المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة أم القرى
كلية العلوم التطبيقية
قسم الفيزياء

مبادئ الميكانيكا الكلاسيكية

اعداد

د/ سعود بن حميد بن أحمد اللحياني

أستاذ الفيزياء المشارك بقسم الفيزياء

كلية العلوم التطبيقية –جامعة أم القرى

مكة المكرمة

المقدمة :

الميكانيكا الكلاسيكية هي أساس دراسة فيزياء القوى التي تؤثر علي الأجسام . غالبا ما يشار إلي الميكانيكا الكلاسيكية باسم ميكانيكا نيوتن نسبة إلي إسحاق نيوتن الذي اكتشفها . الميكانيكا الكلاسيكية يمكن أن تنقسم إلي قسمين ؛ الإستاتيكا او علم السكون التي تدرس حالة الأجسام المادية الساكنة ، و الكينماتيكا أو علم الحركة التي تدرس الأجسام التي في حالة حركة ، وكذلك الديناميكا او علم التحريك التي تدرس حالة الأجسام الواقعة تحت تأثير قوي .الأجسام المادية المستمرة والقابلة للسقوط ، وهي نفسها تنقسم إلي قسمين ؛ ميكانيكا الموائع و ميكانيكا المواد الصلبة . ميكانيكا الموائع إنما تكون طبقا لحالة المادة موضع الدراسة سواء كانت من السوائل أو [[غاز الميكانيكا الإستمرارية هي فرع من فروع الميكانيكا الكلاسيكية التي تدرس |الغازات]] وهي تتناول مواضيع كثيرة ، مثل ؛ الهيدروستاتيكا والهيدروديناميكا و ميكانيكا الغازات و الديناميكا الهوائية وغيرها من المجالات . الميكانيكا الكلاسيكيه تعطي نتائج دقيقة جدا وذلك ضمن مجال الحياة اليومية ، وذلك عند حساب سرعة سيارة مثلا فإنها تكون كافية . يحل محلها الميكانيكا النسبية في حالة الأنظمة التي تسير بسرعات كبيرة تكاد تقترب من سرعة الضوء . ويحل محلها ميكانيكا الكم في حالة الكلاسيكيه يمكن استخدامها لوصف حركة الأجسام بشريه الحجم (مثل السيارات وكرة البيسبول) ، والعديد من الأجسام الفلكية مثل (الكواكب والمجرات) ، وبعض الأجسام المجهريه مثل (الجزيئات العضوية).

أحد المفاهيم الهامة في الميكانيكا هو مفهوم حفظ الطاقة و كمية التحرك ، الأمران اللذان جعلا لاجرانج و [ميكانيكا الأنظمة الدقيقة ، و نظرية المجال الكمومي النسبي في حالة الأنظمة التي لها الخاصيتين السابقتين . ومع ذلك ، فإن الميكانيكا الكلاسيكيه ما زالت مفيدة جدا ، لأنها أسهل وأبسط بكثير من تطبيق هذه النظريات الأخرى ، ولها مجال كبير من

الشرعية عند تطبيقها في مجال النظريات الأخرى . الميكانيكا ك هاملتون|هاميلتون] يقومان بإعادة صياغة قوانين نيوتن . النظريات مثل ميكانيكا الموائع و النظرية الحركية للغازات نتجتا عن تطبيق الميكانيكا الكلاسيكيه للأنظمة الدقيقة . و نظرية الفوضى تختص بدراسة الأنظمة التي إذا حدث بها تغييرات طفيفة ينتج عنها آثار كبيرة . قانون نيوتن للجاذبية تم صياغته ضمن الميكانيكا الكلاسيكيه موضحا قوانين كيبلر لحركة الكواكب ، وساهم في بروز الميكانيكا الكلاسيكيه كعنصر هام في الثورة العلمية .

فهرسة المواضيع

الفصل الأول

تفاضل وتكامل المتجهات وعلم الحركة

الفصل الأول

تفاضل وتكامل المتجهات وعلم الحركة :

ندرس في هذا الفصل وصف حركة الأجسام وذلك باستخدام علم التفاضل والتكامل وتطبيقه على الكميات المتجهه وهو مهم للغاية .

متجه موقع الجسيم : Position vector of a particle

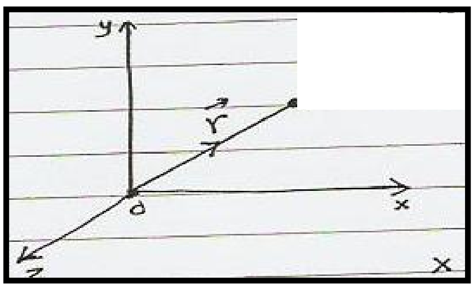
يمكن تحديد موقع أي جسيم بصورة كاملة باستخدام متجه **Vector** يبدأ من نقطة الأصل لمحاور مرجعية وينتهي بموقع الجسيم . وهذا المتجه يسمى متجه الموقع (كما في الشكل) فمثلاً عند استخدام المحاور الكارتيزية (xyz) فإن :

المتجه $r^{\longrightarrow}$ يمثل متجه الموقع للجسيم وصورته الرياضية هي :

$$r^{\longrightarrow} = i^{\wedge}x + i^{\wedge}y + k^{\wedge}z.............\quad ١-$$

حيث ^k^, r^, i هي متجهات الوحده وفي حالة حركة الجسيم فإن المركبات z, y, x لهذا المتجه تكون دوال زمنية أي x=x(t),y=y(t), z=z(t)

وعليه فإن متجه الموقع $r^{\longrightarrow}$ يكون دالة زمنية وهو كمية متغيرة مع الزمن أثناء حركة الجسيم .



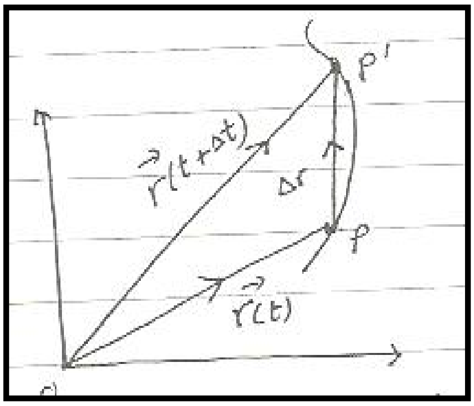
ووصف حركة الجسيم يعني تحديد مقدار واتجاه هذه الكمية في أي لحظة زمنية .

متجه السرعة Velocity vector:

نفرض أن متجه الموقع لجسيم ما في لحظة هو $\vec{r}(t)$ $= \vec{op}$ ، وبعد فترة زمنية Δt ، أصبح موقع الجسيم عند /P وعليه فإن متجه موقع الجسيم يعطي

$$\vec{op} = \vec{r}(t+\Delta t)$$

كما في الشكل .وعليه يكون التغير في متجه موقع الجسيم $(\Delta \vec{r})$ في هذه الفترة الزمنية هو :



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

السرعة المتوسطة :

تعطى بالعلاقة : $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

أما السرعة الخطية للجسيم $\vec{س}$ فإنها :

تعرف بأنها مشتقة موقع الجسيم بالنسبة للزمن أي : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

من المعادلة رقم (١) فإن السرعة الخطية هي :

$$\vec{v} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{i}\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt} = \hat{i}x^0 + i^0 y + \hat{k}z^0$$

حيث z^0,y^0,x^0 تسمى مركبات السرعة في الإحداثيات الكارتيزية.

مثال (١) أوجد مقدار واتجاه سرعة جسيم $v^{\rightarrow}$، حيث متجه الموقع يعطي بالعلاقة

ثوابت b,c خ

الحل : $$v^{\rightarrow} = \frac{dr^{\rightarrow}}{dt} = i^{\wedge} b = i^{\wedge}(c - gt)$$

$$1v^{\rightarrow}1 = \sqrt{b^2 + (c - gt)^2}$$

تكامل المتجهات vectors integration

يمكن تحديد موقع الجسم إذا علمت سرعته وذلك باستخدام تكامل متجه السرعة وذلك

كالآتي :

حيث $v^{\rightarrow} = \dfrac{dr^{\rightarrow}}{dt}$ فإن

$$dr^{\rightarrow} = v\,dt \Rightarrow \quad r^{\rightarrow} = \int v^{\rightarrow}\,dt + r_0^{\rightarrow}$$

حيث $r_0^{\rightarrow}$ = متجه الموقع الابتدائي للجسيم (في اللحظة الصفريه)

مثال : أوجد متجه الموقع لجسيم إذا علمت أن سرعته تعطي بالعلاقة :

$$r^{\rightarrow} = i^{\wedge} A + i^{\wedge}(Bt) + k^{\wedge}(c/t)$$

حيث C,B,A ثوابت .

الحل : $\vec{r} = \int [\hat{i}A + \hat{i}Bt + \hat{K}(c/t)]dt$

$$= \int [Adt + \hat{i}\int Btdt + \hat{K}\int \frac{c}{t}dt + \vec{r_0}$$

$$\vec{r} = \hat{i}(At) + \hat{i}\frac{Bt^2}{2} + kc\ln t + \vec{r_0}$$

ويمكن تحديد $\vec{r_0}$ بمعرفة السرعة الابتدائية للجسيم في لحظة t=0

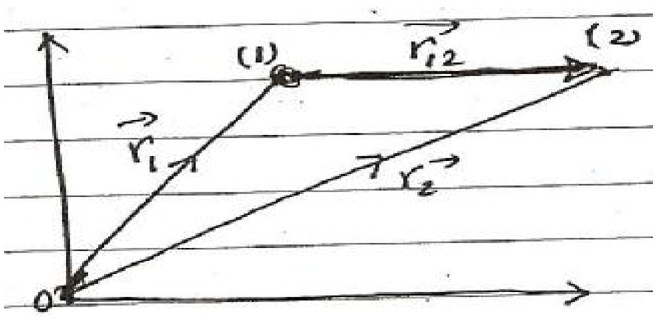
وبنفس الطريقة يمكن تحديد متجه موقع الجسيم إذا علمت متجه التعجيل $\vec{a}$ وذلك باستخدام التكامل الأول ثم إجراء تكامل ثاني على النحو التالي :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \int \vec{a}dt + \vec{v_0}......................$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}dt + \vec{r_0}.......... \quad ....$$

السرعة النسبية Relative Velocity

لنفرض أن $\vec{r_1}$ تمثل متجه موقع لجسيم ما وأن $\vec{r_2}$ يمثل متجه موقع لجسيم ثاني في نفس إطار المرجع، لمعرفة إزاحة الجسم الثاني بالنسبة للجسم الأول فإن ذلك يحدد بمتجه بيد أن الجسم الأول ونحو الثاني ويرمز له بالرمز $\vec{r_{1\to 2}}$ أو $\vec{r_{12}}$.



بالرجوع إلى الشكل المرفق فإن $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

ومن هذه العلاقة نحدد سرعة الجسيم الثاني بالنسبة للأول أو ما يعرف بالسرعة النسبية أي أن :

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_{.1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ملاحظة : هنا يكون المرجع الجسيم الأول .

ولمعرفة سرعة الجسيم الأول بالنسبة لسرعة الثاني $\vec{v}_{21}$ فإن هذه السرعة تكون مساوية في المقدار للسرعة $\vec{v}_{21}$ ومعاكسة لها في الاتجاه أي أن :

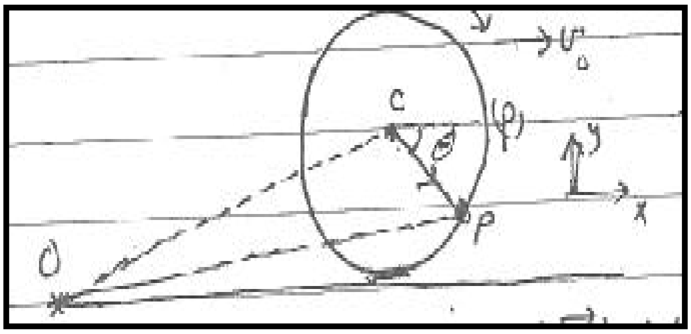
$$\vec{v}_{21} = -\vec{v}_{12}$$

مثال : تتدحرج عجلة نصف قطرها b على الأرض بسرعة أفقية v_0 بحد سرعة أي نقطة على حافة العجلة مثل (b) بالنسبة (١) لمركز العجلة (٢) بالنسبة للأرض.

الحل :

نفرض أن (P) في اللحظة الصفرية عند (t=0) كانت في الاتجاه الأفقي وعند أي لحظة أثناء تتدحرج العجلة فإن متجه الموقع لـ P بالنسبة لمركز العجلة هو $\vec{cp}$ ونرمز له :

$$\vec{r}_{cp} = i(b\cos q) + \hat{i}(-b\sin q)$$



حيث q= زاوية دوران العجلة ، وتعطي بدلالة السرعة الزاوية حيث $q = wt$.

في الحركة الدورانية (تدحرج دون انزلاق) $q = w = (v_0 / b):$

∴ سرعة النقطة (P) بالنسبة لمركز العجلة

$$v_{\vec{cp}} = \frac{dr_{\vec{cp}}}{dt} = \hat{i}\, bw \ \sin\ q \ - \hat{i}\, bw \ \cos\ q$$

$$v_{\vec{cp}} = \hat{i} v_0 \sin q - \hat{i} v_0 \cos q \ldots\ldots\ldots\ldots$$

نلاحظ أن سرعة P تعتمد على q،وعليه عند ملامسة (P) الأرض فإن $q = \frac{p}{2}$

حسب الرسم المعطى وعليه فإن $(n_{\vec{cp}}) = -\hat{i} n_0 (1)$

$$q = \frac{p}{2} \qquad -\hat{i} v_0 (0) = -\hat{i} n_0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ثانياً : لإيجاد سرعة p بالنسبة لشخص على الأرض :

نجد إزاحة p بالنسبة لـ o وهي : $r_{\vec{op}}$ حيث

$$r_{\vec{op}} = r_{\vec{oc}} + r_{\vec{cp}}$$

$$\therefore n_{op}^{\rightarrow} = n_{oc}^{\rightarrow} + n_{cp}^{\rightarrow}$$

حيث أن العجلة تتدحرج أفقيا. (انطلاق أمامي) بمقدار V_0 فإن $u_{oc}^{\rightarrow} = n_{o}^{\rightarrow}$

$$n_{op}^{\rightarrow} = i^{\wedge} v_0 + (-i^{\wedge} v \sin q) - i^{\wedge} v_0 \cos q$$

$$n_{op}^{\rightarrow} = i^{\wedge} v_0 + (1 - \sin q) - i^{\wedge} v_0 \cos q$$

نلاحظ أن سرعة p بالنسبة للأرض عند ملامسة (p)الأرض $(q = p/2)$ هي

$$n_{op}^{\rightarrow} = i^{\wedge} v_0 + (1-1) - i^{\wedge} v_0 (0) = 0$$

أي أن النقطة (P) تبدو ساكنة بالنسبة للشخص على الأرض $(q = p/2)$ أثناء تدحرج العجلة بانطلاق أمامي (v_0).

السرعة والتعجيل في الإحداثيات القطبية

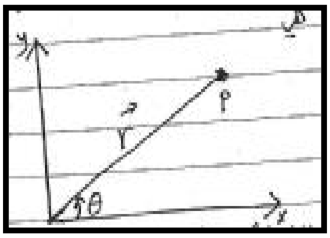
Velocity and acceleration in polar coordinates

عندما يتحرك جسيم ما في مستوى (a plane) فإن موقع الجسيم يمكن وصفه بدلالة متغيرين فقط هما (r, q) حيث $r^{\rightarrow}$ = متجه موقع الجسم (إزاحته بالنسبة لنقطة الأصل) و q = الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع محور السينات الموجب (كما في الشكل).

أما متجهات الوحدة في هذا النظام الاحداثي هي :

$(q^{\wedge}, r^{\wedge})$ حيث :

$$r^{\wedge} = \frac{r^{\rightarrow}}{\left| r^{\rightarrow} \right|}$$



ومعادلات التحويل بين الإحداثيات المديكاريته

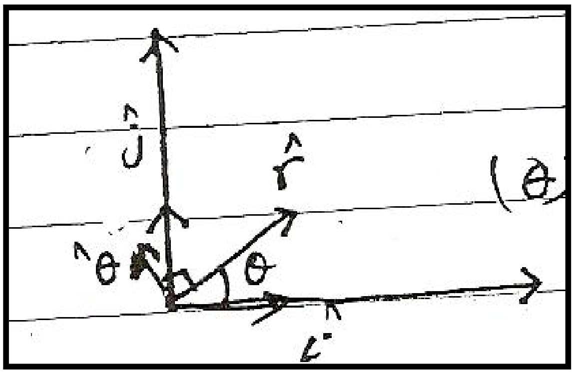
(x,y) والإحداثيات القطبية (r,q) تعطى على النحو التالي :

X=r cos$q$ y=r sin q

والتحويلات المعاكسة هي :

$$q = \tan^{-1}(y/x) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

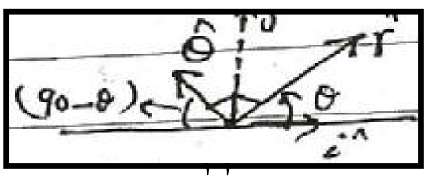
أما العلاقات بين متجهات الوحده $(q^{\wedge}, r^{\wedge})$ و $(i^{\wedge}, i^{\wedge})$ يمكن تحديدها من الشكل .



نلاحظ أن مركبات $r^{\wedge}$ في الاحداثيات الديكارنية هي :

$$r = i^{\wedge}\cos q + i^{\wedge}\sin q$$

بينما $\Theta^{\wedge}$ متجه الوحدة يكون متعامدا مع $r^{\wedge}$ في اتجاه زيادة (q)



$$q = -i^{6} \cos(90 - q) + i^{\wedge} \sin(90 - q)$$

$$q^{\wedge} = -i^{\wedge} \sin q + i^{\wedge} \cos q ......$$

سرعة الجسيم في الإحداثيات القطبية :

حيث أن متجه موقع الجسيم هو : $r^{\rightarrow} = r\, r^{\wedge}$ **فإن مشتقة المتجه بالنسبة للزمن تغطي السرعة وهنا يجب ملاحظة أن متجه الوحدة ثم يتغير مع الزمن أثناء الحركة وكذلك** $|r|$ **دالة فنية .**

وعليه فإن:

$$n^{\rightarrow} = \frac{dr^{\rightarrow}}{dt} = \frac{d}{dt}(rr^{\wedge})$$

$$= r^{\wedge} \frac{dr}{dt} + r \frac{dr^{\wedge}}{dt}$$

$$= r^{\wedge} r^{0} + r[\frac{dr^{\wedge}}{dq} . \frac{dq}{dt}]$$

$$= r^{\wedge} r^{0} + r[i^{\wedge}(1 - \sin q) + i^{\wedge} \cos q]q^{/}$$

$$v^{\rightarrow} = r^{\wedge} r^{0} + rq^{0} q^{\wedge}$$

نلاحظ : أن للسرعة في الاحداثيات القطبية مركزيان احداهما في اتجاه الشعاع (r)
وتسمى السرعة الشعاعية relaial velocity ومقدارها (r^0) ومركبة أخرى متعامدة
عليها في اتجاه $(q^\wedge)$تسمى السرعة المماسية (tangnotial) ومقدارها (rq^0).

مثال ٦ : يتحرك جسيم في مسار حلزوني يعطي بالعلاقات التالية :

$$r = bt^2 \qquad ,q = ct$$

حيث b,c ثوابت جد سرعة الجسيم ، في الإحداثيات القطبية .

الحل :

$$u_r = r^0 = 2bt$$

$$u_q = rq^0 = (bt^2)[c] = bct^2$$

$$\therefore u^\rightarrow = (2bt)r^\wedge + (bct^2)q \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ملاحظة : في حالة الحركة الدائرية.

يكون ثابت =r وعليه فإن $u_r = 0_- \qquad r^\cdot = 0$

لا يكون للجسيم سرعة شعاعية فقط يكون للجسيم سرعة مماسية

$$u_q = rq^\cdot \qquad u_q = bw$$

حيث b = نصف قطر المسار الدائري، w السرعة الزاوية.

تسارع الجسيم في الإحداثيات القطبية:

حيث أن $a^\rightarrow = \dfrac{du^\rightarrow}{dt} = \dfrac{d}{dt}[r^\cdot r^\wedge + rq^\cdot q^\wedge]$

$$= \frac{d}{dt} = [r^{\cdot} r^{\wedge}] + \frac{d}{dt}[r q^{\cdot} q^{\wedge}]$$

$$= r^{\cdot\cdot} r^{\wedge} + r^{\cdot} \frac{dr}{dt} + r^{\cdot} q^{\cdot} q^{\wedge} + r q^{\cdot\cdot} q_{\wedge} + r q^{\cdot} \frac{dq^{\wedge}}{dt}$$

$$= r^{\cdot\cdot} r^{\wedge} + r^{\cdot} (\frac{dr}{dt}) q \quad + r^{\cdot} q^{\cdot} q^{\wedge} + r q^{\cdot\cdot} q_{\wedge} + r q^{\cdot} \frac{dq^{\wedge}}{dt}$$

نعوض بدل المشتقات $\frac{dr^{\wedge}}{dq}, \frac{dq^{\wedge}}{dJ}$

حيث : $\frac{dr^{\wedge}}{dq} = q^{\wedge} \qquad \frac{dq}{dq}, = r^{\wedge}$

ثم نجمع الحدود التي تحوي على $r^{\wedge}$ معاً وكذلك الحدود التي تحوي على $q^{\wedge}$ معاً

لنحصل على :

$$a^{\rightarrow} = (r^{\cdot\cdot} - r q^{\cdot 2}) r^{\wedge} + (r q^{\cdot\cdot} + 2 r^{\cdot} q^{\cdot}) q^{\wedge}$$

حيث نلاحظ أن للتسارع في الإحداثيات القطبية مركبتان هما :

١ ـ المركبة الشعاعية (a_r) في اتجاه الشعاع ومقدارها $a_r = r^{\cdot\cdot} - r q^{\cdot 2}$ .....

٢ ـ المركبة المماسية (المستعرضة) a_q وتكون متعامدة مع المركبة الشعاعية :

$$a_q = r q^{\cdot\cdot} - 2 r^{\cdot} q^{\cdot\cdot} .....$$

ملاحظة : في حالة الحركة الدائرية حيث نصف القطر ثابت فإن ثابت = **r** وعليه :

$$r^{\cdot} = 0 \quad r^{\cdot\cdot} = 0 \qquad \text{وتكون} \qquad w = q^{\cdot}$$

وعليه فإنه في حالة السرعة الزاوية w المنتظمة

$$a_q = 0 \qquad ar = -bw^2 \qquad \Leftarrow q^{\cdot\cdot} = 0$$

العلاقة بين العجلة والسرعة في الحركات المدارية :

نفرض أن النقطة p تتحرك على مسار (مدار) ما مركزه النقطة 0 (ثابتة) ، لنفرض أن سرعة النقطة P عند لحظة ما (t) هي $u^{\rightarrow}$

لنفرض $T^{\wedge}$متجه الوحدة باتجاه المماس

Tangential unit vectorمتجه الوحدة المماسية :

$$a^{\rightarrow} = \frac{du^{\rightarrow}}{dt} = \frac{d}{dt}(uT^{\wedge})........ \quad \text{١-}$$

لإيجاد العجلة $a^{\rightarrow}$ نشتق المعادلة (١) بالنسبة للزمن .

$$a^{\rightarrow} = u^{\cdot}T^{\wedge} + u\frac{dT^{\wedge}}{dt}........ \quad \text{٢-}$$

مع ملاحظة أن $T^{\wedge}$ يعتمد على الزمن أثناء حركة النقطة (p) على المسار (يتغير اتجاهه مع الزمن) .

لنفرض أن $T^{\wedge}$ متجه الوحدة المماسية عند /p بعد فترة زمنية (Δt) .

ونلاحظ أن التغير في متجه الوحدة المماسية $(\Delta T^{\wedge})$ هو :

$$\Delta T^{\wedge} = T^{\wedge} - T^{\wedge}$$

$$\therefore \frac{dt^{\wedge}}{dt} = \frac{dT}{d\,y}\frac{d\,y}{dt}$$

نلاحظ في حالة كون $\Delta y \leftarrow 0$ فإن $\Delta T^{\wedge}$ يصبح متعامداً مع $T^{\wedge}$ وعليه نرمز

$\frac{dT}{dy}=$ معدل التغير لوحدة المتجه المماسية بالنسبة للزاوية المركزية ومسي وحده المتجه العمودية = $n^{\wedge}$

يمكن استخدام التغير في طول المسار (Δs) $\therefore \frac{dT}{dt} = n\frac{dy}{ds}$

$$\therefore \frac{d\,y}{dt} = \frac{d\,y}{ds}\frac{ds}{dt}$$

حيث أن طول القوس= (نصف قطر المسار) (الزاوية المركزية) $\Leftarrow$ $s=py$

$$\therefore \frac{ds}{dy} = 1 \Rightarrow \frac{ds}{dy} = \frac{1}{1}$$

كذلك السرعة (u)= طول القوس / الزمن $\Leftarrow$ $\frac{ds}{dt}=u$

$$\frac{dT^{\wedge}}{dt} = n.\frac{1}{1}n = n(n/p)......(3)$$

بالتعويض في معادلة (٢) نجد أن :

$$a^{\rightarrow} = u^{\cdot}T^{\wedge} + (\frac{u^2}{r})n^{\wedge} \quad ....(4)$$

نلاحظ في معادلة (4) أن للعجلة مركبتان تعطي بدلالة السرعة المماسية وهما :

١ ـ المركبة المماسية للعجلة $u^{\cdot} = (a_T)$ " مشتقة السرعة بالنسبة للزمن "

٢ ـ المركبة العمودية للعجلة $\frac{\wp^2}{r} = a_n$ وتسمى هذه المركبة بتعجل الجذب المركزي لأنها تكون باتجاه مركز التكور للمسار.

ويمكن كتابة معادلة (4) بدلالة مركبات العجلة على الصورة

$$a^{\rightarrow} = a_T T^{\wedge} + a_n n^{\wedge}$$

حالة خاصة :

إذا تحرك جسيم على محيط دائرة نصف قطرها (b) بسرعة u_0 ثابتة فإن $a_T = 0$ بينما التعجيل المركزي يكون $a_n = u_0^2 / b$

أما في حالة الحركة في مسار بسرعة متغيرة (غير منتظمة)

فإن مقدار العجلة $[a] = \sqrt{a_T^2 + a_n^2}$

$$= \sqrt{(v^{\cdot 2}) + (v^2 / \mathbf{l})^2}$$

تمارين الفصل الأول

١ ـ المعادلات التالية تمثل متجه موضع جسيم متحرك حد السرعة والانطلاق والتعجيل كدوال للزمن .

$$a) r^{\rightarrow} = i^{\wedge}(ct) + i^{\wedge}(A\sin wt)$$

$$b) r^{\rightarrow} = i^{\wedge} + (A\sin wt) + i^{\wedge} B\cos wt$$

٢ ـ تمثل العلاقة التالية حركة جسيم $r^{\rightarrow} = i^{\wedge}\cos wt + 2i^{\wedge}\sin wt$ حد الزاوية بين متجه التعجيل ومتجه السرعة في الزمن $t = \dfrac{p}{4w}$.

٣ ـ تمثل العلاقتان التاليتين موضع جسمين يتحركان على مسار دائري مشترك :

$$r_1^{\rightarrow} = i^{\wedge} b\sin wt + i^{\wedge} b\cos wt$$

$$r_2^{\rightarrow} = i^{\wedge} b\cos wt + i^{\wedge} b\sin wt$$

حد السرعة النسبية $u_{12}^{\wedge}$، ومقدار السرعة النسبية ، ومعدل التغير الزمني للمسافة بين الجسمين كدوال للزمن.

٤- يتحرك جسيم بانطلاق ثابت ولكي يغير اتجاهه باستمرار برهن أن متجه التعجيل يكون متعامداً في متجه السرعة باستخدام طريقتين (١) المركبات المحاسبية والعمودية للعجلة والسرعة (٢) باستخدام $\vec{u}.\vec{a}=o$. إذا أعطيت $\vec{a},\vec{u}$ بالإحداثيات القطبية.

٥- يتحرك جسيم في مسار دائري نصف قطره (b)ثابت فإذا كان انطلاقه مع الزمن حسب العلاقة : $u=At^2$حيث A ثابت. أوجد قيم t التي تجعل الزاوية بين متجه العجلة ومتجه السرعة – 45̊ .

٦- يتحرك جسيم في مسار لولبي فإذا كانت إحداثياته الاسطوانية تعطي كدوال للزمن :

$q=Bt^2$ z=ct^2 , r=A ٠

حيث C,B,A ثوابت حد متجهات السرعة والتعجيل كدوال للزمن .

نرجو أن تكون الصورة واضحة لديكم في هذا الباب

الفصل الثاني
ديناميكا الجسيم - الحركة على خط مستقيم

الفصل الثاني

ديناميكا الجسيم – الحركة على خط مستقيم

Dynamics of particle – Rectilinear motion

مقدمه:

علم الديناميكا هو ذلك العلم الذي يدرس حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى الخارجية المؤثرة عليها ، ويعتمد هذا العلم على قوانين الحركة التي وضعها نيوتن في القرن السابع عشر الميلادي ثم تطور هذا العلم على يد لاكرانج وهاملتون في القرن التاسع عشر ليشمل قوانين الحركة التي تحكم وتدرس حركة منظومة من الجسيمات المادية في ظروف معينة .

(١ . ٢) قوانين نيوتن في الحركة Netwons laws of Motion

في القرن السابع عشر وضع نيوتن ثلاثة قوانين نظرية لوصف حركة الجسيم تحت تأثير قوى خارجية مؤثرة عليه وتمكن تلخيص هذه القوانين على النحو التالي:

القانون الأول : يسمى هذا القانون أحيانا بقانون القصور الذاتي وينص على ما يلي :

كل جسيم يستمر في حالة السكون أو في حالة الحركة المنتظمة في خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تعمل على تغيير تلك الحالة أو بعبارة أخرى كل جسيم قاصر من من ذاته على تغير حالته والمقصود بالحالة : السكون أو الحركة .

القانون الثاني : يتناسب التغير في حركة الجسم مع القوة المسلطة عليه وتحدث الحركة باتجاه تأثير القوه المؤثرة على الجسم .

القانون الثالث : هناك لكل فعل رد فعل مساو له في المقدار ومعاكساً له في الاتجاه .

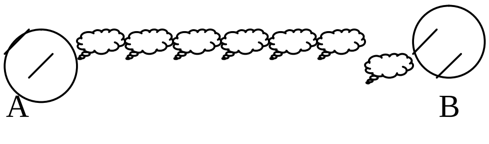
وضع نيوتن هذه القوانين بصورة نظرية وفيما بعد تم البرهنة على صحتها بالطرق التجريبية يصف القانون الأول خاصية الاستمرارية (continuity) أو خاصية القصور الذاتي (inertia) حيث الجسم المتحرك في خط مستقيم بانطلاق ثابت يبقى في هذه الحالة من الحركة ما لم يكن عليه تأثير خارجي (القوة force) وعليه يمكن تعريف القوة بأنها كل مؤثر خارجي يعمل على تغيير حالة الجسم .

لوصف حركة الجسم يلزم تحديد محاور مرجعية Reference frame تسمى بالمحاور المرجعية أو النيوتونية Newtonian frame وتكون هذه المحاور ثابتة والسؤال هل المحاور على سطح الأرض تعتبر محاور مرجعية (نيوتونية) الجواب لا حيث أن الأرض متحركة دورانياً حول محورها وكذلك تدور حول الشمس . ثم جاءت النظرية النسبية على يد اينشتين لحل هذه المسألة (المحاور المرجعية) .

مفهوم الكتلة والقوة Mass and force concepts :

من الحقائق المعروفة أن لكل الأجسام المادية ميل أو نزعه(Tendency) لمقاومة التغير في حالتها وهذا ما يسمى بالقصور الذاتي وبناء على ذلك يمكننا تعريف مفهوم الكتلة بأنها المقياس الكلي للقصور الذاتي ونرمز لها بالرمز (m) ومقدار جذب الأرض للجسم يسمى بالكتلة التثاقلية (الوزن).

أفترض نيوتن أن هناك تفاعل بين الجسم والبيئة المحيطة به وينتج عن هذا التفاعل مؤثر يعمل على الجسم وعلى المحيط به، لنفرض وجود جسمين هما B,A يربط بينهما زنبرك يعمل مؤثراً عليهما (كما في الشكل)



من التجارب الفعلية يمكن ربط مشارع الجسمين معاً بالعلاقة :

$$a_A^{\rightarrow}\, a - a_B^{\rightarrow} \Rightarrow a_A^{\rightarrow} - m_{BA}\, a_B^{\rightarrow} \,..........(1)$$

حيث m_{BA} ثابت التناسب الذي يعتمد على الكتل العضوية للجسمين بمعنى :

$$m_{BA} = m_B / m_A \,................$$

الإشارة السالبة في معادلة (١) تعني أن مشارعي الجسمين متعاكسين في الاتجاه يمكن

إعادة كتابة معادلة (١) على الصورة التفاضلية .

أو

$$\frac{du^{\rightarrow}A}{dt} = -\frac{du^{\rightarrow}B}{dt}.(\frac{mB}{mA})$$

$$m_A \frac{du^{\rightarrow}}{dt} = -m_B \frac{du^{\rightarrow}A}{dt} \,..........(2)$$

نلاحظ أن حاصل ضرب الكتلة في التسارع .

في معادلة (٢) مقدار ما يسمى بالتغير في الحركة (هذا مـا قصده نيوتن) وسمى هذا

المقدار بالقوة المؤثرة على الجسم ويرمز له بالرمز (F) وبناء عليه فإن معادلة(٢) يعطي :

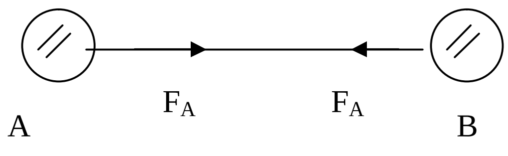
$$F^{\rightarrow} = m\frac{dn^{\rightarrow}}{dt}$$

ويمكن كتابة معادلة (٢) على النحو التالي :

$$F_A^{\rightarrow} = F_B^{\rightarrow}$$

وهـذه المعادلـة تعبر عن مـضمون قـانون نيـوتن الثالـث : القـوى تـأثير متبـادل بـين

الجسمين وتحدث بمقادير متساوية ومتعاكسة في الاتجاه .



Linear Momentums الزخم الخطي

يعرف الزخم الخطي بأنه كمية متجهة وهي حاصل ضرب الكتلة في السرعة ولها رمز

$\vec{r}$ **حيث :** $\vec{r} = m\vec{s}$

*** يمكن كتابة النص الرياضي لقانون نيوتن الثانى بدلالة الزخم الخطي على النحو :**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

أي أن القوة المؤثرة على الجسم :

= التغير الزمني للزخم الخطي للجسم ، وهذا ما يعرف بمعادلة الحركة للجسم

(equation of motion)

كذلك يعبر عن القانون الثالث في الحركة بدلالة الزخم الخطي على النحو :

ومن هذه المعادلة يمكن أن نستنتج : $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{d\overleftarrow{r}_B}{dt}$

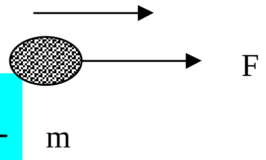
$$\frac{dp_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_B}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}(p_A + P_B) = 0$$

$$\vec{r}_A + \vec{r}_B$$

أي أن الزخم الخطي الكلي لمجموعة جسيمات معزوله يبقى ثابتاً أثناء الحركة ويسمى هذا بقانون حفظ الزخم الخطي Linear moment ion condensation وهذا يعتبر أحد القوانين الفيزيائية الأساسية .

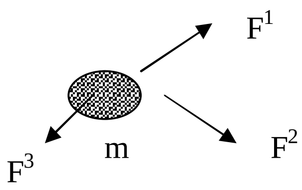
Equation of motion for a particle معادلة حركة الجسيم

لدراسة حركة الجسيم تحت تأثير قوة خارجية يلزم تحديد معادلة الحركة للجسيم أو ما يسمى بالقانون الثاني لنيوتن وهي :



$$\vec{F} = M \frac{d\vec{v}}{dt}$$

وعندما يقع الجسم تحت تأثير عدة قوى خارجية فإن $\vec{F}$ = محصلة جميع القوى الخارجية أي : $\vec{F} = \sum_{2} F_2$



$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{F_1} + F_2 + ...$$

وتصبح معادلة حركة الجسيم :

$$\sum \vec{F_2} = \frac{m d\vec{s}}{dt} = m\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ = عجلة الجسيم أي أن معادلة الحركة للجسيم تعطى لشارع الجسيم إذا علمت القوة المؤثرة عليه.

* في حالة المسائل الفيزيائية الخاصة بحركة الأجسام تحت تأثير القوى الخارجية ، تصبح معادلة حركة الجسيم على صورة :

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

حيث $\vec{r}$ = متجه موقع الجسيم أثناء الحركة ، وهذه معادلة متجهه حيث يمكن فرزها إلى ثلاثة مكونات في حالة حركة الجسيم في الأبعاد الثلاثية (الفراغ) على النحو :

$$F_x = m\ddot{x} \qquad F_y = m\ddot{y} \qquad F_2 = m\ddot{z}$$

حيث F_x = محصلة القوى المؤثرة على الجسم في اتجاه محور x

$\ddot{X}$ =تسارع الجسيم في اتجاه محور x وهكذا لباقي الكميات.

لوصف حركة الجسيم يلزم تكامل ثاني لإيجاد x(t) y(t) وهنا تعتمد على أجزاء التكامل لتحديد السرعة تم إجراء تكامل ثاني لإيجاد x(t) y(t) .

الحركة في خط مستقيم Rectilinear Motion :

إذا تحرك الجسيم في خط مستقيم تسمى الحركة هذه بالحركة المستقيمة ، هنا يلزم تحديد متغير واحد لوصف حركة الجسيم ، فمثلاً إذا كانت الحركة في اتجاه محور السينات الموجب فإن متجه موقع الجسيم هو :

$$\vec{r} = \hat{i}\,x$$

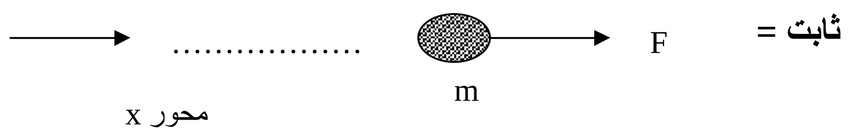
وتصبح معادلة حركة الجسيم في هذه الحالة :

$$F_x = m\ddot{x}\,..................$$

F_x = محصلة القوة الخارجية المؤثرة على الجسم في اتجاه (x).

قد تكون القوى المؤثرة على الجسم دالة للموقع (x) أو دالة زمنية (t) أو ثابتة أي $F = F(x, x^0, t)$ ولذلك تحتاج إلى طرق رياضية لحل معادلة حركة الجسيم وتوضيح ذلك كما يلي في هذه الأمثلة.

الحالة الأولى : إذا كانت القوة الخارجية = مقدار ثابت (constant)



نكتب معادلة الحركة للجسيم على النحو :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = \text{ثابت}$$

(التعجيل ثابت)

$$d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$ (بالضرب التبادلي)

بإجراء تكامل الطرفين نحصل على :

على اعتبار أن سرعة الجسيم في اللحظة الصفرية t=0 هي v_0

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt$$

أما v = سرعة الجسيم في اللحظة (t)

$$\therefore n - n_0 = at \Rightarrow n = n_0 = at$$

أما لإيجاد موقع الجسيم (x) في أي لحظة زمنية

$$n = \frac{dx}{dt} \Rightarrow n = n_0 + at = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

بالضرب التبادلي :

(وإجراء التكامل للطرفين) $\int_0^T (V_0 + at)dt = \int_{x_0}^{X} dx$

حيث X_0=موقع الجسيم الابتدائي (عندt=0) وبعد إجراء التكامل في الطرف الأيسر نحصل على :

$$n_0 t + a\frac{t^2}{2} = x - x_2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad ......(2)$$

يمكن حذف المتغير (t) في المعادلتين (1)، (٢) لنحصل على قانون السرعة مع المسافة لحركة الجسيم بتسارع ثابت في خط مستقيم وهي :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) ....(3)$$

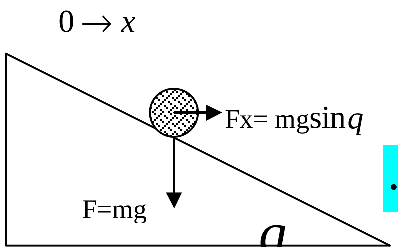
ملاحظة : يمكن استخدام المعادلات الثلاثة السابقة لوصف حركة الجسيم في أي لحظة زمنية إذا علمنا مقدار التسارع (a) لحركة الجسيم وإليك الأمثلة التطبيقية التالية :

مثال (١) : حركة الجسم الساقطة على السطح المائل :

عند انزلاق جسيم كتلته m على سطح أملس مائل بزاوية q نعتبر اتجاه x باتجاه السطح المائل : $\therefore F_x = mg\sin q$

$$= \therefore a = \frac{F_x}{m} = g\sin q = \text{ثابت}$$

سرعة الجسيم في أي لحظة : $\therefore n = u_0 + at$



$$n = n + (g\sin q)t........$$

إذا بدء الجسيم الحركة من السكون $u_0 = 0$

أما المسافة المقطوعة على السطح المائل :

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(g\sin q)t^2$$

إذا بدأ الجسم الحركة من قمة السطح $(0 = x_0)$ فإن :

$$x(t) = u_0 t + \frac{1}{2}(g\sin q)t^2$$

ملاحظة : يمكن استخدام التكامل كما سبق شرحه لإيجاد (x,v) كدوال زمنية وذلك باستخدام معادلة الحركة للجسيم.

الحالة الثانية : القوة دالة الموضع Force as position function :

عندما تكون القوة الخارجية المؤثرة على الجسم معتمده على موقع الجسيم أثناء الحركة مثل القوة الكهروستاتيكية بين الأجسام المشحونة $F=F(x)$ حيث (x) المسافة بين الجسمين ، وكذلك القوة المستعيدة في الزنبرك حيث تتناسب هذه القوة مع سالب إزاحة الجسم عن موقع الاتزان (قانون هوك) . في هذه الحالة تصبح معادلة الحركة على الصورة :

$$F(x) m\ddot{x}$$

ولحل هذه المعادلة التفاضلية لا يمكن أن نكامل الطرفين مباشرة بل يجب وضع صورة التعجيل على النحو التالي :

$$\ddot{x}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{d\dot{x}}{dt}=\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{udu}{dx}.............$$

وعليه تصبح معادلة الحركة للجسيم على النحو :

$$\ddot{x}=\frac{udu}{dx}$$

بالضرب التبادلي لطرفي المعادلة نحصل على النحو:

$$F(x)^{..}=m\frac{udu}{dx}$$

نكامل طرفي المعادلة لنحصل على : $F(x)dx=mudu$

$$\int F(x)dx=m\int udu....................(1)$$

تعريف : الطرف الأيسر $\int F(x)dx$ = الشغل المسلط على الجسيم من تأثير القوة الخارجية .

ويمكن تعريف دالة تسمى دالة الوضع ويرمز لها $v(x)$ أو ما يسمى بالطاقة الكامنة (طاقة الوضع) على النحو :

$$V(x)=-\int F(x)dx$$

بينما الطرف الأيمن للمعادلة (1) يعطي :

الطاقة الحركية = $V(\frac{1}{2}V^2) = \frac{1}{2}mV^2 = T =$

$$\therefore -V(x) = T + \text{ثابت}$$

الثابت هنا يساوي مجموعة طاقة الوضع + طاقة الحركة للنظام .

ومعادلة (٢) تسمى قانون حفظ الطاقة **Enegry law consenvation** ويعني فيزيائياً أنه أثناء حركة جسيم تحت تأثيره قوه خارجية فإن مجموع طاقتي الوضع والحركة يبقى ثابتاً وتسمى القوة الخارجية في هذه الحالة بالقوة المحافظة ، ويسمى الثابت بالطاقة الكلية الابتدائية للنظام ويرمز له بالرمز E_0.

$$\therefore -V(x) = T + \text{ثابت}$$

$$\mathrm{T} + V(x) ....(2)$$

الثابت هنا يساوي مجموعة طاقة الوضع + طاقة الحركة للنظام .

ومعادلة (٤) تسمى قانون حفظ الطاقة **energy of law conservation** ويعني فيزيائياً أنه أثناء حركة جسيم تحت تأثيره قوة خارجية فإن مجموع طاقتي الوضع والحركة يبقى ثابتاً وتسمى القوة الخارجية في هذه الحالة بالقوة المحافظة ، ويسمى الثابت بالطاقة الكلية الابتدائية للنظام ويرمز له بالرمز E_0.

$$T + V(x) = E_0$$

أما لوصف حركة الجسيم في هذه الحالة فإن معادلة حفظ الطاقة هذه يعطي سرعة الجسيم **V** حيث : $\frac{1}{2}mu^2 + u(x) = E_0$

$$\therefore u = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}[E - u(x]...........(3)$$

أما موضع الجسيم كدالة للزمن x(t) يمكن تحديدها من العلاقة :

$$u = \frac{dx}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}(E_0 - v(x)\text{..........}(4)$$

ترتيب معادلة(٤) يعطي :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}}(E_0 - V(x))} = \int dt + c = t + c$$

فإذا علمنا دالة الوضع V(x) يمكن إجراء هذا التكامل لإيجاد x(t) .

منحنى دالة الوضع : عند رسم الدالة V(x) كدالة مع الموضع نحصل على منحنى دالة الموضع ولنفرض بشكل عام أن هذا المنحنى على صورة :

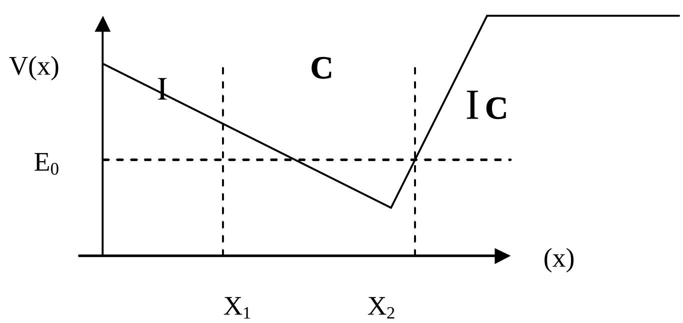
هناك عدة حالات :

١ - في المنطقة (I) تكون

$V(x) > E_0$ هذا يجعل الكمية

تحت الجذر التربيعي سالبة وتصبح قيمة V

تخيلية والحركة غير مسموح بها في هذه المنطقة.



وكذلك الأمر بالنسبة للمنطقة III حيث $V(x) \mathbf{f}\, E_0$ ، بينما نلاحظ أنه في المنطقة

حيث : $x_1 \leq x \leq x_2$ فإن $E_0 \mathbf{f}\, V(x)$ وعليه فإن للسرعة $V(x)$ قيم حقيقية والحركة

مسموح بها في هذه المنطقة .

أما حدود المنطقة $[x_2, x_1]$ تسمى نقاط الرجوع **Turning Points** يمكن تحديدها

من مساواة $E_0 = V(x)$ وحل المعادلة لإيجاد(x) .

مثال : دراسة حركة الجسم المقذوف إلى أعلى بسرعة ابتدائية V_0 عند النقطة التي

ترتفع عن سطح الأرض مسافة (x) فأن طاقة الوضع $n(x) = -\int_0^x (x)dx$

حيث : $F(x) = -mg$

$$= +\int mgd(x) = +mgx........$$

اعتبار سطح الأرض خط مرجعي لدالة الوضع (أي طاقة الوضع =صفر) عند قذف

الجسم إلى أعلى من سطح الأرض بسرعة V_0 فإن:

$$E_0 = T_0 + V(q) = -\frac{1}{2}mn_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mn_0^2$$

قانون حفظ الطاقة يعطي : $\frac{1}{2}mn_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$

من هذه المعادلة يمكن إيجاد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم المقذوف حيث عند هذه

النقطة تصبح السرعة =صفرا وعليه:

$$\frac{1}{2}mn_0^2 = 0 + mgx = mgh$$

حيث h= اقصى ارتفاع =ma_x

$$h = \frac{Vo^2}{2g}$$

اما لإيجاد سرعة الجسيم عند أي نقطة اثناء الارتفاع إلى أعلى فإن :

$$\frac{1}{2} m\, n_0^2 = \frac{1}{2} mV^2 - mgx$$

$$\therefore V = \pm\sqrt{Vo^2 \_ 2gx}$$

أما موقع الجسم كدالة للزمن نجدها من معادلة السرعة =

$$V = \frac{dx}{dt} = [V_0^2 - 2gx]^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{V_0^2 - 2gx}} = \int_0^t dt = t$$

لأجراء التكامل : نفرض $\Leftarrow U = V_0^2 - 2gx$

du=2gdx

$$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}} = t \qquad \Rightarrow -\frac{1}{xg}[\frac{U^{\frac{1}{2}}}{1}] = t$$

$$\therefore -\frac{1}{g}[V_0^2 - 2gx]^{\frac{1}{2}} \int^x = t$$

ترتيب المعادلة نحصل على $-\frac{1}{g}[V_0^2 - 2gx]^{\frac{1}{2}} - V_0] = t$

$$V_0 - gt = \sqrt{V_0^2 - 2gx}$$

للحصول على (x) كدالة للزمن نربع الطرفين ونحل المعادلة بالنسبة لX :

$$(v_0 - gt)^2 = V_0^2 - 2gx$$

وهو المطلوب $x = \frac{1}{2g}[V_0^2 - (V_0 - gt)^2]$......... ....

وهذه معادلة الحركة للجسيم :

$$x(t) = V_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

وهذه معادلة الحركة للجسيم . $x(t) = V_0 t + \frac{1}{2} gt^2$

الذي يتحرك بتسارع ثابت قدره (g) التي سبق شرحها في الحالة الأولى

الحالة الثالثة : القوة دالة السرعة Force of velocity function

نلاحظ أنه في حالة حركة جسيم في وسط مائع (سائل أو غاز) فإنه يتولد قوة احتكاك بين سطح الجسيم وطبقات المائع تعاكس اتجاه حركة الجسيم. وقد ثبت بالتجربة أنه في حالة حركة الجسيم بسرعة منخفضة فإن مقاومة المائع تتناسب مع السرعة (V) بينما في حالة السرعة العالية للجسيم فإن مقاومة المائع تتناسب مع V2 أو V3 .. أي أن F=F(V).

لدراسة حركة الجسيم تحت تأثير قوة خارجية دالة للسرعة F(V)تستخدم معادلة الحركة على الصورة :

ثم نفرز المتغيرات في الطرفين على النحو التالي : $F(V) = \frac{mdV}{dt}$...........

ثم نكامل الطرفين : $mdV / F(V). = dt$

هذه المعادلة تعطي السرعة كدالة للزمن :

إذا علمنا الصورة الرياضية للقوة الخارجية .

ونحصل على (t) كدالة لـ V من ناتج التكامل : $t = \int dt = \int \frac{mdV}{F(v)}$

$$t = t(V)$$

ولإيجاد الموقع x(t) تستخدم العلاقة $V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Vdt$

$$\therefore \int dx = \int V(t)dt$$

**** لإيجاد موقع الجسيم كدالة للسرعة X(V)**

نستخدم العلاقة (معادلة الحركة) :

$$F(V) = m\frac{vdv}{dx}$$

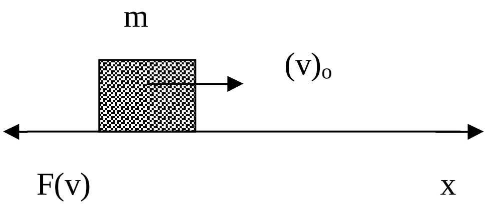
في صورة التسارع بدلالة السرعة والزمن .

ثم بالضرب المتبادل للطرفين نحصل على ما يلي (فرز المتغيرات)

$$\int dx = \int \frac{mVdV}{F(V)} \Rightarrow x\int \frac{mVdV}{F(V)} .... \quad ......$$

هنا نحصل على الموقع كدالة للسرعة .

مثال : قذف جسيم كتلته (m) بسرعة ابتدائية V_0 على سطح مستوٍ أملس ، فإذا كانت مقاومة الهواء $F(V) = -CV$ حيث C ثابت ، جد موقع الجسم X كدالة للزمن $\Leftarrow x(t)$



الحل : معادلة الحركة للجسم

$$F(V) = m\frac{dv}{dt}$$

$$-c(v) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = -\frac{m}{cv}dv$$

$$\therefore \int_0^t dt = -\frac{m}{c}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} \Rightarrow t = -\frac{m}{c}\ln V \int_{v_0}^{v}$$

$$\therefore t = -\frac{m}{c}[\ln V - \ln V_0] = -\frac{m}{c}\ln(v/v_0)$$

$$\therefore \ln(v/v_0) = -\frac{c}{m}t \Rightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-}\frac{c}{m}t$$

$$\therefore v = v_0 e^{-} - \frac{c}{m}t.........$$

حيث $v = \frac{dx}{dt}$ فإن

$$= \frac{dx}{dt}v_0 = e^{-}\frac{c}{m}t...............$$

$$\therefore \int_0^x dx = -\int_0^t v_0 = e^{-} \, {}^{c}\!/_{m}{}^{t}\, dt$$

$$\therefore x = V_0(-\frac{m}{c})[e^{-}\frac{c}{m}t] = \frac{mV_0}{2}(1 - e^{-}\frac{c}{m}t)$$

وهو المطلوب

الحالة الرابعة : القوة دالة للزمن Force is function of time

عندما تكون القوة الخارجية المؤثرة على الجسيم معتمدة على الزمن أثناء حركة الجسيم أي F=F(t) ، هنا لدراسة حركة الجسيم تستخدم الصورة العامة لمعادلة الحركة على النحو :

$$F(t) = \frac{mdv}{dt}$$

باستخدام الضرب التبادلي للطرفين :

$$F(t)dt = mdv \Rightarrow dv = \frac{F(t)}{m}dt$$

$$\therefore \int_{v_0}^{v} dV = \frac{1}{m}\int^{t} F(t)dt$$

إذا علمنا صورة دالة القوة يمكن إجراء التكامل لنحصل على V(t) ثم نجد موقع الجسم كدالة للزمن x(t) بإجراء التكامل $\int dx = \int vdt$.

الحركة التوافقية البسيطة simple harmonic Motion :

تسمى الحركة التي تكرر نفسها في أزمنة متساوية بالحركة الدورية periodic motion عند إزاحة جسم ما عن موقع الاتزان ثم تركه يتذبذب حول هذا الموقع كما هو الحال في حركة زنبرك مشدود ومعلق به ثقل فإن هناك قوة خارجية تحاول إعادة الزنبرك (الجسم المتذبذب) إلى موقعة الأصلى وتعرف هذه القوة بالقوة الاسترجاعية (القوة المعيده) Restoring force وتكون هذه القوة باتجاه معاكس للإزاحة .

وجد هوك أن هذه القوة تتناسب مع سالب الإزاحة أي :

$F \propto - x$ حيث x= الإزاحة عن موقع الاتزان.

او $F = kx$ حيث k = ثابت المرونة للزنبرك.

لذلك تصبح معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي البسيط (حيث الحركة في بعد واحد هي) :

$$F = -kx = m\ddot{x} ....(1)$$

وتكتب على صورة : $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$

$$\ddot{x} = -w_0^2 x.............(2)$$

حيث $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = التردد الطبيعي الزادي للمتذبذب، هذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، ويكون الحل العام لها على الصورة .

$$x(t)=A_1e^{iwot}+A_2e^{-iwot}\;................(3)$$

حيث A1 ، A2 ثوابت نحددها من الشروط الابتدائية لحركة المتذبذب وهي في اللحظة الابتدائية عند t=0 ، يعطي مقدار $x_0\;,\;x_{.0}$ الموقع الابتدائي والسرعة الابتدائية للمتذبذب باستخدام العلاقة الرياضية.

$e^{\pm iu}=\cos u+i\sin u$ يمكن تحويل معادلة (٣) إلى صورة دوال جيبية على النحو :

$$x(t)=a\sin wot+b\cos wot\;...............(4)$$

حيث b,a ثوابت تحدد قيمها من الشروط الابتدائية السابقة .

أما الصورة العامة لحل المعادلة التفاضلية التي تعطي سعة الاهتزاز وطور الذبذبة يمكن أن تعطي على صورة :

$$x(t)=A\cos(w_ot+q)$$

حيث A= سعة الذبذبة , q= زاوية الطور للذبذبة

الحركة التوافقية المتضائلة Damped Harmornic Motion

عندما يتحرك متذبذب توافقي في وسط مائي (له لزوجه) يتولد عنه قوه خارجية قوة معيقة للحركة (في الاتجاه المضاد للحركة) بالإضافة إلى القوة الاسترجاعية . مقدارها $(-cx^0)$ حيث x_0 سرعة المتذبذب الخطية، حيث c ثابت الإشارة السالبة تعني في الاتجاه المضاد للسرعة .

أما القوة الاسترجاعية هي (كما سبق)=kx-

ولذلك تصبح معادلة الحركة للمتذبذب هي :

$$m\ddot{x}=-cx^0+kx\;..........\;.........(1)$$

$$mx^{..} + cx^{0} + kx = 0.......... ....(2)$$

هذه معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، يتم حلها باستخدام الحل التجريبي هو :

$x = Ae^{qt}$ **نعوض هذا الحل في معادلة (٢) لنحصل على معادلة تربيعية في (٢) على النحو :**

$$mq^2 + cq + k = 0...............(3)$$

ويكون الحل لهذه المعادلة التربيعية (جذر المعادلة) هو :

$$q_{1,2} = -c \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4mk}{2m}}.......... ......(4)$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$x(t) = A_1 eq_1 t + A_2 eq_2 t.................(5)$$

$q_1 \Leftarrow$ **الإشارة (+) للجذر ،** $q_2 \Leftarrow$ **الإشارة (-) للجذر التربيعي.**

هناك عدة حالات للحركة التوافقية تعتمد على مقدار الكمية التي تحت الجذر التربيعي وهي $c^2 - 4mk$ **(مميز المعادلة التربيعية).**

<u>الحالة الأولى :</u>

إذا كان $c^2 - 4mk = 0 \Leftarrow c^2 = 4mk$

تسمى هذه الحركة في هذه الحالة باسم تذبذب المتضائل الحرج (critical damped) ويكون الحل لعام لمعادلة الحركة للمتذبذب على صورة :

حيث $\wp = \frac{c}{2m} \qquad x = (A_1 + A_2 t)e^{-\wp t} \quad (5)$

A2,A1 ثوابت يتم تحديدها من الشروط الابتدائية للحركة أي بمعرفة قيم x_0 , x_0^0.

الحالة الثانية : إذا كانت $c^2 \succ 4mk$ أو $c^2 - 4mk \succ 0$ (الكمية تحت الجذر موجبة) تسمى الحركة في هذه الحالة تذبذب فوق التضاؤل over damped oscillation ويكون الحل العام لمعادلة الحركة الذي يعطي موقع المتذبذب في أي لحظة (t) هو :

$$x(t) = Ae^{q1t} + Ae^{q2t} \ldots\ldots(6)$$

حيث

$$q_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad , q_1 = -c + \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

وهما جذري المعادلة التربيعية السابقة الذكر .

الحركة التوافقية الاضطرارية – الرنين – Forced Harmonic oscillah . Resonance

ندرس حركة متذبذب توافقي تحت تأثير قوة خارجية توافقية (أي على صورة داله جيبيه) (متغير على شكل داله جيب أو جيب تام مع التوافق) بالإضافة إلى القوة الارجاعية والقوة المانعه (اللزوجه) في الوسط هنا تصبح معادلة الحركة للمتذبذب :

$$mx^{\cdot\cdot} + cx^0 + kx = F_{ext}$$

حيث القوة $F_{ext} \Leftarrow$ القوة الخارجية المؤثرة وهي على صورة :

$$F_{ext} = F_o \cos(wt + q)$$

ويمكن أن نعبر عن القوة الخارجه على صورة داله رأسية

$$F_{ext} = F_o e^{i}(wt + q)$$

حيث w = تردد القوة الخارجية ، q زاوية طورها .

لذلك تصبح معادلة الحركة للمتذبذب التوافقي على الصورة :

$$mx^{\cdot\cdot} + cx^{0} + kx = F_0 e^{i(wt+q)} ....(1)$$

معادلــة (١) معادلــة تفاضــلية مــن الدرجــة الثانيــة وهــي غيــر متجانــسة non homogenous ولذلك يكون الحل العام لهذه المعادلة على صورة ترابط خطي لحلين هما :

١ـحل المعادلة المتجانسة homogenous x(t1) وهو الحل الذي سبق دراسته في البند السابق (لحالات الثلاثة) ويسمى هذا الحل بالحل العابر (transient term) حيث $x(t) \leftarrow o$ عندما $\infty \leftarrow (t)$

٢ - الحل المكمل complementary هو الحل الذي يعتمد على طبيعة القوة الخارجية من حيث كونها دالة زمنية في هذه الحالة يكون الحل:

$$x_2(t) = Ae^{i(wt+q')} ....(2)$$

حيث q= زاوية الطور وتختلف في المقدار عن q ، بينما w = التردد الزاوي المساو في التردد .

القوة الخارجية، A ثابت.

وعليه يكون الحل العام لمعادلة حركة المتذبذب الاضطرارية هو :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)..................(3)$$

حيث أن الحل المكمل $(x_2(t)$ يجب أن يتحقق معادلة الحركة (1) نعوض هذا الحل في هذه المعادلة لنحصل على :

$$mx_2^{\cdot\cdot}(t) + cx_2^{0}(t) + kx_2(t) = F_0 e^{i(wt+q')})$$

أو :

$$-mw^2 Ae^{i(wt+q/)} + iwcAe^{i(wt+q/)} + kAe^{i(wt+q/)}$$

$$=F_0 e^{i(wt+q)}\text{...........}$$

بالاختصار نحصل على :

$$-mw^2A+iwcA+KA=Fe^{i(q-q')}\text{........}(4)$$

$$=F_a[\cos(q-q')+i\sin(q-q')$$

في معادلة (٤) نقارن الحدود الحقيقية في الطرفين لنحصل على :

$$A(k-mw^2)=F_0\cos(q-q')$$

(مقارنة الأجزاء التخيلية) يعطي $cwa \quad = F_. \sin(q-q')$

بقسمة المعادلتين نحصل على :

$$\tan(q-q')=\frac{wc}{k-mw^2}\Rightarrow$$

$$\therefore \tan f = \frac{cw}{k-mw^2}$$

حيث $f = q - q'$

أما تربيع المعادلتين تم جمعهما نحصل على :

$$A^2[k-mw^2]^2+c^2w^2A^2=F_0^2$$

ومنها :

$$A=\frac{F_0}{[(k-mw^2)+c^2w2]^{\frac{1}{2}}}$$

لتثبيط هذه النتائج نفرض $w_0 = \sqrt{k/m} \quad , \wp = c/m^2$ نحصل على

$$\tan \Phi = \frac{2\, yw}{w_0^2 - w^2} \qquad (5)$$

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + 4J^2 w^2}} \qquad (6)$$

<u>**تمارين الفصل الثاني**</u>

١- جسيم كتلته m في حالة السكون، سلطت عليه قوه خارجية F=ct2 حيث C ثابت جد . x(t), v(t)

٢- كتلة جسيم m في حالة السكون عند t=0 سلطت عليه قوة خارجية F=ct لفترة زمنية قدرها t^0 ثم تناقضت هذه القوة خطياً مع الزمن حتى أصبحت = صفرا عند $t=2t^0$ أوجد المسافة التي يقطعها الجسم في هذا الزمن.

٣- قذف قالب على سطح مائل بزاوية q بسرعة ابتدائية v_0 فإذا كان معامل احتكاك الجسم مع السطح على جد الزمن الكلي اللازم حتى يعود القالب إلى أسفل السطح.

٤- ينزلق قالب على سطح مستو مدهون بزيت ثقيل بحيث كانت مقاومة لزوجته $F(v)$ حسب العلاقة $F(v) = -c\sqrt{v}$ حيث C ثابت ، إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم v_0 أوجد قيم x,v كداول للزمن.

٥- تتغير سرعة جسيم كتلته m مع الازاحة x حسب المعادلة $v = b/x$ أوجد القوة المؤثرة على الجسم كدالة لـ x.

٦- إذا كانت القوة المؤثرة التي تؤثر على جسيم كتلته m هي F=kvx حيث k = ثابت فإذا مر الجسم في نقطة الأصل بانطلاق v_0 في الزمن t=0 أوجد x كدالة للزمن t.

٧- نابض مرونته k يحمل صندوقاً كتلته M موضوعاً في قالب كتلته m فإذا سحب الجهاز إلى أسفل موضع استقراره مسافة d ثم ترك .أوجد قوة رد الفعل بين القالب وقعر الصندوق كداله للزمن . ما هي قيمة d التي يبدأ فيها القالب على وشك أن يبدأ قعر الصندوق عندما يكون في أعلى التذبذب الشاقولي ؟ أهمل مقاومة الهواء.

الفصل الثالث

ديناميكا الجسيم – الحركة بصورة عامة

الفصل الثالث

ديناميكا الجسيم – الحركة بصورة عامة

Dynamics of particle – General Motion

سنتناول في هذا الفصل دراسة حركة الأجسام في الفضاء (3 أبعاد) حيث أن معادلة الحركة للجسيم هي على صورة :

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(mv) \leftrightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

حيث يمكن فرز هذه المعادلة إلى ثلاث مكونات هي:

$$F_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \quad , \quad F_y = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) \quad , \quad F_z = \frac{d}{dt}(m\dot{z})$$

حيث مركبات القوى F_z, F_y, F_X تتضمن الإحداثيات ومشتقاتها الزمنية وكذلك الزمن ولا توجد طريقة عامة لإيجاد حلول تحليلية لجميع الحالات ولكن هناك أنواع خاصة من دوال القوى التي يمكن إيجاد حل لها بطرق بسيطة.

(3.1) قاعدة الشغل The work principle

حيث أن المعادلة العامة لحركة الجسم هي:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

بضرب طرفي المعادلة بمتجه السرعة (ضرب عددى) نحصل على:

$$\vec{F}.\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}.\vec{v} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).\vec{v}$$

حيث أن: $\frac{d}{dt}(\vec{v}.\vec{v}) = 2\vec{v}.\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\ \vec{v}) = m\vec{v}.\frac{dv}{dt} = \vec{v}.\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}.\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}).\vec{v}$$

$$\therefore \vec{F}.\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv\right) = \frac{d}{dt}(p)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث T = الطاقة الحركية للجسم

بالضرب التبادلي في معادلة (١) نحصل على ما يلي:

$$dT = \vec{F}.\vec{v}\,dt$$

حيث : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \Leftarrow \quad d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$$\therefore dT = \vec{F}.d\vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore T = \int dt = \int \vec{F}.d\vec{r}\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

تسمى الكمية $\int \vec{F}.d\vec{r}$ بالشغل المنجز على الجسم بفعل القوة المؤثرة أثناء الحركة بينما $\int dT = AT =$ التغير في الطاقة الحركية للجسم. ومعادلة (٢) تعرف بقاعدة الشغل وتنص على أن التغير في الطاقة الحركية للجسم = الشغل المنجز على الجسم.

$$\Delta T = \int \vec{F}.d\vec{r}\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

(3.2) القوى المحافظة ومجالات القوى:

Consewative forces and force fields

<u>من قاعدة الشغل نجد أن</u>: مقدار التكامل الخطى (الشغل) يعتمد على مسار التكامل أو الطريق الخاص الذي يسلكه الجسم أثناء انتقاله من نقطة لأخرى على المسار.

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\,r$$

ولكن هناك قوى في الطبيعة حيث تكون القوة دالة للموقع فقط أي $\vec{F} = \vec{F}(r)$ وعليه تكون قيمة التكامل $\int \vec{F}.d\vec{r}$ لا تعتمد على المسار الذي يسلكه الجسم وتسمى هذه القوة بالقوة المحافظة أو المجال المحافظ مثل قوة المجال الكهروستاتيكي **electrostatic field** لذلك يمكن إجراء التكامل الخطى في معادلة (3) دون الحاجة إلى تحديد المسار سنتناول لاحقاً الشروط اللازمة حتى تكون القوة محافظة.

(3.3) <u>دالة الطاقة الكامنة Potential</u>

لنفرض أن مركبات القوة $\vec{F}$ في الإحداثيات الديكارتية هي

$$\vec{F} = \hat{c}\,F_x + \hat{j}\,F_y + \hat{k}\,F\,z$$

وعنصر متجه الموقع

$$d\,\vec{r} = \hat{c}\,d\,x + \hat{j}\,d\,y + \hat{k}\,d\,z$$

لذلك

$$\int \vec{F}.d\vec{r} = \int (F_x\,d\,x + F_y d\,y + F_z\,d_z)$$

أو

$$= \int F_x\,d\,x + \int F_x\,d\,y + \int F_z\,d_z \quad ....$$

<u>تعريف</u>: يمكن أن نعبر عن مركبة القوة في اتجاه معين بدلالة المشتقة الأولى الجزئية لدالة عددية تسمى دالة الطاقة الكامنة (طاقة الوضع) ويرمز لها $V_{(r)}$ وهى دالة تعتمد على إحداثيات متجه الموقع أي

$$F_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\therefore \int \vec{F}.d\vec{r} = -\int \left[\frac{\partial v}{\partial x} d\,x + \frac{\partial v}{\partial y} d\,y + \frac{\partial v}{\partial z} d\,z \right]$$

$$= -\int d\,v \quad .... (4)$$

باستخدام قاعدة الشغل تصبح معادلة (4) على صورة :

$$\int d\,T = -\int d\,v$$

على فرض أن الطاقة الحركية في الوضع (1) هي T_1 وفي الوضع (2) هو T_2 حيث كذلك طاقة الوضع V_1 ، V_2 على الترتيب لذلك فإن :

$$\int_{T_2}^{T_1} dT = -\int_{v_1}^{v_2} dv$$

$$T_2 - T_1 = -[v_2 - v_1] \Rightarrow T_2 + V_2 = T_1 + V_1 = E$$ = ثابت

حيث E = الطاقة الكلية للنظام وهذا ما يعرف بقانون حفظ الطاقة

مثال(١) الطاقة الكامنة لمجال الجاذبية الأرضية المنتظم:

عند دراسة حركة الجسم تحت تأثير الجاذبية الأرضية بالقرب من سطح الأرض نفرض أن محور Z شاقولياً باتجاه مركز الأرض وعليه يكون وزن الجسم.

$$\vec{W} = -mg\,\hat{k}$$

بإهمال مقاومة الهواء فان مركبات القوة الخارجية المؤثرة على الجسم هي:

$$F_x = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$F_y = 0 = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad ;$$

$$F_z = -mg = -\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\therefore V = \int dv = +mg\int dz = +mgz + c$$ (ثابت)

نلاحظ أن دالة الوضع تعتمد على مستوى المرجع الذي يختاره لتحديد مقياس الطاقة الكامنة وعادة نعتبر سطح الأرض $(z = 0)$ هو المستوى المرجعي للمستوى الصفري للطاقة الكامنة وعليه $v(z=0)=0$ أي أن ٥ = ٢ وعليه تصبح دالة طاقة الوضع (الكامنة):

$$V_{(z)} = mgz$$

وعليه فإن قانون حفظ الطاقة يصبح على صورة ما يلي:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\,z = E_0 \,.........$$

حيث E_0 = الطاقة الابتدائية الكلية (عند لحظة بداية الحركة) $t = .$

لنفرض أن الجسم بدأ الحركة من الموقع الابتدائي.

$$\vec{r_0} = \hat{c}\,x_0 + \hat{j}\,y_0 + \hat{k}\,z_0 \quad ; \quad \vec{v_0} = \hat{c}\,\dot{x}_0 + \hat{j}\,\dot{y}_0 + \hat{k}\,\dot{z}_0$$

$$\therefore \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] + mg\,z = E_0 = \frac{1}{2}m[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2] + V_{(x_0, y_0, z_0)}$$

هذه معادلة الطاقة لحركة جسيم في ثلاثة أبعاد.

مثال(٢) : جهد قوة التربيع العكسي.

يسمى قانون الجذب العام وكذلك القوة الكهروستاتيكية بقانون التربيع العكسي حيث أن القوة تتناسب عكسياً مع مربع البعد بين الجسمين أو الشحنتين لنفرض أن جسماً كتلته **m** موضوع على بعد **r** من مركز الأرض لذا فإن القوة المؤثرة على الجسم بفعل الجاذبية للأرض هي:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\hat{n} \quad ....$$

حيث $\hat{n} =$ متجه الوحدة من مركز الأرض نحو الجسم $= \frac{\vec{r}}{|r|}$ ؛ $|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

الإشارة السالبة تعنى أن القوة تجاذبية .

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\vec{r}$$

لإيجاد دالة الجهد $V_{(r)}$:

$$V_{(r)} = -\int \vec{F}(r).d\vec{r}$$

$$= k\int \frac{1}{r^3}\vec{r}.d\vec{r} \qquad = k\int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$= k\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -k\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] = -\frac{k}{r}$$

$$\therefore V_{(r)} = \frac{-k}{r}$$

* ملاحظة: دالة الجهد في الما لانهاية تساوى صفراً حيث تنعدم قوة الجاذبية على بعد لا نهائي من سطح الأرض.

(3.4) شروط وجود دالة الجهد:

نبحث عن الشروط اللازم توافرها في صيغة القوة (F) حتى تكون هذه القوة قوة محافظة. نفرض أن مركبات القوة في الإحداثيات الديكارتية هي دالة للموقع على النحو:

$$F_x = F_x\,(x, y, z) \quad ; \quad F_y = F_y\,(x, y, z) \quad ; \quad F_z = F_z\,(x, y, z)$$

من التعريف الاساسى لدالة الجهد:

$$F_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad F_y = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

وكـذلك:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

حيث أن V دالة مستمرة (continous) فإن ترتيب الاشتقاق بالنسبة للإحداثيات غير مهم وعليه فإن: $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$ ولـذا فـإن:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

وبنفس الطريقة الرياضية نجد أن:

$$\frac{\partial F_y}{\partial Z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial F_X}{\partial Z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

ومن التعريف الرياضي لالتفاف أي متجه مثل $\vec{F} \Leftarrow \vec{\nabla} \times \vec{F}$ نجد أن :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{c} & \hat{y} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left[\frac{\partial F_z}{\partial_y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] - \hat{j}\left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right] + \hat{k}\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right]$$

$$= \hat{i}\,(0) + \hat{j}(0) + \hat{k}(0)$$

$= 0$

$\therefore$ الشرط اللازم حتى تكون القوة $\vec{F}$ قوة محافظة هو أن يكون التفاف $\vec{F}$ = صفر

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

<u>المؤثر دلتا</u> (Delta Operation)

في لغة الرياضيات يعرف المؤثر دلتا على الصورة :

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

حيث من تعريف القوة بدلالة دالة الجهد وجدنا أن:

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + F_z$$

$$= \hat{i}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \hat{j}\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \hat{k}\left(-\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

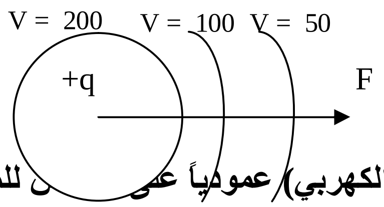
هذه المعادلة تكتب على صورة :

وعادة تقرأ أن القوة هي سالب

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} v$$

تحدر دالة الجهد. والمعنى الفيزيائي للمعادلة هو أن القوة المؤثرة على الجسم أثناء الحركة تكون في اتجاه سالب التحدر لدالة الجهد.

فمثلا في حالة وجود شحنة كهربية في نقطة ما فإن خطوط تساوى الجهد عبارة عن سطوح كروية تحيط بالشحنة (كما في الشكل).



تكون القوة (قوة المجال الكهربي) عمودياً على [illegible] للمنحنى الممثل لسطح الجهد الكهربي أما اتجاهها يكون باتجاه تناقص الجهد.

<u>مثال</u>(١) إذا كانت دالة الجهد على صورة:

$$V(x,y,z) = x^2 + yx + xz$$

أوجد قوة المجال المصاحبة لهذه الدالة.

الحل:

$$F_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow F_x = -(2x + y + z)$$

$$F_y = -\frac{\partial v}{\partial y} = -x \qquad ; \qquad F_z = -\frac{\partial v}{\partial z} = -x$$

$$\therefore \ \vec{F} = -\hat{i}\,(2x + y + z) - \hat{j}\,x - \hat{k}\,x \ ....$$

ملاحظة: حيث أن دالة الجهد موجودة، لذلك فإن القوة محافظة.

مثال (٢) جد مقدار الثوابت a , b , c التي تجعل القوة $\vec{F}$ المعطاه قوه محافظة حيث:

$$\vec{F} = \hat{i}\,(a x + b y^2) + \hat{j}\, c \times y$$

الحل

نجد التفاف القوة $? = \nabla \times F$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + by^2 & c \times y & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(0) - \hat{j}(0) + \hat{k}(cy - 2by)$$

حتى يساوى الالتفاف صفراً يجب أن تكون جميع مركبات $\nabla \times F$ = صفراً وعليه:

$$cy - 2by = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 2b$$

ولا توجد أهمية لمقدار a حتى يكون الالتفاف صفراً.

(3.5) تغير الجاذبية الأرضية من الارتفاع على سطح الأرض.

حيث أن قوة جذب الأرض لجسم كتلته (m) موضوع على ارتفاع (r) من مركز الأرض تعطى بالعلاقة:

$$F = -\frac{G\ m\ M}{r^2}$$

حيث G = ثابت الجذب العام ، M = كتلة الأرض ، من العلاقة هذه نجد أن قوة جذب الأرض للأجسام تتغير مع الارتفاع.

معادلة الحركة للجسم في مجال الجاذبية الأرضية هي

$$m\ddot{r} = -\frac{G M m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = -\frac{G M}{r^2} \ .... \qquad (1)$$

حيث $\ddot{r} = \dot{r}\,\frac{d\dot{r}}{dr}$ تصبح معادلة الحركة على الصورة :

$$m\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr} = -\frac{GM}{r^2}m \quad \Rightarrow$$

$$m\dot{r}\,d\dot{r} = -GMm\frac{dr}{r^2}$$

بإجراء التكامل على الطرفين نحصل على :

$$m\int \dot{r}\,d\dot{r} = -GMm\int\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right] + c$$ (ثابت)

أو

$$\therefore \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left[-\frac{GMm}{r}\right] = c \quad ....(2)$$

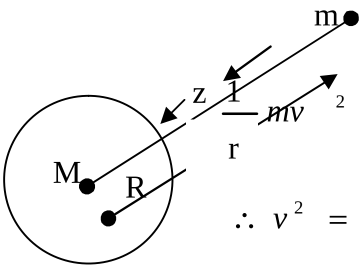
معادلة (٢) هي معادلة الطاقة حيث $T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \quad , \quad V = -\frac{GMm}{r}$

c = ثابت = الطاقة الكلية الابتدائية.

في حالة قذف جسم من سطح الأرض حيث **R = r** (نصف قطر الأرض) بسرعة ابتدائية V_0 فإن :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = E_0 \quad .... \quad (3)$$

أما سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع (Z) من سطح الأرض حيث: **r = Z + R** تصبح:



$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R+Z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$\therefore v^2 = v_0^2 + 2GM\left[\frac{1}{R+Z} - \frac{1}{R}\right] \quad .... \quad (4)$$

عندما يكون الجسم على سطح الأرض فإن قوة جذب الأرض له = وزنه وتعطى

$$-\frac{GMm}{R^2} = -mg_0$$

حيث g_0 = عجلة الجاذبية الأرضية عند السطح:

$$\therefore g_0 = \frac{GM}{R^2} \quad .... \quad (5)$$

بالتعويض في معادلة (4) بمعادلة (5) نجد أن:

$$v^2 = v_0^2 + 2g_0 \left(\frac{R_2}{R+Z} - R \right)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2g_0 z / (1 + Z/R) \;.........$$

حيث: R >> Z يمكن تعريف المقدار $\left(1 + \frac{Z}{R}\right)^{-1}$ باستخدام نظريات ذات الحدين:

(حدود مهملة) $\left(1 + \frac{Z}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{Z}{R} + $

$$\therefore \quad v^2 = v_0^2 - 2g_0 z \left(1 - \frac{Z}{R}\right) \;.......... \;..(6)$$

حيث وجدنا في الفصل الثاني أن العلاقة بين السرعة والمسافة في قوانين الحركة تعطى:

$$v^2 = v_0^2 - 2az$$

a = التسارع عند مقارنة هذه المعادلة مع معادلة (6) نحصل على:

أى أن عجلة الجاذبية الأرضية عند الارتفاع (Z) عن سطح الأرض هى g(z) حيث g(z)

تتناقص مع الارتفاع ونجد أن: $g(z)\Big|_{z=0} = g_0$

$$g(z) = g_0 \,(1 - Z/R)$$

نلاحظ أن وزن الجسم على بعد (z) من سطح الأرض ⇐

$$W = mg = mg_0 \,(1 - Z/R)$$

(3.6) حـركـة قـذيفـة فـي مجــال تثــاقـلي منتـظم:

Motion of a projectile in a Uniform gravitational field.

<u>ندرس حركة جسم مقذوف فى مجال الجاذبية الأرضية فى حالتين:</u>

أ- بإهمـــال مقـاومــة الهــواء:

تـصبح معادلـة الحـركـة للجـسم المقـذوف بـسرعة ابتدائيـة $\vec{v}_0$ حيـث مركبـات الـسرعة هى: $(\dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0)$ هى :

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\,\hat{k} \;.......... \quad (1)$$

حيث $\hat{k}=$ متجه الوحدة في اتجاه الشاقول (محور z) يمكن كتابة هذه المعادلة على صورة:

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = -g\,\hat{k}$$

بإجراء التكامل للطرفين نحصل على:

(ثانيـاً) $$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\int g\,dt\;\hat{k} = -g\,t\,\hat{k} + c_{0}.$$

باستخدام الشروط الابتدائية فإنه: $\vec{v}_0 = c_0$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = -gt\,\hat{k} + \vec{v}_0 \;\ldots\ldots\ldots\;\ldots \quad (2)$$

نجرى التكامل مرة أخرى على طرفي المعادلة (2) لنحصل على:

$$\vec{r} = -\frac{1}{2}gt^{2}\,\hat{k} + \vec{v}_0\,t + c_1$$

عند $t = 0$ نفرض أن $0 = \vec{r}$ (الجسم قذف من نقطة الأصل)

$$\therefore \vec{r}\;\hat{k}\left(-\frac{1}{2}gt^{2}\right) + \vec{v}_0\,t \;\ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots \quad (3)$$

هذه معادلة متجه يمكن فرزها إلى ثلاثة مركبات في الإحداثيات الديكارتية على الصورة:

$$x = \dot{x}_0\,t$$

$$y = \dot{y}_0\,t \quad ; \quad Z = \dot{z}_0\,t - \frac{1}{2}gt^{2} \;\ldots\ldots\ldots\;\ldots\ldots \quad (4)$$

معادلـة (4) تعطى موقع الجسم المقذوف في أي لحظة، يمكن إيجـاد معادلـة المسار للقذيفـة بحذف المتغير (t) من معادلات (4) على النحو التالي:

$$t = x/\dot{x}_0 \;\Rightarrow\; y = \left(\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}\right) x = bx$$

هذه معادلة المسار للقذيفة في مستوى x y وهى معادلة خط مستقيم ميله $\frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$ إذا كانت $\dot{y}_0$ = صفر (مركبة السرعة في اتجاه y صفراً في لحظة ابتداء الحركة) فإن المسار يقع في مستوى x z ، وتكون معادلة المسار على الصورة :

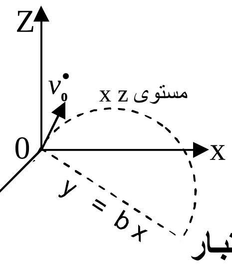
نعوض بدل $t = x/\dot{x}_0$ في معادلة (4) الثالثة.

$$\therefore Z = \dot{z}_0(x/\dot{x}_0) - \frac{1}{2}g\,(x/\dot{x}_0)^2$$

$$Z = a\,x - b\,x^2$$

حيث $a = Z_0^\bullet / X_0^\bullet$ ، $b = \dfrac{g}{2X_0^{\bullet 2}}$

ويمكن تحديد قيمة a ، b من معرفة زاويـة قذف الجسم وسرعة القذف الابتدائيـة. أما شكل المسار للقذيفة يكون على الصورة التالية:



ثانيـاً: باعتبــار مقــاومــة الهـــواء:

في حالة دراسة حركة مقذوف في الهواء مع اعتبـار للحركـة، نفرض أن مقاومة الهواء للحركة تتناسب مع سرعة المقذوف $\vec{v}$ حيـ

$$F = -m\,a\,\vec{v} \quad .... \quad ...$$

حيث m = كتلة المقذوف ، a ثابت التناسب ، الإشارة السالبة مقاومة لأن المقاومـة تعاكس الحركة وتصبح معادلة الحركة للمقذوف على النحو :

$$m\,\vec{\ddot{r}} = -m\,a\,\vec{v} - mg\,\hat{k} \quad .... \quad .... \quad (1)$$

أو

$$\vec{\ddot{r}} = -a\,\vec{v} - g\,\hat{k}$$

هذه معادلة متجه يمكن فرزها إلى ثلاثة مكونات في الإحداثيات الديكارتية على النحو:

$$\ddot{x} = -a\,\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -a\,\dot{y} \quad ; \quad \ddot{z} = -a\,\dot{z} - g \quad .... \quad (2)$$

اما حلول المعادلات (2) يعطى كالآتي:

$$\ddot{x} = \frac{d\,\dot{x}}{d\,t} = -a\,\dot{x}$$

$$\therefore \frac{d\,\dot{x}}{\dot{x}} = -a\,d\,t \Rightarrow \int \frac{d\,\dot{x}}{\dot{x}} = -a\int d\,t$$

$$\therefore \ln \dot{x} = -a\,t + c_1$$

عند $t = 0$ ، $\dot{x}_0 = \dot{x}$ وعليه

$$c_1 = \ln \dot{x}_0$$

$$\therefore \ln(x^\bullet / x_0^\bullet) = -at \quad \Rightarrow \quad x^\bullet = x_0^\bullet\, e^{-rt}$$

وبنفس الخطوات الرياضية نجد أن:

$$y^\bullet = y_0^\bullet\, e^{-a\,t}$$

أما حل المعادلة الثالثة من معادلات (2) يعطى كالآتي:

$$z^{\bullet\bullet} = \frac{d\,z^\bullet}{d\,t} = -a\,z^\bullet - g \quad \Rightarrow \quad \frac{d\,z^\bullet}{(a\,z^\bullet + g)} = -d\,t$$

$$\therefore \int \frac{d\,z^\bullet}{(a\,z^\bullet + g)} = -\int d\,t = -t$$

$$\therefore \frac{1}{a} \ln(g\,z^\bullet + g) = -t + c_2$$

$$\therefore \ln(a\,z^\bullet + g) = -a\,t + c$$

عند t = صفر ، $z_0^\bullet = z^\bullet$

$$\therefore\ c_2\ \frac{1}{a} \ln(g\,z_0^\bullet + g)$$

بالتعويض في المعادلة نجد أن :

$$\therefore\ \ln(g\,z^\bullet + g) = -a\,t - \frac{1}{a} \ln(a\,z_0^\bullet + g)$$

ومنها:

$$\ln\left[\frac{a\,\dot{z} + g}{g\,\dot{z}_0 + g}\right] = -a\,t \quad \Rightarrow \quad \frac{g\,\dot{z} + g}{g\,\dot{z}_0 + g}\ e^{-a\,t}$$

بحل هذه المعادلة في ($\dot{z}$) نحصل على ما يلي :

$$\dot{z} = \dot{z}\, e^{-a\,t} - \frac{g}{a}(1 - e^{-a\,t}) \quad ....$$

اما متجه موقع الجسم كدالة للزمن نحصل عليه بإجراء التكامل على معادلات السرعة كلا على حدا: لنحصل على (باعتبار نقطة القذف = نقطة الأصل).

$$x^\bullet = \frac{dx}{dt} = x_0^\bullet\, e^{-a\,t}$$

$$\therefore \int_0^x dx = x_0^\bullet \int_0^t e^{-a\,t}\, dt \quad \Rightarrow$$

$$x = x_0^\bullet \left[1 - e^{-a\,t}\right] \quad ....$$

وبنفس الطريقة الجبرية نحصل على الاحداثى y للموقع على الصورة:

$$y = \dot{y}_0 \left(1 - e^{-at}\right) \;........$$

أما الاحداثى (z) للموقع

$$z = \int_0^z dz = \int_0^t \dot{z}_0 \, e^{-at} \, dt - \frac{g}{a} \int_0^t \left(1 - e^{-at}\right) dt$$

$$z = \left(\frac{\dot{z}_0}{a} + \frac{g}{a^2} \right) \left(1 - e^{-at}\right) - \frac{g}{a} t \;.......$$

يكون متجه الموقع للجسم المقذوف في أي لحظة $\vec{r}$ على صورة :

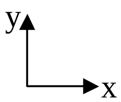
$$\vec{r} = \left(\frac{\vec{v}_0}{a} + \hat{k} \frac{g}{a^2} \right) \left(1 - e^{-at}\right) - \hat{k} \left(\frac{gt}{a} \right) \;..................$$

(3.7) المتذبذب التوافقي في بعدين وثلاثة أبعاد:

Harmonic Oscillator Motion in and Three Dimension

<u>أولاً</u>: حركة المتذبذب فى بعدين:

هنا المتذبذب عبارة عن جسم كتلته (m) مربوط بزنبركين متعامدين إذا كانت الزنبركات متماثلة أي لهما نفس معامل المرونة أي $k = k_x = k_y$ تكون معاملات الحركة في البعدين (x , y):



$$m\ddot{x} = -kx \;............. \;(1)$$
$$m\ddot{y} = -ky$$

وحل المعادلات (1) يكون كما في الفصل الثاني أي :

$$x = A\cos\left(wt + a\right) \;......... \;(2)$$
$$y = B \cos\left(wt + b\right)$$

حيث $w = \sqrt{k/m}$ ، $b \,,\, a$ زوايا الطور للحركة التوافقية ، A , B سعة الذبذبة في الاتجاهين x , y على الترتيب.

لتحديد هذه الثوابت نستخدم الشروط الابتدائية للحركة عند t = 0 ومعرفة $\dot{y}_0 \,,\, \dot{x}_0$ وكذلك $y_0 \,,\, x_0$ أما لتحديد شكل المسار الذي يتخذه المتذبذب في اى لحظة زمنية نجد العلاقة بين (y , x) أو y(x) كالآتي:

نفرض أن $\Delta = b - x$ وعليه فإن:

$$y = B\cos(wt + \Delta + a) \quad ....(3)$$

$$= B\{\cos(wt + a)\cos\Delta - \sin(wt + a)\sin\Delta\}$$

$$\therefore \frac{y}{B} = \cos(wt + a)\cos\Delta - \sqrt{1 - \cos^2(wt + x)}\ \sin\Delta$$

حيث نعوض فى المعادلة $\cos(wt + a) = x/A$ من معادلة (2) لنحصل على:

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \sqrt{1 - (x/A)^2}\ \sin\Delta \quad ....\ ..\ (4)$$

نقل الحدود في معادلة (4) ليبقى الجذر فقط في احد الأطراف ثم نربع المقدار لنحصل على

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\Delta\right)^2 \quad \left[1 - (x/A)^2\right]\ \sin^2\Delta$$

مع مراعاة أن $\cos^2\Delta + \sin^2\Delta = 1$ نجد أن :

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy\cos\Delta}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\Delta \quad ....\ ...(5)$$

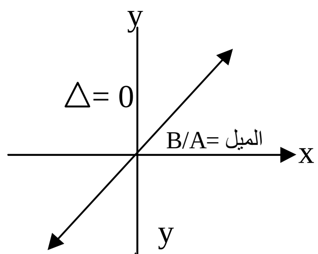
هذه معادلة تربيعية في (x ,y) وقد تمثل قطع ناقص أو مكافئ أو زائد وذلك حسب مميز هذه المعادلة التربيعية ، أما شكل المسار للمتذبذب يعتمد على زاوية فرق الطور Δ : وهناك الحالات التالية:

(أ) إذا كانت $\Delta = 0$ فإن معادلة (5) تؤول إلى :

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2\,x\,y}{A\,B} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

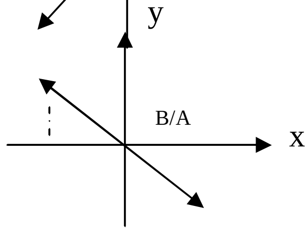
$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = +\frac{B}{A}x$$

هذه معادلة خط مستقيم ميله (B/A) وكذلك في حاله كون.



(ب) $: \Delta = p$

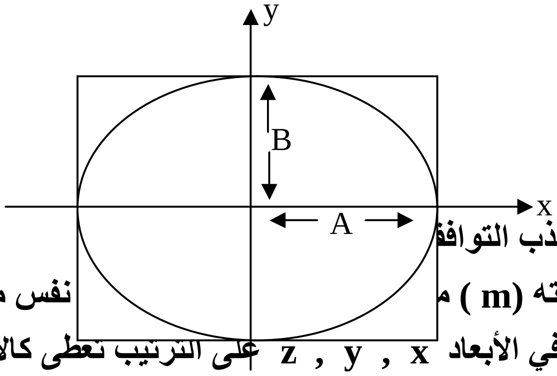
فإن معادلة (5) تؤول إلى $y = -\frac{B}{A}x$



(ج) إذا كانت $\Delta = \frac{p}{2}$ فإن معادلة (5) تؤول إلى :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص محاوره A , B منطبقة على المحاور x , y على الترتيب كما في الشكل.



ثانياً: حركة المتذبذب التوافق

عند ربط جسم كتلته (m) م نفس معامل المرونـة فإن معادلات الحركة للمتذبذب في الأبعاد x , y , z على الترتيب تعطى كالآتي :

$$m\ddot{x} = -kx$$
$$m\ddot{y} = -ky \qquad ; \qquad m\ddot{z} = -kz \quad ....(1)$$

وحلول هذه المعادلات " معادلة الحركة التوافقية البسيطة "

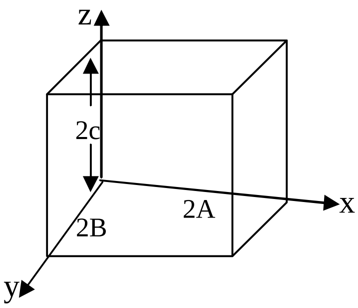
$$x(t) = A\cos(wt + a)$$
$$y(t) = B\cos(wt + B) \quad ....(2)$$
$$z(t) = c\cos(wt + a)$$

يسمى هذا المتذبذب بالتوافقي المتجانس **Isotropic Oscillator** حيث $w = \sqrt{k/m}$ في الأبعـاد الثلاثـة أمـا إذا كانـت $k_x \neq k_y \neq k_z$ يـسمى بالمتذبـذب التـوافقي غيـر المتجـانس **nonisotropic** وتكون حلول معادلات الحركة في الأبعاد الثلاثية هي :

$$x(t) = A\cos(w_1 t + a)$$
$$y(t) = B\cos(w_2 t + a) \quad .... \; (2)$$
$$z(t) = c\cos(w_3 t + a)$$

حيث $w_1 = \sqrt{k_1/m}$ وهكذا

وحركة المتذبذب تقع في فراغ صندوق متوازي المستطيلات الذي أضلاعه (**2A , 2B , 2C**) (كما في الشكل)



حـــالـــة خـــاصـــة:

إذا كانت قيم $w_1 \; , \; w_2 \; , \; w_3$ متناسبة أي

$$\frac{w_1}{n_1} = \frac{w_2}{n_2} = \frac{w_3}{n_3}$$

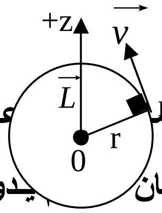
بمعنـــى أن $w_1 : w_2 : w_3 = n_1 : n_2 : n_3$ حيـــث $n_3 \ , \ n_2 \ , \ n_1$ أعـــداد صحيحة يكون مسار المتذبذب مغلقاً ويعود المتذبذب إلى موقعه الابتدائي بعد زمن يعطى بالعلاقة:

$$\frac{2p}{(w_1/n_1)} = \frac{2p}{(w_2/n_2)} = \frac{2p}{(w_3/n_3)}$$

(3.8) كـمية الحـركـة الـزاويـة Angulax Momentum

إذا تحرك الجسم في حركة خطية بسرعة $\vec{v}$ فإنه يملك كمية حركة خطية $(\vec{p})$ وقدرها $m\vec{v}$ أما إذا أجبر الجسم على أن يتحرك في مسار دائري بفعل قوة خارجية متعامدة مع اتجاه سرعته (كما في الشكل) فإنه يصبح لديه كمية فيزيائية جديدة تسمى كمية الحركة الزائدة ويرمز لها بالرمز $(\vec{L})$ وهي كمية متجهه وتعرف رياضياً كالآتي:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \ .... \ (1)$$

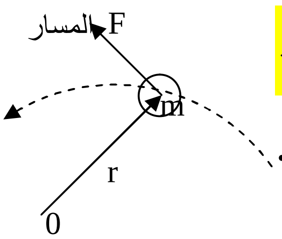


ويكون اتجاه $\vec{L}$ متعامداً مع كلا من $\vec{v} \ , \ \vec{r}$ حيث $\vec{v}$ هي المركبة ال ة (كما مرّ في الفصل الأول $(v_0 = rq^{\bullet})$ فـإن اتجـاه $\vec{L}$ يكـون $(\pm Z)$ فـإذا كـان يدور ضد عقارب الساعة فإن $+Z \ // \ \vec{L}$ وإذا كان الدوران مع عقارب الساعة فإن $-Z \ // \ \vec{L}$ ونلاحظ أن $\vec{L}$ تقع في الاتجاه العمودي على مستوى الحركة.

معادلة الحركة الدورانية:

لنفرض أن جسماً كتلته m وسرعته $\vec{v}$ تؤثر عليه قوة خارجية $\vec{F}$ بحيث تجعله يدور ويملك كمية حركة زاوية مقدارها $\vec{L}$ وكان الجسم مقيد الحركة حول نقطة (0).

لوصف الحركة نستخدم معادلة الحركة الدورانية:



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N_0} \ .... \ (2)$$

حيث $=\vec{N_0}$ عزم الدوران للقوة $\vec{F}$ حول المحور المار في النقطة 0 .

لاشـتقاق معـادلة الحـركـة الدورانيـة:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$$

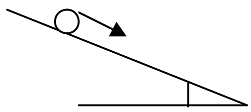
حيث $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ التسارع :

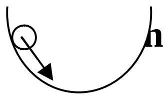
$$= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}_0$$

(3.9) حــركة الجســيم المقــيدة : Constrained Motion of a particle

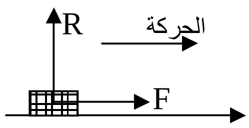
نقول إن الجسيم مقيد الحركة عندما يتحرك على منحنى أو سطح معين ويبقى ملامساً له طيلة الحركة مثل حركة جسم داخل إنـاء كروي أو انـزلاق خرزة على سلك أو حركة جسم على سطح مائل . سنتناول دراسة وصف الأجسام عندما تكون المقيدات ثابتة.



(3.10) معادلة الطاقة للمقيدات الملساء : Energy  h of smooth Constraints

لنفـرض أن $\vec{R} =$ رد فعل سـطح المقيـد علـى الجسم أثنـاء الحركـة ، ولنفـرض أن القـوة الخارجية المؤثرة على الجسم $\vec{F}$ لذلك تصبح معادلة الحركة للجسيم:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{R} \quad .... \quad (1)$$



حيث:

في حالة السطح الأملس $\vec{v} \perp \vec{R}$ وعليه فإن $\vec{v}.\vec{R} =$ صفر !!

بضرب طرفي المعادلة (١) بمتجه $\vec{v}$ نحصل على ما يلي:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \vec{F}.\vec{v} + \vec{R}.\vec{v} = \vec{F}.\vec{v}$$

فى حالة $\vec{F}$ قوة محافظة فإن:

$$m\, d\vec{v}.\vec{v} = \vec{F}.\vec{v}\, dt = \vec{F}.d\vec{r}$$

$$\therefore \int m\, \vec{v}.d\vec{v} = \int \vec{F}.d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -V_{(r)} + const. \quad ....(2)$$

$$\therefore \frac{1}{2}mv^2 + V_{(r)} = const = E_0$$

وهذه معادلة الطاقة في حالة المقيدات الملساء.

***مثال:** وضع جسم كتلته **m** على قمة نصف كرة ملساء نصف قطرها **a** فإذا أزيح الجسم قليلاً عن موقع الاتزان جد عند أي نقطة يترك الجسم السطح.

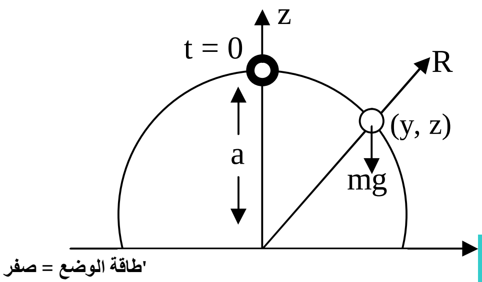
الحـــل

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E_0$$

حيث عند **0 = t** كان الجسيم في حالة سكون $(v_0 = 0)$ وعلى ارتفاع $\vec{z} = a$ عند القمة

وعليه فإن طاقة الوضع الابتدائية للجسم = **m g a** وعليه

$$E_0 = 0 + mga \quad .... \quad .$$



معادلة الطاقة الكلية للجسم هي:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mga \quad .... \quad .(1)$$

حيث أن الجسم يتحرك في مسار دائري على السطح فإ ي :

$$m(\ddot{r} - r\dot{o}^2) = R - mg\cos q \quad .... \quad (2)$$

هنا **r = a** $\Leftarrow \quad \ddot{r} = 0 \ , \ \dot{r} = 0 \quad , \quad \dot{q} = w = v/a$

تصبح معادلة (2) على الصورة:

$$-m\frac{v^2}{a} = R - mg\cos q \quad .... \quad .... \quad (3)$$

حيث $\cos q = z/a$ نعوض ذلك في المعادلة (٢) لنحصل على:

$$\frac{mv^2}{a} = mg(z/a) - R \quad .... \quad .... \quad .. \quad (4)$$

نحل معادلتي (1) ، (2) بالحذف أو التعويض لنحل على قيمة **R**:

$$R = \frac{mg}{a}\,(3z - 2a) \quad ....(5)$$

نلاحـــظ أن قيمـــة رد الفعـــل تتوقـــف علـــى مقـــدار z وعليـــه فـــإن $R=0$ عنـــدما

$$3z - 2a = 0 \quad \Leftarrow \quad Z = \frac{2}{3}a \quad \text{أو} \quad \frac{z}{a} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\theta = 2/3 \;\Rightarrow\; \theta = 48^{\circ}$$

أي يترك الجسم السطح $(R=0)$ عندما يكون على ارتفاع $Z = \frac{2}{3}a$

(3.11) الحركة المقيدة على منحنى: Motion on a curve

عندما يتحرك جسم على منحنى معين فإن موقع الجسم يعبر عنه بدلالة وسيط مثل (s) = المسافة على طول المنحنى (القوس) أي:

$$x = x(s)\;; \qquad y = y(s)\;; \qquad z = z(s)$$

وتكون الطاقة الحركية للجسم معطاة بدلالة $(\dot{s})$ سرعة الجسم $\Leftarrow \frac{1}{2}m\dot{s}^2$

معادلة الطاقة للجسم هي :

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + V_{(s)} = F_0 \quad ....\;..\;(1)$$

عند استقامة معادلة (١) بالنسبة للزمن (t) نحصل على :

$$2\left(\frac{1}{2}\right)m\,\dot{s}\,\ddot{s} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

$$m\dot{s}\,\ddot{s} + \frac{\partial v}{\partial s}\dot{s} \;\Rightarrow\; m\vec{\ddot{s}} = -\frac{\partial v}{\partial s} = \vec{F_s}$$

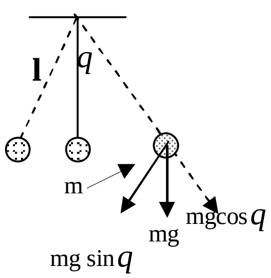
وهذا يؤول إلى معادلة الحركة التفاضلية للجسم (قانون نيوتن الثاني في الحركة).

(3.12) البندول البسيط : Simple Pendulum

البنـدول جسم كتلتـه (m) مربـوط فـي خيط طولـه (l) ومثبـت الخـيط بنقطـة تعليق (كمـا فـي الشكل)، إذا ما أزيح الجسم جانباً قليلاً عن موقع الاتزان فإن حركة البندول تكون في مستوى شاقولي.

أما معادلة الحركة للبندول فهي:

$$m\ddot{s} = -mg\sin\theta \quad ....\;.(1)$$



حيث $s = lq$ فإن $s^{\bullet\bullet} = -lq^{\bullet\bullet}$

بالتعويض في معادلة (١) نجد أن :

$$l\, q^{\bullet\bullet} = -\, g \sin q \quad .... \quad (2)$$

q= تسمى سعة ذبذبة البندول ، وعندما تكون هذه السعة صغيرة فإنه يمكن استخدام التعريف الأولى لـ $\sin q \approx q$ وعليه تصبح معادلة الحركة:

$$q^{\bullet\bullet} \approx \frac{-g}{l} q \quad .... (3)$$

نفرض أن $w_0^2 = \dfrac{g}{l}$ ، تصبح معادلة (3) معادلة حركة توافقية بسيطة) كما مر وسبق شرحه فى الفصل الثانى) ويصبح حل المعادلة (3) كالآتي:

$$q = A \cos (w_0 + a) \qquad (4)$$

حيث A= سعة ذبذبة البندول وهى اقصى ازاحة يصل اليها البندول اثناء الحركة.

X = زاوية الطور اما زمن ذبذبة البندول البسيط T_0 هو:

$$T_0 = \frac{2p}{2v_0} = \frac{2p}{3/2} = 2p\sqrt{\frac{l}{g}}$$

تمارين الفصل الثالث

(3.1) بين أيا من القوى التالية محافظة :

$$(a) \quad \vec{F} = K\, \vec{r} / r^4$$

$$(b) \quad \vec{F} \quad \hat{i}\, e^{a(x+y)} + \hat{j}\, e^{b(x+y)} + \hat{k}\, e^{cz}$$

حيث $a \neq b$

(3.2) جد دالة القوة المرافقة لكل من دوال الطاقة الكامنة التالية:

$$(a) \quad V = K \; xy / z^2$$

$$(b) \quad V = k \; e^{a(x^2 + y^2 \;\; z^2)}$$

(3.3) يتحرك جسيم كتلته m في مجال قوة دالة جهده :

$$V = a x + b y^2 + c z^3$$

إذا مرّ الجسيم من نقطة الأصل بسرعة v_0 فما انطلاقه عندما يمر بالنقطة (1 , 1 , 1)

(3.4) بين أن متغير الجاذبية مع الارتفاع يمكن حسابه مقرباً من دالة الطاقة الكامنة

$$V = m g z \quad (1 - z / R)$$

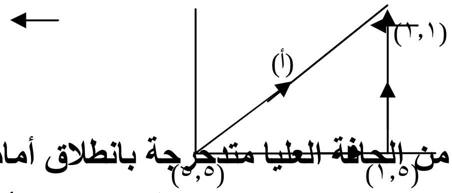
حيث R = نصف قطر الأرض، جد القوة من دالـة الجهد المذكورة أعلاه ومنها جد مركبـات المعادلات التفاضلية للحركة تحت تأثير هذه القوة.

(3.5) افرض دالتي القوة التاليتين هما:

$$(a) \quad \vec{F} = \hat{i}\, x + \hat{j}\, y \qquad\qquad (b) \quad \vec{F} = \hat{i}\, y - \hat{j}\, x$$

بين بطريقتين مختلفتين أن (a) قوة محافظة وأن (b) غير محافظة.

(ملاحظـة: الطريقـة الأولـى: $\nabla \times F$، الطريقـة الثانيـة بأخـذ مـساويين الأول (٥,٥) (٦,١) والمسار الثاني من (٥,٥) (١,٥) ثم (١,٥) ١,١ (كما في الشكل)



انقذفت جسيمات من الطين من الحافة العليا متدحرجة بانطلاق أمامي v_0 فإذا كان نصف قطر العجلة b ، برهن أن أقصى ارتفاع يصل إليه الطين فوق سطح الأرض هو :

$$= b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{g b^2}{2 v_0^2}$$

(3.7) اكتب مركبـات المعادلـة التفاضلية لحركـة قذيفـة إذا كانـت مقاومـة الهـواء تتناسـب مـع مربع الانطلاق . هل المعادلات قابلة للفرز؟ بين أن مركبة x للسرعة هي : $\dot{x} = \dot{x}_0 \, e^{-r s}$

حيث s = المسافة التي قطعتها القذيفة على طول مسار الحركة.

(3.8) إذا علمت أن $w = 2 \ \sec^{-1}$ لمتذبذب توافقي معين موحد الخواص يتحرك فى بعدين إذا كانت الشروط الابتدائية:

$$x_0 = 2cm \qquad \dot{x}_0 = 0$$
$$y_0 = 2\ cm \qquad \dot{y}_0 = 4\ cm/s$$

(3.9) جسم كتلته 1 وحده يتحرك في جهد متذبذب توافقي ثلاثي الأبعاد وغير موحد الخواص

$$V = x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

فإذا مرّ الجسم في نقطة الأصل بسرعة = 1 وحدة وباتجـاه (1 , 1 , 1) في الزمن 0 = t جد x , y , z كدوال الزمن.

(3.10) وضع جسيم كتلته m على جانب كرة ملساء نصف قطرها b وعلى مسافة (b/2) من مستواها المركزي عند انزلاق الجسم أسفل جانب الكرة عند اى نقطة سوف تتركها؟

(3.11) تنزلق خرزة على سلك دائري أملس نصف قطرها b فإذا كان مستوى الحلقة شـافولياً وبدأت الخرزة من السكون من نقطة عند مستوى مركز الحلقة . جد سرعة الخرزة ورد فعل السلك على الخرزة عند أسفل نقطة للسلك.

(3.12) استخدم بندول بسيط في تجربة لإيجاد قيمة (g) إذا كانت سعة ذبذبة البندول 30° جد الخطأ النسبي عند استخدام العلاقة:

$$T = 2p \sqrt{\mathbf{l} / g}$$

الفصل الرابع
حركة المحاور المرجعية

الفصل الرابع

حركة المحاور المرجعية **Moving Reference System**

حيث أنه يلزم لوصف حركة الجسم اختبار محاور (أطر) لتحديد موقع الجسم في اى لحظة زمنية وقد تكون أحيانا نقطة أصل هذه للمحاور متحركة بالنسبة لشخص ثابت وعليه يلزم وصف الحركة بالنسبة للمحاور الثابتة فمثلا عند دراسة حركة قذيفة على سطح الأرض نحدد متجه موقع القذيفة في اى لحظة بالنسبة لنقطة أصل لمحاور تقع على سطح الأرض وحيث أن الأرض تدور جول محورها فان هذه المحاور تعتبر محاور متحركة بالنسبة لمركز الأرض .

? في هذا الفصل سنتناول تحديد موقع وسرعة وعجلة الجسم بالنسبة للمحاور الثابتة .

(4.1) حركة المحاور الانتقالية **Translation of coordinate system**

لنفرض أن النقطة (أ) تمثل موقع جسيم يتحرك في نظام المحاور (o x y z) بحيث أن $\vec{r}$ = متجه الموقع للجسم في اى لحظة (كما في الشكل) لنفرض أن القطة الثابتة في نظام المحاور الثابتة (o x y z) هي o نقطة الأصل وأن متجه الموقع للجسم بالنسبة

للمحاور الثانية هو $\vec{R}$ لنفرض أن للمحاور المتحركة حركة انتقالية بحيث $OX \ // \ ox$ وان

متجه موقع (O) بالنسبة لـ O هو $\vec{R_0}$ من الشكل نرى أن العلاقة بين هذه المتجهات هي :

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{R_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

عند اشتقاق معادلة (١) بالنسبة للزمن نحصل على :

$$\vec{V} = \vec{v} + V_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

حيث $\vec{V}$ = سرعة الجسم بالنسبة للمحاور الثابتة (الأساسية)

$\vec{V_0}$ سرعة النقطة (o) بالنسبة O (مركز أصل المحاور الثابتة).

$\vec{v}$ = سرعة الجسيم في المحاور المتحركة.

عند أخذ المشتقة الثانية بالنسبة للزمن لمعادلة (١) نحصل على متجه التسارع:

$$\vec{A} = \vec{a_0} + \vec{A_0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

حيث A = تسارع الجسم في المحاور الثابتة ، $= A_0$ تسارع المحاور المتحركة بالنسبة للمحاور الثابتة.

$= \vec{a_0}$ تسارع الجسيم في المحاور المتحركة .

? ملاحظة إذا كانت المحاور المتحركة تنتقل بسرعة ثابتة (V_0) بالنسبة للمحاور الأساسية الثابتة فان معادلة (3) تصبح $:(O = \vec{A_0})$

$$\vec{A} = \vec{a}$$

ونقول أن المحاور المتحركة غير معجلة (متسارعه) أو محاور خاملة **Inertial frame**

(4.2) القوى الزائفة: Inertial Forces

معادلة حركة الجسيم في المحاور المتحركة كالآتي:

في معادلة (3) نضرب كل الحدود بكتلة الجسم m $\Leftarrow$

$$m\vec{A} = m\vec{a} + m\vec{A_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

لنفرض أن $= \vec{F} = m\vec{A}$ محصلة القوى الحقيقية المؤثرة على الجسم والموجودة في المحاور الثابتة (الأساسية) وتسمى القوى الحقيقية.

$$\therefore \vec{F} = m\,\vec{a} + m\,\vec{A_0}$$

$$\therefore m\,\vec{a} = \vec{F} + (-m\,\vec{A_0}) \quad \ldots\ldots\ldots .(4)$$

حيث الطرف الأيسر = الكتلة × تسارع الجسم في المحاور المتحركة (معادلة الحركة)

.

الحد $(-m\,\vec{A}_0)$ هو صورة رياضية للقوة " كتلة × التسارع " وهذه القوة غير حقيقية (لا حدود لها عملياً) وتظهر بسبب حركة المحاور المتحركة بالنسبة للمحاور الأساسية ولذلك تسمى قوة زائفة لذلك تصبح معادلة (5)

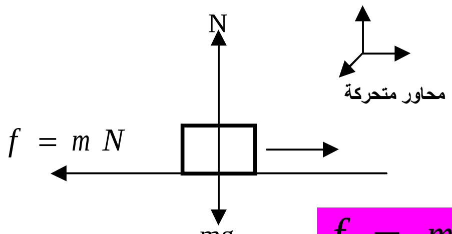
$$m\,\vec{a} = "\,\vec{F}\,"$$

حيث $"\vec{F}"$ تعنى محصلة القوى الزائفة والقوى الحقيقية.

؟ ملاحظة : تظهر القوى الزائفة عند اختبار محاور معجلة (متسارعة) لوصف حركة الجسم.

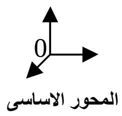
؟ مثال: وضع قالب خشبي على طاولة أفقية خشنة لها معامل احتكاك m جد الشروط اللازمة حتى ينزلق القالب على الطاولة؟

الحـــل



حيث قيمة قوة الاحتكاك:

$$f = m\,N = m\,mg\ \ldots$$



$\therefore$ يكون القالب على وشك الانزلاق إذا كانت محصلة القوى المؤثرة = صفر

$$\vec{F} + (-m\,\vec{A}_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad m\,mg\ ,< \left|-m\,\vec{A}_0\right|$$

وهـــذا هـــو الشـــرط

$$\therefore m\,g < \left|-\vec{A}\right|$$

أي القيمة العددية لتسارع المحاور المتحركة بالنسبة للثابتة أكبر من قوة الاحتكاك:

أي

$$\left|-A_0\right| = A_0 > m\,g$$

(4.2) الحـركـــة العـامـــة للمحـــاور General Motion of System Coordinate

لنفرض أ ن المحاور المتحركة لها حركة دورا نية حول ما بالإضافة إلى حركتها الانتقالية نحدد متجهات المواقع في المحاور المتحركة والأساسية على النحو :

$$\vec{r} = \hat{i}\,x + \hat{j}\,y + \hat{k}\,z \qquad \ldots\ldots\ldots\ \ldots.$$

وعليه فإن :

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \hat{i} \times \hat{j}\,y + \hat{k}\,z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

عند اشتقاق (١) بالنسبة للزمن نجد أن :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \left[\left(\hat{i}\,x^{\bullet} + \hat{j}\,y^{\bullet} + \hat{k}\,z^{\bullet}\right) + x\frac{d\,\hat{i}}{dt} + y\frac{d\,\hat{j}}{dt} + z\frac{d\,\hat{k}}{dt}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

نحاول إيجاد الكمية]   [في معادلة (3) بدلالة السرعة الزاوية $\vec{w}$: أي يزيد تحديد قيم $\frac{d\,\hat{i}}{dt}\ ,\ \frac{d\,\hat{j}}{dt}\ ,\ \frac{d\,\hat{k}}{dt}$ حيث انها تتغير مع الزمن .

لنفرض أن متجهاً مثل $\vec{B}$ يدور حول محور بسرعة زاوية (w) ، أثناء الدوران فان المتجه يصبح مخروط دائري قائم راسمه $|B|$ وزاوية رأسه f.

لنفرض أن بعد Δt من الزمن فان المتجه يصبح $\vec{B}(t+\Delta t)$ وعليه:

$$\Delta\vec{B} = \vec{B}\,(t+\Delta t) \quad - B(t)$$

نلاحظ من الشكل : $ab = |B|\ \sin f$

وكذلك: $|\Delta\vec{B}| = |B| \quad \sin f \quad \Delta q \ \ldots\ldots\ldots$

$$\therefore \frac{|\Delta\vec{B}|}{\Delta t} = |B|\sin f\left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right) = |B|\ \sin f\ \ w$$

حيث: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta z} = w$

$$\therefore \frac{d|B|}{dt} = w|B|\sin f$$

وحيث: $w\,\hat{k} = \vec{w}$

فإن المعادلة تكتب على صورة الضرب الإتجاهي لـ $\vec{B}$ مع $\vec{W}$ على الصورة:

و هذه قاعدة المتجه الدّوار:

$$\frac{d\ \vec{B}}{dt} = \vec{w} \times \vec{B}$$

معدل المتغير الزمني لمتجه ما يساوى الضرب الاتجاهى لـه مع السرعة الزاوية في حالة دوران المتجه حول محور بالقياس على هذه القاعدة فإن :

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{w} \times \hat{i}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{w} \times \hat{j} \quad ; \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{w} \times \hat{k}$$

$$\therefore x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} = x(\vec{w} \times \hat{i} + w \times \hat{j} + w \times \hat{k})$$

$$= \vec{w} \times (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \vec{w} \times \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \vec{r}^{\bullet} + \vec{w} \times \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_0 + \vec{r}^{\bullet} + \vec{w} \times \vec{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

أي السرعة في المحاور الأساسية = سرعة انتقال المحاور المتحركة بالنسبة لمحاور الأساسية + سرعة الجسيم في المحاور المتحركة + الضرب الاتجاهى لـ $\vec{w}$ مع متجه الموقع للجسم.

لاشتقاق تسارع الجسم بالنسبة للمحاور الأساسية $\frac{d^2\vec{R}}{dt}$ نستخدم ما يلي :

من معادلة (6) :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_0 = \left[\vec{r}^{\bullet} + \vec{w} \times \vec{r}\right]$$

نفرض أن : $\vec{j} = \vec{r}^{\bullet} + \vec{w} \times \vec{r}$

$$\therefore \frac{d\vec{R}}{dt} - \vec{V}_0 = j$$

بأخذ المشتقة الأولى بالنسبة للزمن لكل طرف من المعادلة نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d\vec{R}}{dt} - V_0\right] = \frac{d\vec{j}}{dt}$$

حسب قاعدة المتجه الدوار فإن :

$$\therefore \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \vec{A}_0 = j^{\bullet} + w \times j$$

$$= \vec{r}^{\bullet\bullet} + \vec{w} \times \vec{r}^{\bullet} + \vec{w}^{\bullet} \times \vec{r} + w \times (\vec{r}^{\bullet} + \vec{w} \times \vec{r})$$

$$= \vec{\ddot r} + \vec w \times \vec{\dot r} + \vec{\dot w} \times \vec r + \vec w \times \vec{\dot r} + \vec w \times \vec w \times \vec r$$

$$\frac{d^2 \vec R}{dt^2} - \vec A_0 = \vec{\ddot r} + 2\vec w \times \vec{\dot r} + \vec{\dot w} \times \vec r + \vec w \times (\vec w \times \vec r)$$

$$\therefore \frac{d^2 \vec R}{dt} = \vec{\ddot r} + 2\vec w \times \vec{\dot r} + \vec{\dot w} \times \vec r + w \times (\vec w \times \vec r) + \vec A_0 \quad ....(7)$$

معادلة (7) تعنى :

التسارع في المحاور الثابتة = التسارع في المحاور المتحركة + تعجيل كوريولوس + التعجيل المستعرض + التعجيل المركزي + تعجيل المحاور المتحركة بالنسبة للثابتة.

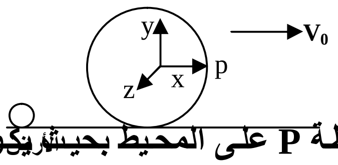
أما رياضياً: تعجيل كوريولوس $\Leftarrow \quad 2\vec w \times \vec{\dot r} \quad Cariolis \ \ acceleration$

التعجيل المستعرض $\vec{\dot w} \times \vec r \Leftarrow \quad Transverse \ \ acceleration$

التعجيل المركزي $\Leftarrow \quad w \times (\vec w \times \vec r) \Leftarrow \quad Centripetal \ \ acceleration$

? ملاحظة: إذا كانت السرعة الزاوية w = ثابتة فإن $\dot w$ **= صفر وعليه لا يوجد تسارع مستعرض.**

مثال (١) : تتدحرج عجلة نصف قطرها b على الأرض بانطلاق أمامي ثابت قدره V_0 **جد تعجيل أي نقطة على مسافة العجلة بالنسبة للأرض ؟**



الحل

نختار نقطة أصل المحاور المتحركة عند مركز العجلة والنقطة P على المحيط بحيث يكون محور x يمر بنقطة p التي نريد حساب التعجيل لها وعليه يكون متجه موقع (p) هو:

$$\vec r = \hat i \, b$$

$$\therefore \vec{\dot r} = \hat i (0) = 0 \quad , \quad \vec{\ddot r} = 0$$

حيث الدوران حول محور z ، عليه تكون $\vec w = \hat k \, w$

ثابت $= \hat k \, (v_0 / b) =$

$\therefore$ **التعجيل المستعرض** $= \vec{\dot w} \times \vec r$ **صفر وكذلك تعجيل كوريولوس =** $2\vec w \times \vec{\dot r}$ **= صفر**

أما التعجيل المركزي $\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$ هو :

$$\hat{k} w \times (\hat{k} w \times \hat{i} b) = w^2 b \; \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i})$$

حيث من قاعدة ضرب المتجهات الدوارة :

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

التعجيل المركزي = $-w^2 b \, \hat{i}$

$$= -\frac{w_0^2}{b} \hat{i}$$

أما $\vec{A_0} =$ تعجيل مركز العجلة

(بالنسبة للأرض) حيث تتحرك العجلة بسرعة منتظمة $V_0 \Leftarrow \vec{A_0} = 0$

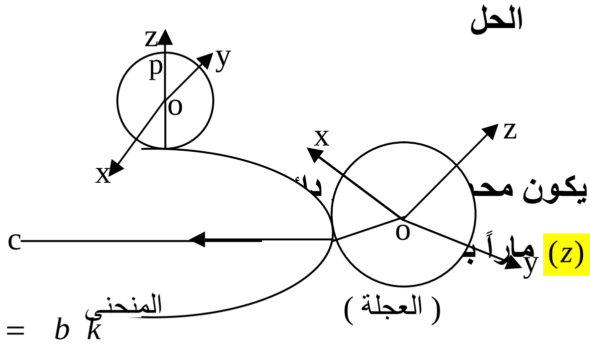
$$\therefore \vec{A} = \overset{\bullet\bullet}{\vec{r}} + 2w \times \overset{\bullet}{r} + \overset{\bullet}{w} \times \vec{r} + \left(\frac{-v_0^2}{b}\right) \hat{i} + 0$$

$$\vec{A} = \frac{-v_0^2}{b} \hat{i}$$

اى أن كل نقطة على محيط العجلة تتسارع نحو مركز العجلة بمقدار $\frac{v_0^2}{b}$

مثال (2) : تسير دراجة هوائية نصف قطرها b بانطلاق امامى ثابت v_0 على منحنى نصف قطر تكوره (p) جد تعجيل أعلى نقطة في العجلة بالنسبة لمركز المنحنى :

الحل



نختار المحاور المتحركة $oxyz$ بحيث يكون محـ... دا

أثناء دوران العجلة (٢) ونختار محور (z) ماراً بـ

$$r = b \, \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \overset{\bullet}{b_0} \hat{k} + b \frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$= b \left[\vec{w} \times \hat{k} \right] = b \left[\hat{i} \left(\frac{v_0}{b} \right) \times \hat{k} \right]$$

سرعة النقطة p بالنسبة للإحداثيات المتحركة $\Leftarrow r^{\bullet} = v_0 (\hat{i} \times \hat{k}) = v_0 (-\hat{j})$

$\therefore$ محور z متغير الاتجاه بالنسبة (c).

$\Leftarrow \frac{v_0}{b} = w$ السرعة الدورانية للنقطة $\hat{i}\, w = (p)$

$$\therefore \overrightarrow{r^{\bullet\bullet}} = \frac{d}{dt}(-\hat{j} v_0) = -v_0 \frac{d\hat{j}}{dt}$$

$$= -v_0 (\vec{w} \times \hat{j}) = -v_0 (\frac{v_0}{b} \hat{i} \times \hat{j})$$

$$\overrightarrow{r^{\bullet\bullet}} = \left(-\frac{v_0^2}{b} \right) \hat{k} \qquad \text{..........} \; (1)$$

ملاحظة: هذا تسارع النقطة (p) في المحاور المتحركة بالنسبة لمركز العجلة وهو باتجاه نحو المركز كما مرّ في المثال الأول.

حيث أن سرعة دوران المحاور المتحركة حول مركز التكور (٢) $= \hat{k} \left(\frac{v_0}{r} \right)$

لذلك يكون تعجيل كوريولوس $\Leftarrow 2\vec{w} \times \overrightarrow{r^{\bullet}} =$

$$= 2\hat{k} (\frac{v_0}{r}) \times (-\hat{j} v_0) = -2 \frac{v_0^2}{r} (\hat{k} \times \hat{j}) - 2 \frac{v_0^2}{r} (\mathbf{p}^2)$$

يكون تعجيل كوريولوس في اتجاه (٢) $\Leftarrow 2 \frac{v_0^2}{r} \hat{i}$

حيث $= \vec{w}$ ثابتة $\Leftarrow$ $= \vec{w}^{\bullet}$ صفر $\Leftarrow$ التعجيل المستعرض = صفر

أما التعجيل المركزي $\Leftarrow$ $\Leftarrow \vec{w} \times \vec{r}$

$$\frac{v_0^2}{r} \hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{k}\, b) = \frac{v_0^2}{r} \hat{k}\, (0) = 0$$

يكون تسارع النقطة (p) بالنسبة لـ c هو : $\vec{A}$ ونجده بجميع الحدود :

$$\vec{A} = \overrightarrow{r^{\bullet\bullet}} + 2\, w \times r^{\bullet} + w^{\bullet} \times \vec{r} + w \times (\vec{w} \times \vec{r}) + \overrightarrow{A_0} \Rightarrow$$

$$= -\frac{v_0^2}{b}\hat{k} + 2\frac{v_0^2}{r}\hat{i} + 0 + 0 + \frac{v_0^2}{r}\hat{i}$$

تسارع (0) بالنسبة لـ c :

$$\vec{A} = \left(3\frac{v_0^2}{r}\right)\hat{i} - \frac{v_0^2}{b}\hat{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; j \; . \; ٤. \; D$$

(4.3) ديناميكية جسيم في محاور دائرة (دوّارة)

Dynamics of a particle in Rotating coordinate system

حيث أن معادلة حركة الجسم في المحاور الأساسية (الثابتة) هي:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{R}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث $\vec{R}$ متجه موقع الجسم بالنسبة للمحاور الثابتة

$\vec{F}$= محصلة القوى الحقيقية لذلك يمكن كتابة معادلة (١) على الصورة التالية في المحاور المتحركة:

$$"\vec{F}" = m\overrightarrow{r^{\bullet\bullet}} = \vec{F} - m\overrightarrow{A_0} - 2m\,\vec{w} \times \overrightarrow{r^{\bullet}} - m\,w^{\bullet} \times \vec{r} - m\vec{a} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \quad \ldots\ldots\ldots \; (2)$$

حدود المعادلة (2) هي ممثلة للقوى المؤثرة على الجسيم " الحقيقية والزائفة " وتعرف بما يلي:

١-القوة الكوريولية coriolis force = $-2m\,w \times \overrightarrow{r^{\bullet}}$

٢ - القوة المستعرضة Transverse $\Leftarrow$ = $-m\,w^{\bullet} \times \vec{r}$

٣ - القوة النابذة (قوة الطرد المركزية) = $-m\,\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$

أي أن معادلة (2) تعطى محصلة جميع القوى المؤثرة على الجسيم :

$$"F" = \vec{F} + \overrightarrow{F_{cor}} + \overrightarrow{F_{trans}} + F_{cent} - m\overrightarrow{A_0}$$

? المعنى الفيـزيـائي للقـوى الزائفــة:

١ـ القـوة الكوريوليـة $\Leftarrow \quad (-2m\vec{w} \times \vec{v})$ حيـث $\vec{v}=$ سـرعة الجـسيم فـي المحـاور المتحركة تكون $\perp$ على اتجاه السرعة (اتجاه الحركـة) تظهر هذه القوة عنـدما تهب الريـاح في نـصف الكرة الأرضيـة الـشمالي والجنـوبي حيث تـؤدى إلى انحراف الكتل الهوائيـة ممـثلا الرياح الشمالية (التي تهب من جهة الشمال الجغرافي في نصف الكرة الشمالي تنحرف بفعل قوة كوريولوس نحو اليمين للمشاهد.

توضيح: إذا كانت

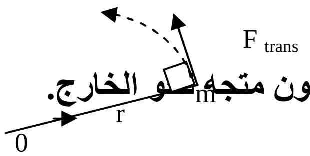
$$\vec{v} = -\hat{j}\, v$$

$$\vec{w} = \hat{k}\, w \qquad w$$ (بسبب دوران الأرض)

$$F_{car} = -2m\ \hat{k}\, w \times (-\hat{j} v) = 2\, m w v\ (\hat{k} \times \hat{j})$$
$$= 2\, m w v\ (-\hat{i})$$

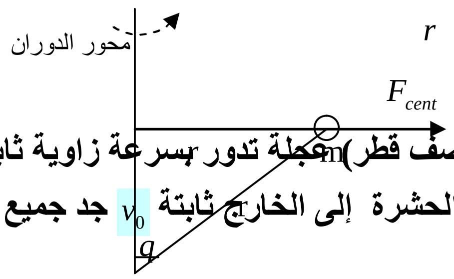
اى نحو اتجاه محور (x) إلى الشرق.

٢ـ القوى المستعرضة: تكون هذه القوى عمودية على اتجاه نصف القطر $\vec{r}$ تعمل على



٣ـالقوة النابذة : تنشئ من الدوران حول محور معين وتكون متجهة نحو الخارج.

(بدلالة الإحداثيات الكروية)



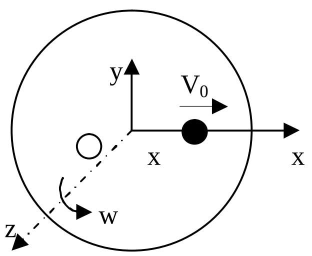
$$r = r\ \sin\ q$$

$$F_{cent} = m\ w^2\ r$$

مثال (١): تزحف حشرة إلى الخارج على شعاع (نصف قطر) عجلة تدور بسرعة زاوية ثابتة حول محور عمودي على مستواها. إذا كانت سرعة الحشرة إلى الخارج ثابتة v_0 جد جميع القوى المؤثرة على الحشرة ؟

الحــل

نختار محاور ثابتة على العجلة بحيث يكون محور x متجه على طول شعاع العجلة لذلك:



(عجلة)

$$\vec{r} = \hat{i}\ x$$

$$= \hat{i}\ (v_0 t) \quad .... \ .... \quad (1)$$

$$\dot{\vec{r}} = \hat{i}\ v_0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = 0 \quad ....(2)$$

حـيث: $\vec{w} = \hat{k}\, w$

$\therefore$ محصلة القوى المؤثرة على الحشرة:

$$"F" = \vec{F} - m\,\vec{A_0} - 2m\,\vec{w} \times \vec{r}^{\bullet} - m\,w^{\bullet} \times \vec{r} - m\,\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

$= \vec{F}$ قوة الاحتكاك بين أرجل الحشرة وسطح العجلة

$= \vec{A_0}$ صفر حيث سرعة الحشرة ثابتة

أما قوة كوريولوس $\Leftarrow - m\vec{w} \times \vec{r}^{\bullet} \Leftarrow$

$= w$ ثابتة ، $= w^{\bullet}$ صفر $\Leftarrow$ القوة المستعرضة = صفر

أما القوة النابذة :

$$-m\,\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$$

$$= -m w^2 \times \left[\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{i}\,)\right] = +\frac{m w^2 \times \hat{i}}{(x)}$$

اى z اتجاه محور (x) .

لذلك معادلة الحركة للحشرة:

$$m r^{\bullet\bullet} = "F" = 0 = \vec{F} - 2m\,w\,v\,\hat{j} + m\,w^2 \times \overset{2}{\hat{i}} \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots.\ (3)$$

ثانياً: في المثال السابق جد أقصى مسافة تتحركها الحشرة على الشعاع قبل أن تبدأ بـالانزلاق إذا كان معامل الاحتكاك (m) :

الحـــل

أعظم قيمة للاحتكاك $\Leftarrow m\ (mg)$ ، أثناء الحركة تكون قوة الاحتكاك من معادلة (٥) = محصلة قوة كوريولوس + القوة النابذة إذا تحقق الشرط

$$|\,F\,| \le \left[(2\,m\,w\,v_0)^2 + m\,w^2\,x\right]^{1/2}$$

وعليه $m\ m\ g = \sqrt{(2\,m\,w\,v)^2 + m\,w^2 \times} \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots..$

نحل المعادلة لإيجاد مقدار x حيث $\Leftarrow$

$$x = (\,m^2 g^2 - 4w^2 v_0^2\,)^{1/2}$$

(4.4) تـأثيـــر دوران الأرض Effects of Earth Rotation

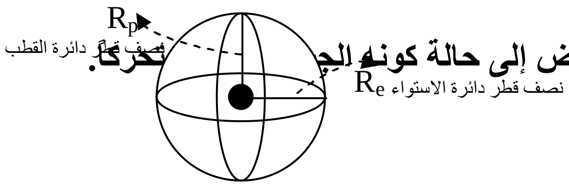
نتناول تطبيق النتائج السابقة على محاور متحركة على سطح على سطح الأرض حيث أن الأرض تدور حول محورها كل 24 ساعة فإن سرعتها الزاوية (w) نجدها بقسمة (2π) زاوية نصف قطرية على هذا الزمن أي:

$$w = \frac{2\pi}{(24)(60)(60)\ sec} = 7.3 \times 10^{-5}\ rad / sec$$

بالرغم من كونه (w) صغيرة إلا أن لها تأثير على حركة الأجسام في محيط الأرض، كما أن الانبعاج في سطح الكرة الأرضية عند خط الاستواء يعزى إلى دوران الأرض حول نفسها أثناء تكوينها مما سبب الاختلاف بين نصف قطر الاستواء قطر دائرة القطب .

وجد حديثاً أن :

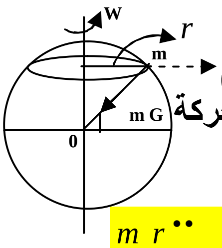
$R_e > R_p$ بمقدار 13 ميل



ندرس معادلة الحركة للأجسام على سطح الأرض إلى حالة كونه الحركة.

أ- التأثيرات الاستاتيكية : الشاقول

نفرض أن جسماً كتلته m موضوع ساكناً على سطح الأرض يكون متجه الموقع له بالنسبة للمحاور المتحركة.



$\vec{r} = 0$ حيث w = ثابتة ، $\dot{w}$ = صفر لذلك باستخدام معادلة الحركة

$$m\ddot{r} = \vec{F} - m\vec{A}_0 = 0 \quad .... \quad ...... \quad (1)$$

" جميع التعجيلات : كوريولوس ، المستعرض ، الجذب المركزي = صفراً

$\vec{F}$ في معادلة (١) : في حالة تعليق الجسم بخيط كما في حاله شاقول البناء

$\vec{F}$ = المجموع الاتجاهي لقوة جذب الأرض للجسم بالنسبة للمحاور الأساسية وقوة الشد العمودي لخيط الشاقول $(-m\,g)$

$$\therefore \vec{F} = (m\vec{G} - m\vec{g})$$

لذلك من معادلة (١) تؤول إلى :

$$m\vec{G} - m\vec{g} - m\vec{A}_0 = 0 \quad .... \quad .... \quad (3)$$

حيث $\vec{G}$= عجلة الجاذبية الأرضية بالنسبة لمركز الأرض (المحاور الثابتة)

عجلة الجاذبية الأرضية بالنسبة للمحاور المتحركة على سطح الأرض. $\vec{g} =$

تعجيل الجذب المركزي لنقطة أصل المحاور المتحركة بالنسبة للمحاور الأساسية. $\vec{A_0} =$

نفرض أن $l =$ **درجة خط دائرة العرض عند موقع الجسم** ($l = 0$ **عند خط الاستواء**

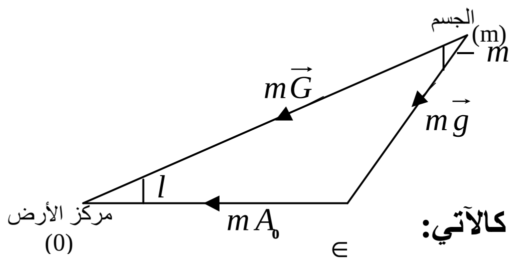
$l = 90^0$ **عند القطب) وعليه يكون نصف قطر دائرة العرض :** $r = R_e \cos l$ ، $R_e =$

نصف قطر الأرض.

$$\therefore A_0 = r\, w^2 = (R_e \cos l)\, w^2$$

وعليه فإن القوة النابذة $-m A_0 =$

$$= -m R_e \cos l \; w^2$$



معادلة (٣) تمثل معادلة متجهه يمكن رسمها كالآتي:

نستخدم قانون الجيوب في مثلث القوى:

$$\frac{\sin \in}{m R_e\, w^2 \cos l} = \frac{\sin l}{mg} \quad ....\;.....(4)$$

حيث $\in$ **زاوية صغيرة ، يمكن التقريب** $\sin\in \approx \in$ **وعليه فإن معادلة (4) ما يلي:**

$$\in \approx \frac{R_e\, w^2}{g} (\sin l \cos l)$$

$$\in \approx \frac{R_e\, w^2}{2g} \sin 2l \quad .... \quad (5)$$

$\in =$ **زاوية انحراف خيط الشاقول (ميزان البناء) عن الرأس (العمودي على سطح الأرض)**

. لذلك عند تعليق الجسم بخيط فإن هذا الخيط لا يكون متجهاً نحو مركز الأرض بل ينحرف عنه بمقدار $(\in^0)$ **بسبب دوران الأرض عند خط الاستواء** $l = 0$

$$\therefore \in = 0$$

لا يوجد انحراف لخيط الشاقول عند الأقطاب:

$$l = 90^0 \Leftarrow \sin 180 = 0$$

لا يوجد انحراف للخيط حيث: $\therefore \in = 0$

يكون أعظم انحراف لخيط الشاقول عندما تكون :

$\sin 2l = 1 \Leftarrow 2l = 90^0 \quad l = 45^0$ **ويكون مقداره**

$$\in \approx \frac{R_e\ w^2}{2g} \approx 1.7 \times 10^{-3}\ rad/\sec \approx 0.1 \deg ree$$

ب- التـأثيـرات الديناميكية : حـركـة القـذيفـة

Dynamic Effects - Motion of a projectile

ندرس تأثير دوران الأرض على حركة قذيفة في مجال سطح الأرض . تكون معادلة الحركة للقذيفة:

$$m\ddot{\vec r} = \vec F + (m\vec G - m\vec A_0) - 2m\vec w \times \dot{\vec r} - m\vec w \times \vec w \times \vec r \quad .... (1)$$

حيث $=\vec F$ مقاومة الهواء ، w= ثابتة ، $\dot w$= صفر

بينما $m\vec g = (m\vec G - m\vec A_0)$ وزن الجسم بالنسبة للمحاور المتحركة بإهمال مقاومة الهواء $(\vec F = 0)$ تصبح معادلة (١) :

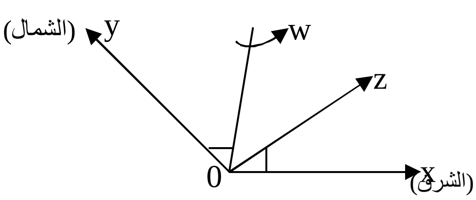
$$\therefore\ m\ddot{r} = m\vec g - 2m\vec w \times \dot{\vec r} - m w \times (w \times \vec r) \quad ....\ ......\ (2)$$

حيث الحد الثالث في معادلة (٢) يحتوى على w^2 وهى كمية $(10^{-5})^2$ $\approx 10^{-10}$ كمية صغيرة بالنسبة لحدود المعادلة مما يسمح بإهمالها في المعادلة دون خطأ يذكر و عليه

$$m\ddot{r} = m\vec g - 2m w \times \dot{\vec r} \quad ....\ .....\ (3)$$

هذه معادلة الحركة لقذيفة تتحرك في مجال سطح الأرض بسرعة $(\dot{\vec r})$ بالنسبة للمحاور المتحركة . نختار محاور متحركة على سطح الأرض $(oxyz)$ حيث محور x يشير إلى جهة الشرق ، محور y نحو الشمال ، محور z رأسياً باتجاه خط الشاقول.

لذلك فإن :



$$\vec g = -\hat k\ g$$

$$\vec w = w \times \hat i + w_y \hat j + w_2 \hat k$$

$$w_x = 0 \quad , \quad w_y = w \cos l$$

$$w_2 = w \sin l$$

$$\therefore \quad \vec{w} \times \vec{r}^{\,2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & w_y & w_2 \\ x^{\bullet} & y^{\bullet} & i \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots$$

$$= \hat{i}\,(w z^{\bullet} \cos l - w y^{\bullet} \sin l\,) + \hat{j}\,(w x^{\bullet} \sin l\,) + \hat{k}\,(-w x^{\bullet} \cos l\,) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

بفرز مكونات معادلة (3) بالإحداثيات الديكارتية نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} x^{\bullet\bullet} & - 2w\,(z^{\bullet} \cos l - y^{\bullet} \sin l\,) \\ y^{\bullet\bullet} & = -2w\,(x^{\bullet} \sin l\,) \\ z^{\bullet\bullet} & = -g + 2wx^{\bullet} \cos l \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

معادلة (5) تمثل المعادلة التفاضلية لمعادلة حركة الجسم في الإحداثيات الكارتيزية.

نكامل معادلات (5) بالنسبة للزمن لنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} x^{\bullet} & = -2w\,(z \cos l - y \sin l\,) + x_0^{\bullet} \\ y^{\bullet} & = -2wx \times \sin l + y^{\bullet} \\ z^{\bullet} & = -gt + 2wx \cos l + z_0^{\bullet} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

حيث $z_0^{\bullet}\ ,\ y_0^{\bullet}\ ,\ x_0^{\bullet}$ مركبات السرعة الابتدائية في الإحداثيات الكارتيزية.

نعوض معادلة (6) في معادلة (5) لنحصل على :

(7) (حـــدود

مهملة) $x^{\bullet\bullet} = -2wgt \cos l - 2w\,(z_0^{\bullet} \cos l - y_0^{\bullet} \sin l\,) + \ldots\ldots\ldots\ldots$

تم تكامل معادلة (7) لنحصل على :

$$x^{\bullet} = wgt^2 \cos l - 2wt\,(z_0^{\bullet} \cos l - y_0^{\bullet} \sin l\,) + x_0^{\bullet}$$

ومركبة السرعة في اتجاه (x) ثم تكامل هذه المعادلة بالنسبة للزمن لنحصل.

$$x(t) = \frac{1}{2} wg \cos l\, t^3 - w\,(z_0^{\bullet} \cos l - y_0^{\bullet} \sin l\,)\, t^2 + x_0^{\bullet} t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

نجرى نفس الخطوات الجبرية للحصول على $y^{\bullet}$ ، وكذلك y لنحصل على :

$$y = y_0^{\bullet} t - w x_0^{\bullet} t^2 \sin l \ldots\ldots\ldots\ldots (8b)$$

وكذلك $\dot{z}$ ، $z(t)$ تكون على صورة:

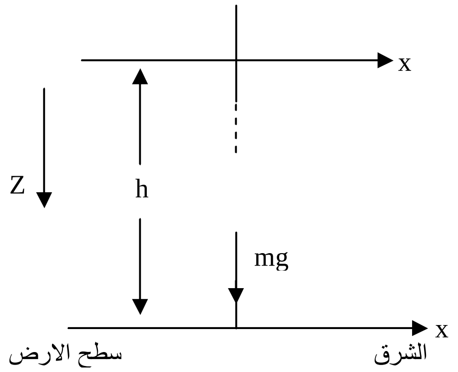
$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \dot{z}_0 t + w\,\dot{x}_0 \cos l \;\; t^2 \quad .... \;\; ..... \quad (8c)$$

" في معادلة الموقع x , y , z أهملت جميع الحدود التي تحتوى على قوى w التربيعية

حيث : $0=\dot{x}_0 \;,\; \dot{y}_0 = 0 \;,\; 0=\dot{z}_0$ جد مقدار انحراف القذيفة عن الرأس.

الحــل

نستخدم معادلات (8) :



$$x = \frac{1}{3} w\, g \, \cos \, l \;\; t^3$$

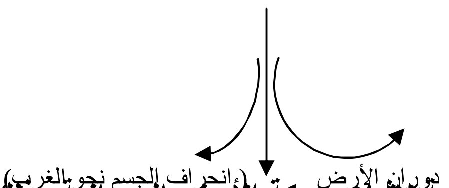
$$y = 0 \quad , \quad z = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$-h = z = -\frac{1}{2} gt^2$$

$$\therefore -h = -\frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{3} w \; g \; \cos \; l \;\; (\frac{2h}{g})^{3/2} \quad .... \;\; ......$$

مقدار الانحراف عن الشاقولى أما اتجاه الانحراف نحو الغرب لأن الأرض تدور نحو الشرق بالنسبة للمشاهد.

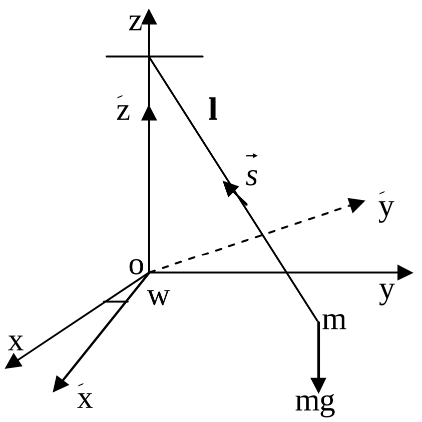


(4.5) بنـــدول فوكـــو Foucault Pendulum

في عام ١٩٨٥١ أجرى العالم الفرنسي جان فوكو تجربة لإثبات حركة الأرض الدورانية وذلك باستخدام بندول حيث علق كرة بحبل طويل في سقف كنيس في فرنسا (كما في الشكل)

معـادلـة حـــركـة البنـــدول هــــي:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{s} - 2m\vec{w} \times \dot{\vec{r}} \,.............. (1)$$



حيث $\vec{s}=$ الشد في الخيط ، (مع إهمال قوة الجذب المركزي) نفرض أن $=l$ طول الخيط نحلل القوة في الشد على النحو:

$$S_x = -\frac{x}{l}s \;;$$
$$S_y = -\frac{y}{l}s \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ (2)$$

بينما

$$\vec{w}\times\vec{r^{\bullet}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x^{\bullet} & y^{\bullet} & z^{\bullet} \end{vmatrix}$$

حيث $\vec{w} = (w\cos l)\,\hat{j} + (w\sin l)\hat{k}$

بفرز مكونات معادلة (١) بالإحداثيات الكارتيزية:

$$m\,x^{\bullet\bullet} = -\frac{x}{l}s - 2\,m\,w\,(z^{\bullet}\cos l - y^{\bullet}\sin l)$$

$$m\,y^{\bullet\bullet} = -\frac{y}{l}s - 2m\,w\,x^{\bullet}\sin l \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ (3)$$

$$mz^{\bullet\bullet} = s_z - mg + 2mwx^{\bullet}\cos l$$

عندما تكون إزاحة الشاقول صغيرة فإن قيمة الشد $mg = |\vec{s}|$ تقريباً ويمكن أيضا إهمال $z^{\bullet}$ بالنسبة $y^{\bullet}$ لتصبح معادلة الحركة :

$$x^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{l}x + 2\,w^1 y^{\bullet}$$

$$y^{\bullet\bullet} = -\frac{g}{l}y - 2\,w^1 x^{\bullet} \;; \quad (4)$$

حيث : $w^1 = w\sin l$

بفعل دوران الأرض يمكن تصور أن الحركة عبارة عن تدوير للمحاور من $oxyz \leftarrow ox^1y^1z^1$ بزاوية قدرها (w^1t) وعليه فان الإحداثيات الجديدة x^1, y^1 تعطى على النحو :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos w^1 t & \sin w^1 t \\ -\sin w^1 t & \cos w^1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

وعليه:

$$\begin{aligned} x &= x^1 \cos w^1 t + y^1 \sin w^1 t \\ y &= y^1 \cos w^1 t + x^1 \sin w^1 t \quad \ldots\ldots\ldots \ldots (6) \end{aligned}$$

نجد $x^{\bullet}, y^{\bullet}$ من معادلة (6) ثم نعوضها في معادلة (4) لنحصل على (مع إهمال الحدود المحتوية على $w^{1\,2}$ أو أكثر:

$$(x^{\bullet\bullet 1} + \frac{g}{l} x^1) \cos w^1 t + (y^{\bullet\bullet 1} + \frac{q}{l} y^1) \sin w^1 t = 0 \qquad (7)$$

حيث هذه المعادلة صحيحة لجميع القيم (t) فإن معادلات الجيب وجيب التمام يجب ان تكون صفراً وعليه:

$$x^{\bullet\bullet 1} + \frac{g}{l} x^1 = 0$$

$$y^{\bullet\bullet 1} + \frac{g}{l} y^1 = 0$$

تمثل هذه معادلات حركية لمتذبذب توافقي في بعدين ويكون المسار على شكل قطع ناقص ويكون قطر القطع الناقص يلف أو يغزل (precess) باتجاه عقارب الساعة فى نصف الكرة الشمالى وبسرعة زاوية $w^1 = w \sin l$ بالنسبة للمحاور الثانية $oxyz$

اذا سحب البندول جانباً ثم ترك ليتذبذب فإنه يعمل طوافاً (precession) فى اليوم بسرعة زاوية w^1 ويكون زمن الدورة =

$$\frac{2p}{w^1} = \frac{2p}{w \sin l}$$

$$= \frac{24 \ (hour)}{\sin l}$$

فإذا كانت زاوية خط العرض $45^0 = l$ فإن زمن الطواف = 34 hrs .

وبذلك اثبت فوكو أن الأرض تدور بسرعة w من طواف البندول.

تمارين الفصل الرابع

(4.1) نقل شاقول بناء فى قطار متحرك، فإذا كانت m تمثل كتلة كرة الشاقول جد الشد فى الخيط وانحرافه عن العمود الموضعى اذا كان

أ- يتحرك القطار بتعجيل ثابت $\vec{a}_0$ وباتجاه معلوم

ب-القطار يتحرك على منحنى نصف قطر r بانطلاق ثابت V_0

(ملاحظة اهمل التأثيرات الناتجة عن دوران الأرض).

(4.2) تزحف حشرة بانطلاق v فى مسار دائري نصف قطرها b على قرص يدور بسرعة زاوية (w) ثابتة . صف الحركة بالنسبة لمحاور مثبتة على القرص الدائر ثم جد التعجيل $\vec{A}$ للحشرة بالنسبة الى الخارج وقوة الاحتكاك المؤثرة على الحشرة فى الحالتين:

.1 $v = bw$ .2 $v = -bw$

(4.3) جد مقدار واتجاه القوة الكوريوليه المؤثرة على سيارة سباق كتلتها 1800 kg وتسير نحو الشمال 560 km/hr وفى خط عرض ° 45 شمالاً.

(4.4) سقط جسم من ارتفاع 100 m أين سيضرب الأرض ؟ افرض أن $l =$ °45 شمالاً

(4.5) نقل شاقول بناء في طائرة متحركة متجهة نحو الشرق بسرعة v جد الانحراف الزاوي لخيط الشاقول عن العمود الموضعي . ما يجب أن تكون سرعة الطائرة حتى يكون الانحراف مساوياً لدرجة واحدة . على فرض أن $l =$ °45 شمالاً.

(4.6) بين أن المعدل الزمني لتغير متجه $\vec{w}$ يكون نفسه في المحاور الثابتة أو الدائرة.

(4.7) أطلقت قذيفة شاقولياً بانطلاق v_0 فإذا اهملت مقاومة الهواء وكانت g = ثابتة أين تسقط القذيفة عندما تضرب الأرض؟

الفصل الخامس

القوى المركزية وميكانيكا الأجرام السماوية

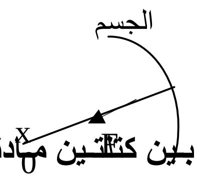
Chapter 5 الفصـــل الخامـــس

القوى المركزية وميكانيكا الأجرام السماوية

Central Forces & Celectial Mechanics

مقدمه:

؟ تعرف القوة المركزية بأنها كل قوة يمر خط تأثيرها (عملها) فى نقطة ثابتة أو مركز القوة مثل قوة جذب الأرض، القوة الكهروستاتيكية ، القوة بين الأقطاب المغناطيسية. وعادة تكون هذه القوى قوى محافظة.



(5.1) قـــانون الجـــذب العـام Low of gravity

؟ في عام ١٦٦٦م وضع نيوتن قانون الجذب بين كتلتين ماديتين على الصورة الرياضية:

$$\vec{F}_{ij} = G\,\frac{m_i\,m_j}{r_{ij}^2} \qquad \ldots\ldots\ldots. \quad (1)$$

حيث $= G$ **ثابت الجذب العام** $\approx (6.673 \pm 0.003)\times 10^{-11} \Leftarrow N.m^2/kg^2$

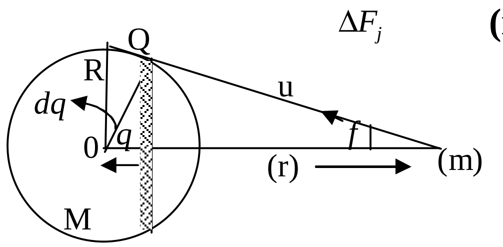
مع ملاحظة : أن قوة الجذب العام متبادلة بين الجسمين بمعنى $\vec{F} = -\vec{F}_{ji}$

(5.2) قــوة الجــذب بيــن جســيم وكـرة مــاديــة منتظمــة:

؟ نريد إثبات أن التجاذب بين جسيم (نقطة مادية) وكره مادية منتظمة تكون كما لو كانت كتلة الكرة متجمعة أو متمركزة في مركزها الهندسي (مركز نقل الكرة)

البرهـــان

نفرض أن جسيم كتلته (m) موضوع على بعد (r)



من مركز قشرة كروية كتلتها **(M)** ونصف قطرها **R** .

نقسم القشرة إلى حلقات دائرية عرضها $R(\Delta q)$ ويكون محيط الحلقة : $(2p\, R \sin q)$

$\therefore$ مساحة الحلقة = Δq $2\ p\ R^2\ \sin\ q$

نفرض ΔM = كتلة الحلقة ، r = كثافة مادة القشرة ، لذلك :

$$\Delta M \Leftarrow r\ \ 2p\, R^2\ \sin q\ \ \Delta q\ \ ....\ \ (1)$$

تطبيق قانون الجذب العام بين الحلقة والجسيم على افتراض ان **u** = المسافة بينهما

ولنفرض أن هذه القوة ΔF_j حيث :

$$\Delta\ F_j\ =\ \frac{G\,(m)\ \Delta M}{u^2}\ \ ....\ \ ......\ \ (2)$$

نحلل هذه القوة إلى مركبتين أفقية $(\Delta F_j)\cos f$ وعمودية $(\Delta F_j)\sin f$ بسبب وجود التماثل للقشرة الكروية فان المجموع الجبري لمركبات القوة العمودية = صفر لا يبقى إلا المركبات الأفقية.

$$\therefore\ \Delta F\ =\ \frac{G\ m\ \Delta M}{u^2}\ \cos\ f\ \ ....\ ....\ \ (3)$$

بالتعويض بدل ΔM من معادلة **(2)** نحصل على :

$$\Delta F\ =\ \frac{Gm\ \ 2p\ \ r\ R^2\ \sin q\ \cos f}{u^2}\ \ ....\ \ (4)$$

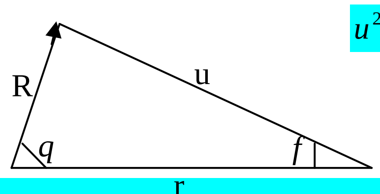
$$\therefore\ F\ =\ \int d\,F\ \ =\ \ Gm\, 2p\ r\ R^2 \int_0^p \frac{\sin q\ \ \cos f}{u^2}\ dq\ \ ....\ \ (5)$$

حيث $M\ ,\ f\ ,\ q$ ثلاثة متغيرات ، يلزم التعويض بالعلاقات التالية لحذفها من المثلث :

قانون جيوب التمام يعطي :

$$u^2\ =\ r^2\ +\ R^2\ -\ 2Rr\cos q\ \ ....$$

باشتقاق المعادلة بالنسبة لـ q :



$$2u\frac{du}{dq}\ =\ 0\ +\ 0\ +\ 2\ Rr\ \sin q\ dq\ \ ....\ ....\ ......\ \ (a)$$

وكذلك في المثلث نفسه فإن قانون جيوب التمام يعطى :

$$R^2 = u^2 + r^2 - 2ur\cos f$$

$$\therefore \cos f = \frac{u^2 + r^2 - R^2}{2\,u\,r} \qquad \text{..........} \; \text{.....} \qquad (b)$$

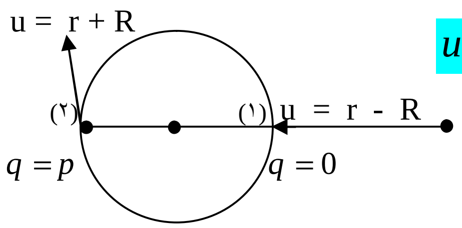
نستخدم المعادلات (a , b) مع معادلة (5) لنحصل على :

$$q = p \quad ; \quad u = r + R$$

$$F = \frac{G\,m\,M}{4\,R\,r^2}\int\left[1 + \left(\frac{r^2 - R^2}{u^2}\right)\right] d\,u \qquad \text{..........} \; \text{......}$$

$$q = 0$$

لاحظ حدود التكامل على (u) :



$$\boxed{u\; r - R \;\Leftarrow}$$

بين النقطتين (1) ، (2)

وكذلك $\boxed{M = 4p\,R^2\,r}$ استخدمت في المعادلة.

نتيجـــة التـــكامل نحـــصل :

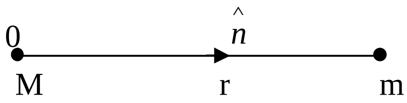
$$F = \frac{G\;m\;M}{4\;R\;r^2}\left[u - \left(\frac{r^2 - R^2}{u}\right)\right]_{r-R}^{r+R}$$

$$= \frac{G\,m\,M}{4\,R\,r^2}\left[r + R - \left(\frac{r^2 - R^2}{r + R}\right) - \left((r - R) - \frac{(r^2 - R^2)}{r - R}\right)\right]$$

$$= \frac{G\;m\;M}{4\;R\;r^2} \qquad (R)$$

$$F = \frac{G\;m\;M}{r^2} \qquad \text{..........} \; \text{.....}\; j \;.\; D$$

أما اتجاه القوة يكون باتجاه $\hat{n} =$ وحدة متجه من المركز (0) نحو الخارج الى الجسيم (m).



$$\hat{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\therefore \;\vec{F} = \frac{G\;\;m\;\;M}{r^2}\,\hat{n} \qquad \text{.........} \;\; \text{..}$$

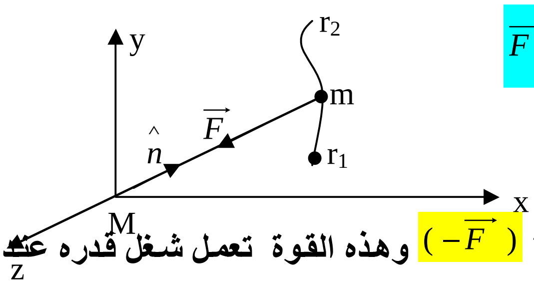
هذا يبرهن أن القشرة الكروية (أو الكرة المصمتة) عندما تتجاذب مع جسيم خارجها فإن المسافة بينهما تقاس من مركز القشرة (الكرة) وكأن كل مادة القشرة متواجده فى المركز الهندسي للقشرة.

(5.3) الطاقة الكامنة في مجال الجاذبية – جهد الجاذبية:

Potential Energy in Gravitational Field.

? عند تحريك جسيم كتلته (m) في مجال الجاذبية الارضية فإنه يلزم بذل شغل قدره (w) لتحريك هذا الجسيم ضد قوة الجاذبية الناتجة عن وجود جسيم آخر كتلته (M) حيث قوة الجاذبية بين الجسمين :

$$\vec{F} = -\frac{G\,m\,M}{r^2}\,\hat{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$



الإشارة (-) لأن القوة تجاذب .

وعليه يلزم بذل قوة مضاده قدرها $(-\vec{F})$ وهذه القوة تعمل شغل قدره عنه نقل الجسيم (m) من $r_2 \leftarrow r_1$:

$$dW = (-\vec{F}).d\vec{r}$$

$$= \frac{GmM}{r^2}\,\hat{n}.d\vec{r} = \frac{GmM}{r^2}\,dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$= dr$ مسقط $d\vec{r}$ في اتجاه (A) .

$$W = GmM\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -GmM\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

? تعريف : الطاقة الكامنة لجسيم عند نقطة معينة في مجال جاذبية جسيم آخر هي الشغل المبذول لتحريك هذا الجسيم من موضع إختبارى (مرجعي) وعادة يكون في الما لانهاية إلى تلك النقطة . أي تكون $r_1 = \infty$ من معادلة (3) :

$$W = V_{(r)} = --G\,m\,M\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$V_{(r)} = -\frac{G\,m\,M}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots \quad (4)$$

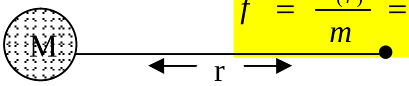
نفرض أن مقدار $GmM = k$ عند تناول المسائل بين الشمس (M) والأرض (m) لتسهيل كتابة المعادلات في حالة حركة الأجرام السماوية .

تصبح الطاقة الكامنة :

$$\therefore\ V = -K/r$$

? تعــريف : جهد الجاذبية : Gravitation Potential

مقدار الطاقة الكامنة عند نقطة ما لكل وحدة جسيم موضوعه عندها تسمى مجهد الجاذبية . فمثلاً جهد الجاذبية عند نقطة تبعد (r) عن جسيم كتلته (M) هي:



$$f = \frac{V_{(r)}}{m} = -\frac{G\,M}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots.\ (1)$$

حيث f = جهد الجاذبية.

? تعــريف : شدة مجال الجاذبية : مقدار القوة المؤثرة على جسيم كتلته الوحده موضوع فى مجال جاذبية جسيم آخر ويرمز له $(\vec{g})$ حيث :

$$\vec{g} = \vec{F}/m = -\frac{G\ M}{r^2}\,\hat{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ (2)$$

من مقارنة المعادلتين (1) مع (2) نلاحظ أن :

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\, f$$

أو $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ كما مّر شرحه في الفصل الثالث للعلاقة بين القوة وتحدر دالة الجهد .

(5.4) الطاقة الكامنة في مجال مركزي عام :

P . E in a general central field

حيث أن القوة المركزية هى دالة فقط لمتجه الموقع (r) أى أن :

$$\vec{F} = f(r)\,\hat{n}$$

وليس للقوة المركزية أي مركبة مماسية أن وعليــه فـإن كـل قـوة مركزيــة تكـون قـوة محافظة بمعنى أن :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

وعليه يصاحب هذه القوة دالة عددية هى دالة الطاقة الكامنة $V(r)$ والعلاقة بينهما على النحو :

$$V = -\int \vec{F}(r)\,.\,d\vec{r} = -\int f(r)\,dr$$

أو

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\,V(r) \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial r} = f(r)$$

(5.5) الزخم الزاوي في المجالات المركزية:

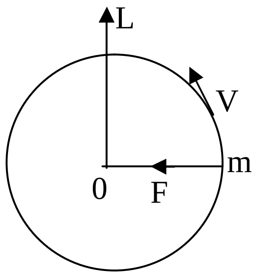
Angular Momentung in Central Fields

كما مّر وسبق شرحه فى الفصل الثالث وجدنا ان كميـة الحركـة الزاويـة لجسيم تعرف على الصورة :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

وان معادلة الحركة للجسيم فى الحركة الدورانية هى :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$



في حالة المجالات المركزية فإن $\vec{F} \parallel \vec{r}$ وعليه فإن :

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

وعليـه فـإن $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Leftarrow$ ثانيـاً = L أن الـزخم الـزاوي لجسيم يتحـرك فـي مجـال مركـزي دائماً يبقى ثابتاً اثناء الحركة (قانون حفظ الزخم الزاوي).

والصورة الرياضية للزخم الزاوي بدلالة الإحداثيات القطبية (r, q) هي :

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| \quad ; \quad \vec{v} = r^{\bullet}\hat{r} + rq^{\bullet}\hat{q}$$

$$\vec{r} = |r|\,\hat{r}$$

عند الضرب الاتجاهى نحصل على ما يلي:

$$(\text{صفر} = \hat{r} \times \hat{r})$$

$\hat{r} \times \hat{q} = \hat{k}$ (العمودي) على المستوى الذي يتحرك فيه الجسم وعليه فإن

$$\left|\vec{L}\right| = m r^2 q^{\bullet} \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = m r^2 q^{\bullet}\hat{k}$$

$q^{\bullet}$ = تمثل السرعة الزاوية (الدورانية) للجسم في المسار (w) ولذلك يمكن التعبير عن الزخم الزاوي:

$$\left|\vec{L}\right| = m\, r^2 w$$

تطبيق:

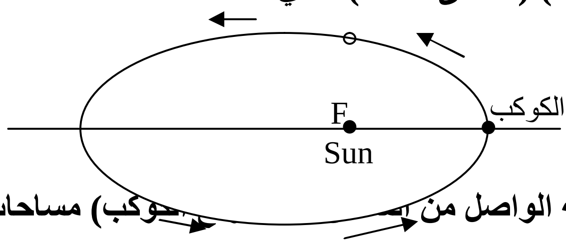
نلاحظ أن الأرض تدور (تتحرك) فى مجال الجاذبية للشمس وعليه فإن مقدار الزخم الزاوي للأرض يظل ثابتاً أثناء الحركة . وهذا المقدار له نفس القيمة منذ بدء الخليقة حتى يومنا هذا $\vec{L}$ له نفس المقدار والاتجاه.

وحتى يتغير $\vec{L}$ لابد من وجود قوة خارجية تؤثر على الأرض !!

(5.6) قوانين كبلر : Keplar Laws

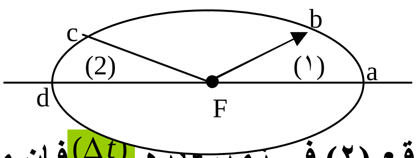
? في عام ١٦٠٩م وضع كبلر ثلاثة قوانين لوصف حركة الكواكب حول الشمس وعرفت باسم :

القانون الأول: يتحرك كل كوكب حول الشمس فى مدار مغلق على شكل قطع ناقص بحيث تكون الشمس فى بؤرته (Focuse) (كما فى الشكل) الآتي :



القانون الثاني :

يمسح متجه نصف القطر (المتجه الواصل من ... كوكب) مساحات متساوية فى أزمنة متساوية بمعنى مساحة القطاع (١) = مساحة القطاع (2) حيث الزمن الذى استغرقه الكوكب فى الانتقال من الموقع (a) ← الموقع (b) هو نفس الزمن لانتقاله من $(c) \leftarrow d$.



السرعة المساحية: Areal Veclocity

لنفرض ان كوكباً ما انتقل من الموقع (١) الى الموقع (٢) فى زمن قدره (Δt) فإن متجه الموقع يتغير من $\vec{r} \leftarrow \vec{r} + \Delta\vec{r}$ وتكون مساحة القطاع ≈ مساحة المثلث (012) = ΔA حيث:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \Delta\vec{r}\right|$$

بأخذ المعدل الزمنى للتغير فى المساحة نحصل على :

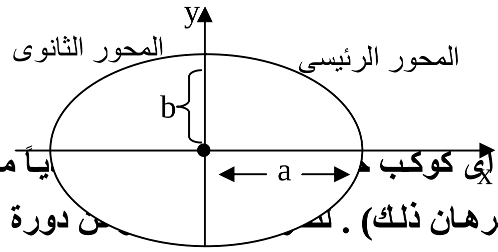
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \dot{r}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}\right| \quad .... \quad (1)$$

بضرب وقسمة معادلة (١) على m

$$\therefore \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times m\vec{v}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = \frac{\vec{L}}{2m}$$

حيث $\left|\vec{L}\right| =$ مقدار ثابت ، فان السرعة المساحية = $\frac{dA}{dt} =$ ثابت في المجال المركزي.
وهذا يبرهن صحة القانون الثاني لكلبر وهو أن المعدل الزمني لتغير المساحة ثابت.
القانون الثالث:



مربع زمن دورة أي كوكب ... ياً مع مكعب. طول المحور الرئيسى للمدار (سيأتي برهان ذلك) . لك... ن دورة الكوكب حول الشمس ، a نصف طول المحور الرئيسي للمدار.

فإن :
$$t^2 \propto a^3$$

ملاحــظة : معادلة القطع الناقص في الإحداثيات الديكارتية:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$$

ثم جاء بعد كبلر العالم نيوتن الذي أوضح أن قوانين كبلر هي من نتاج قانون الجذب العام المعروف باسمه.

(5.7) معـــادلة مــــدار الكوكــب فــي مجـــال مركزي :

Orbital Equation of a planet in a central field

حيث أن معادلة اى جسيم كتلته (m) تحت تأثير قوة مركزية $f(r)$ هي :

$$m\vec{a}_r = f(r)\,\hat{r} \quad .... \quad (1)$$

حيث $a_r=$ مركبة التعجيل الشعاعية $\Leftarrow$ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

تصبح معادلة (١) على النحو:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad .... \quad (2)$$

حيث أن المجال مركزي فإن $f(0) = 0$ (لا يوجد اعتماد على θ) وعليه فان مركبة التعجيل الزاوية (المماسية) $a_\theta =$ صفر ومعادلة الحركة في هذا الاتجاه هي:

$$ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad .... \quad (3)$$

حيث من قوانين المشتقات فإن :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{q}) = (r\ddot{q} + 2\dot{r}\dot{q})\,r$$

لذا معادلة (٣) تصبح على صورة بعد ضرب طرفيها في (r) وقسمة الطرفين على (m) هي:

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{q}$$ = ثابت

نفرض ثابت = $r^2\dot{q} = h$ ، مع ملاحظة أن $L = mr^2\dot{q}$ الإحداثيات القطبية فإن

$h = \frac{L}{m} \Leftarrow$ كمية الزخم الزاوي لكل وحده كتل.

لإيجاد متجه الموقع للجسيم $r(t)$: نستخدم معادلة (2) مع استبدال (r) بمتغير جديد هو u

حيث $u = \frac{1}{r}$ وعليه فإن :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{u}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dq}\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{q}\frac{du}{dq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

حيث $h = \frac{\dot{q}}{u^2}$

$$\therefore \dot{r} = -h\frac{du}{dq} \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

أما $\dot{q} = hu^2$

ثم نشتق معادلة (5) بالنسبة للزمن مرة أخرى للحصول على المشتقة الثانية:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = -h\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dq}\right) = -h\frac{d}{dq}\left(\frac{du}{dq}\right)\frac{dq}{dt}$$

$$= -h\dot{q}\frac{d^2u}{dq^2} = -h^2u^2\frac{d^2u}{dq^2}$$

$$\therefore \ddot{r} = -h^2u^2\frac{d^2u}{dq^2}$$

نعوض بدل $\dot{q}\ ,\ r\ ,\ \ddot{r}$ في معادلة الحركة للجسيم لنحصل على بعد ترتيب الحدود والاختصار :

$$m\left[-h^2u^2\,\frac{d^2u}{dq^2}-\frac{1}{u}(hu^2)^2\right]=f(1/u)\;-\;mh^2u^2\left[\frac{d^2u}{dq^2}+u\right]\quad f(1/u)$$

$$\therefore\ \frac{d^2u}{dq^2}+u=-\frac{f(1/u)}{mh^2u^2}\qquad \text{.......... ....}\ (5)$$

هذه معادلة المدار التفاضلية لجسيم يتحرك في مجال قوة مركزية بدلالة $q\ ,\ u$.

(5.8) معـــادلـــة الطاقـــة للمـــدار :

Energy Equation of orbit

حيث أن السرعة في الإحداثيات القطبية تعطى بالعلاقة:

$$\vec{v}=r^{\bullet}\hat{r}+rq^{\bullet}\hat{q}\qquad\Rightarrow\qquad v^2=\vec{v}.\vec{v}$$

$$v^2=r^{\bullet 2}+(rq^{\bullet})^2\qquad \text{.......... ..}\ (1)$$

لنفرض أن دالة طاقة الوضع عند موقع ما على المدار $V(r)$ **لذلك قانون حفظ الطاقة هو :**

$$\frac{1}{2}mv^2+V(r)=E_0=\text{ثابت}$$

$$\frac{1}{2}m\left[r^{\bullet 2}+(rq^{\bullet})^2\right]+V(r)=E_0\ \text{................}(2)$$

بالتعويض بدل :

$$q^{\bullet}=hu^2\ ,\quad -h\frac{du}{dq}=r^{\bullet}$$

في المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{1}{2}mh^2\left[\left(\frac{du}{dq}\right)^2+u^2\right]+V(1/u)=E_0\qquad \text{................}\ (3)$$

معادلة (3) هي معادلة طاقة المدار وهى معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى للمتغير u مع q

(لاحظ الفرق بين معادلة المدار ومعادلة طاقة المدار).

مثـــال(3) : في المثال (١) اكتب معادلة طاقة المدار ثم جد دالة القوة من المعادلة ؟

الحـــل

حيث:

$$r=cq^2\ \Rightarrow\ u=\frac{1}{c}q^{-2}\ \Rightarrow\ \frac{du}{dq}=\frac{-2}{c}q^{-3}$$

$$q=\left(\frac{1}{cu}\right)^{1/2}$$

تكتب المشتقة بدل (u) : حيث

$$\therefore \frac{du}{dq} = \frac{-2}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1/cu}}\right]^{+3} = \frac{-2}{c}\, c^{+3/2} . u^{+3/2}$$

$$= -2\, c^{1/2} \quad u^{3/2}$$

معـادلـة الطاقـة:

$$\therefore \frac{1}{2}\, m\, h^2 \left[\, 4\, c\, u^3 \quad + \quad u^2 \right] \quad + \quad V(1/u) \quad = \quad E_0 \qquad ....\,......$$

من هذه المعادلة نجد دالة الطاقة الكامنة :

$$V(1/u) \quad = \quad E_0 \quad - \quad \frac{1}{2} m\, h^2 \left[4\, c\, u^3 \quad + \quad u^2\right]$$

$$V(r) \quad = \quad E_0 \quad - \quad \frac{1}{2} \; m\, h^2 \left[\frac{4\, c}{r^3} \quad + \quad \frac{1}{r^2}\right]$$

$$\therefore \; f(r) \; = -\frac{\partial v}{\partial r} \; = \; 0 \; - \frac{1}{2}\, m\, h^2 \left[-\frac{12\, c}{r^4} \quad - \quad \frac{2}{r^3}\right] \; ....$$

(5.9) المـــدارات فـــي مجـــال التربيـــع العكســـي:

Orbits in Inverse Square Law

هنا نتناول اشتقاق معادلة المدار بدلالة الإحداثيات القطبية $(\, r \;\, , q\,)$ حيث الجسيم يتحرك في مجال تربيع عكسي تجاذبي حيث أن القوة تعطى بالعلاقة:

$$F(r) \; = -\, k / r^2 \qquad .... \quad (1)$$

حيث في مجال الجاذبية الأرضية $k \; = \; G \;\, M \;\, m$

المعادلة التفاضلية للمدار بدلالة $(\, q \;\, , \, u\,)$ **هي :**

$$\frac{d^2 u}{d q^2} \quad + \quad u \quad = \quad - \quad \frac{1}{m\, h^2\, u^2} \quad (-\, k\, u^2) \quad = \quad \frac{k}{m\, h^2} \qquad ...... \quad (2)$$

معـادلـة (٢) : معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية غير متجانسة لها حل عام يعطى بالعلاقة:

$$u \; = \; A\cos(q \; - q_0) \quad + \quad \frac{k}{m\, h^2} \qquad .... \; (3)$$

(حل المعادلة المتجانسة) **(الحل المكمل)**

وبدلالة (r) :

$$r = \frac{1}{A\cos(q - q_0) + k/mh^2} \quad \text{.......... ....} \quad (4)$$

حيث الثوابت A ، q_0 تحدد من الشروط الابتدائية للحركة عند (t = 0) كما ورد في الفصل الثالث في حركة المتذبذب التوافقي . لنفرض q_0 = صفر عليه يصبح معادلة المدار القطبية :

$$r = \frac{1}{A\cos q + k/mh^2} \quad \text{..........} \quad (5)$$

هذه معادلة قطع مخروطي (conic section) [ناقص ، مكافئ ، زائد] مع وجود نقطة الأصل في البؤرة . ويمكن تحويل هذه المعادلة إلى الصورة القياسية (Standard) على النحو التالي:

$$r = \frac{1}{(k/h^2m)\left[1 + \frac{Ah^2m}{k}\cos q\right]}$$

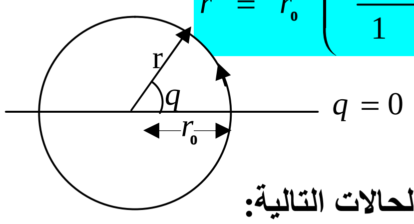
لنفرض أن : الاختلاف المركزي $e = Amh^2/k \Rightarrow$

$$\therefore \; r = \frac{mh^2/k}{[1 + e\cos q]} \quad \text{.......... ....} \quad (6)$$

عند: $q = 0$ $\qquad r_0 = r = \dfrac{mh^2/k}{(1+e)}$

تصبح معادلة (6) بالصورة القياسية هي :

$$r = r_0\left(\frac{1+e}{1+e\cos q}\right) \quad \text{.......... ..} \quad (7)$$



حيث في حالة القطع الناقص:

يصنف المدار حسب مقدار الاختلاف المركزي e وهناك الحالات التالية:

١- يكون المدار دائري عندما $e = 0$ حيث تصبح معادلة (7) على صورة ثابت = $r = r_0$ وهذه معادلة الدائرة .

٢- يكون المدار قطع مكافئ Parabola إذا كانت متمة 1 = e وعليه فان:

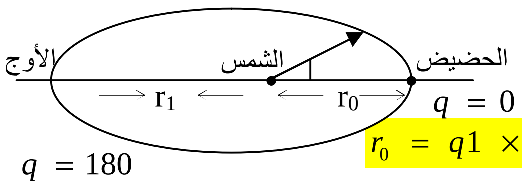
$$r = \frac{2\, r_0}{1 + \cos\, q}$$

٣- يكون المدار قطع ناقص (بيضاوي) مغلق إذا كانت $e < 1$ ويكون المدار قطع زائد (hyperbola) إذا كانت e > 1

في حالة الكواكب (حسب قوانين كبلر) فإن المدار يكون قطع ناقص . عندما يكون الكوكب في اقرب موقع من الشمس $(r = r_0)$ يسمى هذا الموقع بالحضيض الشمسي هذا الموقع يسمى بالأوج الشمسي (aphelim) ويكون البعد $(r = r_1)$ حيث $q = 180^o \Leftarrow$ $-1 = \cos / 80$ وعليه من معادلة (7) نجد :

$$r_1 = r_0 \frac{(1 + e)}{1 - e} \quad .... \quad ..... \quad (8)$$

مدار الكوكب حول الشمس:



القياسات لمدار الأرض حول الشمس هي :

$e = 0.017$ ، وأن $r_0 = q1 \times 10^6\ miles$

$$r_1 = q5 \times 10^6\ miles$$

معادلة المدار بدلالة السرعة : [البراميترات المدارية Parameter] حيث وجدنا أن:

$$r_0 = \frac{m\, h^2}{k\,(1 + e)}$$

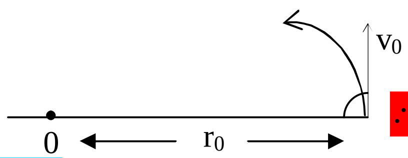
فإن حل هذه المعادلة في (٢) يعطي :

$$e = \frac{m\, h^2}{k\, r_0} - 1$$

لنفرض أن جسماً انطلق بسرعة ابتدائية v_0 عند $q = 0$ (كما في الشكل) فإن قانون حفظ الزخم الزاوي يؤول إلى :

$h = r^2 \dot{q} = r_0^2 \dot{q}_0^2 =$ ثابت

حيث $\dot{q}_0\ \ w = v_0 / r_0$



$\therefore h = r_0 v_0$ = ثابت

? اى انه عند الأوج وعند الحضيض فإن h = ثابت وعليه $r_1 v_1 = r_0 v_0$

$$\therefore\ e = \frac{m\, r_0 v_0^2}{k} - 1 \quad ....\ ... \quad (1)$$

إذا فرضنا أن المدار دائري فإن : $\Leftarrow\ e = 0$

$$k = m\, r_0 v_0^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{r_0} = m\, v_0^2 \quad ....\ .... \quad (2)$$

$$\therefore\ \frac{k}{r_0^2} = \frac{m\, v_0^2}{r_0}$$

" القــوة المركــزيــة "

لنفرض أن v_2 = السرعة اللازمة ليكون المدار دائري " تكون السرعة ثابتة أثناء الحركة = السرعة الابتدائية " $\Leftarrow$

(5.10) الطـاقات المــداريــة فــي مجــال التربيــع العكســي:

هنا نحاول إيجاد معادلة المدار بدلالة الطاقة الكلية للكوكب المتحرك في مجال التربيع العكسي حيث :

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -k\,u \quad .... \quad (1)$$

وعليه تصبح معادلة طاقة المدار :

$$\frac{1}{2} m\, h^2 \left[\left(\frac{d\,u}{d\,q} \right)^2 + u^2 \right] - k\,u = E \quad ....\ .. \quad (2)$$

عند فرز المتغيرات في معادلة (2) على النحو .

$$dq = \left[\frac{2\,E}{m\,h^2} + \frac{2\,k\,u}{m\,h^2} - u^2 \right]^{-1/2} d\,u \quad ....\ .. \quad (3)$$

بإجراء التكامل على طرفي معادلة (3) مع استخدام العلاقة الرياضية :

$$\left[\int \frac{d\ x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} \right]$$

بعد إجراء إكمال المربع للمقدار تحت الجذر نحصل على :

$$q = \sin^{-1}\left(\frac{m h^2 u - k}{\sqrt{k^2 + 2\,Em/h^2}}\right) + q_0 \quad ....\ (4)$$

q_0= ثابت التكامل ، نفرض أن $q_0 = -p/2$ نحصل على :

$$\sin\ (q + p/2) = \frac{m h^2 u - k}{\sqrt{k^2 + 2\,m\,E/h^2}}$$

$$\cos\ q = \frac{m h^2 u - k}{\left[k^2 + 2\,m\,E/h^2\right]^{1/2}} \quad ....\quad (5)$$

بحل معادلة (5) في **u** نحصل على :

$$u = \frac{k}{m h^2}\left[1 + \left(1 + 2 m h^2\ E/k^2\right)^{1/2}\ \cos q\right] ....\ (6)$$

أو بدلالة (**r**) حيث $u = \frac{1}{r}$ فإن

$$r = \frac{m h^2/k}{1 + (1 + 2\,Em\ h^2 k^{-2})^{1/2}\ \cos q} \quad ....\ (7)$$

معادلة (5) هي الصورة الرياضية لقانون كبلر الثالث : أي أن تربيع طرفي المعادلة نحصل على :

$$p^2\ \ a\ \ a^3$$

$$c = 2p\sqrt{\frac{m}{k}}$$

أما الثابت $\Leftarrow c$

ثابت = $c = 2p\sqrt{\frac{m}{G\ m\ M}} = \frac{2p}{\sqrt{G\ M}}$

يعتمد على **G** = ثابت الجذب العام ، **M** : كتلة الشمس في حالة دوران الأرض حولها في حالة مدار الأرض حول الشمس فإن القياسات الفلكية لـ **a** هي :

اعتبرت هذه الكمية وحدة فلكية : $a = q\,3 \times 10^6\ mile \Rightarrow$

تقدر مسافات باقي الكواكب عن الشمس بدلالة هذه الوحدة الفلكية فمثلاً نقول أن كوكب عطارد له مدار من حيث $a = 0.387$ وحدة فلكية ، وكذلك كوكب المريخ له مدار حيث بعده عن الشمس بدلالة الوحدة الفلكية **a = 1.524** وهكذا كما أن زمن دورة الأرض حول الشمس

اعتبرت في القياسات الفلكية هي السنة المعيارية فمثلاً نقول أن سنة عطارد تعادل 0.241 من سنة الأرض.

يمكن الحصول من قانون كبلر الثالث على علاقة مقارنة بين (a , p) : للكواكب السماوية على النحو :

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{a_1^{3/2}}{a_2^{3/2}}$$

(5.12) الحركــة فــي مجــال التربيع العكسي التنافرى – تشتت الجسيمات الذرية:

Motion in an inverse - square Repulsive field - Scaltering of atomic particles :

؟ حيث أن القوة بين الشحنات المتشابه تكون تنافريه وتتبع قانون التربيع العكسي فمثلا عند قذف جسيمات ألفا $\alpha -$ " ذات الشحنات الموجبة " بنواة الذهب (Au) الموجبة الشحنة كما فى تجربة رذرفورد فى عام ١٩١١ فان الملاحظ أن مسار جسيم α ينحرف عند الاقتراب من مجال النواة نريد إيجاد معادلة المسار فى حالة الحركة في مجال التربيع العكسي التنافرى " تجارب التشتت " " scattering "

؟ نفرض أن جسيم شحنته (ح) وكتلتـه (m) انطلق بسرعة v_0 نحو مجال نـواة شحنتها (Q) عند النقطة (O) تكون القوة بين الجسمين فى وحدات

$$F = k\frac{Q\,q}{r^2} \quad .... \quad (k = 1) \quad (cgs)$$ (قانون كولوم)

فى وحدات
$$k = \frac{1}{4p\,E_0} \Leftarrow MKs$$

تصبح معادلة المدار على النحو :

$$\frac{d^2u}{dq^2} + u = \frac{-k\,Q\,q}{m\,h^2} \quad .... \quad .... \quad (1)$$

ويكون حل المعادلة (١) على :

$$r = \frac{1}{A\cos(q - q_0) \quad k\,Q\,q\,/\,m\,h^2} \quad .... \quad ...... \quad (2)$$

ويمكن كتابة معادلة (2) على صورة معادلة الطاقة (بدلالة E) على النحو :

$$r = \frac{m\,h^2\,/\,Q\,q\,k}{\left[1 + 2E\,m\,h^2\,/\,(k\,Q\,q)^2\right]^{1/2}\cos(q - q_0) \quad - 1} \quad .... \quad (3)$$

حيث أن الطاقة الكلية E تعطى بدلالة الطاقة الحركية ودالة الجهد:

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 + \left(\frac{k\,Q\,2}{r}\right) > 0$$ (كمية موجبة)

وعليـــه :

يكون المدار قطع زائد (hypesbola) ويقترب الجسم (q) من خطوط المقاربة كما في الشكل نلاحظ من الشكل أن :

$r = r_{min}$) أصـغر قيمـة (عنـدما تكـون $\cos(q - q_0) = 1$ أو $= q - q_0$ صـفر

$\Leftarrow \quad q = q_0$

لنفرض أن زاوية انحراف مسار الجسم = f " الزاوية بين خط الاقتراب وخط الابتعاد عن النواة " فإن من الشكل $f = p - 2q_0$ باستخدام الشرط : $r \to \infty$ إذا كان المقام في المعادلة (3) = الصفر نحصل على:

$$\left[1 + 2Emh^2/(kQq)^2\right]^{1/2} \cos q_0 = 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

$$\cos q_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2Emh^2/(kQq)^2}}$$

من العلاقات المثلثية لـ q_0 نجد ان :

$$\tan q_0 = \sqrt{2mE}\,h / kQq$$

حـيث :

$$q_0 = \frac{p}{2} - \frac{f}{2}$$ فإن $$\tan q_0 = \cot(f/2)$$

$$\therefore \cot(f/2) = \sqrt{2mE}\;\; h/kQq \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

معادلة (5) تعطى مقدار انحراف أو تشتت الجسيم مثل (a) عن النواة وهذا ما نهتم به عند دراسة تجارب التشتت ولكن يجب تحديد مقدار **h** بدلالة كمية يمكن قياسها في المعمل وهو ما يعرف سمة التصادم " براميتر التصادم" **Impact parameter** ونرمز لـه بالرمز **(p)** ويقاس بمقدار المسافة العمودية بين نقطة الأصل " مركز التشتت " والخط الابتدائي لحركة الجسيم الساقط.

حيث : $h = \left|\vec{r} \times \vec{v}\right| = p\,v_0 \;\ldots\ldots\ldots\;.$ إذا كانت الطاقة الكلية للجسم الساقط

B = (المقذوف)

فإن $v_0 = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$ تصبح معادلة (5) على النحو :

$$\cot\ (f/2) = \frac{p\,m\,v_0^2}{k\,Q\,q} = \frac{2\,p\,E}{k\,Q\,q} \qquad \ldots\ldots\ldots.\ .. \quad (6)$$

مثال: اكتب $r_{\min}$ بدلالة زاوية الانحراف f ؟

الحــل

نستخدم معادلة (3) مع التعويض $1 = \cos(q - q_0)$ وعليه فإن :

$$r_{\min} = \frac{m\,h^2/k\,Q\,q}{\left(1 + \dfrac{2\,E\,m\,h^2}{(k\,Q\,q)^2}\right)^{1/2} - 1}$$

من معادلة (6) نجد أن :

$$\frac{1}{k\ Q\ q} = \frac{\cot\ (f\ /2\ )}{2\ p\ E}$$

$$h^2 = p^2 v_0^2 \ \Rightarrow\ m\,h^2 = (m\,v_0^2)\,p^2 = 2E\,p^2$$

نعوض فى معادلة $r_{\min}$ بهذه الكميات :

$$\therefore\ r_{\min} = 2\,p^2 E\ \ \cot\ (f/2)/2\,p\,E$$

$$\left[1 + \frac{2E\,.2\,p^2 E\ (\cot^2\ f/2\ )}{(2\,p\,E\,)^2}\right]^{1/2} - 1$$

بالاختصار نحصل على :

$$r_{\min} = \frac{p\ \cot\ (f\ /2\,)}{(1 + \cot^2\ f\ /2)^{1/2} - 1}$$

حيث $\cot\ f/2 = \dfrac{\cos\ f/2}{\sin\ f/2}$ **نعوض في المعادلة الأخيرة لنحصل على :**

$$r_{\min} = \frac{p\ \ \cos\ f/2\ /\ \sin\ f/2}{(1/\sin\ f/2\ ) - 1} = \frac{p\ \cos\ f/2}{1 - \sin\ f/2}$$

$$\therefore\ r_{\min} = \frac{p\ \cos\ f/2}{1 - \sin\ f/2} \qquad \ldots\ldots\ldots.\ \ \ldots\ldots$$

يمكن الاعتماد على هذه النتيجة لحل المسائل حيث إذا علمت زاوية الانحراف ، ومقدار معامل التصادم (سمة التصادم).

مثـــال: ينبعث جسيم a من العنصر المشع الراديوم بطاقة 5 Mev فإذا وجد انـه إذا قذف جسيم a مع نواة الذهب (z = 79) فإنه ينحرف بزاوية 90^{o} جد قيمة برميتر (سمة) التصادم وكذلك أدنى اقتراب نحو النواة $r_{\min}$ ؟

الحـــل

$$Q = 7q \times 1.6\times 10^{-19} c \quad , \quad q = 2 \times 1.6 \times 10^{-19} cou1$$

$$k = q \times 10^{9} \quad ;$$

$$E = 5 \times 10^{6} \times 1.6 \times 10^{-19}$$

$$\therefore\ p = \frac{k\ Q\ q}{2\ E} = \frac{(q \times 10^{9})(7q \times 2)(1.6 \times 10^{-19})}{(2)(5)\times(1.6 \times 10^{-19}} = 2.1 \times 10^{-14} m$$

$$r_{\min} = \frac{p \cos f/2}{1 - \sin f/2} = \frac{(2.1 \times 10^{-14} m) \cos 45}{1 - \sin 45^{o}}$$

$$= 5.1 \times 10^{-14} m = 2.4/p$$

" قارن هذه الكميات مع نصغ قطر النواة " !! نصف القطر للنواة $2 \times 10^{-14} m$ إذا صوّب الجسم الساقط نحو النواة مباشره أي نجعل p = 0 ، فإن h = 0 فان الجسيم يصل إلى مسافة $r_{\min}$ لتصبح سرعته عند تلك النقطة = صفر ثم يعود أدراجه بفعل قوة التنافر مع النواة يمكن حساب $r_{\min}$ من معادلة الطاقة:

$$E = \frac{1}{2} m v_{o}^{2} + \frac{k\ Q\ q}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m v_{o}^{2} + 0$$

لأن الطاقة الكامنة = صفر عند $r = \infty$ وعليه فإن :

$$\frac{k\ Q\ q}{r_{\min}} = \frac{1}{2} m v_{o}^{2} \quad \Rightarrow$$

$$r_{\min} = \frac{2\ k\ Q\ q}{m\ v_{o}^{2}} = \frac{k\ Q\ q}{2\ E_{o}}$$

تمـــارين الفصــل الخـــامـــس

(5.1) أثبت أن قوة الجاذبية على جسم داخل قشرة كروية رقيقة = صفر بطريقة :

أ- إيجاد القوة مباشرة ب- البرهنة على أن جهد الجاذبية = ثابت

(5.2) جد قانون القوة على كوكب إذا كانت المجموعة الشمسية مغمورة في غبار سحابي منتظم كثافته .

(5.3) جد جهد الجاذبية والقوة على الجسيم أحادى الكتلة موضوع على محور حلقة نصف قطرها a وكثافتها M إذا كان جسيم الاختبار على مسافة (r) من مركز الحلقة ؟

(5.4) يتحرك جسيم في مجال مركزي بالمدار الحلزوني $r = a e^{kq}$ **جد قانون القوة ثم جد كيف تتغير** q **مع الزمن t ؟**

(5.5) إذا كان مدار جسيم دائري ويقع مركز القوة على محيط الدائرة . فما هو قانون القوة $F(r)$**؟**

(5.6) إذا تحرك جسيم في المدار الحلزوني : $r = aq^3$ **وكانت** $q = ct^3$ **هل يكون مجال القوة مركزياً:**

(5.7) يتحرك قمر صاروخي بالقرب من الأرض مبتدئاً بمدار دائري إذا أردنا وضع القمر في مدار جديد له مسافة أوج = نصف قطر مدار القمر حول الأرض (2400,000 mile) .

أ- احسب نسبة الانطلاق الجديد إلى انطلاقه في المدار الدائري علماً بان نصف قطر المدار الدائري 4000 mile .

ب-احسب بعد نقطة الأوج الجديدة إذا كانت نسبة الانطلاق 0.99 من القيمة المحسوبة أعلاه.

(5.8) إذا كان المحور الرئيسي لمدار مذنب بيضاوي = 100 وحده فلكيه :

أ- ما هو زمن الدورة.

ب- إذا كان بعده عن الشمس = 0.5 وحدة فلكية في الحضيض الشمس فما مقدار الاختلاف المركزي للمدار؟

ج-ما هو انطلاق المذنب فى الحضيض الشمس والأوج ؟

(5.9) يسير مذنب في مدار على شكل قطع مكافئ واقع في مستوى مدار الأرض فإذا فرضنا أن مدار الأرض دائري الشكل نصف قطره a اثبت أن النقاط التي يقطع فيها المذنب مدار الأرض هي:

$$\cos q = -1 + \frac{2p}{a}$$

حيث p = مسافة الحضيض الشمسي للمذنب عند $q = 0$ **.**

(5.10) يتحرك جسيم بمدار قطع ناقص في مجال التربيع العكسي للقوة . برهن أن حاصل ضرب انطلاقي النهاية العظمى والصغرى يساوى $\left(\frac{2p a}{p}\right)^2$ **حيث a = نصف المحور الرئيسي ،** t **= زمن الدورة.**

(5.11) برهن أن المعادلة التفاضلية القطبية لحركة جسيم في مجال مركزي (معادلة الطاقة لمداره هي نفس معادلة حركة جسيم يتحرك في خط مستقيم تحت تأثير جهد فعلى $U(r)$ **حيث**

$$U(r) = V(r) + \frac{mh^2}{2r^2}$$

ارسم خطاً بيانياً للجهد $U(r)$ عندما تكون $V(r) = \frac{-k}{r}$
وبرهن أن حالة المدار الدائري مستقرة في مثل هذه الحالة من الجهد.

الفصل السادس
النظرية النسبية الخاصة

الفصــل الســادس
النظرية النسبية الخاصة Special Theory of Relativity

مقـدمـة:

? نـشر البرت انيشتين النظرية النسبية الخاصة في أوائل القرن العشرين والتي ساهمت في تفسير بعض الظواهر الفيزيائية الذرية والنووية والتي لا يمكن تفسيرها من خلال

الفيزياء الكلاسيكية ، وقد عمت هذه النظرية حول مفهوم الفضاء – الزمان Space – time والمادة والطاقة والعلاقة بينهما.

? ولقد عرفت النسبية من زمن جاليلى ونيوتن وعرفت باسم الكلاسيكية وهى تتعلق بمبادلات تحويل جاليلى أو معادلات تحويل نيوتن وقد حدث تعارض بين هذه النظرية والنظرية الكهرومغناطيسية التي وضعت على يد ماكسويل عام ١٨٦٤م حتى تمكن اينشتين من إزالة هذا التناقض عندما وضع أسس النظرية النسبية الخاصة عام ١٩٠٥م

(6.1) تحـــويل جاليــــلى : The Galilean Transformation

? لتحديد موقع جسم متحرك في اى لحظة يستخدم عادة نظام أو جملة إحداثيات (coordinate system) وفى حالة الحركة في الفضاء نستخدم الإحداثيات الثلاثة المتعامدة (x,y,z) وعند الاهتمام بالحركة لابد من تحديد الزمان وعليه يوصف موضع الجسم المتحرك بالإحداثيات الرباعية (x,y,z,t) ويسمى هذا النظام بـ نظام أو جملة الإسناد (Frame of Reference).

تعـــريـــف:

إذا كان نظام الإسناد متحرك بسرعة منتظمة (ثابتة) وغير متسارعة فإنها تعرف بنظام الإسناد القصورى (إسناد العطالة أو الخماله). Inertial frame of Reference.

يمكن اعتبار الأرض (إهمال التسارع الناتج عن دورانها) كنظام إسناد قصوري ، وتكون جميع قوانين نيوتن في الحركة صحيحة في هذا النظام.

معـادلات تحــويـل جـاليـلى:

لنفرض أن النظام (s) التي يمكن وصف الأحداث فيها من خلال الإحداثيات (x,y,z,t) ونظام الإسناد (s).

والتي يمكن وصف الأحداث فيه بالإحداثيات (x,y,z,t) متحرك بسرعة ثابتة (v) بالاتجاه الموجب لمحور x لنفرض أن المراقبين الموجودين فى النظامين قد ضبط ساعتيهما بحيث أنهما بدأ بقياس الزمن عندما كانت نقطة الأصل o منطبقة على (o) ولنفرض حدث انفجار عند A عند الزمن (t) لذلك فإن الاحداثى السيني الذي يقيسه المراقب في (s) ⇐ x والاحداثى السيني الذي يقيسه المراقب في f(s) ⇐ x فإن العلاقة بينهما هي :

$$x = x^1 + vt \quad .... \quad (1)$$

أو

$$x^1 = x - vt \quad ....$$

بينما باقي الإحداثيات تبقى على نفس الصورة :

$$y^1 = y \; ; \; z^1 = z$$

وذلك لعدم وجود حركة نسبية في اتجاه المحورين

وإذا قاس المراقبات ذلك الانفجار في آن واحد ، افترض جاليلى أنهما يحصلان على نفس الزمن (لأنه افترض أن الزمن مطلق ولا يعتمد على الحركة النسبية بين المراقبين ولذلك

$t = t^1$ ....

والمعادلات السابقة تعرف باسم تحويلات جاليلى وتعرف أحيانا بتحويلات العالم الانجليزي (نيوتن) و هى تعطى تحويل القياسات في النظامين (s^1 , s)

أما تحويلات مركبات السرعة في نظامي الإسناد نحصل عليها بالاشتقاق المباشر للمعادلات كالآتي:

$$v_x^1 = \frac{d\,x^1}{d\,t^o} = \frac{d\,x}{d\,t} - v$$

$$\left.\begin{aligned} v_x^1 &= v_x - v \quad \text{..................} \\ v_y^1 &= v_y \\ v_z^1 &= v_z \end{aligned}\right\} (2)$$

تعتبر هذه المعادلات أساس النظرية النسبية الكلاسيكية وتكون جميع قوانين الميكانيكا لها نفس الصيغة في نظم الإسناد :

مثال ١ : جسيمان كتلتهما $m_2 \ , \ m_1$ وسرعة الأول $v_2 \ , \ v_1$ فى نظام الإسناد (s) استخدم تحويل جاليلى لبيان أن كمية حركتهما ثابتة في نظام الإسناد (s^1)؟ اذا كان s^1 يتحرك بسرعة v ثابتة بالنسبة للنظام s ؟

الحــل

كمية الحركة في النظام $s \ \Leftarrow$ (ثابت) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = A$

لنفرض سرعتي الجسمين في النظام (S^1) هما $v_2^1 \ , \ v_1^1$

باستخدام تحويل جاليلى:

$$v_1^1 = v_1 - v \qquad , \qquad v_2^1 = v_2 - v$$

بالتعويض فى المعادلة الأولى :

$$m_1 (v_1^1 + v) + m_2 (v_2^1 + v) A$$

$$\therefore m_1 v_1^1 + m_2 v_2^1 = A - v (m_1 + m_2)$$

وحيث v = كمية ثابتة ، $v(m_2 + m_1)$ كمية ثابتة ، **A** ثابت فانه :

$m_1 v_1^1 + m_2 v_2^1 =$ ثابت ....

أما إذا كانت v غير ثابتة يكون النظام (s^1) متسارع (وليس نظام إسناد وقصوري) ولا تصبح هذه العلاقة صحيحة (كمية الحركة في النظام $s^1 \neq$ ثابت) .

مثـال ٢ : برهن أن قانون حفظ الطاقة تحقق تحويل جاليلى وله نفس الصورة الرياضية فى جميع نظم الإسناد القصورية (العطاله)

الحــل

نفرض أن:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = B$$

وبالتعويض بتحويل جاليلى:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 - v)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v)^2 = B$$

وبالاختصار نجد أن :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = B - \frac{1}{2} v^2 (m_1 + m_2) + v (m_1 v_1 + m_2 v_2)$$

ثابت ثابت

إذا كانت $v =$ سرعة ثابتة وعليه فالطرف الأيمن يكون مقدار ثابت (c)

$$\therefore \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = c$$ ثابتة

وهى نفس السورة لطاقة الحركة في نظام الإسناد s^1 (مع تغير قيمة الثابت)

إن تحويل جاليلى يتفق مع ما نشاهده في حياتنا اليومية وبقيت مقبولة لأكثر من قرنين من الزمان وكلما تعارضت هذه المعادلات مع النظرية الكهرومغناطيسية للضوء التي وضعها ماكسويل عام ١٨٦٤م حيث وجد عند قياس القوة المؤثرة على شحنة كهربية مثل مراقب موجود في النظام (s) فإن هذه القوة تختلف عن ما يقيسه مراقب في نظام (s^1) على عكس قوانين الميكانيكا.

مثـال ٣ : برهن أن نسبية جاليلى ونيوتن الكلاسيكية تتعارض مع النظرية الكهرومغناطيسية

الحــل

نفرض أن شحنة $+Q$ موضوعة على بعد (d) من توزيع خطى لا نهائي من الشحنات الموجبة فإن كثافة طوليه l في نظام الإسناد (s) وتكون ساكنة في هذا النظام .

تكون شدة المجال الكهربي عند مكان الشحنة الناتج عن الشحنات اللحظية $\Leftarrow$

$$E = \frac{l}{2 E_o d} \hat{j}$$

وتكون القوة المؤثرة على الشحنة a حسب معادلة لورنش مع ملاحظة عدم وجود مجال مغناطيسي (حيث الشحنات ساكنة)

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = \frac{Q\,l}{2E_0 d}\hat{j}$$

أما بالنسبة لمراقب في نظام الإحداثيات (s^1) فإن الشحنة Q والتوزيع الخطى يتحركان بسرعة v نحو اليمين (اى فى اتجاه $+x^1$) وينتج عن ذلك مجال مغناطيسي عند النقطة الموجودة فيها Q حسب قانون ثبوت – سافار

$$\vec{B^1} = \frac{m\,I}{2p\,d}\hat{k} = \frac{m_0(l\,v)}{2p\,d}\hat{k}$$

(اى في اتجاه $+z^1$) حيث شدة التيار = $l\,v$ ، E (الكثافة × السرعة)

وتكون مقدار القوة المؤثرة على الشحنة $\vec{F^1}$ كما يقيسها المراقب في النظام

$$\vec{F^1} = Q(\vec{E^1} + \vec{v} \times \vec{B^1})$$

أما شدة المجال الكهربائي $\vec{E^1}$ لا يتغير وجود حركة نسبية :

$$\vec{E^1} = \frac{l}{2p\,f_0 d}\hat{j}$$

$$F^1 = Q\left(\frac{l}{2p\,E_0 d}\hat{j} + \frac{m_0\,l\,v}{2p\,d}\vec{v} \times k^N\right)$$

ونلاحظ أن هذه القوة تختلف تماماً عن القوة التي يقيسها المراقب في نظام الإسناد S لقد بنيت نظرية ماكسويل أن الضوء عبارة عن أمواج كهرومغناطيسية ذات سرعة ثابتة $(c = 3 \times 10^8\, mls)$ ولقد أدى ذلك للتساؤل عن نظام الإسناد الذي قيست سرعة الضوء بالنسبة له وبما أن الحركة الموجبة تحتاج إلى وسط تنتشر خلاله ، بدأ التساؤل عن طبيعة الوسط الذي تنشر خلاله الأمواج الكهرومغناطيسية.

وقد افترض في القرن التاسع عشر وجود وسط شفاف ثابت ..... يملأ الفضاء وتنتشر خلاله أمواج الضوء بسرعة ثابتة وسمى بالأثير Ether واعتبر هذا الوسط نظام اسنادى ساكن ومطلق وحتى تفسر نتائج النظرية الكهرومغناطيسية افترض خصائص غريبة لهذا الوسط (ذو كثافة صغيرة وشفافة ويهتز بسرعة كبيرة جداً) ومن الصعب أن تتحرك النجوم والكواكب خلال هذا الوسط دون مقاومة أو دون أن تتأثر به.

ولما كانت سرعة الصوت خلال الهواء تختلف باختلاف سرعة واتجاه حركة الهواء .

فلابد أن تختلف سرعة الضوء باختلاف سرعة وحالة الأثير وحتى لو فرض الأثير ساكن فانه بالنسبة لمراقب على الأرض يتحرك بسرعة دوران ≈ سرعة دوران الأرض حول الشمس

لذلك أجرى مايكلسون ومورلى تجربة لدراسة تأثير حركة الأرض خلال الأثير على سرعة الضوء وكانت نتيجة التجربة سلبية (راجع تجربة مايكلسون – مورلى)

(6.2) فـــروض اينشـــتين Einsteine's Postulates

وضع اينشتين هذه الفروض لإزالة التعارض بين نسبية جاليلى والنظرية الكهرومغناطيسية وهو :

١- سرعة الضوء في الفراغ مطلقة وثابتة ولا تعتمد على حاله حركة المراقب الذي يعيشها ولا تعتمد على حاله مصدر الضوء.

٢- أن قوانين أو علاقات الفيزياء تأخذ نفس الصورة في جميع نظم الإسناد القصورية (التي تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة لبعضها البعض) ويعتبر هذا تعميم لمبدأ نسبية جاليلى (الذي اقتصر على قوانين الميكانيكا فقط)

والفرض الأول يفسر النتيجة السلبية لتجربة مايكلسون – مورلى حيث أن سرعة الضوء عند حركة الضوء باتجاه حركة الأثير أو باتجاه عكسي هذه الحركة هي c ثابتة وليست $(\vec{c} + \vec{v})$ أو $(\vec{c} - \vec{v})$

(6.3) تحـويـل لورنـــش Lorentz Transfer

استخدم فروض اينشتين للحصول على معادلات التحويل للمتغيرات الفضاء والزمان في نظام الإسناد s مع نظام الإسناد (s^1) الذي يتحرك بسرعة ثابتة v نحو $+x$ ونفرض أن المراقب (s) ، (s^1) قد ضبطا ساعتهما عندما كانت o منطبقة على o^1 بحيث كانت $t = t^1 = 0$ إذا اصدر المراقب الموجود في (s^1) وميضا في تلك اللحظة بواسطة مصباح ومضى كالمستخدم في التصوير الفوتوغرافي (plash). فانه بعد زمن معين (t^1) يجد المراقب في (s^1) نفسه في مركز كره ضوئية نصف قطرها $a^1 = ct^1$ ومعادلة هذه الكره هى:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 = (ct^1)^2 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

وبالمثل وبعد زمن قدره (t) يجد المراقب فى (s) نفسه فى مركز كرة ضوئية معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = (ct)^2 \;\ldots\ldots\ldots\; 2$$

نلاحظ أن سرعة الضوء لم تتغير في كل من النظاميين (حسب فرضية اينشتين ومعادلة الكره لهما نفس الصورة في كلا من النظامين (الفرضية الثانية)

ويمكن استخدام معادلة (١) ، (٢) للحصول على صورة جديدة على النحو :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct)^2 \;\ldots\ldots\ldots(3)$$

التحويـل المطلـوب هـو عبـارة عـن المعـادلات التـي تـربط المتغيـرات (x, y, z, t) مـع (x^1, y^1, z^1, t^1) والتـي يمكـن اسـتخدامها لتحويـل اى مـن المعـادلتين إلـى الأخـرى ويمكـن كتجربة استخدام تحويل جاليلى حيث تصبح المعادلة :

$$x^{12} + y^{12} + z^{12} = (c\, t^1)^2$$

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (2vt)\, x = (c^2 - v^2)\, t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ونلاحظ لو كانت تحويلات جاليلى صحيحة لوجب أن تكون معادلة رقم (3) مطابقة مع معادلـة رقم (2) ونلاحظ أن سبب الاختلاف نـاتج عن معادلة التحويل بين (x , t) $\leftarrow (x^1, t^1)$ وليس لمعادلات التحويل $(y, z) \leftarrow (z^1, y^1)$

لذا افترض اينشتين أن معادلات التحويل $z = z^1 \quad , \quad y = y^1$ صـحيحتان وبسبب تجانس الفـضاء وتماثـل وانتظـام قـوانين الطبيعـة يمكـن افتـراض أن معـادلات التحويـل بـين $(x, t), (x^1, t^1)$ هي علاقات خطية .

$$x^1 = a_1 x + a_2 t \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$t^1 = b_1 x + b_2 t \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

حيث b_2, b_1, a_2, a_1 ثوابت يجب تحديدها وحيث انه عند $x^1 = 0$ اى في مركز نظام الإسناد (s^1) يكون $x = vt$ ، باستخدام هذه القيمة في معادلة (4) $0 = a_1(vt) + a_2 t$ نجد أن:

$$a_2 = (-v)\, a_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots$$

وبالتعويض بدلا من a_2 فى المعادلة (4) نجد أن :

$$x^1 = a_1 x + (-vt) a_1 = a_1 (x - vt) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

نـسبة معادلـة رقـم (6) تحويـل جـاليلى ولكـن مـع وجـود العامـل الثابـت a_1 وعلـى ايثـار $z^1 = z \quad , \quad y^1 = y$ نجـــــــــد ان التعـــــــــويض فـــــــــى معادلـــــــــة (١):

$$x^{12} + y^{12} + z^{12} = (c\, t^1)^2$$

$$a_1^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (b_1 x + b_2 t)^2$$

وبتربيع الحدود وترتيبها نحصل على:

$$(a_1^2 - c^2 b_1^2)\, x^2 + y^2 + z^2 = (c^2 b_2^2 - a_1^2 v^2) t^2 + 2xt\,(v a_1^2 + b_1 b_2 c^2) \quad \text{..............} (2)$$

بمقارنة المعاملات فى معادلة (6) ومعادلة رقم (2) نجد ان النطاقين يحصل بينهما فى حاله

$$a_1^2 - c^2 b_1^2 = 1$$

$$c^2 b_2^2 - a_1^2 v^2 = c^2$$

$$v a_1^2 + b_1 b_2 c^2 = 0$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على:

$$a_1 = b_2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$b_1 = -\frac{v}{c^2} a_1 = \frac{-v}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

بالتعويض بقيم الثوابت في معادلة رقم (6) نحصل على :

$$x^1 = a_1 (x - vt)$$

$$x^1 = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$$

حيث $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

أما بالتعويض بدل $b_1 \,,\, b_2$ **في معادلة رقم (5)**

$$t^1 = k\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad \text{..........} \; . (11)$$

وعليه تصبح معادلات تحويل لورنش :

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= k\,(x - vt) \\ y^1 &= y \\ z^1 &= z \\ t^1 &= k\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{............} (12)$$

تعرف هذه المعادلات باسم تحويل لورنش (العالم الهولندي ١٨٥٣ – ١٩٢٥) وحصل عليها في عام ١٩٠٣ اى قبل نشر اينشتين النظرية النسبية الخاصة ١٩٠٥ وقد عدل اينشتين هذه

المعادلات بحيث يكون مفهوم السرعة (v) هي سرعة نظام الإسناد (s^1) بالنسبة لنظام الإسناد (s) بينما كان لورنش يعتبرها سرعة الجسم بالنسبة للأثير الافتراضي (لا وجود له). ثم عرفت هذه المعادلات بتحويل لورنش – اينشتين وهى أساس صناعة النظرية النسبية الخاصة.

في حالة السرعة v الصغيرة بالنسبة لسرعة الضوء $(v << c)$ فإن $k \rightarrow 1$ وكذلك $\frac{v\,x}{c^2} \rightarrow 0$ وعندها تؤول معادلات لورنش إلى معادلات تحويل جاليلي.

أما تحويل لورنش اينشتين العكسي: يمكن الحصول عليها بافتراض أن نظام الإسناد (s) يتحرك بسرعة $(-v)$ بالنسبة لنظام الإسناد (s^1) وبالتعويض بدل $v \leftarrow -v$ فى معادلة التحويل رقم (١٤) نحصل على معادلات التحويل العكسي:

$$x = k\,(x^1 + v\,t^1)$$

$$y = y^1$$

$$z = z^1$$

$$t = k\,(t^1 + \frac{v\,x^1}{c^2})$$

(6.4) تقلص الطول Length Contraction

يمكن استخدام تحويل لورنش – اينشتين للحصول على نتائج تبدو غريبة ويصعب تصديقها في حياتنا اليومية حيث السرعة صغيرة جداً بالنسبة لسرعة الضوء أما في حالة سرعة بعض الجسيمات الأولية كالفوتونات والالكترونات حيث السرعة قريبة من سرعة الضوء $(\frac{v}{c} = 0.1)$. ويعتبر ظاهرة تقلص الطول (أو بعد الجسم المتحرك باتجاه الحركة إحدى هذه النتائج .

نفرض أن قضيباً موازياً لمحور x^1 عند القياس المتزامن (في آن واحد) للإحداثيات السينية لطرفي القضيب من قبل المراقب الموجود في نظام الإسناد (s^1) فوجد أنهما x_2^1 , x_1^1 ويكون طول القضيب بالنسبة لهذا المراقب:

$$L_0 = X_2^1 - X_1^1 \quad .... \quad (14)$$

ويعرف L_0 بالطول الحقيقي للقضيب

نفرض ان المراقب الموجود في نظام الإسناد (S) قام بقياس الإحداثيات السينية لطرفي القضيب x_2 , x_1 وباستخدام تحويل لورنش – اينشتين نجد:

$$x_1^1 = k\,(x_1 - v\,t_1) .... (15)$$

$$x_2^1 = k\,(x_2 - v\,t_2) \quad .... (16)$$

وبالتعويض نجد أن :

$$L_0 = x_2^1 - x_1^1 = k[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$$

ولكن من تعريف طول القضيب بالقياس المتزامن للاحداثى السيني لطرفي القضيب يلزم أن يكون $t_1 = t_2$ وعليه تصبح المعادلة :

$$L_0 = k(x_2 - x_1)$$

علما بان طول القضيب في نظام الإسناد (s) هو $L = x_2 - x_1$

$$\therefore L_0 = kL = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad .... \quad ..... \quad (17)$$

أو

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad .... \quad ......$$

ونلاحظ أن الطول L_0 اكبر من الطول L :

النتيجة : أن القضيب الذي يتحرك بالنسبة لمراقب بسرعة ثابتة قدرها V يبدو وكأنه أقصر من طوله الحقيقي بمقدار المعامل $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ وتسمى هذه الظاهرة تقلص لورنش ولا يظهر إلا في حالة السرعة $v/c \approx 0.1$ (سرعة عالية).

ولقد بين تيريل (Terrell) عام ١٩٥٩ أن المراقب يرى (وبسبب طبيعة عملية الرؤية) الطول الحقيقي للقضيب وليس الطول الظاهري المتقلص فعملية الرؤية تتم بفعل استقبال الفوتونات (المتزامن) الصادر من نقاط الجسم المختلفة . وحتى تتم هذه العملية يجب ان تنطلق الفوتونات من نقاط الجسم البعيدة عن العين مثل تلك الفوتونات القريبة من العين وهذا لا يتفق مع الشرط المستخدم لاستقالة معادلة التقلص (17) حيث $t_1 = t_2$

الحقيقة : ان الجسم يبدو للعين وبسبب اختلاف زمن صدور الفوتونات وكأنه نحو الامام وهذا يؤدى الى زيادة طوله بمقدار يعادل النقصان المعطى فى المعادلة اما فى حالة الاجسام المجسمة فإنه البعد الموازى للحركة هو الذى يخضع للتقلص فى الطول اما الابعاد الاخرى فلا تتأثر بالحركة وبهذا تبدو للعين الاجسام هذه مشوهة وذلك لأن صورتها المتكونة على قرنية العين تكون ناتجة عن اشعة صادرة من النقاط المختلفة فى أزمنة مختلفة.

مثال١ : سلك معدنى مثبت فى سقف طائرة كما قاسه مهندس الصيانة فى المطار يساوى (50 m) فإذا كانت سرعة الطائرة = 1000 km/hr احسب طول السلك كما يقيسه:

أ- شخص داخل الطائرة (مسافر)

ب- شخص في المطار ثم جد التغير فى طوله بسبب الحركة.

الحل

(أ) بالنسبة للمسافر فإن السلك فى حالة سكون (الطائر هناك عن نظام اسناد قصور يوجد فيه المسافر والسلك ولذلك فإن طوله = $50m = L_0$

(ب) $L_0 = 50m \quad ; \; L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$1000\ km/hr = \frac{10m}{60 \times 60 s} = 278\ m/s$$

$$(\frac{v}{c})^2 = (\frac{278}{3 \times 10^8})^2 = 8.6 \times 10^{-13}$$

$$\therefore L = L_0\ (1 - 8.6 \times 10^{-13})^{1/2} \approx L_0 \left[1 - \frac{1}{2}(8.6 \times 10^{-13} \right]$$

$$= = L_0\ (1 - 4.3 \times 10^{-13})$$

$$\Delta L = (L - L_0) \approx -4.3 \times 10^{-13}$$

$$L_0 = -2.15 \times 10^{-11} \quad m = -0.215 A$$

اى العنصر فى طول السلك يعادل تقريباً $\frac{1}{4}$ انجستروم ولا يمكن قياسه بهذه الدقة فى اى حال من الاطوال وهذا يدل ان الظواهر النسبية لا يمكن قياسها الا فى الحالات الخاصة.

مثال٢ : مكعب طول ضلعه اثناء السكون L_0 فإذا تحرك هذا المكعب بسرعة V بالنسبة للمراقب وباتجاه موازٍ لأحد أضلاعه أوجد حجم المكعب كما يقيسه المراقب ثم قارن حجمه الحقيقى:

الحل

نفرض ان اتجاه المكعب هو باتجاه محو X الموجب ويكون طول ضلعه فى هذا الاتجاه L حيث:-

$$L_0 = KL \quad ....(1)$$

أبعاد المكعب في اتجاه Y , Z لا تتغير لعدم وجود حركة نسبية فى هذه الاتجاهات لنفرض v_0 = حجمه كما يقيسه المراقب فى (0)

$$v_0 = L L_0^2 = \frac{L_0^3}{K} = \frac{V_0^1}{K}$$

حيث V_0^1 = حجم المكعب الحقيقي أثناء السكون $\quad K = \frac{V_0^1}{V_0}$

وبما ان $K > 1$ فان $V_0^1 > V_0$ اى حجمه الحقيقى اكبر من حجمه الذي يقيسه المراقب 0

(6.5) التزامنية الآلية Simultaneity

عرّف اينشتين التزامنية الآلية فى النظرية النسبية الخاصة على النحو:

يقال ان الحدث الذي وقع في النقطة x_1 عند الزمن t_1 متزامن مع الحدث الذى وقع فى النقطة x_2 عند الزمن t_2 اذا وصلت الإشارات الضوئية الصادرة من الحدثين للنقطة x الواقعة فى منتصف المسافة بين x_1 , x_2 فى نفس الوقت.

وقد بين اينشتين ان تزامن حدثين فى نظام اسناد معين فانهما ليس بالضرورة متزامنين فى نظام الاسناد تتحرك بسرعة ثابتة بالنسبة للنظام الاول.

(6.6) تمدد الزمن Time – Dilation

بين معادلات تحويل لورنش ان الزمن نسبى وليس مطلقاً اى ان القوة الزمنية التى تفصل بين حدثين تعتمد على حالة المراقب الذى يقيسها ولتوضيح ذلك:

نفرض اننا نستطيع قياس الزمن بطريقة سهلة (نوع من الساعات) وهى عبارة عن مرآتين متوازيتين تفصل بينهما مسافة (L) معروفة بدقة ثابتة وان احدى المرآتين ذات سطح حساس للضوء اذا تعلن عند وصول الاشارة الضوئية لها. اذا ارسلت نبضة ضوئية من سطح المرآه الاولى فان الشعاع العمودى ينعكس على نفسه عائداً للمرآه الاولى عند وصوله لسطحها.

يكون الزمن الذى يمضى منذ ارسال الاشارة الضوئية وحتى الاستقبال هو :

$$t = \frac{QL}{C} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

ولنفرض ان الساعة مثبتة داخل عربة حيث المرآة الاولى على ارضية العربة والاخرى مقابلة لها عند سقف العربة بفرض وجود مراقبين الاول داخل العربة التى تتحرك نحو اليمين بسرعة ثابتة V والمراقب على الارض (C).

بالنسبة للمراقب الذى فى العربة تكون المرآة بالنسبة له ساكنة ولذلك يرى ان الاشارة الضوئية تتحرك من والى المرآة بصورة عمودية وتكون المسافة التى تتحركها ذهابا واياباً = 2L وبالنسبة لهذا المراقب الوجود فى النظام (S^1) تكون القدرة الزمنية

$t_0 = \frac{2L}{C}$ .... (2) اما بالنسبة للمراقب الموجود فى النظام (S) عند 0 . (على الطريق)

اى ان الشعاع ينطلق بزاوية معينة مع الافقى، لنفرض ان (t) هى الفترة الزمنية التى يقيسها المراقب الموجود فى نظام (s) على الارض ، تكون المسافة الافقية التى تتحركها المرآه الى الامام $(v)\left(\frac{t}{2}\right) \Leftarrow$ اما المسافة التى قطعها الشعاع فى نفس الفترة الزمنية = $\left(\frac{t}{2}c\right)$

نلاحظ من الشكل (٢):

$$\left[\left(\frac{t}{2} \right) c \right]^2 = \left(\frac{t}{2} v \right)^2 + L^2$$

او

$$\frac{t^2}{4} (c^2 - v^2) = L^2 \Rightarrow t^2 = \frac{4L^2}{c^2 - v^2}$$

$$t^2 = \frac{4L^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{2L/C}{\left[1 - v^2/c^2 \right]^{1/2}} = k t_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

وحيث $k > 1$ فإن $t > t_0$

يعرف t_0 بالزمن الحقيقى ونلاحظ ان ارتفاع العربة لا يتأثر بتقلص الطول حيث ان هذا الطول عمودياً على اتجاه الحركة.

الادلة التجريبية على حقيقة تحدد الزمن :

معادلة رقم (2) تعنى ان الزمن فى مركبة فضائية وكما يقيسه مراقب على سطح الارض يمضى ابطأ من المعهود اى ان المراقب الارض يشاهد عقارب الساعة رائد فضاء وكأنها تتحرك ببطء مقارنة مع عقارب ساعته. أى ان الزمن تحدد وردّاد هذه الظاهرة بزيادة سرعة المركبة واقترابها من سرعة الضوء.

مثال:

الميونات وهى جسيمات غير مستقرة لها شحنة (e) ولها كتلة أكبر من كتلة الالكترون وتعادل $m_m = 207^{me}$ وفى طبقات الجو العليا على علو ١٠كم تتولد نتيجة لتصادم الاشعة الكونية بالغلاف الجوى، فإذا كانت سرعة هذه الجسيمات $v = 0.998c$ وكانت فترة الحياء لها فى نظام اسنادى ساكن بالنسبة لها $2.2 \times 10^{-6} s$ استخدم الميكانيكا الكلاسيكية والميكانيكا النسبية لحساب المسافة التى يتحركها الجسيمات قبل ان تتفكك ؟

الحل

باستخدام ميكانيكا نيوتن المسافة d_0

$$d_0 = vt = (0.998c) \times 2.2 \times 10^{-6} = 660m$$

$$\uparrow 3 \times 10^8 m$$

وهذه المسافة اصغر من الارتفاع عند انتاج هذه الجسيمات وعليه لا تصل الى سطح الارض وفى الحقيقة فإن معظم الميزونات تصل سطح الارض مما يدل خطأ فى الحساب السابق حسب قوانين نيوتن .

ثانياً : بالنسبة للميكانيكا النسبية:

لبنفرض ان T وفترة الحياه كما تقاس فى المعمل ، وتتحرك الميونات بسرعة 0.998c بالنسبة للمعمل وعليه فإن:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{2.2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0.998)^2}} \approx 35 \times 10^{-6}\,\text{sec}$$

اى هذه الفترة اطول بحوالى ١٦ مره عن الفترة الزمنية لحياتها كما يقيسها مراقب متحرك معها وتكون المسافة له التى تقطعها الميونات

$$d = vT = (0.998)(3 \times 10^8) \times 35 \times 10^{-6}\,\text{sec} \approx 10500m = 105km$$

وبالتالى فإن الميونات تصل الى سطح الارض وكما تؤيد التجارب العملية.

وقد اجرى هافيلى وكيتينج (keeting) عام ١٩٧٢م تجربة ايدت صحة المعادلة (2) وذلك باستخدام مجموعة من الساعات الذرية (سيزيوم) حيث وضعها اربع ساعات على متن طائرة تجارية طاقت حول الكرة الارضية مع الاخذ بعين الاعتبار اتصحيحات قبل مقارنة الساعات المتحركة مع الساعة الماثلة الموجودة فى مرصد البحرية الامريكية، وهى اعتبارات تأثير دوران الارض على الساعة الموجودة فى المرصد (هذا يؤدى الى تسارع صغير حيث ان الارض ليست نظام اسناد قصورى حقيقى بسبب الدوران حول نفسها) وكذلك اعتبار التأثير التسارع والتباطىء وتغيير الاتجاه والمجال الجزئى على الساعات المتحركة وعند مقارنة الازمنة المقاسة بالساعات المتحركة بتلك المقاسة بالساعات الارضية الساكنة وجد انها تحقق معادلة رقم (2) (تحدد الزمن):

تحدد الزمن وعمر الانسان:

اذا كانت الحركة تؤدى الى تحدد الزمن فانها قد تؤدى ايضا للتأثير على عمر الانسان، واليك التوضيح التالى بالتجربة الافتراضية:

سافر رائد فضاء بسرعة ثابتة قدرها $v = 0.99c$ نحو احد النجوم البعيدة وكان عمره 20 سنة ثم عاد الى الارض بعد ان امضى فى سفره حسب تقويمه الخاص (s) سنة ويعتقد هو عند عودته للارض ان عمره اصبح (25) سنة ولكن اهله يرو غير ذلك اذ انهم انتظروه طويلا فقد تمدد زمنه بالنسبة لاهل الارض حسب علاقة تحدد الزمن.

أى $t = \dfrac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{s}{\sqrt{1 - (0.99)^2}} \approx 35.4 \ year$

اى ان زمن غيابه عن الارض وكما يقيسه اهل الارض = ٣٥,٤ عاما وعليه يكون عمره بالنسبة لاهل الارض حوالى 55عاما !! ونتسائل الآن ما هو عمره الحقيقى ؟ هل هذه المعالجة صحيحة ؟ للاجابة على هذا السؤال نلاحظ:

(١)هل الساعات البيولوجية (خلايا الجسم) تخضع لظاهرة تحدد الزمن لا أحد يستطيع تقديم اجابه قاطعة لهذا السؤال ومع ذلك يؤيد كثير ان خلايا الجسم تخضع لظاهرة تحدد الزمن كما فى حالة الساعات الذرية والجسيمات الأولية.

(٢)تعالج النظرية النسبية نظم اسناد قصورية (غير متسارعة) ولكن مركبة الفضاء تسارعت عند انطلاقها وعند الدوران ثم تتباطىء عند الهبوط ولا يمكن تطبيق قوانين النظرية النسبية اثناء هذه الفترات.

(٣) التجربة هذه خيالية لأنه عند هذه السرعة العالية فقط ولكن لا يمكن للكتل الكبيرة ان تصل الى هذه السرعة لاسباب اقتصادية ولهذا التجربة غير عملية.

(6.7) معادلات تحويل السرعة النسبية:

لنفرض نظامى $s \, , \, s^1$ **حيث يتحرك** (s^1) **بسرعة** v **بالنسبة لـ (s) وعليه اذا كانت سرعة جسيم (أ) بالنسبة للنظام (s) هى v فالمطلوب ايجاد سرعة الجسيم بالنسبة للنظام** (s^1)**؟**

تكون مركبات السرعة فى النظام (s) هى :

$$v_x = \frac{dx}{dl} \; ; \; v_y = \frac{dy}{dl} \; , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

اما مركبات السرعة بالنسبة للنظام (s^1) **فهى :**

$$v_x^1 = = \frac{dx^1}{dt^1} \; ; \; v_y^1 = \frac{dy^1}{dt^1} \; ; \; v_z^1 = \frac{dz^1}{dt^1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

بتفاضل معادلات تحويل لورنش اينشتين نجد ان:

$$dx^1 = k\,(dx - u\,dt)$$
$$dy^1 = dy$$
$$dt^1 = k\,(dt - \frac{u}{c^2}\,dx) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

بالتعويض فى معادلة رقم (١) نجد ان :

$$v_x^1 = \frac{dx^1}{dt^1} = \frac{(dx - udt)}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \frac{v_x - u}{1 - (u/c)\, v_x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_y^1 = \frac{dy^1}{dt^1} = \frac{dy}{k(dt - \frac{u}{c^2}dx)} = \frac{v_y}{k(1 - \frac{u}{c^2}v_x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$v_z^1 = \frac{dz^1}{dt^1} = \frac{dz}{k(dt \quad \frac{u}{c^2}dx)} = \frac{v_2}{k(1 - \frac{u}{c^2}u_x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ويمكن الحصول على المعادلات العكسية لتحويل السرعة (مركبات السرعة) بوضع (u-) بدلا من u فى معادلة (3) :

$$v_x = \frac{v_x^1 + u}{1 + \frac{u}{c^2}v_x^1}$$

$$v_y = \frac{v_y^1}{k(1 + \frac{u}{c^2}v_x^1)}$$

$$v_z = \frac{v_z^1}{k(1 + \frac{u}{c^2}v_x^1)}$$

ونلاحظ ان هذه المعادلات تؤول المعادلات المناظرة فى النظرية النسبية القديمة (جاليلى) عندما $\frac{u}{c^2} \to 0$ **اى** $v << c$.

مثال : (أ) انطلقت مركبة فضاء من الارض بسرعة ثابتة (v) نحو نجم ثابت (بعيد) فإذا اطلقت هذه المركبة اشارة ضوئية نحو النجم ، جد سرعة هذه الاشارة كما تقيسها المحطة الارضية ؟

(ب)يتحرك جسيم بسرعة 0.8c بالاتجاه الموجب لمحور السينات بينما يتحرك جسيم آخر بسرعة 0.7c بالاتجاه السالب لنفس المحور احسب سرعة الجسم الاول بالنسبة للجسم الثانى

الحل

تعتبر المركبة نظام (s^1) **بينما الارض نظام اسناد قصورى (s) وعليه فإنه** $V = U$ **بينما** $(v_x^1 = c)$**حيث سرعة الضوء بالنسبة للمركبة هى c والمطلوب حساب** v_x **؟**

$$v_x = \frac{v_x^1 + u}{1 + (u/c^2)\, v_x^1} = \frac{c + v}{1 + vc/c^2} = c$$

اى أن سرعة الإشارة الضوئية بالنسبة للأرض تساوى (٢) وهذا يتفق مع الفرض الاول لاينشتين

يمكن حل السؤال باعتبار نظام الاسناد (s) التى قيست سرعتا الجسمين بالنسبة لهما ويكون بالنسبة للاول $v_x = 0.8c$ اما الجسم الثانى فيعتبر نظام الاسناد (s^1) وبالتالى فإن $U = 0.7c$ والمطلوب تحويل سرعة الجسم الاول v_x من النظام s الى النظام s^1 اى v_x^1 ؟

$$v_x^1 = \frac{v_x - u}{1 - u v_x / c} = \frac{0.8c - (-0.7c)}{1 - (-0.7c)(0.8c)/c^2}$$

$$= 1.5c \ / \ (1 + 0.56c) = 0.962c$$

اما عند استخدام معادلات تحويل جاليلى تكون السرعة

وهذا تعارضت مع النظرية النسبية (سرعة الجسيم) من سرعة الضوء.

اما لايجاد سرعة الثانى بالنسبة للأول.

$$v_x^1 = -\frac{0.7c - 0.8c}{1 - (-0.7)(0.8)}$$

$$= -\frac{1.5c}{1.56}$$

$$= -0.952c$$

(6.8) الكتلة النسبية (تغير الكتلة مع السرعة).

تطبيق معادلات تحويل لورنش اينشتين على حركة الأجسام يسمى بالميكانيكا النسبية عند استخدام قانون نيوتن الثاني:

يمكن اعتبار ان الكتلة m تعتمد على سرعة الجسم $m = m(v)$ عند المعالجة النسبية ولتحديد طبيعة العلاقة $m = m(v)$ يمكن إجراء التجربة الافتراضية (الخيالية) التالية:

نفرض ان A في نقطة معينة ولديه كرة كتلتها m_0 أثناء السكون وهو يمثل نظام الاسناد s بينما يتحرك الطالب B نحو الشرق وعلى بعد عمودى من الطالب A مقداره d وبسرعة ثابتة بالنسبة للطالب A هى (V) ولديه كرة مماثلة لكرة الطالب A وكتلتها اثناء السكون m_0 وسوف نعتبر ان الطالب B يمثل نظام الاسناد (S^1).

نفرض ان الطالبين اتفقا ان يقذفا كرتهما كل منهما نحو الاخر بنفس اللحظة بسرعة U أى يقذف الطالب A الكرة بسرعة U الى اعلى U+ بينما يقذف الطالب B بكرته الى اسفل بسرعة U– (الاتجاه السالب لمحور y') (اتجاه محور y الموجب)

لنفرض ان التصادم حصل عند النقطة (c) على بعد $(\frac{d}{z})$ من الطالب A (اى منتصف المسافة) والشكل يمثل عملية التصادم كما يراها الطالب A حيث ترتد اليه كرته بعد التصادم المرن والشكل يمثل عملية التصادم كما يراها الطالب A حيث ترتد اليه كرته بعد التصادم المرن عند C بسرعة U– (الاتجاه السالب لمحور Y)

لنفرض b = الزمن الذى استغرقته الكرة منذ لحظة قذفها حتى عودتها لنقطة القذف (زمن الطيران) فيكون :

$$T_0 = \frac{d}{u} \quad \text{.................} \quad (2)$$ س

اما بالنسبة للطالب B الذى يتحرك فى النظام (S^1) بسرعة (V) بالنسبة للطالب A (S) فإن (A) لا يرى الكرة تتحرك باتجاه المحور فى نظامه ويكون اتجاه حركتها مائلاً بالنسبة للطالب A اى فى الاتجاه BC وتكون مركبة سرعتها باتجاه محور y هى $(-u^1)$ وعند التصادم عند s مع الكرة الاخرى ترتد فى الاتجاه CB^1 ومركبة سرعتها = $(+U^1)$ بالنسبة للمحور (y) .

اما بالنسبة للطالب B يرى نفس الصورة مع تبديل مسارات الكرتين حيث يرى ان كرته ساقطة بالاتجاه السالب لمحور y^1 وترتد بالاتجاه الموجب لنفس المحور وبنفس السرعة u^1 ويكون زمن طيران الكرة الثانية (B) كما يقيسها A هى :

$$T = \frac{d}{u^1} \quad \text{..............} \quad (3)$$

ويلاحظ ان d لا تخضع لتقلص الطول لانها عمودية على اتجاه السرعة (v) اى $y = y^1$ اما الطالب B يقيس زمن كرته ولأنها ساكنة بالنسبة له فسوف يجد انه يساوى T_0 وحيث ان S^1 تتحرك بسرعة (V) بالنسبة لـ (S) فإن :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = kT_0 \quad \text{..............} \quad (4)$$

بالتعويض فى معادلة (3) نجد ان :

$$u^1 = \frac{d}{T} = \frac{d}{kT_0} = u\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \text{..............} \quad (5)$$

اى ان الطالب A يجد ان مركبة سرعة كرة B باتجاه محور y اقل من u بسبب تحدد الزمن.

عند تطبيق قانون حفظ كمية الحركة منه قبل الطالب A باتجاه محور y :

١ـكمية الحركة قبل التصادم $m_0 u + m(-u^1)$

حيث كتلة الكرة B متحركة بسرعة v ولذلك غير ساكنة.

٢ـكمية الحركة بعد التصادم : (باتجاه محور y).

$$m_0(u) + mu^1$$

قانون حفظ كمية الحركة:

$$\therefore m_0 u - mu^1 = -m_0 u + mu^1 \quad \text{..........} \quad (6)$$

$$\Rightarrow m_0 u = mu^1$$

وباستخدام معادلة (٥) نجد ان :

$$m_0 u = mu\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \text{............} \quad (7)$$

$$\therefore m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = km_0 \quad \text{.............} \quad (8)$$

m_0 = الكتلة السكونية

m = كتلة الجسم كما يقيسها مراقب يتحرك الجسم بالنسبة له بسرعة (v) وتسمى بالكتلة النسبية ونلاحظ أن $m > m_0$ اى يزداد كتلة الجسم مع زيادة سرعته.

وتصبح معادلة الحركة فى الميكانيكا النسبية :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) \quad \text{..............} \quad (9)$$

وتعرف كمية الحركة النسبية:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{..............} \quad (10)$$

بالاشتقاق لمعادلة الشغل : $\therefore\ dw = mv\,dv + v^2 dm$

$$= (c^2 - v^2)\,dm + v^2 dm$$

$$dw = c^2 dm$$

$$Ek = W = \int dw = \int_{m_0}^{m} c^2 dm = c^2 (m - m_0)$$

$$\therefore E_k = (\Delta m)\, c^2 \quad .... \quad (12)$$

ونلاحظ ان طاقة الحركة النسبية = صفر عند v = صفر

وللمقارنة بين طاقة الحركة النسبية E_K مع طاقة الحركة الكلاسيكية (Lmv^2) كما فى الشكل:

تكون القيمتان متقاربتان عن c >> v ولكن الفرق يصبح ملاحظاً بشكل كبير عندما تقترب v من c .

(6.10) الطاقة الكلية وكمية الحركة

يمكن كتابة معادلة (12) على صورة :

$$mc^2 = m_0 c^2 + E_K$$

او $E = E_0 + E_k \quad .... \quad (13)$

حيث E = الطاقة النسبية الكلية للجسم المتحركة

E_0 **= طاقة الجسم فى حالة السكون ($m_0 c^2$) او طاقة الكتلة السكونية.**

وهذه المعادلة تبين مبدأ التكافؤ بين الطاقة والكتلة وامكانية تحول احداهما للآخر وهذا المبدأ استخدم فى تفسير كثير من الظواهر النووية حيث نلاحظ انه التقى $e^+ + e^- \rightarrow a$ (برتون + الكترون) يتحدان ليكونا جاداً $a - ray$ وهذا يعرف بفناء الكتلة (تحول المادة الى طاقة)

ويمكن الربط بين الطاقة الكلية مع كمية الحركة للجسم:

حيث $E = mc^2 \quad , \quad p = mv$

حيث $m = \dfrac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}$ **بتربيع هذه المعادلة وترتيب الحدود .**

$$m^2 = \frac{m_0^2}{(1 - v^2/c^2)}$$

$$m^2 (c^2 - v^2) = m_0^2 c^2$$

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2 c^2$$

وبضرب كل الحدود فى (c^2)

$$m^2c^4 - c^2(m^2v^2) = m_0^2c^4$$

$$\therefore E^2 = c^2p^2 + E_0^2 \quad ....(14)$$

او يمكن كتابتها بصورة اخرى:

$$P = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{C} \quad ....$$

وعند رسم العلاقة (معادلة 14) فى حالة الميكانيكا الكلاسيكية للطاقة الكلية :

$$E = E_0 + \frac{1}{2}mv^2$$

ونلاحظ عندما تكون m_0 **= صفر فإن** E_0 **= صفر (كتلة الفوتون) تكون طاقة الفوتون تصبح**

$$E = PC \quad .... \quad \mathbf{E}$$

مثال: برهن ان سرعة الجسم يمكن ان تكتب على صورة :

(أ) $v = c\sqrt{1 - (E_0/E)^2}$

(ب) وكذلك على صورة : $v = c\,p/\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}$

الحل

(أ) $$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$\therefore \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Rightarrow \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 = \frac{1}{1 - (v/c)^2}$$

$$\therefore 1 - (v/c)^2 = \left(\frac{E_0}{E}\right)^2 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$$

$$\therefore v = c\sqrt{1-(E_0/E)^2}$$

(ب) يمكن كتابة الطاقة الكلية للجسم على الصورة :

$$E^2 = m^2c^4$$

$$= m_0^2c^4 + p^2c^2$$

بالقسمة على m^2c^2 **ينتج ان**

$$c^2 = \frac{m_0^2c^2 + p^2}{m^2}$$

بالقسمة على مربع سرعة الجسم

$$\therefore \frac{c^2}{v^2} = \frac{m_0^2c^2 + p^2}{m^2v^2} = \frac{m_0^2c^2 + p^2}{p^2}$$

مقلوب الطرفين يؤدى الى:

$$\therefore \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2}{p^2 + m_0^2c^2}$$

$$\therefore v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}} \quad ....$$

مثال (٢) :

الكترون طاقة حركته النسبية = ضعف طاقته السكونيه احسب :

١-طاقته السكونية.

٢-طاقته الكليه.

٣-سرعته.

٤-كتلته النسبية.

الحل

$$E_0 = m_0c^2 = 9.1\times10^{-31}\,kg \times 9 \times 10^{16}$$

$$= 81.9 \times 10^{-15}\,J = 0.511\,Men$$

$$(lev = 1.6 \times 10^{-19} J)$$

$$E = m_0c^2 + E_k = m_0c^2 + 2m_0c^2 \quad .... (2)$$

$$= 3m_0c^2 = 1.533 Men$$

(3) حيث $\therefore \frac{E_0}{E} = \frac{1}{3}$

$$v = c\sqrt{1 - (E_0/E)^2} = c\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}\,c}{3}$$

$$= 2.83 \times 10^8 \ m/s$$

(4) حيث $E = mc^2 = 3m_0c^2$

$$\therefore m = 3m_0 = 3 \times 9.1 \times 10^{-31} kg = 2.73 \times 10^{-31} kg$$

(6.11) ظاهرة دوبلر : Doppler Effect

وجد دوبلر ان طول الموجة التى يرصدها المراقب (موجه ضوئية أو صوتيه) تعتمد على سرعة المصدر بالنسبة للمراقب . والعلاقة الرياضية هى :

(أ) فى حالة الموجة الصوتية:

$$l = l (1 \ \text{m} \ v_s / u) \quad .... (1)$$

المراقب المصدر

حيث v_s **= سرعة المصدر بالنسبة للمراقب u = سرعة الموجة الصوتية . الإشارة الموجبة فى العلاقة فى حالة ابتعاد المصدر عن المراقب .**

والإشارة تكون سالبة فى حالة اقتراب المصدر من المراقب اما v_s **تكون مقدار عددي (بدون اشارة) عند استخدام العلاقة (t).**

(ب) فى حالة الموجة الضوئية :

حيث : c = سرعة الضوء وهى ثابتة حسب فرضية اينشتين وعليه وجد دوبلر ان العلاقة بين طول الموجة التى يرصدها المراقب من مصدر ضوئى تعطى بالعلاقة :

$$l = l \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}} \quad .... (2)$$

حيث $B = \frac{v}{c}$ **، v = سرعة المصدر بالنسبة للمراقب.**

فى العلاقة (2) اذا كـان المصدر يقترب من المراقب فإنـه اشـارة $(B = \frac{v}{c})$ تكون (+) واذا كان المصدر يبتعد عن المراقب فان اشارة B تكون سالبة (-) .

فمثلاً عند رصد الضوء القادم من النجوم المبتعده عن الارض فانـه لـوحظ ازديـاد طـول موجـة الضوء كما يقيسه المراقب وهذه تعنى انزياح اللون نحو الاحمر.

كما لوحظ ان الضوء القادم من المقتربه من الارض انزياح اللون نحو الازرق اى يقصر طول الموجه وهذا يدعم النجوم نظرية دوبلر بشكل عملى.

مثال:

عنـد رصد نجـم متحركـاً بالنـسبة لـلارض وجد ان خـط الطيـف الازرق مـن طيـف الهيـدروجين $l_0 = 4340\,A$ اصبح عند طول موجة 6000 A جد سرعة النجم بالنسبة للأرض.

الحل

$$l = l \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}}$$

$$6000 = 4340 \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}} \Rightarrow (1.3825) = \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}}$$

بتربيع الطرفين نحصل على :

$$\therefore (1.3825)^2 = \frac{1 - B}{1 + B}$$

بحل المعادلة نجد ان:

$$B = -0.313$$

$$\therefore \ v = Bc = -9.39 \times 10^7 \ m/s$$

الاشارة (-) تعنى ان النجم يبتعد عن المصدر (ظاهرة الانزياح نحو الاحمر).

مثال(٢) يدعى احد الفيزيائيين فى محمة المرور ان سبب قطع الاشارة الحمراء $(l = 6000\,A)$ هو بسبب ظاهرة دوبلر حيث رأى لون الاشارة خضراء $(l = 5500\,A)$ عندما كان متجهاً نحو الاشارة هل هذا صحيح؟

الحل

$$l = l \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}}$$

$$\frac{5500}{6000} = \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}} \Rightarrow 0.84627 = \sqrt{\frac{1 - B}{1 + B}}$$

تربيع الطرفين وحل المعادلة بالنسبة لـ B نجد ان

B=0.08679

$$\therefore v = Bc = 2.6 \times 10^7 m = 2.6 \times 10^4 \; km/s$$

وهذا غير معقول ان يملك هذه السرعة الهائلة حتى تتحول الاشارة من اللون الاخضر (كما يبدو له) الى اللون الاحمر.

تمارين الفصل السادس

(6.1) اذا علمت ان الزمن الحقيقى لبقاء جسيم هو $100 m s$ **.**

(أ) كم يبدو زمن بقائه اذا كان متحركاً بسرعة 0.96 c فى المعمل.

(ب) كم تبلغ المسافة التى يقطعها الجسيم فى المعمل خلال فترة بقاءه.

(ج) كم تبلغ المسافة التى يقطعها الجسيم بالنسبة لمراقب ثابت فى نظام الاسناد للجسيم s^1 **.**

(6.2) اذا علمت انه يمكن مشاهدة مسارات الجسيمات غير المستقرة ذات الطاقات العالية عن طريق الاثار التى تخلفها هذه الجسيمات عند مرورها فى اوساط معينة . جد زمن البقاء الحقيقى لجسيم سرعته 0.99 sc وطول مساره 1.25 mm ؟

(6.3) يقف مراقب على رصيف محطة قطار فإذا مرّ قطار بسرعة $v = 0.8c$ **ووجد المراقب ان طول الرصيف 60 m علماً بأنه لاحظ مقدمة ومؤخرة القطار منطبقتان على الرصيف. جد**

أ) الزمن الذى يستغرقه مرور القطار بنقطه ثابته على الرصيف بالنسبة للمراقب.

ب)الطول الحقيقى للقطار كما يقيسه احد ركاب القطار.

ج)طول الرصيف كما يقيسه احد ركاب القطار.

د) الزمن الذى يستغرقه مرور القطار بالنسبة لنقطة ثابتة على الرصيف كما يقيسه احد ركاب القطار.

هـ) جد الفارق الزمنى بين لحظة انطباق مقدمة القطار على اول الرصيف وانطباق مؤخرته على آخر الرصيف.

(6.4) المراقب (o^1) **فى عربه تسير بسرعة** $2.4 \times 10^8 m/s$ **بالنسبة لمراقب o على سطح الارض اذا كان الحدث (١) صدور فوتون من مؤخرة العربة والحد (2) وصول الفوتون الى مرآه عند مقدمة العربة وانعكاسها عنها . والحدث (3) وصول الفوتون مرة أخرى مؤخرة العربة فإذا وجد المراقب** (o^1) **طول العربة 30m استخدم معادلات لورنش لايجاد ما يلى:**

(أ) طول العربة كما يقيسه المراقب (o)

(ب) الفرق فى الاحداثيات بين الحدثين (2,1) ، (2 , 3) و (1 , 3) فى مجموعة الاسناد o^1

(ج) جد الفرق فى الاحداثيات بين الحدثين (1 , 2) (2 , 3) ، (1 , 3) فى مجموعة الاسناد (o)

(د) جد الفارق الزمنى بين كل حدثين (1 , 2) و (1 , 3) و (1 , 3) فى مجموعة الاسناد (o^1) **وكذلك فى مجموعة الاسناد (o)**

(6.5) جد كلا من الطاقة الكلية والطاقة الحركية وكمية الحركة الخطية بوحده Mev/c لبروتون حيث طاقة سكونه $E_0 = 938\ Mev$ **وسرعته** $v = 0.8c$ **.**

(6.6) أوجد سرعة وكمية الحركة الخطية (بوحدة Mev/c) للالكترون الذى طاقتـه الحركيـة تساوى 10 Mev علماً بأن طاقة السكون له هى 0.511؟ ؟

(6.7) فـى احـد المعجـلات الذريـة يـتم تعجيـل الالكترونـات علـى مـرحلتين : الاولـى تزيـد مـن سـرعته مـن صـفر 0.99 c والثانيــة تزيـد مـن سـرعته مـن 0.99 c 0.999 c جد مقدار الطاقة الحركية المكتسبة من قبل الالكترونات فى المرحلتين .

علماً بأن طاقة السكون (طاقة التكوين) للالكترون = $E_0 = 0.511\, Mev$

المراجع

1-فلسفة نيوتن – في الميكانيكا الكلاسيكية

2-مفاهيم عامة للقوى والتسارع