 1 = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} - 1$$

$$\Rightarrow x_n - 1 = \frac{1 - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow x_n - 1 = \frac{(1 - \sqrt{n^2 + 1})(1 + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 1}(1 + \sqrt{n^2 + 1})}$$

$$\Rightarrow x_n - 1 = \frac{1 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 1}(1 + \sqrt{n^2 + 1})}$$

$$\Rightarrow x_n - 1 = \frac{-n^2}{\sqrt{n^2 + 1}(1 + \sqrt{n^2 + 1})} \leq 0$$

$$\Rightarrow x_n - 1 \leq 0 \Rightarrow x_n \leq 1$$

1 حد راجح على المتتالية x_n

السؤال التاسع:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad (1)$$

f اشتقاقي على $R \setminus \{-1\}$ فهو اشتقاقي على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

f متزايد تماماً $\Leftarrow u_n$ متزايدة تماماً.

(2) يكون عدد راجح عندما: $u_n \leq 2$

$$u_n - 2 \leq 0 \quad \text{أي:}$$

نحسب:

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$\Rightarrow u_n - 2 = -\frac{3}{n+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow u_n - 2 \leq 0 \Rightarrow u_n \leq 2$$

إذا العدد (2) هو عدد راجح على المتتالية u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \quad (3)$$

$$u_n \in]1.9, 2.1[$$

$$c = \frac{b+a}{2} = \frac{2.1+1.9}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$r = \frac{b-a}{2} = \frac{2.1-1.9}{2} = 0.1 = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2n-1}{n+1} - 2 \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{2n-1-2n-2}{n+1} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{-3}{n+1} \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 30 < n+1 \Rightarrow n > 29 \Rightarrow n_0 = 29$$

السؤال السادس:

أثبت بالتدريج من أجل $n \geq 1$ أن:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

السؤال السابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

- (1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 2$
- (2) أثبت أن المتتالية متزايدة
- (3) استنتج تقارب المتتالية u_n
- (4) ادرس نهاية المتتالية u_n

السؤال الثامن:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

(1) أوجد a و b التي تحقق:

$$u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

(2) نعرّف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق:

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

اكتب v_n بدلالة n واحسب نهاية u_n

السؤال التاسع:

احسب نهاية كل من المتتاليات الآتية:

$$\textcircled{1} u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

حيث $a > b > 1$

$$\textcircled{2} u_n = \frac{3n + (-1)^n}{5n - 4} ; n \geq 1$$

$$\textcircled{3} u_n = \frac{e^n}{\pi^n}$$

ورقة عمل منزلية في بحث المتتاليات ونهايتها

السؤال الأول:

لتكن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_3 = 8$ و $r = 2$

(1) اكتب u_n بدلالة n

(2) احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

السؤال الثاني:

a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية تحقق:

$$a \times b \times c = 125$$

$$a + b + c = 31$$

عيّن a و b و c

السؤال الثالث:

احسب المجاميع الآتية:

$$\textcircled{1} S = 2 + 4 + 8 + \dots + 32$$

$$\textcircled{2} S = i + i^2 + \dots + i^6$$

$$\textcircled{3} S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{7}{5}$$

السؤال الرابع:

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة بالعلاقة التدرجية:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 \end{cases}$$

ونعرّف المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ وفق: $v_n = u_n + 6$

(1) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية وعيّن أساسها واحسب v_0 ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .

(2) لنعرّف المتتالية $(\omega_n)_{n \geq 0}$ وفق: $\omega_n = \ln(v_n)$ وأثبت أن المتتالية $(\omega_n)_{n \geq 0}$ حسابية واحسب ω_0 ثم احسب المجموع:

$$S = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5$$

السؤال الخامس:

لتكن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة وفق:

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n} \end{cases}$$

والمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ معرفة وفق: $u_n = \frac{2}{v_n}$ والمطلوب:

(1) أثبت أن u_n حسابية وأوجد أساسها.

(2) اكتب u_n بدلالة n (3) استنتج v_n بدلالة n

(4) احسب: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$

$$u_n = u_p + (n - p)r \quad (1)$$

$$u_n = u_3 + (n - 3) \times 2$$

$$u_n = 8 + 2n - 6 \Rightarrow u_n = 2 + 2n$$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10} \quad (2)$$

$$S = n \frac{(a + l)}{2}$$

$$a = u_0 = 2, \quad l = u_{10} = 22$$

$$n = 10 - 0 + 1 = 11$$

$$S = 11 \times \frac{(2 + 22)}{2} = \frac{11 \times 24}{2} = 132$$

السؤال الثاني:

نعوض في المعادلات:

$$b^2 = a \times c$$

$$a \times b \times c = 125 \Rightarrow b \times b^2 = 125$$

$$\Rightarrow b^3 = 125 \Rightarrow b = 5$$

$$a + 5 + c = 31 \Rightarrow a + c = 26 \dots (1)$$

$$a \times 5 \times c = 125 \Rightarrow a \times c = 25 \dots (2)$$

$$a = 25, \quad b = 5, \quad c = 1 \quad \text{إمّا:}$$

$$a = 1, \quad b = 5, \quad c = 25 \quad \text{أو:}$$

السؤال الثالث:

$$(1) S = 2 + 4 + 8 + \dots + 32$$

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^5$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها 2

$$S = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$a = 2, \quad q = 2$$

$$n = 5 - 1 + 1 = 5$$

$$S = 2 \left(\frac{1 - 2^5}{1 - 2} \right) = -2(1 - 32)$$

$$\Rightarrow S_n = -2(-31) = 62$$

$$(2) S = i + i^2 + \dots + i^6$$

مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها i

$$S = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$$

$$a = i, \quad q = i$$

$$n = 6 - 1 + 1 = 6$$

$$S = i \left(\frac{1 - i^6}{1 - i} \right) = i \left(\frac{1 - (-1)}{1 - i} \right) = \frac{2i}{(1 - i)} \cdot \frac{(1 + i)}{(1 + i)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2i(1 + i)}{2} = i + i^2 = i - 1$$

$$(3) S = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{7}{5}$$

$$5S = 1 + 2 + \dots + 7$$

$$5S = n \frac{(a + l)}{2}$$

$$5S = 7 \frac{(1 + 7)}{2} \Rightarrow 5S = \frac{7 \times 8}{2} = 28$$

$$\Rightarrow S = \frac{28}{5}$$

السؤال الرابع:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6 \quad (1)$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{2}u_n + 3}{u_n + 6} = \frac{\frac{1}{2}(u_n + 6)}{u_n + 6} = \frac{1}{2} \in R$$

$$q = \frac{1}{2} \text{ هندسية أساسها } v_n \leftarrow$$

$$v_0 = u_0 + 6 \Rightarrow v_0 = 2 + 6 = 8$$

$$v_n = v_0 q^n \Rightarrow v_n = 8 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$\omega_n = \ln(v_n) \quad (2)$$

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$$

$$\Rightarrow \omega_{n+1} - \omega_n = \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln(2)$$

ω_n متتالية حسابية أساسها $-\ln(2)$

$$\omega_0 = \ln(v_0) = \ln(8)$$

السؤال السادس:

نسمي القضية:

$$E(n): 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

نثبت صحة $E(1)$:

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{4}{4} \Rightarrow 1 = 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n): \boxed{1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}} \dots *$$

نثبت صحة:

$$E(n+1): \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\text{من } *} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$l_1 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = l_2$$

السؤال السابع:

$$E(n): 0 \leq u_n \leq 2 \text{ (1) نسمي القضية:}$$

$$E(0): 0 \leq 1 \leq 2 \text{ محققة: نثبت صحة:}$$

$$E(n): \boxed{0 \leq u_n \leq 2} \dots * \text{ نفرض صحة:}$$

$$E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2 \text{ نثبت صحة:}$$

$$0 \leq u_n \leq 2 \text{ نبدأ من } *:$$

$$2 \leq 2 + u_n \leq 4$$

$$0 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2 + u_n} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة أياً كانت n عدد طبيعي

$$S = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(a+l)}{2}$$

$$a = \omega_0 = \ln(8)$$

$$l = \omega_5 = \ln(v_5) \Rightarrow l = \ln\left(8\left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \ln\left(\frac{8}{32}\right)$$

$$\Rightarrow l = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln(4)$$

$$n = 5 - 0 + 1 = 6$$

$$\Rightarrow S = \frac{6(\ln(8) - \ln(4))}{2} = 3\ln(2)$$

السؤال الخامس:

$$u_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}} \quad (1)$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{\frac{v_n}{1+v_n}} = \frac{2(1+v_n)}{v_n} = \frac{2+2v_n}{v_n}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{v_n} + 2$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{v_n} + 2 - \frac{2}{v_n} = 2$$

المتتالية u_n حسابية أساسها $r = 2$

$$u_0 = \frac{2}{v_0} = \frac{2}{1} = 2 \quad (2)$$

$$u_n = u_0 + nr \Rightarrow u_n = 2 + 2n$$

$$u_n = \frac{2}{v_n} \Rightarrow v_n = \frac{2}{u_n} \text{ لدينا } (3)$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{2}{2+2n}$$

$$S = \frac{n(a+l)}{2} \quad (4)$$

$$a = u_0 = 2, \quad l = u_9 = 2 + 2(9) = 20$$

$$n = 9 - 0 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow S = \frac{10(2+20)}{2} = 110$$

$$v_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$u_0 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{n+2} \quad \text{بالجمع:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

السؤال التاسع:

$$\textcircled{1} u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{a^n \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$0 < b < a \Rightarrow 0 < \frac{b}{a} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

$$\textcircled{2} u_n = \frac{3n + (-1)^n}{5n - 4}; n \geq 1$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$3n - 1 \leq 3n + (-1)^n \leq 3n + 1$$

$$\frac{3n - 1}{5n - 4} \leq \frac{3n + (-1)^n}{5n - 4} \leq \frac{3n + 1}{5n - 4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n - 1}{5n - 4}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n + 1}{5n - 4}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5} \quad \text{حسب مبرهنة الإحاطة:}$$

$$\textcircled{4} u_n = \frac{e^n}{\pi^n}$$

$$u_n = \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$$

$$-1 < \frac{e}{\pi} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow \text{متزايدة } u_n \quad (2)$$

$$E'(n): u_{n+1} \geq u_n \quad \text{نسمي القضية:}$$

$$E'(0): u_1 > u_0 \quad \text{نثبت صحة:}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \geq 1 \quad \text{محقة}$$

$$E'(n): \boxed{u_{n+1} \geq u_n} \dots * \quad \text{نفرض صحة:}$$

$$E(n+1): u_{n+2} \geq u_{n+1} \quad \text{نثبت صحة:}$$

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{نبدأ من *:}$$

$$2 + u_{n+1} \geq 2 + u_n$$

$$\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$$

$$\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

محقة من أجل $(n+1)$ فهي محقة أياً كانت n عدد حقيقي.

u_n متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة

(4) لحساب النهاية، نحل المعادلة $f(x) = x$

$$\sqrt{2+x} = x$$

$$2+x = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{مقبول } x = 2 \\ \text{مرفوض } x = -1 \end{matrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

السؤال الثامن:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{a(n+2) + b(n+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow 1 = a(n+2) + b(n+1)$$

$$\Rightarrow 1 = an + 2a + bn + b$$

$$\Rightarrow 0n + 1 = n(a+b) + (2a+b)$$

$$a+b = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$2a+b = 1 \dots \textcircled{2}$$

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1 \quad \text{بالطرح:}$$

$$1+b = 0 \Rightarrow b = -1 \quad \text{نعوض في } \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}$$

التكامل

حالة ④ : توابع كسرية حتمية:

أس بسيط > أس مقام
تفرقة كسور
نحلل المقام إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى.
نضج:
نؤخذ المقامات ونحذفها ثم نبحث عن قيم a و b .

$$\frac{(f)(g)}{(f)(g)} = \frac{a}{f} + \frac{b}{g}$$

حالة ③ : الجزئية:

نستخدم:

1) التكاملات اللوغاريتمية

2) تكاملات جداء تابعين من طبيعتين مختلفتين

يصلح لأربع حالات:

- 1) أسّي × صحيح
- 2) مثلثي × صحيح
- 3) مثلثي × أسّي
- 4) لوغاريتمي × صحيح

أس بسيط ≤ أس مقام
قسمة إقليدية

حالة ② : تكاملات مثلثية

$f(x)$	$F(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b)$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$
$1 + \tan^2(ax + b)$	$\frac{1}{a} \tan(ax + b)$
$1 + \cot^2(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cot(ax + b)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$

دساتير مثلثية:

حالة ① : دساتير التكامل

$f(x)$	$F(x)$
a	ax
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{x}$	$\ln bx + c $
$\frac{bx+c}{(ax+b)^n}$	$\frac{1}{a} \times \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$
e^x	e^x
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} \times e^{ax+b}$
u'	$\ln u $
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u' \cdot u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u' \cdot e^u$	e^u

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \Rightarrow 1 - \cos(2x) = 2 \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \Rightarrow 1 + \cos(2x) = 2 \cos^2(x)$$

$$\sin(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\cos(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

⑦ $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 + 1} \quad I = \mathbb{R}$

الحل:

$$f(x) = x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3}$$

⑧ $f(x) = xe^{x^2+1} \quad I = \mathbb{R}$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2+1}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$$

⑨ $f(x) = \frac{5}{\sqrt{2-3x}} \quad I =]-\infty, \frac{2}{3}[$

الحل:

$$f(x) = -\frac{5}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{2-3x}}$$

$$F(x) = -\frac{5}{3} \times 2\sqrt{2-3x} = -\frac{10}{3} \sqrt{2-3x}$$

⑩ $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \quad I = \mathbb{R}$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = -\left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)$$

$$F(x) = -\ln(1 + e^{-x})$$

مثال: توابع مثلثية، أوجد تابعاً أصلياً للتابع f:

① $f(x) = \sin(5x - 1)$

الحل:

$$F(x) = -\frac{1}{5} \cos(5x - 1)$$

② $f(x) = \tan^2(3x)$

الحل:

$$f(x) = 1 + \tan^2(3x) - 1$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \tan(3x) - x$$

مثال: أوجد تابعاً أصلياً للتابع f:

① $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} - e^{2x+1} \quad I =]0, +\infty[$

الحل:

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \ln|x| - \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = x^3 - \ln(x) - \frac{1}{2} e^{2x+1}$$

② $f(x) = \frac{1}{(2x-3)^2} \quad I = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

الحل:

$$f(x) = (2x-3)^{-2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(2x-3)}$$

③ $f(x) = \frac{5}{2x-1} \quad I =]-\infty, \frac{1}{2}[$

الحل:

$$F(x) = \frac{5}{2} \ln|2x-1|$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{2} \ln(1-2x)$$

④ $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2} \quad I = \mathbb{R}$

الحل:

$$f(x) = (2x-1)^{\frac{2}{3}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x-1)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10} \sqrt[3]{(2x-1)^5}$$

⑤ $f(x) = (2x-1)(x^2-x)^3 \quad I = \mathbb{R}$

الحل:

$$F(x) = \frac{(x^2-x)^4}{4}$$

⑥ $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad I =]0, +\infty[$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

$$F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

$$\textcircled{7} f(x) = \sin(5x) \sin(x)$$

الحل:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(\cos(6x) - \cos(4x))$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\cos(6x) + \frac{1}{2}\cos(4x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{\sin(6x)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{\sin(4x)}{4}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{\sin(6x)}{12} + \frac{\sin(4x)}{8}$$

$$\textcircled{8} f(x) = \sqrt{2 - 2\cos(2x)} \quad I =]0, \frac{\pi}{2}[$$

الحل:

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos(2x))} = \sqrt{2 \times 2 \sin^2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{4 \sin^2(x)} = 2|\sin(x)|$$

عندما $x \in I$ كان: $\sin(x) > 0$ أي: $|\sin(x)| = \sin(x)$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \sin(x)$$

$$F(x) = -2 \cos(x)$$

مثال: احسب كلاً من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$$

الحل:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\textcircled{3} f(x) = x \cdot \sin(1 - x^2)$$

الحل:

$$f(x) = \frac{1}{-2}(-2x) \sin(1 - x^2)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \cos(1 - x^2)$$

$$\textcircled{4} f(x) = \tan(x) \quad I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

الحل:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$F(x) = -\ln|\cos(x)|$$

عندما $x \in I$ كان: $\cos(x) > 0$

$$\Rightarrow F(x) = -\ln(\cos(x))$$

$$\textcircled{5} f(x) = \sin^3(x)$$

الحل:

$$f(x) = \sin(x) \cdot \sin^2(x) = \sin(x)(1 - \cos^2(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin(x) - \sin(x) \cdot \cos^2(x)$$

$$F(x) = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}$$

$$\textcircled{6} f(x) = \cos^4(x)$$

الحل:

$$f(x) = (\cos^2(x))^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \cos^2(2x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4x) \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \times \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{1}{8} \times \frac{\sin(4x)}{4}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow I = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{3} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x) dx$$

الحل:

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \sin(x) \rightarrow v = -\cos(x)$$

$$I = [-x \cdot \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx$$

$$\Rightarrow I = [-x \cdot \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = (-0 - 0) + (1 - 0) \Rightarrow I = 1$$

$$\textcircled{4} I = \int_3^4 \frac{12}{x^2 - 4} dx$$

الحل:

$$\frac{12}{(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

نوجد المقامات ونحذفها:

$$12 = a(x+2) + b(x-2)$$

$$12 = 4a \Rightarrow a = 3 \quad \text{لايجاد } a \text{ نعوض } x = 2$$

$$12 = -4b \Rightarrow b = -3 \quad \text{لايجاد } b \text{ نعوض } x = -2$$

$$I = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx$$

$$\Rightarrow I = [3 \ln(x-2) - 3 \ln(x+2)]_3^4 = \left[3 \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right) \right]_3^4$$

$$\Rightarrow I = 3 \ln \left(\frac{1}{3} \right) - 3 \ln \left(\frac{1}{5} \right) = 3 \ln \left(\frac{5}{3} \right)$$

$$\textcircled{2} I = \int_0^2 x|x-1| dx$$

الحل:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	2
$x-1$		-	+
$ x-1 $	$-x+1$	0	$x-1$

$$I = \int_0^1 x(-x+1) dx + \int_1^2 x(x-1) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - 0 + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow I = 1$$

مثال: احسب كلاً من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} I = \int_0^1 (x+2)e^x dx$$

الحل:

$$u = x+2 \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$I = [(x+2)e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [(x+2)e^x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = (3e - 2) - (e - 1) \Rightarrow I = 2e - 1$$

$$\textcircled{2} I = \int_1^e x \cdot \ln(x) dx$$

الحل:

$$u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{e^2}{2} - 0 \right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

السؤال الأول:

$$f(x) = (3x - 2)^{\frac{3}{5}}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \frac{(3x - 2)^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{24} \sqrt[5]{(3x - 2)^8}$$

السؤال الثاني:

$$\textcircled{1} I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$$

أما: $x = 0$ أو $x = 1$

x	-1	0	1	2	
$x^2 - x$	+	0	-	0	+
$ x^2 - x $	$x^2 - x$		$x - x^2$	$x^2 - x$	

ومنه نجد:

$$I = \int_{-1}^0 x^2 - x dx + \int_0^1 x - x^2 dx + \int_1^2 x^2 - x dx$$

$$I = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$I = \left[0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] + \left[\frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{6}$$

$$\textcircled{2} I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

البسط هو u' و المقام u ومنه:

$$I = [\ln(e^x + e^{-x})]_0^1 = \ln(e + e^{-1}) - \ln(1 + 1)$$

$$I = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{e}\right) - \ln(2)$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\frac{e^2 + 1}{2e}\right)$$

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعروف وفق:

$$f(x) = \sqrt[5]{(3x - 2)^3}$$

أوجد تابعاً أصلياً للتابع f

السؤال الثاني:

احسب كلاً من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$$

$$\textcircled{2} I = \int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\textcircled{3} I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \sin(3x) dx$$

$$\textcircled{4} I = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx$$

$$\textcircled{5} I = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$\textcircled{6} I = \int_0^2 \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} dx$$

السؤال الثالث:

أوجد التابع الأصلي F الذي يحقق الشرط:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{\ln(x)}{x}; F(1) = 0$$

$$x \in]0, +\infty[$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{2x}{(2x^2 + 3)^3}; F(0) = 0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

السؤال الرابع:

لدينا:

$$J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x + 2} dx, \quad I = \int_0^{\ln(2)} \frac{2}{e^x + 2}$$

احسب J ثم احسب $I + J$ ثم استنتج I

$$\textcircled{6} I = \int_0^2 \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} dx$$

$$\frac{x+2}{x+1} \sqrt{x^2+3x+3} \Rightarrow I = \int_0^2 \left(x+2 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \ln(x+1) \right]_0^2$$

$$\Rightarrow I = 2 + 4 + \ln(3) - 0 \Rightarrow I = 6 + \ln(3)$$

السؤال الثالث:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2} + C$$

$$F(1) = 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{\ln^2(x)}{2}$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{2x}{(2x^2+3)^3}$$

$$f(x) = 2x(2x^2+3)^{-3} = \frac{1}{2} \cdot 4x(2x^2+3)^{-3}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x^2+3)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{4(2x^2+3)^2} + C$$

$$\Rightarrow F(0) = -\frac{1}{4 \times 9} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4(2x^2+3)^2} + \frac{1}{36}$$

السؤال الرابع:

$$J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x+2} dx$$

$$\Rightarrow J = [\ln(e^x+2)]_0^{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow J = \ln(e^{\ln(2)}+2) - \ln(e^0+2) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

(I+J) حساب

$$I+J = \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{e^x}{e^x+2} + \frac{2}{e^x+2} \right) dx$$

$$\Rightarrow I+J = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x+2}{e^x+2} dx = \int_0^{\ln(2)} 1 dx$$

$$\Rightarrow I+J = [x]_0^{\ln(2)} = \ln(2)$$

إستنتاج I:

$$I+J = \ln(2) \Rightarrow I = \ln(2) - J$$

$$\Rightarrow I = \ln(2) - \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\textcircled{3} I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \sin(3x) dx$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = \sin(3x) \rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos(3x)$$

$$I = \left[-\frac{1}{3} x \cdot \cos(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x) dx$$

$$I = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} \sin(3x) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9} + \frac{1}{3} [0 - 0] = \frac{\pi}{9}$$

$$\textcircled{4} I = \int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2} dx$$

$$I = \int_0^1 x(x^2-4)^{-2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x(x^2-4)^{-2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2-4)^{-1}}{-1} \right]_0^1 \Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x^2-4} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{-3} - \left(-\frac{1}{-4} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{12} \right] = \frac{1}{24}$$

$$\textcircled{5} I = \int_0^1 x^2 e^x dx$$

$$u = x^2 \rightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$I = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx$$

$$u = 2x \rightarrow u' = 2$$

$$v' = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$\Rightarrow I = [x^2 e^x]_0^1 - \left([2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right)$$

$$\Rightarrow I = [x^2 e^x]_0^1 - [2x e^x]_0^1 + [2e^x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = e - 0 - (2e - 0) + 2e - 2$$

$$\Rightarrow I = e - 2e + 2e - 2 = e - 2$$

السؤال الأول:

$$\textcircled{1} I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$$

$$I = [\ln(\cos(x) + \sin(x))]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln(\cos(0) + \sin(0))$$

$$\Rightarrow I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln(1) = \ln(\sqrt{2})$$

$$\textcircled{2} I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx = \left[\frac{1}{4} \ln(x^4 + 1)\right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4} \ln(2) - \frac{1}{4} \ln(1) = \frac{1}{4} \ln(2)$$

$$\textcircled{3} I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2}$$

$$\Rightarrow I = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(2)$$

$$\textcircled{4} I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

$$I = \int_1^e x^{-2} \ln(x) dx$$

$$u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^{-2} \rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$I = \left[-\frac{1}{x} \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{x} \ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{x} \ln(x)\right]_1^e + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{1}{e} + 0\right] + \left[-\frac{1}{e} + 1\right] = 1 - \frac{2}{e}$$

السؤال الأول:

احسب كلاً من التكاملات الآتية:

$$\textcircled{1} I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)} dx$$

$$\textcircled{2} I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$$

$$\textcircled{3} I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx$$

$$\textcircled{4} I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

$$\textcircled{5} I = \int_0^1 \frac{2x - 1}{(x + 2)^2} dx$$

السؤال الثاني:

أوجد تابعاً أصلياً للتابع f :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2} \quad I =]2, +\infty[$$

$$\textcircled{5} I = \int_0^1 \frac{2x-1}{(x+2)^2} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{2x+4-4-1}{(x+2)^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2x+4}{(x+2)^2} dx - 5 \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2(x+2)}{(x+2)^2} dx - 5 \int_0^1 (x+2)^{-2} dx$$

$$\Rightarrow I = 2 \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx - 5 \int_0^1 (x+2)^{-2} dx$$

$$\Rightarrow I = 2[\ln(x+2)]_0^1 - 5 \left[-\frac{1}{x+2} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = 2[\ln(3) - \ln(2)] - 5 \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] = 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{6}$$

السؤال الثاني:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2} \quad I =]2, +\infty[$$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-x-2 \overline{) x^3} \\ \underline{x^3-x^2-2x} \\ x^2+2x \\ \underline{x^2-x-2} \\ 3x+2 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = x+1 + \frac{3x+2}{x^2-x-2}$$

$$I(x) = \frac{3x+2}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

نؤخذ المقامات ونحذفها:

$$3x+2 = a(x+1) + b(x-2)$$

$$8 = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{3} \quad \text{لإيجاد } a \text{ نضع } x = 2$$

$$-1 = -3b \Rightarrow b = \frac{1}{3} \quad \text{لإيجاد } b \text{ نضع } x = -1$$

$$\Rightarrow I(x) = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = x+1 + \frac{8}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{8}{3} \ln(x-2) + \frac{1}{3} \ln(x+1)$$

التابع اللوغاريتمي

المبرهنات

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0^-$$

الإشتقاق

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

المتراجحات

إثبات صحة متراجحة:
نضع الفرق بين حدي المتراجحة ونسميه $h(x)$ وندرس إفراد $h(x)$ ومن جدول الإطراد نستنتج إشارة $h(x)$ ثم إشارة الفرق ويتم إثبات المتراجحة.

حل المتراجحة:
① نوجد شرط الحل.
② نطبق الخواص إن وجدت.
③ نزيل اللوغاريتمات ونحل المتراجحة.
④ نقاطع الحلول مع شرط الحل.

خواصه

$$a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$$

$$a \geq b \Leftrightarrow \ln(a) \geq \ln(b)$$

$$a \leq b \Leftrightarrow \ln(a) \leq \ln(b)$$

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$$

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$b \cdot \ln(a) = \ln(a^b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

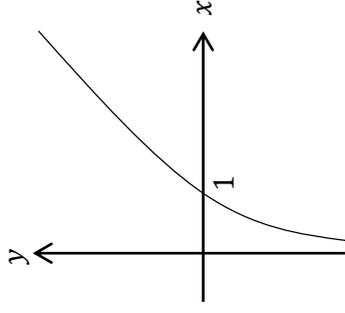
$$\frac{1}{2} \ln(a) = \ln(\sqrt{a})$$

تابعه المرجعي

$$f(x) = \ln(x)$$

معرف على: $x > 0 \Rightarrow]0, +\infty[$

$$\ln(x) :]0, +\infty[\rightarrow]-\infty, +\infty[$$



مجموعة تعريفه

$$\textcircled{1} f(x) = \ln(g(x))$$

$$\Rightarrow g(x) > 0$$

$$\textcircled{2} f(x) = \ln|g(x)|$$

$$\Rightarrow g(x) \neq 0$$

معادلات

لحل معادلة لوغاريتمية:
① نوجد شرط الحل.
② نطبق الخواص إن وجدت.
③ نزيل اللوغاريتمات ونحل المعادلة.

حالة خاصة:
إذا كانت المعادلة تحوي على $\ln^2(x)$ نحل المعادلة إما بالتحليل المباشر أو باستخدام المحلل Δ

$$\textcircled{3} \ln(x^2 - 3x) \geq 2 \ln(6 - x)$$

الحل:

$$x^2 - 3x > 0$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$x^2 - 3x = 0$	+	+	0	-	0	+	+
$x^2 - 3x > 0$	م		م.غ		م		

$$D_1 =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

$$6 - x > 0 \Rightarrow 6 > x \Rightarrow D_2 =]-\infty, 6[$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \Rightarrow D =]-\infty, 0[\cup]3, 6[$$

المترابحة تكافئ: $\ln(x^2 - 3x) \geq \ln(6 - x)^2$

$$x^2 - 3x \geq 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow 9x \geq 36 \Rightarrow x \geq 4$$

$$I = [4, +\infty[$$

$$\Rightarrow S = D \cap I \Rightarrow S = [4, 6[$$

$$\textcircled{4} \ln^2(x) - 6 \ln(x) + 8 = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow D =]0, +\infty[$$

$$(\ln(x) - 4)(\ln(x) - 2) = 0$$

$$\ln(x) = 2 \Rightarrow x = e^2 \quad \text{إما:}$$

$$\ln(x) = 4 \Rightarrow x = e^4 \quad \text{أو:}$$

مثال 1: حل المعادلات والمترابحات الآتية:

$$\textcircled{1} \ln(\sqrt{2x - 3}) = \ln(6 - x) - \frac{1}{2} \ln(x)$$

الحل:

$$2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow D_1 =]\frac{3}{2}, +\infty[$$

$$6 - x > 0 \Rightarrow 6 > x \Rightarrow D_2 =]-\infty, 6[$$

$$x > 0 \Rightarrow D_3 =]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]\frac{3}{2}, 6[$$

$$\ln(\sqrt{2x - 3}) = \ln(6 - x) - \ln(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \ln(\sqrt{2x - 3}) = \ln\left(\frac{6 - x}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x - 3} = \frac{6 - x}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 3x} = 6 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 36 = 0 \Rightarrow (x + 12)(x - 3) = 0$$

إما: $x = -12$ مرفوض أو: $x = 3$ مقبول

$$\textcircled{2} \ln|x + 2| + \ln|x - 2| = 0$$

الحل:

$$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad D_2 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

المعادلة تكافئ:

$$\ln[|x + 2| \cdot |x - 2|] = \ln(1)$$

تذكر أن: $\ln(1) = 0$

$$|(x + 2)(x - 2)| = 1 \Rightarrow |x^2 - 4| = 1$$

$$x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5} \in D \quad \text{إما:}$$

$$x = -\sqrt{5}$$

$$x^2 - 4 = -1 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \in D \quad \text{أو:}$$

$$x = -\sqrt{3}$$

$$S = \{-\sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$$

$$h'(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1(1-x) - (-1)(x)}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow h(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	1
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$		\searrow	\nearrow
إشارة $h(x)$		$+$	$+$

$$h(x) \geq 0 \Rightarrow \ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) \geq \frac{-x}{1-x} \Rightarrow f(x) \geq g(x)$$

المتراجحة محققة أيًا كانت $x < 1$

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}, \quad g'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

$$f'(0) = -1, \quad g'(0) = -1$$

$$\Rightarrow T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$T: y = g'(0)(x-0) + g(0)$$

$$\Rightarrow T: y = -x$$

مثال (2): أوجد نهاية التابع f عند a المعطاة:

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{\ln(x) + \ln(3)}{\sqrt{3x}} \quad a = +\infty$$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$

$$f(x) = \frac{\ln(3x)}{\sqrt{3x}} = \frac{\ln(\sqrt{3x^2})}{\sqrt{3x}} = \frac{2 \ln(\sqrt{3x})}{\sqrt{3x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{لأن:}$$

مثال (2): أوجد الحل المشترك لجملة المعادلتين:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases}$$

الحل:

مجموعة التعريف:

$$x \in]0, +\infty[, \quad y \in]0, +\infty[$$

المعادلة (2) تكافئ:

$$\ln(x \cdot y) = \ln(3) \Rightarrow x \cdot y = 3$$

الجملة تكافئ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$$

من (2) نجد: $y = \frac{3}{x}$ نعوض في (1):

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = 10 \Rightarrow \frac{x^4 + 9}{x^2} = 10$$

$$x^4 + 9 = 10x^2 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$(x^2 - 9)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 1 \text{ مقبول} \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \text{ مرفوض} \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \text{ مقبول} \\ x = -1 \Rightarrow y = -3 \text{ مرفوض} \end{cases}$$

الحلول: (3,1), (1,3)

مثال (1): ليكن لدينا الخطان البيانيان C_f و C_g للتابعين f و g المعرفين على $]-\infty, 1[$ وفق:

$$f(x) = \ln(1-x), \quad g(x) = \frac{-x}{1-x}$$

(1) أثبت أن $f(x) \geq g(x)$ أيًا كانت $x < 1$

(2) اكتب معادلة المماس المشترك للخطين البيانيين للتابعين f و g في نقطة فاصلتها الصفر.

الحل:

$$f(x) \geq g(x) \Rightarrow \ln(1-x) \geq \frac{-x}{1-x} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \geq 0$$

$$h(x) = \ln(1-x) + \frac{x}{1-x}$$

h معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, 1[$

استنتاج رسم خط بياني:

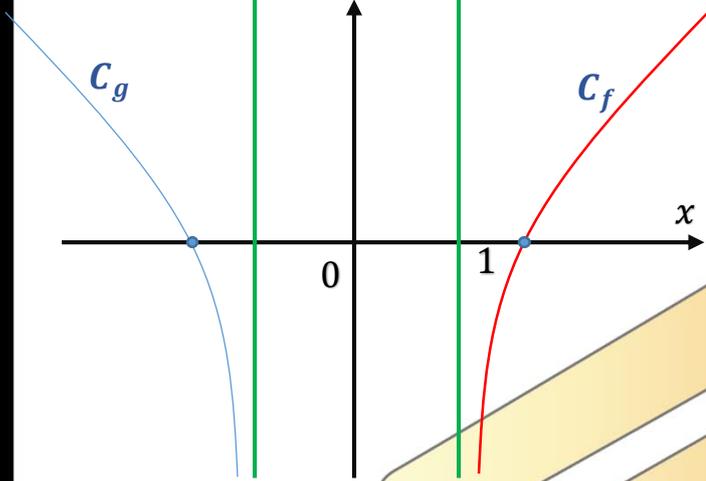
① $g(x) = f(-x)$

C_g ينتج عن C_f وفق تناظر بالنسبة لمحور yy'

بس نغير إشارة x

تناظر بالنسبة للمحور yy'

$x = -1$ $y'y$ $x = 1$



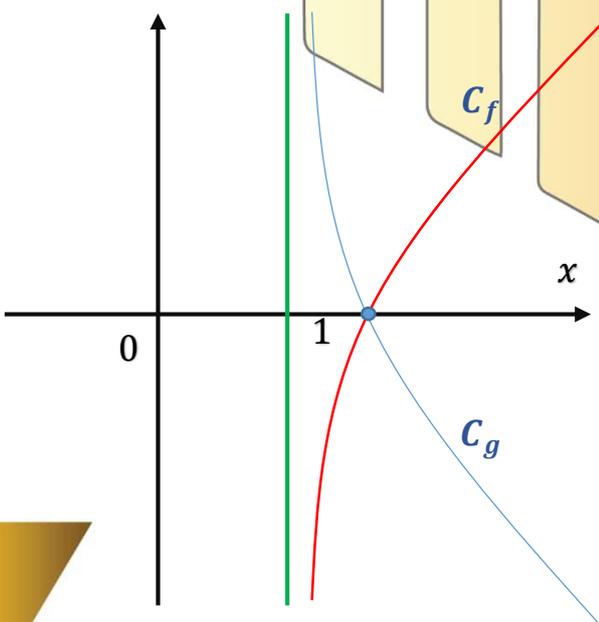
② $g(x) = -f(x)$

C_g ينتج عن C_f وفق تناظر بالنسبة لمحور xx'

بس نغير إشارة y

تناظر بالنسبة للمحور xx'

$y'y$ $x = 1$



② $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{5x}$ $a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2 \ln(1+2x)}{5 \cdot 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{5} \times 1 = \frac{2}{5}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

③ $f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)}$ $a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{2 \ln(1+2x)}{3 \cdot 2x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{2}{3} \times 1 \times 1 = \frac{2}{3}$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

④ $f(x) = x + x(\ln(x))^2$ $a = 0$

الحل:

هناك عدم تعيين $0 \times \infty$

$$f(x) = x + \sqrt{x}^2 (\ln(x))^2 = x + (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}^2))^2$$

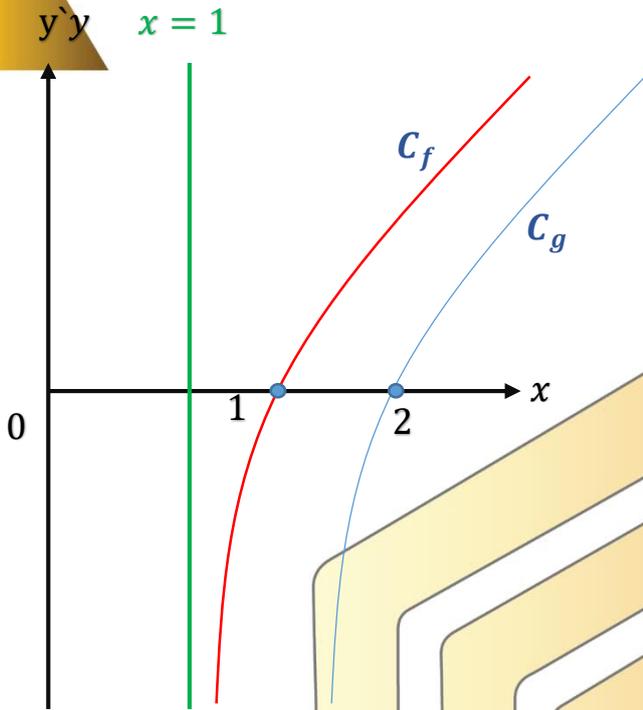
$$\Rightarrow f(x) = x + (2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 + (2 \times 0)^2 = 0$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln(x) = 0$

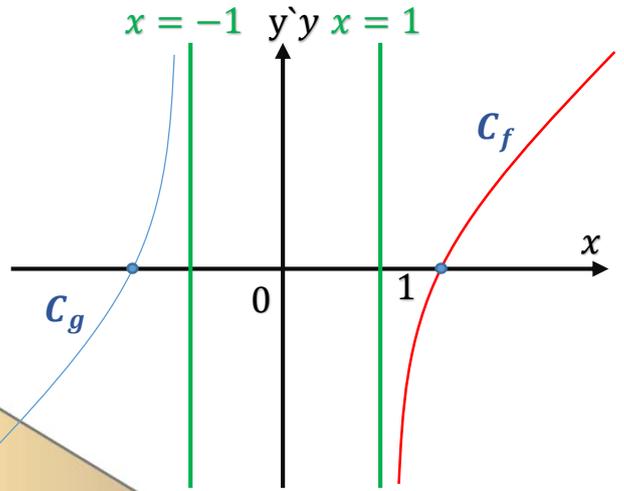
⑤ $g(x) = f(x+k)$

C_g ينتج عن C_f وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(-k, 0)$
 إضافة أو طرح للإكسات
 انسحاب $\vec{u}(-k, 0)$ (عكس الإشارة)



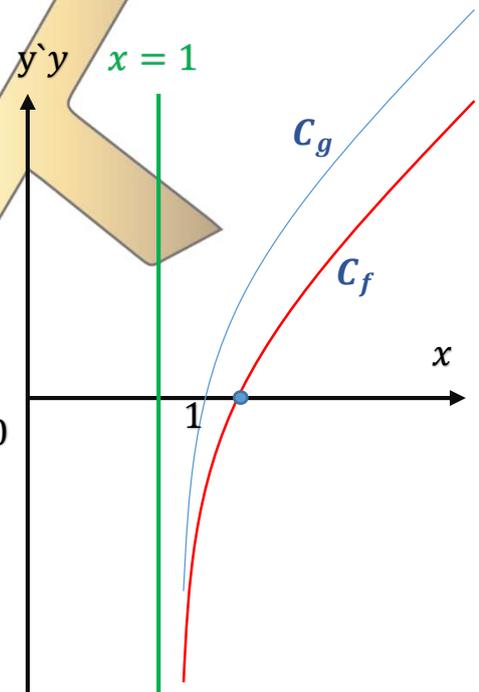
③ $g(x) = -f(-x)$

C_g ينتج عن C_f وفق تناظر بالنسبة للمبدأ O
 بس نغير إشارة x و y
 تناظر بالنسبة للمبدأ O



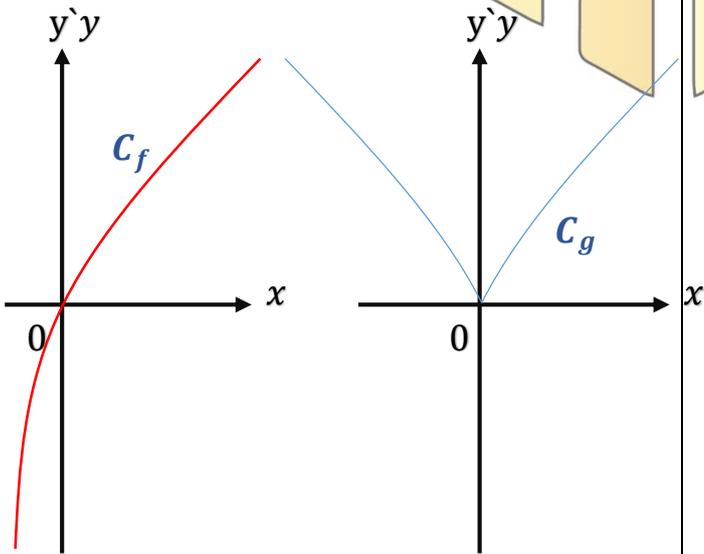
④ $g(x) = f(x) + k$

C_g ينتج عن C_f وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(0, +k)$
 إضافة أو طرح للوايات
 انسحاب $\vec{u}(0, \pm k)$



⑥ $g(x) = f(|x|)$

التابع g تابع زوجي
 نأخذ الجزء من C_f المقابل للمجال $]0, +\infty[$
 ونوجد نظيره بالنسبة للمحور yy'



الحل:

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_d) = \ln(1) = 0$$

$$-\infty \text{ جوار } C \text{ مقارب للخط } d: y = x - 2 \Leftrightarrow$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة:

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$f(x) - y_d = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+2} = 1 \Rightarrow x = x+2 \Rightarrow 0 \neq 2$$

$f(x) - y_d$ لا يندعم، له إشارة واحدة نجدها بتعويض أي قيمة من مجموعة التعريف: $x = -3$

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{-3}{-3+2}\right) = \ln(3) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - y_d > 0$$

C فوق d

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, -2[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -4 + \ln\left(\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$$

$x = -2$ مقارب شاقولي نحو oy^+ و C يقع يسار المقارب.

$$f'(x) = 1 + \frac{1(x+2) - 1x}{(x+2)^2} = 1 + \frac{2}{x(x+2)} > 0$$

x	$-\infty$	α	-2
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$

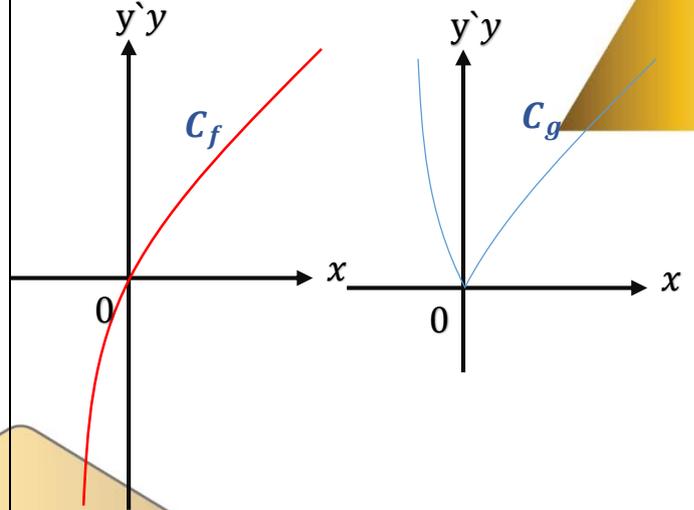
(3) f مستمر ومتزايد تماماً على $]-\infty, -2[$ [مهما كانت $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(]-\infty, -2]) =]-\infty, +\infty[$$

إن للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل وحيد

$$\textcircled{7} g(x) = |f(x)|$$

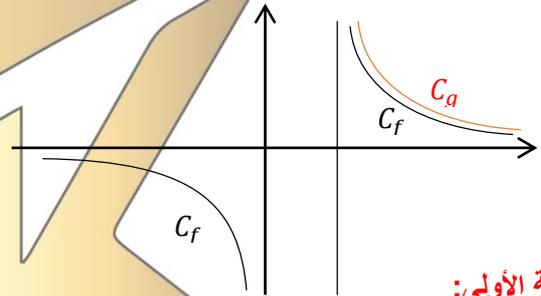
C_g ينتج عن اجتماع نقاط C_f ذات الترتيب الموجبة مع نظائر نقاط C_f ذات الترتيب السالبة بالنسبة لمحور الفواصل.



$$\textcircled{8} g(x) = f(x)$$

حيث $g(x)$ مقصور $f(x)$

C_g ينتج بأخذ نقاط C_f على مجال تعريف التابع $g(x)$



المسألة الأولى:

C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty, -2[$ وفق:

$$f(x) = x - 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

(1) أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب

مانل للخط C للتابع f في جوار $-\infty$ وادرس الوضع النسبي

(2) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.

(3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = \lambda$ حل وحيد حيث $\lambda \in \mathbb{R}$

(4) ارسم المستقيم d والخط البياني C

(5) استنتج رسم التابع g المعرف وفق:

$$g(x) = 2 - x + \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

(6) لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية معرفة على N^* وفق:

$$u_n = f(n) - n + 2$$

ولنضع المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right) \text{ أثبت بالتدريج أن:}$$

$$l_1 = S_{n+1} = \underbrace{u_1 + u_2 + \dots + u_n}_{S_n \text{ من الفرض}} + u_{n+1}$$

$$l_1 = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right)$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)} \times \frac{(n+1)}{(n+3)}\right)$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+3)}\right) = l_2$$

محقة من أجل $n+1$ فهي محقة من أجل أي كانت $n \geq 1$

المسألة الثانية: C_f الخط البياني للتابع f المعروف على R_+^* وفق:

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

(1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

(2) اكتب معادلة المماس T المار من المبدأ للخط C للتابع f

(3) ارسم C_f

(4) ناقش بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

(5) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعروف وفق:

$$g(x) = \frac{1 - x + \ln(x)}{x}$$

الحل:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يمين المقارب.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ حالة عدم تعيين}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{لأن:}$$

$y = 0$ مقارب افقي للخط C في جوار $+\infty$

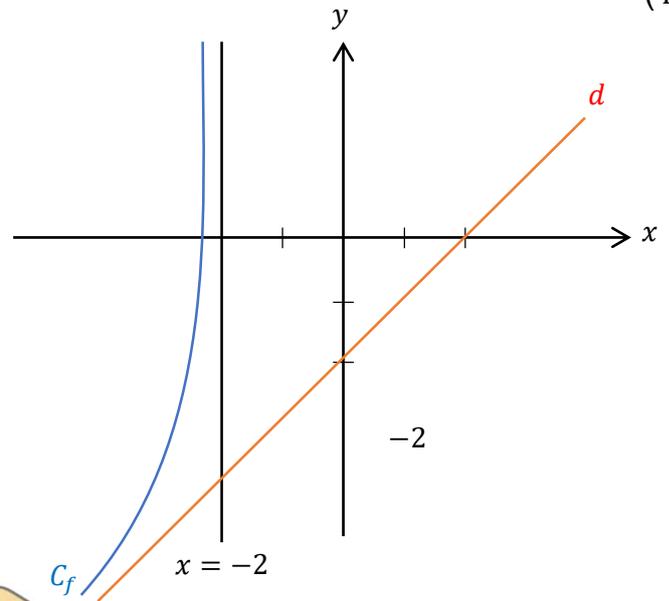
$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'(x) - 1(1 + \ln(x))}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

(4)



$$g(x) = -x + 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)^{-1} \quad (5)$$

$$g(x) = -x + 2 - \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\left(x - 2 + \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow g(x) = -f(x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل xx'

$$u_n = n - 2 + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) - n + 2 = \ln\left(\frac{n}{n+2}\right) \quad (6)$$

نسمي القضية:

$$E(n): S_n = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)$$

نثبت صحة: $E(1)$

$$l_1 = S_1 = u_1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$l_2 = \ln\left(\frac{2}{(1+2)(1+1)}\right) = \ln\left(\frac{2}{6}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2 \quad \text{محقة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$S_n = \ln\left(\frac{2}{(n+2)(n+1)}\right)$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$E(n+1): \underbrace{S_{n+1}}_{l_1} = \ln\left(\frac{2}{\underbrace{(n+3)(n+2)}_{l_2}}\right)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{1-x+\ln(x)}{x} \quad (5)$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{1 + \ln(x) - 1 + x - \ln(x)}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) - 1$$

C_g هو انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(0, -1)$

المسألة الثالثة: C_f و C_g الخطان البيانيان للتابعين f و g المعروفان على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = (x + 1) \ln(x)$$

$$g(x) = \ln(x) + \frac{x + 1}{x}$$

(1) ادرس تغيرات g واستنتج اشارته.

(2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

(3) أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً α ثم تحقق أن $\alpha = 1$

(4) ارسم C_f

(5) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f ومحور xx' والمستقيم $x = e$

(6) استنتج رسم C_h الخط البياني للتابع h المعرف وفق:

$$h(x) = x \ln(x - 1)$$

الحل:

(1) g معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

حالة عدم تعيين $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

$$g(x) = \frac{x \ln(x) + x + 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{0^- + 0^+ + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x - x - 1}{x^2} = \frac{x - 1}{x^2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow g(1) = 2$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		↗	↘

$f(1) = 1$ قيمة حدية كبرى

(2) المماس المار من المبدأ $T: y = mx$... * \leftarrow

$$f(x) = f'(x)x \Rightarrow \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{-\ln(x)}{x^2} x$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{-\ln(x)}{x} \Rightarrow 1 + \ln(x) = -\ln(x)$$

$$\Rightarrow 2 \ln(x) = -1 \Rightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{-\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\frac{1}{e}}$$

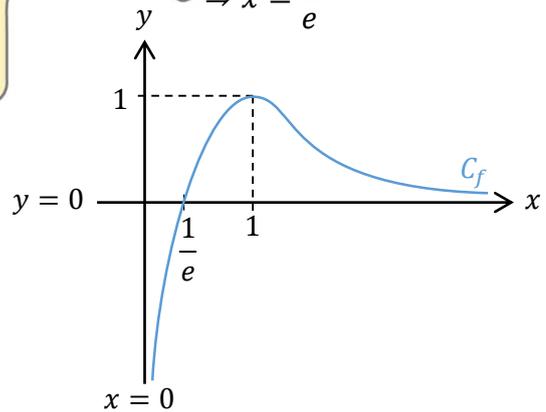
$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{e}{2}$$

نعوض في (*): $T: y = \frac{e}{2}x$

(3) نوجد تقاطع C مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{e}$$



(4) عندما $m \in]-\infty, 0]$ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]0, 1[$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان.

عندما $m = 1$ للمعادلة $f(x) = m$ حل وحيد.

عندما $m \in]1, +\infty[$ ليس للمعادلة $f(x) = m$ أي حل.

$$S = \int_1^e f(x) dx \Rightarrow S = \int_1^e (x+1) \ln(x) dx \quad (5)$$

$$u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x+1 \rightarrow v = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(x) \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \left(\frac{1}{x} \right) dx$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(x) \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 1 \right) dx$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(x) \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} + x \right]_1^e$$

$$\Rightarrow S = \left[\ln(e) \left(\frac{e^2}{2} + e \right) \right] - [0] - \left[\left[\frac{e^2}{4} + e \right] - \left[\frac{1}{4} + 1 \right] \right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{e^2}{2} + e - \frac{e^2}{4} - e + \frac{1}{4} + 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{2e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{e^2 + 5}{4}$$

$$h(x) = x \cdot \ln(x-1) \quad (6)$$

$$f(x) = (x+1) \ln(x)$$

$$\Rightarrow h(x) = f(x-1)$$

C_h ينتج عن انسحاب C_f وفق الشعاع $\vec{u}(1,0)$

x	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$		-	0	+	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	\searrow	2	\nearrow	$+\infty$
إشارة $g(x)$		+	+	+	

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C على يمين المقارب.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + \frac{1}{x}(x+1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x} = g(x)$$

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

x	0	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	+	$+\infty$	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$

(3) f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]0, +\infty[$

$$0 \in f(]0, +\infty[) =]-\infty, +\infty[$$

للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α على المجال $]0, +\infty[$

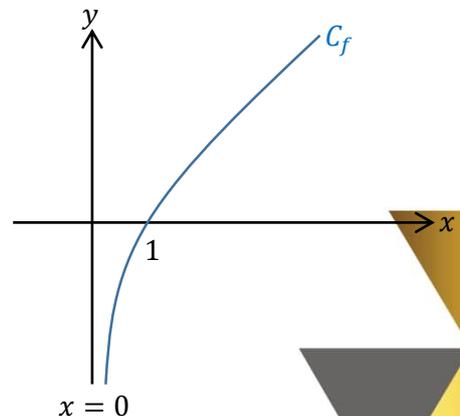
$$\Rightarrow f(1) = (1+1) \ln(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

(4) توجد تقاطع C مع محور الفواصل:

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x+1) \ln(x) = 0$$

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D_f \quad \text{إما:}$$

$$\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \text{أو:}$$



حل ورقة العمل المنزلية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

قيمة حدية عند (1): $f'(1) = 0$

قيمتها (2): $f(1) = 2$

f معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 2a + b - 1$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b - 1 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow a + b - 0 = 2$$

$$\Rightarrow a + b - 2 = 0 \dots \textcircled{2}$$

ب طرح $\textcircled{2}$ من $\textcircled{1}$: $a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

نعوضها في $\textcircled{2}$: $-1 + b - 2 = 0 \Rightarrow b = 3$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x - \ln(x)$$

السؤال الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

هناك عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = +\infty$$

السؤال الثالث:

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ln(1) = 0$$

$\Delta: y = x$ مقارب مائل في للخط C في جوار $+\infty$

(2) لدراسة الوضع النسبي، ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = x+1 \Rightarrow 0 \neq 1 \text{ مستحيلة}$$

$f(x) - y_\Delta$ له إشارة واحدة نوجدتها بتجريب قيمة ولتكن $x = 1$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \Delta \text{ تحت } C$$

ورقة عمل بدوية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

f تابع معرف على R^* وفق:

$$f(x) = ax^2 + bx - \ln(x)$$

عَيّن a و b حتى يقبل C الخط البياني للتابع f قيمة حدية عند الواحد قيمتها (2)

السؤال الثاني:

f التابع المعرف على $]0, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x)$$

احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

السؤال الثالث:

f التابع المعرف على $]0, +\infty[\cup]-\infty, -1[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + x$$

(1) أثبت أن $y = x$ مقارب مائل للخط C للتابع f بجوار $+\infty$

(2) ادرس الوضع النسبي بين C_f و Δ

السؤال الرابع:

C_f الخط البياني للتابع f المعرف على:

$$]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[\text{ وفق:}$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

(1) أثبت أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية لخطه البياني

(2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها على المجال $]1, +\infty[$

(3) ارسم C_f على المجال $]1, +\infty[\cup]-\infty, -1[$

(4) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

السؤال الخامس:

C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]e, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln(x))}$$

(1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

(2) ارسم C_f

(3) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f والمحور x والمستقيمين $x = e^2$ و $x = e^3$

(4) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{1}{x \cdot |1 - \ln(x)|}$$

السؤال الرابع:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ أيًا كان $x \in] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن:

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right)$$

$$\Rightarrow f(-x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

$\Leftarrow f$ تابع فردي، خطّه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C نحو oy^+ و C يقع يمين المقارب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(1) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

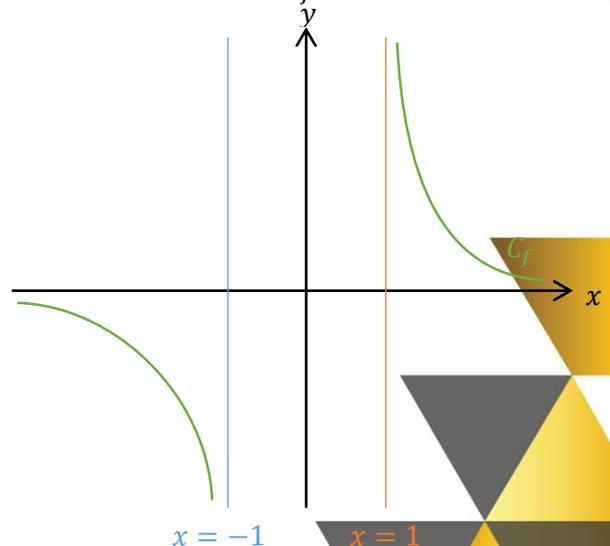
$$f'(x) = \frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$$

$f'(x) < 0$ عندما $x \in D_f$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	\searrow

(3) من الطلب الأول نلاحظ أن C_f متناظر بالنسبة للمبدأ



$$g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \quad (4)$$

$$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D_1 =]-1, +\infty[$$

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D_2 =]1, +\infty[$$

$$D_g = D_1 \cap D_2 =]1, +\infty[$$

g هو مقصور التابع f على المجال $]1, +\infty[$ و C_g هو ذاته C_f على المجال $]1, +\infty[$

السؤال الخامس:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]e, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty$$

$x = e$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع يمين المقارب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

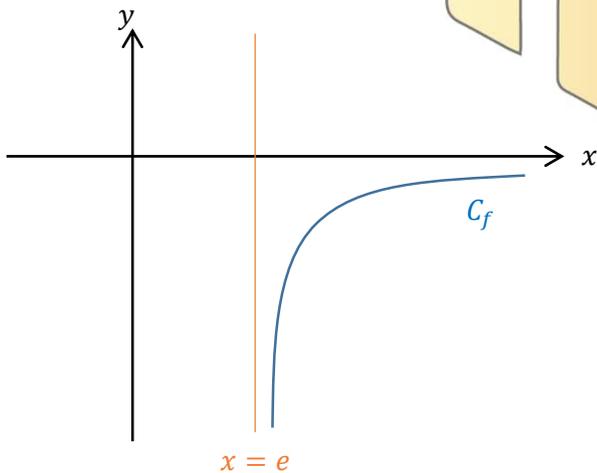
$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{-[1(1 - \ln(x)) + (-\frac{1}{x})x]}{(x(1 - \ln(x)))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-1 + \ln(x) + 1}{(x(1 - \ln(x)))^2} = \frac{\ln(x)}{(x(1 - \ln(x)))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin D_f$$

x	e	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow



السؤال الرابع:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعروف على:

$]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{x}{2}$$

(1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها على المجال $]1, +\infty[$

(2) أثبت أن: $1-x \in D_f$

(b) أثبت أن: $f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}$

ثم استنتج أن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط البياني C_f

(3) أثبت أن $y = -\frac{x}{2}$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ وادرس

الوضع النسبي بين C_f و Δ

(4) ارسم C_f و Δ على المجال $]1, +\infty[$

(5) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعروف وفق:

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - 1$$

السؤال الخامس:

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعروف على $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$$

(1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها.

(2) اكتب معادلة المماس T للخط C_f عند القيمة الحدية.

(3) ارسم C_f و T

(4) احسب مساحة السطح المحصور بين C_f والمحور xx'

والمستقيمين $x = 2$ و $x = e$

(5) استنتج رسم C_g الخط البياني للتابع g المعروف وفق:

$$g(x) = \frac{1 + x \cdot \ln(x)}{x \cdot \ln(x)}$$

$$S = \int_{e^2}^{e^3} -f(x) dx \quad (3)$$

$$\Rightarrow S = \int_{e^2}^{e^3} \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln(x)} dx = [\ln|1 - \ln(x)|]_{e^2}^{e^3}$$

$$\Rightarrow S = [\ln|1 - \ln(e^3)|] - [\ln|1 - \ln(e^2)|]$$

$$\Rightarrow S = \ln|1 - 3| - \ln|1 - 2| = \ln|-2| - \ln|-1|$$

$$\Rightarrow S = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

$$g(x) = \frac{1}{x|1 - \ln(x)|} \quad (4)$$

$$x \in]e, +\infty[\Rightarrow |x| = x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{|1|}{|x| \cdot |1 - \ln(x)|} = \left| \frac{1}{x(1 - \ln(x))} \right|$$

$$\Rightarrow g(x) = |f(x)|$$

C_g ينتج بالحفاظ على نقاط C_f ذات الترتيب الموجبة وأخذ نظائر

نقاط C_f ذات الترتيب السالبة بالنسبة لمحور xx'

ورقة عمل منزلية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

ليكن لدينا التابع f المعروف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \ln(x+1)}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \neq 0 \\ m+2 & ; x = 0 \end{cases}$$

عَيّن قيمة m التي يكون عندها التابع f مستمراً على R

السؤال الثاني:

أثبت أنه مهما كان $x \geq 0$ كان:

$$\ln(x) \leq 2(\sqrt{x} - 1)$$

السؤال الثالث:

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحققان:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$$

احسب $\frac{a}{b}$

السؤال الثالث:

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}$$

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\ln(a \times b)}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(a \times b)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln(\sqrt{ab})$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

السؤال الرابع:

f معرف ومسنم واشتقاقي على $[1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يمين المقارب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{2x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x=2 \in D_f \text{ مقبول}$$

$$\Rightarrow x=-1 \notin D_f \text{ مرفوض}$$

$$f(2) = -1 - \ln(2)$$

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$			$-1 - \ln(2)$
		\nearrow	\searrow
	$-\infty$		$-\infty$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التابع اللوغاريتمي

السؤال الأول:

حتى يكون التابع مستمراً على R يجب أن يكون مستمراً عند الصفر، أي أنه يجب أن يحقق:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = m + 2$$

عند 0 هناك عدم تعيين من الشكل $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln(x+1) (\sqrt{x^2+1} + 1)}{(\sqrt{x^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+1} + 1)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot \ln(x+1) (\sqrt{x^2+1} + 1)}{x^2 + 1 - 1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x \cdot \ln(x+1) (\sqrt{x^2+1} + 1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \cdot (\sqrt{x^2+1} + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \times 2 = 2$$

$$\Rightarrow m + 2 = 2 \Rightarrow m = 0$$

السؤال الثاني:

$$\ln(x) - 2(\sqrt{x} - 1) \leq 0$$

$$f(x) = \ln(x) - 2(\sqrt{x} - 1) \quad \text{نفرض:}$$

$$f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x} + 2$$

تصبح المتراجحة: $f(x) \leq 0$

ندرس إطراد التابع f على المجال $]0, +\infty[$

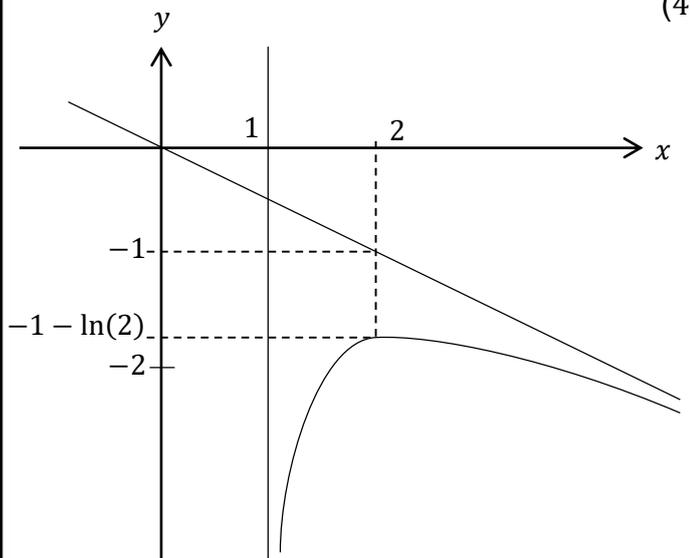
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} + 2 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
			-
$f(x)$		\nearrow	0
			\searrow
$f(x) \leq 0$		محقة	محقة

مهما كانت $x > 0$ فإن $f(x) \leq 0$



(4)

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - 1 \quad (5)$$

$$f(x+2) = \ln\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right) - \frac{(x+2)}{2}$$

$$\Rightarrow f(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x+2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x+2)$$

$\vec{u}(-2,0)$ بنسبة C_f وبنسبة C_g عن C_f وبنسبة C_g

$$x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad (a \ 2)$$

$$\Rightarrow -x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow 1-x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\quad \text{محقة}$$

$$\underbrace{f(1-x)}_{l_1} + \underbrace{f(x)}_{l_2} = -\frac{1}{2} \quad (b)$$

$$l_1 = \ln\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right) - \frac{1-x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{-1+x-x}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{-x}{(1-x)} \times \frac{(x-1)}{x}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l_1 = \ln\left(\frac{-1}{-1}\right) - \frac{1}{2} = \ln(1) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = l_2 \quad \text{محقة}$$

$$A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$2x_0 - x = 2\left(\frac{1}{2}\right) - x = 1 - x \in D_f \quad \text{محقة}$$

$$f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$$

$$\Rightarrow f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{محقة}$$

ومنه فإن النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للتابع f

$$f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_\Delta) = \ln(1) = 0$$

$+\infty$ مقارب مائل للخط C للتابع f في جوار $+\infty$

لدراسة الوضع النسبي، ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \Rightarrow x-1 = x$$

$$\Rightarrow -1 = 0 \quad \text{مستحيلة}$$

$f(x) - y_\Delta \Leftarrow$ لا يندم له إشارة واحدة نعرفها بتجريب قيمة ولتكن $x = 2$

$$\ln\left(\frac{2-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - y_\Delta < 0$$

C تحت Δ

السؤال الخامس:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln(x) = 0^-$

$x = 0$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع يمين المقارب.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{1(0^-)} = -\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^- و C يقع يسار المقارب.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{1(0^+)} = +\infty$$

$x = 1$ مقارب شاقولي نحو oy^+ و C يقع يمين المقارب.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = \frac{-\left[1 \times \ln(x) + \left(\frac{1}{x}\right)(x)\right]}{(x \cdot \ln(x))^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-(\ln(x) + 1)}{(x \cdot \ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -(\ln(x) + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}(-1)} = -e$$

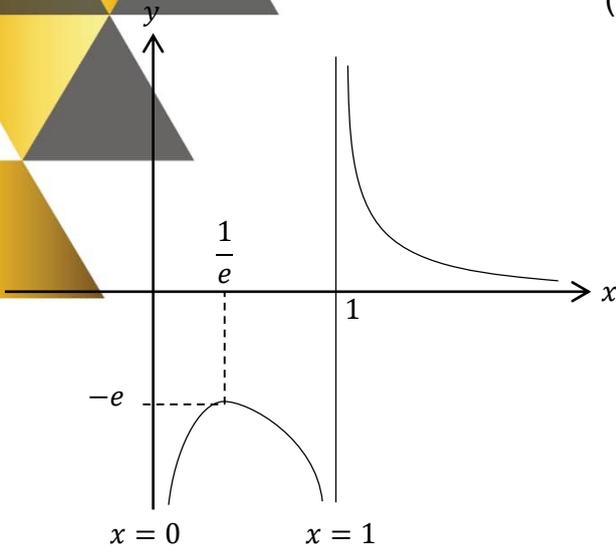
x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+ 0 -		-
$f(x)$	$-\infty$	$-e$	$+\infty$	0

قيمة حدية كبرى $f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$

(2) عند القيمة الحدية (مماس أفقي): $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$

$$T: y = y_0 \Rightarrow T: y = -e$$

(3)



$$S = \int_2^e f(x) dx \quad (4)$$

$$\Rightarrow S = \int_2^e \frac{1}{x \ln(x)} dx \Rightarrow S = [\ln(\ln(x))]_2^e$$

$$\Rightarrow S = [\ln(\ln(e))] - [\ln(\ln(2))]$$

$$\Rightarrow S = \ln(1) - \ln(\ln(2))$$

$$\Rightarrow S = 0 - \ln(\ln(2)) = -\ln(\ln(2))$$

$$g(x) = \frac{1+x \cdot \ln(x)}{x \cdot \ln(x)} \quad (5)$$

$$g(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)} + \frac{x \cdot \ln(x)}{x \cdot \ln(x)} = f(x) + 1$$

C_g ينتج عن C_f وفق انسحاب شعاعه $\vec{u}(0,1)$

التابع الأسّي

نهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^x = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

الإشتقاق

$$f(x) = e^{g(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

متراحات

$$\textcircled{1} e^{f(x)} \leq e^{g(x)}$$

1) توجد مجموعة التعريف:

$$D = D_f \cap D_g$$

2) نأخذ m للطرفين:

$$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

3) يحل المتراحة نحصل على مجال I ويكون حل المتراحة المقبول هو:

$$S = D \cap I$$

$$\textcircled{2} e^{f(x)} \geq a$$

إذا كان a موجب، يمكن حل المتراحة بأخذ m للطرفين

إذا كان a سالب، المتراحة مستحيلة الحل في R

$$\textcircled{3} e^{f(x)} \leq a$$

إذا كان a موجب، يمكن حل المتراحة بأخذ m للطرفين

إذا كان a سالب، المتراحة مستحيلة الحل في R

$$\textcircled{4} ae^{2x} + be^x + c \leq 0$$

تحل باستخدام التحليل المباشر أو المميز Δ وجدول إشارات

معادلات

$$\textcircled{1} e^{f(x)} = e^{g(x)}$$

1) توجد مجموعة التعريف: $D = D_f \cap D_g$

$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$

3) نحل المعادلة ونقل أو نرفض من مجموعة التعريف.

$$\textcircled{2} e^{f(x)} = a$$

1) توجد مجموعة تعريف D_f حيث أن: $0 < a$ موجب

2) نأخذ m للطرفين:

$$f(x) = \ln(a)$$

3) نحل المعادلة ونقل أو نرفض من مجموعة التعريف.

$$\textcircled{3} ae^{2x} + be^x + c = 0$$

تحليل مباشر أو عن طريق المحال Δ

حالة خاصة:

$$ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0$$

نضرب بـ (e^{2x}) فنصبح:

$$a + be^x + ce^{2x} = 0$$

نعود إلى الحالة $\textcircled{3}$

$\textcircled{4}$ حل معادلة بمجهولين:

1) حذف بالجمع أو حذف بالتعويض

2) يمكن استخدام خواص التابع الأسّي في بعض الحالات.

شكله

$$f(x) = e^{g(x)}$$

أو: $f(x) = \exp(g(x))$

مجموعة تعريفه هي D_g

خواصه

$$a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow e^a \geq e^b$$

$$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$$

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$(e^a)^n = e^{an}$$

$$\sqrt[n]{e^k} = e^{\frac{k}{n}}$$

$$e^{\ln(a)} = a$$

$$\ln(e^a) = a$$

$$\ln(e^a) = a$$

تنمة مخطط التابع الأسّي

المعادلات التفاضلية

من الشكل:

$$y' = ay + b$$

حلها: $f(x) = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$

من الشكل:

$$y' = ay$$

حلها: $f(x) = k \cdot e^{ax}$

دراسة تابع a^x

حل المعادلات والمترجمات

بنفس اسلوب حل معادلات ومترجمات التابع الأسّي e^x

دراسة التغيرات $a >$

$$f(x) = a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

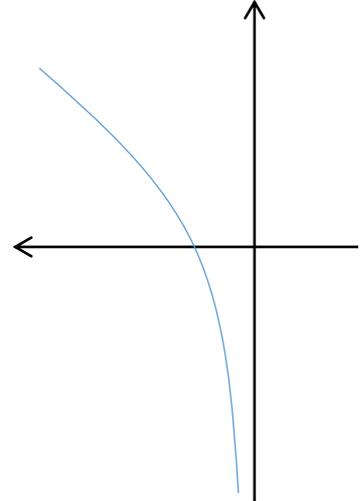
f معرف ومستمر واشتقاقي على R

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)} > 0$$

x	$-\infty$	$+$	$+\infty$
$f'(x)$	\square	\square	\square
$f(x)$	\square	\square	\square



ملاحظة:

نوجد k عن طريق شرط معطى بالشكل:

① يمر بالنقطة $A(x_0, f(x_0))$

② يقبل مماساً ميله m في النقطة x

$$\begin{cases} e^x - \frac{1}{e}e^y = 1 \dots (1) \\ e^x + \frac{1}{2}e^y = 2 + \frac{e}{2} \dots (2) \end{cases}$$

الحل:

نضرب المعادلة (1) بالعدد (e)

نضرب المعادلة (2) بالعدد (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} e \cdot e^x - e^y = e \dots (1) \\ 2e^x + e^y = 4 + e \dots (2) \end{cases}$$

بالجمع: $e \cdot e^x + 2e^x = 4 + 2e$

$$\Rightarrow e^x(e + 2) = 2(2 + e) \Rightarrow e^x = 2$$

$$\Rightarrow x = \ln(2)$$

نعوض في (2): $2(2) + e^y = 4 + e \Rightarrow e^y = e$

$$\Rightarrow y = 1$$

الحل المشترك لجملة المعادلتين: $(\ln(2), 1)$

$$a^x = e^{\ln(a^x)} \Rightarrow a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$3^x = e^{x \cdot \ln(3)}$$

حل المتراجحة الآتية:

$$9^x + 3^{x+1} - 4 \leq 0$$

$$(3^2)^x + 3^1 \cdot 3^x - 4 \leq 0$$

$$3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (3^x + 4)(3^x - 1) = 0$$

إما: $3^x = -4$ مستحيلة

أو: $3^x = 1 \Rightarrow \ln(3^x) = \ln(1)$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(3) = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$		$-$	0
$3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 \leq 0$		محقة	0 غير محقة

$$S =]-\infty, 0]$$

$$(1) e^{3-x} = 1$$

الحل:

نأخذ لوغاريتم للطرفين:

$$\ln(e^{3-x}) = \ln(1) \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$(2) e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$$

الحل:

نضرب بـ (e^x) : $e^{2x} + e = (1 + e)e^x$

$$e^{2x} - (1 + e)e^x + e = 0$$

$$(e^x - e)(e^x - 1) = 0$$

إما: $e^x = e \Rightarrow x = 1$

أو: $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$$(3) e^x + 4e^{-x} \leq 5$$

الحل:

نضرب بـ (e^x) :

$$e^{2x} + 4 \leq 5e^x \Rightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$$

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \Rightarrow (e^x - 4)(e^x - 1) = 0$$

إما: $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4) \Rightarrow x = \ln(2^2)$

$$\Rightarrow x = 2 \ln(2)$$

أو: $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$2 \ln(2)$	$+\infty$
$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$		$+$	0	$-$
$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$		محقة	0 غير محقة	غير محقة

$$\Rightarrow x \in [0, 2 \ln(2)]$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{x} \quad a = 0$$

الحل:

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = 3 \times \frac{e^{3x} - 1}{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \times 1 = 3$$

النهاية المميزة:

الحصول على 1^∞

مثال: جد نهاية f عند a :

$$\textcircled{1} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad a = +\infty$$

الحل:

هناك عدم تعيين 1^∞

$$f(x) = e^{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

لازم يكون عنا \square شغلة $(1+x)$ نزرع e و \ln

$$\textcircled{2} f(x) = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} \quad a = +\infty$$

الحل:

$$\frac{x-1 \sqrt{x+3}}{x-1} \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} = 1 + \frac{4}{x-1}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = e^{\ln\left(1 + \frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}} = e^{\frac{x}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{4}{x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{x-1} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x-1}\right)}{\frac{4}{x-1}}} = e^{\frac{4x}{2x-2} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{4}{x-1}\right)}{\frac{4}{x-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{2 \times 1} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{لأن:}$$

المعادلات التفاضلية:

$y' = ay + b$	$y' = ay$
$f(x) = k \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$	$f(x) = k \cdot e^{ax}$

حل المعادلة التفاضلية:

$$\textcircled{1} 2y + 3y' - 1 = 0$$

الحل:

$$y' = -\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}$$

$$f(x) = ke^{-\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = ke^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{2} 2y' + 3y = 0$$

والخط البياني C للحل يمر بالنقطة $A(\ln(4), 1)$

الحل:

$$y' = -\frac{3}{2}y$$

$$f(x) = ke^{-\frac{3}{2}x}$$

$$A(\ln(4), 1) \in C_f$$

$$f(\ln(4)) = 1 \Rightarrow k \cdot e^{-\frac{3}{2}\ln(4)} = 1$$

$$\Rightarrow k \cdot e^{\frac{-3 \times 2 \ln(2)}{2}} = 1 \Rightarrow k \cdot e^{-3 \ln(2)} = 1$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{e^{-3 \ln(2)}} = e^{3 \ln(2)} \Rightarrow k = e^{\ln(2^3)}$$

$$\Rightarrow k = e^{\ln(8)} \Rightarrow k = 8$$

$$\Rightarrow f(x) = 8 \cdot e^{-\frac{3}{2}x}$$

مثال: جد نهاية f عند a :

$$\textcircled{1} f(x) = \ln(x) - e^x \quad a = +\infty$$

الحل:

هناك عدم تعيين $(\infty - \infty)$

$$f(x) = x \cdot \left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{e^x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty(0 - \infty) = -\infty$$

مسألة ①: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرفة على R بالصيغة:
 $f: x \rightarrow x \cdot e^{-x}$ والمطلوب:

- احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ واحسب $f'(x)$ وادرس إطراد التابع f ونظم جدولاً بتغيراته وعين قمته الحدية ثم ارسم C_f .
- احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 0$
- لتكن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة تدريجياً كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

(a) أثبت أن $0 < u_n \leq 1$ وذلك مهما كان العدد الطبيعي n .

(b) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة، ثم ادرس تقاربها واحسب نهايتها.

الحل:

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \quad (1)$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $+\infty \times 0$

$$f(x) = \frac{x}{e^x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

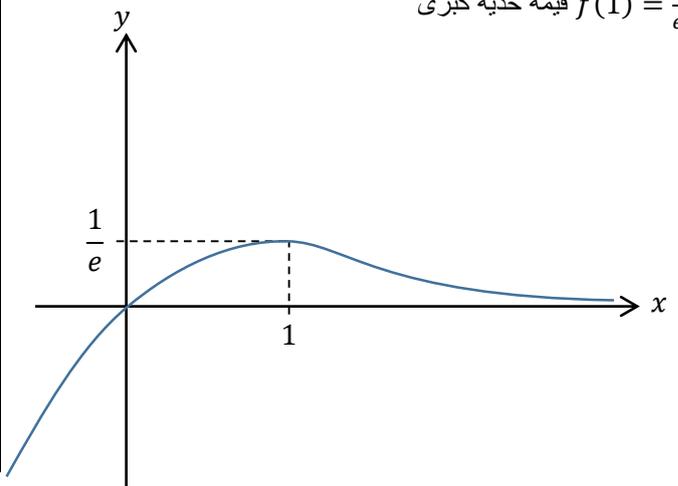
$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (-e^{-x}) \cdot x = (1-x) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة حدية كبرى



$$S = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x} dx \quad (2)$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = [-x \cdot e^{-x}]_0^1 - [e^{-x}]_0^1$$

$$\Rightarrow S = (-1 \times e^{-1} - 0) - (e^{-1} - 1)$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \Rightarrow S = 1 - \frac{2}{e}$$

(3)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$$

(a) نسمي القضية $E(n)$:

$$E(n): 0 < u_n \leq 1$$

نثبت صحة $E(0)$:

$$E(0): 0 < u_0 \leq 1 \Rightarrow 0 < 1 \leq 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n): 0 < u_n \leq 1 \dots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$E(n+1): 0 < u_{n+1} \leq 1$$

$$0 < u_n \cdot e^{-u_n} \leq 1$$

$$0 < u_n \leq 1 \text{ نبدأ من } *$$

$$f(0) < f(u_n) \leq f(1) \text{ بما أن } f \text{ متزايد:}$$

$$0 < f(u_n) \leq \frac{1}{e} \leq 1$$

محققة من أجل $(n+1)$ فهي محققة مهما كان n عدد طبيعي

(b) نثبت بالتدريج صحة القضية:

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n$$

نثبت صحة $E(0)$:

$$u_1 \leq u_0 \Rightarrow u_0 e^{-u_0} \leq 1$$

$$1 \cdot e^{-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \leq 1 \text{ محققة}$$

نفرض صحة $E(n)$:

$$E(n): u_{n+1} \leq u_n \dots *$$

نثبت صحة $E(n+1)$:

$$u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$$u_{n+1} \cdot e^{-u_{n+1}} \leq u_n \cdot e^{-u_n}$$

نبدأ من *:

(3) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty - 1 + 4 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - 1 + 0 = +\infty$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x + 1)^2 - 4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \geq 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{4}{1 + 1} = 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	1	\nearrow
$f(x) - y_T$ $= f(x) - 1$	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة: $f(x) - y_T$	$-$	0	$+$
وضع C مع T	C تحت T	نقطة تقاطع: $(0,1)$	C وفق T

(4) تقاطع C مع yy' $\Leftrightarrow x = 0$

من الجدول: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$

مماس أفقي: $y = y_0$

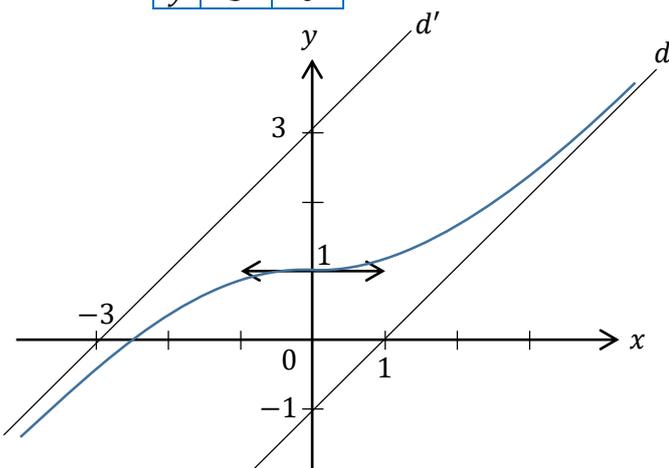
$$T: y = 1$$

x	0	1
y	-1	0

(5) لرسم $d: y = x - 1$

x	0	-3
y	3	0

لرسم $d': y = x + 3$



$$u_{n+1} \leq u_n$$

بما أن f متزايد: $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$$u_{n+1} \cdot e^{-u_{n+1}} \leq u_n \cdot e^{-u_n}$$

محقة من أجل $(n + 1)$ فهي محقة مهما كان n عدد طبيعي

u_n متناقصة \Leftarrow

وهي محدودة من الأدنى بالعدد 0 فهي متقاربة

حساب النهاية:

$$f(x) = x \Rightarrow x \cdot e^{-x} = x \Rightarrow e^{-x} = 1$$

$$\Rightarrow \ln(e^{-x}) = \ln(1) \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

مسألة (2): C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

(1) أثبت أن: $d: y = x - 1$ مقارب عند $+\infty$ وادرس وضع C مع d

(2) أثبت أن: $d': y = x + 3$ مقارب عند $-\infty$ وادرس وضع C مع d'

(3) ادرس تغيرات f

(4) اكتب معادلة المماس T للخط C في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب.

(5) ادرس وضع C مع T ثم ارسم d و d' و C و T .

الحل:

$$(1) f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y_d) = \frac{4}{+\infty} = 0$$

$d: y = x - 1$ مقارب عند $+\infty$

ونلاحظ أن: $f(x) - y_d > 0 \Leftrightarrow C$ فوق d

$$(2) f(x) - y_{d'} = \frac{4}{e^x + 1} - 4 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y_{d'}) = \frac{4}{0 + 1} - 4 = 0$$

$d': y = x + 3$ مقارب مائل عند $-\infty$

ونلاحظ أن: $f(x) - y_{d'} < 0 \Leftrightarrow C$ تحت d'

مسألة (3): C هو الخط للتابع f المعرفة على $R \setminus \{0\}$ وفق:

$$f(x) = e^x + \ln|x|$$

وليعين g التابع المعرفة على R وفق:

$$g(x) = xe^x + 1$$

(1) ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\frac{g(x)}{x}$ على $R \setminus \{0\}$

(2) ادرس تغيرات f وارسم C_f

الحل:

(1) g معرف ومستمر واشتقاقي على $] -\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty(+\infty) + 1 = +\infty$$

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$g(-1) = -1 \cdot e^{-1} + 1 = -\frac{1}{e} + 1 \approx 0.7$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	\searrow	\nearrow
		$-\frac{1}{e} + 1$	
			\nearrow

دراسة إشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g(x)$	$+$	$+$	$+$
إشارة x	$-$	0	$+$
إشارة $\frac{g(x)}{x}$	$-$	$ $	$+$

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - \infty = -\infty$$

$x = 0$ مفارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يسار المقارب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty$$

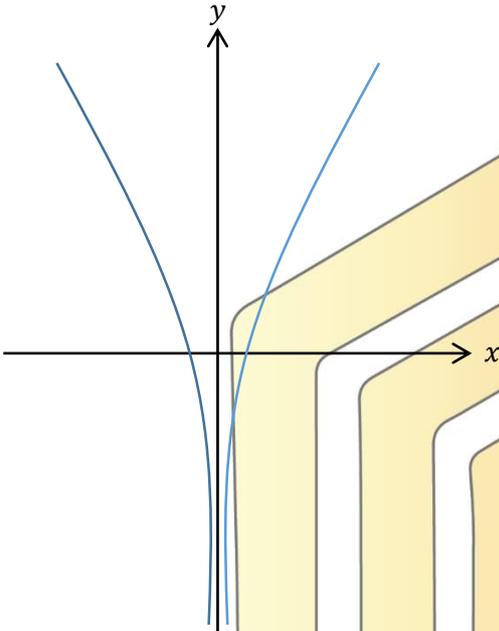
$x = 0$ مفارب شاقولي نحو oy^- و C يقع على يمين المقارب

$] -\infty, 0[$	$] 0, +\infty[$
$f(x) = e^x + \ln(-x)$	$f(x) = e^x + \ln(x)$
$f'(x) = e^x - \frac{1}{-x}$	$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x + 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $\frac{g(x)}{x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	\nearrow
		$-\infty$	



مسألة ④: ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = x \cdot 2^{-x}$$

ادرس تغيرات التابع f ثم ارسم C_f

الحل:

التابع يكافئ:

$$f(x) = x e^{\ln(2^{-x})} = x \cdot e^{-x \ln(2)}$$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

حالة عدم تعيين $(+\infty \times 0)$

$$f(x) = \frac{x}{e^{x \ln(2)}} = \frac{1}{\ln(2)} \cdot \frac{x \ln(2)}{e^{x \ln(2)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln(2)} \times 0 = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f'(x) = 1(e^{-x \ln(2)}) + (-\ln(2) e^{-x \ln(2)})x$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x \ln(2)} - x \ln(2) e^{-x \ln(2)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-x \ln(2)}(1 - x \ln(2))$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x \ln(2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\ln(2)} \approx 1,4$$

$$f\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \cdot e^{-\frac{1}{\ln(2)} \times \ln(2)}$$

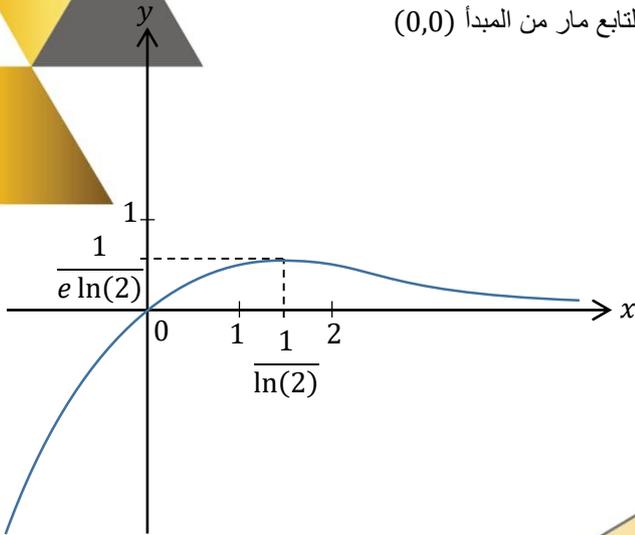
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)} e^{-1} = \frac{1}{e \ln(2)} \approx 0,5$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln(2)}$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	$\frac{1}{e \ln(2)}$	\searrow	0

لحساب نقطة التقاطع مع محور الترتيب:

$$f(0) = 0 e^{-0 \ln(2)} = 0$$

التابع مار من المبدأ $(0,0)$



حل ورقة العمل اليدوية لبحث التابع الأسّي

السؤال الأول:

$$\textcircled{1} e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

$$e^{x+1}(e^{2x} + 4e^x - 5) = 0$$

إما: e^{x+1} مستحيلة $\neq 0$

أو: $e^{2x} + 4e^x - 5 = 0$

$$\Rightarrow (e^x + 5)(e^x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{مستحيلة } e^x \neq -5 \\ e^x = 1 \Rightarrow x = 0 \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} 2^{x+1} \geq 3^x$$

بأخذ لوغاريتم:

$$\ln(2^{x+1}) \geq \ln(3^x) \Rightarrow (x+1)\ln(2) \geq x \cdot \ln(3)$$

$$x \cdot \ln(2) + \ln(2) \geq x \cdot \ln(3)$$

$$\Rightarrow x \cdot \ln(2) - x \cdot \ln(3) \geq -\ln(2)$$

$$\Rightarrow x(\ln(2) - \ln(3)) \geq -\ln(2)$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{-\ln(2)}{\ln(2) - \ln(3)} \Rightarrow S = \left] -\infty, \frac{-\ln(2)}{\ln(2) - \ln(3)} \right]$$

$$\textcircled{3} 4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$$

$$2^{2x} + 2 \times 2^x - 3 = 0 \Rightarrow (2^x + 3)(2^x - 1) = 0$$

إما: $2^x \neq -3$ مستحيلة

أو: $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

السؤال الثاني:

$$\begin{cases} 3^x \times 3^y = 9 \dots \textcircled{1} \\ 3^x + 3^y = 10 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

من $\textcircled{1}$: $3^x = \frac{9}{3^y}$

نعوّض في $\textcircled{2}$: $\frac{9}{3^y} + 3^y = 10 \Rightarrow 9 + 3^{2y} = 10 \times 3^y$

$$\Rightarrow 3^{2y} - 10 \times 3^y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (3^y - 9)(3^y - 1) = 0$$

إما: $3^y = 1 \Rightarrow y = 0$

نعوّض في $\textcircled{1}$: $3^x \times 3^0 = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$

$$\Rightarrow x = 2$$

أو: $3^y = 9 \Rightarrow 3^y = 3^2 \Rightarrow y = 2$

نعوّض في $\textcircled{1}$: $3^x \times 3^2 = 9 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow (0, 2), (2, 0)$$

ورقة عمل يدوية في بحث التابع الأسّي

السؤال الأول:

حل المعادلات والمراجعات الآتية:

$$\textcircled{1} e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$$

$$\textcircled{2} 2^{x+1} \geq 3^x$$

$$\textcircled{3} 4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$$

السؤال الثاني:

حل في جملة R المعادلتين:

$$\begin{cases} 3^x \times 3^y = 9 \\ 3^x + 3^y = 10 \end{cases}$$

السؤال الثالث:

أوجد مشتق التابع: $f(x) = x^x$

السؤال الرابع:

احسب نهاية كل تابع عند a :

$$\textcircled{1} f(x) = \frac{(x+1)^x}{x-1} \quad a = +\infty$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \quad a = 0$$

السؤال الخامس:

ليكن لدينا التابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(1) أثبت أن f فردي وما الصفة التناظرية لخطّه البياني.

(2) ادرس تغيرات f .

(3) أوجد معادلة المماس T في المبدأ وادرس الوضع النسبي بين T و C

(4) ارسم T و C

(5) احسب مساحة السطح المحصور بين T و C والمستقيمين $x = \ln(2)$ و $x = 0$.

(6) أثبت أن التابع f هو حل للمعادلة التفاضلية: $y - y' = -\frac{1}{e^x}$

السؤال السادس:

ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على R وفق:

$$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$$

(1) a أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف وبيّن ما له من مقاربات.

(2) أثبت أن: $f(x) = -x + \ln(e^x + 1)$

(3) استنتج معادلة المقارب المائل عند $-\infty$

(4) ادرس تغيرات التابع ثم ارسم خطّه البياني.

(5) نرسم إلى نقاط من C التي فواصلها 0 و 1 و -1 بالرموز A و B و D

أثبت أن مماس C في A يوازي (BD)

السؤال الثالث:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		\nearrow

(3) مماس في المبدأ: $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0)$$

$$\Rightarrow T: y = x$$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $f(x) - y_T$

$$f(x) - y_T = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

قاعدة:

لدراسة إشارة مقدار يحوي تابعين من طبيعتين مختلفتين:

1- نسمي هذا المقدار تابع $h(x)$.

2- ندرس إطراد التابع $h(x)$ (إشارة $h'(x)$).

3- ننظم جدول إطراد لـ $h(x)$.

4- نستنتج إشارة $h(x)$ من الجدول وهي ذاتها إشارة $f(x) - y_T$

$$h(x) = f(x) - y_T = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$$

h اشتقاقي على R

$$h'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1 = 0$$

$$e^x + e^{-x} - 2 = 0 \quad \text{نضرب بـ (2):}$$

$$e^{2x} + 1 - 2e^x = 0 \quad \text{نضرب بـ } (e^x):$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \Rightarrow (e^x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$h(0) = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	+
$h(x)$		\nearrow	\nearrow
إشارة h	-	-	+
الوضع النسبي	تحت C T		فوق C T

نقطة التماس: $(0,0)$

$$f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} \Rightarrow f(x) = e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$f'(x) = [x \cdot \ln(x)]' e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \left[1 \cdot \ln(x) + \frac{1}{x} \times x \right] e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\ln(x) + 1) e^{x \cdot \ln(x)}$$

السؤال الرابع:

$$\textcircled{1} f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x \quad a = +\infty$$

هناك عدم تعيين 1^∞

$$\frac{1}{x-1} \sqrt[x+1]{x+1} \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^x = e^{\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x} = e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{x \times \frac{2}{x-1} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)}{\frac{2}{x-1}}} = e^{\frac{2x}{x-1} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)}{\frac{2}{x-1}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{2 \times 1} = e^2$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)} \quad a = 0$$

هناك عدم تعيين $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \times 1 = 1$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

السؤال الخامس:

(1) أيًا كانت $[-\infty, +\infty[$ كان $x \in]-\infty, +\infty[$ محقق.

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

f تابع فردي وخطّه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ.

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $] -\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}(0 - \infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(+\infty - 0) = +\infty$$

$$\Rightarrow f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$$

(c) بفرض $d: y = -x$ هو المقارب المائل عند $-\infty$

$$f(x) - y_d = \ln(1 + e^x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y_d = \ln(1) = 0$$

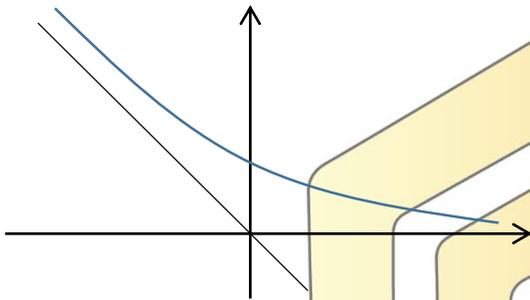
إذاً $d: y = -x$ مقارب مائل في جوار $-\infty$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} < 0 \quad (2)$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	\searrow

لحساب نقطة تقاطع C_f مع محور الترتيب:

$$f(0) = \ln(1 + 1) = \ln(2)$$



$$A(0, f(0)) , B(1, f(1)) , C(-1, f(-1))$$

$$f(0) = \ln(2) \Rightarrow A(0, \ln(2))$$

$$f(1) = \ln(e^{-1} + 1) \Rightarrow B(1, \ln(e^{-1} + 1))$$

$$f(-1) = \ln(e + 1) \Rightarrow C(-1, \ln(e + 1))$$

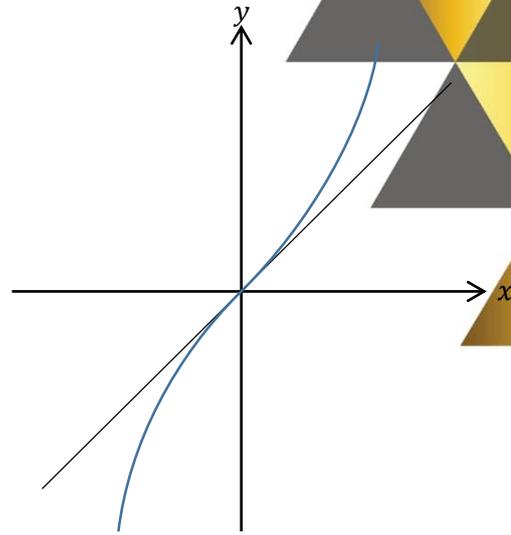
$$m_T = f'(0) = \frac{-e^0}{e^0 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{\ln(e + 1) - \ln(e^{-1} + 1)}{-1 - 1}$$

$$\Rightarrow m_{BD} = \frac{\ln\left(\frac{e+1}{e^{-1}+1}\right)}{-2} = \frac{\ln\left(\frac{e+1}{\frac{1}{e}+1}\right)}{-2} = \frac{\ln\left(\frac{e+1}{e}\right)}{-2}$$

$$\Rightarrow m_{BD} = \frac{\ln\left((e+1) \times \frac{e}{(e+1)}\right)}{-2} = \frac{\ln(e)}{-2} = -\frac{1}{2} = m_T$$

\Leftarrow T يوازي BD



$$S = \int_0^{\ln(2)} (f(x) - y_T) dx \quad (5)$$

$$S = \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x \right) dx$$

$$S = \left[\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow S = \left[\frac{1}{2}(e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}) - \frac{\ln^2(2)}{2} \right] - \left[\frac{1}{2}(e^0 + e^0) \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{\ln^2(2)}{2} - \frac{1}{2}(2) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{\ln^2(2)}{2} - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} - \frac{\ln^2(2)}{2}$$

(6)

$$y - y' = f(x) - f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\Rightarrow y - y' = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$$

$$\Rightarrow y - y' = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x} \text{ محققة}$$

\Leftarrow $f(x)$ هو حل للمعادلة.

السؤال السادس:

$$] - \infty, +\infty[\quad (a(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي في جوار $+\infty$

$$f(x) = \ln\left(e^{-x} \left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)\right) \quad (b)$$

$$f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln\left(1 + \frac{1}{e^{-x}}\right)$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التابع الأسّي

السؤال الأول:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f(x) = \ln\left(e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}} + 1\right)\right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln(e^{-2x} + 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + \ln(e^{-2x} + 1)$$

نفرض: $\Delta: y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \ln(e^{-2x} + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y_\Delta = \ln(1) = 0$$

$\Delta: y = 2x$ مقارب مائل في جوار $+\infty$

(3) ندرس إشارة $f(x) - y_\Delta$

$$f(x) - y_\Delta = 0 \Rightarrow \ln(e^{-2x} + 1) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-2x} + 1 = 1 \Rightarrow e^{-2x} = 0 \text{ مستحيلة}$$

$f(x) - y_\Delta$ لا ينعدم وله إشارة واحدة نوجدتها بالتجريب:

$$x = 0 \Rightarrow \ln(e^0 + 1) = \ln(2) > 0$$

C فوق Δ

السؤال الثاني:

(1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

هناك عدم تعيين $(0 \times \infty)$

$$f(x) = xe^x - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$y = 0$ مقارب افقي في جوار $-\infty$

$$f'(x) = e^x + e^x(x - 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x(1 + x - 1) = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = -1$$

ورقة عمل منزلية في بحث التابع الأسّي

السؤال الأول:

ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \ln(1 + e^{2x})$$

(1) احسب نهاية f عند أطراف مجموعة التعريف.

(2) أوجد معادلة المقارب المائل Δ .

(3) ادرس الوضع النسبي بين C و Δ .

السؤال الثاني:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = (x - 1)e^x$$

(1) ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

(2) ارسم C_f واستنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{x + 1}{e^x}$$

(3) أثبت بالتدرج أن:

$$f^{(n)}(x) = (x + n - 1) \cdot e^x$$

أياً كان $n \geq 1$

السؤال الثالث:

ليكن التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = (ax + b) \cdot e^{-x}$$

أوجد a و b علماً أن f يقبل قيمة حدية عند (-1) قيمتها e

السؤال الرابع:

ليكن لدينا التابع f المعرف على R وفق:

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

(1) أثبت أن التابع f فردي.

(2) ادرس تغيرات التابع f وارسم C_f .

(3) احسب مساحة السطح المحصور بين C و xx' والمستقيمين

$$x = -\ln(2) \text{ و } x = \ln(2)$$

(4) استنتج رسم الخط البياني C_g للتابع g المعرف وفق:

$$g(x) = \frac{2}{1 + e^x}$$

السؤال الثالث:

قيمة حدية: $f'(-1) = 0 \Leftrightarrow$

قيمتها e : $f(-1) = e$

$f(-1) = (-a + b)e = e \Rightarrow -a + b = 1 \dots (1)$

اشقائي على R : $f'(x) = ae^{-x} - e^{-x}(ax + b)$

$\Rightarrow f'(x) = e^{-x}(a - ax - b)$

$f'(-1) = e(a + a - b) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0 \dots (2)$

نجمع (1) و (2) نجد: $a = 1$ نعوض في (1) نجد: $b = 2$

$\Rightarrow f(x) = (x + 2)e^{-x}$

السؤال الرابع:

(1) أيًا كانت $x \in R$ فإن $-x \in R$ محقق:

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

$$f(-x) = \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

الشرط الثاني محقق $f(-x) = \frac{-(1 - e^x)}{1 + e^x} = -f(x)$

$f \Leftarrow$ فردي (خطه متناظر بالنسبة لـ O)

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1$

$y = 1$ مقارب أفقي في جوار $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

هناك عدم تعيين $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x) = \frac{e^x \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right)}{e^x \left(\frac{1}{e^x} + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$

$y = -1$ مقارب أفقي عند $+\infty$

$$f'(x) = \frac{-e^x(1 + e^x) - e^x(1 - e^x)}{(1 + e^x)^2}$$

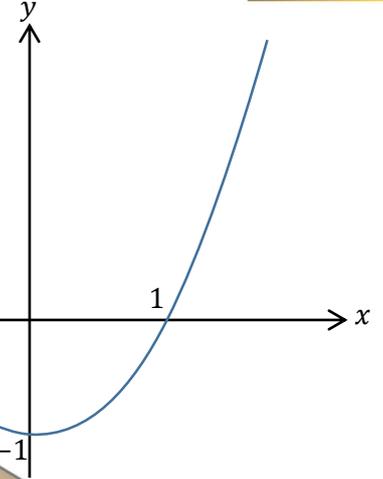
$$f'(x) = \frac{-e^x[1 + e^x + 1 - e^x]}{(1 + e^x)^2} = \frac{-2e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$f \Leftarrow f'(x) < 0$ متناقص تماماً.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	0	\searrow	\nearrow

(2) لمعرفة نقطة التقاطع مع محور الفواصل: $f(x) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)e^x = 0 \Rightarrow x = 1$



$g(x) = (x + 1)e^{-x} = -((-x) - 1)e^{-x}$
 $\Rightarrow g(x) = -f(-x)$

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ.

(3) نفرض العلاقة:

$E(n): f^{(n)}(x) = (x + n - 1)e^x$

نثبت صحة $E(1)$:

محققة $E(1): f'(x) = (x + 1 - 1)e^x = xe^x$

نفرض صحة $E(n)$:

$E(n): f^{(n)}(x) = (x + n - 1)e^x \dots *$

نثبت صحة $E(n + 1)$:

$E(n + 1): f^{(n+1)}(x) = (x + n)e^x$

نبدأ من *:

$f^{(n)}(x) = (x + n - 1)e^x$

نشق: $(f^{(n)}(x))' = e^x + e^x(x + n - 1)$

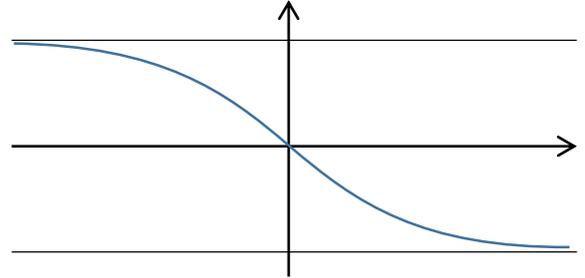
$f^{(n+1)}(x) = e^x(1 + x + n - 1)$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(x) = e^x(x + n)$

محققة من أجل $(n + 1)$ فهي محققة أيًا كانت $n \geq 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	\searrow -1

$$f(0) = \frac{1-1}{1+1} = 0, (0,0) \in C_f$$



$$S = \int_{-\ln(2)}^0 f(x) dx + \int_0^{\ln(2)} -f(x) dx \quad (3)$$

$$S = 2 \int_0^{\ln(2)} -f(x) dx = 2 \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) dx$$

$$S = 2 \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx$$

$$S = 2 \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{(e^x + 1 - e^x)}{e^x + 1} \right) dx$$

$$S = 2 \int_0^{\ln(2)} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x + 1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx$$

$$S = 2 \int_0^{\ln(2)} \left(2 \frac{e^x}{e^x + 1} - 1 \right) dx$$

$$S = 2 [2 \ln(e^x + 1) - x]_0^{\ln(2)}$$

$$S = 2 [(2 \ln(e^{\ln(2)} + 1) - \ln(2)) - (2 \ln(2))]]$$

$$S = 2 [2 \ln(3) - \ln(2) - 2 \ln(2)]$$

$$S = 2 [\ln(9) - \ln(8)] = 2 \ln\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$f(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}, \quad g(x) = \frac{2}{1+e^x} \quad (4)$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1-e^x}{1+e^x} - \frac{2}{1+e^x}$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \frac{-1-e^x}{1+e^x} = \frac{-(1+e^x)}{1+e^x} = -1$$

$$\Rightarrow g(x) = f(x) + 1$$

C_g ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(0,1)$

الشكل الأعداد العقديّة

الشكل المثلثي

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

الشكل الجبري

$$z = x + yi$$

الطولية: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

المرافق: $\bar{z} = x - yi$

المعاكس: $-z = -x - yi$

قاعدة: $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$

إذا كان لدينا z حقيقي، نستنتج:

$$\text{Im}(z) = 0 \quad \bar{z} = z$$

إذا كان لدينا z تخيلي بحت، نستنتج:

$$\text{Re}(z) = 0 \quad \bar{z} = -z$$

الشكل الأسّي

$$z = r e^{i\theta}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\bar{z} = r e^{-i\theta}$$

المعمليّات على الشكل الأسّي:

بفرض: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$
 $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

يكون:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2}$
- $z^n = r^n e^{in\theta}$
- $-z = r e^{i(\pi + \theta)}$

أو يلى:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$$

التحويلات الصاروخية:

$$e^{0i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$$

الشكل المثلثي

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

المعمليّات على الشكل المثلثي:

بفرض: $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$
 $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$

يكون:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
- $z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$
- $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$

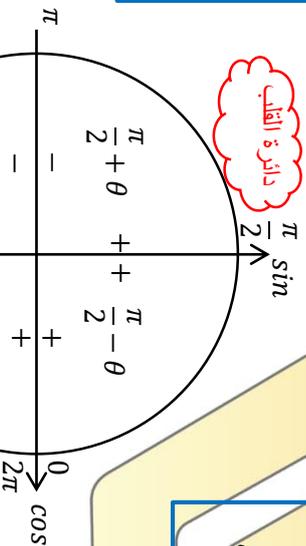
ملاحظة:

$$x \pi \times \pi = 0$$

عدد زوجي \times عدد فردي

الزوايا الشهيرة

حسب الأرباع



ربع أول	ربع ثاني	ربع ثالث	ربع رابع
θ	$\pi - \theta$	$\pi + \theta$	$-\theta = 2\pi - \theta$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

تكون الزاوية على أقل من المقام بواحد

يكون البسيط أعلى من المقام بواحد

يكون البسيط أقل من المقام بواحد

ضعف المقام بواحد أو مضروبه يناقص

ملاحظة: في القسمة على عدد عقدي نضرب البسيط والمقام بمرافق المقام

قاعدة:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^{4n} = 1$$

الشكل المثلثي:

مثال (1): ليكن لدينا العدد العقدي $z = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - i}$

(1) اكتب $\omega_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ و $\omega_2 = \sqrt{3} - i$ بالشكل المثلثي

(2) اكتب z بالشكل المثلثي والجبري.

(3) استنتج $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

(4) أثبت أن z^{24} هو عدد حقيقي.

الحل:

$$\omega_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i \quad (1)$$

$$r = \sqrt{2 + 2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{3} - i$$

$$r = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)}{2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)} \quad (2)$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$z = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{(\sqrt{3} - i)} \times \frac{(\sqrt{3} + i)}{(\sqrt{3} + i)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}i + \sqrt{6}i - \sqrt{2}}{3 + 1} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad (3)$$

$$z^{24} = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)^{24} \quad (4)$$

$$\Rightarrow z^{24} = \cos\left(24 \times \frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(24 \times \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow z^{24} = \cos(10\pi) + i \sin(10\pi)$$

$$\Rightarrow z^{24} = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + i0 = 1 \in \mathbb{R}$$

مثال (2): اكتب z بالشكل المثلثي:

$$z_1 = \left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^7$$

$$z_2 = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

الحل:

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \right)^7$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{10}\right) \right)^7$$

$$\Rightarrow z_1 = \cos\left(\frac{21\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{21\pi}{10}\right)$$

ملاحظة:

إذا كان البسط أكبر من ضعف المقام، نقوم بتعديل الزاوية:

(1) موجبة: نطرح 2π (2) سالبة: نضيف 2π

$$\theta = \frac{21\pi}{10} - 2\pi = \frac{\pi}{10} \quad \text{بما أن } \theta = \frac{21\pi}{10} \text{ فهي تكافئ: } \theta = \frac{\pi}{10}$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$\Rightarrow z_2 = \cos\left(\frac{9\pi}{14}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{14}\right)$$

الشكل الأسّي:

مثال (1): اكتب بالشكل الأسّي:

$$z = \frac{(-1+i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$$

الحل:

$$\omega_1 = -1 + i \quad \text{بفرض:}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow \omega_1^4 = 4e^{3\pi i}$$

$$\omega_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{1 + 3} = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$\omega_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \omega_2^5 = 32e^{-\frac{5\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\omega_1)^4}{(\omega_2)^5} = \frac{4e^{3\pi i}}{32e^{-\frac{5\pi}{3}i}} = \frac{1}{8}e^{\left(3\pi - \left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)i}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{8}e^{\frac{14\pi}{3}i} = \frac{1}{8}e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

اكتب الأعداد العقدية الممثلة للنقاط A و B و C بالشكل الأسّي.

الحل:

$$z_A = 2 \Rightarrow z_A = 2e^{0i}$$

بما أن الشكل سدّس منتظم فتمر برؤوسه دائرة

$$\arg(z_B) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{3}$$

$$|z_{OB}| = 2 \Rightarrow z_B = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

لو كتبنا z_B بالشكل الجبري:

$$z_B = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z_B = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

C لها نفس ترتيب النقطة B ، C مسقط B على محور oy فلها نفس ترتيب B ، أي:

$$z_C = \sqrt{3}i \Rightarrow z_C = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i}$$

مثال (5): ليكن لدينا العدد العقدي $z = (2 - 2i)e^{\frac{\pi}{3}i}$

(1) اكتب z بالشكل الأسّي.

(2) اكتب z بالشكل الجبري.

(3) استنتج $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

الحل:

$$z_1 = 2 - 2i \quad (1)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z_1 = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$z = 2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i} \times e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}e^{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)i}$$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$z = (2 - 2i) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \quad (2)$$

$$\Rightarrow z = 1 + \sqrt{3}i - i + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{x}{r} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad (3)$$

تعلم: $z = re^{\theta i}$

r عدد حقيقي موجب تماماً

للتخلص من \square نضيف π إلى θ

للتخلص من \square نضيف $\frac{\pi}{2}$ إلى θ

للتخلص من \square نضيف $-\frac{\pi}{2}$ إلى θ

مثال (2): اكتب بالشكل الأسّي:

$$z_1 = -\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$z_2 = 2ie^{\frac{\pi}{5}i}$$

الحل:

$$z_1 = -\sqrt{3}e^{\frac{\pi}{4}i} \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}e^{\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)i}$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$z_2 = 2ie^{\frac{\pi}{5}i} \Rightarrow z_2 = 2e^{\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right)i}$$

$$\Rightarrow z_2 = 2e^{\frac{7\pi}{10}i}$$

مثال (3): اكتب z بالشكل الأسّي:

$$z = 1 - e^{2\theta i} ; \theta \in]0, \pi[$$

الحل:

$$z = e^{\theta i} \left(\frac{1}{e^{\theta i}} - e^{\theta i} \right) \Rightarrow z = e^{\theta i} (e^{-\theta i} - e^{\theta i})$$

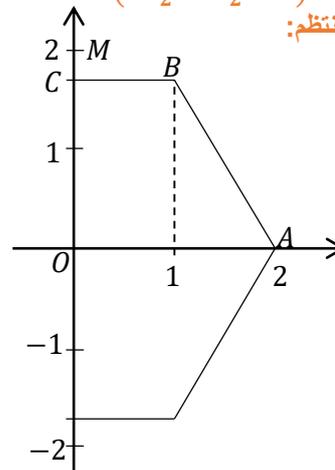
$$\Rightarrow z = -e^{\theta i} (e^{\theta i} - e^{-\theta i}) \Rightarrow z = -e^{\theta i} 2i \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow z = 2 \sin(\theta) e^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)i}$$

وهو الشكل الأسّي حيث:

$$\theta \in]0, \pi[\Rightarrow \sin(\theta) > 0$$

مثال (4): نتأمل في معلم متجانس $\left(O; \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{2}\overrightarrow{OM} \right)$ في الشكل المرسوم جانباً نصف سدّس منتظم:



حل المعادلات العقدية

الدرجة الرابعة

بالقسمة الإقليدية
أو نشر ومقارنة
الإيجاد الثوابت

الدرجة الثالثة

بالقسمة الإقليدية

إذا كانت معادلة من الدرجة الثالثة تعوي مجاهيل a و b و c وتقل حلاً تخليلاً بحثاً:

نحول أمثال z^3 هي الواحد ويفرض
الحل $z = ai$ ونكتب المعادلة:
 $(z - ai)(z^2 + bz + c) = 0$
ننشر ونقارن حتى نوجد المجاهيل.

الإيجاد جذور عدد عقدي:

$$z^2 = a + bi$$

نفرض $z = x + yi$

نحل المعادلات:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \dots (1)$$

$$x^2 - y^2 = a \dots (2)$$

$$2xy = b \dots (3)$$

نجمع (1) و (2) لإيجاد x

نعوض في (3) لإيجاد y

نعوض في الشكل:

$$z = x + yi$$

الدرجة الثانية

$az^2 + bz + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

الدرجة الأولى

نأخذ مرافق للمعادلة
ونحل معادلتين بجهولتين

Δ عدد عقدي

لحساب $\sqrt{\Delta}$:

$$\Delta = a + bi$$

$$\sqrt{\Delta} = x + yi$$

نفرض:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \dots (1)$$

$$x^2 - y^2 = a \dots (2)$$

$$2xy = b \dots (3)$$

نجمع (1) و (2) لإيجاد x

نعوض في (3) لإيجاد y

نعوض في الشكل:

$$\sqrt{\Delta} = x + yi$$

ويكون حل المعادلة:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta < 0$

لها حلان مترافقان:

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

$\Delta > 0$

لها حلان مختلفان:

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$\Delta = 0$

لها حل وحيد (جذر مضاعف):

$$z_0 = \frac{-b}{2a}$$

تعلم: لإيجاد عددين p و q يحققان:

$$az^2 + pz + q = 0$$

وعلم حلّي المعادلة z_1 و z_2 :

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}$$

مثال (1): ليكن لدينا $3z^2 - pz + q = 0$ عَيِّن p و q علماً أنَّ جذري المعادلة هما:

$$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 3 + i$$

الحل:

$$a = 3, \quad b = -p, \quad c = q$$

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow 1 - i + 3 + i = \frac{-(-p)}{3}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{p}{3} \Rightarrow \boxed{p = 12}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow (1 - i)(3 + i) = \frac{q}{3}$$

$$\Rightarrow 3 + i - 3i + 1 = \frac{q}{3} \Rightarrow \boxed{q = 12 - 6i}$$

$$\Rightarrow 3z^2 - 12z + 12 - 6i = 0$$

مثال (2): حل في C المعادلة الآتية:

$$z^2 + (1 + 8i)z - 17 + i = 0$$

الحل:

$$a = 1, \quad b = 1 + 8i, \quad c = -17 + i$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1 + 8i)^2 - 4(1)(-17 + i)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 + 16i - 64 + 68 - 4i = 5 + 12i$$

نفرض: $\sqrt{\Delta} = x + iy$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \dots \textcircled{1}$$

$$x^2 - y^2 = 5 \dots \textcircled{2}$$

$$2xy = 12 \dots \textcircled{3}$$

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \quad \text{بالجمع } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2}$$

$$x = 3 \xrightarrow{\text{نعوض في } \textcircled{3}} 2(3)y = 12 \Rightarrow y = 2 \quad \text{إمّا:}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$$

$$x = -3 \xrightarrow{\text{نعوض في } \textcircled{3}} 2(-3)y = 12 \Rightarrow y = -2 \quad \text{أو:}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta_2} = -3 - 2i$$

نختار $:\sqrt{\Delta_1} = 3 + 2i$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 - 8i + 3 + 2i}{2}$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 - 3i$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta_1}}{2a} = \frac{-1 - 8i - 3 - 2i}{2}$$

$$\Rightarrow z_2 = -2 - 5i$$

مثال (3): حل المعادلة علماً أنها تقبل حلاً تخيلياً بحثاً:

$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$$

الحل:

$$z = ai \quad \text{نفترض أن أحد الحلول:}$$

فالمقدار يقبل القسمة على $(z - ai)$ ، بإجراء القسمة الإقليدية نجد:

$$z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$$

$$(z - ai)(z^2 + bz + c) = 0 \Rightarrow \text{يكافئ}$$

بالنشر والمقارنة نجد:

$$z^3 + bz^2 + cz - aiz^2 - abiz - aic = 0$$

$$\Rightarrow z^3 + (b - ai)z^2 + (c - abi)z - aic = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة الأساسية:

$$b - ai = -2 - i \dots \textcircled{1}$$

$$c - abi = 2 + 2i \dots \textcircled{2}$$

$$-aci = -2i \dots \textcircled{3}$$

$$b = -2, \quad a = 1$$

من ① نجد:

$$c = 2 \quad \text{من ② نجد:}$$

$$-1(2)i = -2i \Rightarrow -2i = -2i \quad \text{محققة في ③:}$$

$$\Rightarrow (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$$

$$z_1 = i \quad \text{إمّا:}$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \quad \text{أو:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{-\Delta} = 2 \quad \text{للمعادلة حلان عقديان مترافقان:}$$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

$$z_3 = \bar{z}_2 = 1 - i$$

$$S = \{i, 1 + i, 1 - i\} \quad \text{مجموعة الحلول:}$$

مثال هام في الشكل الجبري:

ليكن لدينا $u \neq 1$ و $\omega = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ إذا كان ω حقيقي، أثبت أنه إمّا $|u| = 1$ أو z حقيقي.

الحل:

بما أن ω حقيقي: $\omega = \bar{\omega}$

$$\frac{\bar{z} - \bar{u}\bar{z}}{1 - \bar{u}} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$$

$$\Rightarrow (\bar{z} - \bar{u}\bar{z})(1 - u) = (z - u\bar{z})(1 - \bar{u})$$

$$\Rightarrow \bar{z} - u\bar{z} - \bar{u}\bar{z} + u\bar{u}\bar{z} = z - \bar{u}z - u\bar{z} + u\bar{u}\bar{z}$$

$$\Rightarrow \bar{z} + u\bar{u}\bar{z} - z - u\bar{u}\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} - z + u\bar{u}\bar{z} - u\bar{u}\bar{z} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{z} - z + u\bar{u}(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow \bar{z} - z - u\bar{u}(\bar{z} - z) = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{z} - z)(1 - u\bar{u}) = 0$$

$$1 - u\bar{u} = 0 \Rightarrow u\bar{u} = 1 \quad \text{إمّا:}$$

$$\Rightarrow |u|^2 = 1 \Rightarrow |u| = 1$$

$$\bar{z} - z = 0 \Rightarrow \bar{z} = z \Rightarrow z \text{ حقيقي} \quad \text{أو:}$$

السؤال الأول:

$$\textcircled{1} z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$r = \sqrt{2+2} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$$

$$\textcircled{2} z = (\sqrt{3} + i)(1 + i)$$

$$\omega_1 = \sqrt{3} + i$$

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\omega_2 = 1 + i$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z = \omega_1 \cdot \omega_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$\textcircled{3} z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} \right)^5$$

$$\omega_1 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$r = \sqrt{1+3} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

السؤال الأول:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل المثلثي:

$$\textcircled{1} z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$\textcircled{2} z = (\sqrt{3} + i)(1 + i)$$

$$\textcircled{3} z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} \right)^5$$

$$\textcircled{4} z = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

السؤال الثاني:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل الأسّي:

$$\textcircled{1} z = -2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\textcircled{2} z = (\sqrt{3} + i)e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\textcircled{3} z = (4e^{2\theta i} - 4)^2$$

السؤال الثالث:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل الجبري:

$$z = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$\textcircled{2} z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^2$$

السؤال الرابع:

أثبت صحة العلاقة:

$$|z + \omega|^2 + |z - \omega|^2 = 2|z|^2 + 2|\omega|^2$$

السؤال الخامس:

حل المعادلة الآتية:

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i$$

السؤال السادس:

حل جملة المعادلتين الآتية، ثم اكتب z و ω بالشكل الأسّي:

$$\begin{cases} 2z + 3\omega = 2 + 3i \dots \textcircled{1} \\ 3z - \omega = 3 - i \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

السؤال السابع:

حل المعادلة الآتية:

$$z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$$

السؤال الثامن:

ليكن لدينا المقدار المعرف بالشكل:

$$P(z) = z^3 - \alpha z^2 + \alpha z + 7$$

$$P(-1) = 0 \quad \text{عَيِّن } \alpha \text{ إذا علمت أن}$$

(2) بفرض $\alpha = 3$ ، عَيِّن $Q(z)$ الذي يحقق:

$$P(z) = (z + 1)Q(z)$$

(3) حل المعادلة $P(z) = 0$

السؤال الثالث:

$$\textcircled{1} z = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$$

$$z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\textcircled{2} z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow z = 0 - i \Rightarrow z = -i$$

السؤال الرابع:

$$\frac{|z + \omega|^2 + |z - \omega|^2}{l_1} = \frac{2|z|^2 + 2|\omega|^2}{l_2}$$

$$\Rightarrow l_1 = |z + \omega|^2 + |z - \omega|^2$$

$$\Rightarrow l_1 = (z + \omega)(\bar{z} + \bar{\omega}) + (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega})$$

$$\Rightarrow l_1 = z\bar{z} + z\bar{\omega} + \omega\bar{z} + \omega\bar{\omega} + z\bar{z} - z\bar{\omega} - \omega\bar{z} + \omega\bar{\omega}$$

$$\Rightarrow l_1 = 2z\bar{z} + 2\omega\bar{\omega} = 2|z|^2 + 2|\omega|^2 = l_2 \text{ محققة}$$

السؤال الخامس:

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \dots \textcircled{1}$$

$$-2i\bar{z} + z = 3 - 3i \dots \textcircled{2}$$

بأخذ مرافق المعادلة:

نضرب $\textcircled{2}$ بـ $-2i$:

$$2iz + \bar{z} = 3 + 3i \dots \textcircled{1}$$

$$-4\bar{z} - 2iz = -6i - 6 \dots \textcircled{2}$$

$$-3\bar{z} = -3i - 3 \quad \text{بجمع } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ نجد:}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = 1 + i \Rightarrow z = 1 - i$$

السؤال السادس:

$$\begin{cases} 2z + 3\omega = 2 + 3i \dots \textcircled{1} \\ 3z - \omega = 3 - i \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z + 3\omega = 2 + 3i \dots \textcircled{1} \\ 9z - 3\omega = 9 - 3i \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{نضرب } \textcircled{2} \text{ بـ } (3):$$

$$11z = 11 \Rightarrow z = 1 \quad \text{بجمع } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2}:$$

$$2 + 3\omega = 2 + 3i \Rightarrow \omega = i \quad \text{نعوض في } \textcircled{1}:$$

$$z = e^{0i} \text{ أو } e^{2\pi i}, \quad \omega = e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\omega_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$r = \sqrt{2+2} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^5 = \left(\frac{2}{2}\right)^5 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \right)^5$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\textcircled{4} z = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$$z = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow z = \cos\left(\frac{13\pi}{10}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{10}\right)$$

السؤال الثاني:

$$\textcircled{1} z = -2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow z = 2e^{(\pi+\frac{\pi}{3})i} = 2e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

$$\textcircled{2} z = (\sqrt{3} + i)e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\omega = \sqrt{3} + i$$

بفرض:

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$\Rightarrow z = 2e^{\frac{\pi}{6}i} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = 2e^{(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})i} \Rightarrow z = 2e^{\frac{5\pi}{12}i}$$

$$\textcircled{3} z = (4e^{2\theta i} - 4)^2$$

$$z = 4^2(e^{2\theta i} - 1)^2 = 16\left(e^{\theta i}\left(e^{\theta i} - \frac{1}{e^{\theta i}}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow z = 16\left(e^{\theta i}(e^{\theta i} - e^{-\theta i})\right)^2 = 16\left(e^{\theta i}(2i \sin(\theta))\right)^2$$

$$\Rightarrow z = 16e^{2\theta i}(-4 \sin^2(\theta)) = -64 \sin^2(\theta) e^{2\theta i}$$

$$\Rightarrow z = 64 \sin^2(\theta) e^{(\pi+2\theta)i}$$

السؤال الأول:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل المثلثي:

① $z = \sqrt{3} - i$

② $z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$

③ $z = -3 \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$

السؤال الثاني:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل الأسّي:

① $z = \frac{\cos(x) + i \sin(x)}{\cos(x) - i \sin(x)}$

② $z = -8ie^{\frac{\pi}{6}i}$

③ $z = 8 + 8e^{\frac{\pi}{12}i}$

السؤال الثالث:

اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالشكل المثلثي:

① $z = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} - \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$

② $z = (1 + i)^8$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا $u = \frac{z-\omega}{1+z\omega}$ أثبت أن u تخيلي علماً أن:

$|\omega| = 1, |z| = 1, \omega \cdot z \neq -1$

السؤال الخامس:

لتكن لدينا المعادلة:

$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$

(1) أثبت أن $z_1 = \sqrt{3}i$ حل للمعادلة واستنتج الحل الآخر.

(2) علماً أن المعادلة السابقة تكتب بالشكل:

$(z^2 + 3)(z^2 + az + b) = 0$

أوجد قيم a و b ثم أوجد الحلين الآخرين للمعادلة.

السؤال السابع:

$z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

$a = 1, b = -2 - 2\sqrt{2}, c = 2\sqrt{2} + 4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2 - 2\sqrt{2})^2 - 4(1)(2\sqrt{2} + 4)$

$\Rightarrow \Delta = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 8\sqrt{2} - 16 = -4 < 0$

المعادلة حلان عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = 2$

$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{2} - 2i}{2} = 1 + \sqrt{2} - i$

$z_2 = \bar{z}_1 = 1 + \sqrt{2} + i$

السؤال الثامن:

$P(-1) = (-1)^3 - \alpha(-1)^2 + \alpha(-1) + 7 = 0$ (1)

$\Rightarrow -1 - \alpha - \alpha + 7 = 0 \Rightarrow -2\alpha = -6 \Rightarrow \alpha = 3$

$P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ (2)

$$\begin{array}{r} z^2 - 4z + 7 \\ z + 1 \overline{) z^3 - 3z^2 + 3z + 7} \\ \underline{-z^3 - z^2} \\ -4z^2 + 3z + 7 \\ \underline{+4z^2 + 4z} \\ 7z + 7 \\ \underline{-7z - 7} \\ 0 \end{array}$$

$\Rightarrow P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 7)$

إما: $z_1 = -1$ (3)

أو: $z^2 - 4z + 7 = 0$

$a = 1, b = -4, c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(7) = -12 < 0$

المعادلة حلان عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12}$

$z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{12}i}{2}$

$\Rightarrow z_2 = \frac{4 - 2\sqrt{3}i}{2} = 2 - \sqrt{3}i$

$z_3 = \bar{z}_2 = 2 + \sqrt{3}i$

$$\textcircled{1} z = \sqrt{3} - i$$

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\textcircled{2} z = \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}$$

$$\omega_1 = \sqrt{3} + i$$

$$r = \sqrt{3+1} \Rightarrow r = 2$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$\omega_2 = 1 + i$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$z = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$\textcircled{3} z = -3 \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$z = 3 \left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z = 3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right)$$

$$\Rightarrow z = 3 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \right)$$

السؤال الثاني:

$$\textcircled{1} z = \frac{\cos(x) + i \sin(x)}{\cos(x) - i \sin(x)}$$

$$z = \frac{e^{xi}}{e^{-xi}} = e^{2xi}$$

$$\textcircled{2} z = -8ie^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$z = 8e^{\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)i} = 8e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$\textcircled{3} z = 8 + 8e^{\frac{\pi}{12}i}$$

$$z = 8 \left(1 + e^{\frac{\pi}{12}i} \right) \Rightarrow z = 8e^{\frac{\pi}{24}i} \left(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{24}i}} + e^{\frac{\pi}{24}i} \right)$$

$$\Rightarrow z = 8e^{\frac{\pi}{24}i} \left(e^{-\frac{\pi}{24}i} + e^{\frac{\pi}{24}i} \right) = 8e^{\frac{\pi}{24}i} \left(e^{\frac{\pi}{24}i} + e^{-\frac{\pi}{24}i} \right)$$

$$\Rightarrow z = 8e^{\frac{\pi}{24}i} \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \right) = 16e^{\frac{\pi}{24}i} \cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

السؤال الثالث:

$$\textcircled{1} z = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i} - \frac{\sqrt{2} - i}{\sqrt{2} + i}$$

$$z = \frac{(\sqrt{2} + i)^2 - (\sqrt{2} - i)^2}{(\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 + 2\sqrt{2}i - 1 - (2 - 2\sqrt{2}i - 1)}{2 + 1}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2 + 2\sqrt{2}i - 1 - 2 + 2\sqrt{2}i + 1}{3}$$

$$\Rightarrow z = \frac{4\sqrt{2}i}{3} \Rightarrow z = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\textcircled{2} z = (1 + i)^8$$

$$z = ((1 + i)^2)^4 = (1 + 2i - 1)^4 = (2i)^4$$

$$\Rightarrow z = 16 \Rightarrow z = 16(\cos(0) + i \sin(0))$$

السؤال الرابع:

$$\bar{u} = \frac{\bar{z} - \bar{\omega}}{1 + \bar{z}\bar{\omega}} = \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{\omega}}{1 + \frac{1}{z\omega}} = \frac{\frac{\omega - z}{z\omega}}{\frac{z\omega + 1}{z\omega}}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{\omega - z}{z\omega + 1} = \frac{-(z - \omega)}{1 + z\omega}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = -u \Rightarrow \text{تخيلي } u$$

السؤال الخامس:

(1) نعوض $\sqrt{3}i$ في المعادلة:

$$(\sqrt{3}i)^4 - 6(\sqrt{3}i)^3 + 24(\sqrt{3}i)^2 - 18(\sqrt{3}i) + 63 = 0$$

$$9 + 18\sqrt{3}i - 72 - 18\sqrt{3}i + 63 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ محققة}$$

بما أن أمثال المعادلة السابقة أعداد حقيقية فالحل الآخر هو مرافق $z_1 = \sqrt{3}i$

$$z_2 = \bar{z}_1 = -\sqrt{3}i$$

$$(z^2 + 3)(z^2 + az + b) = 0 \quad (2)$$

$$z^4 + az^3 + bz^2 + 3z^2 + 3az + 3b = 0$$

$$\Rightarrow z^4 + az^3 + (b + 3)z^2 + 3az + 3b = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة الأساسية:

$$a = -6, \quad b + 3 = 24 \Rightarrow b = 21$$

$$\Rightarrow (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$$

$$z^2 + 3 = 0 \Rightarrow z^2 = -3 \quad \text{إبنا:}$$

$$\Rightarrow z^2 = 3i^2 \Rightarrow z_1 = \sqrt{3}i$$

$$z_2 = -\sqrt{3}i$$

$$z^2 - 6z + 21 = 0 \quad \text{أو:}$$

$$a = 1, \quad b = -6, \quad c = 21$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 36 - 4(1)(21) = -48 < 0$$

لها حلان عقديان مترافقان: $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{48}$

$$z_3 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 + \sqrt{48}i}{2}$$

$$\Rightarrow z_3 = \frac{6 + 4\sqrt{3}i}{2} = 3 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_4 = \bar{z}_3 = 3 - 2\sqrt{3}i$$

تطبيقات الأعداد العقدية

التحويلات الهندسية

① الإسحاب: T

$$z' = z + b \vec{\omega}$$

حيث $b \vec{\omega}$ هو العدد العقدي الممثل لشعاع الإسحاب.

② التحاكي: H

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

حيث ω العدد العقدي الممثل للمركز.

③ الدوران: R

$$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$$

④ التناظر المركزي: S_0

$$z' - \omega = -(z - \omega)$$

⑤ التناظر المحوري:

(1) بالنسبة للمحور OX :

$$z' = \bar{z}$$

(2) بالنسبة للمحور OY :

$$z' = -\bar{z}$$

النسبة الذهبية:

⑦ مقدار $\frac{b-a}{c-a}$

$$\frac{b-a}{c-a}$$

نستفيد منها:

$$\left| \frac{b-a}{c-a} \right| = \frac{AB}{AC}$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = (\vec{AC}, \vec{AB})$$

نفحص النسبة الذهبية :-

(1) إثبات مثلث قائم ومتساوي الساقين.

(2) إثبات تساوي وتوازي مستقيمين.

(3) إثبات مثلث متساوي الأضلاع (قياس الزاوية $\frac{\pi}{3}$).

حالات خاصة:

① لإثبات أن رباعي هو متوازي أضلاع:

لثبت تساوي شعاعين متقابلين

② لإثبات أن $ABCD$ هو مربع:

$$\Rightarrow (\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$$

القوانين الهندسية

① كل نقطة $M(x, y)$ تمثل بعدد عقدي:

$$z = x + yi$$

② العدد العقدي الممثل لشعاع \vec{AB} :

$$z_A = x_A + iy_A$$

$$z_B = x_B + iy_B$$

$$\Rightarrow z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$

③ طول الشعاع:

$$|z_{\vec{AB}}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

④ إذا كانت I منتصف AB :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

⑤ إذا كانت G مركز ثقل المثلث ABC :

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

⑥ إذا كانت H مركز الأبعاد المتناسبة للقطر: $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \delta)$

$$z_H = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \delta z_C}{\alpha + \beta + \delta}$$

مثال (2): بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 1 + 2i$ جد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق تحاك مركزه $\omega(1-i)$ ونسبته $k = 3$.

الحل:

$$\begin{aligned} z' - \omega &= K(z - \omega) \\ z' - 1 + i &= 3(1 + 2i - 1 + i) \\ z' - 1 + i &= 3(3i) \Rightarrow z' = 9i + 1 - i \\ z' &= 1 + 8i \end{aligned}$$

مثال (3): بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 3 + 2i$ جد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق دوران مركزه $\omega(3-i)$ وزاوية $\frac{\pi}{2}$.

الحل:

$$\begin{aligned} z' - \omega &= e^{i\theta}(z - \omega) \\ z' - 3 + i &= e^{i\frac{\pi}{2}}(3 + 2i - 3 + i) \\ z' - 3 + i &= i(3i) \\ z' &= -3 + 3 - i = -i \end{aligned}$$

مثال (4): بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 1 - 5i$ أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صور A وفق تناظر مركزه $\omega(1+i)$.

الحل:

$$\begin{aligned} z'_A - \omega &= -1(z_A - \omega) \\ z'_A - 1 - i &= -1(1 - 5i - 1 - i) \\ z'_A &= 6i + 1 + i \Rightarrow z'_A = 1 + 7i \end{aligned}$$

مثال (5): بفرض A نقطة يمثلها العدد العقدي $z_A = 3 + 2i$

(a) أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة B صورة A وفق تناظر محوره xx'
(b) أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة C صورة A وفق تناظر محوره yy'

الحل:

$$\begin{aligned} z_B = \bar{z}_A &\Rightarrow z_B = 3 - 2i \quad (a) \\ z_C = -\bar{z}_A &\Rightarrow z_C = -3 + 2i \quad (b) \end{aligned}$$

مثال: لتكن لدينا النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:
 $a = 2 + i, b = 3 + 2i, c = 1 + 2i$

والمطلوب:

- اكتب الأعداد العقدية التي تمثل الأشعة \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{BC} .
- احسب أطوال أضلاع المثلث ABC واستنتج أن المثلث متساوي الساقين.
- احسب $\frac{c-a}{b-a}$ واستنتج قياس الزاوية $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ وهل ABC قائم؟
- أوجد الأعداد العقدية الممثلة لـ I و J منتصفات $[AC]$ و $[AB]$ على الترتيب.
- أوجد العدد العقدي الممثل لـ G مركز ثقل المثلث ABC .
- أوجد العدد العقدي الممثل لـ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A, 1)$ و $(B, 2)$ و $(C, 3)$

الحل:

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{AB}} &= b - a = 1 + i \quad (1) \\ z_{\overrightarrow{AC}} &= c - a = -1 + i \\ z_{\overrightarrow{BC}} &= c - b = -2 \\ |z_{\overrightarrow{AB}}| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ |z_{\overrightarrow{AC}}| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ |z_{\overrightarrow{BC}}| &= \sqrt{4} = 2 \\ AB &= AC \text{ الساقين المتساوي} \\ \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i+i+1}{1+1} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

المثلث ABC قائم في A .

$$z_I = \frac{a+c}{2} = \frac{2+i+1+2i}{2} = \frac{3+3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \quad (4)$$

$$z_J = \frac{a+b}{2} = \frac{5+3i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z_G = \frac{a+b+c}{3} = \frac{6+5i}{3} = 2 + \frac{5}{3}i \quad (5)$$

$$z_M = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{\alpha + \beta + \gamma} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{1.a + 2.b + 3.c}{6} = \frac{2+i+6+4i+3+6i}{6} \\ z_M &= \frac{11+11i}{6} = \frac{11}{6} + \frac{11}{6}i \end{aligned}$$

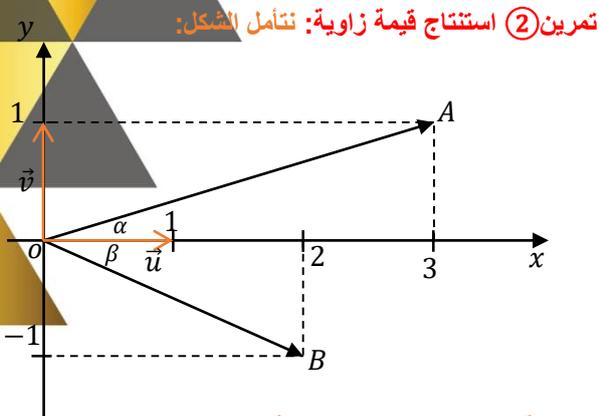
التحويلات الهندسية:

مثال (1): بفرض $z_A = 1 + 3i$ والشعاع $\vec{\omega} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ أوجد العدد العقدي الممثل للنقطة A' صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{\omega}$.

الحل:

$$b = 2 - 3i$$

$$z' = z_A + b = 1 + 3i + 2 - 3i \Rightarrow z' = 3$$



تمرين ② استنتاج قيمة زاوية: نتأمل الشكل:

A نقطة يمثلها العدد z_A و B نقطة يمثلها العدد z_B

$$\arg(z_B) = \beta, \quad \arg(z_A) = \alpha$$

(1) عين العددين z_A و z_B اللذان يمثلان النقطتين A و B.

(2) احسب بدلالة $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الجبري.

(3) احسب بدلالة α و β المقدار $\frac{z_A}{z_B}$ بالشكل الأسّي واستنتج $\alpha - \beta$

الحل:

$$A(3,1) \Rightarrow z_A = 3 + i, \quad B(2,-1) \Rightarrow z_B = 2 - i \quad (1)$$

(2)

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2i-1}{4+1}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{5+5i}{5} = 1+i$$

$$z_A = 3+i$$

$$r = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}, \quad \theta = \alpha$$

$$z_A = \sqrt{10} \cdot e^{i\alpha}$$

$$z_B = 2-i$$

$$r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \quad \theta = \beta$$

$$z_B = \sqrt{5} \cdot e^{i\beta}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} e^{i(\alpha-\beta)} = \sqrt{2} e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$\alpha - \beta = \arg(z_A) - \arg(z_B) = \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \arg(1+i)$$

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$$

تمرين ①: دورة 2021 أولى

في المستوي $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نتأمل النقاط A و B و C تمثلها الأعداد:

$$a = 8, \quad b = -4 + 4i, \quad c = -4i$$

والمطلوب:

(1) احسب العدد $\frac{b-c}{a-c}$ واستنتج ان المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين.

(2) جد العدد d الممثل للنقطة D صورة A

وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

(3) جد العدد العقدي الممثل للنقطة E ليكون الرباعي ACBE مربعاً.

الحل:

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-4+4i+4i}{8-4i} \quad (1)$$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{(-4+8i)(8-4i)}{(8+4i)(8-4i)}$$

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-32+16i+64i+32}{64+16} = \frac{80i}{80}$$

$$\frac{b-c}{a-c} = i$$

$$\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i) \Rightarrow (\overline{CA}, \overline{CB}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i| \Rightarrow \frac{CB}{CA} = 1 \Rightarrow CB = CA$$

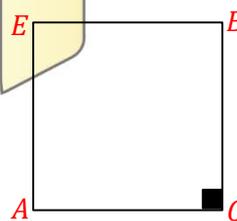
إذن المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

$$z_D - z_O = e^{i\theta}(z_A - z_O) \quad (2)$$

$$d = e^{\frac{\pi}{4}i} (8) \quad (8)$$

$$d = 8 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$d = 8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow z_{AE} = z_{CB} \quad (3)$$

$$e - a = b - c \Rightarrow e = a + b - c$$

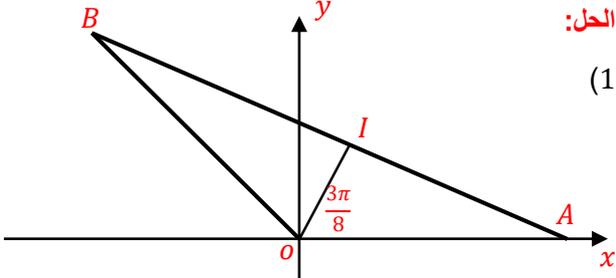
$$e = 8 - 4 + 4i + 4i \Rightarrow e = 4 + 8i$$

تمرين (4): نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددين

$$a = 2 \text{ و } b = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ و } I \text{ منتصف } [AB] \text{ والمطلوب:}$$

(1) ارسم شكلاً مناسباً وبين طبيعة المثلث OAB
ثم استنتج قياس الزاوية (\vec{u}, \vec{OI})

(2) احسب العدد العقدي z_I الممثل للنقطة I بالصيغة الجبرية والأسية
واستنتج كلاً من $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$.



الحل:

(1)

نلاحظ أن $OA = OB = 2$ فالمثلث OAB متساوي الساقين، OI متوسط في المثلث OAB فهو منصف للزاوية AOB ومنه:

$$(\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$$

(2) I منتصف AB ، نحول العدد b إلى الشكل الجبري:

$$b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow b = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow b = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

الجبري:

$$z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} \Rightarrow z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

الأسية:

$$r = \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2 + 2}{4}}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\theta = (\vec{u}, \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

$$\Rightarrow z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

$$\cos \frac{3\pi}{8} = \frac{x}{r} = \frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

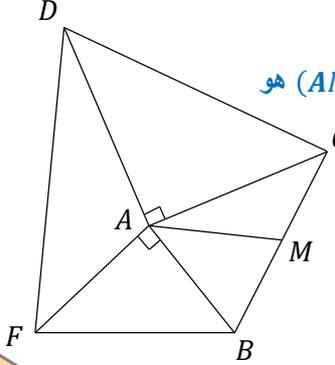
$$\sin \frac{3\pi}{8} = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

تمرين (3): نتأمل في المستوي مثلثاً ABC مباشر التوجيه كيفياً، لتكن

M منتصف $[BC]$ وليكن AFB و ACD مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين.

نختار معلم مباشر مبدأه النقطة A ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان B و C .

(1) احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية d و f و m الممثلة للنقاط F و D و M بالترتيب.



(2) احسب $\frac{d-f}{m-a}$ ثم استنتج أن (AM) هو ارتفاع في المثلث AFD وأن:

$$FD = 2AM$$

(3) نفرض أن A هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقولة:

\widehat{BAC}

و $(D, 2)$ و $(F, 3)$ و $(C, 1)$ و $(B, 1)$ احسب $\frac{c}{b}$ ثم استنتج قياس

\widehat{BAC}

الحل:

(1) باعتبار A مركز للدوران نجد:

$$f = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b) \Rightarrow f = -ib$$

$$d = e^{i\frac{\pi}{2}}(c) \Rightarrow d = ic \Rightarrow m = \frac{b+c}{2}$$

$$\frac{d-f}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{b+c}{2}} = 2i \quad (2)$$

$$\arg\left(\frac{d-f}{m-a}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$$

$$(\vec{AM}, \vec{FD}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AM \perp FD$$

إذاً (AM) هو ارتفاع في المثلث AFD

$$\left|\frac{d-f}{m-a}\right| = |2i| \Rightarrow \frac{FD}{AM} = 2 \Rightarrow FD = 2AM$$

$$a = \frac{2d+3f+c+b}{7} = \frac{2ic-3ib+c+b}{7} \quad (3)$$

$$\Rightarrow a = \frac{(1+2i)c + (1-3i)b}{7} = 0$$

$$\Rightarrow (1+2i)c + (1-3i)b = 0$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1-3i}{1+2i}b$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{b} = -\frac{1-3i}{1+2i}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = -\frac{(1-3i)(1-2i)}{5} = \frac{5+5i}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b} = 1+i$$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$$

$$|x + iy - 1 + i| = |x + iy + 2 - 3i|$$

$$|(x - 1) + (y + 1)i| = |(x + 2) + (y - 3)i|$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y + 1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$$

نربع الطرفين وننشر:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9$$

$$-2x + 2y + 2 = 4x + 4 - 6y + 9$$

$$6x - 8y + 11 = 0$$

$$|z - 1 + i| = 5 \quad (3)$$

$$\text{الحل: } |z - a| = 5$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = 5$

مثال (2): $(z + 1)(\bar{z} - 2)$ عين مجموعة الأعداد العقدية z علماً أن المقدار السابق حقيقي.

$$(z + 1)(\bar{z} - 2) = (\bar{z} + 1)(z - 2) \quad \text{الحل:}$$

$$z\bar{z} - 2z + \bar{z} - 2 = z\bar{z} - 2\bar{z} + z - 2$$

$$-2z + \bar{z} = -2\bar{z} + z$$

$$-3z = -3\bar{z} \Rightarrow z = \bar{z}$$

مجموعة الأعداد يحقق مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (3): بفرض: $w = \frac{\bar{z}}{1+z}$ حيث:

$$z = x + yi \quad \text{و} \quad w = X + Yi \quad \text{و} \quad z \neq -1$$

(1) اكتب بدلالة x و y كل من X و Y .

(2) أثبت أنه إذا كان w تخليطياً بحتاً كانت مجموعة النقاط $M(z)$ هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل:

$$w = \frac{(x-iy)}{(1+x-iy)} \times \frac{(1+x+iy)}{(1+x+iy)} \quad (1)$$

$$w = \frac{x + x^2 + xyi - yi - xyi + y^2}{(1+x)^2 + y^2}$$

$$w = \frac{x^2 + x + y^2}{(1+x)^2 + y^2} + \frac{-y}{(1+x)^2 + y^2}i$$

$$\text{ومنه } X = \frac{x^2+x+y^2}{(1+x)^2+y^2}, \quad Y = \frac{-y}{(1+x)^2+y^2}$$

(2) حتى يكون w تخليطياً بحتاً يجب أن يكون: $X = 0$

$$x^2 + x + y^2 = 0$$

$$\text{نتم: } x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + y^2 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة مركزها $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ونصف

قطرها $r = \frac{1}{2}$ ولكن ما عدا النقطة $(-1, 0)$

مجموعات نقطية وعددية:

مجموعة النقاط $M(z)$:

$$|z - a| = r \quad \bullet$$

$M(z)$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها r .

$$|z - a| = |z - b| \quad \bullet$$

$M(z)$ تمثل مستقيم محور القطعة $[AB]$

$$\text{عدد } \text{Re}(z) = \text{عدد} \quad \bullet$$

$M(z)$ تمثل مستقيم شاقولي (عدد x)

$$\text{عدد } \text{Im}(z) = \text{عدد} \quad \bullet$$

$M(z)$ تمثل مستقيم أفقي (عدد y)

$$\arg(z) = \theta \quad \bullet$$

$M(z)$ تمثل نصف مستقيم مفتوح المبدأ يصنع الزاوية θ مع محور الفواصل (ox)

$$\arg(z) = 0 \quad \bullet$$

$M(z)$ تمثل القسم الموجب من محور الفواصل (ox)

تذكر:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad -$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad -$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) \quad -$$

مثال (1): ليكن $z_1 = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

(1) عين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق كل من:

$$\arg(z \cdot z_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg\left(\frac{z}{i}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z \cdot z_1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) + \arg(z_1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{الحل:}$$

$$\arg(z) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل نصف مستقيم مفتوح المبدأ

يصنع الزاوية $\frac{\pi}{4}$ مع (ox)

$$\arg\left(\frac{z}{i}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) - \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\arg(z) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل نصف مستقيم مفتوح المبدأ و يصنع الزاوية π مع (ox)

(2) بفرض: $a = 1 - i$, $b = -2 + 3i$

$$|z - 1 + i| = |z + 2 - 3i| \quad \text{و}$$

$$|z - a| = |z - b| \quad \text{الحل:}$$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل محور القطعة $[AB]$

إذا طلب إيجاد معادلته:

إيجاد معادلته نفرض $z = x + iy$

السؤال الأول:

ليكن ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A ننشئ خارجه مثلثين قائمين في A ومتساوي الساقين ABJ و ACF ولتكن الأعداد العقدية:

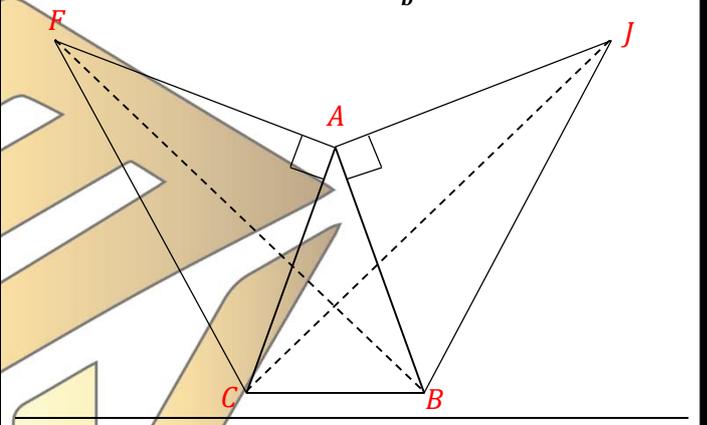
f و z و c و b و a تمثل النقاط: F و J و C و B و A بالترتيب، نتخذ معلماً مبدأ النقطة A والمطلوب:

(1) احسب بدلالة b و c العددين f و z

(2) اكتب العدد $\frac{f-b}{c-j}$ بالشكل الجبري.

(3) أثبت أن: $JC = BF$ وأن المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

(4) بفرض A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(J, 2)$ و $(F, 3)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ احسب $\frac{c}{b}$ واستنتج قياس الزاوية \widehat{BAC}



السؤال الثاني:

لتكن A و B و C النقاط التي تمثلها الأعداد العقدية

$a = 2 + i$ و $b = -1 - 2i$ و $c = -i$ والمطلوب:

أوجد $\frac{b-a}{c-a}$ واستنتج أن النقاط A و B و C على إستقامة واحدة.

السؤال الثالث:

لتكن النقطتان A و B الممثلة للأعداد العقدية:

$$z_A = -\sqrt{3} + i, z_B = -2i$$

(1) أثبت أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2.

(2) اكتب z_A بالشكل الأسّي ثم جد العدد العقدي z_C الممثل للنقطة C التي تجعل المبدأ مركز ثقل المثلث ABC .

(3) أثبت أن:

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

السؤال الرابع:

لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z = 2 - 3i$

جد العدد العقدي z' الممثل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يلي:

(1) T الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$

(2) H التحاكي الذي مركزه $A(1 + i)$ ونسبته 2

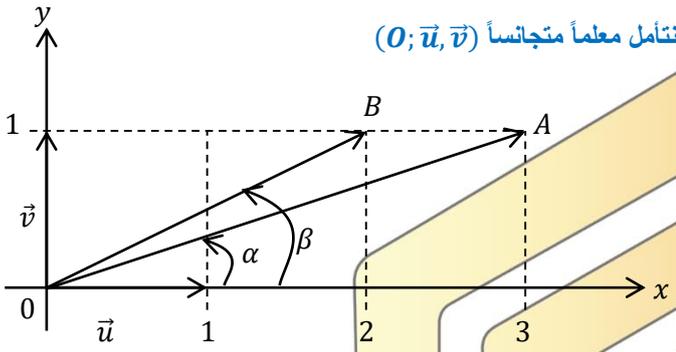
(3) R الدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

(4) S التناظر الذي مركزه $A(-1 + 2i)$

(5) S التناظر المحوري الذي محوره ox

السؤال الخامس:

نتأمل معلماً متجانساً $(O; \vec{u}, \vec{v})$



(1) اكتب بالشكل الجبري كل من العددين z_A و z_B الممثلين للنقاط A و B

(2) احسب $z = z_A \cdot z_B$ بالشكل الجبري.

(3) احسب قيمة $\alpha + \beta$

السؤال السادس:

تمثل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D أثبت أن الرباعي $ABCD$ يكون متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان:

$$a + c = b + d$$

السؤال الثاني:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{-1-2i-2-i}{-i-2-i} = \frac{-3-3i}{-2-2i}$$

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{(-3-3i)}{(-2-2i)} \times \frac{(-2+2i)}{(-2+2i)}$$

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{6-6i+6i+6}{4+4} = \frac{3}{2}$$

$$\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = 0$$

\overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} مرتبطان خطياً ومنه A و B و C تقع على إستقامة واحدة.

السؤال الثالث:

$$|z_{OA}| = \sqrt{3+1} = 2, |z_{OB}| = \sqrt{4} = 2 \quad (1)$$

مما يعني أن النقطتان A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O ونصف قطرها يساوي 2.

$$z_A = -\sqrt{3} + i \Rightarrow r = \sqrt{3+1} = 2 \quad (2)$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$z_A = 2 \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_O = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

$$0 = \frac{-\sqrt{3} + i - 2i + z_C}{3} \Rightarrow z_C = \sqrt{3} + i$$

$$l_1 = z_C - z_A = \sqrt{3} + i + \sqrt{3} - i = 2\sqrt{3} \quad (3)$$

$$l_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

$$l_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) (-2i + \sqrt{3} - i)$$

$$l_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (\sqrt{3} - 3i)$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2} + i\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$l_1 = l_2 \text{ محققة}$$

وهذا يعني أن النقطة C هي صورة النقطة B وفق الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\left(+\frac{\pi}{3}\right)$ والمثلث ABC متساوي الأضلاع.

حل ورقة العمل اليدوية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

$a = 0$ مبدأ.

(1) J صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$j - a = e^{\frac{\pi}{2}i}(b - a) \Rightarrow j = ib$$

F صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$f - a = e^{-\frac{\pi}{2}i}(c - a) \Rightarrow f = -ic$$

$$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-ic-b}{c-ib} = \frac{(-b-ic)(c+ib)}{(c-ib)(c+ib)} \quad (2)$$

$$\frac{f-b}{c-j} = \frac{-bc - b^2i - c^2i + bc}{c^2 + b^2} = \frac{-i(b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2)}$$

$$\frac{f-b}{c-j} = -i$$

$$\arg\left(\frac{f-b}{c-j}\right) = \arg(-i) \Rightarrow (\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{BF}) = -\frac{\pi}{2} \quad (3)$$

(BF) و (CJ) متعامدان

$$\left| \frac{f-b}{c-j} \right| = |-i| \Rightarrow \frac{BF}{JC} = 1 \Rightarrow BF = JC$$

$$a = \frac{1b+1c+3f+2j}{1+1+3+2} \quad (4)$$

$$0 = \frac{b+c+3(-ic)+2(ib)}{7}$$

$$b+c-3ic+2ib=0 \Rightarrow c-3ic=-b-2ib$$

$$(1-3i).c = (-1-2i).b$$

$$\frac{c}{b} = \frac{(-1-2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{-1-3i-2i+6}{1+9} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\widehat{BAC} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$$

$$\widehat{BAC} = \arg\left(\frac{c}{b}\right) = \arg\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \widehat{BAC} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ورقة عمل منزلية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a = 2 - 2i, b = -1 + 7i$$

$$c = 4 + 2i, d = -4 - 2i$$

(1) لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي

$\omega = -1 + 2i$ أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة واحدة مركزها Ω ونصف قطرها 5.

(2) ليكن العدد e الممثل للنقطة E منتصف AB أحسب e ثم برهن أن:

$$\frac{a - e}{d - e} = \frac{c - e}{a - e}$$

(3) ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC .

السؤال الثاني:

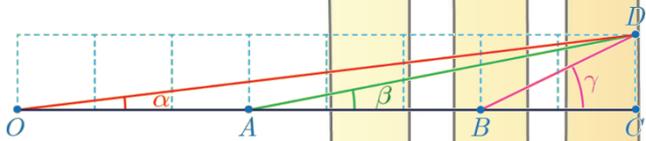
تأمل الشكل حيث α و β و γ هي قياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$.

(1) اكتب بالشكل الجبري الأعداد العقدية الممثلة للنقاط:

O و A و B و D

(2) اكتب الأعداد العقدية الممثلة للأشعة \overrightarrow{OD} و \overrightarrow{AD} و \overrightarrow{BD} بالشكلين الجبري والأسّي (بدلالة α و β و γ)

(3) استنتج قيمة $\alpha + \beta + \gamma$



السؤال الثالث:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقاط A و B و M التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية:

$$a = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$b = 1 + i, m = 1$$

(1) جد العدد العقدي c الممثل للنقطة C صورة A وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(2) جد العدد العقدي d الممثل للنقطة D صورة B وفق انسحاب شعاعه $\vec{w}(-1, 0)$

السؤال الرابع:

في معلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ونعرف النقطتين A و B الممثلتان بالعددين العقديين $a = -2$ و $b = i$ ونفرض كل نقطة $M(z)$

$$z = \frac{z_M - a}{z_M - b}$$

حيث $z \neq i$ عيّن T مجموعة النقاط M التي يكون عندها z تخيلياً بحتاً.

$$z' = 2 - 3i + 1 + 2i \Rightarrow z' = 3 - i \quad (1)$$

$$z' - 1 - i = 2(2 - 3i - 1 - i) \quad (2)$$

$$\Rightarrow z' - 1 - i = 2 - 8i \Rightarrow z' = 3 - 7i$$

$$z' = e^{-\frac{\pi}{2}i}(2 - 3i) \quad (3)$$

$$\Rightarrow z' = -i(2 - 3i) \Rightarrow z' = -3 - 2i$$

$$z' + 1 - 2i = -(2 - 3i + 1 - 2i) \quad (4)$$

$$\Rightarrow z' + 1 - 2i = -3 + 5i \Rightarrow z' = -4 + 7i$$

$$z' = \bar{z} = 2 + 3i \quad (5)$$

السؤال الخامس:

$$A(3,1) \Rightarrow z_A = 3 + i \quad (1)$$

$$B(2,1) \Rightarrow z_B = 2 + i$$

$$z = (3 + i)(2 + i) \quad (2)$$

$$\Rightarrow z = 6 + 3i + 2i - 1 \Rightarrow z = 5 + 5i$$

$$z_A = 3 + i$$

$$r = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\theta_A = \alpha \Rightarrow z_A = \sqrt{10}e^{i\alpha}$$

$$z_B = 2 + i$$

$$r = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\theta_B = \beta \Rightarrow z_B = \sqrt{5}e^{i\beta}$$

$$z = \sqrt{10}e^{i\alpha} \cdot \sqrt{5}e^{i\beta} = \sqrt{50}e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow z = 5\sqrt{2}e^{i(\alpha+\beta)}$$

(3) بالمقارنة بين الشكلين الجبري والأسّي:

$$5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i(\alpha+\beta)}$$

نقسّم الطرفين على 5:

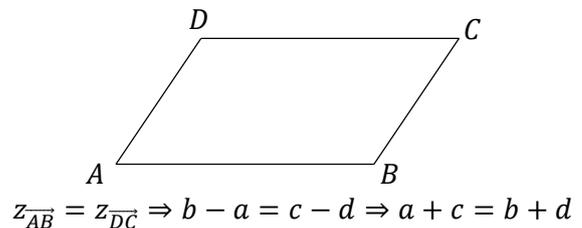
$$\sqrt{2}e^{i(\alpha+\beta)} = 1 + i \Rightarrow e^{i(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = 1e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$$

بالمقارنة نجد:

السؤال السادس:



$$l_2 = (c - e)(d - e)$$

$$l_2 = \left(4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right) \left(-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right)$$

$$l_2 = \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right) \left(-\frac{9}{2} - \frac{9}{2}i\right)$$

$$l_2 = -\frac{63}{4} - \frac{63}{4}i + \frac{9}{4}i - \frac{9}{4}$$

$$l_2 = -\frac{72}{4} - \frac{54}{4}i = -18 - \frac{27}{2}i$$

$$l_1 = l_2 \text{ محققة}$$

$$(3) \text{ وجدنا أن } \frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

$$\arg\left(\frac{a-e}{d-e}\right) = \arg\left(\frac{c-e}{a-e}\right)$$

$$(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}) = (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC})$$

نستنتج (EA) منصف داخلي للزاوية DEC

السؤال الثاني:

$$O(0,0) \Rightarrow z_O = 0 \quad (1)$$

$$A(3,0) \Rightarrow z_A = 3$$

$$B(6,0) \Rightarrow z_B = 6$$

$$D(8,1) \Rightarrow z_D = 8 + i$$

$$z_{\overline{OD}} = 8 + i \quad (2)$$

$$r = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}$$

$$\theta = \alpha \Rightarrow z_{\overline{OD}} = \sqrt{65}e^{i\alpha}$$

$$z_{\overline{AD}} = 5 + i$$

$$r = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\theta = \beta \Rightarrow z_{\overline{AD}} = \sqrt{26}e^{i\beta}$$

$$z_{\overline{BD}} = 2 + i$$

$$r = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \gamma \Rightarrow z_{\overline{BD}} = \sqrt{5}e^{i\gamma}$$

(3) بالمقارنة بين الشكلين الجبري الآسي:

$$\sqrt{65}e^{i\alpha} \cdot \sqrt{26}e^{i\beta} \cdot \sqrt{5}e^{i\gamma} = (8 + i)(5 + i)(2 + i)$$

$$\Rightarrow \sqrt{65 \times 26 \times 5}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = (40 + 8i + 5i)(2 + i)$$

$$\Rightarrow \sqrt{65 \times 130}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = (39 + 13i)(2 + i)$$

$$\Rightarrow \sqrt{65 \times 65 \times 2}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = 78 + 39i + 26i - 13$$

$$\Rightarrow 65\sqrt{2}e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = 65 + 65i$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$\Rightarrow e^{(\alpha+\beta+\gamma)i} = e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث تطبيقات الأعداد العقدية

السؤال الأول:

(1) المركز $\Omega(-1,2)$ ونصف القطر $r = 5$

معادلة الدائرة: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

نحرب $A(2, -2)$

$$(2 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \text{ محققة}$$

إذا A تنتمي إلى الدائرة.

نحرب $B(-1,7)$

$$(-1 + 1)^2 + (7 - 2)^2 = 25$$

$$0 + 25 = 25 \text{ محققة}$$

إذا B تنتمي إلى الدائرة.

نحرب $C(4,2)$

$$(4 + 1)^2 + (2 - 2)^2 = 25$$

$$25 = 25 \text{ محققة}$$

إذا C تنتمي إلى الدائرة.

نحرب D

$$(-4 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 = 25$$

$$9 + 16 = 25 \Rightarrow 25 = 25 \text{ محققة}$$

إذا D تنتمي إلى الدائرة.

$$e = \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

$$e = \frac{2 - 2i - 1 + 7i}{2} = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{c-e}{a-e}$$

$$(a - e)^2 = (d - e)(c - e)$$

$$l_1 = (a - e)^2 = \left(2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\right)^2$$

$$l_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{2}i\right)^2$$

$$l_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{9}{2}i\right) + \left(\frac{9}{2}i\right)^2$$

$$l_1 = \frac{9}{4} - \frac{54}{4}i - \frac{81}{4}$$

$$l_1 = -\frac{72}{4} - \frac{54}{4}i = -18 - \frac{27}{2}i$$

$$c - m = i(a - m) \quad (1)$$

$$c - 1 = i \frac{\sqrt{3} + 2}{2} - \frac{1}{2} - i$$

$$c - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$d = b - 1 \Rightarrow d = i \quad (2)$$

السؤال الرابع:

طريقة أولى:

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } -\frac{\pi}{2} \Leftarrow z' \text{ تخيلي بحت}$$

$$z = \frac{z_M - a}{z_M - b}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_M - a}{z_M - b}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} \text{ أو } -\frac{\pi}{2}$$

M_z تمثل دائرة قطرها AB ما عدا النقطة $(0,1)$

طريقة ثانية:

بفرض $z = x + yi$

$$z = \frac{(x + iy + 2)(x - iy + i)}{(x + iy - i)(x - iy + i)}$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2 - iyx + ix + iyx + y^2 - y + 2x - 2iy + 2i}{x^2 + (y - 1)^2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2 + 2x + y^2 - y + ix - 2iy + 2i}{x^2 + (y - 1)^2}$$

يكون المقدار تخيلي عندما:

$$x^2 + 2x + y^2 - y = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

تمثل دائرة مركزها $(-1,0)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{5}}{2}$

التحليل التوافقي

متشور ذي الحدين

$$(a + b)^n = T_0 + T_1 + \dots + T_n$$

كيفية إيجاد أحد الحول في متشور ذي الحدين:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{(n-r)} b^r$$

يستخدم:

- 1) إيجاد أمثال x^n أو الحد الذي يحوي x^n
- 2) إيجاد الحد الثابت المستقل عن x (أمثال x^0)

ملاحظة:

في مسائل حساب عدد الطرق (نتائج) إذا وجد في صيغة السؤال:
 ① على الأقل: منها وطالع.
 ② على الأكثر: منها ونازل.

التوافيق

$$\binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

يستخدم عندما تكون r مجموعة

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

يستخدم في تبسيط الحساب عندما:

$$\begin{aligned} r > \frac{n}{2} \\ \binom{n}{r} &= \binom{n}{n-r} \\ \binom{n}{1} &= n, \quad \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{n} &= 1, \quad \binom{n}{0} = 1 \end{aligned}$$

الترتيب

$$n, r \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \geq r \geq 1$$

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_n^1 = n, \quad P_n^n = n!$$

ملاحظة:

عند تعيين قيم مجهول (حل معادلة) يجب أن نكتب شرط الحل:

ترتيب: فوق \geq تحت

توافيق: فوق \leq تحت

متراجحين أكبر (تقاطعهم كبير)

متراجحين أصغر (تقاطعهم صغير)

قوانين الحساب

العاملية

$$n!$$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n! = n(n-1)!$$

يستخدم عند الإختصار ودائماً تبدأ من الكبير لتصل إلى الصغير

$$1! = 1, \quad 0! = 1$$

مضى لا نضرب بالتباديل:

- ① إذا كان السحب معاً.
- ② إذا كانت عناصر النتيجة متشابهة.
- ③ إذا ذكر ترتيب معين في الطلب.

كيف نضرب بالتباديل؟

إذا وجد عناصر متشابهة

$$\frac{\text{إجمالي}}{\text{المتشابهة}}$$

$$(a, a, b) = \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 3$$

$$(a, a, a, b, b) = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10$$

عناصر مختلفة

$$\text{إجمالي}$$

$$(a, b, c) = 3!$$

$$(a, b) = 2!$$

مسائل السحب

على التالي دون إعادة

نستخدم المبدأ الأساسي في العد

ولا ننسى أن نضرب بتباديل المجموعات الموافقة من عناصر مختلفة

يوجد تناقص

على التالي مع إعادة

نستخدم المبدأ الأساسي في العد

ولا ننسى أن نضرب بتباديل المجموعات الموافقة من عناصر مختلفة

لا يوجد تناقص

معاً

نستخدم قانون التوافيق ولا ننسى بالتباديل

$$\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} \quad (1)$$

$$\frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n)! - (n-1)!} \quad (2)$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n-1)!}{n \cdot (n-1)!} - \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

$$\frac{(2n)! - (2n-1)!}{2(n)! - (n-1)!} = \frac{2n \cdot (2n-1)! - (2n-1)!}{2n \cdot (n-1)! - (n-1)!} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{(2n-1)! \cdot [2n-1]}{(n-1)! \cdot [2n-1]} = \frac{(2n-1)!}{(n-1)!}$$

• الترتيب: P_n^r

$$P_5^2 = 5 \times 4 = 20$$

$$P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

$$P_{n+1}^3 = (n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)$$

مثال ①: عين n التي تحقق: $P_{n+2}^4 = 14P_n^3$

$$\text{شرط الحل: } n+2 \geq 4 \quad n \geq 3 \cap n \geq 2$$

$$\Rightarrow n \geq 3$$

$$(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) = 14n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$

$$n^2 + n + 2n + 2 = 14n - 28$$

$$n^2 - 11n + 30 = 0$$

$$(n-6) \cdot (n-5) = 0$$

$$\text{إما: } n-6=0 \Rightarrow n=6 \text{ مقبول}$$

$$\text{أو: } n-5=0 \Rightarrow n=5 \text{ مقبول}$$

• التوافيق: $\binom{n}{r}$

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

مثال ①: عين قيمة n في كل حالة:

$$P_{n+3}^3 = 16 \binom{n+2}{2} \quad (1)$$

$$\binom{15}{2n} = \binom{15}{n+3} \quad (2)$$

الحل:

$$(1) \text{ شرط الحل: } n+2 \geq 2 \quad n+3 \geq 3 \\ n \geq 0 \cap n \geq 0$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 16 \times \frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1}$$

$$n+3 = 8 \Rightarrow n = 5 \text{ محققة}$$

$$(2) \text{ شرط الحل: } 15 \geq 2n \geq 0, \quad 15 \geq 3+n \geq 0$$

إما: تحت = تحت

$$\Rightarrow 2n = n+3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow \text{مقبول}$$

أو: فوق = تحت + تحت

$$\Rightarrow 2n + n + 3 = 15 \Rightarrow 3n = 12 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \text{مقبول}$$

مثال ②: أثبت صحة العلاقة:

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

الحل:

$$L_1 = \frac{\frac{(n+1)!}{(n-r)! \cdot (r+1)!}}{\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!} \cdot \frac{r!}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{r+1} = L_2$$

محققة.

منشور ذي الحدين:

مثال (1): انشر ما يلي $(1 - i)^5$

الحل:

$$+ \binom{5}{0} \cdot 1^5 \cdot i^0 = 1$$

$$- \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot i^1 = -5i$$

$$+ \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot i^2 = -10$$

$$- \binom{5}{3} \cdot 1^2 \cdot i^3 = +10i$$

$$+ \binom{5}{4} \cdot 1^1 \cdot i^4 = +5$$

$$- \binom{5}{5} \cdot 1^0 \cdot i^5 = -i$$

$$\Rightarrow (1 - i)^5 = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i$$

$$\Rightarrow (1 - i)^5 = -4 + 4i$$

مثال (2): ما هي أمثال الحد $x^2 \cdot y$ في منشور $(\frac{y^2}{x} + \frac{x}{y})^8$

الحل:

$$T_r = \binom{8}{r} \left(\frac{y^2}{x}\right)^{8-r} \left(\frac{x}{y}\right)^r = \binom{8}{r} (y^2 \cdot x^{-1})^{8-r} (x \cdot y^{-1})^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{8}{r} y^{16-2r} \cdot x^{-8+r} \cdot x^r \cdot y^{-r}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{8}{r} y^{16-3r} x^{-8+2r}$$

$$-8 + 2r = 2 \Rightarrow r = 5 \quad \text{حتى نحصل على } x^2 \text{ يجب تحقق:}$$

$$16 - 3r = 1 \Rightarrow r = 5 \quad \text{حتى نحصل على } y \text{ يجب تحقق:}$$

$$r = 5 \text{ المحققة للمنشور هي}$$

$$T_5 = \binom{8}{5} y^{16-15} x^{-8+10} = 56x^2 \cdot y$$

أمثال $x^2 \cdot y$ هي 56

المبدأ الأساسي في العد:

مثال (1): يتألف مجلس إدارة نادي من خمس أعضاء بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس وأمين سر للنادي؟

الحل:

$$\text{طريقة } 5 \times 4 \times 3 = 60$$

مثال (2): رف يحوي خمس كتب لمؤلفين ثلاث كتب للمؤلف A وكتابان للمؤلف B.

(1) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف.

(2) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف بشرط أن يكون أول كتابين للمؤلف A.

(3) بكم طريقة يمكن ترتيب الكتب على الرف بشرط أن لا نضع كتابين متجاورين لنفس المؤلف.

الحل:

$$(1) \text{ طريقة } 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$(2) \text{ طريقة } 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 36$$

$$(3) \text{ طريقة } 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

مثال (3): يحتوي صندوق على خمس كرات مرقمة 1, 2, 3, 4, 5. نسحب كرتين على التوالي مع إعادة.

(1) كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب.

(2) كم عدد النتائج المختلفة والتي تشتمل على كرتين مجموعهما عدد فردي.

الحل:

$$(1) \text{ نتيجة } 5 \times 5 = 25$$

$$(2) \text{ نتيجة } 2 \times 3 \times 2 = 12 \Rightarrow \{\text{للتبادل}\} \times 2 \text{ (ف, ز)}$$

مثال (4): نريد تأليف لجنة مكونة من (مدير ونائب ومدير وأمين سر) من مجموعة تضم خمسة أشخاص، بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة علماً أنه في المجموعة شخصين متخصصين لا يجتمعان في اللجنة ذاتها؟

الحل:

نفرض أن A و B متخصصان و C, C, C غير متخصصين حتى ما يجتمع A و B في نفس اللجنة هناك ثلاث حالات:

$$\text{إما: } (C, C, C) \Rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\text{أو: } (A, C, C) \times 3 \Rightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 3 = 18$$

$$\text{أو: } (B, C, C) \times 3 \Rightarrow 1 \times 3 \times 2 \times 3 = 18$$

طريقة $6 + 18 + 18 = 42 = \text{عدد الطرق الكلية}$

مثال (5): لتكن المجموعة: $S = \{1, 2, 5, 8, 9\}$

- (1) كم عدداً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلفة الأرقام يمكن تشكيله من S ؟
- (2) كم عدداً زوجياً مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله؟
- (3) كم عدداً زوجياً ومختلف الأرقام مؤلفاً من ثلاث منازل يمكن تشكيله؟
- (4) كم عدداً فردياً مؤلفاً من ثلاث منازل وهو أكبر تماماً من 200 يمكن تشكيله؟
- (5) كم عدداً فردياً مؤلفاً من ثلاث منازل مختلفة الأرقام وهو أكبر تماماً من 200 يمكن تشكيله؟

الحل:

- (1) عدد $5 \times 4 \times 3 = 60$
- (2) عدد $5 \times 5 \times 2 = 50$
- (3) عدد $4 \times 3 \times 2 = 24$
- (4) عدد $4 \times 5 \times 3 = 60$
- (5) حالة (1): $4 \times 3 \times 1 = 12$
- حالة (2): $3 \times 3 \times 1 = 9$
- حالة (3): $3 \times 3 \times 1 = 9$

عدد $12 + 9 + 9 = 30$ نتيجة الأعداد

استخدام قانون التوافيق:

نستخدم قانون التوافيق في المسائل التي لا تهتم بالترتيب مثل:

- (1) تشكيل لجان نشاط (عمل) (كلي) (مطلوب)
- (2) تشكيل مثلثات من نقاط على دائرة (عدد النقاط) (3)
- (3) تشكيل قطع مستقيمة (عدد النقاط) (2)
- (4) تشكيل الأشعة غير الصفيرية (عدد النقاط) $2 \times$

(5) عدد المضلعات الرباعية من نقاط على دائرة: (عدد النقاط) (4)

(6) عدد المستطيلات من نقاط على دائرة: (عدد أقطار الدائرة) (2)

(7) المصافحة (الأشخاص) (2)

(8) تشكيل مجموعات جزئية (الكلي) (المطلوب)

(9) السحب معاً (الكلي) (المطلوب)

(10) اختيار أسئلة في امتحان.

(11) تشكيل متوازيات أضلاع أو مستطيلات في شبكة

$$\binom{شاقولي}{2} \times \binom{أفقي}{2}$$

(12) عدد أقطار مضلع محدب مؤلف من n رأس، بحسب بالشكل:

$$\binom{n}{2} - n$$

(13) توزيع هدايا على أشخاص (عدد الهدايا نفس عدد الأشخاص)

$$n!$$

(14) توزيع هدايا على أشخاص (عدد الهدايا أكثر من عدد الأشخاص بواحد)

$$\binom{الهدايا}{2} \times n!$$

(15) عدد نقاط تلاقي أقطار مضلع محدب مؤلف من n رأس حيث $n \geq 5$

$$\binom{n}{4} = \text{عدد النقاط}$$

مثال (1): في احد مراكز الخدمة ثلاث مهندسين وخمسة عمال، كم لجنة قوامها مهندس واحد وعمالن يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الخدمة؟

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} = 3 \times 10 = 30$$

مثال (2): نريد تأليف لجنة نشاط مؤلفة من ثلاث أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي 4 شباب و3 بنات.

- (1) كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها.
- (2) كم لجنة مؤلفة من شب وبنتين يمكن تأليفها.

الحل:

(1) ما حدد النوع نعتد على العدد الكلي

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{2} = 4 \times 3 = 12$$

مثال (3): يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 بيضاء و 2 سوداء نسحب من الصندوق ثلاث كرات معاً.

- (1) بكم طريقة نستطيع سحب كرتين حمرايين فقط.
- (2) بكم طريقة يمكن سحب كرتين بيضاء على الأقل.

الحل:

$$\binom{R, R, R'}{1}$$

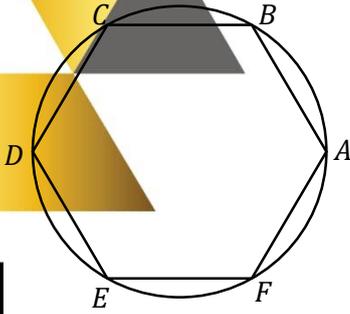
$$\text{طريقة} = \binom{3}{2} \times \binom{6}{1} = 3 \times 6 = 18$$

$$\binom{w, w, w'}{2} \text{ أو } \binom{w, w, w}{2}$$

$$\text{عدد الطرق} = \binom{4}{2} \times \binom{5}{1} + \binom{4}{3} = 34$$

5) ما عدد المستطيلات التي يمكن تشكيلها من النقاط الموجودة على الدائرة؟

الحل:



1) القطعة المستقيمة تحتاج رأسين

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ قطعة}$$

2) أيضاً الشعاع يحتاج رأسين لكن نضرب بـ 2 لأنه هناك اتجاهين

$$\binom{6}{2} \times 2 = 15 \times 2 = 30 \text{ شعاع}$$

3) المثلث يحتاج ثلاث رؤوس

$$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ مثلث}$$

4) عدد المضلعات الرباعية: مضلع $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$

5) عدد المستطيلات: مستطيل $\binom{3}{2} = \binom{6}{2} = 15$ (عدد أقطار الدائرة)

مثال 9:

1) يريد معلم توزيع 5 هدايا على 5 طلاب، بكم طريقة يمكنه التوزيع؟
2) يريد معلم توزيع 5 هدايا على 4 طلاب، بحيث يحصل كل طالب على هدية واحدة على الأقل، ما عدد النتائج لهذه العملية؟

الحل:

1) توزيع n شغلة على n شخص يتم بطرق $n!$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ طريقة}$$

2) !أشخاص $\binom{هدايا}{2}$

$$\Rightarrow \binom{5}{2} \times 4! = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240 \text{ نتيجة}$$

مثال 10: أثبت أن عدد أقطار مضلع محدد عدد رؤوس $n \geq 4$ يعطى بالصيغة:

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

الحل:

$$\text{عدد الرؤوس} - \left(\text{عدد الرؤوس} \right) = \text{عدد الأقطار}$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \binom{n}{2} - n$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \frac{n \times (n-1)}{2 \times 1} - n$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \frac{n^2 - n}{2} - n$$

$$\Rightarrow \text{عدد الأقطار} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

مثال 4: لتكن المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1) بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعات جزئية مؤلفة ثلاث عناصر.
2) بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعات جزئية مؤلفة من عنصرين مجموعهما فردي.
3) بكم طريقة يمكن تشكيل مجموعات جزئية مؤلفة من عنصرين مجموعهما زوجي.

الحل:

$$1) \text{ طريقة } \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

2) مجموعهما فردي يعني لازم واحد فردي وواحد زوجي

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 6$$

3) إما: العنصرين زوجي أو: العنصرين فردي.

$$\binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 4$$

مثال 5: التقى عشر أصدقاء في حفل، كم عدد المصافحات التي جرت في الحفل إذا كل شخص صافح الأشخاص التسعة الآخرين؟

الحل:

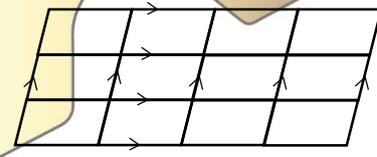
$$\binom{10}{2} = 45 \text{ مصافحة}$$

مثال 6: بكم طريقة يستطيع طالب أن يجيب عن 5 أسئلة من أصل 8 وبكم طريقة يمكن أن يختار طالب 5 أسئلة من 8 علماً أن أول سوالين حلّهما إجباري؟

الحل:

$$\text{طريقة } \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

$$\text{طريقة } \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$



مثال 7: كم عدد متوازيات الأضلاع في الشكل المجاور: متوازي الأضلاع يحتاج مستقيمين أفقيين ومستقيمين شاقوليين

الحل:

$$\text{متوازي أضلاع } \binom{5}{2} \times \binom{4}{2} = 10 \times 6 = 60$$

مثال 8: في الشكل السابق $ABCDEF$ سدس منتظم.

1) ما عدد القطع المستقيمة الواصلة بين رأسين مختلفين في السدس؟

2) ما عدد الأشعة الغير صفرية التي يمكن تشكيلها؟

3) ما عدد المثلثات الواصلة بين ثلاث رؤوس؟

4) ما عدد المضلعات الرباعية التي يمكن تشكيلها من النقاط الموجودة على الدائرة؟

مجموعة أشخاص في مدرسة مؤلفة من أربع طلاب وأستاذين:

- 1- بكم طريقة يمكن ترتيب المجموعة برتل أحادي حيث يكون أستاذ في بداية الرتل وأستاذ في نهاية الرتل.
- 2- كم عدد المصافحات التي يمكن أن تجري بين جميع الأشخاص.
- 3- بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من أستاذ وطالبين.

السؤال الثاني:

ليكن لدينا المنشور $(2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{10}$ أوجد الحد الذي يحوي x^4

السؤال الثالث:

عين قيمة n التي تحقق:

$$3 \binom{2n}{3} = 6P_n^2$$

السؤال الرابع:

صندوق يحوي 5 كرات (ثلاثة منهم حمراء وكرة بيضاء وكرة سوداء) نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع إعادة، بكم طريقة يمكن السحب في الحالات:

(1) الكرات الثلاثة من لون واحد.

(2) الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء.

السؤال الخامس:

لدينا المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$

- (1) كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين مختلفتين يمكن تشكيله من S
- (2) كم عدداً فردياً وأصغر من 300 من ثلاث منازل مختلفة يمكن تشكيله من S

حل ورقة العمل اليدوية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

$$(1) \text{ طريقة } 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 48$$

$$(2) \text{ مصافحة } \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$$(3) \text{ لجنة } \binom{2}{1} \times \binom{4}{2} = 2 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 12$$

السؤال الثاني:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow T_r = \binom{10}{r} (2x)^{10-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} 2^{10-r} x^{10-r} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} 2^{10-r} x^{10-r} x^{-\frac{r}{2}}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{10}{r} 2^{10-r} x^{10-\frac{3}{2}r}$$

نبحث عن الحد الذي يحوي x^4

$$10 - \frac{3}{2}r = 4 \Rightarrow 20 - 3r = 8 \Rightarrow r = 4$$

$$T_4 = \binom{10}{4} 2^6 x^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 64 \times x^4$$

$$\Rightarrow T_4 = 13440x^4$$

السؤال الثالث:

$$3 \binom{2n}{3} = 6P_n^2$$

$$2n \geq 3 \Rightarrow n \geq \frac{3}{2} \cap n \geq 2 \Rightarrow n \geq 2$$

$$3 \times \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times n(n-1)$$

$$\frac{(2n-1)2(n-1)}{6} = n-1 \Rightarrow \frac{2n-1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 2n-1 = 3 \Rightarrow n = 2 \text{ محققة}$$

السؤال الرابع:

(1) سحب ثلاث كرات من نفس اللون:

$$(R, R, R) \text{ أو } (W, W, W) \text{ أو } (B, B, B)$$

$$\text{طريقة } (3 \times 3 \times 3) + (1 \times 1 \times 1) + (1 \times 1 \times 1) = 29$$

(2) الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء:

لا نضرب بالتباديل (لأنه حدد لنا الترتيب)

$$\text{طريقة } 3 \times 1 \times 1 = 3$$

السؤال الخامس:

$$4 \times 2 = 8 \quad (1)$$

$$1 \times 3 \times 2 = 6 \quad (2) \text{ إما}$$

$$\text{أو } 1 \times 3 \times 3 = 9$$

$$\text{عدد الطرق } = 6 + 9 = 15$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

(1)

مئات	عشرات	آحاد	الناتج
4	4	3	48
1,2,3,4	يمكن أخذ أي عدد من الأربعة الباقية	بقي ثلاث أعداد	

لا يمكن اختيار الصفر

(2) رمز $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

السؤال الثاني:

$$T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r \Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} (x^{-2})^r \Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-r} x^{-2r}$$

$$\Rightarrow T_r = \binom{n}{r} x^{n-3r}$$

$$n - 3r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{3}n$$

الشرط: n من مضاعفات العدد 3

السؤال الثالث:

(1) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

(2) $(3,3,3,3, -2)$

$5 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 5$

السؤال الرابع:

(1) $\binom{7}{3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$

(2) $(ف, ف, ز) + (ز, ز, ز)$

$\binom{3}{3} + \binom{4}{2} \binom{3}{1} = 19$

ورقة عمل منزلية في بحث التحليل التوافقي

السؤال الأول:

لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(1) كم عدداً مختلف الأرقام مؤلف من ثلاث منازل يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S

(2) إذا أردنا أن نضع رمز موبايل مكون من أربع خانوات مختلفة مثني مثني مأخوذين من المجموعة S ، بكم طريقة يمكن أن نضع هذا الرمز.

السؤال الثاني:

ليكن لدينا المقدار:

$$\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$$

ما الشرط حتى يحوي المنشور السابق على حد مستقل عن x

السؤال الثالث:

نملئ عشوائياً كل خانة من الخانات الخمسة الآتية بأخذ العددين $-2, 3$

(1) بكم طريقة يمكن أن نملئ الخانات الخمسة.

(2) بكم طريقة يمكن أن نملئ الخانات الخمسة بحيث يكون مجموع الأعداد عشرة.

السؤال الرابع:

مغلف يحوي 7 متماتلة مرقمة $\{1, 2, 3, \dots, 7\}$ نسحب ثلاث بطاقات معاً

(1) ما عدد النتائج الممكنة للسحب.

(2) ما عدد النتائج المختلفة لظهور ثلاث ارقام مجموعها من مضاعفات العدد 2

الإحتمالات

برنولي

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

يستخدم عند سحب ثلاث مرات أو أكثر على التوالي مع إعادة أو عند تكرار تجربة ثلاث مرات أو أكثر (مثل تجربة رمي قطعة نقود وأحجار النرد)

لحل مسائل برنولي، نعرّف
عدد مرات التكرار n
احتمال النجاح المطلوب (في المرة الواحدة) p
عدد مرات النجاح المطلوبة x
 $q = 1 - p$

$$E(x) = n \cdot p$$

$$V(x) = n \cdot p \cdot q$$

عند سحب ثلاث شغلات:
إذا كان السحب

على التتالي بدون إعادة

نهتم بالترتيب

جاء كسور غير متناقصة

على التتالي مع إعادة

نهتم بالترتيب

جاء كسور متناقصة

المتحول العشوائي

هو أن نربط كل نتيجة لتجربة احتمالية عشوائية بعدد ما.

لحل مسألة متحول عشوائي:
① نعين قيم لـ x
② نكتب جدول قانون احتمالي.

التوقع الرياضي: $E(x) = \sum x \cdot P(x)$

التباين: $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

الإحزاف المعياري: $\sigma x = \sqrt{V(x)}$

كل شغلة من

صندوق

الجدول

كامل

معاً

نحذف القطر

الرئيسي وما تحته

الجدول

كامل

على التتالي

دون إعادة

نحذف القطر

الرئيسي

على التتالي

مع إعادة

الجدول

كامل

قوانين دومورغان

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$P(A' \cup B') = P(A \cap B)'$$

$$= 1 - P(A \cap B)$$

إحتمال الحدث

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

حيث $n(\Omega)$ هي جميع النتائج التي يمكن أن نحصل عليها عند إجراء تجربة ما.

الحدث المستحيل

$$P(\phi) = 0$$

الحدث الأكيد

$$P(\Omega) = 1$$

الاستقلال الإحتمالي لحدثين A و B

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

الحدث المعاكس

$$P(A') = 1 - P(A)$$

احتمال A علماً أن B قد وقع

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

فائدة:

عند سحب شغلتين: يمكن إنشاء جدول يضم جميع النتائج (فضاء العينة) ونميز:

الإستقلال الإحتمالي لمتحولين عشوائيين x, y

- ① نكتب فضاء العينة
- ② نعين قيم المتحول x والمتحول y
- ③ نكتب جدول قانونهما الاحتمالي
- ④ نكتب جدول قانون احتمالي يضم x و y

نستخدم التوافق

نتائج الحدث (كلي)

مطلوب

جميع النتائج (كلي)

مطلوب

$$P(A) = \frac{\text{جميع النتائج (كلي)}}{\text{نتائج الحدث (كلي)}}$$

$$P(x=2) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, P(x=3) = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$$

x	0	1	2	3	ε
P_x	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
$x \cdot P_x$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{6}{10}$	$E(x) = \frac{16}{10}$
$x^2 \cdot P_x$	0	$\frac{4}{10}$	$\frac{12}{10}$	$\frac{18}{10}$	$E(x^2) = \frac{34}{10}$

التوقع الرياضي:

$$E(x) = \sum x \cdot P_x = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{34}{10} - \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{17}{5} - \frac{64}{25} = \frac{85 - 64}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\sigma x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{21}{25}}$$

التباين:

$$V(x) = \frac{17}{5} - \frac{64}{25} = \frac{85 - 64}{25} = \frac{21}{25}$$

تمرين (2): نتأمل صندوق u_1 يحوي على ثلاث كرات

مرقمة 1 و 2 و 3 وصندوق u_2 يحوي على ثلاث كرات مرقمة 4 و 5 و 6.

نسحب كرة من الصندوق الاول ثم كرة من الصندوق الثاني والمطلوب:

1- اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختبار.

2- نعرف الحدث A : سحب كرتين إحداها على الأقل من مضاعفات العدد (3).

نعرّف الحدث B : سحب كرتين مجموع رقميهما أكبر تماماً من 7 هل A و B مستقلان احتمالياً؟

3- x متحول عشوائي يدل بكل نتيجة سحب على العدد الأصغر.

a- ما هي مجموعة قيم المتحول x .

b- ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي x .

c- احسب التوقع الرياضي $E(x)$.

الحل:

	4	5	6
1	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,4)	(3,5)	(3,6)

1-

$$n(\Omega) = 9$$

$$P(A) = \frac{5}{9}$$

$$P(B) = \frac{3}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{9}$$

$$B) = \frac{3}{9}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{5}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{5}{27}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

A و B غير مستقلين احتمالياً.

تمرين (1): يحتوي صندوق على خمس كرات، ثلاثة حمراء تحمل الأرقام 0 و 1 و 2 وكرتان بيضاء اللون وتحمل الأرقام 0 و 1 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة.

(1) الحدث A : الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته، احسب $P(A)$

(2) الحدث B : جداء رقمي الكرتين هو صفر، والمطلوب:

a احسب احتمال الحدث B .

b احسب احتمال B علماً أن A قد وقع.

c هل A و B مستقلين احتمالياً؟

(3) نعرف متحولاً عشوائياً x يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين، عين مجموعة قيم المتحول x واكتب جدول قانونه الاحتمالي ثم احسب توقعه الرياضي، وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل:

نكتب جدول فضاء العينة:

	R_0	R_1	R_2	W_0	W_1
R_0		(R_0, R_1)	(R_0, R_2)	(R_0, W_0)	(R_0, W_1)
R_1	(R_1, R_0)		(R_1, R_2)	(R_1, W_0)	(R_1, W_1)
R_2	(R_2, R_0)	(R_2, R_1)		(R_2, W_0)	(R_2, W_1)
W_0	(W_0, R_0)	(W_0, R_1)	(W_0, R_2)		(W_0, W_1)
W_1	(W_1, R_0)	(W_1, R_1)	(W_1, R_2)	(W_1, W_0)	

$$n(\Omega) = 20$$

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} \quad (1)$$

$$P(B) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} \quad (a \ 2)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4} \quad (b)$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{20} \quad (c)$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{4}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{25}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

الحدثين غير مستقلين احتمالياً.

(3) يهمننا المجموع للعددين:

	R_0	R_1	R_2	W_0	W_1
R_0		1	2	0	1
R_1	1		3	1	2
R_2	2	3		2	3
W_0	0	1	2		1
W_1	1	2	3	1	

$$n(\Omega) = 20, X = \{0,1,2,3\}$$

$$P(x=0) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}, P(x=1) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$$

$$x = \{1, 2, 3\} \quad -3$$

x	1	2	3	ε
P_x	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{3}{9}$	1
$x \cdot P_x$	$\frac{3}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{9}{9}$	$E(x) = 2$

$$E(x) = \sum x P_x = 2$$

تمرين (3): يحتوي صندوق على ثلاث كرات زرقاء وكرتين خضراء وكرة حمراء

نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق ليكن x المتحول الذي يمثل عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

1- ما هي مجموعة قيم x .

2- اكتب جدول قانون x الإحصائي.

3- احسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

$$x = \left\{ \begin{matrix} 0 & , & 1 & , & 2 \\ (G', G', G') & (G, G', G') & (G, G, G') \end{matrix} \right\} \quad (1)$$

(2)

$$P(x=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$$

$$P(x=1) = \frac{\binom{2}{1} \binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{6 \times 2}{20} = \frac{6}{10}$$

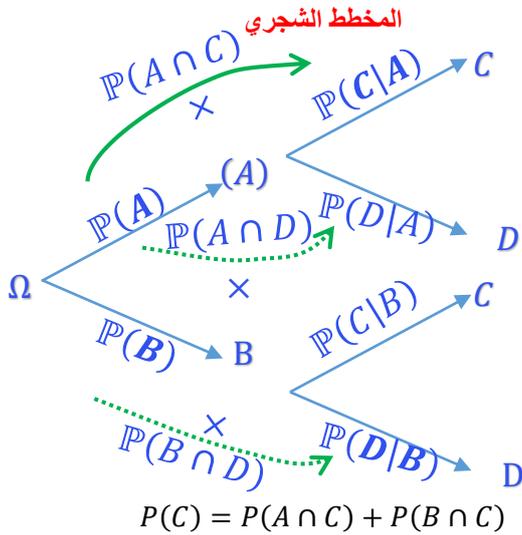
$$P(x=2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{4 \times 1}{20} = \frac{2}{10}$$

x	0	1	2	ε
P_x	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	1
$x \cdot P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$E(x) = 1$
$x^2 \cdot P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$	$E(x^2) = \frac{14}{10}$

التوقع الرياضي: $E(x) = \sum x \cdot P_x = 1$

التباين: $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{10} - 1 = \frac{4}{10}$

الانحراف المعياري: $\sigma x = \sqrt{V(x)} = \frac{2}{\sqrt{10}}$



فكرة الإحصاء الشرطي:

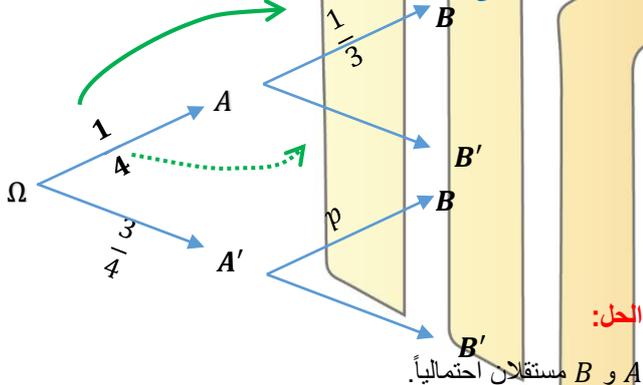
لقد سحبنا... معلوم $B \leftarrow$

فما احتمال... $u \leftarrow$ مطلوب

$$P(\text{معلوم} | \text{مطلوب}) = \frac{P(\text{معلوم} \cap \text{مطلوب})}{P(\text{مطلوب})}$$

مثال (1): A و B حدثين مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطط الشجري المجاور.

عين قيمة P حتى يكون الحدثان A و B مستقلين احتمالياً.



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \dots *$$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} p$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{12} + \frac{3}{4} p \right) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{3}{4} p \quad \text{نعوض في *}$$

$$\frac{3}{4} p = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$9p = 4 - 1 \Rightarrow 9p = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{نضرب بـ 12:}$$

$$P(T) = \frac{30}{100}$$

$$F(T' \setminus F) = x \quad \text{المطلوب:}$$

$$P(T) = \frac{30}{100} \quad \text{لدينا:}$$

$$\frac{6}{10} \times \frac{45}{100} + \frac{4}{10} (1 - x) = \frac{30}{100}$$

$$\frac{270}{1000} + \frac{40}{100} (1 - x) = \frac{30}{100}$$

$$27 + 40 - 40x = 30 \Rightarrow 40x = 37 \Rightarrow x = \frac{37}{40}$$

$$P(T' \setminus F) = \frac{37}{40}$$

$$P(F \cap T') = \frac{40}{100} \times \frac{37}{40} = \frac{37}{100}$$

الإستقلال الإحتمالي لمتحولين:

تمرين (1): صندوق يحوي على ثلاث كرات واحدة حمراء تحمل الرقم

(1) واثنان زرقاوين تحملان الرقمين (2) و (3) نسحب من

الصندوق كرتين على التتالي مع اعادة:

① x متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الزرقاء، اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

② y متحول عشوائي يدل على مجموع رقمين الكرتين، اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

③ اكتب جدول قانون احتمالي مشترك للمتحولين x, y .

④ هل المتحولين x, y مستقلان احتمالياً.

الحل:

II \ I	R_1	B_2	B_3
R_1	(R_1, R_1)	(R_1, B_2)	(R_1, B_3)
B_2	(B_2, R_1)	(B_2, B_2)	(B_2, B_3)
B_3	(B_3, R_1)	(B_3, B_2)	(B_3, B_3)

$$n(\Omega) = 9$$

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

①

②

y_i	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}i$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

③

x \ y	2	3	4	5	6	\mathbb{P}_x
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9} \mathbb{P}(x=0)$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9} \mathbb{P}(x=1)$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9} \mathbb{P}(x=2)$
\mathbb{P}_y	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
	$\mathbb{P}(y=2)$	$\mathbb{P}(y=3)$	$\mathbb{P}(y=4)$	$\mathbb{P}(y=5)$	$\mathbb{P}(y=6)$	

مثال (2): لدينا صندوق يحوي على كرتين سوداء وكرة حمراء نسحب من الصندوق كرة ونسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها ثم نسحب مجدداً كرة:

(1) أعط مخططاً شجرياً للتجربة.

(2) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء.

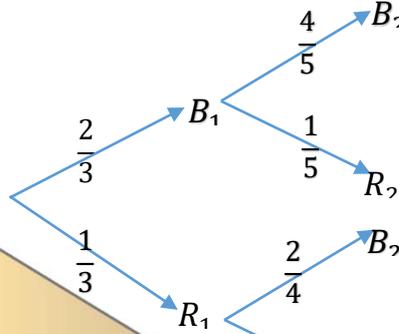
(3) إذا علمت أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة الأولى سوداء؟

(4) x متحول عشوائي يربط بكل نتيجة للسحب عدد الكرات السوداء المسحوبة:

-a ما هي مجموعة قيم x .

-b احسب $P(x=1)$.

الحل:



(1)

(2)

$$P(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

(3) احتمال شرطي \Rightarrow معلوم R_2 مطلوب B_1

$$P(B_1 \setminus R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{4}{9}$$

$$x = \{0, 1, 2\} \quad -a (4)$$

$$P(x=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{2}{15} \quad -b$$

$$P(x=1) = \frac{9}{30}$$

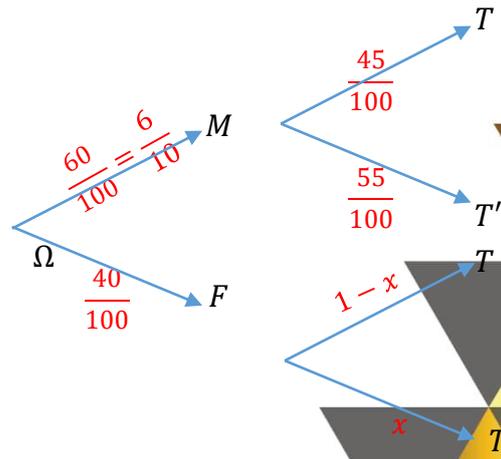
مثال (3): في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور وأن 55% من هؤلاء

لا يلعبون لعبة كرة المضرب، نرمز بالرمز M اختيار طالب ذكر ونرمز بالرمز F اختيار طالبة انثى ونرمز بالرمز T اختيار طالب يلعب كرة

المضرب، عند اختيار أحد الطلاب الموجودين في المدرسة، أعط

مخططاً شجرياً للتجربة، واحسب $P(F \cap T')$

الحل:



مثال (2): يتواجه فريقان A و B في لعبة كرة الطائرة المكونة من خمسة أشواط.

يكسب الفريق A الشوط الواحد باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$ يربح الفريق الذي يكسب أكبر عدد من الأشواط.

A	B
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

ما احتمال أن يربح الفريق B في اللعبة؟

الحل:

تجربة برنولية:

$$n = 5$$

$$p_A = \frac{1}{4}, q_A = \frac{3}{4}$$

$$k_A = 0, 1, 2$$

$$P(B) = P(x_A = 0) + P(x_A = 1) + P(x_A = 2)$$

$$P(B) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$P(B) = \frac{243}{1024} + \frac{405}{1024} + \frac{270}{1024} = \frac{918}{1024}$$

مثال (3): دورة 2017 أولى:

تلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل رمية $\frac{1}{3}$ ، نعرّف x المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار، اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي x واكتب جدول قانونه الإحصائي واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل:

$$n = 3, p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}, k = x$$

$$P(x = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(x = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(x = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{27}$$

$$P(x = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{27}$$

$$P(x = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

x	0	1	2	3	ε
P_x	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

$$E(x) = n \cdot p = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$V(x) = n \cdot p \cdot q = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{التباين:}$$

$$\mathbb{P}[(x = 0) \cap (y = 2)] = \frac{1}{9} \quad (4)$$

$$\mathbb{P}(x = 0) \times \mathbb{P}(y = 2) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}[(x = 0) \cap (y = 2)] \neq \mathbb{P}(x = 0) \times \mathbb{P}(y = 2)$$

إذن x, y غير مستقلان احتمالياً.

مثال (2): 2023 تكميلي:

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X, Y) علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً.

	y	0	1	2	قانون x
x	0				0.3
1			0.14		
قانون y			0.4		1

الحل:

$$P(x = 1) = 0.7 \quad (1)$$

بما أن x و y مستقلين احتمالياً:

$$P(x = 1 \cap y = 2) = P(x = 1) \times P(y = 2)$$

$$\Rightarrow \frac{14}{100} = \frac{7}{10} \times P(y = 2) \Rightarrow P(y = 2) = \frac{2}{10}$$

$$\Rightarrow P(y = 0) = \frac{4}{10}$$

$$P(x = 0 \cap y = 0) = P(x = 0) \times P(y = 0)$$

$$\Rightarrow P(x = 0 \cap y = 0) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$P(x = 0 \cap y = 1) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$P(x = 0 \cap y = 2) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$$

$$P(x = 1 \cap y = 0) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$$

$$P(x = 1 \cap y = 1) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$$

برنولي:

مثال (1): نكرّر عشر مرات تجربة إلقاء لقطعتي نقود متوازنتين.

نسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين، احسب احتمال الحدث:

A : الحصول على وجهين H مرة واحدة على الأقل.

الحل:

فضاء العينة لرمي قطعتين:

$$\Omega = \{(H, H), (T, H), (H, T), (T, T)\}$$

تجربة برنولية: $n = 10$ عدد الرميات.

$p = \frac{1}{4}$: احتمال ظهور وجهين H في مرة واحدة.

$q = \frac{3}{4}$: احتمال عدم ظهور وجهين H .

$K = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ المرات المطلوبة.

$$k' = 0$$

$$P(A') = P(x = 0) = \binom{10}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

السؤال الأول:

	B	B	B	W	W
B		(B, B)	(B, B)	(B, W)	(B, W)
B			(B, B)	(B, W)	(B, W)
B				(B, W)	(B, W)
W					(W, W)
W					

$$n(\Omega) = 10$$

x يهتم فقط بعدد الكرات البيضاء.

$$x = \{0, 1, 2\}$$

$$P(x = 0) = \frac{3}{10}, \quad P(x = 1) = \frac{6}{10}$$

$$P(x = 2) = \frac{1}{10}$$

x	0	1	2	ε
P_x	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$x \cdot P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	$E(x) = \frac{8}{10}$
$x^2 \cdot P_x$	0	$\frac{6}{10}$	$\frac{4}{10}$	$E(x^2) = 1$

$$E(x) = \sum x \cdot P_x = \frac{8}{10} \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \quad \text{التباين:}$$

$$V(x) = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{36}{100}$$

$$\sigma x = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10} \quad \text{الانحراف المعياري:}$$

السؤال الثاني:

$$P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{13}{20}$$

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = \frac{7}{20}$$

$$P(A \setminus B) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10}$$

السؤال الأول:

يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء وكرتان بيضاء.

نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق نسمي x المتحول الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عين مجموعة قيم x واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

السؤال الثاني:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10} \quad P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{4}$$

(1) احسب: $P(A \setminus B)$ و $P(A' \cap B')$ و $P(A \cup B)$ و $P(B')$

(2) هل A و B مستقلان احتمالياً؟

السؤال الثالث:

لدينا صندوقين، الصندوق u_1 يحتوي على كرة سوداء وكرتين بيضاء، ويحتوي الصندوق u_2 على كرتين سوداء وكرتين بيضاء وكرة حمراء.

نختار عشوائياً أحد الصندوقين ونسحب منه كرة.

نسمي B حدث سحب كرة سوداء والمطلوب:

(1) أعط مخططاً شجرياً للتجربة.

(2) احسب $P(B)$

(3) لقد سحبنا كرة سوداء ما احتمال أن تكون من u_1 .

السؤال الرابع:

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء.

عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاث أضعاف عدد الكرات البيضاء.

(1) عند سحب كرة من الصندوق ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء وما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء؟

(2) نسحب ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة نعرف x متحول عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء

المسحوبة:

a - ما هي قيم المتحول x .

b - اكتب جدول قانونه الاحتمالي.

c - احسب التوقع الرياضي والتباين.

السؤال الخامس:

نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين

الظاهرين، ليكن x المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة

مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل

العشوائي x واحسب توقعه الرياضي.

السؤال السادس:

الجدول المجاور هو جدول القانون الاحتمالي لزوج المتحولين (x, y)

من المتحوّلات العشوائية.

أكمل الجدول علماً أن x و y مستقلان احتمالياً.

	0	1	2	P_x
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
P_y	0.3			

$$P(x = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(x = 3) = \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

x	0	1	2	3
P_x	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$E(x) = n \cdot p = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$V(x) = n \cdot p \cdot q = 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{16}$$

السؤال الخامس:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$x = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_x	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$x \cdot P_x$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{42}{36}$	$\frac{40}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{12}{36}$

$$E(x) = \sum x \cdot P_x = \frac{252}{36}$$

السؤال السادس:

	0	1	2	P_x
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
P_y	0.3	0.5	0.2	1

خطوة أولى:

$$P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 1$$

$$0.4 + P(x = 1) + 0.4 = 1 \Rightarrow P(x = 1) = 0.2$$

خطوة ثانية: بما أن x و y مستقلان احتمالياً.

$$P[(x = 1) \cap (y = 2)] = P(x = 1) \times P(y = 2)$$

$$0.04 = 0.2 \times P(y = 2) \Rightarrow P(y = 2) = \frac{0.04}{0.2} = 0.2$$

خطوة ثالثة:

$$P(y = 1) = 1 - P(x = 0) - P(x = 2)$$

$$P(y = 1) = 1 - 0.3 - 0.2 = 0.5$$

خطوة رابعة:

بما أن x و y مستقلان احتمالياً.

$$P[(x = 0) \cap (y = 0)] = P(x = 0) \times P(y = 0)$$

$$P[(x = 0) \cap (y = 0)] = 0.4 \times 0.3 = 0.12$$

وبنفس الأسلوب نوجد جميع احتمالات التقاطعات.

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \quad (2)$$

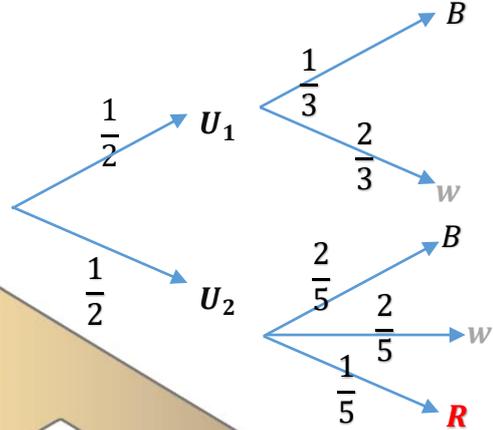
$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

A و B غير مستقلين احتمالياً

السؤال الثالث:

(1)



$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{11}{30} \quad (2)$$

(3) احتمال شرطي \Rightarrow معلوم B مطلوب u_1

$$P(u_1 \setminus B) = \frac{P(u_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11}$$

السؤال الرابع:

(1) بفرض عدد الكرات البيضاء a

إذن فعدد الكرات الحمراء $3a$

\Leftarrow عدد الكرات الكلية $4a$

$$P(R) = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}, \quad P(W) = \frac{1}{4}$$

$$\Omega = \left\{ \binom{W, W, W}{0}, \binom{W, W, R}{1}, \binom{W, R, R}{2}, \binom{R, R, R}{3} \right\}$$

عدد السحب $n = 3$

نجاح الأحمر $p = \frac{3}{4}$

$$q = \frac{1}{4}, k = x = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(x = 0) = \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(x = 1) = \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

حل ورقة العمل المنزلية في بحث الاحتمالات

السؤال الأول:

نتائج سحب ثلاث كرات ممكن أن تكون:

$$(B, B, B), (G, G, G)$$

$$(B, B, G), (B, B, Y), (G, G, B), (G, G, Y)$$

$$(B, G, Y)$$

$$x = \{1, 2, 3\} \quad -1$$

$$P(x = 1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56} \quad -2$$

$$P(x = 3) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

$$P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 1 \quad -3$$

$$P(x = 2) = 1 - P(x = 1) - P(x = 3)$$

$$P(x = 2) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

x	1	2	3	ε
P_x	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$	1
$x \cdot P_x$	$\frac{5}{56}$	$\frac{78}{56}$	$\frac{36}{56}$	$E(x) = \frac{119}{56}$

$$E(x) = \sum x \cdot P_x = \frac{119}{56} \quad \text{التوقع الرياضي:}$$

السؤال الثاني:

	1	1	2	2	3	3
1	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(1,3)
1	(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(1,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)
2	(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,2)	(2,3)	(2,3)
3	(3,1)	(3,1)	(3,2)	(3,2)	(3,3)	(3,3)
3	(3,1)	(3,1)	(3,2)	(3,2)	(3,3)	(3,3)

A: الحصول على وجهين مجموعهما زوجي:

$$P(A) = \frac{20}{36}$$

B: الحصول على وجهين مجموعهما من

$$P(B) = \frac{12}{36} \quad \text{مضاعفات العدد 3:}$$

ورقة عمل منزلية في بحث الاحتمالات

السؤال الأول:

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث خضراء وواحدة صفراء.

نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق ليكن x المتحول الذي يمثل عدد الألوان بين الكرات المسحوبة.

1- ما هي مجموعة قيم x .

2- احسب كلاً من: $P(x = 1)$, $P(x = 3)$

3- استنتج: $P(x = 2)$

4- اسحب التوقع الرياضي.

السؤال الثاني:

تلقي حجر نرد مرتين متتاليتين فيه وجهان مرقمان بالرقم 1 ووجهان

مرقمان بالرقم 2 ووجهان مرقمان بالرقم 3.

1- اكتب فضاء العينة.

2- ما احتمال الحصول على وجهين مجموعهما زوجي.

3- ما احتمال الحصول على وجهين مجموعهما من مضاعفات العدد 3.

السؤال الثالث:

تتألف عائلة من ثلاث أطفال ونقبل عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة انثى ونفرض أن الولادات هي أحداث مستقلة احتمالياً والمطلوب:

1- ما احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة لهم نفس الجنس؟

2- ما احتمال كون الطفل الثالث ذكر؟

3- نعرف x متحول عشوائي يقرن بكل نتيجة عدد الأطفال الذكور لدى العائلة، أوجد x واكتب قانونه الاحتمالي.

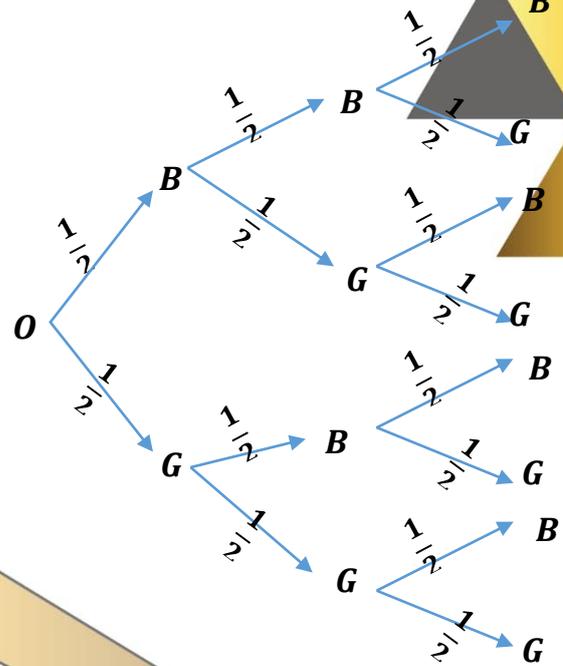
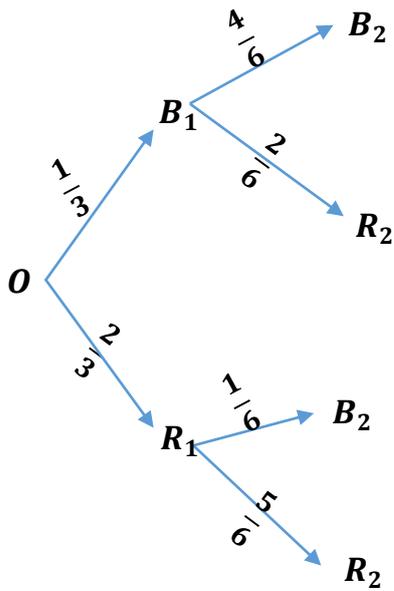
السؤال الرابع:

صندوق يحوي ثلاث كرات، 2 حمراء وواحدة زرقاء، نسحب من الصندوق كرة ثم نعيدها ونضيف 3 كرات من لونها والمطلوب:

1- أعط مخططاً شجرياً للتجربة.

2- ما احتمال سحب كرة حمراء في المرة الثانية.

3- اذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الأولى زرقاء



$$P(R_2) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} = \frac{10}{18} + \frac{2}{18} = \frac{12}{18}$$

$$P(B_1 \setminus R_2) = \frac{P(R_2 \cap B_1)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{12}{18}} = \frac{1}{6}$$

A: الأطفال الثلاث ن نفس الجنس:

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

C: الطفل الثالث ذكر:

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

$$x = \{0,1,2,3\}$$

$$P(x=0) = \frac{1}{8}, P(x=1) = \frac{3}{8}$$

$$P(x=2) = \frac{3}{8}, P(x=3) = \frac{1}{8}$$

x	0	1	2	3
$P(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

الأشعة في الفراغ

الإرتباط الخطي

ثلاث أشعة

الشعلة الثاني:

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

حيث \vec{u} و \vec{v} غير مرتبطين خطياً

تفيد في:

المستقيم الحامل الشعاع \vec{w} يوازي المستوي الذي يحوي الشعاعين \vec{u} و \vec{v}

الشعلة الأول:

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

حيث \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطياً

تفيد في:

الأشعة \vec{AB} و \vec{AC} و \vec{AM} تقع في مستوي واحد

النقاط A و B و C و M تقع في مستوي واحد

حالة خاصة

إذا كان \vec{u} و \vec{v} شعاعين مرتبطين خطياً
 ⇒ يكون \vec{w} و \vec{u} و \vec{v} ثلاث أشعة مرتبطة خطياً
 أي أن \vec{w} من الفراغ

شعاعين

يكون \vec{u} و \vec{v} مرتبطين خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي، أي:

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

يكون \vec{u} و \vec{v} مرتبطين خطياً إذا تتناسب مركبات الشعاعين

$$\vec{u}(x, y, z)$$

$$\vec{v}(x', y', z')$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

تفيد في:

ثلاث نقاط A و B و C

قوانين

1) مركبات شعاع:

$$\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

2) منتصف $[AB]$:

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

3) مركز ثقل المثلث ABC :

$$G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

4) حساب طول قطعة $[AB]$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

5) تنظيم الشعاع $\vec{u}(x, y, z)$ بالنسبة للمبدأ:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

6) نلكن $M(x_A, y_A, z_A)$ نظيرة A بالنسبة للمبدأ:

$$M(-x_A, -y_A, -z_A)$$

7) إيجاد إحداثيات مركز الأبعاد المتناسقة للنقاط المتقابلة:

$$M \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$$

8) نقطة تنتمي إلى محور إحداثيات:

$$M \in (Ox) \Rightarrow M(x, 0, 0)$$

$$M \in (Oy) \Rightarrow M(0, y, 0)$$

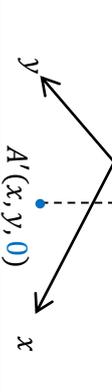
$$M \in (Oz) \Rightarrow M(0, 0, z)$$

9) مسقط نقطة على المستويات الرئيسية:

$$A'(x, y, 0)$$

$$A'(0, y, z)$$

$$A'(x, 0, z)$$

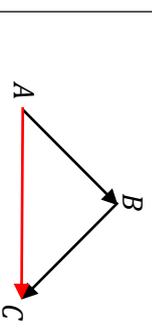


جمع الأشعة

طريقة مثل

نستخدمها عندما تكون الأشعة متعاقبة

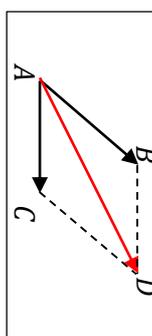
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$



طريقة متوازي الأضلاع

نستخدمها عندما يكون الشعاعين البداية ذاتها ويكون ناتج الجمع هو شعاع قطر متوازي الأضلاع المنطلق من نفس البداية.

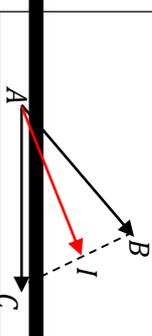
$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$



طريقة المتوسط

عندما يكون لدينا شعاعين لهما البداية ذاتها في مثلث يكون جمعها هو شعاع المتوسط المنطلق من البداية ذاتها مضروب بـ 2

$$\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AI}$$



$M \in (ABC)$ (2)

$$\vec{AM} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$\begin{pmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$m-3 = -2\alpha \dots (1)$$

$$-1 = -\beta \dots (2)$$

$$2 = -\alpha - 3\beta \dots (3)$$

من (2): $\beta = 1$

نعوض في (3): $2 = -\alpha - 3 \Rightarrow \alpha = -5$

نعوض في (1): $m-3 = -2(-5) \Rightarrow m = 13$

مثال (3): مكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه (1) نتخذ معلم

متجانس: $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ والمطلوب:

(1) أوجد إحداثيات A و C و H و M و N

و حيث: M منتصف $[AB]$

و N منتصف $[CG]$

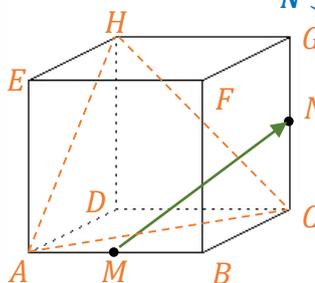
(2) أثبت أن الشعاعين \vec{AH} و \vec{AC}

غير مرتبطين خطياً.

(3) ادرس الارتباط الخطي للأشعة

\vec{AH} و \vec{AC} و \vec{MN} وماذا تستنتج.

الحل:



$$C(1,1,0), A(0,0,0), H(0,1,1) \quad (1)$$

$$M\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), N\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{AH}(0,1,1), \vec{AC}(1,1,0) \quad (2)$$

$$\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً فالشعاعان يشكلان مستوي (AHC)

$$\vec{MN} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AH} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} = \alpha \dots (1)$$

$$1 = \alpha + \beta \dots (2)$$

$$\frac{1}{2} = \beta \dots (3)$$

نجد α و β من (1) و (3):

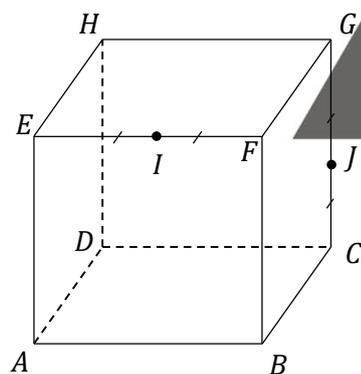
نتحقق في (2): $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 1$ محققة.

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AH}$$

إذن الأشعة \vec{MN} و \vec{AC} و \vec{AH} مرتبطة خطياً.

ومنه نستنتج أن المستقيم الحامل لـ \vec{MN} يوازي المستوي (ACH)

مثال (1): مكعب $ABCDEFGH$ ، والمطلوب:



(1) عبّر عن المجموع الشعاعي بدلالة شعاع واحد

$$l = \vec{AF} + \vec{AE} - 2\vec{JI} - \vec{DH}$$

(2) عين موقع M التي تحقق العلاقة:

$$\frac{1}{4} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{BG} - \frac{1}{4} \vec{HE} = \vec{BM}$$

الحل:

$$l = \vec{AF} + \vec{AE} - 2\vec{JI} - \vec{DH} \quad (1)$$

$$l = 2\vec{AI} + 2\vec{AJ} - \vec{DH} = 2\vec{AJ} - \vec{DH}$$

$$l = 2\vec{AJ} - \vec{CG} = 2\vec{AJ} - 2\vec{CJ}$$

$$l = 2\vec{AJ} + 2\vec{JC} = 2\vec{AC}$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{4} \vec{AD} + \frac{1}{2} \vec{BG} - \frac{1}{4} \vec{HE} \quad (2)$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{4} \vec{AD} + \frac{1}{4} \vec{EH} + \frac{1}{2} \vec{BG}$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{4} (\vec{AD} + \vec{AD}) + \frac{1}{2} \vec{BG}$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{4} (2\vec{AD}) + \frac{1}{2} \vec{BG} = \frac{1}{2} \vec{ADG} + \frac{1}{2} \vec{BG}$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{2} (\vec{AD} + \vec{BG}) = \frac{1}{2} (\vec{BC} + \vec{BG})$$

$$\vec{BM} = \frac{1}{2} (2\vec{BJ}) = \vec{BJ} \Rightarrow \vec{BM} = \vec{BJ}$$

M تنطبق على J

مثال (2): تتأمل النقاط: $A(3, 2, 1)$ و $B(1, 2, 0)$ و $C(3, 1, -2)$

والمطلوب:

(1) أثبت أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

(2) عين قيمة الوسيط m لتتنمي النقطة $M(m, 1, 3)$ إلى المستوي (ABC) .

الحل:

$$\vec{AC}(0, -1, -3) \text{ و } \vec{AB}(-2, 0, -1) \quad (1)$$

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$

الشعاعان غير مرتبطين خطياً فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة وهي تعين مستوي.

تعريف الكثرة: مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ من الفراغ التي تبعد عن نقطة ثابتة و لكن A بعداً ثابتاً و لكن R

$$MA = R$$

تذكر:

مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ تمثل كرة مركزها A و نصف قطرها R

تعريف المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$: هو المستوي العمودي على القطعة المستقيمة $[AB]$ في منتصفها، أي نقطة من نقاط المستوي المحوري تبعد عن طرفي القطعة المستقيمة بعداً متساوياً

$$MA = MB$$

تذكر:

مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ تمثل المستوي المحور للقطعة المستقيمة $[AB]$

مركز الأبعاد المتناسية

خاصية الإختزال

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسية للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) عندئذ:

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MG}$$

تفيد في:

تحديد مجموعات النقاط

تحديد الأفعال

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسية للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) عندئذ:

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0}$$

حيث $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

قاعدة الإضافة

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسية للنقاط (A, α) و (B, β) عندئذ:

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

حيث $\alpha + \beta \neq 0$

تفيد في:

- 1) تحديد موقع نقطة
- 2) وقوع نقاط على استقامة واحدة
- 3) إثبات أن نقطة تقع على قطعة مستقيمة

حالات خاصة

إذا كانت G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ المتناسية للنقاط:

$$(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)$$

إذا كانت G مركز ثقل المثلث ABC المتناسية للنقاط:

$$(A, 1), (B, 1), (C, 1)$$

الجاء السلمي

$$\vec{u}(x, y, z)$$

$$\vec{v}(x', y', z')$$

$$\textcircled{1} \vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$

$$\textcircled{3} \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

$$\textcircled{2} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$$

تفيد في:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

تفيد في:

$$\theta = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

تفيد في:

تفيد في:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

تفيد في:

$$\theta = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

مثال ①: لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط: $(A, 1)$ و $(B, -1)$ و $(C, 2)$ والمطلوب:

أثبت أن المستقيمين (AG) و (CG) متوازيان.

الحل:

$$\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{GA} + \vec{BG} + 2\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{BG} + \vec{GA} = -2\vec{GC}$$

$$\vec{BA} = -2\vec{GC}$$

الشعاان \vec{BA} و \vec{GC} مرتبطان خطياً \Leftrightarrow المستقيمان (AB) و (CG) متوازيان.

مثال ②: لتكن M تحقق: $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$

عبر عن M بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, α) و (B, β) و (C, γ) .

الحل:

نضرب بـ 3:

$$3\vec{AM} = \vec{AB} + 4\vec{AC}$$

$$-3\vec{MA} = \vec{AM} + \vec{MB} + 4\vec{AM} + 4\vec{MC}$$

$$-3\vec{MA} = -\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MA} + 4\vec{MC}$$

$$-2\vec{MA} + \vec{MB} + 4\vec{MC} = 0$$

$M \Leftarrow$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A, -2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 4)$

$$\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 4$$

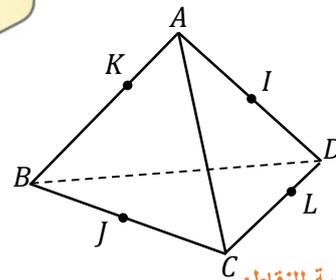
مثال ③: نتأمل رباعي وجوه $ABCD$ فيه:

$$k \text{ تحقق: } \vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$L \text{ تحقق: } \vec{CL} = \frac{2}{3}\vec{CD}$$

I منتصف $[AD]$

J منتصف $[BC]$



نعرف: G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 2)$ والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط G و I و J واقعة على استقامة واحدة.

2- أثبت أن النقاط G و K و L واقعة على استقامة واحدة.

3- استنتج وقوع I و J و K و L في مستوٍ واحد.

الحل:

1) $I \Leftarrow$ منتصف $[AD]$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 2)$ و $(D, 2)$

$J \Leftarrow$ منتصف $[BC]$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B, 1)$ و $(C, 1)$

حسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 4)$ و $(J, 2)$ واقعة على استقامة واحدة.

$K \Leftarrow \vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB} - 2$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$

$L \Leftarrow \vec{CL} = \frac{2}{3}\vec{CD}$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C, 1)$ و $(D, 2)$

حسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K, 3)$ و $(L, 3)$ واقعة على استقامة واحدة.

3- من الطلب الأول: $G \in (IJ)$

ومن الطلب الثاني: $G \in (LK)$

\Leftrightarrow المستقيمان (IJ) و (LK) متقاطعان في النقطة G فهما يعينان مستوٍ \Leftrightarrow النقاط L و K و J و I واقعة في مستوٍ واحد.

مثال ④: في رباعي الوجوه $ABCD$

عين α و β و γ و δ لتكون G

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

(A, α) و (B, β) و (C, γ)

و (D, δ) .

الحل:

$\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A, 2)$ و $(B, 1)$

$J \Leftarrow$ منتصف $[CI]$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(I, 3)$ و $(C, 3)$

حسب عكس التجميعية:

$(J, 6)$ مركز أبعاد متناسبة للنقاط: $(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 3)$

$G \Leftarrow$ منتصف $[DJ]$ مركز أبعاد متناسبة

للنقطتين $(J, 6)$ و $(D, 6)$

حسب عكس التجميعية:

$(G, 12)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط:

$(A, 2)$ و $(B, 1)$ و $(C, 3)$ و $(D, 6)$

$$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 3, \delta = 6$$

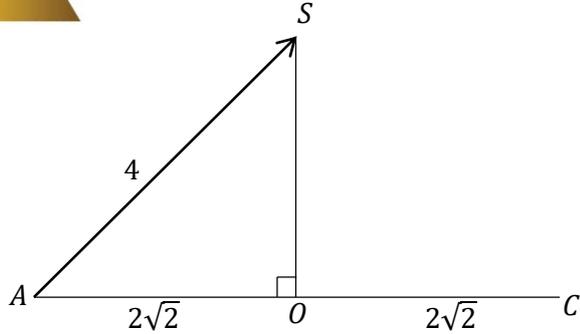
(2) حسب فيثاغورث:

$$CA^2 = AB^2 + BC^2$$

$$CA^2 = 16 + 16 = 32$$

$$CA = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{AS} = \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AS}\| \cos(\widehat{CAS})$$



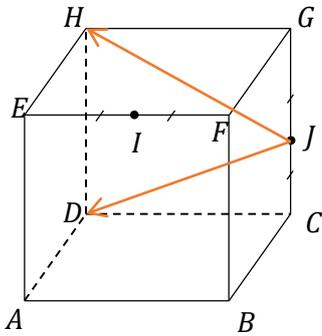
$$\vec{AC} \cdot \vec{AS} = 4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{4} = 16$$

(3) بفرض I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(S, 1)$ و $(A, 2)$.

$$\vec{AI} = \frac{1}{3} \vec{AS}$$

حسب الخاصية التجميعية G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 3)$ و $(B, 3)$ $G \Leftarrow (B, 3)$ منتصف $[BI]$

مثال (2): مكعب $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a



1- احسب $\vec{EI} \cdot \vec{EA}$ و $\vec{EI} \cdot \vec{FC}$

2- أثبت أن $\vec{JH} \cdot \vec{JD} = \frac{3}{4} a^2$

الحل:

$$\vec{EI} \cdot \vec{EA} = 0 \quad -1$$

$$\vec{EI} \cdot \vec{FC} = 0$$

لأن \vec{EI} يعامد الوجه $BCGF$ فهو يعامد أي شعاع فيه

$$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = (\vec{JG} + \vec{GH})(\vec{JC} + \vec{CD}) \quad -2$$

$$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = \underbrace{\vec{JG} \cdot \vec{JC}}_{\text{متعامدان}} + \underbrace{\vec{JG} \cdot \vec{CD}}_{\text{متعامدان}} + \vec{GH} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD}$$

$$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = \vec{JG} \cdot \vec{JC} + \vec{GH} \cdot \vec{CD} = \frac{-a}{2} \times \frac{a}{2} + a \times a$$

$$\vec{JH} \cdot \vec{JD} = -\frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{3}{4} a^2$$

مثال (5): لتكن M مجموعة نقاط، ولدينا G مركز ثقل المثلث BCD .

جد مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$$\|\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}\|$$

الحل:

بما أن G مركز ثقل المثلث $BCD \Leftarrow G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D, 1)$ و $(C, 1)$ و $(B, 1)$

حسب خاصية الإختزال:

$$\Rightarrow \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MG}$$

$$\|3\vec{MG}\| = \|3\vec{MA} - (\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD})\|$$

$$3\|\vec{MG}\| = \|3\vec{MA} - 3\vec{MG}\|$$

$$3\|\vec{MG}\| = 3\|\vec{GM} + \vec{MA}\|$$

$$\|\vec{MG}\| = \|\vec{GA}\| \Rightarrow MG = GA$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها $R = GA$

الجداء السلمي:

مثال (1): نتأمل الهرم S_ABCD

قاعدته مربع طول ضلعه 4

ورأسه S وطول كل حرف

من حروفه الجانبية يساوي 4

النقطة O هي المرتمس القائم

للنقطة S على القاعدة.

والمطلوب:

(1) احسب $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$

(2) احسب طول CA ثم $\vec{AS} \cdot \vec{AC}$

(3) عين G مركز الأبعاد للنقاط $(A, 2)$ و $(B, 3)$ و $(S, 1)$

الحل:

(1) المثلث SAB متساوي الأضلاع $\widehat{ASB} = \frac{\pi}{3}$

$$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = \|\vec{SA}\| \cdot \|\vec{SB}\| \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\vec{SA} \cdot \vec{SB} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

الوضع النسبي لمستويين P و Q :

دراسة الإرتباط الخطي لـ \vec{n}_P و \vec{n}_Q

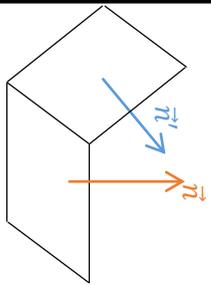
\vec{n}_P و \vec{n}_Q غير مرتبطان خطياً:

P و Q متقاطعان:

دراسة الجداء السلمي بين \vec{n}_P و \vec{n}_Q :

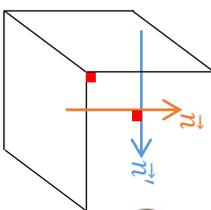
$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q \neq 0$$

P و Q غير متعامدان



$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$$

P و Q متعامدان



P و Q يشتركان بفصل مشترك

\vec{n}_P و \vec{n}_Q مرتبطان خطياً:

متوازيان:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

تنسب المركبات:

منطوقان:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$$

تنسب المركبات:

معادلة المستوي

قبل النشر:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

نحتاج:

① نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

② ناظم $\vec{n}(a, b, c)$

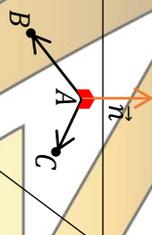
بعد النشر:

$$ax + by + cz + d = 0$$

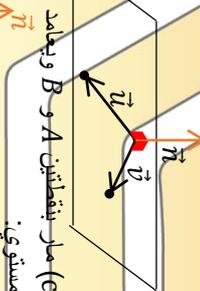
حالة ③:

الناظم مجهول:

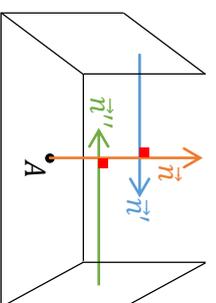
(a) مستوي يمر بثلاث نقاط:



(b) مستوي يمر بنقطة ويقبل \vec{n} و \vec{T} شعاعي توجيه له.

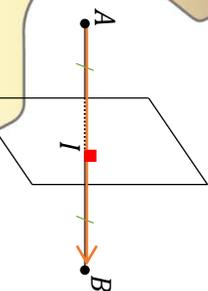


(c) يمر بنقطتين A و B ويعامد مستوي:



حالة ②:

المستوي المحوري:



الناظم نفسه شعاع القطعة: $\vec{n} = \vec{AB}$. النقطة هي نقطة المنتصف.

كيف توجد الناظم؟؟؟

تفرض الناظم (a, b, c) معرفة شعاعين غير مرتبطان خطياً يعامد هما الناظم.

$$\vec{n} \perp \vec{1} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{1} = 0$$

$$\vec{n} \perp \vec{2} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{2} = 0$$

$$\vec{n} \perp \vec{2} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{2} = 0$$

ينتج معادلتين بثلاث مجهولين، نفرض أحد المجهولين ونوجد المجهولين الأخرين. فيصبح الناظم معلوم ③

حالة ①:

علم الناظم والنقطة:

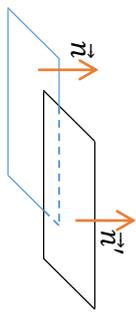
(a) اكتب معادلة المستوي المر بالنقطة ويقبل الشعاع ناظماً له

(b) اكتب معادلة المستوي المر بالنقطة وبوزاي المستوي

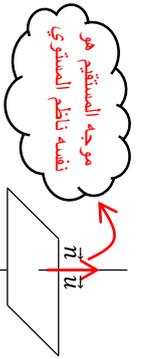
$$P: ax + by + cz + d = 0$$

ملاحظة: مستوي يوازي مستوي آخر:

$$\vec{n} = \vec{n}'(a, b, c)$$



(c) مستوي مر بنقطة ويعامد المستقيم



موجه المستقيم هو نفسه ناظم المستوي

الوضع النسبي لمستقيمين d و d' :

بدراسة الإرتباط الخطي للمجهين \vec{u} و \vec{u}' :

\vec{u} و \vec{u}' غير مرتبطين خطياً:

$$d: \begin{cases} x_1 = at + x_0 \\ y_1 = bt + y_0 \\ z_1 = ct + z_0 \end{cases}, \quad d': \begin{cases} x_2 = as + x_0 \\ y_2 = bs + y_0 \\ z_2 = cs + z_0 \end{cases}$$

بالحل المشترك لـ d و d' :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

إذا نتج معادلة مستحيلة:

d و d' متخالفان

إذا نتج قيمة لـ t أو s

d و d' متقاطعان
بنقطة توجد في d
يتعويض t في d
أو s في d' .

\vec{u} و \vec{u}' مرتبطين خطياً:

d و d' متطابقان

يكون

إذا نتجت معادلات d'

d و d' متوازيان

نأخذ نقطة من d
بفرض قيمة لـ t

نعوض النقطة في d'

معادلة المستقيم

نحتاج:

- 1) نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$
- 2) موجه $\vec{u}(a, b, c)$

حالة ②:

مستقيم الفصل المشترك للمستقيمين:

$$P: ax + by + cz + d = 0$$

$$Q: a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

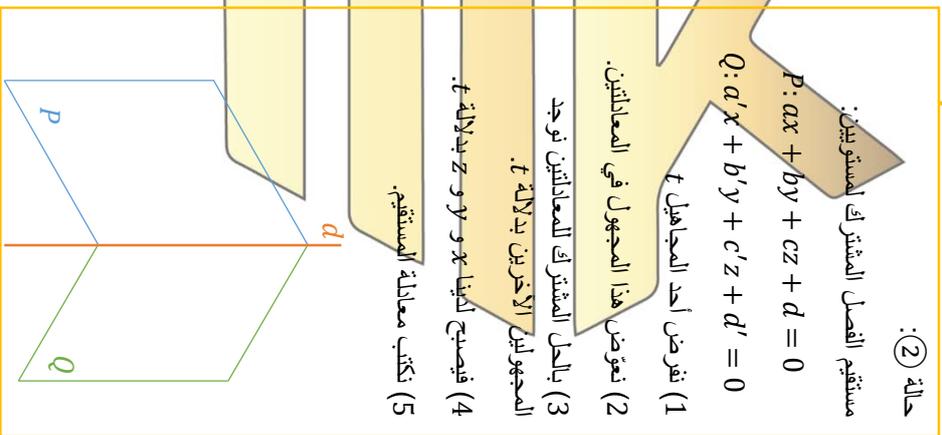
1) نفرض أحد المجهولين t

2) نعوض هذا المجهول في المعادلتين.

3) بالحل المشترك للمعادلتين نوجد المجهولين الآخرين بدلالة t .

4) فيصبح لدينا x و y و z بدلالة t .

5) نكتب معادلة المستقيم.



شكلها:

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}; t \in \begin{cases} \text{مستقيم } R \\ \text{نصف مستقيم } [0, +\infty[\\ \text{قطعة مستقيمة } [0, 1] \end{cases}$$

حالة ①:

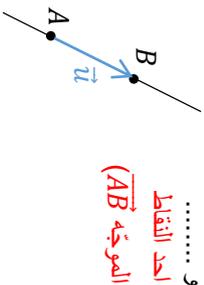
علم الموجه والنقطة:

(a) اكتب معادلة المستقيم المار من النقطة
ويقبل الشعاع موجهاً له.

(b) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين
..... و

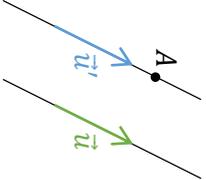
(نختار احد النقاط)

ويكون الموجه \overrightarrow{AB}

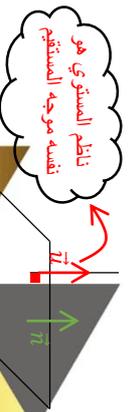


(c) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة
و يوازي المستقيم

الموجهان مرتبطين خطياً.



(d) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطة
و يعامد المستوي



الوضع النسبي لثلاث مستويات:

$$\begin{aligned} P: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ R: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &\leq 0 \\ Q: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0 \end{aligned}$$

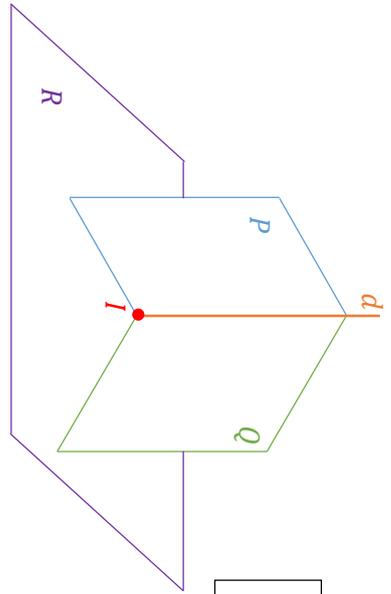
نحار مستويين وندرس الوضع النسبي بينهما ونميز:

مقاطعان بفصل مشترك

ندرس الوضع النسبي بين مستقيم الفصل المشترك والمستوي الثالث

متوازيان

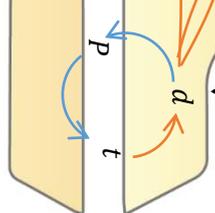
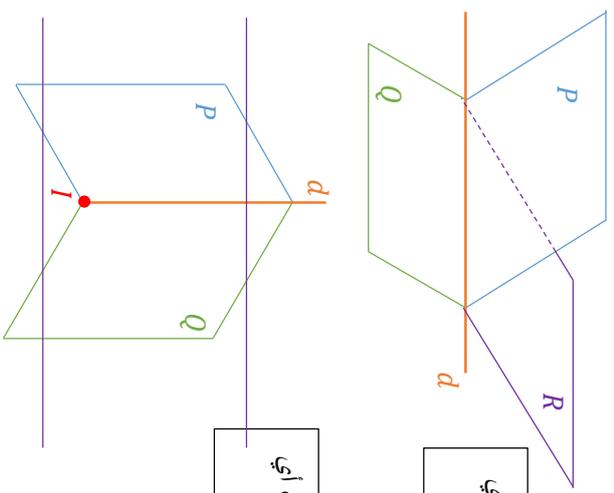
المستويات الثلاثة لا تشترك بأي نقطة



① (عدد t) ينتج نقطة I هي نقطة تقاطع المستويات الثلاث.

② (عدد $\neq 0$) معادلة محققة دوماً، أي المستويات الثلاثة تشترك بفصل مشترك.

③ (عدد $= 0$) معادلة مستحيلة الحل، أي المستويات الثلاثة لا تشترك بأي نقطة.

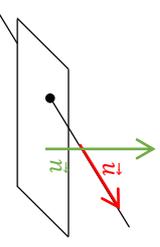
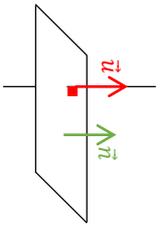


الوضع النسبي بين مستقيم d ومستوي P
 بدراسة الجداء السلمي للناظم \vec{n} و الموجه

- المستقيم يقطع المستوي
 - $\vec{n} \cdot \vec{n} \neq 0$
- المستقيم يوازي المستوي
 - $\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$

الناظم والموجه مرتبطين خطياً.

الناظم والموجه غير مرتبطين خطياً.



المستقيم والمستوي متعامدان.

المستقيم والمستوي غير متعامدان

إيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي:

- نعوّض المعادلات الوسيطة للمستقيم في معادلة المستوي.
- نتنتج معادلة بجهول واحد t ، نوجد قيمة t .
- نعوّض قيمة t في التمثيلات الوسيطة فننتج نقطة التقاطع.

نقطة التقاطع I

السؤال الثالث: لدينا المستويين P و Q المعرفين وفق:

$$P: x - y + 2z - 1 = 0$$

$$Q: 2x + y + z = 0$$

و النقطه $A(1, 1, 2)$ والمطلوب :

(1) أثبت أن P و Q متقاطعان بفصل مشترك d

(2) اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد المستويين P و Q

الحل:

$$\vec{n}_P (1, -1, 2) \quad \vec{n}_Q (2, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$$

\vec{n}_P, \vec{n}_Q غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow P, Q$ متقاطعان بمستقيم d

2- معادلة المستوي R

$$\vec{n}_R (a, b, c) \text{ وناظم } A(1, 1, 2)$$

$$\vec{n}_R \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_R \cdot \vec{n}_P = 0 \Rightarrow a - b + 2c = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n}_R \cdot \vec{n}_Q = 0 \Rightarrow 2a + b + c = 0 \dots (2)$$

نفرض $c = 1$

$$a - b + 2 = 0 \dots (1)$$

$$2a + b + 1 = 0 \dots (2)$$

$$3a = -3 \Rightarrow a = -1 \quad \text{نجمع (1) مع (2):}$$

$$-1 - b + 2 = 0 \Rightarrow b = 1 \quad \text{نعوض في (1):}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_R (-1, 1, 1)$$

$$R: -1(x - 1) + (y - 1) + (z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow -x + y + z - 2 = 0$$

السؤال الرابع: لتكن لدينا النقطتان: $A(1, 0, -1)$ و $B(3, 1, 0)$

(1) اكتب معادلة المستقيم P المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

(2) ليكن لدينا المستوي Q معادلته:

$$Q: 4x + 2y + 2z - 5 = 0$$

ادرس الوضع النسبي للمستويين P و Q

الحل:

$$(1) \text{ النقطه } I \text{ منتصف } [AB]: I\left(2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{n}_P = \vec{AB}(2, 1, 1) \text{ :الناظم}$$

$$P: 2(x - 2) + 1\left(y - \frac{1}{2}\right) + 1\left(z + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow P: 2x + y + z - 4 = 0$$

$$-2 \vec{n}_P(2, 1, 1), \vec{n}_Q(4, 2, 2)$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

\vec{n}_P, \vec{n}_Q مرتبطين خطياً $\Leftarrow P, Q$ متوازيان

السؤال الأول: اكتب معادلة المستوي P المار بالنقطه $A(0, 1, -2)$

و يقبل $\vec{n}(1, -4, 2)$ ناظماً له ثم احسب بعد النقطه $B(-1, 2, 4)$

عن المستوي P

الحل:

$$\text{ناظم } \vec{n}(1, -4, 2) \text{ نقطه } A(0, 1, -2)$$

$$P: (x - 0) - 4(y - 1) + 2(z + 2) = 0$$

$$P: x - 4y + 4 + 2z + 4 = 0$$

$$P: x - 4y + 2z + 8 = 0$$

$$\text{dist}(B, P) = \frac{|-1 - 4(2) + 2(4) + 8|}{\sqrt{1 + 16 + 4}} = \frac{7}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(B, P) = \frac{7\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

السؤال الثاني: نتأمل معلماً $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فيه النقاط

$$A(1, 0, 1) \quad B(-2, 3, 1) \quad C(2, 1, -1)$$

1- أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستوي، اكتب معادلته.

2- أثبت أن الكرة S

$$S: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{3}$$

تمس المستوي P

الحل:

$$\vec{AB}(-3, 3, 0) \quad \vec{AC}(1, 1, 2)$$

$$\frac{-3}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{0}{-2}$$

\vec{AB}, \vec{AC} غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow A, B, C$ تعين مستوي

$$\vec{n}(a, b, c)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow -3a + 3b = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow a + b - 2c = 0 \dots (2)$$

نفرض $b = 1$ نعوض في (1):

$$\Rightarrow -3a + 3 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$1 + 1 - 2c = 0 \Rightarrow c = 1 \quad \text{نعوض في (2):}$$

$$\text{نختار } \vec{n}(1, 1, 1), A(1, 0, 1)$$

$$(ABC): 1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 1) = 0$$

$$(ABC): x + y + z - 2 = 0$$

$$S: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ نصف قطرها } \Omega(1, -1, 3)$$

$$\text{dist}(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 - 1 + 3 - 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{dist}(\Omega, (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{3}} = R \Rightarrow (ABC) \text{ تمس الكرة } S$$

بفرض $c = 1$

$$\Rightarrow -a + b + 1 = 0 \dots (1)$$

$$a + b + 1 = 0 \dots (2)$$

$$2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1 \quad \text{جمع (1) مع (2):}$$

$$a - 1 + 1 = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{نعوض في (2):}$$

$$A(1,0,0) \quad \vec{n}(0, -1, 1) \quad \text{نختار}$$

$$\Rightarrow 0(x - 1) - 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$Q: -y + z = 0$$

المسألة الأولى: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط:

$A(-1, 2, -2)$ و $B(-1, -1, 1)$ و $N(3, 3, 3)$ والمطلوب:

- 1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A و يقبل المار من B و يقبل شعاعاً موجهاً له، ثم اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d
- 2- أثبت أن المستقيمان Δ و d متقاطعان بنقطة C يطلب تعيين إحداثياتها
- 3- اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d و Δ
- 4- أثبت أن المثلث ABC قائم في C واحسب مساحته
- 5- احسب حجم الرباعي $NABC$
- 6- أثبت أن المثلث CBN قائم في C استنتج بعد النقطة A عن المستوي (CBN)

الحل:

المستقيم Δ النقطة $A(-1, 2, -2)$ و الشعاع الموجه $\vec{u}(2, -1, 1)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t - 2 \end{cases} ; t \in R$$

المستقيم d النقطة $B(-1, -1, 1)$ و الشعاع الموجه $\vec{v}(1, 1, -1)$

$$d: \begin{cases} x = s - 1 \\ y = s - 1 \\ z = -s + 1 \end{cases} ; s \in R$$

$$\vec{u}(2, -1, 1) \quad \vec{v}(1, 1, -1) \quad -2$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

\vec{u}, \vec{v} غير مرتبطين خطياً Δ, d غير متوازيان

$$2t - 1 = s - 1 \dots (1)$$

$$-t + 2 = s - 1 \dots (2)$$

$$t - 2 = -s + 1 \dots (3)$$

نضرب (2) بـ (-1) و نجمع مع (1)

$$3t - 3 = 0 \Rightarrow 3t = 3 \Rightarrow t = 1$$

$$-1 + 2 = s - 1 \Rightarrow 1 = s - 1 \Rightarrow s = 2 \quad \text{نعوض في (2):}$$

$$1 - 2 = -2 + 1 \Rightarrow -1 = -1 \quad \text{محققة في (3):}$$

نعوض $t = 1$ في Δ

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 - 1 \\ y &= -1 + 2 \\ z &= 1 - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C(1, 1, -1)$$

السؤال الخامس: لتكن النقاط: $A(0, 1, -1)$ $B(2, 1, -2)$

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB)

2- أثبت أن المستقيم (AB) يوازي المستقيم d

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 4 \\ z = -\frac{t}{2} + 4 \end{cases} ; t \in R$$

الحل:

$$\vec{AB}(2, 0, -1) \quad A(0, 1, -1)$$

-1

$$(AB): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = -t - 1 \end{cases} ; t \in R$$

-2

$$\vec{AB}(2, 0, -1) \quad \vec{u}\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$2\vec{u} = \vec{AB}$$

\vec{u}, \vec{AB} مرتبطين خطياً

(AB) و d متوازيان

السؤال السادس: ليكن المستوي P المعروف بالعلاقة:

$$P: x + y + z = 0$$

و النقطتين $A(1, 0, 0)$ $B(0, 1, 1)$ والمطلوب:

1- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم AB

2- أثبت أن المستقيم (AB) لا يعامد المستوي P

3- اكتب معادلة المستوي Q المار من A, B و يعامد المستوي P

الحل:

1- المستقيم AB

نقطة $A(1, 0, 0)$ و موجه $\vec{AB}(-1, 1, 1)$

$$(AB): \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; t \in R$$

$$\vec{u}(-1, 1, 1) \quad \vec{n}(1, 1, 1) \quad -2$$

$$\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{1}$$

\vec{u} و \vec{n} غير مرتبطين خطياً d, P غير متعامدان

$$\vec{n}_Q(a, b, c)$$

$$\vec{n}_Q \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow -a + b + c = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \dots (2)$$

نقطة $C(1,1,-1)$ و ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2a - b + c = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow a + b - c = 0 \dots \textcircled{2}$$

بفرض $b = 1$

$$2a - 1 + c = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$a + 1 - c = 0 \dots \textcircled{2}$$

$$3a = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{نجمع } \textcircled{1} \text{ مع } \textcircled{2} :$$

$$c = 1 \quad \text{نعوض في } \textcircled{1} :$$

$$\vec{n}(0,1,1) \quad C(1,1,-1)$$

$$P : 0(x-1) + 1(y-1) + 1(z+1) = 0$$

$$P : y + z = 0$$

$$\vec{CA}(-2,1,-1) \quad \vec{CB}(-2,-2,2)$$

$$\Rightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 4 - 2 - 2 = 0$$

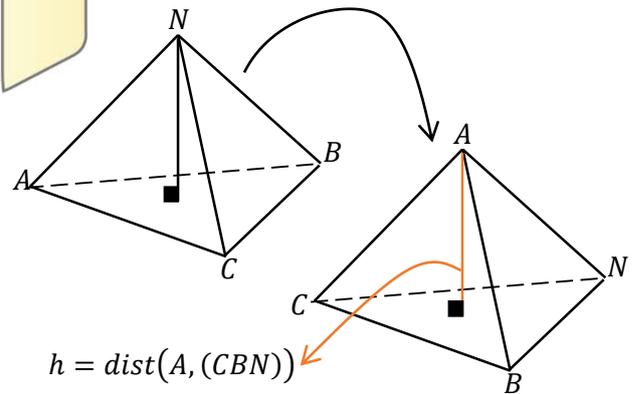
$\triangleleft ABC$ قائم في C

$$S = \frac{CA \cdot CB}{2} = \frac{\sqrt{4+1+1} \times \sqrt{4+4+4}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{6} \times \sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{2} = \frac{\sqrt{2 \times 36}}{2} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$dist(N,P) = h = \frac{|3+3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow V = 6$$



$$V = \frac{1}{3}S_{CBN}h \quad (6)$$

$$\vec{CB}(-2,-2,2) \quad \vec{CN}(2,2,4)$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CN} = -4 - 4 + 8 = 0$$

$$S_{CBN} = \frac{CB \times CN}{2} = \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{24}}{2} = \frac{\sqrt{12} \times \sqrt{12} \sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{CBN} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{CBN} \times dist(A, (CBN))$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{2} \times dist(A, (CBN))$$

$$\Rightarrow dist(A, (CBN)) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

المسألة الثانية: في معلم متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ لدينا النقاط:

$$A(2, 1, 0), B(0, 1, 2), C(3, -3, 3)$$

1- أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستوى يطلب إيجاد معادلته

2- اكتب معادلة المستقيم d المار من $D(-2, 1, 1)$ و يعامد المستوي (ABC)

3- جد D' مسقط D على المستوي (ABC)

4- استنتج بعد النقطة D في المستوي (ABC)

5- اكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$

الحل:

$$\vec{AB}(-2, 0, 2) \quad \vec{AC}(1, -4, 3) \quad -1$$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{0}{-4} \neq \frac{2}{3}$$

\vec{AB}, \vec{AC} غير مرتبطين خطياً \leftarrow

A, B, C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوي \leftarrow

$$\vec{n}(a, b, c)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow -2a + 2c = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow a - 4b + 3c = 0 \dots \textcircled{2}$$

بفرض $a = 1$

$$-2 + 2c = 0 \Rightarrow c = 1 \quad \textcircled{1} \text{ نعوض في}$$

$$1 - 4b + 3 = 0 \Rightarrow b = 1 \quad \textcircled{2} \text{ نعوض في}$$

$$\vec{n}(1,1,1) \quad A(2,1,0)$$

$$(ABC) : (x-2) + (y-1) + (z-0) = 0$$

$$(ABC) x + y + z - 3 = 0$$

2- المستقيم d

$$\vec{u} = \vec{n}(1,1,1) \text{ و } D(-2,1,1)$$

$$d : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases} ; t \in R$$



المسألة الرابعة:

$ABCDEF$ منشور قائم قاعدته ABC

مثلث قائم في A نتأمل المعلم

المتجانس $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{AB} = 3\vec{i}, \vec{AC} = 3\vec{j}, \vec{AE} = 3\vec{k}$$

(1) جد إحداثيات النقاط A و B و C و D و E .

(2) جد إحداثيات L مركز ثقل المثلث

(BCE) ثم أثبت أن (AL) يعامد المستوي

(BCE) واكتب معادلته.

(3) جد تمثيل وسيطي للمستقيم Δ المار

ب A ويعامد المستوي (BCE) .

(4) جد إحداثيات A' مسقط A على المستوي (BCE) .

(5) استنتج بعد A عن المستوي (BCE) .

(6) استنتج أن معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس المستوي

(BCE) هي من الشكل: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

(7) احسب حجم رباعي الوجوه $(E - ABC)$.

الحل:

$$A(0,0,0), B(3,0,0), C(0,3,0) \quad (1)$$

$$D(0,3,3), E(0,0,3)$$

(2) L مركز ثقل (BCE) :

$$L(1,1,1)$$

$$\vec{BC}(-3,3,0), \vec{BE}(-3,0,3)$$

$$\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{3} \text{ غير مرتبطين خطياً}$$

$$\vec{AL}(1,1,1)$$

$$\vec{AL} \cdot \vec{BE} = -3 + 0 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{AL} \perp \vec{BE}$$

$$\vec{AL} \cdot \vec{BC} = -3 + 3 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{AL} \perp \vec{BC}$$

(AL) عمودي على المستوي (BCE) .

معادلة المستوي (BCE) : نختار $B(3,0,0)$:

$$\vec{n} = \vec{AL} : (BCE) \text{ يعامد } (AL)$$

$$1(x-3) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0$$

$$(BCE): x + y + z - 3 = 0$$

(3) النقطة: $A(0,0,0)$ والموجه: $\vec{u} = \vec{AL}(1,1,1)$

$$\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

(4) A' نقطة تقاطع Δ والمستوي (BCE) :

$$t + t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1, y = 1, z = 1 \Rightarrow A'(1,1,1) \quad \Delta \text{ في نعوض}$$

$$\text{dist}(A, BCE) = [AA'] \quad (5)$$

$$[AA'] = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(A, BCE) = \sqrt{3}$$

$$D' \leftarrow d \quad (3)$$

$$(ABC) \rightarrow t$$

$$t - 2 + t + 1 + t + 1 - 3 = 0$$

$$3t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 - 2$$

$$y = 1 + 1$$

$$z = 1 + 1$$

$$\text{dist}(D, ABC) = DD' \quad (4)$$

$$DD' = \sqrt{(-1+2)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2}$$

$$DD' = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

-5 الكرة S

$$I(1,1,1) \leftarrow [AB] \text{ منتصف } I$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4+0+4}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$$

المسألة الثالثة: في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نتأمل النقطة

$A(2, -1, 2)$ والمستويين:

$$P: 2x - y + z - 4 = 0$$

$$Q: x + y + 2z - 5 = 0$$

والمطلوب:

(1) أثبت أن P و Q متقاطعان بمستقيم d ، اكتب تمثيلاً وسيطياً له.

(2) اكتب معادلة المستوي R المار بالنقطة A ويعامد الفصل المشترك

للمستويين P و Q

(3) جد إحداثيات A' مسقط A على المستقيم d

(4) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم d

الحل:

$$\vec{n}_P(2, -1, 1), \vec{n}_Q(1, 1, 2) \quad (1)$$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$$

\vec{n}_P و \vec{n}_Q غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow P$ و Q متقاطعان بفصل مشترك

إيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم d :

$$\begin{cases} 2x - y + z - 4 = 0 \dots (1) \\ x + y + 2z - 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + t - 4 = 0 \dots (1) \\ x + y + 2t - 5 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

بفرض $z = t$

$$3x + 3t - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 - t \quad (2) \text{ و } (1)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2): $3 - t + y + 2t - 5 = 0 \Rightarrow y = 2 - t$

نعوض في (2): $3 - t + y + 2t - 5 = 0 \Rightarrow y = 2 - t$

$$\Rightarrow d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

(2) النقطة: $A(2, -1, 2)$ الناظم: $\vec{n} = \vec{u}(-1, -1, 1)$

$$R: -(x-2) - (y+1) + (z-2) = 0$$

$$\Rightarrow R: -x - y + z - 1 = 0$$

$$A' \leftarrow d \quad (3)$$

$$R \rightarrow t$$

$$-3 + t - 2 + t + t - 1 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$x = 3 - 2$$

$$y = 2 - 2$$

$$z = 2$$

$$\text{dist}(A, d) = AA' \quad (4)$$

$$AA' = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

نطرح ② من ① :

$$-3z - 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{3}$$

$$t + y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -t + \frac{1}{3} \quad \text{نعوض في ② :}$$

$$d: \begin{cases} x = t \\ y = -t + \frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

$$B(4, 1, 2) \quad , \quad \vec{n} = \vec{u}(1, -1, 0) \quad -5$$

$$R: (x - 4) - 1(y - 1) + 0(z - 2) = 0$$

$$R: x - y - 3 = 0$$

6- نقطة تقاطع المستويات P و Q و R هي B' مسقط B على المستقيم d

B' نقطة تقاطع d و R \Leftarrow

$$B' \Leftarrow d$$

$$\swarrow \searrow$$

$$R \Rightarrow t$$

$$t + t - \frac{1}{3} - 3 = 0 \Rightarrow 2t = \frac{10}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$z = -\frac{1}{3}$$

$$A(2, 1, 2) \quad , \quad B(4, 1, 2) \quad , \quad M(x, y, z) \quad -7$$

$$\vec{MA}((2-x), (1-y), (2-z))$$

$$\vec{MB}((4-x), (1-y), (2-z))$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$(2-x)(4-x) + (1-y)^2 + (2-z)^2 = 0$$

$$8 - 2x - 4x + x^2 + 1 - 2y + y^2 + 4 - 2z + z^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 1$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $(3, 1, 2)$ نصف قطرها (1).

(6) المركز: $A(0, 0, 0)$ ونصف القطر: $r = [AA'] = \sqrt{3}$

$$S: (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \Rightarrow S_{ABC} = \frac{[AB][AC]}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} \quad (7)$$

$$h = [EA] = 3 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

المسألة الخامسة:

في معلم متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا: $A(2, 1, 2)$ والمستويان:

$$P: x + y - 2z - 1 = 0$$

$$Q: x + y + z = 0$$

1) أثبت أن P و Q متعامدان.

2) احسب بعد A عن كل من المستويين P و Q .

3) استنتج بعد A عن الفصل المشترك للمستويين P و Q .

4) اكتب تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك للمستويين P و Q .

5) اكتب معادلة المستوي R المار من $B(4, 1, 2)$ ويعامد d .

6) جد B' نقطة تقاطع P و Q و R .

7) عين مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

الحل:

$$\vec{n}_P(1, 1, -2) \quad , \quad \vec{n}_Q(1, 1, 1) \quad -1$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 + 1 - 2 = 0$$

\Leftarrow المستويان متعامدان.

-2

$$\text{dist}(A, P) = \frac{|2 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\text{dist}(A, Q) = \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$\text{dist}(A, d)^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 \quad -3$$

$$\text{dist}(A, d)^2 = \frac{25}{3} + \frac{4}{6} = \frac{27}{3} = 9$$

$$\text{dist}(A, d) = \sqrt{9} = 3$$

$$\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad -4$$

بفرض: $x = t$

$$t + y - 2z - 1 = 0 \dots \text{①}$$

$$t + y + z = 0 \dots \text{②}$$

$$(OBG): 0(x-1) - (y-1) + (z-1) = 0$$

$$(OBG): -y + z = 0$$

3) النقطة I منتصف BG

$$I(2, 1, 1) \quad , \quad \vec{n} = \overrightarrow{BG}(0, 2, 2)$$

$$Q: 0(x-2) + 2(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$Q: 2y + 2z - 4 = 0$$

$$O(1, 1, 1) \quad , \quad \vec{u} = \overrightarrow{OI}(1, 0, 0) \quad (4)$$

$$(OI): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$

5) نعوض التمثيلات الوسيطة للمستقيم (OI) في معادلة المستوي (OBG)

$$\Rightarrow -1 + 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{محقة}$$

OI محتوى في المستوي (OBG) نعوض التمثيلات الوسيطة للمستقيم (OI) في معادلة المستوي Q

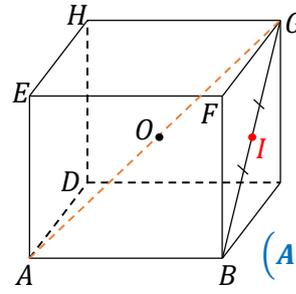
$$\Rightarrow 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{محقة}$$

OI محتوى في المستوي Q

المستقيم (OI) هو الفصل المشترك للمستويين (OBG) , Q

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG} = 1 - 1 - 1 = -1 \quad (6)$$

$$\cos(\widehat{GOB}) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG}}{\|\overrightarrow{OB}\| \cdot \|\overrightarrow{OG}\|} = \frac{-1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = -\frac{1}{3}$$



المسألة السادسة:

مكعب طول ضلعه 2، I منتصف $[BG]$

O تحقق العلاقة: $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AG}$

نختار معلماً: $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

1. جد إحداثيات رؤوس المكعب وجد إحداثيات النقاط I, O

2. اكتب معادلة المستوي (OBG) .

3. اكتب Q معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BG]$

4. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (OI)

5. أثبت أن (OI) هو الفصل المشترك للمستويين (OBG) , Q

6. احسب $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OG}$ واستنتج $\cos(\widehat{GOB})$

الحل:

(1)

$$A(0, 0, 0) \quad B(2, 0, 0) \quad C(2, 2, 0) \quad D(0, 2, 0)$$

$$E(0, 0, 2) \quad F(2, 0, 2) \quad G(2, 2, 2) \quad H(0, 2, 2)$$

$$O(x, y, z)$$

$$2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AG}$$

$$2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \\ 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \\ 2z = 2 \Rightarrow z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow O(1, 1, 1)$$

$$I\left(\frac{4}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) \Rightarrow I(2, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{OB}(1, -1, -1) \quad , \quad \overrightarrow{OG}(1, 1, 1) \quad (2)$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$$

\overrightarrow{OB} و \overrightarrow{OG} غير مرتبطين خطياً.

$$O(1, 1, 1) \quad , \quad \vec{n}(a, b, c)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Rightarrow a - b - c = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \dots (2)$$

بفرض $c = 1$

$$a - b - 1 = 0 \dots (1)$$

$$a + b + 1 = 0 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد: $2a = 0 \Rightarrow a = 0$

نعوض في (2): $0 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$

$$\vec{n}(0, -1, 1) \quad O(1, 1, 1)$$

معادلة الأسطوانة:

1- محورها (o, \vec{i}) :

مركزا قاعدتيها $A(a, 0, 0)$ و $B(b, 0, 0)$ ونصف قطرها r

$$h = |b - a|$$

معادلتها: $y^2 + z^2 = r^2$

شرطها: $a \leq x \leq b$

2- محورها (o, \vec{j}) :

مركزا قاعدتيها $A(0, a, 0)$ و $B(0, b, 0)$ ونصف قطرها r

معادلتها: $x^2 + z^2 = r^2$

شرطها: $a \leq y \leq b$

3- محورها (o, \vec{k}) :

مركزا قاعدتيها $A(0, 0, a)$ و $B(0, 0, b)$ ونصف قطرها r

معادلتها: $x^2 + y^2 = r^2$

شرطها: $a \leq z \leq b$

ملاحظة: لا تحوي معادلة الأسطوانة على متغير المحور.

مثال: اكتب معادلة أسطوانة محورها (o, \vec{j}) ومركزا قاعدتيها

$O(0, 0, 0)$ و $Q(0, 8, 0)$ ونصف قطرها 2.

الحل:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = r^2 \\ y_0 \leq y \leq y_Q \\ x^2 + z^2 = 4 \\ 0 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

مثال: اكتب معادلة أسطوانة محورها (o, \vec{i}) ومركز قاعدتها (o)

ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

الحل:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

مثال: اكتب معادلة أسطوانة محورها (o, \vec{k}) ومركزا قاعدتيها

$O(0, 0, 0)$ و $A(0, 0, 7)$ ونصف قطرها 3 ثم بين أي النقاط التالية

تنتمي للأسطوانة: $Q(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 9)$ و $D(3, 0, 3)$

الحل:

معادلة الأسطوانة:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ z_0 \leq z \leq z_A \\ x^2 + y^2 = 9 \\ 0 \leq z \leq 7 \end{cases}$$

اختبار $D(3, 0, 3)$

$$(3)^2 + (0)^2 = 9$$

$$\Rightarrow 9 = 9 \Rightarrow \text{محقة}$$

$$0 \leq z_D = 3 \leq 7 \Rightarrow \text{محقة}$$

D تنتمي إلى الأسطوانة

اختبار $Q(\sqrt{6}, \sqrt{3}, 9)$

$$(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$$

$$\Rightarrow 9 = 9 \Rightarrow \text{محقة}$$

$$0 \leq z_Q = 9 \leq 7 \Rightarrow \text{غير محقة}$$

Q لا تنتمي للأسطوانة

مثال: صف مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 1 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

الحل:

مجموعة النقاط M تمثل أسطوانة محورها (o, \vec{k}) ونصف قطرها $r =$

5 ومركزا قاعدتيها $A(0, 0, 1)$ و $B(0, 0, 4)$

معادلة المخروط:

1- محوره (o, \vec{i}) :

رأسه o ومركز قاعدته $A(h, 0, 0)$ ونصف قطرها r .

$$\text{معادلتها: } y^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}x^2 = 0$$

شرطه: $0 \leq x \leq h$

2- محوره (o, \vec{j}) :

رأسه o ومركز قاعدته $A(0, h, 0)$ ونصف قطرها r .

$$\text{معادلتها: } x^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}y^2 = 0$$

شرطه: $0 \leq y \leq h$

3- محوره (o, \vec{k}) :

رأسه o ومركز قاعدته $A(0, 0, h)$ ونصف قطرها r .

$$\text{معادلتها: } x^2 + y^2 - \frac{r^2}{h^2}z^2 = 0$$

شرطه: $0 \leq z \leq h$

مثال: اكتب معادلة المخروط الذي رأسه o ومحوره (o, \vec{i}) وقاعدته

الدائرة التي مركزها $B(4, 0, 0)$ ونصف قطرها 3.

الحل:

$$h = 4, r = 3$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}x^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq h \\ y^2 + z^2 - \frac{9}{16}x^2 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

مثال: اكتب معادلة المخروط الذي رأسه o ومحوره (o, \vec{k}) وقاعدته

الدائرة التي مركزها $(0, 0, 5)$ نصف قطرها 2 ثم بين إن كانت النقطتان

$Q(2, 0, 5)$ و $T(2, 2\sqrt{3}, 10)$ تنتميان إلى المخروط أم لا؟

الحل:

$$h = 5, r = 2$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{h^2}z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq h \\ x^2 + y^2 - \frac{4}{25}z^2 = 0 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{cases}$$

ندرس انتماء Q :

$$(2)^2 + (0)^2 - \frac{4}{25}(5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{محقة}$$

$$0 \leq 5 \leq 5 \Rightarrow \text{محقة}$$

المخروط $Q \in$

$$\text{ندرس انتماء } T: (2)^2 + (2\sqrt{3})^2 - \frac{4}{25}(10)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 16 - 16 = 0 \Rightarrow \text{محقة}$$

$$0 \leq 10 \leq 5 \Rightarrow \text{غير محقة}$$

المخروط $T \notin$

حل ورقة عمل يدوية هندسة 1

السؤال الأول:

$$\overline{AE} + \overline{DG} - \overline{EF} = \overline{AE} + \overline{AF} + \overline{FE} \quad (a \ 1)$$

$$\Rightarrow \overline{AE} + \overline{AE} = 2\overline{AE}$$

$$2\overline{AJ} + \overline{AB} + \overline{CG} = 2\overline{AJ} + \overline{AB} + \overline{BF} \quad (b)$$

$$\Rightarrow \overline{AE} + \overline{AF} = 2\overline{AI}$$

$$2\overline{AM} = \overline{DH} - \overline{GD} + 2\overline{IF} \quad (a \ 2)$$

$$\Rightarrow 2\overline{AM} = \overline{AE} + \overline{AF} + 2\overline{IF} \Rightarrow 2\overline{AM} = 2\overline{AI} + 2\overline{IF}$$

$$\Rightarrow 2\overline{AM} = 2\overline{AF}$$

M تنطبق على F

$$\overline{BM} = \overline{BC} + \overline{DH} - \overline{IG} + \overline{IJ} \quad (b)$$

$$\Rightarrow \overline{BM} = \overline{BC} + \overline{CG} + \overline{GI} + \overline{IJ} \Rightarrow \overline{BM} = \overline{BJ}$$

M تنطبق على J

السؤال الثاني:

$$H(0, y, 0)$$

$$HA = HB$$

$$\sqrt{4 + (1 - y)^2 + 1} = \sqrt{1 + y^2 + 4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1 - y)^2 + 5} = \sqrt{y^2 + 5} \Rightarrow (1 - y)^2 + 5 = y^2 + 5$$

$$\Rightarrow 1 - 2y + y^2 + 5 = y^2 + 5 \Rightarrow 1 = 2y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$H\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

السؤال الثالث:

$$\overline{AB}(1, -1, 1), \overline{AM}(a - 2, b - 3, 2)$$

$$\frac{1}{a-2} = \frac{-1}{b-3} = \frac{1}{2} \quad \text{①} \quad \text{②} \quad \text{③}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{b-3} \Rightarrow b - 3 = -2 \Rightarrow b = 1 \quad \text{من ① و ②}$$

$$\frac{1}{a-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = a - 2 \Rightarrow a = 4 \quad \text{من ① و ③}$$

ورقة عمل يدوية هندسة 1

السؤال الأول:

مكعب ABCDEFGH

I منتصف EF

J منتصف AE

1- عبّر عن المجموع الشعاعي

بدلالة شعاع واحد:

$$a) \overline{AE} + \overline{DG} - \overline{EF}$$

$$b) 2\overline{AJ} + \overline{AB} + \overline{CG}$$

2- عين موقع M التي تحقق:

$$a) 2\overline{AM} = \overline{DH} - \overline{GD} + 2\overline{IF}$$

$$b) \overline{BM} = \overline{BC} + \overline{DH} - \overline{IG} + \overline{IJ}$$

السؤال الثاني: عين النقطة H الواقعة على محور الترتيب، تبعد عن

$$A(2, 1, 1), \quad B(-1, 0, 2) \quad \text{و } B \text{ بعداً متساوياً حيث:}$$

السؤال الثالث: عين a و b لتقع النقاط:

$$B(3, 2, 1), \quad A(2, 3, 0), \quad M(a, b, 2)$$

على استقامة واحدة.

السؤال الرابع:

مكعب ABCDEFGH

$$J \text{ تحقق } \overline{BJ} = \frac{3}{4}\overline{BC}$$

$$I \text{ تحقق } \overline{DI} = \frac{1}{4}\overline{DC}$$

نتخذ معلماً متجانساً (A; $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE}$)

1. أثبت أن النقاط G و J و E تعين مستوي

2. ادرس الارتباط الخطي للأشعة: $\overline{HI}, \overline{EJ}, \overline{EG}$

3. ماذا تستنتج فيما يخص المستقيم (HI) والمستوي (EGJ)

السؤال الخامس:

ABCD رباعي وجوه منتظم

طول ضلعه 4 والمطلوب:

1- احسب $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$

و $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

2- أثبت أن \overline{AB} يعامد \overline{CD}

3- نضع I منتصف $[AB]$,

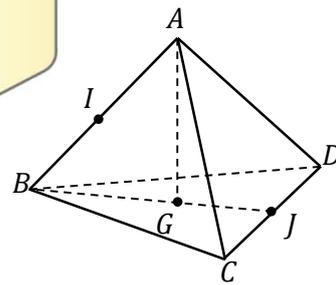
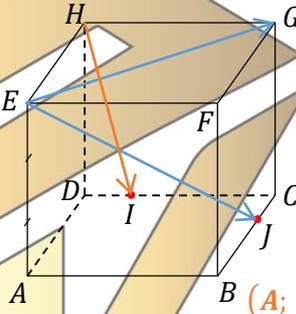
و J منتصف $[CD]$

أثبت أن: $\overline{AB} \perp \overline{IJ}$ ثم تحقق أن: $\overline{IJ} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CD}$

4- نضع O مركز ثقل الرباعي ABCD، و G مركز ثقل المثلث

(BCD) أثبت أن A و O و G على استقامة واحدة.

5- حدد موقع M التي تحقق: $\overline{DM} = \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{DB}) - \overline{BI}$



السؤال الخامس:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AD}\| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) -1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 4 \times \cos(60) = 8$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \times 4 \times \cos(60) = 8$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 4 \times \cos(60) = 8$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) -2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 \times 4 \times \cos(60) - 4 \times 4 \times \cos(60)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 8 - 8 = 0$$

\overrightarrow{AB} و (CD) متعامدان.

$$l_1 = \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} -3$$

$$\Rightarrow l_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = l_2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(4)^2 - 8 + \frac{1}{2}(0) = 8 - 8 + 0 = 0$$

\overrightarrow{AB} و (IJ) متعامدان.

4- لدينا G مركز ثقل $BCD \Leftarrow G$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 1)$

و O مركز ثقل $ABCD \Leftarrow O$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1)$ و $(B, 1)$ و $(C, 1)$ و $(D, 1)$

حسب الخاصية التجميعية: O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1)$ و $(G, 3)$ و O و A واقعة على استقامة واحدة.

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{DI}) - \overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IB} -5$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$$

النقطة M تنطبق على B

السؤال الرابع:

$$E(0,0,1), G(1,1,1), J\left(1, \frac{3}{4}, 0\right) \quad (1)$$

$$I\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right), H(0,1,1)$$

$$\overrightarrow{EG}(1,1,0), \overrightarrow{EJ}\left(1, \frac{3}{4}, 1\right)$$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{\frac{3}{4}} \neq \frac{0}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً \Leftarrow النقاط تعين مستوى.

$$\overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right) \quad (2)$$

$$\overrightarrow{HI} = \alpha \overrightarrow{EG} + \beta \overrightarrow{EJ}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = \alpha + \beta \dots (1)$$

$$\Rightarrow 0 = \alpha + \frac{3}{4}\beta \dots (2)$$

$$\Rightarrow -1 = -\beta \dots (3)$$

من (3) نجد: $\beta = 1$

نعوّض في (1): $\frac{1}{4} = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{4}$

نتحقق في (2): $0 = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow 0 = 0$ محققة

\Leftarrow الأشعة \overrightarrow{HI} و \overrightarrow{EG} و \overrightarrow{EJ} مرتبطة خطياً

(3) المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)

السؤال الخامس:

$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه:

$$AE = AD = 1, AB = 2$$

I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CG]$

نتخذ معلم: $(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1) أوجد إحداثيات I و J و D .

2) أثبت أن (DI) و (IJ) متعامدان واحسب $\cos \widehat{IJD}$

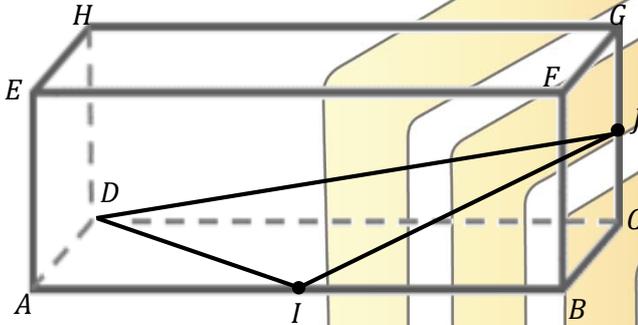
3) احسب مساحة المثلث $.DIJ$

4) اكتب معادلة المستوي (DIJ) .

5) احسب بعد H عن المستوي (DIJ) .

6) احسب حجم رباعي الوجوه $.HDIJ$.

7) استنتج بعد J عن المستوي (HDI) .



ورقة عمل يدوية هندسة ②

السؤال الأول: لدينا في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط:

$$A(1, 1, 0), B(1, 2, 1), C(4, 0, 0)$$

والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط A و B و C تعين مستوي.

2- أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى بالعلاقة:

$$x + 3y - 3z - 4 = 0$$

3- ليكن المستويان P, Q :

$$P: x + 2y - z - 4 = 0$$

$$Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

أثبت أن المستويان يتقاطعان في الفصل المشترك d التمثيلات الوسيطة التالية:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

4- ما هي نقطة تقاطع المستويين $(ABC), Q, P$

السؤال الثاني:

ليكن لدينا المستقيمين d و d' :

$$d: \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -s - 1 \\ z = s + 1 \end{cases}; s \in \mathbb{R}, d': \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 2 \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

1. أثبت أن d, d' متقاطعان بنقطة I جد إحداثياتها.

2. اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d, d' .

السؤال الثالث:

ليكن: $A(1, 1, 1)$

$$P: x - y + 3z - 1 = 0$$

$$Q: -2x + 2y - 6z + 5 = 0$$

1- اكتب معادلة المستوي R المار من A ويوازي P .

2- أثبت أن Q يوازي المستوي R .

السؤال الرابع:

لتكن $A(0, 1, 2)$ و $B(4, 2, 1)$

1. اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) .

2. اكتب معادلة المستوي المار من A ويعامد (AB) .

3. اكتب معادلة الكرة التي مركزها B وتمر من A .

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow I(2, -1, 1)$$

بفرض: $\vec{n}(a, b, c)$

$$\vec{n} \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 3a - b + c = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow a + 2b - c = 0 \dots (2)$$

بفرض $a = 1$

$$3 - b + c = 0 \dots (1)$$

$$1 + 2b - c = 0 \dots (2)$$

$$4 + B = 0 \Rightarrow B = -4 \quad \text{بجمع (1) و (2)}$$

$$3 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -7 \quad \text{نعوض في (1)}$$

$$\vec{n}(1, -4, -7), \quad I(2, -1, 1)$$

$$P: (x - 2) - 4(y + 1) - 7(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow P: x - 4y - 7z + 1 = 0$$

السؤال الثالث:

$$A(1, 1, 1), \quad \vec{n}_P = \vec{n}_R(1, -1, 3) \quad (1)$$

$$R: 1(x - 1) - 1(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow R: x - y + 3z - 3 = 0$$

$$\vec{n}_R(1, -1, 3), \quad \vec{n}_Q(-2, 2, -6) \quad (2)$$

$$\frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} \Rightarrow -2 = -2 = -2$$

الأشعة مرتبطة خطياً والمستويان متوازيان.

السؤال الرابع:

$$A(0, 1, 2), \quad \vec{AB} = \vec{u}(4, 1, -1) \quad (1)$$

$$(AB) \begin{cases} x = 4t \\ y = t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases}; t \in R$$

$$A(0, 1, 2), \quad \vec{n} = \vec{u}(4, 1, -1) \quad (2)$$

$$P: 4(x - 0) + (y - 1) - (z - 2) = 0$$

$$\Rightarrow P: 4x + y - z + 1 = 0$$

$$B(4, 2, 1), \quad R = BA = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} \quad (3)$$

$$S: (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 18$$

حل ورقة عمل يدوية هندسة (2)

السؤال الأول:

$$\vec{AB}(0, 1, 1), \quad \vec{AC}(3, -1, 0) \quad (1)$$

$$\frac{0}{3} \neq \frac{1}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً \Leftarrow النقاط تعين مستوي

$$\vec{n}(a, b, c) \quad (2)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow b + c = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \Rightarrow 3a - b = 0 \dots (2)$$

$$b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \quad \text{بفرض } c = 1 \text{ نعوض في (1)}$$

$$3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \quad \text{نعوض في (2)}$$

$$\Rightarrow \vec{n}\left(-\frac{1}{3}, -1, 1\right) \Rightarrow \vec{n}(-1, -3, 3)$$

$$(ABC): 1(x - 4) + 3(y - 0) - 3(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow (ABC): x + 3y - 3z - 4 = 0$$

$$x + 2y - z - 4 = 0 \quad (3)$$

$$2x + 3y - 2z - 5 = 0$$

بفرض $z = t$

$$x + 2y - t - 4 = 0$$

$$2x + 3y - 2t - 5 = 0$$

نضرب (1) بـ (-2) ونجمع مع (2)

$$-y + 8 - 5 = 0 \Rightarrow y = 3$$

$$x + 6 - t - 4 = 0 \Rightarrow x = t - 2 \quad \text{نعوض في (1)}$$

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}; t \in R$$

$$I \leftarrow d \quad (4)$$

$$(ABC) \rightarrow t$$

$$t - 2 + 9 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} - 2 \\ y = 3 \\ z = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

السؤال الثاني:

$$\vec{u}(3, -1, 1), \quad \vec{v}(1, 2, -1)$$

$$\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً \Leftarrow d و d' غير متوازيين.

$$3s + 2 = t + 1 \dots (1)$$

$$-s - 1 = 2t - 3 \dots (2)$$

$$s + 1 = -t + 2 \dots (3)$$

$$0 = t - 1 \Rightarrow t = 1 \quad \text{بجمع (2) و (3)}$$

$$S + 1 = -1 + 2 \Rightarrow S = 0 \quad \text{نعوض في (3)}$$

$$0 + 2 = 1 + 1 \Rightarrow 2 = 2 \quad \text{محققة في (1)}$$

نعوض S في معادلة d :

$H(0,1,1)$ (5)

$$\text{dist}(H, DIJ) = \frac{|0 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 16}}$$

$$\text{dist}(H, DIJ) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$v = \frac{1}{3} S_{DIJ} \times h \quad (6)$$

$$h = \text{dist}(H, DIJ) = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

$$v = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

$$v = \frac{1}{3} S_{HDI} \cdot \text{dist}(J, HDI) \quad (7)$$

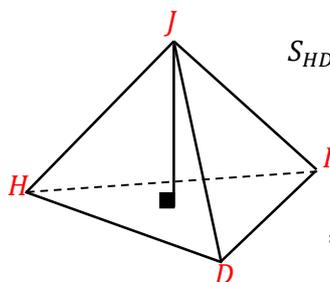
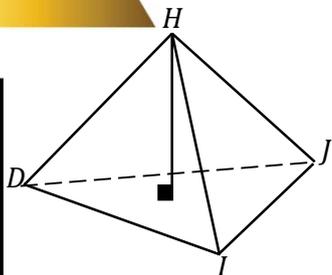
نحسب مساحة المثلث HDI القائم في D .

$$S_{HDI} = \frac{HD \times DI}{2} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{3} S_{HDI} \cdot \text{dist}(J, HDI)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \text{dist}(J, HDI)$$

$$\text{dist}(J, HDI) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



السؤال الخامس:

$$I(1,0,0), J(2,1,\frac{1}{2}), D(0,1,0) \quad (1)$$

$$\vec{DI}(1, -1, 0), \vec{IJ}(1, 1, \frac{1}{2}) \quad (2)$$

$$\vec{DI} \cdot \vec{IJ} = 1 - 1 + 0 = 0$$

المستقيمان (DI) و (IJ) متعامدان فالمثلث DIJ قائم.

$$\cos \widehat{IJD} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{IJ}{DJ}$$

$$IJ = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$DJ = \sqrt{4 + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\cos \widehat{IJD} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

(3) المثلث DIJ قائم في I .

$$DI = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$S = \frac{DI \times IJ}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\vec{DI}(1, -1, 0), \vec{IJ}(1, 1, \frac{1}{2}) \quad (4)$$

$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1}$ غير مرتبطين خطياً

بفرض: $\vec{n}(a, b, c)$

$$\vec{n} \cdot \vec{DI} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \dots (1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{IJ} = 0 \Rightarrow a + b + \frac{1}{2}c = 0 \dots (2)$$

بفرض $a = 1 \Leftarrow b = 1$

نعوض في (2):

$$1 + 1 + \frac{1}{2}c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$\vec{n}(1, 1, -4)$$

نختار: $I(1, 0, 0)$

معادلة (DIJ)

$$1(x - 1) + 1(y - 0) - 4(z - 0) = 0$$

$$(DIJ): x + y - 4z - 1 = 0$$

حل ورقة عمل منزلية هندسة

السؤال الأول:

$$\vec{CD} + \vec{CA} + 2\vec{IJ} = \vec{CA} \quad (a)$$

$$\Rightarrow 2\vec{CI} + 2\vec{IJ} = 2\vec{CJ} = \vec{CA}$$

$$-\left(\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA}\right) + \vec{CJ} = -\frac{1}{2}\vec{CD} \quad (b)$$

$$l_1 = -(\vec{CD} + \vec{DI}) + \vec{CJ} = -\vec{CI} + \vec{CJ}$$

$$\Rightarrow l_1 = \vec{IC} + \vec{CJ} = \vec{IJ}$$

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفين ضلعين في مثلث توازي الثالثة وتساوي نصف طولها:

$$2\vec{IJ} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{DC} \Rightarrow \vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{CD} = l_2$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2 \text{ محققة}$$

السؤال الثاني:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AD}\| \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 2 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{GH}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{GH} \Rightarrow \vec{AM} = \vec{AF} + \vec{FI}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \vec{AI}$$

M منطبق على I

السؤال الثالث:

بما أن $\vec{u} + \vec{v}$ و $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدان أي:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \Rightarrow \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$$

$$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

السؤال الرابع:

$$\vec{AB}(-3, 1, 3), \vec{n}(3, -1, -3) \quad (1)$$

$$\frac{-3}{3} = \frac{1}{-1} = \frac{3}{-3} \Rightarrow -1 = -1 = -1$$

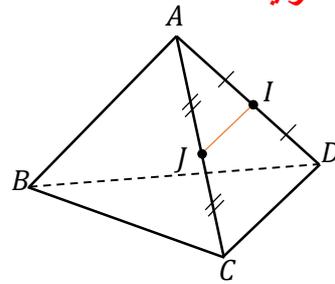
\vec{AB} و \vec{n} مرتبطين خطياً والمستقيم (AB) يعامد المستوي

$$A(2, 1, -2), \vec{u}(3, -1, -3) \quad (2)$$

$$(AB): \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = -3t - 2 \end{cases}; t \in R$$

ورقة عمل منزلية هندسة

السؤال الأول:



ABCD رباعي وجوه فيه I منتصفه [AD]

I منتصف [AC]:

أثبت أن:

$$a) \vec{CD} + \vec{CA} + 2\vec{IJ} = \vec{CA}$$

$$b) -\left(\vec{CD} + \frac{1}{2}\vec{DA}\right) + \vec{CJ} = -\frac{1}{2}\vec{CD}$$

السؤال الثاني: ABCDEFGH متوازي سطوح فيه:

$BC = CG = 1, AB = 2$ وقياس الزاوية \widehat{DAB} يساوي 45° و I منتصف [EF] المطلوب:

$$-1 \text{ احسب } \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

$$-2 \text{ عين موقع } M \text{ التي تحقق:}$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH}$$

السؤال الثالث: إذا علمت أن $(\vec{u} + \vec{v})$ يعامد $(\vec{u} - \vec{v})$ أثبت أن \vec{u}, \vec{v} لهم نفس الطول.

السؤال الرابع: في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتان: $A(2, 1, -2), B(-1, 2, 1)$ والمستوي:

$$P: 3x - y - 3z - 8 = 0$$

-1 أثبت أن (AB) يعامد المستوي P.

-2 اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB) ثم عين A' المسقط القائم للنقطة A على P.

السؤال الخامس: ادرس الوضع النسبي للمستويات الثلاث:

$$P: -x + 2y + 3z - 5 = 0$$

$$Q: 3x - y - 4z + 5 = 0$$

$$R: 2x + 3y - 2z + 2 = 0$$

السؤال السادس: نتأمل في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقاط:

$$A(2, 4, 3), B(4, -2, 3)$$

$$C(1, -1, 1), D(3, 3, -3)$$

(1) أثبت أن النقاط A و B و C لا تقع على إستقامة واحدة

(2) اكتب معادلة المستوي (ABC).

(3) اكتب معادلة المستقيم Δ المار من D والعمود على (ABC).

(4) استنتج D' مسقط D على المستوي (ABC).

(5) عين مجموعة النقاط $M(x, y, z)$ التي تحقق:

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

السؤال الخامس:

لندرس تقاطع المستويين P و Q :

$$\vec{n}_P(-1,2,3), \vec{n}_Q(3,-1,-4)$$

$$-\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1}$$

الأشعة غير مرتبطة خطياً $\Leftarrow P$ و Q متقاطعين في d

$$-x + 2y + 3z - 5 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$3x - y - 4z + 5 = 0 \dots \textcircled{2}$$

نضرب $\textcircled{1}$ بـ 3:

$$-3x + 6y + 9z - 15 = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$3x - y - 4z + 5 = 0 \dots \textcircled{2}$$

بجمع $\textcircled{1}$ و $\textcircled{2}$:

$$5y + 5z - 10 = 0 \dots \textcircled{3}$$

بقسمة $\textcircled{3}$ على 5:

$$y + z - 2 = 0 \dots \textcircled{3}$$

نفرض $z = t$:

$$y = 2 - t$$

نعوض في $\textcircled{1}$:

$$-x + 4 - 2t + 3t - 5 = 0$$

$$\Rightarrow x = t - 1$$

$$d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} ; t \in R$$

ندرس تقاطع d مع R بتعويض معادلات d في معادلة R :

$$-2 + 2t + 6 - 3t - 2t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2$$

نعوض t في d :

$$x = -1 + 2 = 1$$

$$y = 2 - 2 = 0$$

$$z = 2$$

P و Q و R يتقاطعون في $I(1,0,2)$

السؤال السادس:

$$\vec{AB}(2,-6,0), \vec{AC}(-1,-5,-2) \quad (1)$$

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{-5} \neq \frac{0}{-2}$$

$\Leftarrow \vec{AB}$ و \vec{AC} غير مرتبطين خطياً فالنقاط ليست على إستقامة واحدة.

$$\vec{n}(a,b,c) \quad (2)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\Rightarrow 2a - 6b = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$\Rightarrow -a - 5b - 2c = 0 \dots \textcircled{2}$$

نفرض $b = 1$:

$$2a - 6(1) = 0 \Rightarrow a = 3$$

نعوض في $\textcircled{2}$:

$$-3 - 5 - 2c = 0 \Rightarrow c = -4$$

$$\vec{n}(3,1,-4)$$

نختار: $C(1,-1,1)$

$$(ABC): 3(x-1) + 1(y+1) - 4(z-1) = 0$$

$$(ABC): 3x + y - 4z + 2 = 0$$

(3) النقطة: $D(3,3,3)$ والناظم: $\vec{u} = \vec{n}(3,1,-4)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 3t + 3 \\ y = t + 3 \\ z = -4t - 3 \end{cases} ; t \in R$$

(4) D' تقاطع Δ مع (ABC) :

$$9 + 9t + 3 + t + 2 + 16t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 26t = -26 \Rightarrow t = -1$$

نعوض في Δ :

$$x = 0, y = 4, z = 1 \Rightarrow D'(0,4,1)$$

$$\vec{MA}(2-x, 4-y, 3-z) \quad (5)$$

$$\vec{MB}(4-x, -2-y, 3-z)$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$(2-x)(4-x) + (4-y)(-2-y) + (3-z)^2 = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 9 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها $(-3,1,3)$

ونصف قطرها $\sqrt{10}$

2024

مكتبة الرياضيات

تشمل الأوراق:

شرح كامل لكافة أبحاث المادة
بجزأها الأول والثاني مع أمثلة محلولة
أوراق عمل خاصة بكل بحث
إضافة لنماذج امتحانية



ACADEMY

دع لمادتي نصيباً من قلبك

THANK YOU



instagram



telegram



facebook



youtube

