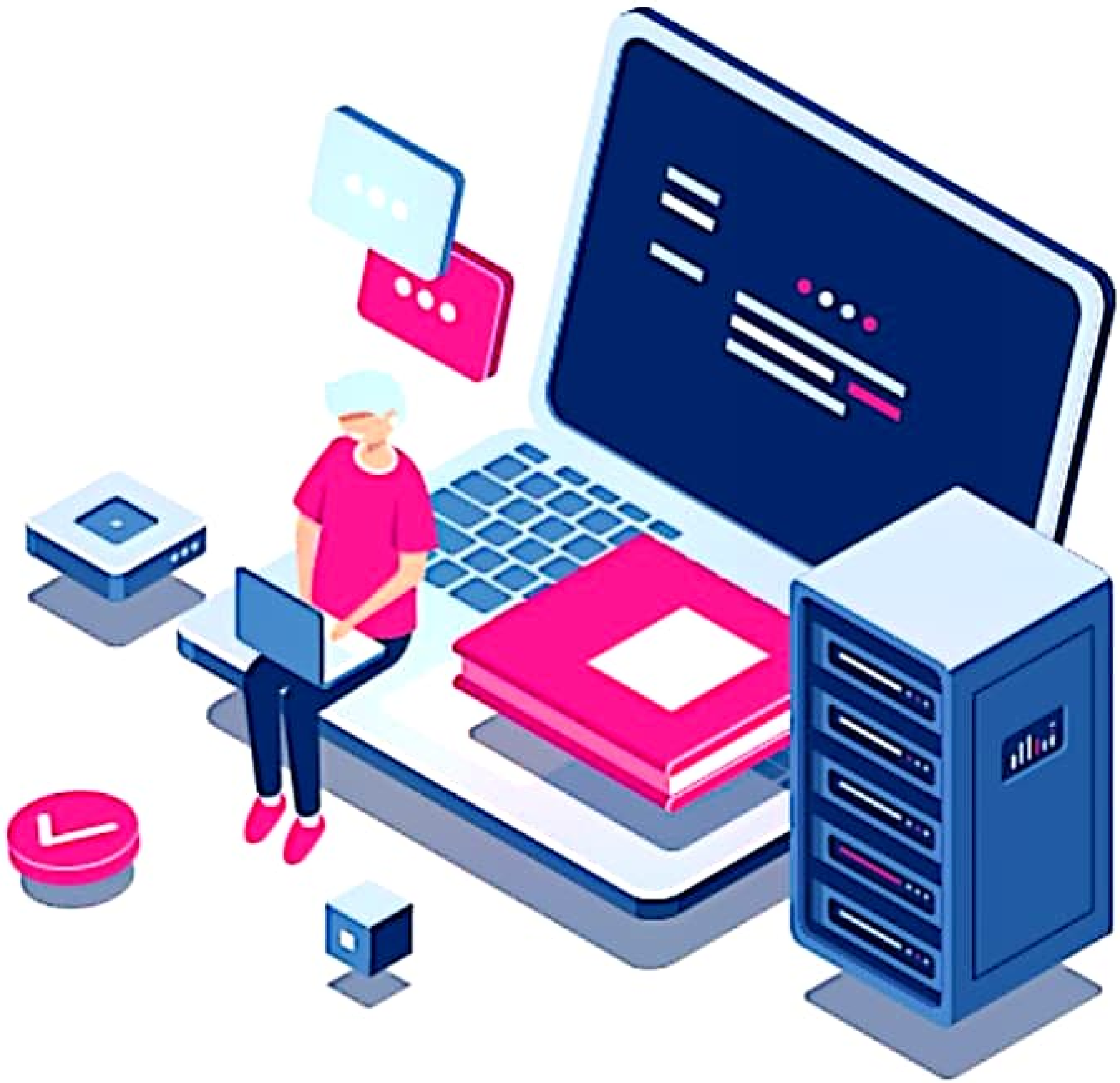
سلسلة
التجمع التعليمي

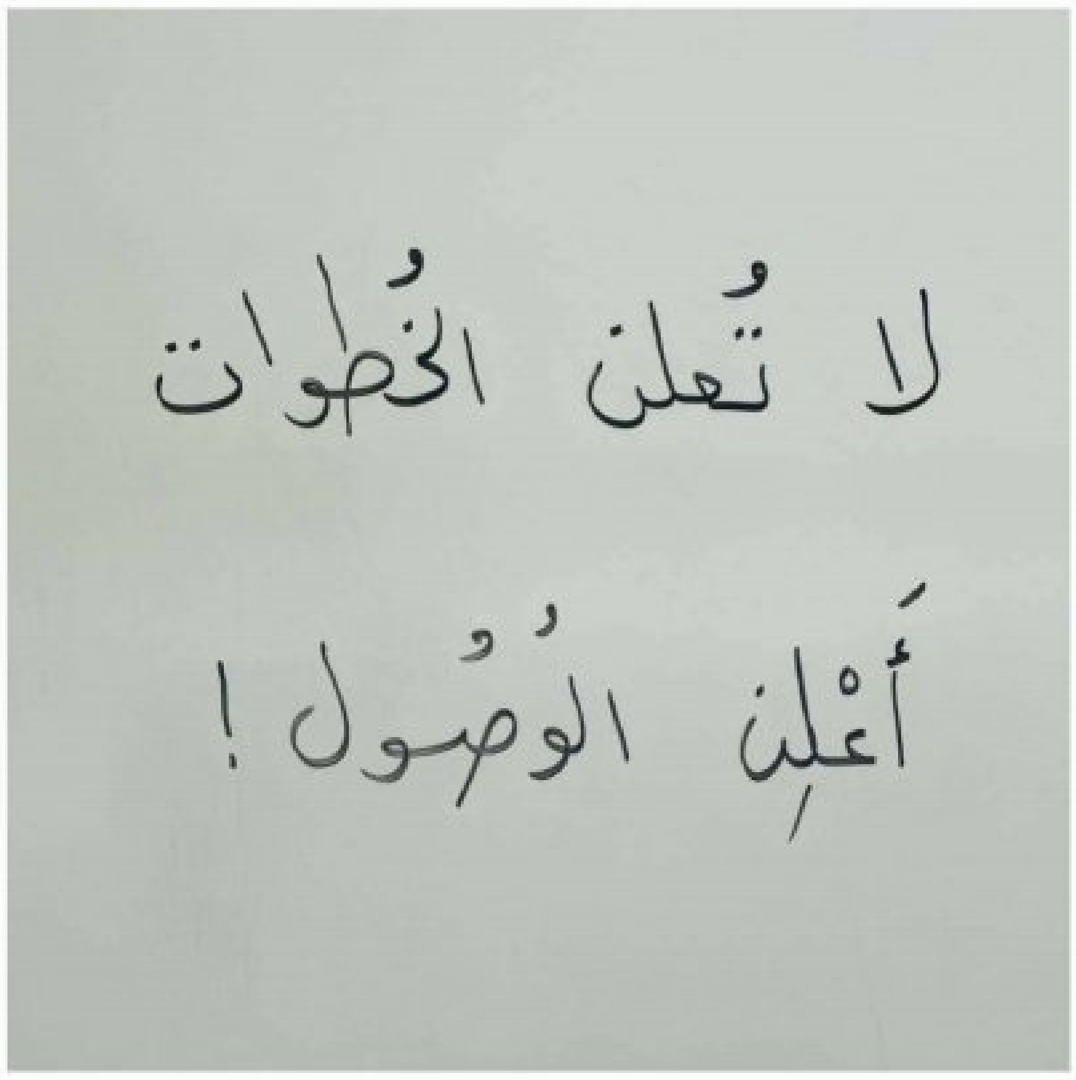
التجمع التعليمي



القناة الرئيسية: t.me/BAK111

بوت التواصل: @BAK1117_bot

لا تَختَرني لأنّني الشّخص المُناسِب أو لأنّني الخيار الأفضل،
أُريدُ أن أكون الشّخصَ الّذي تُصرّ عليهِ رُغم كلّ السّوء الّذي تَراهُ فيه .
- أحمد خالد توفيق -



« قوانين (I) »

1- إيجاد شعاع:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

2- حساب طويلة:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ و $\vec{u}(a,b,c)$

3- الارتباط الخطي:

أولاً: لشعاعين:

نقول عن $\vec{u}$, $\vec{v}$ أنهما مرتبطان خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بعد ضربه بعدد أي:

ط1: $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ أو $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

ط2: إذا تناسبت المركبات المتقابلة للشعاعين كانا مرتبطين خطياً.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow$ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً.

ثانياً: لثلاثة أشعة:

نقول عن $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا كان $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً ووجد عددين α, β بحيث أن:

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

4- قوانين الجداء السلمي:

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$

5- حساب Cosθ أو θ:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

6- معادلة الكرة: « مركز ونصف قطر ».

$$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

7- المستوي: « نقطة وناظم ».

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$$

8- المستقيم: « نقطة وشعاع توجيه ».

$$d: \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

9- بُعد نقطة عن مستوي:

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

قوانين نقطة

1- منتصف قطعة مستقيمة :

I منتصف [AB] ⇐

$$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_I = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z_I = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

2- مركز ثقل المثلث :

G مركز ثقل المثلث ABC ⇐

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

$$z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

3- مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط :

G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A, α) (B, β) ...

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \cdots}{\alpha + \beta + \cdots}$$

4- تحقق علاقة :

نعوض النقطة (x, y, z) ونتحقق بالعلاقة .

5- تجعل الرباعي ABCD متوازي أضلاع :

- نفرض $D(x, y, z)$
- بما أن ABCD متوازي أضلاع ⇐ $\vec{AB} = \vec{DC}$
- ونعود للحالة السابقة.

6- نظيرة نقطة بالنسبة لنقطة :

I نظيرة B بالنسبة لـ A

ط1 : A منتصف [BI] ⇐ $\vec{BA} = \vec{AI}$

ط2 :

$$x_I = 2x_A - x_B$$

$$y_I = 2y_A - y_B$$

$$z_I = 2z_A - z_B$$

ط3 : A منتصف [BI] ⇐

$$x_A = \frac{x_B + x_I}{2}$$

$$y_A = \frac{y_B + y_I}{2}$$

$$z_A = \frac{z_B + z_I}{2}$$

والمجهول هو إحداثيات I.

7- مركز متوازي الأضلاع أو نقطة متساوية البعد عن نقطتين :

- I مركز متوازي الأضلاع ABCD ⇐ I منتصف [AC] أو I منتصف [BD].
- I متساوية البعد عن A و B ⇐ I منتصف [AB].

8- نقطة على محور... ومتساوية البعد عن نقطتين :

- # إذا كانت A على محور الفواصل ⇐ $A(x, 0, 0)$
- # إذا كانت A على محور التراتيب ⇐ $A(0, y, 0)$
- # إذا كانت A على محور الرواقم ⇐ $A(0, 0, z)$
- وإذا كانت A متساوية البعد عن B و C ⇐ $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\|$

« قوانين نقط... »

9- نقطة تقاطع مستقيم مع مستقيم :

- نساوي بين معادلات المستقيمان : $d_1 \equiv d_2$
- بالحل المشترك لجملة المعادلات نحصل على قيمة الوسيطين .
- نتأكد في المعادلة التي لم نستخدمها .
- ثم نعوض إما قيمة t في تمثيلات d أو قيمة t' في تمثيلات d'

10- نقطة تقاطع مستقيم مع مستوي :

← نعوض التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي

← نحصل على قيمة t

← نعوضها في التمثيل الوسيطي

← نحصل على x , y , z (نقطة التقاطع) .

Note : إذا تبع لديك عند تعويض d في P

* $0 = 0$ ⇐ المستقيم محتوى في المستوي P .

* عدد $= 0$ ⇐ المستقيم يوازي المستوي P .

* عدد $= t$ ⇐ المستقيم يقطع المستوي P في نقطة .

11- نقطة تقاطع مستقيم مع كرة :

← نعوض تمثيلات d في معادلة S .

← نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بدلالة t

← بالحل نحصل على

(A) - قيمتين لـ t ⇐ يتقاطع المستقيم مع الكرة في نقطتين (نعوض قيم t في d ونبين) .

(B) - قيمة واحدة لـ t ⇐ المستقيم يمس الكرة في نقطة « نعوض t في d » .

(C) - المعادلة مستحيلة الحل ⇐ المستقيم خارج الكرة والاشترك معها بأي نقطة .

Note : لدراسة الوضع النسبي بين مستقيم وكرة نقارن بين (بُعد مركز الكرة عن المستقيم) .

$dist(\Omega, d) = R \Rightarrow$ d مماس

$dist(\Omega, d) < R \Rightarrow$ d قاطع

$dist(\Omega, d) > R \Rightarrow$ d خارج

12- المسقط القائم لنقطة على مستوي :

← نعطي تمثيل وسيطي للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي P ← نوجد نقطة تقاطع Δ مع P.

13 - المسقط القائم لنقطة على مستقيم :

← نكتب معادلة المستوي المار من A

ويعامد المستقيم Δ .

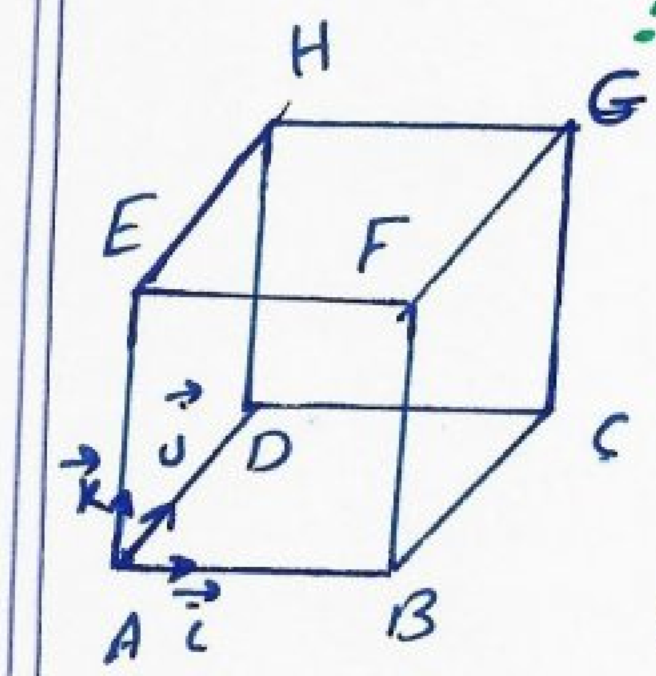
← نوجد نقطة تقاطع Δ مع P .

14 - نقطة تقاطع ثلاث مستويات :

غاوس .

15 - معلم متجانس :

A مكعب طول حرفه a :



$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{a}\vec{AD},\frac{1}{a}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $G(a,a,a)$

$B(a,0,0)$ $H(0,a,a)$

$D(0,a,0)$ $F(a,0,a)$

$E(0,0,a)$ $C(a,a,0)$

B متوازي سطوح / متوازي مستطيلات :

$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{b}\vec{AD},\frac{1}{c}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $G(a,b,c)$

$B(a,0,0)$ $H(0,b,c)$

$D(0,b,0)$ $F(a,0,c)$

$E(0,0,c)$ $C(a,b,0)$

C هرم :

$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{a}\vec{AD},\frac{1}{b}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $D(0,a,0)$ $E(0,0,b)$

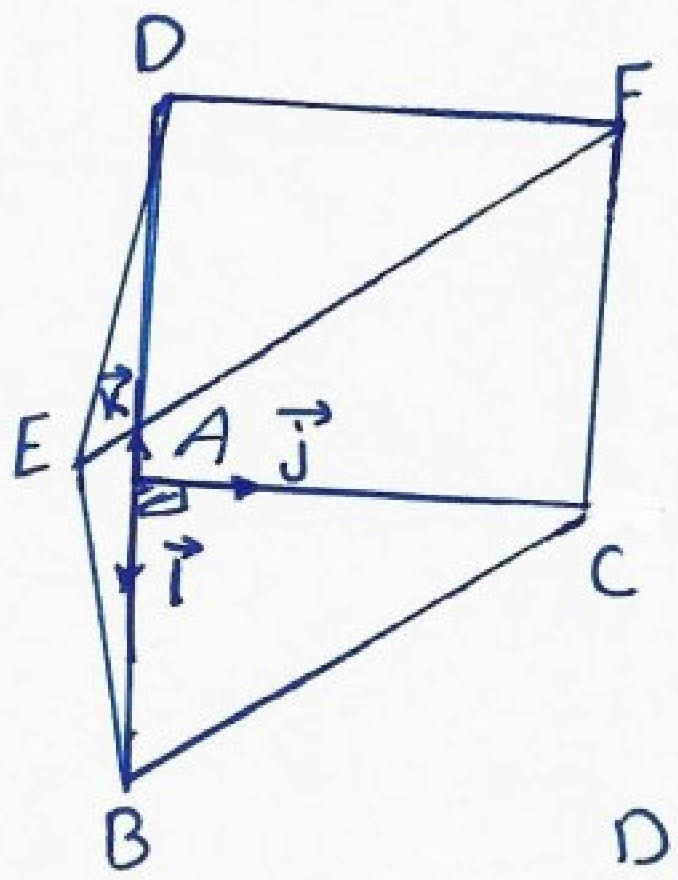
$C(a,a,0)$

D رباعي وجوه :

$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{a}\vec{AD},\frac{1}{a}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $D(0,a,0)$ $E(0,0,a)$

E الموشور القائم :



$(A;\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{b}\vec{AC},\frac{1}{c}\vec{AD})$

$A(0,0,0)$ $B(a,0,0)$ $C(0,b,0)$

$D(0,0,c)$ $F(0,b,c)$

$E(a,0,c)$

الارتباط الخطي :

أولاً : الارتباط الخطي لشعاعين : نقول عن الشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ أنهما مرتبطين خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بعد ضربه بعدد ثابت k. أي :

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad \text{أو} \quad \vec{v} = k.\vec{u}$$

أو : إذا تناسبت المركبات المتقابلة للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

$\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$

$\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \overset{?}{=} \frac{y_1}{y_2} \overset{?}{=} \frac{z_1}{z_2} \overset{?}{=} k$$

استخدامات الارتباط الخطي لشعاعين : (متى أفكر في استخدامه ؟؟!!)

① . طلب صريح ② . توازي شيئين متشابهين (مستقيمين - مستويين).

③ . تعامد مستقيم ومستوي (معادلة المستوي موجودة).

④ . وقوع ثلاث نقاط على استقامة أو في مستوي (أو نفي ذلك).

ثانياً : الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

نقول عن الأشعة $\vec{u}$, $\vec{v}$ و $\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا كان $\vec{u}$, $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً و وُجد عددين α و β يحققان :

$$\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

استخدامات الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

① . طلب صريح ② . وقوع 4 نقاط في مستوٍ واحد.

③ . توازي مستقيم ومستوي . (معادلة المستوي غير موجودة).

الكرة "spher"

* الشكل العام لمعادلة الكرة : $S : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

حيث : R : نصف القطر
$A(x_0, y_0, z_0)$ مركز الكرة.

OR $AM^2 = R^2$

* حالات الكرة :

① - مركزها A ونصف قطرها R : قانون + تعويض .

② - مركزها A وتمر من B : "ما في R" $R = \|\vec{AB}\|$
ثم : قانون وعوض .

③ - قطرها $[AB]$: "لا في مركز ولا في نصف قطر".
(I منتصف $[AB]$) I المركز

نصف القطر $R = \frac{\|\vec{AB}\|}{2}$ أو $= \frac{1}{2}\|\vec{AB}\|$

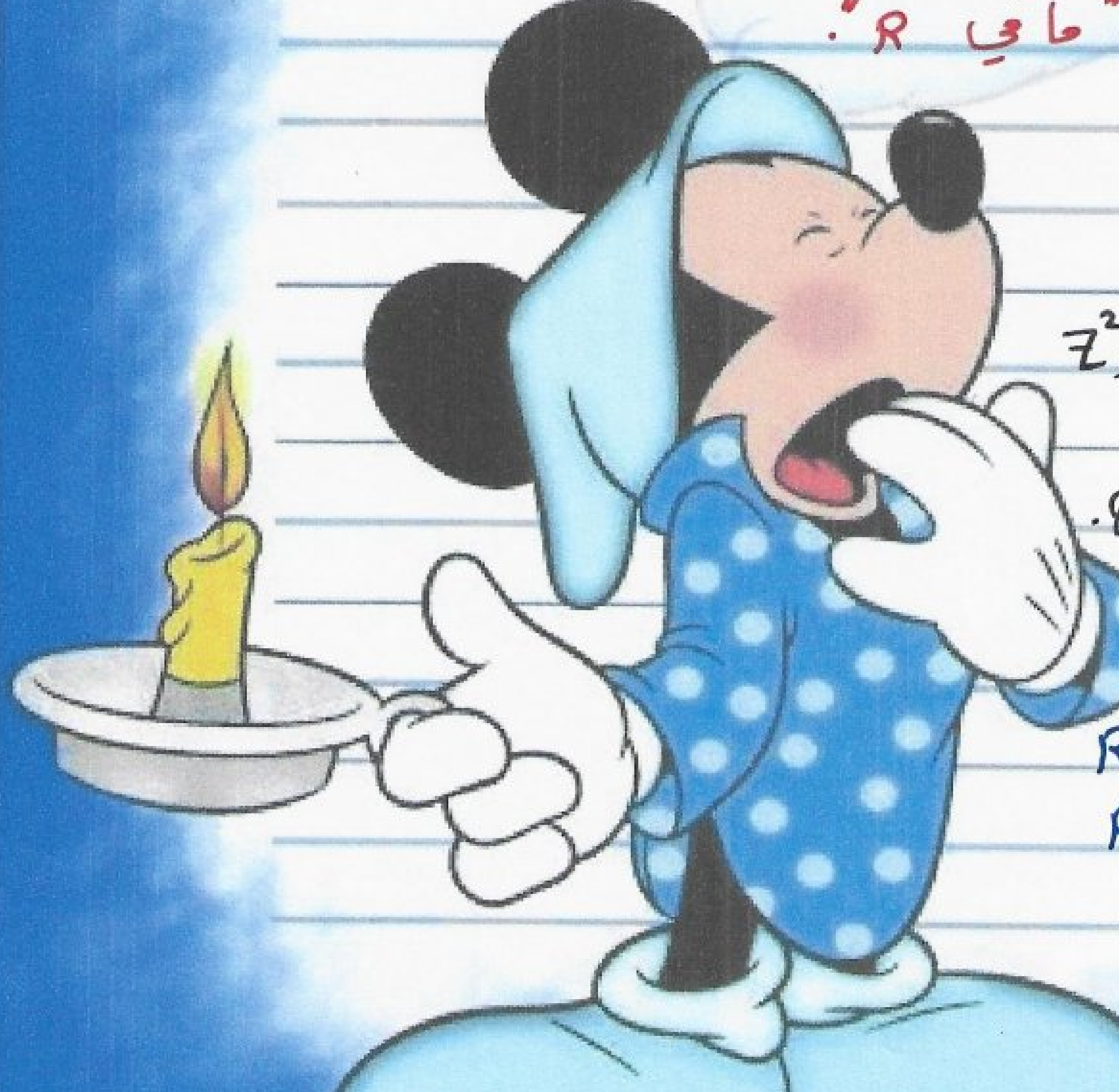
④ - مركزها A وتمس المستوي P : "ما في R".

$R = dist(A, P)$

⑤ - معادلة منشورة تحوي x^2 و y^2 و z^2

بالإتمام إلى مربع كامل تعود للشكل النموذج .

أوضاع كرة مع ... :
مع مستوي : 1- مماس : $R = dist$
2- تقاطع : $R > dist$
مع مستقيم : تقاطع : $R > dist$.



● الجداء السلمي : $\vec{u} \cdot \vec{v}$

أولاً : قوانين :

[1] $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$ « $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما مركبات »

[2] $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$ « في حال وجود θ زاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ »

[3] $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$ « لدينا أطوالات »

ثانياً : استخدامات و خواص :

① - طلب صريح « احسب $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ».

② - إيجاد θ : $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

③ - حساب $\|\vec{u}+\vec{v}\|$: من القانون الثالث ننطلق ونعزل $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

④ - الخواص : ① $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ الجداء السلمي تبديلي

② $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

← ● تعامد « مستقيمين - مستويين - شعاعين »

← ● توازي « مستقيم ومستوي ». « معادلة المستوي موجودة ».

← ● تعامد « مستقيم ومستوي » « معادلة المستوي غير موجودة ».

« إثبات أنه شعاع ناظم على مستوي ».

← ● إثبات المثلث ABC قائم في A (مثلاً)

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

هل تعلم أن :

مساحة المثلث القائم = $\dfrac{\text{جداء القائمين}}{2}$

وهل تعلم أيضاً : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

♥ المستوي :

⊛ الشكل العام لمعادلة المستوي: $p: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

حيث: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة

$M(x,y,z)$ نقطة من p

$\vec{n}(a, b, c)$ ناظم

* OR *

$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

♥ حالات المستوي:

1) مستوي مار من نقطة ويعامد أو يقبل شعاع ناظماً له

← قانون + تعويض.

2) مستوي مار من نقطة ويوازي مستوي:

← بما أن المستوي «المجهول» يوازي المستوي «المعلوم»

فإنه:

$\vec{n}$ المجهول $=$ $\vec{n}$ المعلوم

ثم قانون ونعوض.

3) المستوي المحوري لقطعة مستقيمة:

أي: المستوي العمودي على قطعة مستقيمة في منتصفها:

p معادلة المستوي المحوري لـ $[AB]$:

$\vec{n}_p = \overrightarrow{AB}$

I المنتصف (منتصف $[AB]$.)

أو: $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$.

④ - المستوي المار من نقطة ويعامد مستويين :

P مستوي مار من A ويعامد P_1 ، P_2 .

الخطوات :

① - نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P .

② - بما أن P_1 و P متعامدان فإنه : $\vec{n} \perp \vec{n_1} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n_1} = 0$ ---(1)

③ - بما أن P_2 و P متعامدان فإنه : $\vec{n} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n_2} = 0$ ---(2)

④ - ثم بالحل المشترك للمعادلتين ① و ② نحصل على $\vec{n}$ "ناظم المستوي P" .

و نعود للحالة الأولى « نقطة وناظم » .

⑤ - المستوي المار من نقطتين ويعامد مستوي :

P مستوي مار من A و B ويعامد Q .

الخطوات :

① - نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P .

② - بما أن P و Q متعامدان فإنه : $\vec{n} \perp \vec{n_Q} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n_Q} = 0$ ---(1)

③ - و بما أن P يمر من A و B فإنه : $\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ ---(2)

④ - وبالحل المشترك نحصل على $\vec{n}$ ونختار إما A أو B ونعود

للحالة الأولى (نقطة وناظم) .

⑥ - مستوي مار من ثلاث نقاط :

P مستوي مار من A و B و C . // أو معادلة المستوي (ABC) //

الخطوات:

① نحسب $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ونثبت أنهما غير مرتبطين خطياً.

② نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P.

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ --- } (1)$$

$$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ --- } (2)$$

③ وبالحل المشترك نحصل على $\vec{n}$ الناظم ونختار، إما A أو B أو C

ونعود للحالة الأولى «نقطة وناظم».

⑦ مستوي محدد بمستقيمين متقاطعين:

P مستوي محدد بالمستقيمين d_1 و d_2 المتقاطعان في النقطة I.

الخطوات:

① نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P.

$$\vec{n} \perp \vec{u_1} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u_1} = 0 \text{ --- } (1)$$

حيث: $\vec{u_1}$ شعاع توجيه المستقيم d_1.

$$\vec{n} \perp \vec{u_2} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u_2} = 0 \text{ --- } (2)$$

$\vec{u_2}$ شعاع توجيه المستقيم d_2.

② وبالحل المشترك نحصل على $\vec{n}$ ناظم المستوي P.

ولدينا I نقطة تقاطع d_1 و d_2.

ونعود للحالة الأولى «نقطة وناظم».

خوارزمية الحل المشترك :

* نبحث عن معادلة تحوي مجهول واحد ومنها ننطلق

* إذا لم نجد نبحث عن معادلة تحوي مجهولين وننطلق منها.

«ونفرض أن أحد المجاهيل هو أمثال المجهول الآخر للسهولة».

* وإذا كانت المعادلتان تحتويان على ثلاث مجاهيل نعتمد على حذف أحد المجاهيل إما بالجمع أو بالطرح أو بالعزل.

وأحياناً نضرب بعدد ثم نجمع أو نطرح.

VIN : إذا كان $\vec{n}(0,0,0)$ فهناك غلط وغالباً ما يكون في إيجاد الأشعة أو العمليات الحسابية.

VIN ② : ناظم المستوي هو: أمثال x و y و z في معادلته.

وإذا كان أحدهما مفقود نضع مكانه صفر.

بُعد نقطة عن مستوي :

حساب بُعد النقطة A عن المستوي P :

$$dist(A,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

استخداماته : ① طلب صريح ② حساب نصف قطر كرة تمس مستوي ③ دراسة وضع نسبي لمستوي وكرة ④ انتماء نقطة لمستوي.

« الرياضيات مع نسمة أمل »

المستقيم :

الشكل النموذجي لمستقيم مار من نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$

ويقبل $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ شعاعاً موجهاً :

$$d : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad ; \; t \in \mathbb{R} \qquad \underline{OR} \quad \vec{AM} = t \cdot \vec{u}$$

حالات المستقيم :

1) مار من نقطة ويقبل شعاع توجيه $\Leftarrow$ تعويض فقط .

2) مار من نقطتين « ما في شعاع توجيه »

الشعاع التوجيه هو الشعاع المار من A و B $\quad \vec{u} = \vec{AB}$

ثم نختار إما A أو B .

3) نصف مستقيم : $[AB) \leftarrow \vec{u} = \vec{AB}$

نعوض بـ A حصراً

$[BA) \leftarrow \vec{u} = \vec{BA}$

نعوض بـ B حصراً

مجال t : $t \in [0, +\infty[$

4) قطعة مستقيمة : $[AB] \leftarrow \vec{u} = \vec{AB}$

نختار إما A أو B .

مجال t : $t \in [0, 1]$

5) مستقيم مار من نقطة ويعامد مستوي :

بما أن المستقيم والمستوي متعامدان فإن : $\vec{u} = \vec{n}$.

⑥- الفصل المشترك لمستويين إما متقاطعين أو متعامدين.

أوضاع (I):

مستويين:

(I) توازي: شرط توازي المستويين p_1 و p_2 هو:

مرتبطين خطياً $\vec{n}_1$ و $\vec{n}_2$

p_1 , p_2 متوازيان $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_2$ و $\vec{n}_1$ مرتبطين

(II) تعامد: شرط التعامد لمستويين p_1 و p_2 هو:

" تعامد الناظم " $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow p_1 \perp p_2$$

(III) تقاطع: شرط التقاطع هو نفي التوازي

p_1 و p_2 متقاطعين $\Leftrightarrow$ غير مرتبطين $\vec{n}_2$ و $\vec{n}_1$

الفصل المشترك: هو مجموعة النقاط الناتجة عن تقاطع مستويين في حال (تقاطع - تعامد)

نحصل عليها بالخطوات التالية:

1- نبحث عن معادلة تحوي مجهول واحد ونبدأ منها

2- في حال لم نجد... نبحث عن معادلة تحوي مجهولين ونبدأ بها « نعزل أحد المجاهيل بدلالة الآخر ثم نعوض في المعادلة الأخرى فنحصل على مجهولين بدلالة .

المجهول الآخر « اعتبرناه ثابت ».

③ نفرض هذا المجهول هو t ثم نكتب تمثيلات الوسيطي

هنا ... لا داعي لإيجاد شعاع توجيه أو نقطة

④ في حال لم نجد معادلة تحوي مجهولين نجمع أو نطرح أو نضرب بعدد

لنحصل على المعادلة المنشودة.

بُعد نقطة عن مستقيم :

الحالة (I) : مستقيم معطى وسيطياً :

* لإيجاد بُعد النقطة A عن المستقيم d نجد 'A المسقط العمودي لـ A على d .
* ويكون البُعد بين النقطة A والمستقيم d هو "طويلة 'AA "

$$dist(A,d) = \|\overrightarrow{AA'}\|$$

الحالة (II) : المستقيم d هو الفصل المشترك لمستويين متقاطعين :

* لحساب بُعد A عن المستقيم d « الفصل المشترك لـ P_1 ، P_2 المتقاطعين ».

① - نوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d .

② - نعود للحالة السابقة.

الحالة (III) : المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين متعامدين.

* لإيجاد بُعد A عن المستقيم d الفصل المشترك لـ P_1 و P_2 المتعامدين :

① نحسب بُعد A عن كل من المستويين P_1 و P_2

② نطبق القانون : $dist(A,d) = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$

حيث d_1 : هو بُعد A عن المستوي P_1

d_2 هو بُعد A عن المستوي P_2 .

أوضاع (II) : — وضع مستقيمين —

أولاً : توازي :

شرط توازي مستقيمين هو : الارتباط الخطي لشعاعي التوجيه.

$d_1 // d_2 \Leftrightarrow \vec{u_1} , \vec{u_2}$ مرتبطين

ثانياً : تعامد :

شرط تعامد مستقيمين هو : تعامد شعاعي التوجيه

$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u_1} \cdot \vec{u_1} = 0$

ثالثاً : تقاطع :

1- ننفي التوازي « $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطياً ».

2- ندرس التقاطع « نجعل معادلات d_1 تساوي معادلات d_2 ».

ونحل جملة المعادلات ... ونحصل على المجاهيل (t و s مثلاً).

ونتحقق من تحقق المعادلة التي لم نستخدمها إذا كانت محققة

يكون d_1 و d_2 متقاطعان وإلا فهما متخالفان.

3- لإيجاد نقطة التقاطع بين المستقيمين : نعوض t في تمثيله

أو s في تمثيله.

أوضاع (3):

مستقيم ومستوي.

أولاً: توازي:

شرط توازي مستقيم ومستوي هو أن يكون الجداء السلمي لشعاع التوجيه والناظم معدوم.

$d \parallel P \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}=0$

ثانياً: تقاطع:

شرط تقاطع مستقيم ومستوي هو نفي التوازي

أي: P و d متقاطعان $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n}\neq 0$

وانتبه إلى: تقاطع مستقيم ومستوي في نقطة لإيجاد إحداثياتها:

① نعوض d في P ② نحصل على t ③ نعوض t في d

④ نحصل على x و y و z «إحداثيات نقطة تقاطع».

ثالثاً: تعامد: الحالة (I): معادلة المستوي موجودة:

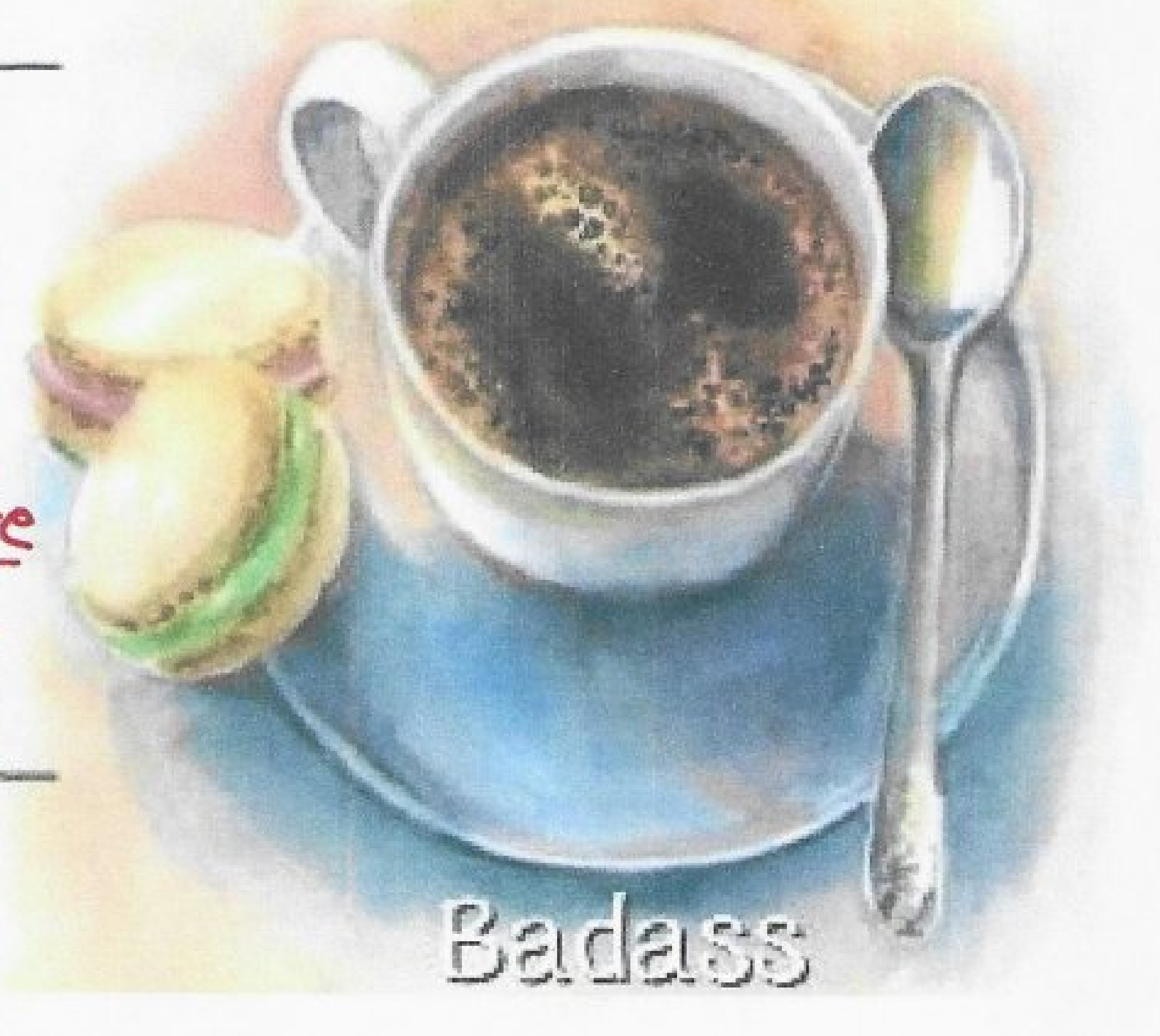
شرط التعامد هو الارتباط الخطي للناظم وشعاع التوجيه

d و P متعامدين $\Leftrightarrow$ $\vec{n}$ و $\vec{u}$ مرتبطين

الحالة (II): معادلة المستوي ليست موجودة:

شرط التعامد هو أنه يتعامد شعاع التوجيه مع شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي.

Note: إذا طلب إثبات أن مستقيم عمودي على مستوي مار من ثلاث نقاط فإننا نطبق القاعدة السابقة ونستفيد في ذلك لإيجاد معادلة المستوي « $\vec{n}=\vec{u}$ ».



- أوضاع (4) " كرة مع ... "

أولاً: كرة مع مستوي: فقياس الوضع النسبي هو المقارنة بين $dist(A, P)$ و الـ R.

Ⓐ - $dist(A,P) = R$ ⇐ المستوي يمس الكرة. « النقطة التماس هي المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي ».

Ⓑ - $dist(A,P) > R$ ⇐ المستوي خارج الكرة

Ⓒ - $dist(A,P) < R$ ⇐ المستوي يقطع الكرة في دائرة مركزها: المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي P.
نصف قطرها يُحسب من القانون:

$$r = \sqrt{R^2 - dist^2(A,P)}$$

ثانياً: كرة مع مستقيم: فقياس الوضع هو المقارنة بين $dist(A,d)$ و الـ R.

Ⓐ - $dist(A,d) = R$ ⇐ المستقيم يمس الكرة في نقطة « يكون للمعادلة المشتركة بين d و S حل وحيد أي قيمة وحيدة لـ t ».

Ⓑ - $dist(A,d) < R$ ⇐ المستقيم يقطع الكرة في نقطتين « يكون للمعادلة المشتركة حلين أي قيمتين لـ t ».

Ⓒ - $dist(A,d) > R$ ⇐ المستقيم لا يشترك مع الكرة بأية نقطة « المعادلة مستحيلة الحل ».

وللحصول على المعادلة المشتركة نعوض d في S.

- أوضاع (5) : ثلاث مستويات # غاوس :

خطوات طريقة غاوس :

تستخدم هذه الطريقة لدراسة الوضع النسبي لثلاث مستويات.

الحالة الأولى : أمثال x في المعادلة الأولى هو "واحد"

① نضرب المعادلة الأولى بعكس أمثال x في المعادلة الثانية ونجمع «الضرب على المسودة ... وناتج الجمع في مكان المعادلة الثانية والمعادلة الأولى تبقى كما هي».

ونضرب المعادلة الأولى بعكس أمثال x في المعادلة الثالثة ونجمع «كما في الخطوة الأولى».

② - أمثال y في المعادلة الثانية "واحد"

* نضرب المعادلة الثانية بعكس أمثال y في المعادلة الثالثة
* في حال كانت أمثال y عدد غير الواحد فإما نبدل مع الثالثة

أو نضرب المعادلة الثانية والثالثة بأعداد متعاكسة ثم نجمع.

③ نحصل على معادلات من النمط :
1) x, y, z فيها
2) y, z فيها
3) z فيها

من ③ نحصل على z نعوض في ② نحصل على y نعوض في ① نحصل على x, y, z.

VIP : لدينا حالات خاصة :

Ⓐ - $0 = 0$ ⇐ المستويات تتقاطع في فصل مشترك.

Ⓑ - $a = 0$ ⇐ المستويات لا تتقاطع في أي نقطة
أي مقس (عدد) للمجهول ذاته.

Ⓒ - قيمة واحدة لكل مجهول ⇐ المستويات تشترك في نقطة واحدة.

الحالة الثانية : أمثال x في المعادلة الأولى هو "ناقص واحد"
«نفس الخطوات ولكن نضرب بالعدد وليس بعكسه بالإشارة».

VIP : في حال أمثال x لا واحد ولا ناقص واحد "نبدل" مع أي معادلة تحققه الشرط.

المسقط القائم

أولاً : المسقط القائم على مستوي :

1) معادلة المستوي موجودة.

2) نفرض $A'(x,y,z)$ المسقط القائم لـ A على المستوي P.

3) $\vec{AA'}$ عمودي على المستوي P

$\vec{n}$ عمودي على المستوي P

$\vec{AA'}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

$\vec{AA'} = \alpha \vec{n}$ ...(*)

4) نعزل x و y و z بدلالة α نسمي جملة المعادلات بـ (*)

5) A' تنتمي إلى المستوي P فهي تحقق معادلته. « نعوض (*) في P نحصل على α »

6) نعوض α في (*) نحصل على x و y و z فهي إحداثيات المسقط القائم لـ A على P.

ابتسام مصطفى الجمل

ثانياً : المسقط القائم على مستقيم :

1) التمثيل الوسيطي للمستقيم موجود.

2) نفرض $A'(x,y,z)$ المسقط القائم لـ A على d.

3) $\vec{AA'}$ عمودي على المستقيم d

$\Rightarrow \vec{AA'} \cdot \vec{u} = 0$ ...(*)

4) نحصل على علاقة تشبه معادلة المستوي فيها x , y , z نسميها (*).

5) A' تنتمي إلى المستقيم d فهي تحقق معادلاته « نعوض d في (*) نحصل على t ».

6) نعوض t في d نحصل على x و y و z وهي إحداثيات المسقط القائم لـ A على d.

الرياضيات مع بسمة أمل

أثبت أن :

♥ أثبت أن :

المعادلة ... هي معادلة المستوي P المار من A و B و C مثلاً.

ط1 : نوجد معادلة المستوي بالطريقة الطبيعية وتكون ذاتها المعادلة المعطى.

ط2 : نعوض النقاط A و B و C في المعادلة المعطى ... وتكون جميعها محقق.

♥ أثبت أن :

A' هو المسقط القائم لـ A على المستوي P.

ط : يجب أن نتحقق الشرطين :

① $\vec{AA'}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً

② A' تنتمي إلى المستوي P.

ط : نوجد المسقط القائم بالطريقة المعتادة وتكون هي ذاتها النقطة المعطى.

♥ أثبت أن :

النقطة A تنتمي إلى المستوي P.

ط1 : dist(A, P) = 0

ط2 : نعوض A في المستوي وتكون محققة 0 = 0

ط3 : الارتباط الخطي للثلاثة أشعة.

ط4 : A مركز أبعاد متناسبة للنقاط من P.

♥ أثبت أن :

الشعاع $\vec{n}$ ناظم أو عمودي على المستوي P ومعادلة P غير موجودة :

ط1 : نوجد معادلة المستوي بالطريقة العادية ويكون $\vec{n}$ مرتبط خطياً أو هو ذاته الناظم الذي حصلنا عليه.

ط2 : نثبت أن $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي P.

♥ الحالة الأولى :

المعادلة تحوي x^2 و y^2 و z^2 و x و y و z

بالإتمام إلى مربع كامل نحصل على طرف ثاني k ونقرر حسب k.

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=k$$

Ⓐ $k>0$: تمثل كرة مركزها (a,b,c) ونصف قطرها $R=\sqrt{k}$

Ⓑ $k=0$: تمثل نقطة وحيدة (a,b,c).

Ⓒ $k<0$: تمثل مجموعة خالية ϕ.

♥ الحالة الثانية:

في x^2 و y^2 و z^2 وفي متراجحة

إما اسطوانة أو مخروط

♥ ماذا تمثل مجموعة النقاط؟

♥ الحالة الثالثة :

① $MA = MB$

«في M بالطرفين»

تمثل معادلة المستوي المحوري لـ $[AB]$

② $MA = k$.

$MA = BC$

«في M بطرف واحد»

تمثل كرة مركزها A ونصف قطرها

$R=BC$ أو $R=k$.

③ $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$.

«في M بالطرفين «الشعاعين» والعلاقة جداء».

تمثل كرة قطرها $[AB]$.

④ $\vec{MA}\cdot\vec{u}=0$ -

$\vec{MA}\cdot\vec{BC}=0$

«في M شعاع واحد فقط».

تمثل المستوي المار من A

ويقبل $\vec{BC}$ أو $\vec{u}$ ناظماً له.

انتباه ... انتباه ... انتباه ...

يجب أن نميز بين سؤال

"ماذا تمثل مجموعة النقاط" والسؤال

"عين موضع النقطة التي تحقق"

ففي الصيغة الأولى نعتمد على الحالات الثلاث.

وفي الحالة الثانية نعتمد على شال ومتوازي الأضلاع وزرع حرفاً.

أثبت :

♥ أثبت صحة علاقة ؟

♥ عيّن موضع النقطة M ؟

أولاً : فكر في شال

* $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

تستخدم لجمع شعاعين متتاليين فنأخذ شعاع له بداية الأول ونهاية الثاني.

دلالته « حرف مشترك إما في الوسط

أو طرح شعاعين والمشترك في البداية »

$\vec{AB}+\vec{BF}=\vec{AF}$

$\vec{BH}-\vec{BL}=\vec{BH}+\vec{LB}=\vec{LB}+\vec{BH}=\vec{LH}$

ثانياً : فكر في متوازي الأضلاع :

* تستخدم لجمع شعاعين لهما نفس البداية

فنأخذ شعاع له البداية المشتركة

ونأخذ الرأس الرابع الناتج لتشكل متوازي أضلاع .

$\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AD}$

دلالته : حرف مشترك في البداية "جمع"

أو حرف مشترك على الأطراف " طرح "

$\vec{BH}-\vec{LB}=\vec{BH}+\vec{BL}=\vec{BK}$

ثالثاً : فكر في الحالة الخاصة لمتوازي الأضلاع .

I منتصف $[AB]$

$\vec{CA}+\vec{CB}=2\vec{CI}$

« احفظ معي : إذا كان I منتصف $[BC]$ فإنه :

$\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AI}$ (2 والمنتصف والمشترك)

رابعاً : إذا كان في إشارة سالب اقلب الشعاع لتتخلص منها .

$-\vec{AB}=+\vec{BA}$

خامساً : في حال عدد مشترك فكر في العامل المشترك

مثال :

I منتصف $[CD]$

$$\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{AD})$$
$$=\frac{1}{2}(2\vec{AI})$$
$$=\vec{AI}$$

سادساً : فكر في زرع حرفاً

سابعاً : في التبديل فكر ... أو افرض معلم .

- الأسطوانة -

الحالة (I): محورها $(\vec{i};o)$

ونصف قطرها r

ومركزي قاعدتيها (a,0,0)

(b,0,0)

$y^2+z^2=r^2$ و $a\le x\le b$ «ما في x^2»

الحالة (II): محورها $(\vec{j};o)$

ونصف قطرها r

ومركزي قاعدتيها (0,a,0)

(0,b,0)

$x^2+z^2=r^2$ و $a\le y\le b$ «ما في y^2»

الحالة (III): محورها $(\vec{k};o)$

ونصف قطرها r

ومركزي قاعدتيها (0,0,a)

(0,0,b)

$x^2+y^2=r^2$ و $a\le z\le b$ «ما في z^2».

- قوانين الأسطوانة -

أولاً: حجم الأسطوانة:

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = S_b \cdot h$ ...(*)

S_b: مساحة الدائرة

$S_b = \pi r^2$

h: الارتفاع وهو البعد بين القاعدتين «بين مركزي القاعدتين»

$h = \|\vec{AB}\|$

→ $V = \pi r^2 \|\vec{AB}\|$

ثانياً: المساحة الجانبية للأسطوانة:

$S = p \cdot h$

«المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع»

p: محيط الدائرة

$p = 2\pi r$

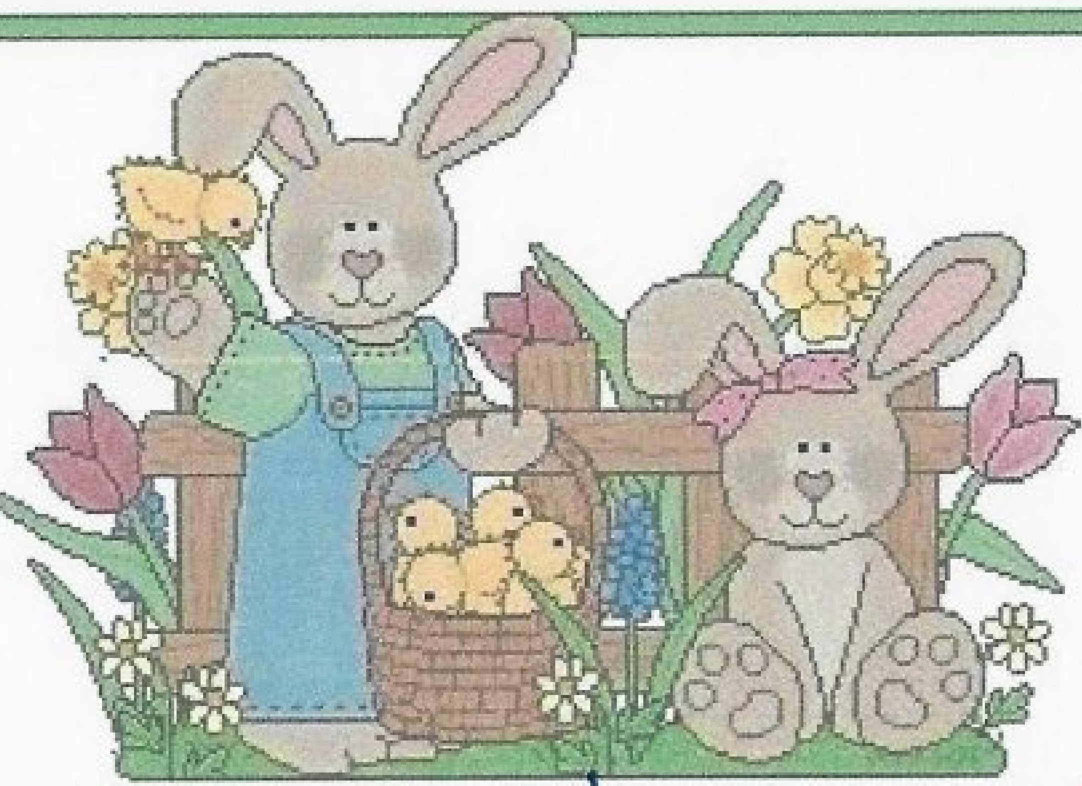
→ $S_L = 2\pi r \cdot h$

ثالثاً: المساحة الكلية:

= المساحة الجانبية + ضعفي مساحة القاعدة

$S_{ToT} = 2S_b + S_L$

→ $S_{ToT} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$



الحالة (I): رأسه O ومحوره $(O; \vec{i})$ قاعدته دائرة مركزها $(h, 0, 0)$ ونصف قطرها r:

$$y^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}x^2 = 0 \quad , \quad 0 \le x \le h$$

الحالة (II): رأسه O ومحوره $(O; \vec{j})$ قاعدته دائرة مركزها $(0, h, 0)$ ونصف قطرها r:

$$x^2 + z^2 - \frac{r^2}{h^2}y^2 = 0 \quad , \quad 0 \le y \le h$$

الحالة (III): رأسه O ومحوره $(O; \vec{k})$ قاعدته دائرة مركزها $(0, 0, h)$ ونصف قطرها r:

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{h^2}z^2 = 0 \quad , \quad 0 \le z \le h$$

- المخروط -

• حجم المخروط:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \quad ...(*)$$

S_b: مساحة القاعدة (دائرة)

$$S_b = \pi r^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

- الهرم -

• حجم الهرم: ثلث مساحة القاعدة x الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \quad ...(*)$$

S_b: مساحة القاعدة

(قد تكون مربع - مستطيل مثلث - ....)

مساحات متنوعة:

1) المربع:

$S = a^2$

a طول الضلع

2) المستطيل:

$S = L \times W$

L: الطول و W العرض

3) المثلث "عام":

$S = \frac{1}{2} b . h$

b القاعدة h: الارتفاع

4) متوازي الأضلاع:

$S = b . h$

5) المثلث متساوي الساقين:

S = القاعدة (المتوسط) x الارتفاع المتعلق بها

6) شبه المنحرف:

$$S = \frac{(a_1 + a_2) \cdot h}{2}$$

a_1: القاعدة الكبرى و a_2: القاعدة الصغرى.

أفكار نادرة

الفكرة الأولى :

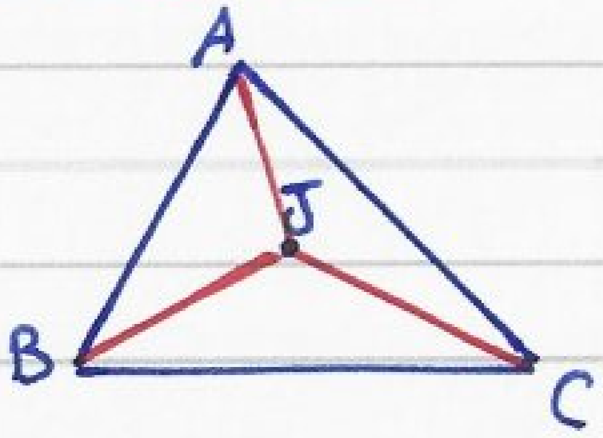
نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث :

لإثبات أن J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث $\hat{ABC}$ يجب أن تتحقق أحد الشرطين :

1] $\vec{AB} \cdot \vec{CJ} = 0 \Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{CJ}$

2] $\vec{AC} \cdot \vec{BJ} = 0 \Leftrightarrow \vec{AC} \perp \vec{BJ}$

3] $\vec{BC} \cdot \vec{AJ} = 0 \Leftrightarrow \vec{BC} \perp \vec{AJ}$



الفكرة الثانية :

إيجاد البعد بين مستويين متوازيين :

لحساب البعد بين المستويين P_1 و P_2 المتوازيان نختار نقطة من أحدهما ونحسب بعدها عن المستوي الآخر.

مثلاً : A نقطة من P_1
B نقطة من P_2
P_1 و P_2 متوازيان

$$dist(P_1, P_2) = dist(A, P_2)$$
$$= dist(B, P_1)$$

* لاختيار نقطة من مستوي نعوض بدل من x و y مثلاً بالأصفار ونحصل على z

$x = y = 0$ أي $(0, 0, z)$

الفكرة الثالثة :

إثبات أن المثلث متساوي الأضلاع :

لإثبات أن المثلث ABC متساوي الأضلاع يجب أن نثبت أن

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\| = a$$

ومساحة المثلث متساوي الأضلاع :

$$S = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

ومحيط المثلث متساوي الأضلاع :

$$P = 3a$$

وارتفاع المثلث متساوي الأضلاع

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

مركز الأبعاد المتناسبة

نقول عن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) ....

إذا حقق: $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\cdots=\vec{0}$

و $\alpha+\beta+\cdots\neq 0$

إيجاد إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) ...

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\cdots}{\alpha+\beta+\cdots}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\cdots}{\alpha+\beta+\cdots}$$

$$Z_G=\frac{\alpha Z_A+\beta Z_B+\cdots}{\alpha+\beta+\cdots}$$

تعيين موضع M أو G مركز الأبعاد المتناسبة

1) في حال نقطتين: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

2) في حال ثلاث نقاط: $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

خواص:

1) I منتصف $[AB]$ ⟸ I م.أ.م لـ (A,α) (B,β) ح $\boxed{\alpha=\beta}$

2) G مركز ثقل المثلث ABC ⟸ G م.أ.م لـ (A,α) (B,β) (C,γ)

ح $\boxed{\alpha=\beta=\gamma}$

3) G مركز رباعي الوجوه ABCD ⟸ G م.أ.م لـ (A,α) (B,β) (C,γ) (D,δ)

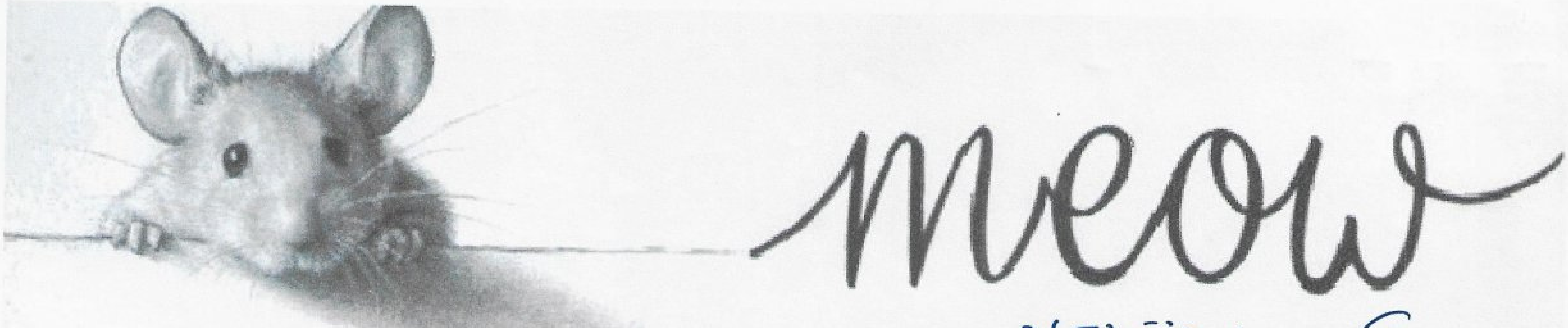
$\boxed{\alpha=\beta=\gamma=\delta}$

4) الخاصية التجميعية:

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ)

وكانت K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) (C,γ)

⟸ G م.أ.م لـ (B,β) و $(K,\alpha+\gamma)$



5 - المبرهنة (7):

إذا كانت G م.أ.م للجمل (A, α) , (B, β) , (C, γ) , ...

وكانت M نقطة كيفية: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \dots$

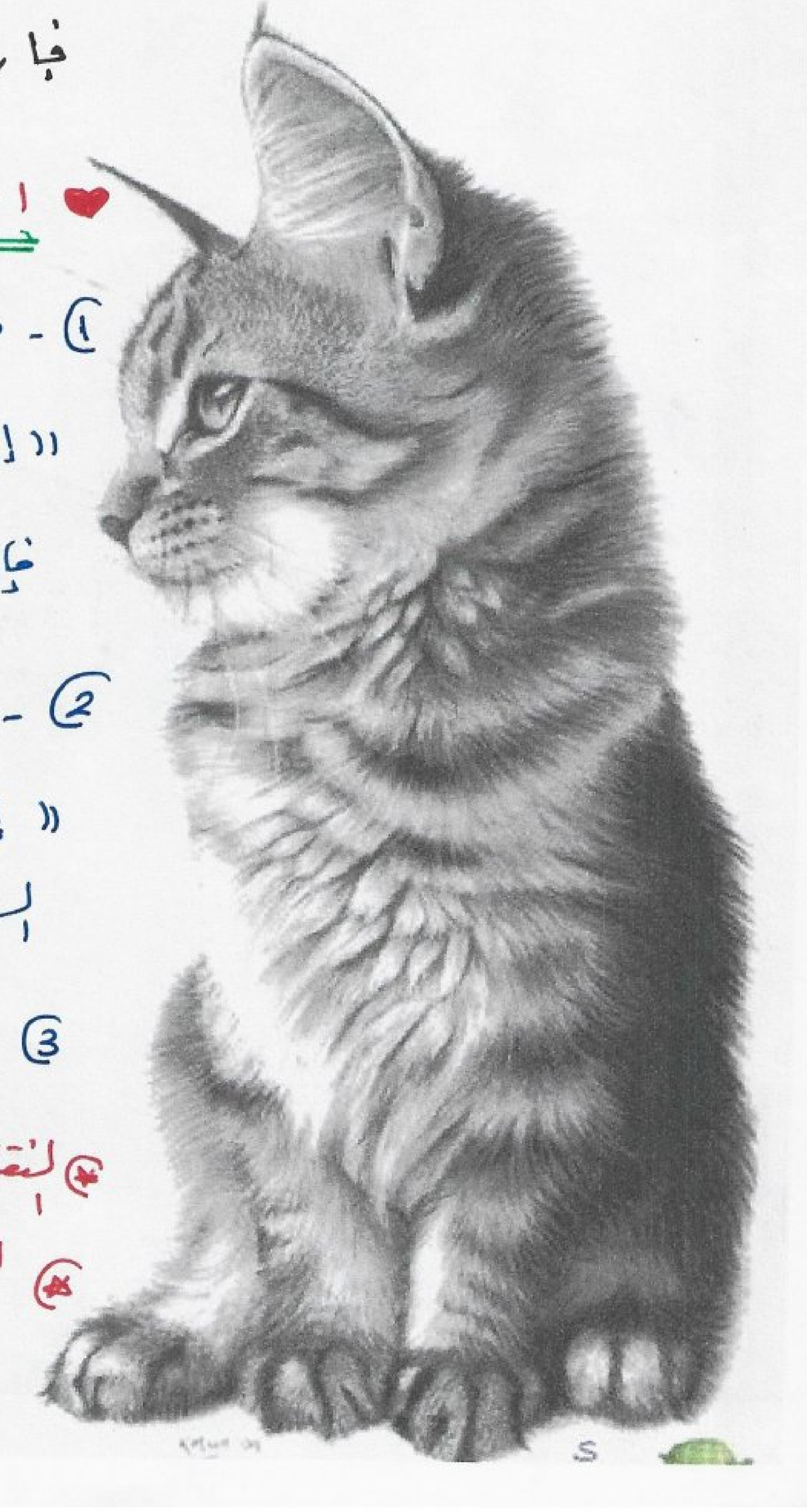
فإنه: $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} + \dots = (\alpha+\beta+\gamma+\dots)\overrightarrow{MG}$

♥ تستخدم هذه الخاصية بكثرة عند إثبات أو تحديد "ماذا تمثل مجموعة النقاط"

♥ VIN: في حال كان المجموع في الطرف الثاني يساوي الصفر ((مجموع المثقلات)).

فإن الطرف الثاني لا يحوي M"

♥ استخدامات مركز الأبعاد المتناسبة:



1 - وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة.

((إذا كانت إحدى النقاط هي مركز أبعاد للنقطتين الباقيتين

فإن النقاط الثلاث على استقامة واحدة)).

2 - وقوع 4 نقاط في مستوٍ واحد.

((إذا كانت إحدى النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث

الباقية فإن النقاط تقع في مستوٍ واحد)).

3 إثبات تقاطع مستقيمين:

* النقاط I و G و J على استقامة واحدة
* النقاط L و G و K على استقامة واحدة

المستقيمان (IJ) و (LK) يتقاطعان في النقطة G.

Smile of hope

تمارين شاملة في الأشعة

التمرين الأول:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقاط: $A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$

$C(5,0,5)$ $D(6,2,5)$

1- جد إحداثيات النقاط:

I: منتصف $[AB]$.

G: مركز ثقل المثلث $\hat{ABC}$.

H: التي تجعل الرباعي ABCH متوازي أضلاع.

K: نظيرة A بالنسبة لـ D.

Q: على محور الفواصل ومتساوية البعد عن A و B.

M: التي تحقق: $\vec{AM} = 2\vec{AB} + \vec{CD}$

2- أثبت أن الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

3- عيّن العددين الحقيقيين α, β تحققان: $\vec{AD} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$ ماذا تستنتج؟

التمرين الثاني:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي P الذي معادلته:

$P: 2x+y-3z+2=0$

والنقطة $A(1,1,-2)$ والمطلوب:

1- أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.

2- اكتب معادلة المستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

3- احسب البعد بين المستويين P, Q.

4- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمس المستوي P

5- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي P

6- أوجد إحداثيات A' المسقط القائم لـ A على المستوي P.

ابتسام العمر ♥

عبد الوهاب بربانة

التمرين الثالث:

نتأمل المستويين P_1, P_2:

$P_1: x+y-2z-1=0$

$P_2: x+y+z=0$

1- أثبت أن P_1 و P_2 متعامدين.

2- احسب بعد النقطة $A(2,1,2)$ عن كل من المستويين P_1 و P_2.

3- استنتج بعد A عن المستقيم d الفصل المشترك لـ P_1, P_2.

4- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d.

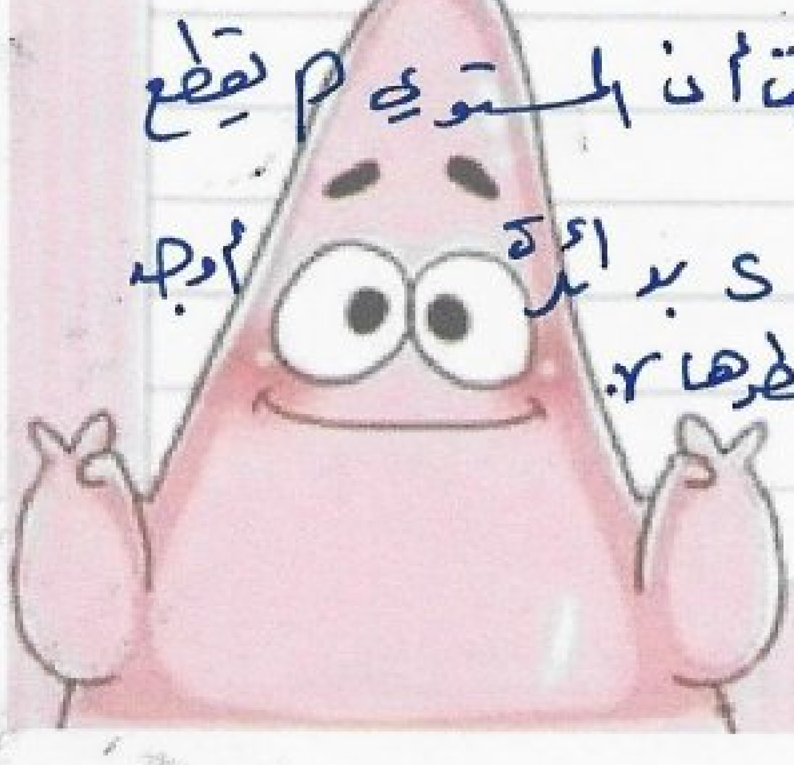
التمرين الرابع:

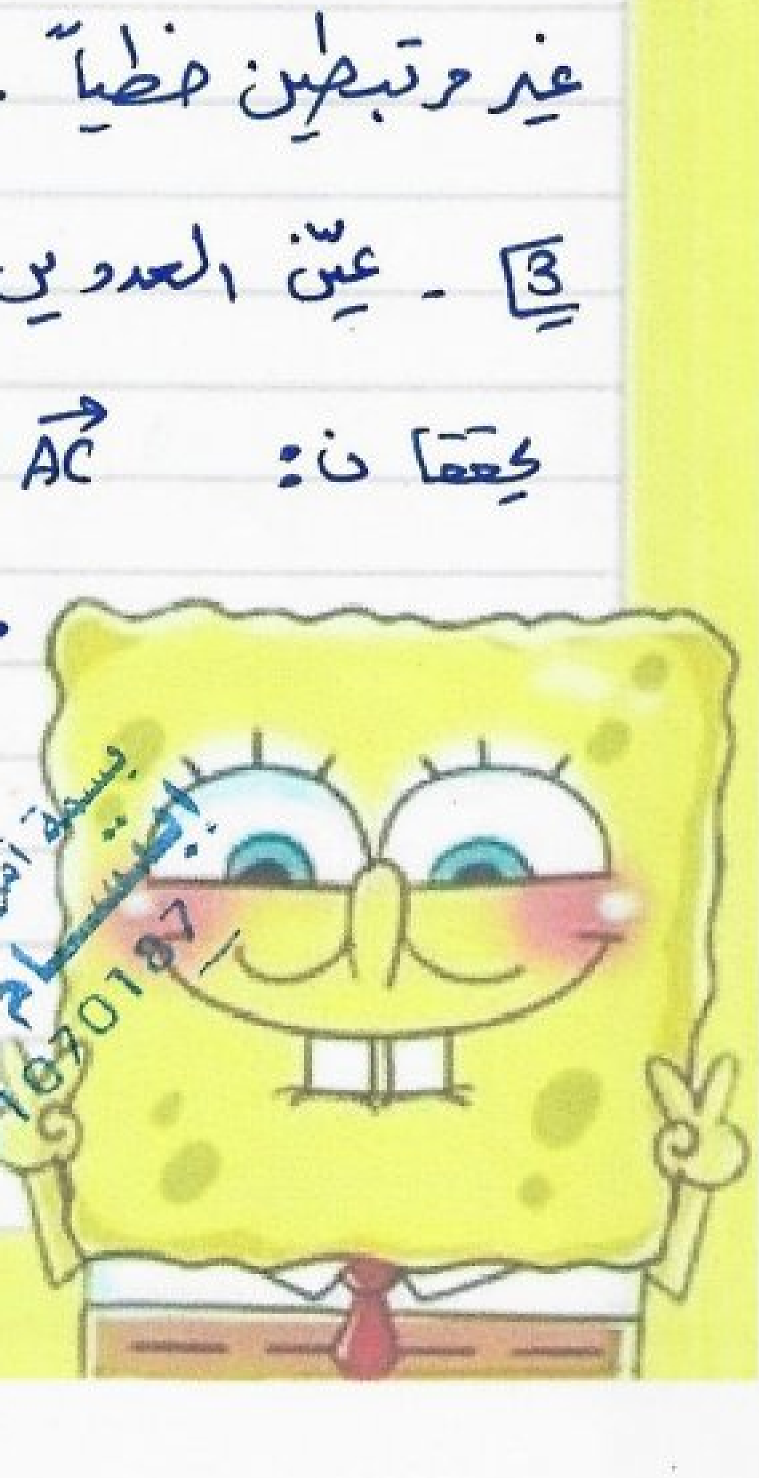
في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقطة $A(1,-2,0)$ والمستوي

$P: x+2y+z-1=0$

1- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A ونصف قطرها $R=4$

2- أثبت أن المستوي P يقطع الكرة S بدائرة أوجد نصف قطرها r.



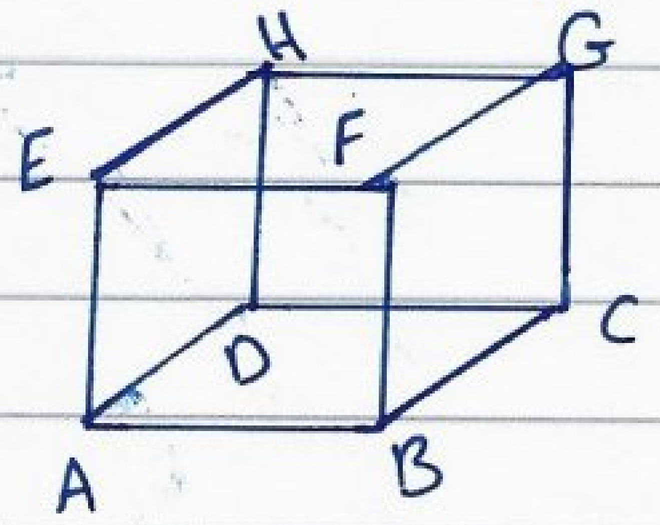


التمرين الخامس:

ناقش وحسب قيم العدد K ما تمثله مجموعة النقاط M التي تحقق:

$$x^2+y^2+z^2+4x-6y-K=0$$

التمرين السادس:



ABCDEFGH مكعب و I منتصف [EF]. عين موضع النقاط (M ، K ، N ، L ، O و J) التي تحقق العلاقات:

(A) $\vec{AM}=\vec{AE}+\vec{AB}+\vec{AD}$

(B) $\vec{AK}=\vec{AC}-\vec{HA}-\vec{BC}$

(C) $\vec{AN}=\frac{1}{2}(\vec{AG}+\vec{HB})$

(D) $\vec{AL}=\vec{AB}-\vec{FB}+\frac{1}{2}\vec{GH}$

(E) $\vec{AO}=\vec{FE}+\vec{DG}$

(F) $\vec{AJ}=\vec{AB}+\vec{DH}$

التمرين السابع:

ABCD رباعي وجوه منتظم طول حرفه a. G مركز ثقله. I منتصف [BC] والمطلوب:

1- احسب الجداءات: $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ ، $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$ ، $\vec{AB}\cdot\vec{CD}$

2- عين موضع النقطة M التي تحقق: $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{AC}-\vec{BI}$

3- حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق: $\|\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}+\vec{MD}\|=8$

التمرين الثامن:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $A(1,2,3)$ ، $B(3,2,3)$ ، $C(2,-1,5)$ والمطلوب:

1- أثبت أن النقاط A، B و C ليست على استقامة واحدة.

2- عين إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC.

3- جد إحداثيات M التي تحقق: $2\vec{CA}+\vec{BM}=\vec{0}$

4- عند أية قيمة للوسيط λ تنتمي النقطة $H(-2,-1,\lambda)$ إلى المستوي (ABC).

5- بفرض $K(2,\alpha,1)$ أثبت أن المثلث ABK متساوي الساقين مهما تكن $\alpha\in\mathbb{R}$.

6- جد معادلة الكرة S التي مركزها O وتمر بالنقطة C.

7- a- أثبت أن لكل نقطة D من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(x,2,3)$

b- احسب CD^2 بدلالة x.

c- عند أي قيمة للعدد x يكون CD أصغر ما يمكن؟

d- استنتج بعد C عن المستقيم (AB).

التمرين التاسع:

لديك النقطة $A(3,-1,2)$ والمستويين P و Q:

$P: 2x-y+z-4=0$

$Q: x+y+2z-5=0$

1- أثبت أن P و Q متقاطعين

2- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ الفصل المشترك لـ P و Q.

3- أعط معادلة للمستوي R المار من A ويعامد P و Q.

4- استنتج بعد A عن المستقيم Δ.

الرياضيات مع بسمة أمل ^^.

التمرين العاشر:

تتأمل في معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط

$A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$

$C(3,1,-2)$ $D(-4,2,1)$

1- أثبت أن المثلث ABC قائم واحسب مساحته.

2- أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).

3- احسب بُعد D عن المستوي (ABC)

4- احسب حجم رباعي الوجوه (DABC).

5- اكتب معادلة الكرة التي مركزها D وتمس المستوي (ABC).

التمرين الحادي عشر:

تتأمل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,5,4)$ $B(10,4,3)$

$C(4,3,5)$ $D(0,4,5)$

1- بيّن أن النقاط A وB وC ليست على استقامة واحدة.

2- بيّن أن النقاط A, B, C, D تقع في مستوٍ واحد.

3- استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) (B,β) (C,γ) حيث α, β, γ أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

SAM omar

التمرين الثاني عشر:

تتأمل في المعلم المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط

$A(1,0,0)$ $B(4,3,-3)$

$C(-1,1,2)$ $D(0,0,1)$

1- أثبت أن الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- أثبت أن الأشعة $\vec{AD}$ و $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطة خطياً

3- استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,α) (B,β) (C,γ) حيث α, β, γ أعداد حقيقية يجب تعيينها.

التمرين الثالث عشر:

$A(1,0,-1)$ $B(2,1,0)$

$P: x-y+z+1=0$

1- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (AB).

2- ادرس الوضع النسبي بين (AB) والمستوي P.

التمرين الرابع عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط: $A(1,0,-1)$ $B(-1,4,1)$

$C(2,3,3)$ $D(2,1,5)$

1- بيّن أن الشعاع $\vec{u}(-1,-1,1)$ عمودي على المستوي (ABC).

2- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3- بيّن أن ABCD رباعي أوجه.

4- احسب مساحة المثلث ABC.

5- احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC).

6- احسب حجم رباعي الأوجه (ABCD).

التمرين الخامس عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستوي $P: x-y+z-11=0$ يمس الكرة S التي مركزها $A(+1,-1,3)$.

1- جد نصف قطر الكرة (S) ثم اكتب معادلة ديكارتية لـ S.

2- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من A ويعامد المستوي P.

3- لتكن النقطة H نقطة تماس (S) والمستوي (P)، عيّن إحداثيات H.

4- عيّن إحداثيات النقط المشتركة بين (S) وحامل محور الفواصل.

5- المستويان P_1 و P_2 معرفان وفق:

$P_1: x-y-2z-3=0$

$P_2: 2x+y-z-2=0$

* اكتب معادلة المستوي المار من $B(3,-6,2)$ والعمودي على المستويين P_1 و P_2.

التمرين السادس عشر:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لديك النقاط: $A(1,4,1)$ و $B(0,2,1)$ و $C(1,6,0)$

1- a- بين أن النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

b- اكتب معادلة المستوي (ABC).

2- S كرة مركزها $\omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=3$

a- اكتب معادلة الكرة S.

b- احسب بُعد ω عن المستوي (ABC).

3- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم D المار من ω والعمودي على (ABC).

4- بيّن أن المستوي (ABC) يقطع الكرة S في دائرة، عيّن مركزها ونصف قطرها.

التمرين السابع عشر:

صنف مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق:

1- $x^2+y^2=25$ و $3\le z\le 7$ واحسب حجم المجسم الناتج.

2- $x^2+y^2+z^2-4x+10y-6z+38=0$

3- $x^2+z^2-\frac{1}{4}y^2=0$ و $0\le y\le 4$

فلنواصل السير نحو غايات أهم. ♥

التمرين الثامن عشر:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,1,2)$ و $B(3,1,-4)$ و $C(2,0,-1)$ و $H(2,-9,-1)$

1- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

2- أثبت أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث $\hat{ABC}$.

التمرين التاسع عشر:

$A(1,2,1)$ و $B(2,2,2)$ و $C(2,3,1)$

* احسب $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ ثم احسب قياس الزاوية $B\hat{A}C$.

التمرين العشرين:

$ABCD$ رباعي وجوه.

G مركز ثقله

I منتصف $[AD]$

J منتصف $[BC]$

* أثبت أن G و I و J تقع على استقامة واحدة.

التمرين الواحد والعشرين:

ليكن المثلث ABC جِد العددين x و y بحيث:

$$\vec{AM}=x\vec{AB}+y\vec{AC}$$

إذا علمت أن M مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,4)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$.

التمرين الثاني والعشرين:

في الفضاء المنسوب لمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,2,-1)$ و $B(0,2,1)$ و $C(3,-2,2)$

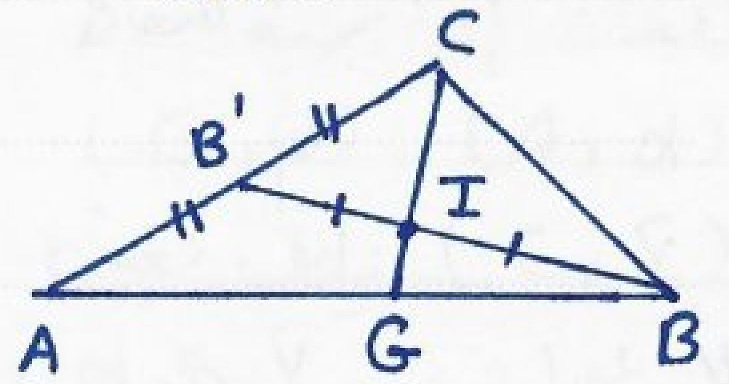
1- عيّن إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,-1)$

2- أثبت أن (BG) يوازي (AC).

التمرين الثالث والعشرون

انطلاقاً من الشكل المجاور جِد الأعداد α,β,γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) واستنتج λ التي تحقق:

$$\vec{GA}+\lambda\vec{GB}=\vec{0}$$



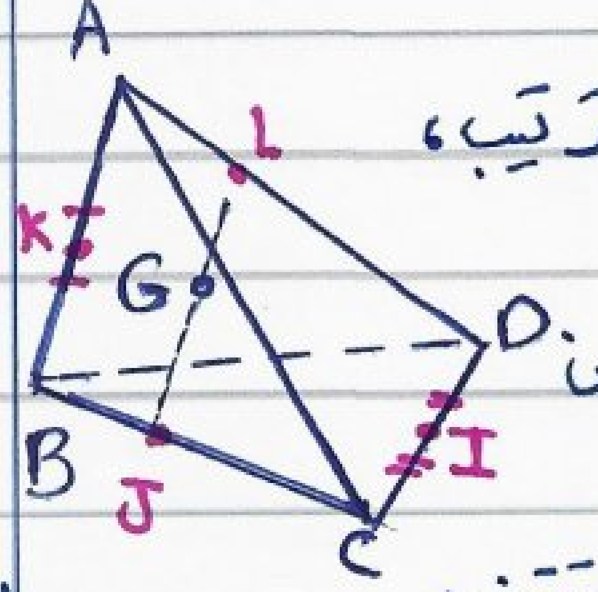
"عندما تعطيك الحياة سبباً لليأس... أعطها ألف سبب للاستمرار... خطوة صغيرة كل يوم رغم المصاعب ستتراكم لتشكل شيئاً عظيماً"

Rahaf

التمرين الرابع والعشرون:

ABCD رباعي وجوه .

I و K منتصفا الحرفين [CD] و [AB] على الترتيب، L و J نقطتان معرفتان بالعلاقتين:



$\vec{CJ} = \frac{2}{3}\vec{CB}$ ، $\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AD}$

وأخيراً G منتصف [JL] .

* أثبت أن النقاط G و I و K على استقامة واحدة .

التمرين الخامس والعشرون:

ABCD رباعي وجوه فيه النقاط K و I و R و P تحقق:

$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AD}$

$\vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CB}$ ، $\vec{BQ} = \frac{1}{3}\vec{BD}$

و R منتصف [CD] و I منتصف [AB] و G م.أ.م لـ (A,2) (B,2) (C,1) (D,1)

والمطلوب:

1- أثبت أن المستقيمان (IR) و (PK) متقاطعان .

2- عيّن موضع J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (C,1) (A,2)

3- عيّن المجموعة ع المكونة من M التي تحقق:

$$\|2\vec{MA} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MB} + \vec{MD}\|$$

التمرين السادس والعشرون:

ABCDEFGH مكعب والنقاط I و J و K و L منتصفات [AB] و [AE] و [BG] و [EG] بالترتيب

M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,1) (B,1) (G,1) (E,1)

1. أثبت أنه M تنتمي إلى [IJ] وعيّن موضعها

2. أثبت أن M تنتمي إلى [KL] وعيّن موضعها

3. استنتج أن النقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد، وعيّن طبيعة الرباعي IJKL .

Samomar

Date: / /

أُراني اليوم مبتسماً ... أأنت سعادتي قلبي ..

تُراكَ أيا رفيق الروح ... رونق زهرة الفلِ ...

أتذكر دعوةً صعدت ... بليلٍ هادئ الظلِ

صديقتي مُذ صحبتك .. لم أرد إلّا من الدلِ

أنرت من الهدى أُفقي ... وشمسك أصبحت تملي

تشاركنا همومَ العيش ... من كربٍ ومن حلٍّ

أرى الإيناس يصحبني ... وأنت بجانبي ظلي

تصوبني وترأف بي ... إذا ما تهت في زلّ

فيا رباه في عرفي ... تجمعنا بلا غلٍّ ... بلا همٍّ بلا حزن

بلا ضيقٍ ... بلا ذلّ .

« المستوي »

« ورشة عمل حالات المستوي »

التمرين الأول:

اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ حيث $A(3,1,2)$ $B(1,-1,-2)$

التمرين الثاني:

اكتب معادلة المستوي P المحدد بالنقاط $A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$ $C(3,1,-2)$

التمرين الثالث:

اكتب معادلة المستوي Q العمودي على كل من $A(1,1,2)$ $B(1,2,3)$ ويعامد المستوي P:

$$P: 2x+y-z+1=0$$

التمرين الرابع:

اكتب معادلة المستوي Q المار من $A(3,1,0)$ ويوازي المستوي P الذي معادلته $P: 3x-y+z+2=0$

التمرين الخامس:

اكتب معادلة المستوي P المار من $A(1,1,4)$ ويقبل $\vec{BC}$ ناظماً له حيث $B(2,0,3)$ $C(-1,1,2)$

التمرين السادس:

اكتب معادلة المستوي P المار من $A(2,-1,3)$ ويعامد المستويين:

$$P_1: 2x+y-z+4=0$$

$$P_2: x-y-3z+1=0$$

التمرين السابع:

لديك المستقيمان d_1 و d_2 المعرفان وسيطياً وفق:

$$d_1: \begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \; ; t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

$$d_2: \begin{cases} x=4-5k \\ y=3-2k \; ; k\in\mathbb{R} \\ z=-1+2k \end{cases}$$

1- أثبت أن d_1 و d_2 متقاطعان في نقطة I

2- جد إحداثيات I

3- اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d_1 و d_2

التمرين الثامن:

المستقيمان d و d' المعرفان وسيطياً وفق:

$$d: \begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \\ z=-t \end{cases} \; ; t\in\mathbb{R}$$

$$d': \begin{cases} x=2s-1 \\ y=s-2 \\ z=3s-2 \end{cases} \; ; s\in\mathbb{R}$$

1- أثبت أن d و d' متقاطعان، ثم عين إحداثيات I نقطة التقاطع.

2- اكتب معادلة المستوي P المحدد بالمستقيمين d و d'.

إذا كنت تقرأ هذا... ادعُ لي ولا تخبرني، أحتاج أن تحدث معي أشياء جميلة في حياتي بسبب دعوات من لا أعرف صاحبها

#بسمة

المسألة الأولى:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط

$A(3,1,-3)$ $B(-1,5,-3)$ $C(-1,1,1)$

1- أوجد $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ ثم احسب $\|\vec{AB}\|$ ، $\|\vec{AC}\|$

2- أوجد قياس θ حيث $\theta=(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$

3- اكتب معادلة المستوي P المار بالنقاط A و B و C

4- أوجد إحداثيات D' المسقط القائم لـ $D(1,-1,1)$ على المستوي P.

5- أثبت تعامد المستويين P و Q حيث:

$$Q: 6x-5y-z+1=0$$

6- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الفصل المشترك للمستويين P و Q.

المسألة الثانية:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط

$D(1,2,1)$ $C(1,1,1)$ $B(2,1,0)$ $A(1,-1,2)$

1- احسب $\cos(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}})$

2- اكتب معادلة المستوي (ABC).

3- أوجد إحداثيات D' المسقط القائم لـ D على المستوي (ABC).

4- اكتب معادلة المستوي Q المار من النقطة D ويقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ ناظماً له.

5- أعط تمثيلاً وسيطياً للفصل المشترك للمستويين P و Q.

المسألة الثالثة:

نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط

$C(1,2,3)$ $B(1,0,-1)$ $A(1,2,-1)$.

1- احسب $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ و $\vec{AB}\cdot\vec{BC}$

2- اكتب معادلة المستوي P يمر من M منتصف $[AC]$ ويقبل $[BC]$ ناظماً له.

3- اكتب معادلة المستوي Q العمودي على المستوي P ويمر من A و O .

4- احسب بعد النقطة C عن المستقيم d الفصل المشترك للمستويين P و Q .

المسألة الرابعة:

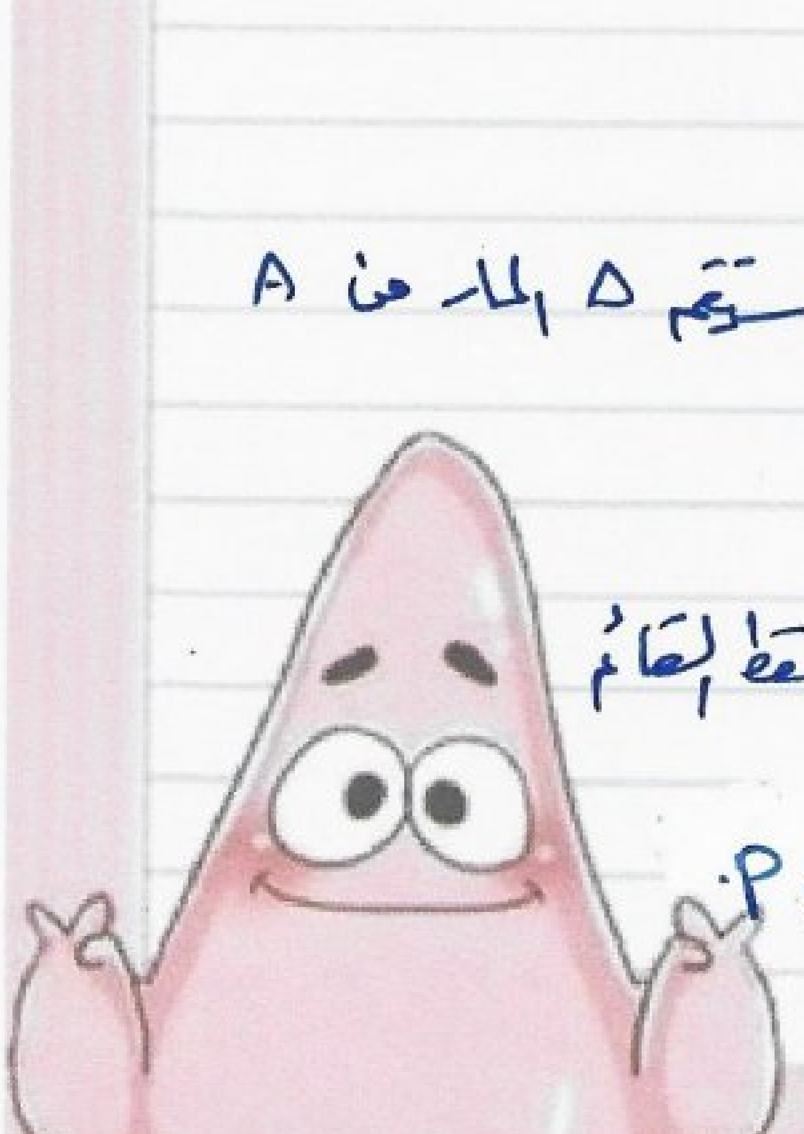
نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتان $A(1,-1,2)$ $B(2,0,4)$ والمستوي P الذي معادلته:

$$P: x-y+3z-4=0$$

1- جد معادلة المستوي Q المار من A و B والعمودي على المستوي P.

2- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من A ويعامد المستوي P.

3- عيّن إحداثيات A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي P.



④- أعط معادلة المجموعة ع المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\vec{AM}\cdot\vec{BM}=0$ وما هي طبيعة المجموعة ع؟

المسألة الخامسة:

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نفرض إحداثيات $A(1,2,0)$ $B(1,1,2)$ $C(3,4,1)$ $D(-8,1,2)$ والمطلوب:

① - أثبت أن النقاط A, B, C تعين مستو P اكتب معادلته.

② - إذا علمت أن معادلة المستوي P هي: $P: 5x-4y-2z+3=0$

• أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار من D والعامد على المستوي P.

③ - جد إحداثيات D' المسقط القائم لـ D على P.

④ - أثبت أن المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته.

⑤ - احسب حجم رباعي الوجوه $(ABCD)$.

⑥ - اكتب معادلة الكرة S التي مركزها D وتمر من A.

⑦ - أثبت أن المستوي يقطع الكرة S

⑧ - احسب نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع المستوي P مع الكرة السابقة.

⑤- اكتب معادلة الدائرة C.

المسألة السادسة:

مكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه (1) وليكن المعلم $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ والمطلوب:

1- عيّن إحداثيات رؤوس المكعب.

2- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC).

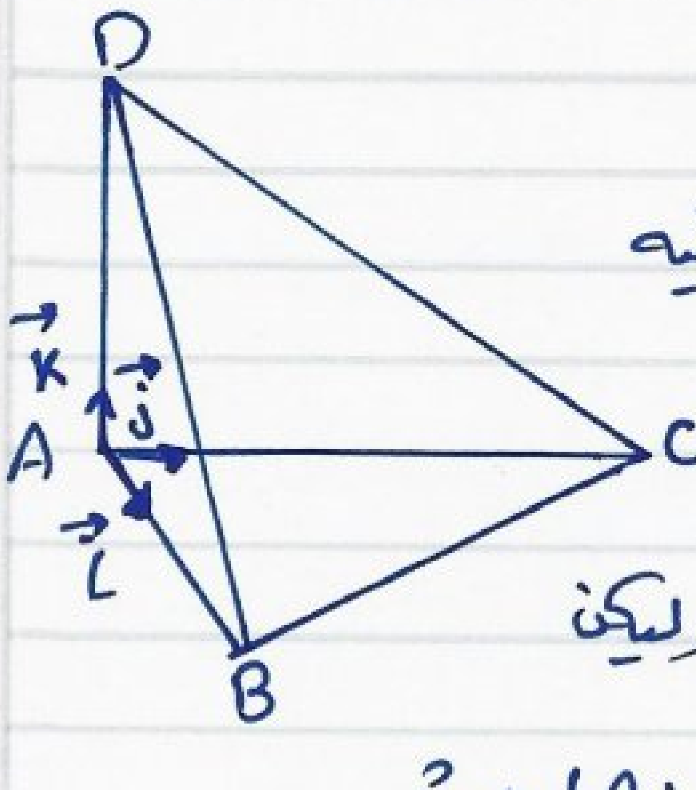
3- اكتب معادلة المستوي (AFH).

4- جد إحداثيات I الناتجة عن تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (AFH).

5- أثبت أن المثلث AFH متساوي الأضلاع واحسب حجم رباعي الوجوه $(EAFH)$.

6- اكتب معادلة الكرة التي مركزها E وتمس المستوي (AFH).

المسألة السابعة:



$OABC$ رباعي وجوه فيه ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين و $DA\perp(ABC)$ وليكن المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\vec{AB}=3\vec{i}$ و $\vec{AC}=3\vec{j}$ ، $\vec{AE}=3\vec{k}$

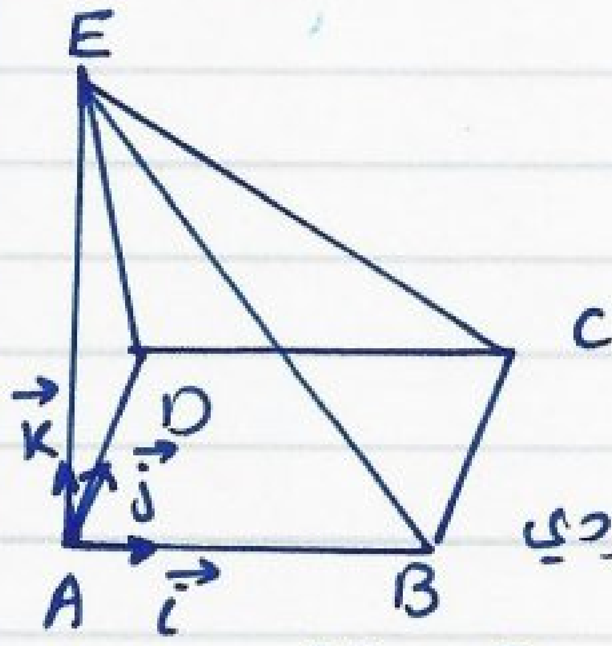
① عيّن إحداثيات النقاط A ، B ، C ، D

② أوجد إحداثيات G مركز ثقل المثلث BCD.

3- أثبت أن $\vec{AG}$ ناظم على المستوي (BCD)، ثم استنتج معادلة المستوي (BCD).

4- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس المستوي (BCD).

5- عيّن إحداثيات النقطة N التي تجعل (ABNC) مربعاً.



المسألة الثامنة:

E-ABCD هرم وقاعدته مربع (EA) عمودي على المستوي (ABCD) وليكن المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\vec{AD}=3\vec{j}$, $\vec{AB}=3\vec{i}$, $\vec{AE}=3\vec{k}$ والمطلوب:

1- أوجد إحداثيات النقاط A , B , C , D , E.

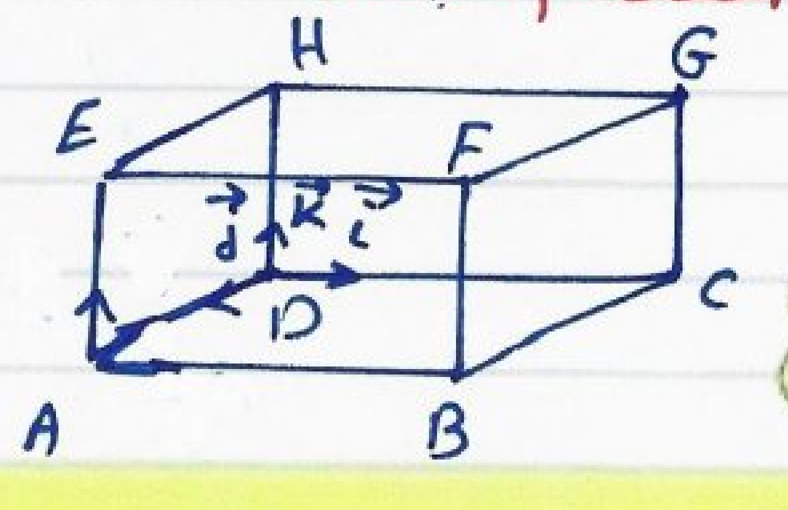
2- أوجد إحداثيات G مركز ثقل المثلث $E\hat{B}D$.

3- أثبت أن $\vec{AG}$ ناظم على المستوي (EBD) ثم استنتج معادلة المستوي (EBD).

4- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها C وتمس المستوي (EBD).

5- احسب حجم الهرم (E-ABCD).

المسألة التاسعة:



في الشكل المرسوم لدينا متوازي مستطيلات فيه $BC=CG=1$ و $AB=2$ و I منتصف [DC]، ليكن المعلم $(D;\vec{DA},\frac{1}{2}\vec{DC},\vec{DH})$.

1- عيّن إحداثيات النقاط E , G , I , F.

2- أثبت أن المثلث EIG قائم ثم احسب مساحته.

3- أثبت أن $\vec{n}(2,1,-1)$ ناظم على المستوي (EIG)، ثم استنتج معادلة هذا المستوي.

4- احسب حجم الرباعي (FEIG).

5- أثبت أن المستوي (EIG) مماس للكرة S التي معادلتها: $6x^2+6y^2+6z^2-1=0$

المسألة العاشرة:

EABCD هرم رباعي رأسه E قاعدته مربع طول ضلعه 3 . (AE) عمودي على المستوي (ABCD) و $EA=3$. نختار المعلم المتجانس $(A;\frac{1}{3}\vec{AB},\frac{1}{3}\vec{AD},\frac{1}{3}\vec{AE})$ والمطلوب:

1- عيّن إحداثيات النقاط A , B , C , D , E.

2- جد معادلة المستوي (EBC).

3- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

4- استنتج أن H منتصف (EB) هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

5- احسب حجم الهرم (E-ABCD).

المسألة (11):

ABCD رباعي وجوه فيه DAC و CAB و BAD مثلثات قائمة في A وفيه $AB=4$ و $AC=4$ و $AD=6$ ولتكن I منتصف $[BC]$ والنقطة M تحقق: $\vec{BM}=-3\vec{AC}$ والنقطة G مركز ثقل المثلث $A\hat{D}I$. نتأمل المعلم المتجانس $(A;\frac{1}{4}\vec{AB},\frac{1}{4}\vec{AC},\frac{1}{6}\vec{AD})$ والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط: D, B, C, I, M, G

2- أثبت أن معادلة المستوي (BCD) هي:

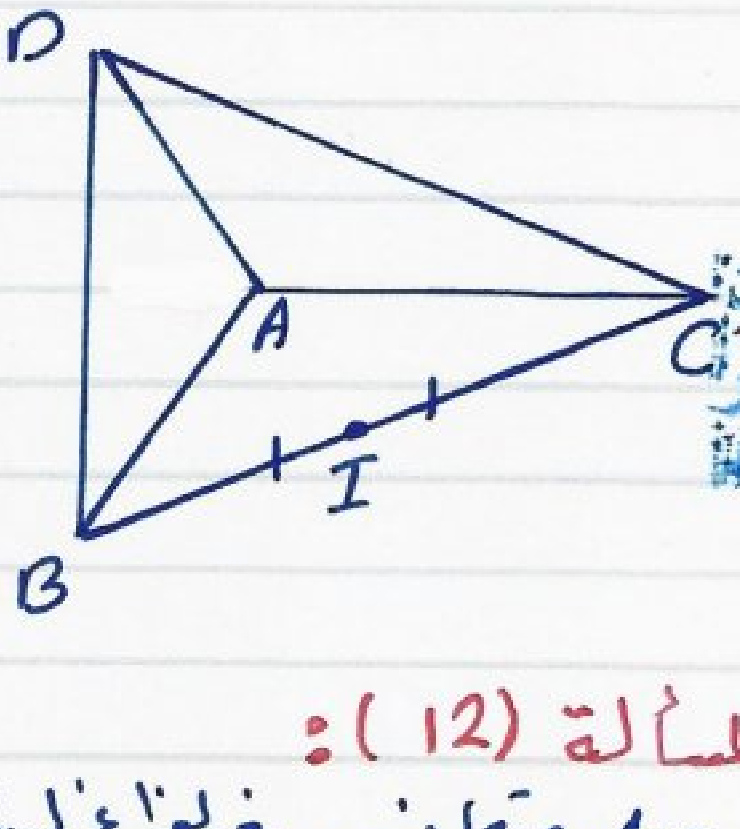
$$3x+3y+2z-12=0$$

3- احسب حجم رباعي الوجوه (C-ABD).

4- احسب بعد A عن المستوي (BCD).

5- استنتج مساحة المثلث $B\hat{C}D$.

6- بفرض: $\vec{AM}=\alpha\vec{DG}+\beta\vec{DC}$ عيّن α,β ثم استنتج أن (AM) يوازي المستوي (DGC).



المسألة (12):

في معلم متجانس في الفراغ لدينا النقاط $A(2,3,-1)$ $B(3,5,-3)$ $C(1,2,m)$ $D(2,1,-1)$

1- عيّن قيمة m ليكون المثلث ABC قائم في B واحسب مساحته.

2- أثبت أن D-ABC رباعي وجوه.

3- اكتب معادلة المستوي (ABC).

4- احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC).

5- أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (CD).

6- احسب بعد النقطة A عن المستقيم (CD).

7- بفرض $E(1,-1,-3)$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها E وتمس المستوي (ABC).

8- اكتب معادلة المستوي Q المار من D ويوازي المستوي (ABC).

9- اكتب معادلة المستوي المحوري للقطعة [AD].

10- اكتب معادلة الكرة S' التي قطرها [BC].

11- ادرس تقاطع الكرة S' مع المستوي

$$R: x+y+z-5=0$$

واحسب نصف قطر دائرة المقطع.

* احسب حجم رباعي الوجوه (D-ABC)

المسألة (13):

في معلم متجانس لدينا النقاط:

$A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$ $C(3,1,-2)$ $D(-4,2,1)$

1- أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{A}$ واحسب مساحته.

2- أثبت أن $\vec{n}(2,-3,1)$

ناظم للمستوي (ABC)، واكتب معادلة المستوي (ABC).

③ احسب بُعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم رباعي الوجوه (D_ABC).

④. أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D ويعامد المستوي (ABC).

⑤. جد إحداثيات D' المسقط القائم لـ D على المستوي (ABC).

⑥. اكتب معادلة المستوي P المار من النقاط $F(1,-1,2)$, $E(2,0,4)$ والعمودي على المستوي (ABC).

⑦. احسب بُعد D عن المستوي P ثم استنتج بُعد النقطة D عن المستقيم d الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين P , (ABC).

⑧. أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $\vec{AM}\cdot\vec{BM}=0$ وما هي طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$ ؟

المسألة (14):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

النقاط: $A(0,0,1)$ $B(2,2,-1)$ $C(-2,-7,-7)$

$D(-3,4,4)$ والمستوي P الذي معادلته:

$P:\ x+y-z+2=0$

① a. بيّن أن النقاط C, B, A تعيّن مستوياً.

b. أثبت أن $\vec{n}(3,-2,1)$ ناظم للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة المستوي (ABC).

②. a. أثبت أن المستويين P و (ABC) متعامدان.

b. احسب بُعد D عن المستوي (ABC) والمستوي P.

c. استنتج بُعد D عن المستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين P , (ABC).

③. أثبت أن P , (ABC) متقاطعين في مستقيم Δ وأعطِ تمثيلاً وسيطياً له.

④. المستوي Q يمر من النقطة D ويعامد كلاً من المستويين P , (ABC).

a. اكتب معادلة المستوي Q.

b. بيّن أن المستويات (ABC) و P , Q تتقاطع في نقطة H، عيّن إحداثياتها.

c. احسب بطريقة ثانية البعد D عن Δ.

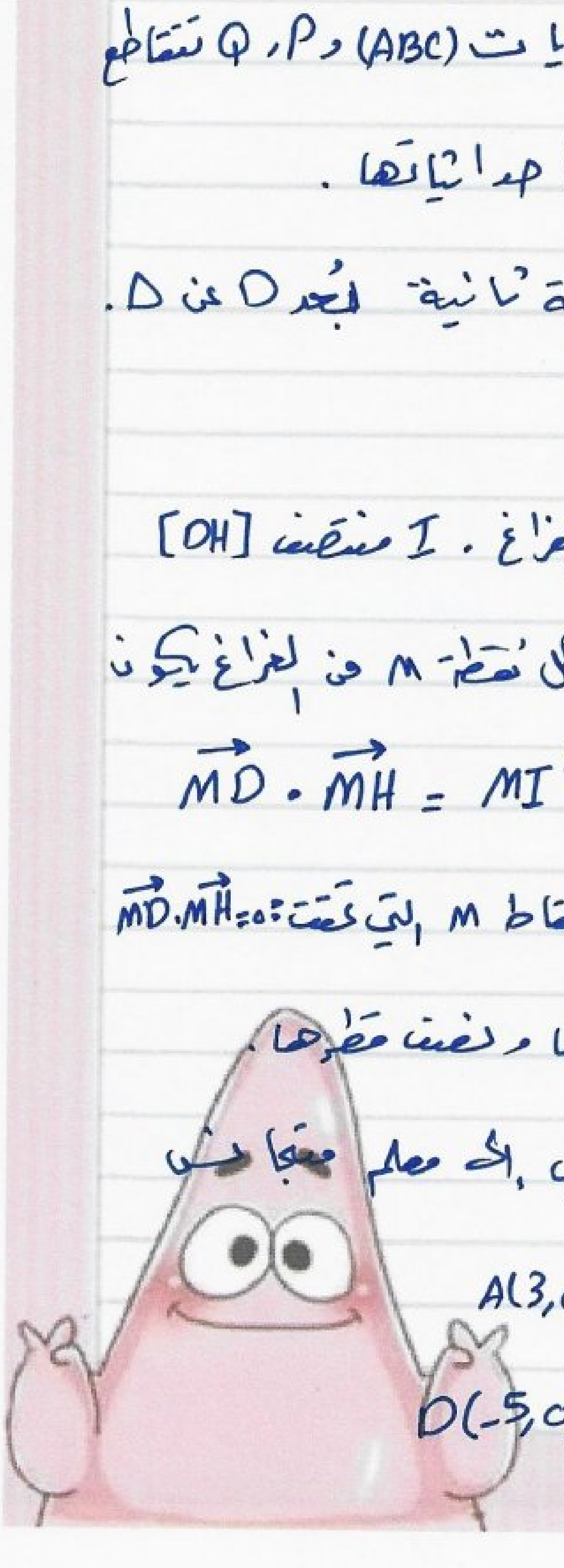
المسألة (15):

I) D , H نقطتان من الفراغ. I منتصف [DH]

a. أثبت أنه من أجل كل نقطة M من الفراغ يكون

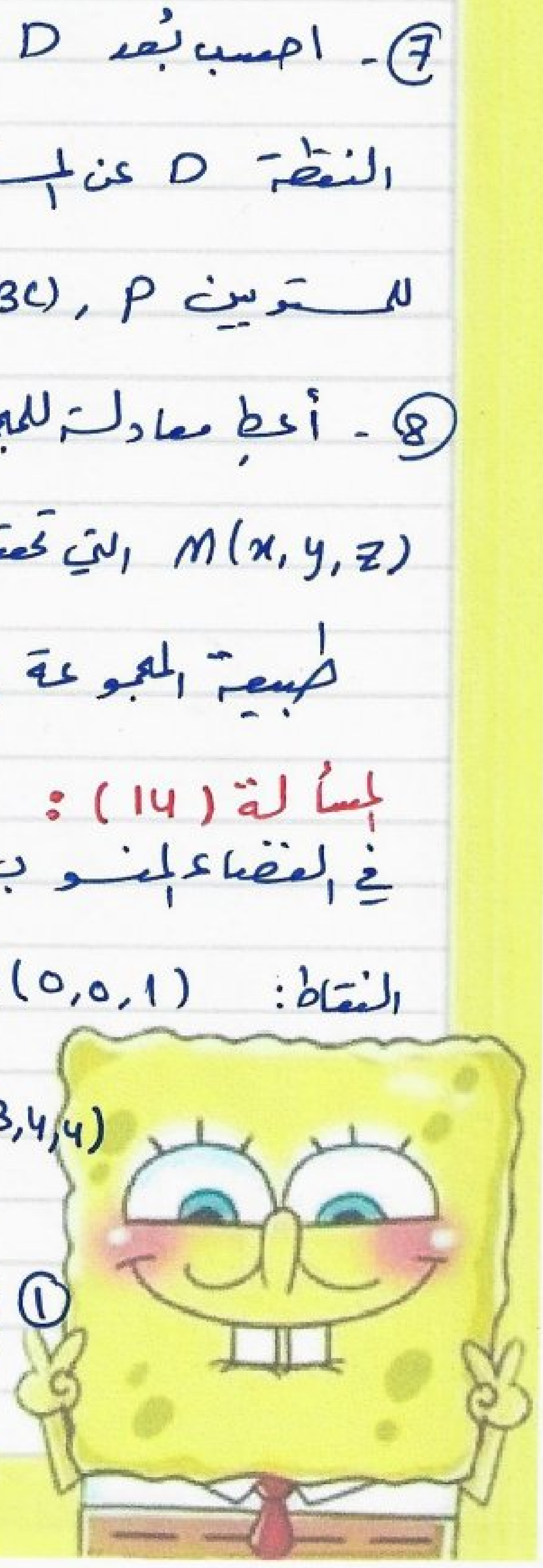
$$\vec{MD}\cdot\vec{MH}=MI^2-ID^2$$

b. استنتج أن مجموعة النقاط M التي تحقق: $\vec{MD}\cdot\vec{MH}=0$ تمثل كرة، عيّن مركزها ونصف قطرها.



II) في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(3,0,0)$

$D(-5,0,1)$ $C(0,0,4)$ $B(0,6,0)$



1 (a) تحقق أن النقاط A, B, C تعين مستوي.

(b) بيّن أن $\vec{n}(4,2,3)$ ناظم للمستوي (ABC).

(c) اكتب معادلة المستوي (ABC).

2- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من D ويعامد المستوي (ABC).

3- جد إحداثيات H المسقط العامد لـ D على المستوي (ABC).

4- احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC).

5- اكتب معادلة الكرة المذكورة في السؤال (I).

6- نفرض $N\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, 0\right)$

(a)- أثبت أن N هي المسقط العامد لـ C على المستقيم (AB).

(b)- احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

المسألة (16):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لديك النقاط $A(3,-2,-1)$ $B(5,-3,2)$ $C(2,3,2)$ و $D(1,-5,-2)$.

1- بين أن النقاط A, B, C تعين مستويا P.

2- أثبت أن $\vec{n}(2,1,-1)$ ناظما للمستوي P ، ثم جد معادلة المستوي P.

3- (a) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ المار من D ويعامد المستوي P.

(b) عيّن إحداثيات E المسقط العامد لـ D على المستوي P.

4- H المسقط العامد لـ D على المستقيم (AB) و λ عدد حقيقي حيث: $\vec{AH}=\lambda\vec{AB}$

(a)- بيّن أن: $\lambda=\dfrac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$

(b)- استنتج العدد الحقيقي λ وإحداثيات H ثم احسب المسافة بين D والمستقيم (AB).

المسألة (17):

في فضاء منسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لديك النقاط $A(1,0,-1)$ $B(0,2,-3)$ والمستوي P

الذي معادلته: $P: x+2y+2z+1=0$

والمستقيم D المعرف بـ: $D:\begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$

والمطلوب:

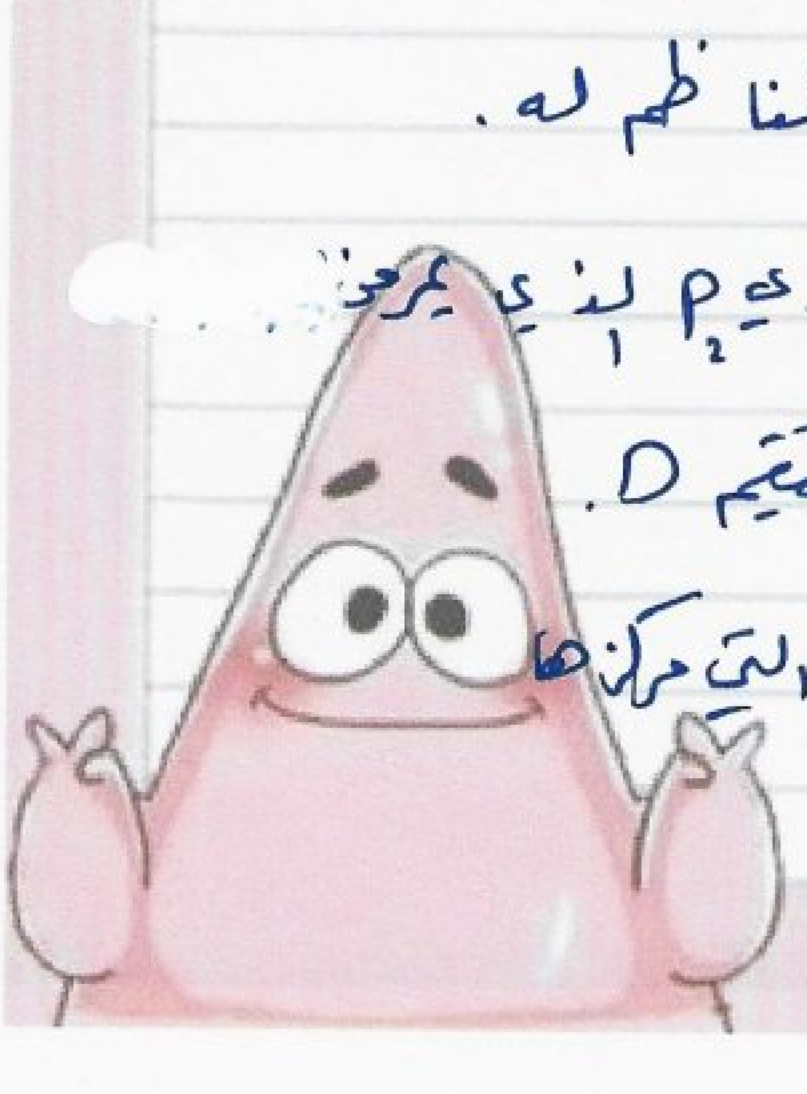
1- احسب بعد النقطة A عن المستوي P.

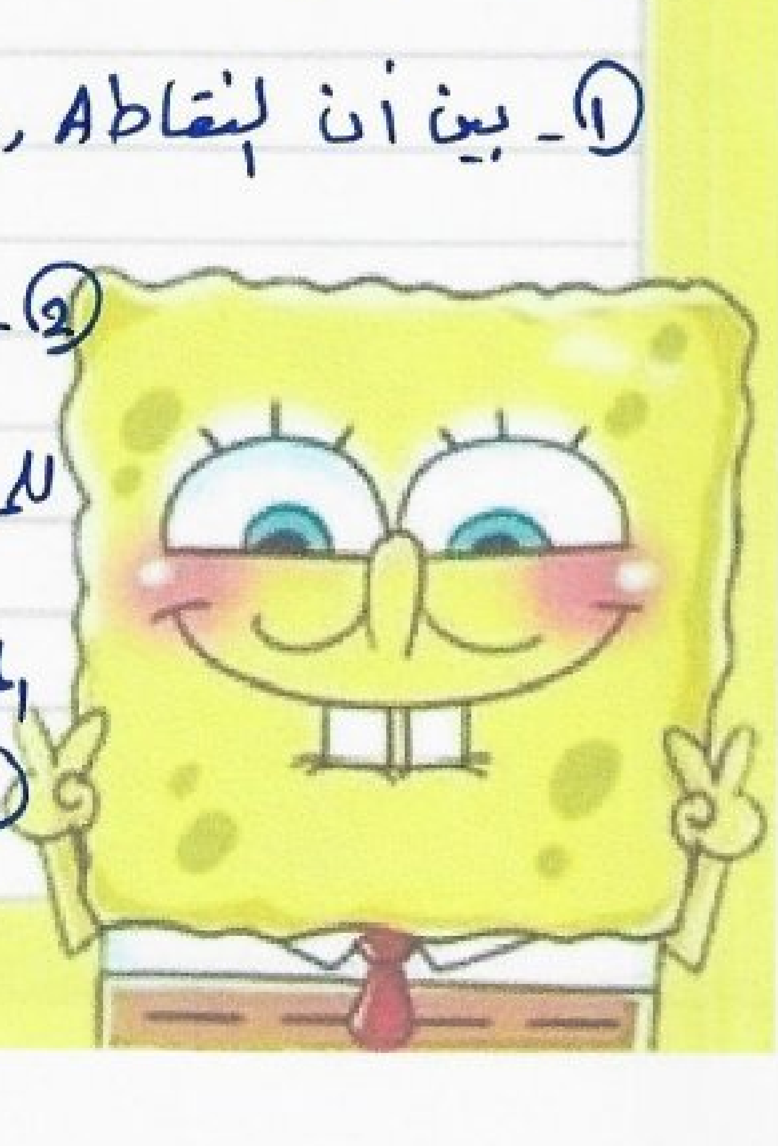
2- بيّن أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P.

3- أعط معادلة المستوي P_1 الذي يمر من A ويعامد $\vec{n}(-1,1,2)$ كناظم له.

4- اعط معادلة المستوي P_2 الذي يمر من $C(-1,-4,-2)$ ويعامد المستقيم D.

5- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمر من B.





المسألة (18):

I- نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,1,2)$ ، $B(-1,0,-2)$ ، $C(-1,0,-6)$

* بيّن أن مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق: $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستوٍ عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) ثم اكتب المعادلة الديكارتية له.

2- لتكن S المجموعة التي تحقق:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$$

* بيّن أن S هي كرة عيّن مركزها w ونصف قطرها R.

3- G نقطة معرفة بالعلاقة:

$$\vec{GA}-\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$$

a) عيّن إحداثيات G ، ثم تأكد أنها تنتمي الى S.

b) اكتب معادلة المستوي Q الذي يمس الكرة S في النقطة G.

المسألة (19):

في الفضاء المنسوب الى معلم متجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقاط $A(2,-1,1)$ ، $B(-1,2,1)$ ، $C(1,-1,2)$ ، $D(1,1,1)$

1- a- تحقق أن النقاط A , B , C تعين مستوي

b- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1,1,1)$ ناظم للمستوي (ABC)

c- اكتب معادلة المستوي (ABC).

2- لتكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ ، $(B,+2)$ ، $(C,-1)$

a- جد إحداثيات النقطة G.

b- لتكن Γ مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق: $\|\vec{MA}+2\vec{MB}-\vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$

• بيّن أن Γ هي المستوي المحوري لـ $[GD]$.

c- اكتب معادلة المستوي Γ.

3- a) بيّن أن (ABC) و (Γ) يتقاطعان في مستقيم Δ.

b) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ.

المسألة (20):

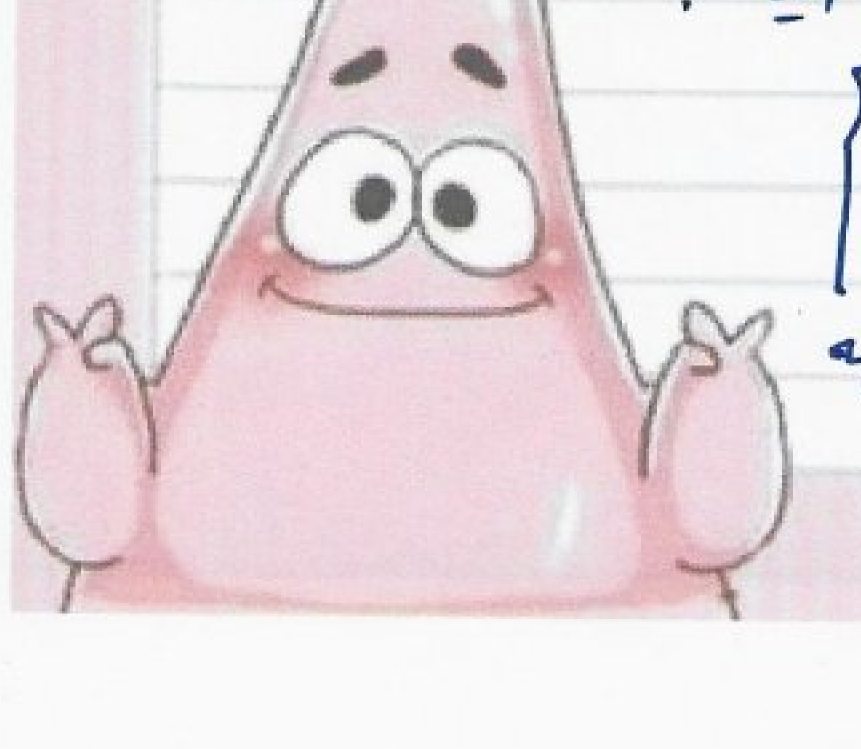
نعتبر في الفضاء المنسوب الى المعلم المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(1,0,-2)$ ، $B(3,1,0)$ ، $C(1,0,1)$ والمطلوب:

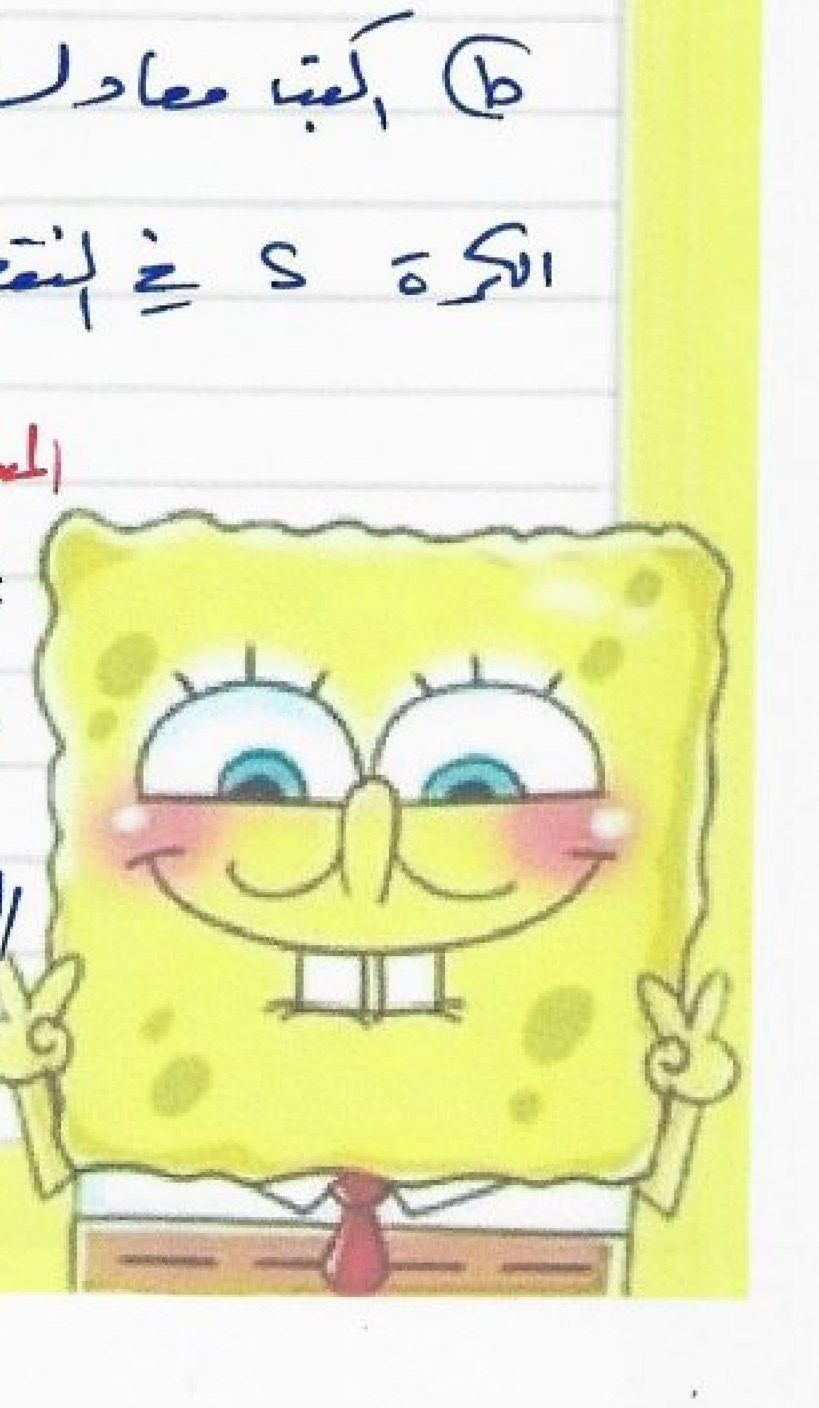
I- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها A وتمر من B .

2- لتكن Δ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$$\begin{cases} x+2z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$$

بيّن أن Δ مستقيم موجه





بالشعاع $\vec{u}(-2,-1,1)$ ويمر من B .

(3)- اكتب معادلة المستوي P المار من A ويعامد المستقيم Δ .

(4)- (a)- عيّن إحداثيات نقطة تقاطع P والمستقيم Δ . (b)- احسب بُعد A عن المستقيم Δ .

(c)- بيّن أن Δ يقطع الكرة S في نقطتين يُطلب تعيين إحداثياتهما .

(5)- t عدد حقيقي و G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (B, e^t) و $(C,1)$

(a) بيّن أن : $\vec{BG} = \frac{1}{1+e^t}\vec{BC}$

(b)- نشكل جدولاً لتغيرات f المعرفة على IR وفق :

$$f(t) = \frac{1}{1+e^t}$$

(c)- استنتج مجموعة النقاط G عندما يتغير t في IR .

المسألة (21) :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Δ_1 و Δ_2 مستقيمان معرفان وفق :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2-2t \\ z = 1-t \\ ; t \in IR \end{cases} \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1-\lambda \\ z = 4+2\lambda \\ \lambda \in IR \end{cases}$$

(1)- (a) أثبت أن Δ_1 و Δ_2 متقاطعان في نقطة I .

(b) جد إحداثيات النقطة I .

(c)- اكتب معادلة المستوي P المعرف بالمستقيمين Δ_1 , Δ_2 .

(2)- (a)- أثبت النقطة $A(6,4,4)$ لا تنتمي إلى المستوي P .

(b)- بيّن أن النقطة B هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي P .

(3)- (a)- اكتب معادلة المستوي Q المار من A و $\vec{n}(5,1,-7)$ ناظماً له .

(b)- عيّن إحداثيات C , D نقطتي تقاطع Q مع كل من Δ_1 و Δ_2 على الترتيب .

(4)- (a) عيّن طبيعة المثلث BCD واحسب مساحته .

(b) احسب حجم رباعي الوجوه ABCD .

(c)- استنتج مساحة المثلث ACD .

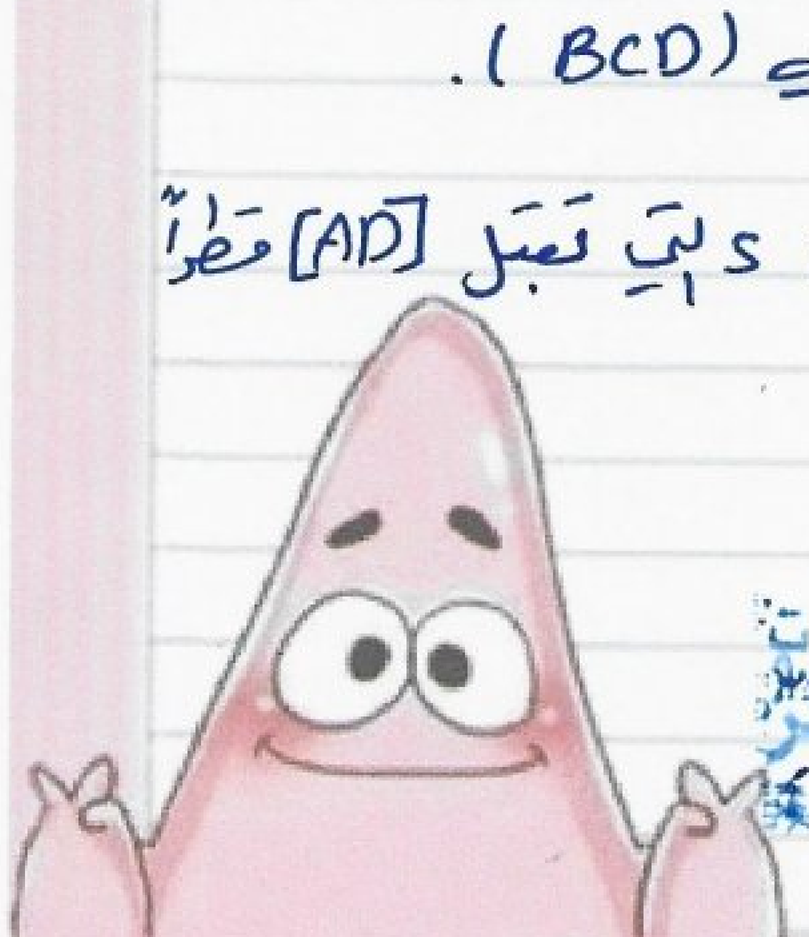
المسألة (22) :

في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط

$D(0,0,1)$ $C(1,0,1)$ $B(1,1,0)$ $A(2,-2,2)$

(1)- أثبت أن النقاط B , C , D لا تقع على استقامة واحدة (2). أثبت أن $y+z-1=0$ هي معادلة المستوي (BCD) . (3) أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم D المار من A ويعامد المستوي (BCD) . (4)- جد إحداثيات K المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD) .

(5)- اكتب معادلة الكرة S التي تقبل [AD] قطراً لها .



المسألة (23):

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(-1,1,3)$ و $B(1,0,-1)$ و $C(2,-1,1)$ و $D(2,0,-1)$ والمستوي P

$P: 2y+z+1=0$

وليكن Δ المستقيم المعطى وفق:

$$\Delta: \begin{cases} x=-1 \\ y=2+t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$$

1- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BC).

2- أثبت أن (BC) محتوى في المستوي P.

3- بيّن أن المستقيمين (BC) و Δ ليسا في نفس المستوي.

4- a- احسب البعد بين A والمستوي P.

b- تحقق أن D نقطة من P.

c- أثبت أن المثلث BCD قائم واحسب مساحته.

d- بيّن أن الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه ثم احسب حجمه.

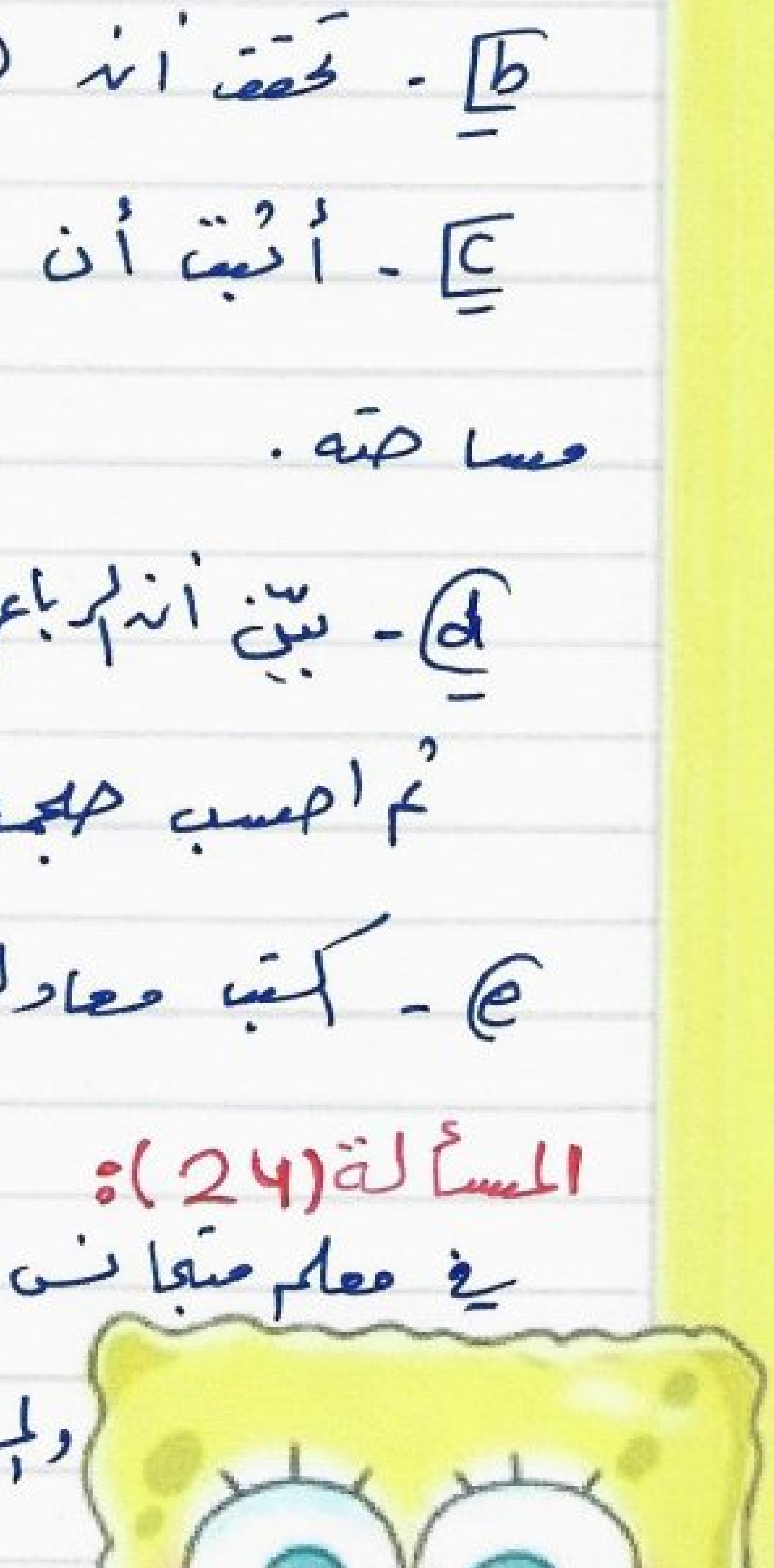
e- اكتب معادلة الكرة التي مركزها A وتمر بـ B.

المسألة (24):

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,1,2)$ والمستويين:

$P: x-y+2z-1=0$

$Q: 2x+y+z+1=0$



1- أثبت أن المستويين P و Q متقاطعين بفصل مشترك d.

2- أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d.

3- اكتب معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من المستويين P و Q.

4- جد إحداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيم d والمستوي R.

5- احسب بعد A عن المستقيم d.

6- اكتب معادلة الكرة S التي مركزها النقطة A وتمس المستوي Q.

المسألة (25):

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمل النقاط $A(-1,2,3)$ $B(2,1,1)$ $C(-3,4,-1)$ $D(3,1,1)$

والمطلوب:

1- جد $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ وبيّن أن المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

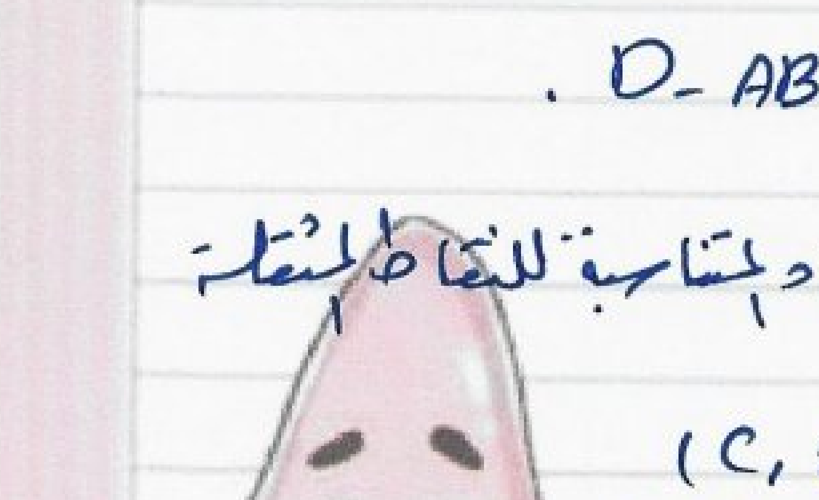
2- أثبت أن $\vec{n}(2,4,1)$ يعامد المستوي (ABC) واكتب معادلة المستوي (ABC).

3- جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من D ويعامد المستوي (ABC).

4- احسب بعد D عن المستوي (ABC) ثم احسب حجم الهرم $D-ABC$.

5- بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ $(B,-1)$ $(C,2)$

* أثبت أن المستقيمان (AB) و (CG) متوازيان.



المسألة (26):

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 2 ، O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$. نختار المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{2}\vec{AE})$ والمطلوب:

1- جد إحداثيات النقاط A ، B ، G ، H ، O

2- أعطِ معادلة المستوي (GOB) .

3- احسب $\vec{OG}\cdot\vec{OB}$ واستنتج $\cos(G\hat{O}B)$

4- اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DC)

5- أثبت أن المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

6- جد الأعداد الحقيقية α, β, γ لتكون النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, \alpha)(B, \beta)$ (C, γ).

المسألة (27):
هي ذاتها المسألة العاشرة.

المسألة (28):
نتأمل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطة $A(1,2,0)$ والمستويات:

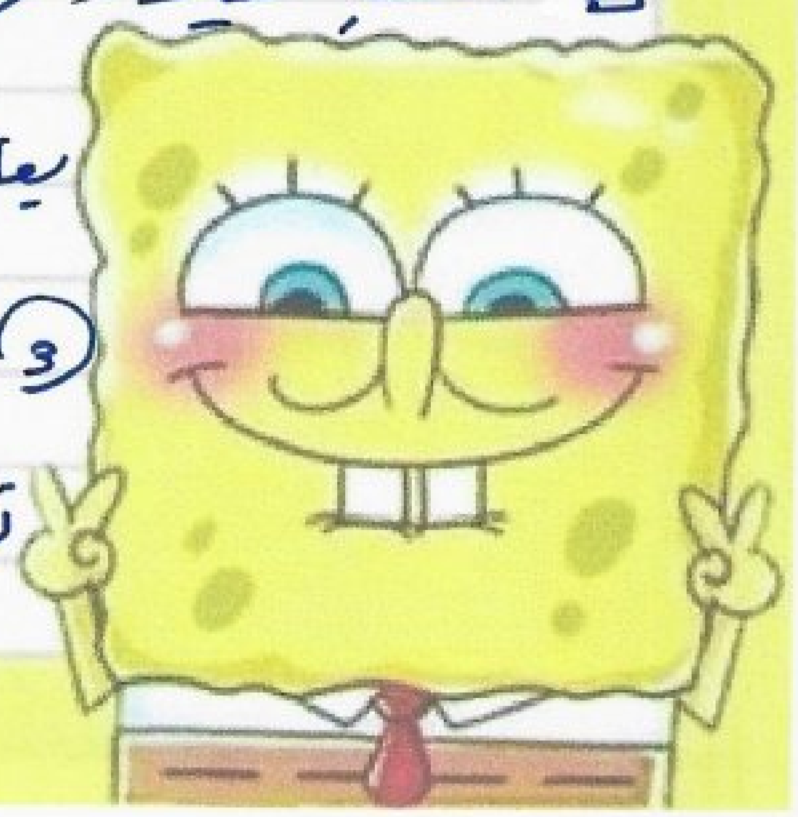
$P: 2x - y + 2z - 2 = 0$

$Q: x + y + z - 1 = 0$

$R: x - z - 1 = 0$

1- أثبت أن المستويين P ، Q متقاطعان بفصل مشترك Δ أعطِ تمثيلاً وسيطياً له. 2) تحقق أن المستوي R يعامد Δ ويمر من النقطة A.

3) أثبت أن المستويات P ، Q ، R تتقاطع في نقطة I يطلب تعيينها



4- استنتج بعد النقطة A عن المستقيم D .

المسألة (31):

نتأمل في معلم متجانس $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$ المكعب $ABCDEFGH$ والمطلوب:

1) اكتب في هذا المعلم إحداثيات كل من النقاط A ، C ، H ، F ، D.

2) اكتب معادلة المستوي (ACH).

3) أثبت أن المستوي P الذي معادلته $P: -2x + 2y - 2z + 1 = 0$ يوازي المستوي (ACH).

4) بفرض I مركز ثقل المثلث $\overset{\triangle}{ACH}$. أثبت أن D ، I ، F على استقامة واحدة.

5) اكتب معادلة الكرة S التي مركزها $\Omega(1,-1,1)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{3}$ وبيّن أن المستوي (ACH) يمس الكرة S .

المسألة (29):

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط $C(4,0,0)$ $B(1,2,1)$ $A(1,1,0)$

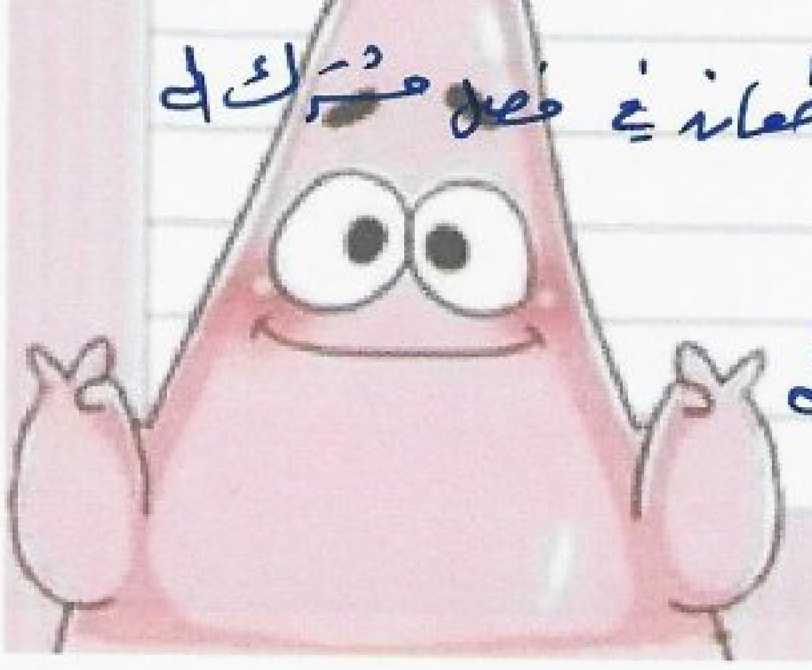
1) بيّن أن النقاط A ، B ، C ليست على استقامة.

2) أثبت أن معادلة المستوي (ABC) تعطى وفق: $x + 3y - 3z - 4 = 0$

3) ليكن المستويان P, Q : $P: x + 2y - z - 4 = 0$ و $Q: 2x + 3y - 2z - 5 = 0$

أثبت أن المستويان متقاطعان في فصل مشترك d تمثيله الوسيطي:

$$d: \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$



④ - ماهي نقطة تقاطع المستويات P , Q و (ABC) ؟

⑤ - احسب بُعد A عن المستقيم d .

المسألة (30):

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط

$A(2,1,3)$ $B(1,0,-1)$ $C(4,0,0)$

$D(0,4,0)$ $E(1,-1,1)$.

① - جد $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$, $\vec{CE}$.

② - أثبت أن النقاط C و D و E ليست على استقامة واحدة . ③ - أثبت أن (AB) يعامد المستوي (CDE) . ④ - اكتب معادلة المستوي (CDE) . ⑤ - احسب بُعد B عن المستوي (CDE) .

⑥ - اكتب معادلة الكرة S التي مركزها B وتمس المستوي (CDE) .

المسألة (32):

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه يساوي 2

نتأمل المعلم المتجانس $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ في المعلم

$\vec{AB}=2\vec{i}$, $\vec{AD}=2\vec{j}$, $\vec{AE}=2\vec{k}$

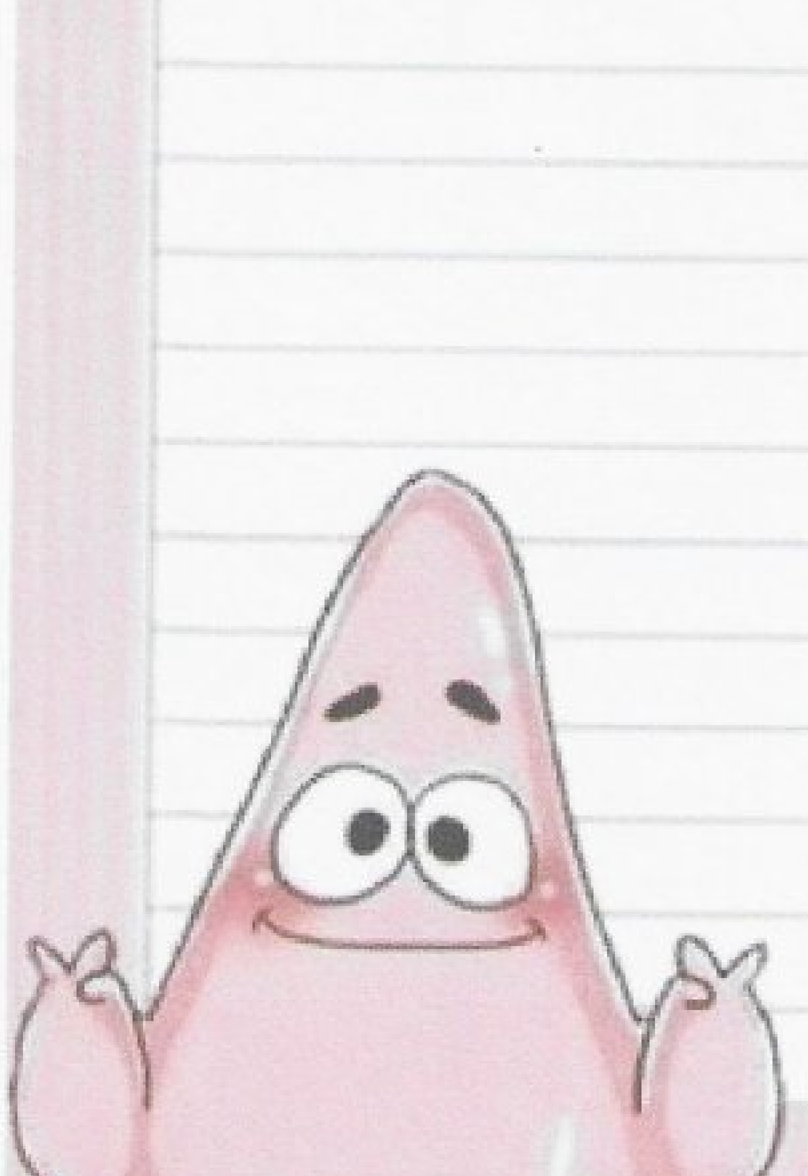
① - اكتب معادلة المستوي (GBD) .

② - اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EC) .

③ - جد نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوي (GBD) .

④ - جد إحداثيات النقطة M التي تحقق: $\vec{EM}=\frac{1}{3}\vec{EC}$

⑤ - أثبت تعامد المستقيمين (HM) و (EC) .



<< حل تمارين الأشعة >>

حل التمرين الأول:

$A(2,0,1)$ $B(1,-2,1)$ $C(5,0,5)$

$D(6,2,5)$

1- I منتصف $[AB]$:

$$x_I = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_I = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$z_I = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{3}{2}, -1, 1\right)$$

G: مركز ثقل المثلث $\hat{ABC}$:

$$x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow G\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

H: تجعل الرباعي $ABCH$ متوازي أضلاع.

* نفرض $H(x,y,z)$

* بما أن $ABCH$ متوازي أضلاع

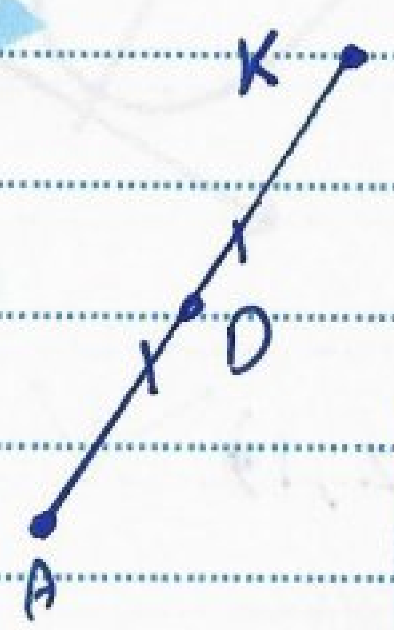
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HC}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-x\\-y\\5-z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-1 = 5-x\\-2 = -y\\0 = 5-z\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 6\\y = 2\\z = 5\end{cases} \Rightarrow H(6,2,5)$$

* K نظيرة A بالنسبة لـ D

نفرض $K(x,y,z)$



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DK}$$

$$\begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-6\\y-2\\z-5\end{pmatrix}$$

$$4 = x-6 \Rightarrow x = 10$$

$$2 = y-2 \Rightarrow y = 4$$

$$4 = z-5 \Rightarrow z = 9$$

$$\Rightarrow K(10, 4, 9)$$

* بما أن Q على محور الفواصل $\Rightarrow Q(x,0,0)$

• وبما أن Q متساوية البعد عن A و B

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AQ}\| = \|\overrightarrow{BQ}\|$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(0)^2+(-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+(2)^2+(-1)^2}$$

$$(x-2)^2+0+1 = (x-1)^2+4+1$$

$$x^2-4x+4+1 = x^2-2x+1+5$$

$$-4x+5 = -2x+6$$

$$-4x+2x = 6-5$$

$$-2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Q\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

* M: نفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

$$\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$4 \overset{?}{=} 4$ صحيحة

⇐ الأشعة $\vec{AC}, \vec{AB}, \vec{AD}$ مرتبطة خطياً

والنقاط A, B, C, D في مستوٍ واحد.

حل التمرين الثاني:

$A(1, 1, -2)$

$P: 2x + y - 3z + 2 = 0$

-1

$$dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2+1+6+2|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{11}{\sqrt{14}} \neq 0$$

⇐ A لا تنتمي إلى المستوي P

-2 بما أن P و Q متوازيان فإن:

$\vec{n}_Q = \vec{n}_P = (2, 1, -3)$

$Q: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$Q: 2(x-1) + 1\cdot(y-1) - 3(z+2) = 0$

$Q: 2x - 2 + y - 1 - 3z - 6 = 0$

$Q: 2x + y - 3z - 9 = 0$

-3 بما أن P, Q متوازيان

و A نقطة من Q

فإن البعد بين P, Q هو بعد A عن P.

$$\Rightarrow dist(P, Q) = dist(A, P) = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

$x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$

$y = -2$

$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

$\Rightarrow M(1, -2, 1)$

-2

$\vec{AB} = (-1, -2, 0)$

$\vec{AC} = (3, 0, 4)$

$$\frac{-1}{3} \neq \frac{0}{4}$$

المركبات المتقابلة غير متناسبة

الشعاعين $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

-3

$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -2\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\beta \\ 0 \\ 4\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 3\beta \\ -2\alpha \\ 4\beta \end{pmatrix}$$

$4 = -\alpha + 3\beta$ —— 1

$2 = -2\alpha$ —— 2

$4 = 4\beta$ —— 3

من 3 نجد: $\beta = 1$

من 2 نجد: $\alpha = -1$

نعوض في 1 للتحقق:

$4 \overset{?}{=} -(-1) + 3(1)$

4- بما أن المستوي P يمس الكرة فإن:

$$R = dist(A,P) = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

$$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

$$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2 = \frac{121}{14}$$

5- بما أن Δ و P متعامدين ⇐

$$\vec{u} = \vec{n} = (2,1,-3)$$

$$\Delta: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t+1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -3t-2 \end{cases}$$

6- A' هي نقطة تقاطع Δ مع P.

نعوض Δ في P:

$$2(2t+1)+t+1-3(-3t-2)+2=0$$

$$4t+2+t+1+9t+6+2=0$$

$$14t+11=0$$

$$t=\frac{-11}{14}$$

نعوض في Δ:

$$x = 2\left(\frac{-11}{14}\right)+1 = \frac{-8}{14}$$

$$y = \frac{-11}{14}+1 = \frac{3}{14}$$

$$z = -3\left(\frac{-11}{14}\right)-2 = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{-8}{14}, \frac{3}{14}, \frac{5}{14}\right)$$

حل التمرين الثالث:

$$P_1: x+y-2z-1=0$$

$$P_2: x+y+z=0$$

1- $\vec{n}_1 = (1,1,-2)$

$\vec{n}_2 = (1,1,1)$

$$\Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 1+1-2=0 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

⇐ P_1 , P_2 متعامدين

2- بعد $A(2,1,2)$ عن P_1:

$$dist(A,P_1) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

بعد A عن P_2:

$$dist(A,P_2) = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

3- بعد A عن d:

$$dist(A,d) = \sqrt{dist^2(A,P_1)+dist^2(A,P_2)}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{6}+\frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{54}{6}}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

4- $x+y-2z-1=0$ (1)

$x+y+z=0$ (2)

بالطرح: $-3z-1=0$

$$z = \frac{-1}{3}$$

نعوض في (2):

$$x + y - \frac{1}{3} = 0$$

نعزل x :

$$x = -y + \frac{1}{3}$$

نفرض $y = t$:

$$d : \begin{cases} x = -t + \frac{1}{3} \\ y = t \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

حل التمرين الرابع:

$A(1,-2,0)$

$P : x + 2y + z - 1 = 0$

① S كرة مركزها A ونصف قطرها $R = 4$

$$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$S : (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$$

② شرط تقاطع مستوٍ مع كرة هو:

$$\text{dist}(A,P) < R \quad \ldots (*)$$

نحسب بعد A عن P:

$$\text{dist}(A,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|1 - 4 + 0 - 1|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{6}} < 4 \Leftrightarrow \text{dist}(A,P) < R$$

المستوي P يقطع الكرة في دائرة نصف قطرها r :

$$r = \sqrt{R^2 - \text{dist}^2(A,P)}$$

$$r = \sqrt{16 - \frac{16}{6}} = \sqrt{\frac{80}{6}}$$

حل التمرين الخامس:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - k = 0$$

نرتب:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 - k = 0$$

نتمم:

$$\underbrace{x^2 + 4x + 4} - 4 + \underbrace{y^2 - 6y + 9} - 9 + z^2 - k = 0$$

$$(x+2)^2 - 4 + (y-3)^2 - 9 + z^2 - k = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = k + 13$$

لنا مناقشة:

Ⓐ $k > -13$ ⇐ تمثل كرة مركزها $(-2, +3, 0)$ ونصف قطرها $R = \sqrt{k+13}$

Ⓑ $k = -13$ ⇐ تمثل نقطة وحيدة $\Omega(-2, +3, 0)$

Ⓒ $k < -13$ ⇐ تمثل مجموعة خالية ϕ .

حل التمرين السادس :

A) $\vec{AM} = \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{AM} = \vec{AF} + \vec{AD}$

$\vec{AM} = \vec{AF} + \vec{FG}$

$\vec{AM} = \vec{AG}$ $\Rightarrow$ M تنطبق على G

B) $\vec{AK} = \vec{AC} - \vec{HA} - \vec{BC}$

$\vec{AK} = \vec{AC} + \vec{AH} + \vec{CB}$

$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AH}$

$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BG}$

$\vec{AK} = \vec{AG}$

$\Rightarrow$ K تنطبق على G.

C) $\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AG} + \vec{HB})$

$\vec{AN} = \frac{1}{2}[\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} + \vec{HG} + \vec{GC} + \vec{CB}]$

$\vec{AN} = \frac{1}{2}[\vec{AB} + \vec{HG}]$

$\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AB})$

$\vec{AN} = \vec{AB}$

$\Rightarrow$ N تنطبق على B.

D) $\vec{AL} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH}$

$\vec{AL} = \vec{AB} + \vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{GH}$

$\vec{AL} = \vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{FE}$

$\vec{AL} = \vec{AF} + \vec{FI}$

$\vec{AL} = \vec{AI}$ $\Rightarrow$ L تنطبق على I.

E) $\vec{AO} = \vec{FE} + \vec{DG}$

$\vec{AO} = \vec{FE} + \vec{AF}$

$\vec{AO} = \vec{AF} + \vec{FE}$

$\vec{AO} = \vec{AE}$ $\Rightarrow$ O تنطبق على E

F) $\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{DH}$

$\vec{AJ} = \vec{AB} + \vec{BF}$

$\vec{AJ} = \vec{AF}$ $\Rightarrow$ J تنطبق على F

حل التمرين السابع :

1) • $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| . \|\vec{AC}\| . \cos\frac{\pi}{3}$

$= a . a . \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

• $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \|\vec{AB}\| . \|\vec{AD}\| . \cos\frac{\pi}{3}$

$= a . a . \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

• $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

$= \vec{AB}\cdot(-\vec{AC}) + \vec{AB}\cdot\vec{AD}$

$= -\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}\cdot\vec{AD}$

$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

2- $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{BI}$

$\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) - \vec{BI}$

$\vec{AM} = \frac{1}{2}(2\vec{AI}) - \vec{BI}$

$\vec{AM} = \vec{AI} + \vec{IB}$

$\vec{AM} = \vec{AB} \Rightarrow$ M تنطبق على I .

3- $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 8$

$\|(1+1+1+1)\vec{MG}\| = 8$

$4MG = 8 \Rightarrow MG = 2$

تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها R=2.

حيث G هي م.أ.م ل (A,1) (B,1) (C,1) (D,1).

حل التمرين الثامن:

$A(1,2,3)$ $B(3,2,3)$ $C(2,-1,5)$

1- $\vec{AB} = (2, 0, 0)$

$\vec{AC} = (1, -3, 2)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{0}{-3} \neq \frac{0}{2}$

مركبات المتجهات غير متناسبة

الشعاعين $\vec{AC}$, $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطيا

النقاط C, B, A ليست على استقامة.

2- G مركز ثقل المثلث $\hat{ABC}$.

$x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

$y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{11}{3}$

$G(2, 1, \frac{11}{3})$

3- نفرض $M(x,y,z)$:

$2\vec{CA} + \vec{BM} = \vec{0}$

$$2\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2+x-3\\6+y-2\\-4+z-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$

$y+4=0 \Rightarrow y=-4$

$z-7=0 \Rightarrow z=7$

$\Rightarrow M(5,-4,7)$

4- H تنتمي إلى المستوي (ABC) أي الأشعة $\vec{AH}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ مرتبطة خطيا

أي:

$\vec{AH} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC}$

$$\begin{pmatrix}-3\\-3\\\lambda-3\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ \lambda-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha+\beta \\ -3\beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

$-3 = 2\alpha + \beta$ —— (1)

$-3 = -3\beta$ —— (2)

$\lambda - 3 = 2\beta$ —— (3)

من (2) نجد: $\beta = 1$

نعوض في (3):

$\lambda - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$

نعوض في (1):

$-3 = 2\alpha + 1 \Rightarrow 2\alpha = 4$

$\boxed{\alpha = -2}$

5) $K(2, \alpha, 1)$

$\|\overrightarrow{AK}\| = \sqrt{1 + (\alpha-2)^2 + 4} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 9}$

$\|\overrightarrow{BK}\| = \sqrt{1 + (\alpha-2)^2 + 4} = \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 9}$

⇐ $AK = BK$ فالمثلث ABK متساوي

الساقين رأسه K

6) بما أن S تمر من C ⇐ $R = \|\overrightarrow{CO}\|$

$= \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

$S: (x)^2 + (y)^2 + (z)^2 = 30$

9) a) D نقطة من المستقيم (AB) ⇐

النقاط A , B , D على استقامة

واحدة ⇐ الشعاعين $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$

مرتبطين خطياً أي لدينا عدد α حقيقي:

$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x - 1 = 2\alpha \Rightarrow x = 2\alpha + 1$

$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

$z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

⇐ $D(2\alpha+1, 2, 3)$

⇐ النقطة D إحداثياتها $D(x, 2, 3)$.

b) $CD^2 = (x-2)^2 + (3)^2 + (-2)^2$

$= (x-2)^2 + 9 + 4$

$= (x-2)^2 + 13$

c) يكون CD أصغر ما يمكن عندما $(x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

عندها $CD^2 = 13$

$\hookrightarrow CD = \sqrt{13}$

d) ⇐ بعد C عن المستقيم (AB) هو CD

$\Rightarrow \text{dist}(C, (AB)) = CD = \sqrt{13}$

حل التمرين التاسع:

$A(3, -1, 2)$

$P: 2x - y + z - 4 = 0$

$Q: x + y + 2z - 5 = 0$

1) $\vec{n}_P = (2, -1, 1)$

$\vec{n}_Q = (1, 1, 2)$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{2}$$

المركبات المتقابلة غير متناسبة

الشعاعين $\vec{n}_P$ ، $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطيا

P ، Q غير متوازيين فهما متقاطعان.

②

$2x-y+Z-4=0$ — ①

$x+y+2Z-5=0$ — ②

بالجمع:

$3x+3Z-9=0$

$(\div 3)$

$x+Z-3=0$

نعزل x:

$x=-Z+3$ ...(*)

نعوض في ②:

$-Z+3+y+2Z-5=0$

$y+Z-2=0$

نعزل y:

$y=-Z+2$ ...(**)

نفرض: $Z=t$

$$d: \begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ Z=t \end{cases}$$

③ R عمودي على P و Q

$\Leftarrow$ R عمودي على d (مقطعهما المشترك)

$\Rightarrow \vec{n}=\vec{U}_d=(-1,-1,1)$

$R: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(Z-Z_0)=0$

$R: -(x-3)-(y+1)+1(Z-2)=0$

$R: -x+3-y-1+Z-2=0$

$R: -x-y+Z=0$

$R: x+y-Z=0$

④ نوجد A' نقطة تقاطع d مع R:

$-t+3-t+2-t=0$

$-3t+5=0$

$t=\frac{5}{3}$

نعوض في d:

$x=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3}$

$y=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}$

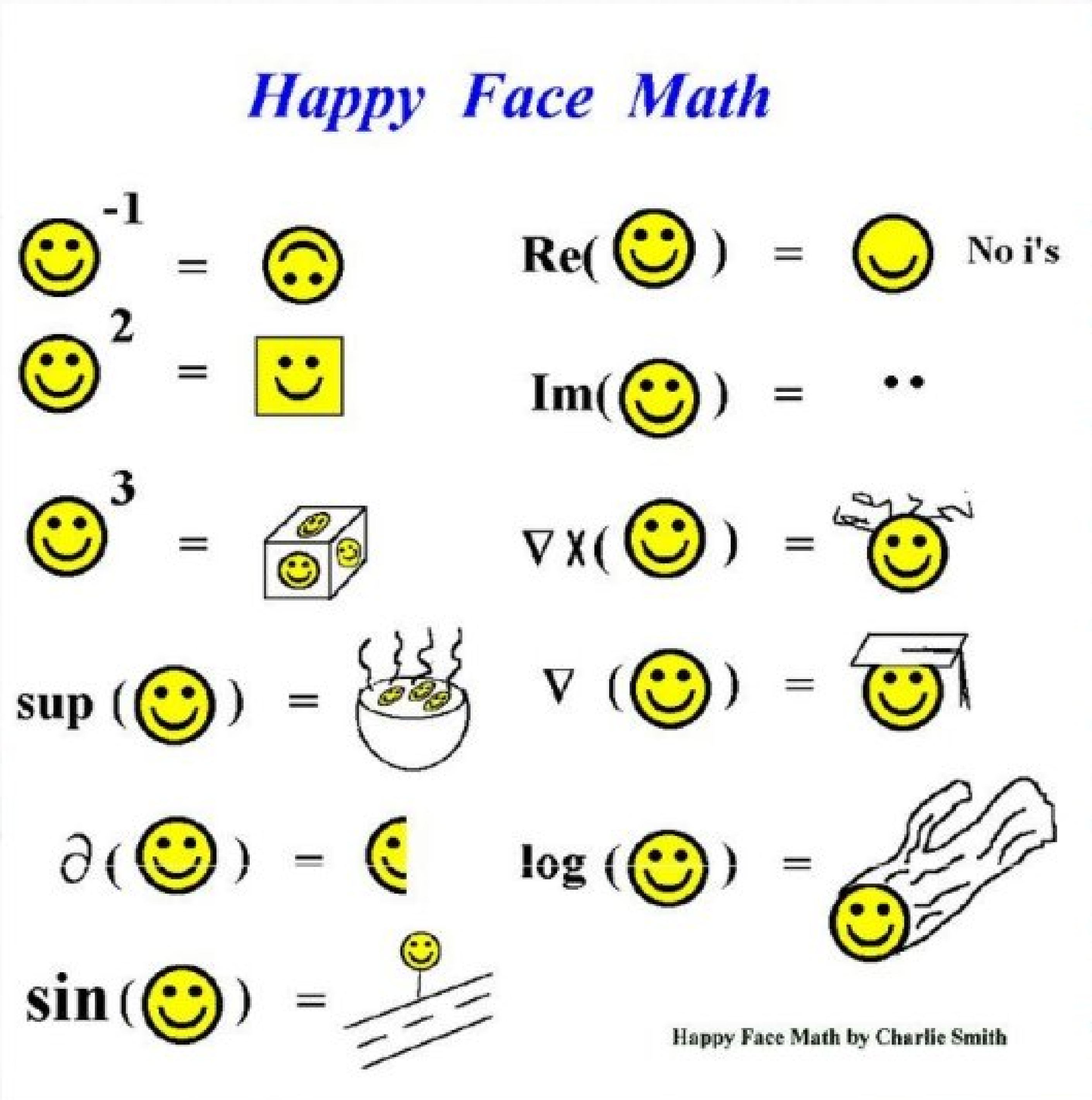
$Z=\frac{5}{3}$

$\Rightarrow A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$

$\Rightarrow dist(A,d)=\|\vec{AA'}\|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-3\right)^2+\left(\frac{1}{3}+1\right)^2+\left(\frac{5}{3}-2\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{42}{9}}$

$\Rightarrow dist(A,d)=\frac{\sqrt{42}}{3}$



حل التمرين العاشر:

$A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$ $C(3,1,-2)$

$D(-4,2,1)$

1- $\vec{AB} = (1, 2, 4)$

$\vec{AC} = (2, 1, -1)$

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2+2-4 = 0$

$\vec{AB} \perp \vec{AC}$

⇐ المثلث $A\hat{B}C$ قائم في A.

* مساحة المثلث القائم = $\frac{\text{جداء الطولين القائمين}}{2}$

$S = \frac{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{6}}{2}$

$S = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$

2- $\vec{n} \cdot \vec{AB} = (2,-3,1)\cdot(1,2,4)$

$= 2 - 6 + 4 = 0$

⇐ $\vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n} \cdot \vec{AC} = (2,-3,1)\cdot(2,1,-1)$

$= 4 - 3 - 1 = 0$

⇐ $\vec{n} \perp \vec{AC}$

وبما أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

⇐ $\vec{n}$ ناظم المستوي (ABC).

معادلة المستوي P:

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: 2(x-1) - 3(y-0) + 1(z+1) = 0$

$P: 2x - 2 - 3y + z + 1 = 0$

$P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

3- بُعد D عن المستوي P:

$dist(D,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}$

$= \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}}$

$= \sqrt{14}$

4- $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \sqrt{14}$

$= \frac{14}{2} = 7$

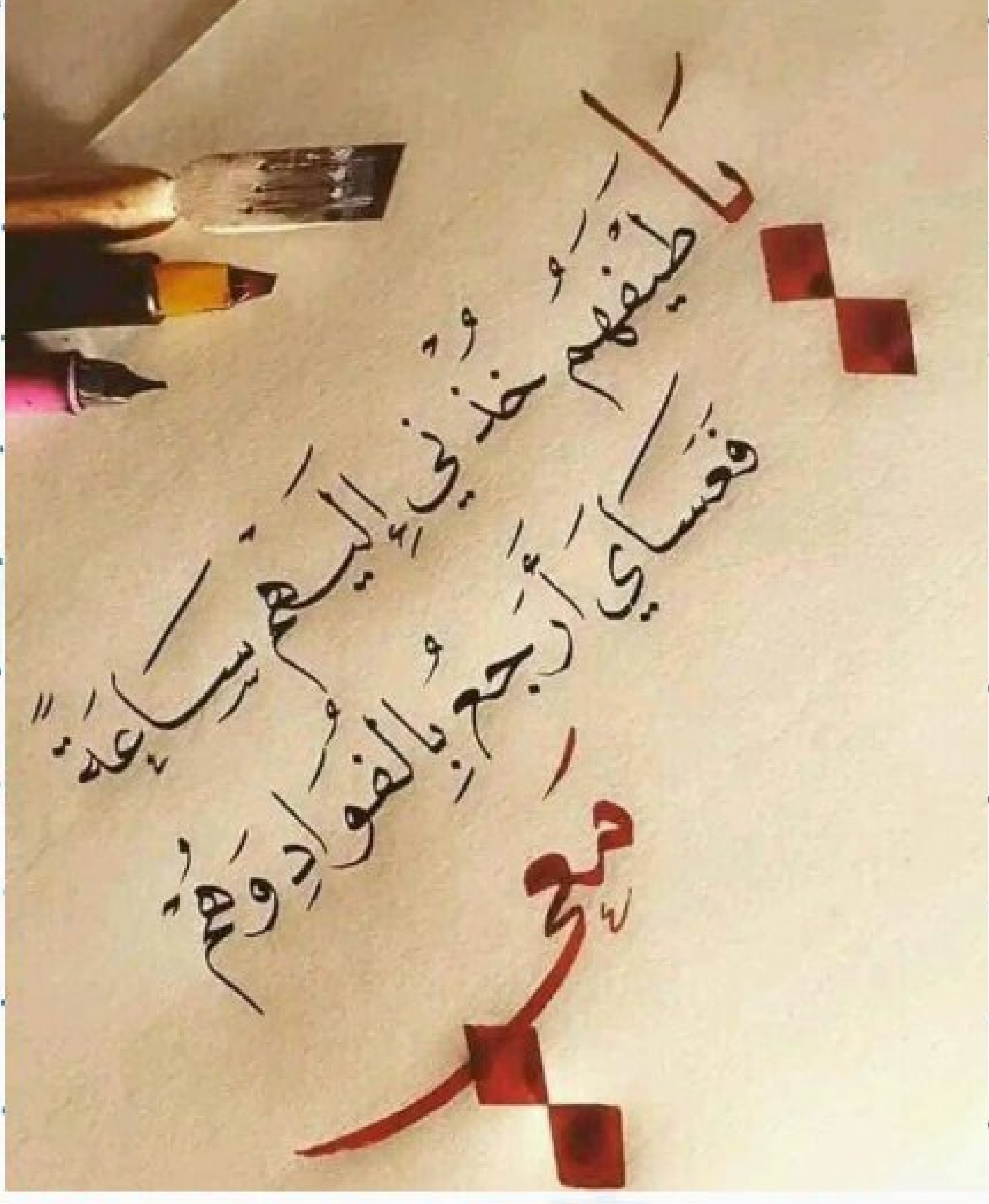
5- بما أن المستوي P يمس الكرة S فإن:

$R = dist(D,P) = \sqrt{14}$

معادلة الكرة:

$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

$S: (x+4)^2 + (z-2)^2 + (z-1)^2 = 14$



حل التمرين الحادي عشر

$A(1,5,4)$ $B(10,4,3)$ $C(4,3,5)$
$D(0,4,5)$

① $\vec{AB} = (9,-1,-1)$
$\vec{AC} = (3,-2,1)$

$$\frac{9}{3} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$$

المركبات المتقابلة غير متناسبة
الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً
النقاط A , B , C ليست على استقامة
واحدة.

② حتى تقع النقاط A , B , C , D في مستو
واحد يجب أن تكون الأشعة $\vec{AB}, \vec{AC}$
و $\vec{AD}$ مرتبطة خطياً

أي: يجب تعيين عددين α , β يحققان:

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\alpha \\ -\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\beta \\ -2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\alpha + 3\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$-1 = 9\alpha + 3\beta$ ①
$-1 = -\alpha - 2\beta$ ②
$+1 = -\alpha + \beta$ ③

نطرح ③ , ② :

$$-2 = -3\beta \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$$

نعوض في ② :

$$-1 = -\alpha - \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 1 - \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \frac{-1}{3}$$

للتحقق نعوض في ① :

$$-1 \stackrel{?}{=} 9\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$-1 \stackrel{?}{=} -3 + 2$$

$$-1 \stackrel{?}{=} -1$$ محقق

$\Leftarrow$ $\vec{AD}$, $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ مرتبطة خطياً
$\Leftarrow$ النقاط A , B , C , D في مستو واحد.

③ من الطلب السابق وجدنا:

$$\vec{AD} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$(\times 3)$

$$3\vec{AD} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$$
$$3\vec{AD} = -(\vec{AD} + \vec{DB}) + 2(\vec{AD} + \vec{DC})$$
$$-3\vec{AD} - \vec{AD} - \vec{DB} + 2\vec{AD} + 2\vec{DC} = \vec{0}$$
$$-2\vec{AD} - \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$$
$$2\vec{DA} - \vec{DB} + 2\vec{DC} = \vec{0}$$

$\Leftarrow$ D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط
$(A,2)$ $(B,-1)$ $(C,2)$

حل التمرين الثاني عشر :

1- $\vec{AB} = (3, 3, -3)$

$\vec{AC} = (-2, 1, 2)$

$$\frac{3}{-2} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-3}{2}$$

المركبات ليست متناسبة

الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

2- $\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ 3\alpha \\ -3\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta \\ -3\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

$-1 = 3\alpha - 2\beta$ —— (1)

$0 = 3\alpha + \beta$ —— (2)

$1 = -3\alpha + 2\beta$ —— (3)

نجمع (2) و (3) :

$1 = 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{3}$

نعوض في (2) : $0 = 3\alpha + \frac{1}{3}$

$3\alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{9}$

للتحقق نعوض في (1) :

$-1 \overset{?}{=} \cancel{3}\left(\frac{-1}{\cancel{9}_{3}}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\right)$

$-1 \overset{?}{=} -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$

$-1 \overset{?}{=} -\frac{3}{3}$

$-1 \overset{?}{=} -1$ محققة

⇐ الأشعة $\vec{AD}$ ، $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطة خطياً.

3- $\vec{AD} = -\frac{1}{9}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ $(\times 9)$

$9\vec{AD} = -\vec{AB} + 3\vec{AC}$

$9\vec{AD} = -(\vec{AD} + \vec{DB}) + 3(\vec{AD} + \vec{DC})$

$9\vec{AD} = -\vec{AD} - \vec{DB} + 3\vec{AD} + 3\vec{DC}$

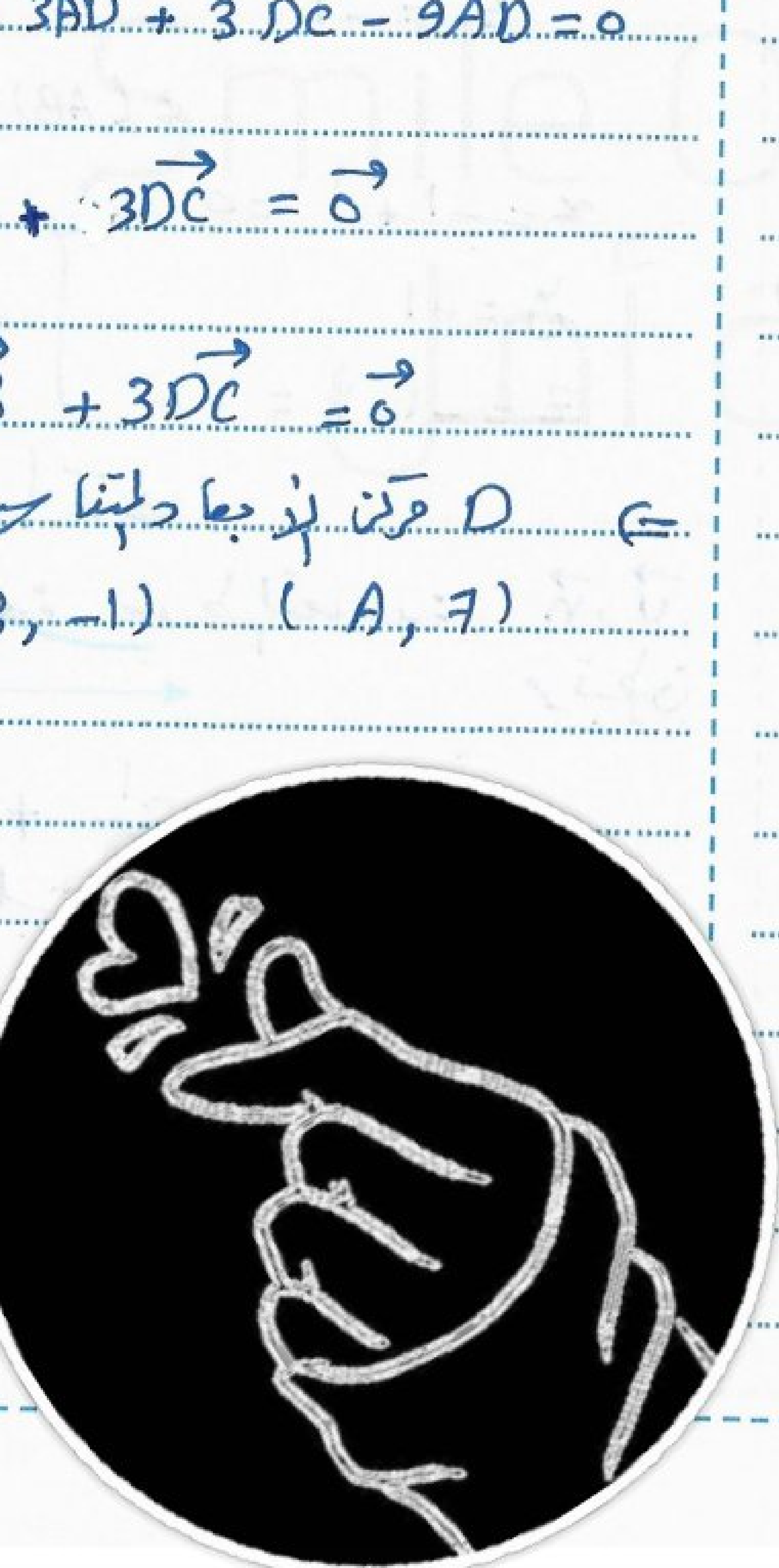
$-\vec{AD} - \vec{DB} + 3\vec{AD} + 3\vec{DC} - 9\vec{AD} = \vec{0}$

$-7\vec{AD} - \vec{DB} + 3\vec{DC} = \vec{0}$

$+7\vec{DA} - \vec{DB} + 3\vec{DC} = \vec{0}$

⇐ D مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(A, 7)$ $(B, -1)$ $(C, 3)$



حل التمرين الثالث عشر:

$A(1,0,-1)$ $\quad$ $B(2,1,0)$

$P: x - y + Z + 1 = 0$

1- $\vec{U} = \vec{AB} = (1, 1, 1)$

$$(AB): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ Z = t - 1 \end{cases} ; t \in IR$$

2- ندرس التوازي:

• شرط التوازي: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

$\vec{n} = (1, -1, 1)$

$\vec{U} = (1, 1, 1)$

$\rightarrow \vec{n} \cdot \vec{U} = 1 - 1 + 1 = 1 \neq 0$

$\Leftarrow$ P و (AB) غير متوازيان

$\Leftarrow$ P و (AB) متقاطعان.

• لإيجاد نقطة التقاطع نعوض (AB) في P:

$x - y + Z + 1 = 0$

$t + 1 - t + t - 1 + 1 = 0$

$t = -1$

• نعوض في (AB):

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + 1 = 0 \\ y &= -1 \\ Z &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow I(0, -1, -2)$

• ندرس التعامد: شرط التعامد: $\vec{U}, \vec{n}$ مرتبطين

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$$

المركبات المتقابلة غير متناسبة

$\Leftarrow$ $\vec{n}$ و $\vec{u}$ غير مرتبطين خطياً

$\Leftarrow$ P و (AB) غير متعامدين.

حل التمرين الرابع عشر:

$A(1,0,-1)$ $\quad$ $B(-1,4,1)$ $\quad$ $C(2,3,3)$

$D(2,1,5)$

1- $\vec{AB} = (-2, 4, 2)$

$\vec{AC} = (1, 3, 4)$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{4}{3} \neq \frac{2}{4}$$

$\Leftarrow$ $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

$\vec{U} \cdot \vec{AB} = (-1, -1, 1) \cdot (-2, 4, 2)$

$= +2 - 4 + 2 = 0$

$\Leftarrow$ $\vec{U} \perp \vec{AB}$

$\vec{U} \cdot \vec{AC} = (-1, -1, 1) \cdot (1, 3, 4)$

$= -1 - 3 + 4 = 0$

$\Leftarrow$ $\vec{U} \perp \vec{AC}$

$\Leftarrow$ $\vec{U}$ ناظم للمستوي (ABC).

2- معادلة المستوي (ABC):

$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(Z - Z_0) = 0$

$P: -1(x - 1) - 1(y - 0) + 1(Z + 1) = 0$

$P: -x + 1 - y + Z + 1 = 0$

$P: x + y - Z - 2 = 0$

3- لإثبات أن ABCD رباعي وجوه يجب إثبات أن D لا تنتمي إلى المستوي (ABC).

ط1: نعوض إحداثيات D في المستوي وتكون غير محققة:

$2 + 1 - 5 - 2 \overset{?}{=} 0$

$-4 \overset{?}{=} 0$ غير محققة

$\Leftarrow$ D لا تنتمي إلى المستوي (ABC)

فالرباعي ABCD رباعي وجوه.

ط2: حساب البعد بين P و D

ط3: ارتباط خطي الثلاثة أشعة

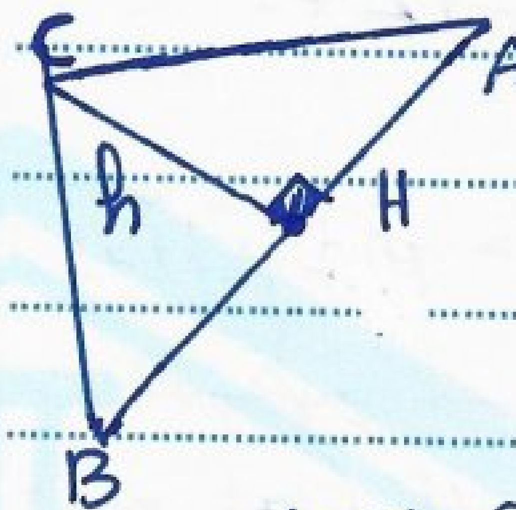
ط4: مركز الأبعاد المتناسبة

④ مساحة المثلث $\hat{ABC}$:

المثلث $\hat{ABC}$ ليس قائماً ولا متساوي الأضلاع ولا متساوي الساقين

إذاً لحساب مساحته نطبق القانون العام :

مساحة المثلث = $\dfrac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$



نفرض H هي المسقط العام لـ C على المستقيم (AB)

* نفرض $H(x, y, z)$
* $\vec{CH}$ عمودي على المستقيم (AB)

$\rightarrow \vec{CH} \cdot \vec{AB} = 0$

$(x-2,\ y-3,\ z-3) \cdot (-2, 4, 2) = 0$

$-2x+4+4y-12+2z-6=0$

$x-2y-z+7=0$ —— (*)

نعوض تمثيل (AB) في (*) :

$$(AB): \begin{cases} x = -2t+1 \\ y = 4t \qquad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow -2t+1-8t-2t+1+7=0$

$\Rightarrow -12t+9=0$

$t = \dfrac{-9}{-12} = \dfrac{3}{4}$

نعوض في (AB) :

$x = -2\left(\dfrac{3}{4}\right)+1 = \dfrac{-6}{4}+1 = \dfrac{-1}{2}$

$y = 4\left(\dfrac{3}{4}\right) = 3$

$z = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)-1 = \dfrac{6}{4}-1 = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow H\left(-\dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{2}\right)$

← ارتفاع المثلث $\hat{ABC}$ هو $\|\vec{CH}\|$

$h = \|\vec{CH}\| = \sqrt{\dfrac{25}{4}+0+\dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{50}{4}}$

$= \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

← مساحة المثلث :

$S = \dfrac{\|\vec{CH}\| \cdot \|\vec{AB}\|}{2}$

$= \dfrac{\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{6}}{2} = \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

⑤ بعد D عن المستوي P :

$$dist(D, P) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2+1-5-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

⑥ حجم رباعي الوجوه :

$V = \dfrac{1}{3} S_b \cdot h$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot 5\sqrt{3} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{20}{3}$

حل التمرين الخامس عشر:

$P: x - y + z - 11 = 0$

$A(1, -1, 3)$

1) بما أن المستوي P يمس الكرة S فإن:

$$R = dist(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1+1+3-11|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\quad}{\sqrt{3}}$$

$$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$$S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{\quad}{3}$$

2) بما أن Δ و P متعامدين فإن:

$\vec{u} = \vec{n} = (1, -1, 1)$

$$\Delta: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 3 \end{cases}$$

3) H هي نقطة تماس S و P، وهي نقطة تقاطع Δ مع P.

نعوض Δ في P:

$t + 1 + t + 1 + t + 3 - 11 = 0$

$3t - 6 = 0$

$t = 2$

نعوض في Δ:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2+1 = 3 \\ y &= -2-1 = -3 \\ z &= 2+3 = 5 \end{aligned}\right\} H(3, -3, 5)$$

4) $S: (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 12$ — (1)

$y = 0$ — (2)

$z = 0$ — (3)

نعوض (2) و (3) في (1):

$(x-1)^2 + (0+1)^2 + (0-3)^2 = 12$

$(x-1)^2 + 1 + 9 = 12$

$(x-1)^2 = 2$

إما $x - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow x = \sqrt{2} + 1$

أو $x - 1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x = -\sqrt{2} + 1$

إذاً: يتقاطع حامل محور الفواصل مع الكرة S في نقطتين

$M(-\sqrt{2}+1, 0, 0)$ $N(\sqrt{2}+1, 0, 0)$

5) $P_1: x - y - 2z - 3 = 0$

$P_2: 2x + y - z - 2 = 0$

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم للمستوي Q.

* بما أن P_1 و Q متعامدين فإن:

$\vec{n} \perp \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$

$(a, b, c) \cdot (1, -1, -2) = 0$

$a - b - 2c = 0$ — (1)

* وبما أن P_2 و Q متعامدين فإن:

$\vec{n} \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$

$(a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0$

$2a + b - c = 0$ — (2)

نجمع (1)، (2):

$3a - 3c = 0$

$a - c = 0$

نفرض $c = 1 \Leftarrow a - 1 = 0 \Leftarrow a = 1$

نعوض في (2):

$2 + b - 1 = 0 \Rightarrow b = -1$

$\Rightarrow \vec{n}(1, -1, 1)$ ، $B(3, -6, 2)$

$Q: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$Q: 1(x-3) - 1(y+6) + 1(z-2) = 0$

$Q: x-3-y-6+z-2=0$

$Q: x-y+z-11=0$

وهي ذاتها معادلة المستوي P.

حل التمرين السادس عشر:

$A(1,4,1)$ $B(0,2,1)$ $C(1,6,0)$

II - (a) - $\vec{AB}=(-1,-2,0)$

$\vec{AC}=(0,2,-1)$

$\frac{-2}{2}\neq\frac{0}{-1}$

⇐ مركبات الشعاعين غير متناسبة

⇐ النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة لأن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

(b) - نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (ABC):

$\vec{n}\perp\vec{AB}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$

$(a,b,c)\cdot(-1,-2,0)=0$

$-a-2b=0$ —— (1)

$\vec{n}\perp\vec{AC}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AC}=0$

$(a,b,c)\cdot(0,2,-1)=0$

$2b-c=0$ —— (2)

نفرض $c=2$ ⇐ $2b-2=0$

$b=1$

نعوض في (1): $-a-2=0$

$\Rightarrow a=-2$

$\vec{n}(-2,1,2)$, $A(1,4,1)$

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-2(x-1)+1(y-4)+2(z-1)=0$

$-2x+2+y-4+2z-2=0$

$-2x+y+2z-4=0$

$2x-y-2z+4=0$

2 - $\omega(1,1,1)$ و $R=3$

(a) $S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

(b) - بعد ω عن المستوي (ABC):

$$dist(\omega,(ABC))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2-1-2+4|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{\sqrt{9}}$$

$=1$

3 - بما أن Δ و (ABC) متعامدين فإنه:

$\vec{u}=\vec{n}=(2,-1,-2)$

$$\Delta: \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=-2t+1 \end{cases}$$

4 - شرط تقاطع المستوي (ABC) مع الكرة هو

$dist(\omega,(ABC))<R$ .... (*)

$1<3$ محققة

⇐ المستوي يقطع الكرة.

(*) - أما هي مركز الدائرة الناتجة عن التقاطع P و S وهي نقطة تقاطع Δ و P.

نعوض Δ في P:

$2(2t+1)-(-t+1)-2(-2t+1)+4=0$

$4t+2+t-1+4t-2+4=0$

$9t=-3\Rightarrow t=-\frac{1}{3}$

نعوض في Δ: $x=2(-\frac{1}{3})+1=\frac{1}{3}$

$y=-(-\frac{1}{3})+1=\frac{4}{3}$

$z=-2(-\frac{1}{3})+1=\frac{5}{3}$

$\omega'(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3})$

نصف قطر الدائرة: $r = \sqrt{R^2 - dist^2(\omega, p)}$

$= \sqrt{9-1} = \sqrt{8}$

* معادلة الدائرة:

$C: (x-\frac{1}{3})^2 + (y-\frac{4}{3})^2 + (z-\frac{5}{3})^2 = 8$

حل التمرين السابع عشر:

1- $x^2+y^2 = 25$; $3 \leq z \leq 7$

تمثل أسطوانة محورها $(o;\vec{k})$

مركزي قاعدتها $A(0,0,3)$, $B(0,0,7)$

ونصف قطر قاعدتيها $r=5$

* حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$V = S_b \cdot h = \pi r^2 \cdot \|\vec{AB}\|$

$= \pi \times 25 \times 4 = 100\pi$

2- $x^2+y^2+z^2-4x+10y-6z+38=0$

$x^2-4x+y^2+10y+z^2-6z+38=0$

$x^2-4x+4-4+y^2+10y+25-25+$

$z^2-6z+9-9+38=0$

$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y+5)^2-25+(z-3)^2$

$-9+38=0$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+5)^2+(z-3)^2=0$

تمثل نقطة وحيدة: $B(2,-5,3)$

3- $x^2+z^2-\frac{1}{4}y^2=0$

$0 \leq y \leq 2$

تمثل معادلة مخروط محوره $(o;\vec{j})$

ونصف قطر قاعدته $r=1$

وارتفاعه $h=2$

مركز القاعدة $\Omega(0, 2, 0)$.

حل التمرين الثامن عشر:

$A(1,1,2)$ $B(3,1,-4)$ $C(2,0,-1)$

$H(2,-9,-1)$

① - معادلة المستوي المحوري لـ $[AB]$:

$\vec{n} = \vec{AB} = (2, 0, -6)$

$$I \begin{cases} x_I = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z_I = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(2,1,-1)$

$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P: 2(x-2)+0(y-1)-6(z+1)=0$

$P: 2x-4+0-6z-6=0$

$P: 2x-6z-10=0$

$P: x-3z-5=0$

② $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = (1,-10,-3)\cdot(-1,-1,3)$

$= -1+10-9 = 0 \Rightarrow \vec{AH} \perp \vec{BC}$

$\vec{BH} \cdot \vec{AC} = (-1,-10,3)\cdot(1,-1,-3)$

$= -1+10-9 = 0 \Rightarrow \vec{BH} \perp \vec{AC}$

$\Leftarrow$ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث

$\hat{ABC}$.

حل التمرين التاسع عشر:

$A(1,2,1)$ $B(2,2,2)$ $C(2,3,1)$

$\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 0 + 0 = 1$

ومن جهة أخرى:

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\| . \cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| . \|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftarrow B\hat{A}C = \dfrac{\pi}{4}$

حل التمرين العشرين:

بما أن G مركز رباعي الوجوه $ABCD$

فإن $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

أي: G م.أ.م للـ $(A,1)$ $(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$

وبما أن I منتصف $[AD]$ $\Leftarrow$ I م.أ.م للـ $(A,1)$ $(D,1)$ $\Leftarrow$ $(I;2)$

وكذلك J منتصف $[BC]$ $\Leftarrow$ J م.أ.م للـ $(B,1)$ $(C,1)$ $\Leftarrow$ $(J;2)$

فحسب الخاصية التجميعية G م.أ.م للـ $(I;2)$ $(J;2)$

$\Leftarrow$ النقاط I ، J و G تقع على استقامة واحدة.

حل التمرين الواحد والعشرين:

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} = x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC})$

$-\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$(-1 + x + y)\overrightarrow{AM} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$(1 - x - y)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftarrow$ M م.أ.م لـ $(A, 1-x-y)$ و (B, x) ، (C, y)

ولدينا من النص: M م.أ.م لـ $(A,4)$ $(B,2)$ $(C,3)$

$\Leftarrow$ $1 - x - y = 4$ ①

$x = 2$ ②

$y = 3$ ③

حل التمرين الثاني والعشرين:

$A(1,2,-1)$ $B(0,2,1)$ $C(3,-2,2)$

1 - G م.أ.م لـ $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,-1)$.

$x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \dfrac{1 + 0 - 3}{1 + 2 - 1} = -1$

$y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \dfrac{2 + 4 + 2}{1 + 2 - 1} = 4$

$z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \dfrac{-1 + 2 - 2}{1 + 2 - 1} = \dfrac{-1}{2}$

$\Rightarrow G(-1, 4, -\frac{1}{2})$

2 - $\overrightarrow{BG} = (-1, 2, -\frac{3}{2})$

$\overrightarrow{AC} = (2, -4, 3)$

$-\dfrac{1}{2} \overset{?}{=} \dfrac{2}{-4} \overset{?}{=} \dfrac{-\frac{3}{2}}{3}$

$\dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

المركبات المتقابلة متناسبة

الشعاعين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BG}$ مرتبطين خطيا

المستقيمين (AC) و (BG) متوازيان.

حل التمرين الثالث والعشرون:

من الرسم لدينا B' منتصف $[AC]$

⇐ B' مركز أبعاد متناسبة للنقاط (A,α) و (C,γ)

وكذلك $\boxed{\alpha = \gamma}$

⇐ $(B', \alpha+\gamma)$ أي $(B', 2\alpha)$

ولدينا I منتصف $[BB']$

⇐ I مركز أبعاد متناسبة للنقاط (B,β) و $(B', 2\alpha)$

⇐ $\boxed{\beta = 2\alpha}$

وبما أنه I م.أ.م ل $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$

$$\Rightarrow \alpha\vec{IA} + \beta\vec{IB} + \gamma\vec{IC} = \vec{0}$$

$$\alpha\vec{IA} + 2\alpha\vec{IB} + \alpha\vec{IC} = \vec{0}$$

نقسم على $\alpha \neq 0$:

$$\vec{IA} + 2\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

⇐ I م.أ.م ل $(A,1)$ $(B,2)$ $(C,1)$

⇐ $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$.

* تعيين λ: بما أنه G تقع على $[AB]$

فإنه G م.أ.م ل $(A,1)$ $(B,2)$

$$\vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2$$

حل التمرين الرابع والعشرون:

$$\vec{AL} = \frac{1}{3}\vec{AD}$$

$$\Leftarrow 3\vec{AL} = \vec{AD}$$

$$3\vec{AL} = \vec{AL} + \vec{LD}$$

$$-2\vec{AL} + \vec{LD} = \vec{0}$$

$$2\vec{LA} + \vec{LD} = \vec{0}$$

⇐ L م.أ.م ل $(A,2)$ $(D,1)$

وبنفس الطريقة $\vec{CJ} = \frac{2}{3}\vec{CB}$

$$3\vec{CJ} = 2\vec{CJ} + 2\vec{JB}$$

$$-\vec{CJ} + 2\vec{JB} = \vec{0}$$

$$\vec{JC} + 2\vec{JB} = \vec{0}$$

⇐ J م.أ.م ل $(B,2)$ $(C,1)$.

* G منتصف $[JL]$ ⇐ G م.أ.م ل $(L,3)(J,3)$

⇐ وحسب الخاصية التجميعية

* G م.أ.م ل $(A,2)$ $(D,1)$ $(B,2)$ $(C,1)$.

ولدينا: I منتصف $[DC]$ ⇐ I م.أ.م ل $(D,1)$ $(C,1)$ ⇐ $(I;2)$

ولدينا K منتصف $[AB]$ ⇐ K م.أ.م ل $(A,2)$ $(B,2)$ ⇐ $(K;4)$

⇐ وحسب الخاصية التجميعية G م.أ.م ل $(K,4)$ و $(I,2)$

النقاط G , I , K تقع على استقامة واحدة.

حل التمرين الخامس والعشرون:

* $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AD}$.

⇐ P م.أ.م ل $(A,2)$ $(D,1)$ ⇐ $(P;3)$

* $\vec{BQ} = \frac{1}{3}\vec{BD}$

⇐ Q م.أ.م ل $(B,2)$ $(D,1)$ ⇐ $(Q;3)$

* $\vec{CK} = \frac{2}{3}\vec{CB}$

⇐ K م.أ.م ل $(B,2)$ $(C,1)$ ⇐ $(K;3)$

R منتصف [CD] ⇐ R م.ن.م لـ (C,1) (D,1)

⇐ (C,1) ← (R;2).

I منتصف [AB] ⇐ I م.ن.م لـ (A,2)

⇐ (B,2) ⇐ (I;4).

① بما أن G م.ن.م لـ (A,2) , (B,2)
(C,1) (D,1)

و I م.ن.م لـ (A,2) (B,2)

و R م.ن.م لـ (C,1) (D,1)

فحسب الخاصية التجميعية يكون

G م.ن.م لـ (I,4) (R,2).

* فالنقاط G , I , R على استقامة واحدة.

وكذلك G م.ن.م لـ (P,3), (K,3)

⇐ النقاط G , K , P على استقامة واحدة

⇐ المستقيمان (IR) و (PK) يتقاطعان في النقطة G.

② - J م.ن.م لـ (C,1) (A,2)

ط: 1

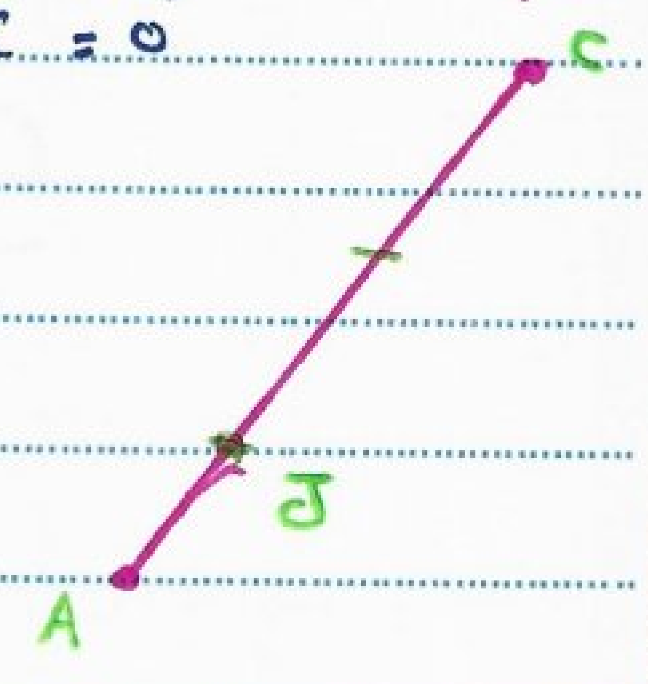
$$2\vec{JA} + \vec{JC} = \vec{0}$$

$$2\vec{JA} + \vec{JA} + \vec{AC} = \vec{0}$$

$$3\vec{JA} = -\vec{AC}$$

$$-3\vec{AJ} = -\vec{AC}$$

$$\vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$$



ط:
ع=

$$\vec{AJ} = \frac{b}{a+b}\vec{AC}$$

$$\vec{AJ} = \frac{1}{1+2}\vec{AC}$$

$$\vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$$

③ $\|2\vec{MA} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MB} + \vec{MD}\|$

$\|3\vec{MJ}\| = \|3\vec{MQ}\|$

$3MJ = 3MQ$

$MJ = MQ$

M تمثل المستوي المحوري للقطعة [JQ].

حل التمرين السادس والعشرون:

M م.ن.م لـ (A,1) (B,1) (G,1) (E,1)

1 - I منتصف [AE] ⇐ I م.ن.م لـ (A,1)

⇐ (E,1) ⇐ (I;2).

J منتصف [BG] ⇐ J م.ن.م لـ (B,1)

⇐ (G,1) ⇐ (J;2).

فحسب الخاصية التجميعية M م.ن.م لـ (I,2)

(J,2) ⇐ النقاط M , I , J على استقامة

واحدة ⇐ M تقع على [IJ].

موضع M على [IJ] : بما أن معامل I يساوي

معامل J ⇐ M منتصف [IJ].

2 - وبنفس الطريقة في الطلب السابق نجد:

M م.ن.م لـ (K,2) و (L,2)

⇐ النقاط M , K , L على استقامة واحدة

و M منتصف [KL].

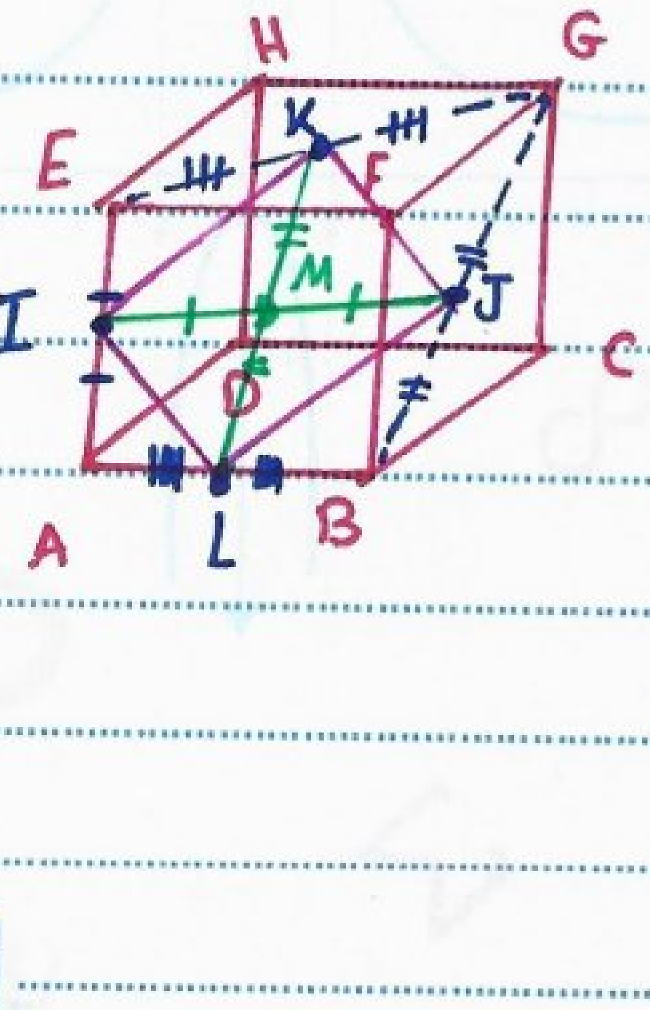
3 - بما أن المستقيمان (KL) و (IJ) يتقاطعان

في النقطة M فالنقاط I , J , K , L

تقع في مستوٍ واحد.

* الشكل الرباعي ILJK هو متوازي أضلاع

لأن قطراه متناصفان.



»» حل ورقة عمل «حالات المستوي» ««

♡ التمرين الأول:

$A(3, 1, 2)$

$B(1, -1, 2)$

* نفرض I منتصف $[AB]$:

$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2$

$y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = 0$

$z_I = \frac{z_1 + z_2}{2} = 0$

$\Rightarrow I(2, 0, 0)$

* $\vec{n} = \vec{AB} = (-2, -2, -4)$

معادلة المستوي العمودي لـ $[AB]$:

* $P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$P: -2(x - 2) - 2(y - 0) - 4(z - 0) = 0$

$P: -2x + 4 - 2y - 4z = 0$

$(\div -2)$

$P: x + y + 2z - 2 = 0$

♡ التمرين الثاني:

$A(1, 0, -1) \quad B(2, 2, 3)$

$C(3, 1, -2)$

* نحسب $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$:

$\vec{AB} = (1, 2, 4)$

$\vec{AC} = (2, 1, -1)$

نلاحظ ان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً.

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم للمستوي P

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a, b, c) \cdot (1, 2, 4) = 0$

$a + 2b + 4c = 0 \quad \text{---} (1)$

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$(a, b, c) \cdot (2, 1, -1) = 0$

$2a + b - c = 0 \quad \text{---} (2)$

نضرب المعادلة الأولى بـ (-2) ونجمع مع الثانية

$-2a - 4b - 8c = 0 \quad \text{---} (3)$

$\Rightarrow -3b - 9c = 0$

$b + 3c = 0$

نفرض $\boxed{c = 1} \Rightarrow b + 3 = 0$

$\Longrightarrow \boxed{b = -3}$

نعوض في (1):

$a - 6 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$\vec{n}(2, -3, 1)$

$A(1, 0, -1)$

$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$P: 2(x - 1) - 3(y - 0) + 1 \cdot (z + 1) = 0$

$P: 2x - 2 - 3y + z + 1 = 0$

$P: 2x - 3y + z - 1 = 0$

التمرين الثالث:

$P: 2x + y - z + 1 = 0$

$A(1,1,2) \quad B(1,2,3)$

• نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي Q

• بما أن Q عمودي على P ⇐

$\vec{n} \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_P = 0$

$(a,b,c) \cdot (2,1,-1) = 0$

$2a + b - c = 0 \quad (1)$

• بما أن Q يحوي A و B فإن:

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a,b,c) \cdot (0,2,1) = 0$

$2b + c = 0 \quad (2)$

$2b + 2 = 0 \Leftarrow c = 2$ نفرض

$\Rightarrow b = -1$

نعوض في (1):

$2a - 1 - 2 = 0$

$a = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \vec{n}\left(\frac{3}{2}, -1, 2\right)$

$A(1,1,2)$

$Q: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$Q: \frac{3}{2}(x-1) - 1(y-1) + 2(z-2) = 0$

$Q: \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - y + 1 + 2z - 4 = 0$

$Q: \frac{3}{2}x - y + 2z - \frac{9}{2} = 0$

$\rightarrow Q: 3x - 2y + 4z - 9 = 0$

التمرين الرابع:

$A(3,1,0)$

$P: 3x - y + z + 2 = 0$

• بما أن P, Q متوازيان فإن:

$\vec{n}_Q = \vec{n}_P = (3,-1,1)$

$Q: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$Q: 3(x-3) - 1(y-1) + 1 \cdot (z-0) = 0$

$Q: 3x - 9 - y + 1 + z = 0$

$Q: 3x - y + z - 8 = 0$

التمرين الخامس:

$A(1,1,4) \quad B(2,0,3) \quad C(-1,1,2)$

$\vec{n} = \vec{BC} = (-3, 1, -1)$

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: -3(x-1) + 1 \cdot (y-1) - 1 \cdot (z-4) = 0$

$P: -3x + 3 + y - 1 - z + 4 = 0$

$P: 3x - y + z - 6 = 0$

التمرين السادس :

$A(2,-1,3)$

$P_1 : 2x+y-z+4=0$

$P_2 : x-y-3z+1=0$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P.

بما أن P_1 و P متعامدان فإن :

$\vec{n} \perp \vec{n_1} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n_1}=0$

$(a,b,c)\cdot(2,1,-1)=0$

$2a+b-c=0$ — (1)

وبما أن P_2 و P متعامدان فإن :

$\vec{n} \perp \vec{n_2} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n_2}=0$

$(a,b,c)\cdot(1,-1,-3)=0$

$a-b-3c=0$ — (2)

نجمع (1) ، (2) :

$3a-4c=0$

نفرض $\boxed{c=3} \Rightarrow 3a-12=0$

$\Rightarrow \boxed{a=4}$

نعوض في (1) :

$8+b-3=0$

$\boxed{b=-5}$

$\Rightarrow \vec{n}(4,-5,3)$ ، $A(2,-1,3)$

$P : a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P : 4(x-2)-5(y+1)+3(z-3)=0$

$P : 4x-8-5y-5+3z-9=0$

$P : 4x-5y+3z-22=0$

التمرين السابع :

$$d_1 : \begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases} ; t\in\mathbb{R}$$

$$d_2 : \begin{cases} x=4-5k \\ y=3-2k \\ z=-1+2k \end{cases} ; k\in\mathbb{R}$$

1- نوجد $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$ أشعة التوجيه :

$\vec{u_1}=(0,-1,-2)$

$\vec{u_2}=(-5,-2,2)$

نلاحظ أن $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب المركبات المتقابلة.

$\Leftarrow$ d_1 و d_2 غير متوازيان.

* ندرس التقاطع :

$-1=4-5k$ — (1)

$1-t=3-2k$ — (2)

$1-2t=-1+2k$ — (3)

من (1) نجد : $-5k=-5$

$\boxed{k=1}$

نعوض في (2) :

$1-t=3-2 \Rightarrow \boxed{t=0}$

للتحقق نعوض في ③ :

$-1+2(1) \overset{?}{=} 1-2(0)$

$-1+2 \overset{?}{=} 1-0$

$1 \overset{?}{=} 1$ محققة

$\Leftarrow$ d_1 ، d_2 متقاطعان .

②* لتعيين إحداثيات I نقطة التقاطع

نعوض $k=1$ في d_2 أو $t=0$ في d_1 :

$$\left.\begin{aligned} x&=-1\\ y&=1\\ z&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(-1,1,1)$$

③ معادلة المستوي P .

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P

$\vec{n} \perp \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}_1 = 0$

$(a,b,c).(0,-1,-2)=0$

$-b-2c=0$ — ①

$\vec{n} \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u}_2 = 0$

$(a,b,c).(-5,-2,2)=0$

$-5a-2b+2c=0$ — ②

نفرض $\boxed{c=1} \Rightarrow -b-2=0$

$\boxed{b=-2}$

نعوض في ② :

$-5a+4+2=0$

$-5a=-6$

$\boxed{a=\frac{6}{5}}$

$\Rightarrow \vec{n}\left(\frac{6}{5},-2,1\right)$

$I(-1,1,1)$

$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P: \frac{6}{5}(x+1)-2(y-1)+1(z-1)=0$

$P: \frac{6}{5}x+\frac{6}{5}-2y+2+z-1=0$

$P: \frac{6}{5}x-2y+z+\frac{11}{5}=0$

$P: 6x-10y+5z+11=0$

المسألة (1):

$C(-1,1,1)\quad B(-1,5,-3)\quad A(3,1,-3)$

1- $\overrightarrow{AB} = (-4, 4, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-4, 0, 4)$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16+16+0} = \sqrt{32}$

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{16+0+16} = \sqrt{32}$

2- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{16+0+0}{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}$$

$$= \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

3- نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي P.

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$(a,b,c)\cdot(-4,4,0) = 0$

$-4a + 4b = 0 \quad (1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$(a,b,c)\cdot(-4,0,4) = 0$

$-4a + 4c = 0 \quad (2)$

نفرض $b = 4 \Leftarrow a = 4 \Leftarrow c = 4$

$\Rightarrow \vec{n}(4, 4, 4)$

$B(-1, 5, -3)$

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: 4(x+1) + 4(y-5) + 4(z+3) = 0$

$P: 4x + 4 + 4y - 20 + 4z + 12 = 0$

$P: 4x + 4y + 4z - 4 = 0$

$P: x + y + z - 1 = 0$

4- نفرض $D'(x,y,z)$ المسقط القائم لـ D على P.

$\begin{cases} \overrightarrow{DD'} \text{ عمودي على } P \\ \vec{n} \text{ عمودي على } P \end{cases}$

$\overrightarrow{DD'} = \alpha\vec{n}$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-4 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x-1 = \alpha &\Rightarrow x = \alpha+1 \\ y+1 = \alpha &\Rightarrow y = \alpha-1 \\ z-4 = \alpha &\Rightarrow z = \alpha+4 \end{aligned}\right\} (*)$$

D' تنتمي إلى P فهي تحقق معادلته.

نعوض $*$ في P:

$P: x + y + z - 1 = 0$

$\alpha + 1 + \alpha - 1 + \alpha + 4 - 1 = 0$

$3\alpha + 3 = 0$

$\alpha = -1$

نعوض في $(*)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= -1+1 = 0 \\ y &= -1-1 = -2 \\ z &= -1+4 = 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow D'(0,-2,3)$$

5- $Q: 6x - 5y - z + 1 = 0$

شرط تعامد مستويين هو:

$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0 \quad \ldots (*)$

$\vec{n}_P = (1,1,1)$

$\vec{n}_Q = (6,-5,-1)$

$\rightarrow \vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q = 1\times 6 + 1\times(-5) + 1\times(-1)$

$= 6 - 5 - 1 = 0$

$\Leftarrow$ P، Q متعامدين.

2-

$\vec{AB} = (1, 2, -2)$

$\vec{AC} = (0, 2, -1)$

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ الناظم للمستوي (ABC).

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a, b, c) \cdot (1, 2, -2) = 0$

$a + 2b - 2c = 0$ (1)

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$(a, b, c) \cdot (0, 2, -1) = 0$

$2b - c = 0$ (2)

نفرض $c = 2 \Leftarrow b = 1 \Leftarrow a = 2$

$\Rightarrow \vec{n}(2, 1, 2)$

$C(1, 1, 1)$

$(ABC): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$2(x-1) + 1.(y-1) + 2(z-1) = 0$

$2x - 2 + y - 1 + 2z - 2 = 0$

$2x + y + 2z - 5 = 0$

3- نفرض $D'(x, y, z)$ هي المسقط القائم لـ D على المستوي (ABC).

$\vec{DD'}$ عمودي على المستوي (ABC).

$\vec{n}$ 〃 〃 〃 (ABC).

$\Rightarrow \vec{DD'} = \alpha \vec{n}$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 1 = 2\alpha &\Rightarrow x = 2\alpha + 1 \\ y - 2 = \alpha &\Rightarrow y = \alpha + 2 \\ z - 1 = 2\alpha &\Rightarrow z = 2\alpha + 1 \end{aligned}\right\} (*)$$

6-

$P: x + y + z - 1 = 0$ (1)

$Q: 6x - 5y - z + 1 = 0$ (2)

بالجمع نجد:

$7x - 4y = 0$

نعزل x:

$7x = 4y$

$x = \frac{4}{7} y$ —(*)

نعوض في (1):

$\frac{4}{7} y + y + z - 1 = 0$

$\frac{11}{7} y + z - 1 = 0$

نعزل z:

$z = -\frac{11}{7} y + 1$ —(**)

نفرض $y = t$:

$$d: \begin{cases} x = \frac{4}{7} t \\ y = t \\ z = \frac{-11}{7} t + 1 \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}$$

المسألة (2):

$A(1, -1, 2)$ $B(2, 1, 0)$ $C(1, 1, 1)$

$D(1, 2, 1)$.

1- $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = ?$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

$\Rightarrow \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|}$

$= \frac{0 + 4 + 2}{\sqrt{9} * \sqrt{5}}$

$= \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

D' تنتمي إلى المستوى (ABC) فهي تحقق معادلته (نعوض * في المستوى):

$$2x + y + 2z - 5 = 0$$

$$2(2\alpha+1) + \alpha + 2 + 2(2\alpha+1) - 5 = 0$$

$$4\alpha + 2 + \alpha + 2 + 4\alpha + 2 - 5 = 0$$

$$9\alpha + 1 = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{9}$$

نعوض في $(*)$:

$$x = 2\left(-\frac{1}{9}\right) + 1 = \frac{-2}{9} + 1 = \frac{7}{9}$$

$$y = -\frac{1}{9} + 2 = \frac{17}{9}$$

$$z = 2\left(-\frac{1}{9}\right) + 1 = -\frac{2}{9} + 1 = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow D'\left(\frac{7}{9}, \frac{17}{9}, \frac{7}{9}\right)$$

4- Q يعرف D ويقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ ناظماً له

$Q: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$Q: 1.(x-1) + 1.(y-2) - 2(z-1) = 0$

$Q: x - 1 + y - 2 - 2z + 2 = 0$

$Q: x + y - 2z - 1 = 0$

5- $2x + y + 2z - 5 = 0$ (1)

$x + y - 2z - 1 = 0$ (2)

بالجمع نجد:

$$3x + 2y - 6 = 0$$

نعزل x:

$$3x = -2y + 6$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2}{3}y + 2 \quad ...(*)$$

نعوض في (2):

$$\frac{-2}{3}y + 2 + y - 2z - 1 = 0$$

$$\frac{1}{3}y - 2z + 1 = 0$$

نعزل z:

$$2z = \frac{1}{3}y + 1$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{6}y + \frac{1}{2} \quad ...(**)$$

نفرض $y = t$:

$$d: \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t + 2 \\ y = t \\ z = \frac{1}{6}t + \frac{1}{2} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

المسألة (3):

$C(1,2,3)$ $B(1,0,-1)$ $A(1,2,-1)$

1- $\vec{AB} = (0,-2,0)$

$\vec{AC} = (0,0,4)$

$\vec{BC} = (0,2,4)$

* $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 + 0 + 0 = 0$
* $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 - 4 + 0 = -4$

2- M منتصف $[AC]$:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

$$z_M = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$\vec{n} = \vec{BC}$ و $M(1,2,1)$

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: 0.(x-1) + 2(y-2) + 4(z-1) = 0$

$P: 2y - 4 + 4z - 4 = 0$

$p : 2y + 4z - 8 = 0$

$p : y + 2z - 4 = 0$

③ - نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم للمستوي Q.

* بما أن P , Q متعامدان فإن:

$\vec{n}_p \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n} = 0$

$(0, 1, 2) \cdot (a, b, c) = 0$

$b + 2c = 0$ ①

* بما أن Q يمر من A , O فإن:

$\vec{AO} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{AO} \cdot \vec{n} = 0$

$(-1, -2, 1) \cdot (a, b, c) = 0$

$-a - 2b + c = 0$ ②

نفرض $\boxed{b = 2} \Leftarrow \boxed{c = -1} \Leftarrow \boxed{a = -5}$

$\vec{n}(-5, 2, -1)$

$O(0, 0, 0)$

$Q : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$Q : -5(x - 0) + 2(y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0$

$Q : -5x + 2y - z = 0$

$Q : 5x - 2y + z = 0$

④ - نوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d الفصل المشترك لـ P , Q.

$y + 2z - 4 = 0$ ①

$5x - 2y + z = 0$ ②

من ① نعزل y :

$y = -2z + 4$ ---(*)

نعوض في ②:

$5x - 2(-2z + 4) + z = 0$

$5x + 4z - 8 + z = 0$

$5x + 5z - 8 = 0$

نعزل x : $5x = -5z + 8$

$x = -z + \frac{8}{5}$ ---(**)

نفرض $z = t$:

$$d : \begin{cases} x = -t + \frac{8}{5} \\ y = -2t + 4 \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

نفرض $C'(x, y, z)$ المسقط العامد لـ C على d

$\vec{CC'}$ عمودي على d $\Leftarrow$

$\vec{CC'} \cdot \vec{u}_d = 0$

$(x - 1, y - 2, z - 3) \cdot (-1, -2, 1) = 0$

$-x + 1 - 2y + 4 + z - 3 = 0$

$-x - 2y + z + 2 = 0$ ---(*)

C' تنتمي إلى d فهي تحقق معادلاته

نعوض d في (*):

$-(-t + \frac{8}{5}) - 2(-2t + 4) + t + 2 = 0$

$t - \frac{8}{5} + 4t - 8 + t + 2 = 0$

$6t = \frac{38}{5} \Rightarrow \boxed{t = \frac{38}{30}}$

نعوض في d:

$x = -\frac{38}{30} + \frac{8}{5} = \frac{10}{30}$

$y = -2(\frac{38}{30}) + 4 = -\frac{76}{30} + 4 = \frac{44}{30}$

$z = -\frac{38}{30}$

$\Rightarrow C'(\frac{10}{30}, \frac{44}{30}, \frac{-38}{30})$

فيكون بعد C عن المستقيم هو:

$dist(C, d) = \|\vec{CC'}\|$

$= \sqrt{(\frac{10}{30} - 1)^2 + (\frac{44}{30} - 2)^2 + (\frac{-38}{30} - 3)^2}$

$= \boxed{}$

المسألة (4) :

$B(2,0,4) \quad A(1,-1,2)$

$P: x - y + 3z - 4 = 0$

① - نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي Q.

* بما أن P , Q متعامدان فإن:

$\vec{n}_p \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n} = 0$

$(1,-1,3).(a,b,c) = 0$

$a - b + 3c = 0 \ldots ①$

* بما أن Q يحوي A و B فإن:

$\vec{AB} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0$

$(1,1,2).(a,b,c) = 0$

$a + b + 2c = 0 \ldots ②$

نجمع ① , ②:

$2a + 5c = 0$

نفرض $c = 2 \Leftarrow 2a + 10 = 0$

$a = -5$

نعوض في ②:

$-5 + b + 4 = 0 \Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow \vec{n}(-5,1,2)$

$B(2,0,4)$

$Q: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$Q: -5(x-2) + 1.(y-0) + 2(z-4) = 0$

$Q: -5x + 10 + y + 2z - 8 = 0$

$Q: -5x + y + 2z + 2 = 0$

② - بما أن Δ يعامد P فإن:

$\vec{u} = \vec{n} = (1,-1,3)$

و Δ يحوي A إذاً:

$$\Delta: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \quad ; \ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t + 2 \end{cases}$$

③ - نفرض $A'(x,y,z)$ هي المسقط القائم لـ A على P.

$$\begin{cases} \vec{AA'} \text{ عمودي على } P \\ \vec{n} \text{ عمودي على } P \end{cases}$$

$\vec{AA'} = \alpha \vec{n}$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - 1 = \alpha &\Rightarrow x = \alpha + 1 \\ y + 1 = -\alpha &\Rightarrow y = -\alpha - 1 \\ z - 2 = 3\alpha &\Rightarrow z = 3\alpha + 2 \end{aligned}\right\} (*)$$

A' تنتمي إلى المستوي P فهي تحقق معادلته

"نعوض * في P":

$x - y + 3z - 4 = 0$

$\alpha + 1 - (-\alpha - 1) + 3(3\alpha + 2) - 4 = 0$

$\alpha + 1 + \alpha + 1 + 9\alpha + 6 - 4 = 0$

$11\alpha + 4 = 0$

$\alpha = \frac{-4}{11}$

نعوض في $(*)$:

$x = -\frac{4}{11} + 1 = \frac{7}{11}$

$y = +\frac{4}{11} - 1 = \frac{-7}{11}$

$z = 3\left(-\frac{4}{11}\right) + 2 = \frac{10}{11}$

$$x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + y + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+ z^2 - 6z + 9 - 9 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$+ (z-3)^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{6}{4}$$

$\Leftarrow$ تمثل كرة مركزها $\Omega\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 3\right)$
ونصف قطرها

$$R = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

#طريقة ثانية للطلب الرابع:

نكتب معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$.

$$R = \frac{\|\vec{AB}\|}{2} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$ الطول

مركز الكرة I (منتصف $[AB]$)

$$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$z_I = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}, 3\right)$$

$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$S: \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + (z-3)^2 = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{7}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{10}{11}\right)$$

ط:

A' هي نقطة تقاطع Δ مع P:

نعوض Δ في P:

$$x - y + 3z - 4 = 0$$

$$t + 1 - (-t-1) + 3(3t+2) - 4 = 0$$

$$t + 1 + t + 1 + 9t + 6 - 4 = 0$$

$$11t = -4$$

$$\Rightarrow t = \frac{-4}{11}$$

نعوض t في Δ:

$$x = \frac{-4}{11} + 1 = \frac{7}{11}$$

$$y = -\left(\frac{-4}{11}\right) - 1 = \frac{-7}{11}$$

$$z = 3\left(-\frac{4}{11}\right) + 2 = \frac{10}{11}$$

$$\Rightarrow A'\left(\frac{7}{11}, \frac{-7}{11}, \frac{10}{11}\right)$$

4 - $M(x, y, z)$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$$

$$(x-1, y+1, z-2) \cdot (x-2, y, z-4) = 0$$

$$(x-1)(x-2) + (y+1) \cdot y + (z-2)(z-4) = 0$$

$$x^2 - 2x - x + 2 + y^2 + y + z^2 - 4z - 2z + 8 = 0$$

$$x^2 - 3x + y^2 + y + z^2 - 6z + 10 = 0$$

المسألة (5) :

$C(3,4,1)$ $B(1,1,2)$ $A(1,2,0)$
$D(-8,1,2)$

-1) $\vec{AB} = (0,-1,2)$
$\vec{AC} = (2,2,1)$

$\frac{0}{2} \overset{?}{=} \frac{-1}{2} \overset{?}{=} \frac{2}{1}$

المركبات المتقابلة غير متناسبة
الأشعة $\vec{AC}$ ، $\vec{AB}$ غير مرتبطين خطياً
النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة
فهي تشكل مستوٍ.

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (ABC):
$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n}.\vec{AB} = 0$
$(a,b,c).(0,-1,2) = 0$
$-b + 2c = 0$ (1)
$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n}.\vec{AC} = 0$
$(a,b,c).(2,2,1) = 0$
$2a + 2b + c = 0$ (2)
نفرض $c = 1 \Leftarrow -b + 2 = 0$
$b = 2$
نعوض في (2):
$2a + 4 + 1 = 0$
$2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow \vec{n}\left(-\frac{5}{2}, 2, 1\right)$
$A(1,2,0)$
$(ABC): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$-\frac{5}{2}(x-1) + 2(y-2) + 1.(z-0) = 0$

$-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} + 2y - 4 + z = 0$

$P: 5x - 4y - 2z + 3 = 0$

-2) Δ مار من D وعمودي على P
$\vec{u} = \vec{n} = (5,-4,-2)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 5t - 8 \\ y = -4t + 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = -2t + 2 \end{cases}$$

-3) نفرض $D'(x,y,z)$ المسقط القائم لـ D على P.
$\vec{DD'}$ عمودي على P
$\vec{n}$ عمودي على P
$\vec{DD'} = \alpha \vec{n}$

$$\begin{bmatrix} x+8 \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+8 \\ y-1 \\ z-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\alpha \\ -4\alpha \\ -2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x+8 = 5\alpha &\Rightarrow x = 5\alpha - 8 \\ y-1 = -4\alpha &\Rightarrow y = -4\alpha + 1 \\ z-2 = -2\alpha &\Rightarrow z = -2\alpha + 2 \end{aligned}\right\} (*)$$

D' تنتمي إلى المستوي P فهي تحقق معادلته
« نعوض * في P ».

$5(5\alpha - 8) - 4(-4\alpha + 1) - 2(-2\alpha + 2) + 3 = 0$
$25\alpha - 40 + 16\alpha - 4 + 4\alpha - 4 + 3 = 0$
$45\alpha - 45 = 0$
$\Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

نعوض في (*):

6- $R = \|\vec{AD}\| = \sqrt{81+1+4}$

$\Rightarrow R = \sqrt{86}$

$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

$S: (x+8)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 86$

7- شرط تقاطع المستوي مع الكرة هو:

$R \overset{?}{>} dist$

$\sqrt{86} \overset{?}{>} \sqrt{45}$ محقق.

⇐ المستوي P و S متقاطعان.

8- $r = \sqrt{R^2 - dist^2(D, (ABC))}$

$= \sqrt{\sqrt{86}^2 - \sqrt{45}^2}$

$= \sqrt{86 - 45} = \sqrt{41}$

9- الدائرة مركزها هو D'

ونصف قطرها r

$C: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$

$C: (x+3)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 41$

$x = 5(1) - 8 = -3$

$y = -4(1) + 1 = -3$

$z = -2(1) + 2 = 0$

$\rightarrow D'(-3, -3, 0)$

4- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2$

$= 0 - 2 + 2 = 0$

$\Leftarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$

المثلث ABC قائم في A.

مساحة المثلث القائم:

$S = \dfrac{\|\vec{AB}\| . \|\vec{AC}\|}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{5} . \sqrt{9}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

5- $dist(D, (ABC)) =$

$= \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \dfrac{|-40 - 4 - 4 + 3|}{\sqrt{25+16+4}}$

$= \dfrac{|-45|}{\sqrt{45}} = \dfrac{45}{\sqrt{45}} = \sqrt{45}$

$\rightarrow V = \dfrac{1}{3} S_b . h$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \times 3\sqrt{5}$

$= \dfrac{45}{6} = \dfrac{15}{2}$

المسألة (6) 8

مكعب طول حرفه 1 $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

1- $A(0,0,0)$ $G(1,1,1)$

$B(1,0,0)$ $H(0,1,1)$

$D(0,1,0)$ $F(1,0,1)$

$E(0,0,1)$ $C(1,1,0)$

2- تمثيل وسيطي لـ (EC):

$\vec{u}=\vec{EC}=(1,1,-1)$

$$(EC):\begin{cases}x=t\\ y=t \quad ;\ t\in\mathbb{R}\\ z=-t+1\end{cases}$$

3- معادلة المستوي (AFH):

$\vec{AF}=(1,0,1)$

$\vec{AH}=(0,1,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (AFH)

$\vec{n}\perp\vec{AF}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AF}=0$

$(a,b,c).(1,0,1)=0$

$a+c=0$ (1)

$\vec{n}\perp\vec{AH}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AH}=0$

$(a,b,c).(0,1,1)=0$

$b+c=0$ (2)

نفرض $c=1 \Leftarrow b+1=0 \Leftarrow b=-1$

$\Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow \vec{n}(-1,-1,1)$ & $A(0,0,0)$

$(AFH): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-1.(x-0)-1.(y-0)+1.(z-0)=0$

$-x-y+z=0$

$\Rightarrow x+y-z=0$

4- I نقطة تقاطع (EC) مع (AFH)

لتعيين إحداثيات I نعوض المستقيم

في المستوي (AFH):

$t+t-(-t+1)=0$

$2t+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$

نعوض في التمثيل:

$x=\frac{1}{3}$

$y=\frac{1}{3}$

$z=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow I\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

* حتى تكون I هي المسقط القائم لـ E على المستوي (AFH) يجب أن يتحقق الشرطين:

1- I تنتمي إلى المستوي (AFH).

2- $\vec{IE}$ عمودي على المستوي (AFH)

أي: $\vec{IE}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

* نعوض I في المستوي:

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\overset{?}{=}0$

محققة $\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\overset{?}{=}0$

$\rightarrow I\in(AFH)$

* نحسب $\vec{IE}$:

$\vec{IE}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

$\vec{n}=(1,1,-1)$

نأخذ تناسب المركبات المتقابلة:

$$\frac{-\frac{1}{3}}{1}\overset{?}{=}\frac{-\frac{1}{3}}{1}\overset{?}{=}\frac{\frac{1}{3}}{-1}$$

محققة $-\frac{1}{3}\overset{?}{=}\frac{-1}{3}\overset{?}{=}\frac{-1}{3}$

$\Leftarrow$ $\vec{n}$ و $\vec{IE}$ مرتبطين خطياً

$\Leftarrow$ I هي المسقط القائم لـ E على المستوي (AFH).

⑤- المثلث $\hat{AFH}$:

$\vec{AF}=(1,0,1) \Rightarrow \|\vec{AF}\|=\sqrt{2}$

$\vec{AH}=(0,1,1) \Rightarrow \|\vec{AH}\|=\sqrt{2}$

$\vec{HF}=(1,-1,0) \Rightarrow \|\vec{HF}\|=\sqrt{2}$

⇒ المثلث $\hat{AFH}$ متساوي الأضلاع لأن

$AF=AH=HF=\sqrt{2}$

مساحة المثلث المتساوي الأضلاع :

$$S=\frac{\sqrt{3}\cdot a^2}{4}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}^2}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

حجم رباعي الوجوه (E,AFH)

نحسب الارتفاع وهو بعد E عن المستوي (AFH).

$h=\text{dist}(E,AFH)$:

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|0+0-1+0|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}S_b\cdot h$$

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$V=\frac{1}{6}$ (وحدة مكعبة)

⑥- بما أن المستوي والكرة متماسان

فإن $R=\text{dist}$

$$\Rightarrow R=\text{dist}(E,(AFH))=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$S:(x-0)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$

$\Rightarrow S: x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{3}$

تكملة الطلب (4):

* أثبت أن I هي المسقط العامودي لـ E على المستوي (AFH).

تو ماتش ضغوط على
كتكوت مغنطوط.

المسألة (7):

رباعي وجوه.

1- $(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AC}, \frac{1}{3}\vec{AD})$

$A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$ $C(0,3,0)$

$D(0,0,3)$

2- G مركز ثقل المثلث BCD:

$$x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{3+0+0}{3} = 1$$

$$y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{0+3+0}{3} = 1$$

$$z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{0+0+3}{3} = 1$$

$$G(1,1,1)$$

3- $\vec{AG} = (1,1,1)$

$\vec{BC} = (-3,3,0)$

$\vec{BD} = (-3,0,3)$

$\vec{BC}$ ، $\vec{BD}$ غير مرتبطين خطياً.

$\vec{AG}\cdot\vec{BC} = 1\times(-3) + 1\times 3 + 1\times 0 = 0$

$\Leftarrow \vec{AG} \perp \vec{BC}$

$\vec{AG}\cdot\vec{BD} = 1\times(-3) + 1\times 0 + 1\times 3 = 0$

$\Leftarrow \vec{AG} \perp \vec{BD}$

$\Leftarrow$ $\vec{AG}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً.

$\Leftarrow$ $\vec{AG}$ ناظم (عمودي) للمستوي (BCD).

معادلة المستوي (BCD):

$\vec{n} = \vec{AG} = (1,1,1)$ & $B(3,0,0)$

$(BCD): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$1.(x-3) + 1.(y-0) + 1.(z-0) = 0$

$x - 3 + y + z = 0$

$(BCD): x + y + z - 3 = 0$ ...(*)

4- بما أن S تمس المستوي (BCD) فإن:

$$R = dist(A,(BCD)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|0+0+0-3|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 3$

5- نفرض $N(x,y,z)$

بما أن الرباعي $ABNC$ مربع فإن:

$$\vec{AB} = \vec{CN}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-0 \\ y-3 \\ z-0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow N(3,3,0)$

المسألة (8):

هرم $(A ; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

① - $A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$ $D(0,3,0)$
$E(0,0,3)$ $C(3,3,0)$

② - G مركز ثقل المثلث $\hat{EBD}$:

$$x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$z_G = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$G(1,1,1)$

③ - $\vec{AG} = (1,1,1)$
$\vec{EB} = (\ ,0,-3)$
$\vec{ED} = (0,3,-3)$
$\vec{EB}$ و $\vec{ED}$ غير مرتبطين خطيا.

$\vec{AG} \cdot \vec{EB} = +3+0-3 = 0$
$\Leftarrow \vec{AG} \perp \vec{EB}$

$\vec{AG} \cdot \vec{ED} = 0+3-3 = 0$
$\Leftarrow \vec{AG} \perp \vec{ED}$
$\Leftarrow$ $\vec{AG}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطيا $\Leftarrow$ $\vec{AG}$ ناظم للمستوي (EBD).

* معادلة المستوي (EBD):

$\vec{n} = \vec{AG} = (1,1,1)$ & $B(3,0,0)$

$(EBD): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0$

$1.(x-3)+1.(y-0)+1.(z-0) = 0$

$x-3+y+z = 0$

$(EBD): x+y+z-3 = 0$

④ - $(AG): \begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = t+1 \end{cases}$

* نعوض عبارات (AG) في المستوي (EBD):

$x+y+z-3 = 0$
$t+1+t+1+t+1-3 = 0$
$3t = 0$
$t = 0$

نعوض في (AG):

$\left. \begin{array}{l} x = 0+1 = 1 \\ y = 0+1 = 1 \\ z = 0+1 = 1 \end{array} \right\}$

$\rightarrow J(1,1,1)$

⑤ - $R = dist(C,(EBD)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \frac{|3+3+0-3|}{\sqrt{1+1+1}}$

$= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$
$S: (x-3)^2+(y-3)^2+z^2 = 3$

⑥ - $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3} \times a^2 \cdot ED$

$= \frac{1}{3} \times 3^2 \times 3\sqrt{2}$

$V = 9\sqrt{2}$

المسألة (9):

متوازي مستطيلات $(D;\vec{DA},\frac{1}{2}\vec{DC},\vec{DH})$

1- $D(0,0,0)$ $F(1,2,1)$

$A(1,0,0)$ $G(0,2,1)$

$C(0,2,0)$ $E(1,0,1)$

$H(0,0,1)$ $B(1,2,0)$

منتصف $[DC]$ $I(0,1,0)$

2- $\vec{EI}=(-1,1,-1)$

$\vec{IG}=(0,1,1)$

$\Rightarrow \vec{EI}\cdot\vec{IG}=0+1-1=0$

$\Leftarrow \vec{EI}\perp\vec{IG}$ ⇐ المثلث EIG قائم في I.

* مساحة المثلث القائم:

$$S=\frac{EI\times IG}{2}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

3- $\vec{n}(2,1,-1)$

$\vec{n}\cdot\vec{EI}=-2+1+1=0$

$\Leftarrow \vec{n}\perp\vec{EI}$

$\vec{n}\cdot\vec{IG}=0+1-1=0$

$\Leftarrow \vec{n}\perp\vec{IG}$

* $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً ⇐ $\vec{n}$ ناظم المستوي (EIG)

معادلة المستوي (EIG):

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-0)+1.(y-1)-1(z-0)=0$

$2x+y-1-z=0$

$2x+y-z-1=0$

4- نحسب بعد F عن المستوي (EIG):

$$dist(F,(EIG))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2+2-1-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{6}}$$

* حجم رباعي الوجوه $(FEIG)$:

$$V=\frac{1}{3}S_b.h$$

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{1}{3}$$

5- $S: 6x^2+6y^2+6z^2-1=0$

$S: 6x^2+6y^2+6z^2=1$

$S: x^2+y^2+z^2=\frac{1}{6}$

S كرة مركزها $O(0,0,0)$

ونصف قطرها $R=\frac{1}{\sqrt{6}}$

* شرط تماس مستوي مع كرة هو:

$R\overset{?}{=}dist(O,EIG)$

نحسب بعد O عن المستوي (EIG):

$$dist(O,(EIG))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|0+0-0-1|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{|-1|}{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}=R$$

⇐ المستوي (EIG) يمس الكرة S.

المسألة (١٠):

معلم $(A; \frac{1}{3}\vec{AB}, \frac{1}{3}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

① - $A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$ $D(0,3,0)$

$E(0,0,3)$ $C(3,3,0)$

② . معادلة المستوي (EBC):

$\vec{EB} = (3, 0, -3)$

$\vec{EC} = (3, 3, -3)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (EBC)

$\vec{n} \perp \vec{EB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{EB} = 0$

$(a,b,c) \cdot (3,0,-3) = 0$

$3a - 3c = 0$ ①

$\vec{n} \perp \vec{EC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{EC} = 0$

$(a,b,c) \cdot (3,3,-3) = 0$

$3a + 3b - 3c = 0$ ②

نفرض $c = 3 \Leftarrow 3a - 9 = 0$

$\Rightarrow a = 3$

نعوض في ②:

$9 + 3b - 9 = 0$

$b = 0$

$\Rightarrow \vec{n}(3,0,3)$ & $B(3,0,0)$

$(EBC): a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$3(x-3) + 0 \cdot (y-0) + 3(z-0) = 0$

$3x - 9 + 3z = 0 \Rightarrow x + z - 3 = 0$

③ . Δ يعامد المستوي (EBC):

$\vec{u} = \vec{n} = (1,0,1)$

ويمر من $A(0,0,0)$

$$D: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \quad ; \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

④ - H منتصف $[EB]$:

$x_H = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3}{2}$

$y_H = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$z_H = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

حتى تكون H هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC) يجب أن يتحقق الشرطين:

♥ H تنتمي إلى المستوي (EBC):

$\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3 \stackrel{?}{=} 0$

$3 - 3 \stackrel{?}{=} 0 \Rightarrow 0 \stackrel{?}{=} 0$ محققة

♥ $\vec{AH}$ عمودي على المستوي (EBC)

أي: $\vec{AH}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

$\vec{AH} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

$\vec{n} = (1, 0, 1)$

$\Leftarrow \vec{AH} = \frac{3}{2} \vec{n}$

$\Leftarrow \vec{AH}$, $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

$\Leftarrow \vec{AH}$ عمودي على المستوي (EBC).

$\Leftarrow H$ المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

⑤ - $V = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3} \times a^2 \cdot AE$

$V = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 3 \Rightarrow \boxed{V = 9}$

المسألة (11):

رباعي وجوه $(A; \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{4}\vec{AC}, \frac{1}{6}\vec{AD})$

I منتصف $[BC]$

G مركز ثقل المثلث ADI.

M تحقق: $\vec{BM} = -3\vec{AC}$

1- $A(0,0,0)$ $B(4,0,0)$ $C(0,4,0)$ $D(0,0,6)$

$I(2,2,0)$

$G(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2)$

نفرض $M(x,y,z)$

$\vec{BM} = -3\vec{AC}$

$(x-4, y, z) = -3(0,4,0)$

$(x-4, y, z) = (0,-12,0)$

$x-4=0 \Rightarrow x=4$

$y=-12$

$z=0$

$\Rightarrow M(4,-12,0)$

2- معادلة المستوي (BCD):

$\vec{BC} = (-4,4,0)$

$\vec{BD} = (-4,0,6)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ الناظم للمستوي (BCD):

$\vec{n} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{BC} = 0$

$(a,b,c)\cdot(-4,4,0) = 0$

$-4a+4b=0$ (1)

$\vec{n} \perp \vec{BD} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{BD} = 0$

$(a,b,c)\cdot(-4,0,6) = 0$

$-4a+6c=0$ (2)

نفرض $c=4 \Rightarrow -4a+24=0$

$a=6 \Rightarrow -24+4b=0$

$b=6$

$\vec{n}(6,6,4)$ $B(4,0,0)$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$6(x-4)+6(y-0)+4(z-0)=0$

$6x-24+6y+4z=0$

$3x+3y+2z-12=0$

3- $V_{(C-ABD)} = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$= \frac{1}{3} \cdot S_{A\hat{B}D} \cdot \|\vec{AC}\|$

$= \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AD}{2} \times AC$

$= \frac{1}{3} \times \frac{4\times 6}{2} \times 4$

$V_1 = 16$

4- بعد A عن المستوي (BCD):

$dist(A,(BCD)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$= \frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{9+9+4}} = \frac{12}{\sqrt{22}}$

5- حجم رباعي الوجوه (A,BCD):

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$16 = \frac{1}{3} \cdot S_{(B\hat{C}D)} \cdot dist(A,(BCD))$

$16 = \frac{1}{3} \times S_{(B\hat{C}D)} \cdot \frac{12}{\sqrt{22}}$

$16 = \frac{4}{\sqrt{22}} S_{(B\hat{C}D)}$

$\Rightarrow S_{(B\hat{C}D)} = 4\sqrt{22}$

⑥ - $\vec{AM} = \alpha\,\vec{DG} + \beta\,\vec{DC}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{2}{3}\alpha \\ -4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4\beta \\ -6\beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha \\ \frac{2}{3}\alpha + 4\beta \\ -4\alpha - 6\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = \frac{2}{3}\alpha \;\ldots (1) \\ -12 = \frac{2}{3}\alpha + 4\beta \;\ldots (2) \\ 0 = -4\alpha - 6\beta \;\ldots (3) \end{cases}$$

من ① نجد:

$$\alpha = \frac{4}{\frac{2}{3}} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\boxed{\alpha = 6}$$

نعوض في (2):

$$-12 = \frac{2}{3} \times 6 + 4\beta$$

$$-12 = 4 + 4\beta \Rightarrow 4\beta = -16$$

$$\beta = -4$$

للتحقق نعوض في (3):

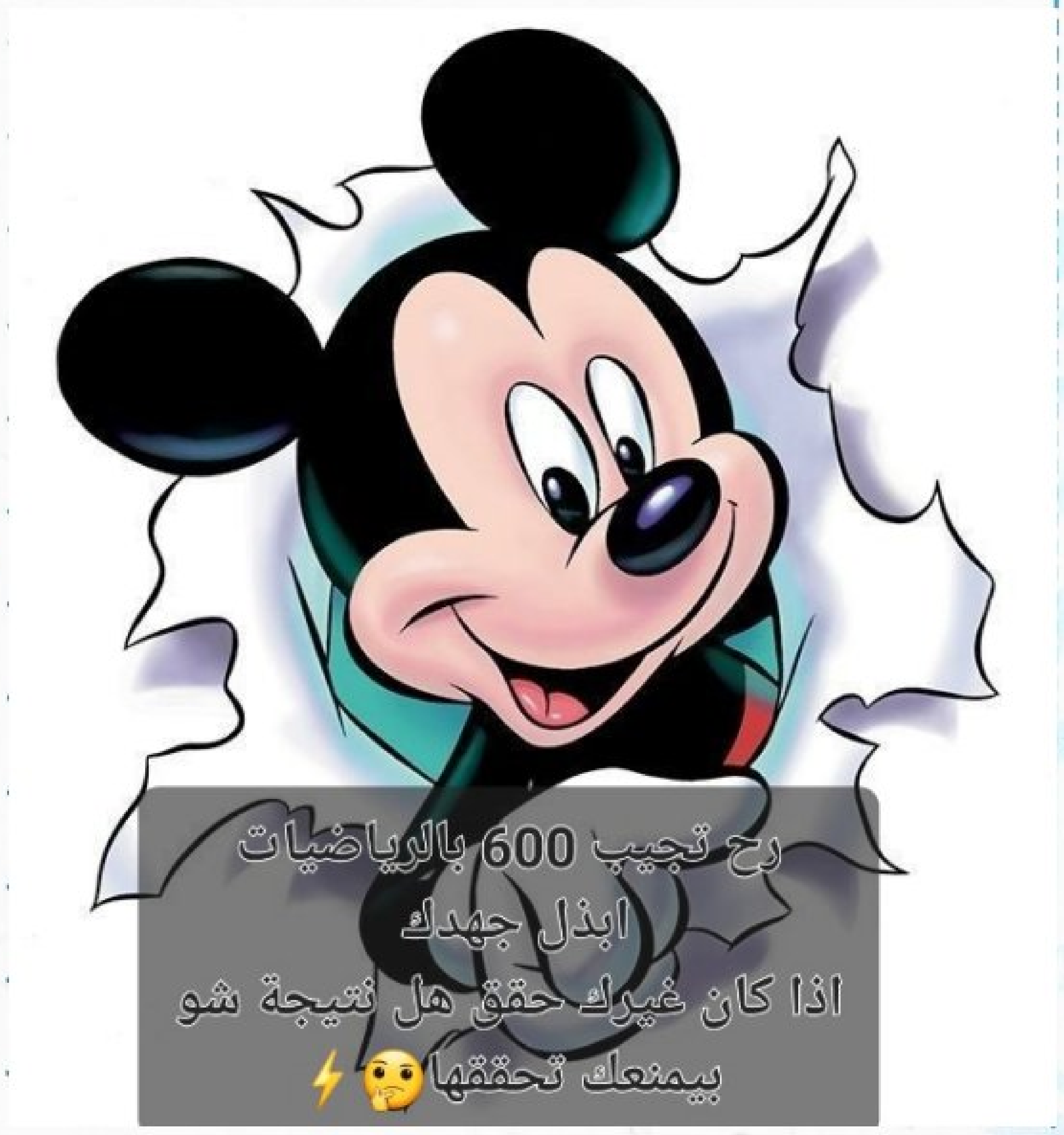
$$0 \overset{?}{=} -4(6) - 6(-4)$$

$$0 \overset{?}{=} -24 + 24$$

$$0 \overset{?}{=} 0$$

محققة.

نستنتج أن الأشعة
$\vec{AM}$ و $\vec{DC}$ ، $\vec{DG}$ مرتبطة خطياً
والمستقيم (AM) يوازي المستوي (DGC).



المسألة (12):

$C(1,2,m)\quad B(3,5,-3)\quad A(2,3,-1)$

$D(2,1,-1)$

1- المثلث ABC قائم في B

أي:

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$$

$$(1,2,-2)\cdot(-2,-3,m+3)=0$$

$$-2-6-2m-6=0$$

$$2m=-14$$

$$\boxed{m=-7}$$

$$\Rightarrow \vec{AB}=(1,2,-2)$$

$$\vec{AC}=(-2,-3,-4)$$

مساحة المثلث القائم:

$$S=\frac{AB\times AC}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{1+4+4}\times\sqrt{4+9+16}}{2}=\frac{3\sqrt{29}}{2}$$

2- متى يكون $D-ABC$ رباعي وجوه

يجب ألا تقع النقاط D, C, B, A في مستوٍ واحد.

أي: الأشعة $\vec{AD}, \vec{AC}, \vec{AB}$ غير مرتبطة خطياً.

$$\vec{AD}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-2\\-3\\-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha-2\beta\\2\alpha-3\beta\\-2\alpha-4\beta\end{bmatrix}$$

$\alpha-2\beta=0$ (1)

$2\alpha-3\beta=-2$ (2)

$-2\alpha-4\beta=0$ (3)

نجمع (2) و (3):

$$-7\beta=-2$$

$$\boxed{\beta=\frac{2}{7}}$$

نعوض في (2):

$$2\alpha-\frac{6}{7}=-2$$

$$2\alpha=-2+\frac{6}{7}=\frac{-8}{7}$$

$$\alpha=-\frac{8}{7}$$

للتحقق نعوض في (1):

$$\frac{-8}{7}-2\left(\frac{2}{7}\right)\overset{?}{=}0$$

$$\frac{-8}{7}-\frac{4}{7}\overset{?}{=}0$$

$$\frac{-12}{7}\neq 0$$

$\Leftarrow$ الأشعة $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ غير مرتبطة خطياً

$\Leftarrow$ النقاط A, B, C, D ليست في مستوٍ واحد

فالرباعي $ABCD$ رباعي وجوه.

3- معادلة المستوي (ABC):

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (ABC)

$$\vec{n}\perp\vec{AB}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$$

$$(a,b,c)\cdot(1,2,-2)=0$$

$a+2b-2c=0$ (1)

$$\vec{n}\perp\vec{AC}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{AC}=0$$

$$(a,b,c)\cdot(-2,-3,-4)=0$$

$-2a-3b-4c=0$ (2)

نضرب المعادلة الأولى بـ (2):

$\vec{u} = \vec{CD} = (1, -1, 6)$ —⑤

$$(CD) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 2 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 6t - 7 \end{cases}$$

⑥ـ بُعد A عن المستقيم (CD):

نفرض A'(x, y, z) المسقط العمودي لـ A على المستقيم (CD).

$\vec{AA'}$ عمودي على المستقيم (CD)

$\vec{AA'} \cdot \vec{u} = 0$

$(x-2, y-3, z+1) \cdot (1, -1, 6) = 0$

$x - 2 - y + 3 + 6z + 6 = 0$

$x - y + 6z + 7 = 0$ ---(*)

A' تنتمي إلى المستقيم (CD) فهي تحقق معادلته

نعوض في (*) :

$t + 1 - (-t + 2) + 6(6t - 7) + 7 = 0$

$t + 1 + t - 2 + 36t - 42 + 7 = 0$

$38t = 36$

$t = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}$

نعوض t في (CD) :

$x = \frac{18}{19} + 1 = \frac{37}{19}$

$y = -\frac{18}{19} + 1 = \frac{1}{19}$

$z = 6\left(\frac{18}{19}\right) - 7 = \frac{108}{19} - 7 = \frac{-25}{19}$

$A'\left(\frac{37}{19}, \frac{1}{19}, \frac{-25}{19}\right)$

$dist(A, (CD)) = \|\vec{AA'}\| = \square$

$2a + 4b - 4c = 0$ --- (3)

نجمع ② و ③ :

$b - 8c = 0$

نعوض c = 1 ⇐ $b = 8$

نعوض في ① :

$a + 2(8) - 2(1) = 0$

$a + 16 - 2 = 0$

$\boxed{a = -14}$

$\vec{n}(-14, 8, 1)$

$A(2, 3, -1)$

$(ABC) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$-14(x-2) + 8(y-3) + 1.(z+1) = 0$

$-14x + 28 + 8y - 24 + z + 1 = 0$

$-14x + 8y + z + 5 = 0$

$14x - 8y - z - 5 = 0$

⑦ـ بُعد D عن المستوي (ABC):

$$dist(D, (ABC)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|28 - 8 + 1 - 5|}{\sqrt{196 + 64 + 1}}$$

$$= \frac{|16|}{\sqrt{261}} = \frac{16}{\sqrt{261}}$$

⑧ـ حجم رباعي الوجوه (D-ABC):

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{29}}{2} \times \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\sqrt{261}} = \frac{8}{3}$

⑦ - حساب بعد $E(1,-1,-3)$ عن المستوي (ABC):

$$dist(E,(ABC)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|14+8+3-5|}{\sqrt{169+64+1}}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{261}}$$

$$\rightarrow S: (x-1)^2+(y+1)^2+(z+3)^2 = \frac{400}{261}$$

⑧ - معادلة المستوي Q:

بما أن Q يوازي المستوي (ABC)

فإن

$$\vec{n}_Q = \vec{n}_{(ABC)} = (14,-8,-1)$$

$$D(2,+1,-1)$$

$$Q: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$14(x-2)-8(y-1)-1(z+1)=0$$

$$14x-28-8y+8-z-1=0$$

$$14x-8y-z-21=0$$

⑨ - معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AD]$:

$$\vec{n} = \vec{AD} = (0,-2,0)$$

$I(2,2,-1)$ منتصف $[AD]$

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$P: 0(x-2)-2(y-2)+0(z+1)=0$$

$$P: -2y+4=0$$

$$P: y-2=0$$

⑩ - معادلة الكرة S' التي قطرها $[BC]$:

$$R = \frac{\|\vec{BC}\|}{2} = \frac{\sqrt{4+9+16}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

مركز الكرة S' $J(2, \frac{7}{2}, -5)$ منتصف $[BC]$

$$S': (x-2)^2+(y-\frac{7}{2})^2+(z+5)^2 = \frac{29}{4}$$

⑪ - $R: x+y+z-5=0$

حساب بعد J عن المستوي R:

$$dist(J,R) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|2+\frac{7}{2}-5-5|}{\sqrt{1+1+1}}$$

$$= \frac{|1-\frac{9}{2}|}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}}$$

إذاً: المستوي R يقطع الكرة S' بدائرة لأن:

$$R > dist(J,R)$$

نصف قطر دائرة المقطع:

$$r = \sqrt{R^2 - dist^2(J,R)}$$

$$= \sqrt{\frac{29}{4} - \frac{81}{12}}$$

$$= \sqrt{\frac{87-81}{12}} = \sqrt{\frac{6}{12}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

المسألة (13):

$C(3,1,-2) \quad B(2,2,3) \quad A(1,0,-1)$

$D(-4,2,1)$

1- $\vec{AB} = (1,2,4)$

$\vec{AC} = (2,1,-1)$

$\Rightarrow \vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2+2-4 = 0$

$\Leftarrow \vec{AB} \perp \vec{AC} \Leftarrow$ المثلث ABC قائم في A

مساحة المثلث القائم:

$$S = \frac{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

2- $\vec{n}(2,-3,1)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = 2-6+4 = 0$

$\Leftarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = 4-3-1 = 0$

$\Leftarrow \vec{n} \perp \vec{AC}$

$\Leftarrow$ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC)

$\Leftarrow$ $\vec{n}$ عمودي على المستوي (ABC).

* معادلة المستوي (ABC):

$\vec{n} = (2,-3,1)$ & $A(1,0,-1)$

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x-1)-3(y-0)+1.(z+1)=0$

$2x-2-3y+z+1=0$

$2x-3y+z-1=0$

3- بعد D عن المستوي (ABC):

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|-14|}{\sqrt{14}}$$

$\Rightarrow dist(D,(ABC)) = \sqrt{14}$

حجم رباعي الوجوه $DABC$:

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{14}}{2} \times \sqrt{14} = \frac{14}{2} = 7$$

4- بما أن d و المستوي (ABC) متعامدان

بأن: $\vec{u} = \vec{n} = (2,-3,1)$

$$d: \begin{cases} x = 2t-4 \\ y = -3t+2 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t+1 \end{cases}$$

5- نفرض $D'(x,y,z)$ المسقط القائم لـ D على المستوي (ABC).

$\left\{\begin{array}{l} \vec{DD'} \text{ عمودي على المستوي } (ABC). \\ \vec{n} \quad " \quad " \quad " \end{array}\right.$

$\vec{DD'} = \alpha\vec{n}$

$$\begin{bmatrix} x+4 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+4 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -3\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+4 = 2\alpha \Rightarrow x = 2\alpha-4 \\ y-2 = -3\alpha \Rightarrow y = -3\alpha+2 \\ z-1 = \alpha \Rightarrow z = \alpha+1 \end{array}\right\} (*)$$

D' تنتمي إلى المستوي (ABC) فهي تحقق معادلته (نعوض * في المستوي):

$2(2\alpha-4)-3(-3\alpha+2)+\alpha+1-1=0$

$4\alpha-8+9\alpha-6+\alpha=0$

$\boxed{\alpha=1}$

نعوض في * :

$x = 2(1) - 4 = -2$

$y = -3(1) + 2 = -1$

$z = 1(1) + 1 = 2$

$\Rightarrow D'(-2, -1, 2)$

⑥ - نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي P.

* بما أن P , (ABC) متعامدان

$\vec{n}_p \perp \vec{n}' \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}' = 0$

$(a,b,c)(2,-3,1) = 0$

$2a - 3b + c = 0$ ①

* بما أن P يمر من F , E فإن :

$\vec{EF} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{EF} \cdot \vec{n} = 0$

$(-1,-1,-2)(a,b,c) = 0$

$-a - b - 2c = 0$ ②

نضرب بالمعادلة الثانية بـ(2) :

$-2a - 2b - 4c = 0$ ③

نجمع ① , ③ :

$-5b - 3c = 0$

نفرض $c = 5$:

$-5b - 15 = 0 \Rightarrow b = -3$

نعوض في ② :

$-a + 3 - 10 = 0 \Rightarrow a = -7$

$E(2,0,4)$ & $\vec{n}(-7,-3,5)$

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: -7(x-2) - 3(y-0) + 5(z-4) = 0$

$P: -7x + 14 - 3y + 5z - 20 = 0$

$P: -7x - 3y + 5z - 6 = 0$

$P: 7x + 3y - 5z + 6 = 0$

⑦ - نحسب بعد D عن المستوي P :

$$dist(D,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|-28+6-5+6|}{\sqrt{49+9+25}}$$

$$= \frac{|-21|}{\sqrt{83}} = \frac{21}{\sqrt{83}}$$

ولدينا بعد D عن المستوي (ABC) :

$dist(D,(ABC)) = \sqrt{14}$

⇐ بعد D عن المستقيم d الفصل المشترك هو

$$dist(D,d) = \sqrt{dist^2(D,ABC) + dist^2(D,P)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{21}{\sqrt{83}}\right)^2 + \sqrt{14}^2}$$

$$= \boxed{}$$

⑧ - $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

$(x-1, y, z+1) \cdot (x-2, y-2, z-3) = 0$

$(x-1)(x-2) + y(y-2) + (z+1)(z-3) = 0$

$x^2 - 3x + 2 + y^2 - 2y + z^2 - 2z - 3 = 0$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + y^2 - 2y + 1 - 1 + z^2 - 2z + 1 - 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y-1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{21}{4}$

تمثل M كرة مركزها $(\frac{3}{2}, 1, 1)$

ونصف قطرها $R = \frac{\sqrt{21}}{2}$

« نفس الطلب : اكتب معادلة الكرة التي قطرها [AB] »

حل المسألة (14):

$A(0,0,1)$ $B(2,2,-1)$ $C(-2,-7,-7)$
$D(-3,4,4)$

والمستوي $p: x+y-z+2=0$

① ⓐ $\vec{AB}=(2,2,-2)$
$\vec{AC}=(-2,-7,-8)$

$$\frac{2}{-2} \neq \frac{2}{-7} \neq \frac{-2}{-8}$$

المركبات المتقابلة غير متناسبة
الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً، فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوي.

ⓑ $\vec{n}(3,-2,1)$
$\vec{n}\cdot\vec{AB}=6-4-2=0$
$\Leftarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$
$\vec{n}\cdot\vec{AC}=-6+14-8=0$
$\Leftarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$
$\Leftarrow \vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC) فهو ناظم للمستوي (ABC).

* معادلة المستوي (ABC):
$\vec{n}=(3,-2,1)$ و $A(0,0,1)$
$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
$3(x-0)-2(y-0)+1.(z-1)=0$
$3x-2y+z-1=0$

② ⓐ شرط تعامد المستويين هو:
$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$
$\vec{n_1}=(1,1,-1)$
$\vec{n_2}=(3,-2,1)$

$\Rightarrow \vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=3-2-1=0$
$\Leftarrow$ p و (ABC) متعامدين.

ⓑ بُعد D عن المستوي p:

$$dist(D,p)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|-3+4-4+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

بُعد D عن المستوي (ABC):

$$dist(D,(ABC))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|-9-8+4-1|}{\sqrt{9+4+1}}$$

$$=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

ⓒ بُعد D عن المستقيم Δ الفصل المشترك للمستويين p و (ABC):

$$dist(D,\Delta)=\sqrt{dist^2(D,p)+dist^2(D,ABC)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(\sqrt{14})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}+14}=\sqrt{\frac{43}{3}}$$

③ شرط تقاطع مستويان هو نفي الارتباط الخطي عن الناظمين.

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$$

$\Leftarrow$ $\vec{n_2}$ و $\vec{n_1}$ غير مرتبطين

P و (ABC) غير متوازيان

فهما متقاطعان:

*) التمثيل الوسيطي لـ Δ الفصل المشترك:

$x + y - z + 2 = 0$ —(1)

$3x - 2y + z - 1 = 0$ —(2)

بالجمع:

$4x - y + 1 = 0$

نعزل y:

$y = 4x + 1$ ...(*)

نعوض في (1):

$x + 4x + 1 - z + 2 = 0$

$5x - z + 3 = 0$

نعزل z:

$z = 5x + 3$ ...(**)

نفرض $x = t$:

$$\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 4t + 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 5t + 3 \end{cases}$$

4) a) بما أن P و (ABC) متقاطعان وفق Δ

وبما أن Q عمودي على كل من P و (ABC)

$\Leftarrow$ Q عمودي على الفصل المشترك Δ

$\rightarrow \vec{u} = \vec{n} = (1, 4, 5)$

$Q : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$1.(x + 3) + 4(y - 4) + 5(z - 4) = 0$

$x + 3 + 4y - 16 + 5z - 20 = 0$

$Q : x + 4y + 5z - 33 = 0$

b) بما أن المستويات P و (ABC) متقاطعة في المستقيم Δ فإن:

تقاطع المستويات P و (ABC) و Q يؤول إلى تقاطع Δ مع Q

وبما أن Δ و Q متعامدان فإن Δ و Q يتقاطعان في نقطة H.

لإيجاد إحداثيات H نعوض Δ في Q:

$x + 4y + 5z - 33 = 0$

$t + 4(4t + 1) + 5(5t + 3) - 33 = 0$

$t + 16t + 4 + 25t + 15 - 33 = 0$

$42t = 14$

$t = \frac{14 \div 14}{42 \div 14} = \frac{1}{3}$

$t = \frac{1}{3}$

نعوض في Δ:

$x = \frac{1}{3}$

$y = 4\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{7}{3}$

$z = 5\left(\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{14}{3}$

$\Rightarrow H\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)$

c) بعد النقطة D عن المستقيم Δ هو البعد بين D و H «H هي المسقط العامودي لـ D على المستقيم Δ»

$dist(D, \Delta) = \| \vec{DH} \|$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3} + 3\right)^2 + \left(\frac{7}{3} - 4\right)^2 + \left(\frac{14}{3} - 4\right)^2} = \sqrt{\frac{43}{3}}$$

المسألة ((15)):

I)

1- $\vec{MD}\cdot\vec{MH} = MI^2 - ID^2$

$l_1 = \vec{MD}\cdot\vec{MH}$

$= (\vec{MI}+\vec{ID})\cdot(\vec{MI}+\vec{IH})$

وبما أن I منتصف $[DH]$ فإن:

$\vec{IH} = -\vec{ID}$

$\Rightarrow l_1 = (\vec{MI}+\vec{ID})\cdot(\vec{MI}-\vec{ID})$

$= MI^2 - ID^2$

$= l_2$

2- $\vec{MD}\cdot\vec{MH} = 0$

$\Rightarrow MI^2 - ID^2 = 0$

$\Rightarrow MI^2 = ID^2$

$\Rightarrow MI = ID$

$\Leftarrow$ مجموعة النقاط تمثل كرة مركزها I ونصف قطرها $R=ID$.

II) $A(3,0,0)$ $B(0,6,0)$ $C(0,0,4)$ $D(-5,0,1)$

1) a- $\vec{AB} = (-3,6,0)$

$\vec{AC} = (-3,0,4)$

$\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{4}$

المركبات المتقابلة غير متناسبة للشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوي.

b- $\vec{n}(4,2,3)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = -12+12+0 = 0$

$\Leftarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = -12+0+12 = 0$

$\Leftarrow \vec{n} \perp \vec{AC}$

$\Leftarrow \vec{n}$ عمودي على الشعاعين $\vec{AC}$ ، $\vec{AB}$

$\Leftarrow \vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

c- $\vec{n}(4,2,3)$ و $A(3,0,0)$

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$4(x-3)+2(y-0)+3(z-0)=0$

$4x-12+2y+3z=0$

$4x+2y+3z-12=0$

2) بما أن Δ و (ABC) متعامدان فإن:

$\vec{u} = \vec{n} = (4,2,3)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 4t-5 \\ y = 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3t+1 \end{cases}$$

3) H هي المسقط العمودي لـ D على المستوي (ABC).

ط1: الطريقة العادية.

ط2: بما أن Δ و (ABC) متعامدان و Δ يمر من D فإن H هي نقطة التقاطع بين Δ و (ABC).

$4x+2y+3z-12=0$

$4(4t-5)+2(2t)+3(3t+1)-12=0$

$16t-20+4t+9t+3-12=0$

$29t = 29$

$t=1$

نعوض في Δ:

$x = 4(1)-5 = -1$

$y = 2(1) = 2$

$z = 3(1)+1 = 4$

$H(-1,2,4)$

④ بُعد النقطة D عن المستوي (ABC):

ط1:

$$dist(D,(ABC)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|-20+0+3-12|}{\sqrt{16+4+9}}$$

$$= \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

ط2:

$$Dist(D,(ABC)) = \|\vec{DH}\|$$

$$= \sqrt{(-1+5)^2+(2-0)^2+(4-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$

⑤ معادلة الكرة التي مركزها I
ونصف قطرها $R = ID$

نوجد إحداثيات I:

$$x_I = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$y_I = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z_I = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{5}{2}$$

$$I\left(-3, 1, \frac{5}{2}\right)$$

$$R = ID = \frac{\|\vec{DH}\|}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

$$S: (x+3)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

⑥ $N\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, 0\right)$

ⓐ حتى يكون N هي المسقط القائم لـ C على المستقيم (AB) يجب أن يتحقق الشرطين:

* $\vec{CN} \cdot \vec{AB} \overset{?}{=} 0$

(ب) مرتبطين خطياً $\vec{AN}$ ، $\vec{AB}$

$$\vec{CN} = \left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, -4\right)$$

$$\vec{AB} = (-3, 6, 0)$$

$$\rightarrow \vec{CN} \cdot \vec{AB} = \frac{-36}{5} + \frac{36}{5} + 0 = 0$$

$\Leftarrow \vec{CN} \perp \vec{AB}$

$$\vec{AN} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0\right)$$

$$\vec{AB} = (-3, 6, 0)$$

$$\frac{-\frac{3}{5}}{-3} = \frac{\frac{6}{5}}{6}$$

$$+\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$ محققة

⇐ $\vec{CN}$ ، $\vec{AB}$ مرتبطين خطياً

⇐ N هي المسقط القائم لـ C على (AB).

ⓑ حجم رباعي الوجوه $= \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} S_b h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot S_{(ABC)} \cdot Dist(D,(ABC))$$

$$= \frac{1}{3} \times AB \cdot CN \cdot DH$$

$$= \frac{1}{3} \times 3\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}} \times \sqrt{29}$$

$V = 29$ (وحدة مكعبة.)

حل المسألة « 16 »:

$A(3,-2,-1)$ $B(5,-3,2)$ $C(2,3,2)$

$D(1,-5,-2)$

① $\vec{AB} = (2,-1,3)$

$\vec{AC} = (-1,5,3)$

$$\frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{5} \neq \frac{3}{3}$$

⇐ $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

⇐ النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي.

② $\vec{n}(2,1,-1)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = 4-1-3=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = -2+5-3=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$

⇐ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً ⇐ $\vec{n}$ ناظم للمستوي P.

معادلة المستوي P:

$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P: 2(x-2)+1(y-3)-1(z-2)=0$

$P: 2x-4+y-3-z+2=0$

$P: 2x+y-z-5=0$

③ a- بما أن Δ مار من D ويعامد P فإن: $\vec{u}=\vec{n}=(2,1,-1)$

$$\Delta: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t-5 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z = -t-2 \end{cases}$$

ⓑ E المسقط القائم لـ D على المستوي P وهي نقطة تقاطع Δ مع P.

$2x+y-z-5=0$

$2(2t+1)+t-5-(-t-2)-5=0$

$4t+2+t-5+t+2-5=0$

$6t-6=0$

$\Rightarrow t=1$

نعوض في Δ

$x=2(1)+1=3$

$y=1-5=-4$

$z=-1-2=-3$

$\Rightarrow E(3,-4,-3)$

④ H المسقط القائم لـ D على المستقيم (AB) و $\vec{AH}=\lambda\vec{AB}$

ⓐ إثبات أن: $\lambda = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$

بما أن H المسقط القائم لـ D على المستقيم (AB) فإن:

$\vec{AD}\cdot\vec{AB} = \vec{AH}\cdot\vec{AB}$ ... (*)

ولدينا $\vec{AH}=\lambda\vec{AB}$

⇐ $\vec{AD}\cdot\vec{AB}=\lambda\,\vec{AB}\cdot\vec{AB}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\vec{AB}\cdot\vec{AB}} = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$$

Note ①: إذا كانت D المسقط القائم لـ C على $\vec{AB}$ فإن

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AD}\cdot\vec{AB}$

Note ②: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

حل المسألة (17):

$B(0,-2,-3)\ A(1,0,-1)$

$P: x+2y+2Z+1=0$

$D: \begin{cases} x-y-Z+2=0 \\ 2x-y+Z=0 \end{cases}$

① بُعد A عن المستوي P:

$$dist(A,P) = \frac{|ax_0+by_0+Cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+C^2}}$$

$$= \frac{|1+0-2+1|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{0}{3} = 0$$

② شرط تعامد مستقيم مع مستوٍ هو $\vec{u}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً

$\vec{n} = (1,2,2)$

$\vec{U} = \vec{AB} = (-1,-2,-2)$

$$\frac{1}{-1} = \frac{2}{-2} = \frac{2}{-2}$$

$-1=-1=-1$

$\vec{n}$ و $\vec{U}$ مرتبطين خطياً

$\Leftarrow$ (AB) و P متعامدين.

③ $\vec{n}(-1,1,2)$

$P_1: a(x-x_0)+b(y-y_0)+C(Z-Z_0)=0$

$-1(x-1)+1(y-0)+2(Z+1)=0$

$-x+1+y+2Z+2=0$

$-x+y+2Z+3=0$

$P_1: x-y-2Z-3=0$: OK

④ - P_2 عرضي $C(-1,-4,-2)$ ويعامد المستقيم D

b) استنتاج قيمة λ:

$$\lambda = \frac{\vec{AD}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|^2}$$

$$= \frac{(-2,-3,-1)\cdot(2,-1,3)}{\sqrt{4+1+9}^{\,2}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{-4}{14}}$$ أي $\lambda = \frac{-2}{7}$

* إحداثيات H:

$\vec{AH} = \lambda\,\vec{AB}$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ Z+1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ Z+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{-6}{7} \end{pmatrix}$$

$x-3 = -\frac{4}{7} \Rightarrow x = \frac{17}{7}$

$y+2 = \frac{2}{7} \Rightarrow y = -\frac{12}{7}$

$Z+1 = -\frac{6}{7} \Rightarrow Z = \frac{-13}{7}$

$\Rightarrow H\left(\frac{17}{7}, \frac{-12}{7}, \frac{-13}{7}\right)$

* المسافة بين D و (AB) هي:

$dist(D,(AB)) = \|\vec{DH}\|$

$$= \frac{3\sqrt{70}}{7}$$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي P_2.

$\vec{u_1} = (1,-1,-1)$

$\vec{u_2} = (2,-1,1)$

بما أن P_2 و D متعامدان فإن:

$\vec{n} \perp \vec{u_1} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u_1} = 0$

$(a,b,c)\cdot(1,-1,-1)=0$

$a-b-c=0$ — (1)

$\vec{n}\perp\vec{u_2} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{u_2}=0$

$(a,b,c)\cdot(2,-1,1)=0$

$2a-b+c=0$ — (2)

نجمع (1) ، (2):

$3a-2b=0$

نفرض $b=3 \Leftarrow 3a-6=0$

$a=2$

نعوض في (2):

$2(2)-3+c=0 \Rightarrow c=-1$

$\Leftarrow \vec{n}(2,3,-1)$

$C(-1,-4,-2)$

$P_2: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$P_2: 2(x+1)+3(y+4)-1(z+2)=0$

$P_2: 2x+2+3y+12-z-2=0$

$P_2: 2x+3y-z+12=0$

5 - بما أن S تمر من B $\Leftarrow R=\|\vec{AB}\|=3$

$S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$S: (x-1)^2+(y-0)^2+(z+1)^2=9$

حل المسألة (18):

$A(1,1,2)$ $B(-1,0,-2)$ $C(-1,0,-6)$

$M(x,y,z)$

1 - $MA^2 - MB^2 = 1$

$(1-x)^2+(1-y)^2+(2-z)^2-[(-1-x)^2+(-y)^2+(-2-z)^2]=1$

$\Rightarrow \cancel{1}-2x+x^2+1-2y+y^2+\cancel{4}-4z+z^2$
$-\cancel{1}-2x-x^2-y^2-\cancel{4}-4z-z^2=1$

$\Rightarrow -4x-2y-8z+1=1$

$\Rightarrow -4x-2y-8z=0$

$(\div +2)$:

$P: -2x-y-4z=0$

وهي معادلة مستوٍ شعاعه الناظم

$\vec{n}=\vec{AB}=(-2,-1,-4)$

ومنه المستوي P عمودي على المستقيم (AB).

2 - $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

نرتب:

$x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z-6=0$

نتمم:

$x^2-2x+1-1+y^2-2y+1-1+z^2-2z+1-1-6=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$

تمثل كرة مركزها $w(1,1,1)$

ونصف قطرها $R=3$.

3 - $\vec{GA}-\vec{GB}+\vec{GC}=0$

a) إحداثيات G:

b1) نفرض $G(x,y,z)$:

$$\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\2-z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1-x\\0-y\\-2-z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1-x\\0-y\\-6-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1-x\\1-y\\-2-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$1-x=0 \Rightarrow x=1$

$1-y=0 \Rightarrow y=1$

$-2-z=0 \Rightarrow z=-2$

$\rightarrow G(1,1,-2)$

ج: $\vec{GA}-\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

G م.أ.م $(A,1)$ $(B,-1)$ $(C,1)$.

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=1$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=1$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=-2$$

$\rightarrow G(1,1,-2)$

* انتماء G إلى الكرة S:

ط1: $\|\vec{GW}\|=R$

ط2: نعوض في المعادلة وتكون محققة.

نعوض $G(1,1,-2)$ في S:

$(1-1)^2+(1-1)^2+(-2-1)^2 \overset{?}{=} 9$

$0+0+9 \overset{?}{=} 9$

$9 \overset{?}{=} 9$ محققة

⇐ G من الكرة S.

ب- المستوي Q يمس الكرة S في G

⇐ الناظم هو $\vec{n}=\vec{WG}$

$=(0,0,-3)$

$Q: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$Q: 0(x-1)+0(y-1)-3(z+2)=0$

$Q: -3z-6=0$

$\rightarrow$

$Q: z+2=0$

المسألة (19):

$A(2,-1,1)$ $B(-1,2,1)$ $C(1,-1,2)$

$D(1,1,1)$

I- a- $\vec{AB}=(-3,3,0)$

$\vec{AC}=(-1,0,1)$

$\frac{-3}{-1} \neq \frac{0}{1}$

المركبات غير متناسبة.

الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة

فهي تعين مستوي.

ب- $\vec{n}(1,1,1)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=-3+3+0=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{AB}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=-1+0+1=0 \rightarrow \vec{n}\perp\vec{AC}$

⇐ $\vec{n}(1,1,1)$ ناظم للمستوي (ABC).

ج- $\vec{n}(1,1,1)$ $A(2,-1,1)$.

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$: 1(x-2)+1\cdot(y+1)+1\cdot(z-1)=0$

$: x-2+y+1+z-1=0$

$\Gamma : \frac{3}{2}x - \frac{3}{8} - y + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}Z - \frac{3}{8} = 0$

$\Gamma : 3x - 2y + Z + \frac{3}{2} = 0$

3 - a - $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$

$\vec{n}_2 = (3, -2, 1)$

$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1}$

$\Leftarrow$ $\vec{n}_1$ ، $\vec{n}_2$ غير مرتبطين خطيا

$\Leftarrow$ (ABC) و Γ غير متوازيان بل هما متقاطعان.

b - الفصل المشترك Δ:

$x + y + Z - 2 = 0$ — (1)

$3x - 2y + Z + \frac{3}{2} = 0$ — (2)

بالطرح:

$-2x + 3y - \frac{7}{2} = 0$

نعزل x:

$2x = 3y - \frac{7}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}y - \frac{7}{4}$ ...(*)

نعوض في (1):

$\frac{3}{2}y - \frac{7}{4} + y + Z - 2 = 0$

نعزل Z:

$Z = -\frac{5}{2}y - \frac{15}{4}$ ...(**)

نفرض $\frac{1}{2}y = t \Rightarrow y = 2t$

$$\Delta : \begin{cases} x = 3t - \frac{7}{4} \\ y = 2t \quad ; t \in \mathbb{R} \\ Z = -5t - \frac{15}{4} \end{cases}$$

(ABC) : $x + y + Z - 2 = 0$

2 - G م.ن.ج ل $(A, 1)$ $(B, 2)$ $(C, -1)$

a - إحداثيات G:

$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2 - 2 - 1}{1 + 2 - 1} = \frac{-1}{2}$

$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{-1 + 4 + 1}{1 + 2 - 1} = 2$

$z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{1 + 2 - 2}{1 + 2 - 1} = \frac{1}{2}$

$G\left(-\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$

b - $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$

$\|(1 + 2 - 1)\vec{MG}\| = 2\|\vec{MD}\|$

$\|2\vec{MG}\| = 2\|\vec{MD}\|$

$\Rightarrow 2MG = 2MD \rightarrow MG = MD$

تمثل المستوي المحوري للقطعة [GD].

c - $\vec{n} = \vec{GD} = \left(\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$

منتصف [GD] $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{Z_1 + Z_2}{2}\right)$

$I\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$\Gamma : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(Z - Z_0) = 0$

$\Gamma : \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) - 1\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(Z - \frac{3}{4}\right) = 0$

حل المسألة : (20) :

$A(1,0,-2)$ $B(3,1,0)$ $C(1,0,1)$

1- بما أن S مركزها A وتمر من B فإن:

$R = \|\vec{AB}\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

$S: (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$

2- $\Delta: \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \quad ...(1) \\ y + z - 1 = 0 \quad ...(2) \end{cases}$

من (1) نعزل x:

$x = -2z + 3 \quad ...(*)$

من (2) نعزل y:

$y = -z + 1 \quad ...(**)$

نفرض: $z = t$

$\Delta: \begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = -t + 1 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

$\Leftarrow \vec{u}(-2,-1,1)$ ، $B(3,1,0) \in \Delta$

3- بما أن Δ و P متعامدان فإن:

$\vec{n} = \vec{u} = (-2,-1,1)$

ويمر من $A(1,0,-2)$

$P: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$P: -2(x-1) - 1(y-0) + 1.(z+2) = 0$

$P: -2x + 2 - y + 0 + z + 2 = 0$

$P: -2x - y + z + 4 = 0$

$P: 2x + y - z - 4 = 0$

4- a) نقطة تقاطع Δ مع P

نعوض Δ في P:

$2x + y - z - 4 = 0$

$2(-2t+3) + (-t+1) - (t) - 4 = 0$

$-4t + 6 - t + 1 - t - 4 = 0$

$-6t = 3$

$t = \frac{1}{2}$

نعوض في Δ:

$x = -2(\frac{1}{2}) + 3 = 2$

$y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

$z = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow K(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

b) بعد A عن المستقيم Δ:

بما أن Δ و P متعامدين

و K هي نقطة تقاطع Δ مع P

$\Leftarrow$ K هي المسقط العمودي لـ A على المستقيم Δ

$\Rightarrow dist(A,\Delta) = \|\vec{AK}\|$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}}$

$= \frac{\sqrt{30}}{2}$

c) شرط تقاطع Δ مع الكرة S هو:

$dist(A,D) < R$

$\frac{\sqrt{30}}{2} < 3$

$\frac{30}{4} < \frac{9}{1} \Rightarrow \frac{30}{4} < \frac{36}{4}$ محققة

$\Leftarrow$ Δ و S متقاطعان.

لإيجاد نقطة تقاطع D مع S نعوض D في S

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=9$$

$$(-2t+3-1)^2+(-t+1)^2+(t+2)^2=9$$

$$(-2t+2)^2+(-t+1)^2+(t+2)^2=9$$

$$4t^2-8t+4+t^2-2t+1+t^2+4t+4=9$$

$$6t^2-6t=0 \Rightarrow t^2-t=0$$

$$t(t-1)=0$$

إما $t=0$

أو $t=1$

نعوض: $t_1=0$ في D:

$x=-2(0)+3=3$

$y=-0+1=1$

$z=0$

$E(3,1,0)$

نعوض: $t_2=1$

$x=-2(1)+3=1$

$y=-1+1=0$

$z=1$

$F(1,0,1)$.

5- G م.ج.ع ل (B,e^t) و $(C,1)$.

a- G م.ج.ع ل (B,e^t) $(C,1)$

$$\Rightarrow 1.\vec{GC}+e^t\,\vec{GB}=\vec{0}$$

$$\vec{GC}+e^t\,\vec{GB}=\vec{0}$$

$$\vec{GB}+\vec{BC}+e^t\,\vec{GB}=\vec{0}$$

$$\vec{GB}+e^t\,\vec{GB}=-\vec{BC}$$

$$\vec{GB}(1+e^t)=-\vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{GB}=\frac{-1}{1+e^t}\,\vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{BG}=-\frac{1}{1+e^t}\,\vec{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{BG}=\frac{1}{1+e^t}\,\vec{BC}$$

b- $f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+e^t}=0$$

$$\lim_{t\to-\infty} f(t)=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{1+e^t}=1$$

$$f'(t)=\frac{0.(1+e^t)-e^t.1}{(1+e^t)^2}=\frac{-e^t}{(1+e^t)^2}<0$$

t	$-\infty$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	1	$\searrow$	0

نلاحظ من جدول التغيرات أن $f(t)\in]0,1[$ مهما تكن $t\in\mathbb{R}$

c-

لدينا: $\vec{BG}=f(t).\vec{BC}$ مع $f(t)\in]0,1[$

$\Leftarrow$ مجموعة النقاط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$ باستثناء النقطتين C,B.

المسألة الشاملة: ((21)) :

((مستقيمات ومستويات)).

① a) $\vec{u}_1 = (2, -2, -1)$

$\vec{u}_2 = (0, -1, 2)$

$\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ غير مرتبطين خطياً

Δ_1 و Δ_2 غير متوازيان.

* ندرس التقاطع:

$1 = 3 + 2t$ —— ①

$-1 - \lambda = -2 - 2t$ —— ②

$4 + 2\lambda = 1 - t$ —— ③

من ① نجد:

$1 - 3 = 2t$

$\Rightarrow t = -1$

نعوض في ②:

$-1 - \lambda = -2 - 2(-1)$

$\Rightarrow \lambda = -1$

للتحقق نعوض في ③:

$4 + 2(-1) \overset{?}{=} 1 - (-1)$

$2 \overset{?}{=} 2$ محققة

Δ_1 و Δ_2 متقاطعان.

b) لإيجاد إحداثيات B نقطة تقاطع Δ_1 و Δ_2:

نعوض $\lambda = -1$ في Δ_2 أو $t = -1$ في Δ_1

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 + 1 = 0 \\ z = 4 - 2 = 2 \end{array}\right\} B(1, 0, 2)$$

c) معادلة المستوي P:

نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم للمستوي P:

$\vec{n} \perp \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0$

$(a, b, c) . (2, -2, -1) = 0$

$2a - 2b - c = 0$ —— ①

$\vec{n} \perp \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$

$(a, b, c) . (0, -1, 2) = 0$

$-b + 2c = 0$ —— ②

نفرض $c = 1 \Leftarrow -b + 2 = 0$

$\Rightarrow b = 2$

نعوض في ①: $2a - 4 - 1 = 0$

$2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

$\vec{n}\left(\frac{5}{2}, 2, 1\right)$

$B(1, 0, 2)$

$P: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$P: \frac{5}{2}(x - 1) + 2(y - 0) + 1.(z - 2) = 0$

$P: \frac{5}{2}x - \frac{5}{2} + 2y + z - 2 = 0$

$P: 5x + 4y + 2z - 9 = 0$

② a) للتحقق من عدم انتماء A إلى المستوي P

ط1: نعوض إحداثيات A في المستوي ((وتكون غير محققة)).

$5(6) + 4(4) + 2(4) - 9 \overset{?}{=} 0$

$30 + 16 + 8 - 9 \overset{?}{=} 0$

$45 \overset{?}{=} 0$

غير محققة

$A \notin P \Leftarrow$

ط2: نحسب بعد A عن المستوي P ويكون الناتج لا يساوي الصفر

b) لإثبات أن B هي المسقط القائم لـ A

يجب أن نتحقق الشرطين:

① $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً

② B تنتمي إلى المستوي P.

$\overrightarrow{AB} = (-5, -4, -2)$

$\vec{n} = (5, 4, 2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\vec{n}$

$\Leftarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ مرتبطين خطياً

$\Leftarrow$ (AB) عمودي على المستوي P.

* والنقطة B تنتمي إلى P (حسب وضعها).

$\Leftarrow$ B المسقط القائم لـ A على P.

ط: نعوض A' المسقط القائم لـ A على المستوي P وتكون هي ذاتها B.

3 a

$Q: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$Q: 5(x-6)+1.(y-4)-7(z-4)=0$

$Q: 5x-30+y-4-7z+28=0$

$Q: 5x+y-7z-6=0$

b C هي نقطة تقاطع D_1 مع Q:

نعوض D_1 في Q:

$5(3+2t)+(-2-2t)-7(1-t)-6=0$

$15+10t-2-2t-7+7t-6=0$

$15t=0$

$t=0$

نعوض $t=0$ في D_1:

$$\begin{cases} x = 3+2(0) = 3 \\ y = -2-2(0) = -2 \\ z = 1-0 = 1 \end{cases} \quad C(3,-2,1)$$

D هي نقطة تقاطع D_2 مع Q:

نعوض D_2 في Q:

$5(1)+(-1-\lambda)-7(4+2\lambda)-6=0$

$5-1-\lambda-28-14\lambda-6=0$

$-15\lambda=30$

$\lambda=-2$

نعوض في D_2:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1-(-2) = 1 \\ z = 4+2(-2) = 0 \end{array}\right\} D(1,1,0)$$

4 a طبيعة المثلث $\widehat{BCD}$:

$B(1,0,2)$

$C(3,-2,1)$

$D(1,1,0)$

$\overrightarrow{BC} = (2,-2,-1)$

$\overrightarrow{BD} = (0,1,-2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0-2+2=0$

$\Leftarrow$ $\widehat{BCD}$ قائم في B.

مساحة المثلث $\widehat{BCD}$:

$$S = \frac{\|\overrightarrow{BC}\| . \|\overrightarrow{BD}\|}{2} = \frac{\sqrt{4+4+1} . \sqrt{0+1+4}}{2}$$

$$\Rightarrow S = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

b حجم رباعي الوجوه:

$$V = \frac{1}{3} S_{(\widehat{BCD})} . h$$

$$= \frac{1}{3} . S_{(\widehat{BCD})} . \|\overrightarrow{AB}\|$$

لأن الارتفاع هو بعد النقطة A عن المستوي (BCD) وهو ذاته المستوي P)

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} . \frac{3\sqrt{5}}{2} . 3\sqrt{5} = \frac{15}{2}$$

c) استنتاج مساحة المثلث $A\hat{C}D$:

لدينا: $V_{(ABCD)} = \frac{15}{2}$

ومن جهة أخرى:

$$V_{(ABCD)} = \frac{1}{3} . S_{(A\hat{C}D)} . (dist\ B,(ACD))$$

$$= \frac{1}{3} . S_{(A\hat{C}D)} . dist(B,Q)$$

« المستوي (ACD) هو ذاته المستوي Q ».

« نحسب بعد النقطة B عن المستوي Q :

$$dist(B,Q) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{15}{5\sqrt{3}}$$

$$\Leftarrow V = \frac{1}{3} . S_{(A\hat{C}D)} . dist(B,Q)$$

$$\frac{15}{2} = \frac{1}{\cancel{3}} . S_{(A\hat{C}D)} . \frac{\cancel{15}}{5\sqrt{3}}$$

$$\frac{15}{2} = S_{(A\hat{C}D)} . \frac{\cancel{5}}{\cancel{5}\sqrt{3}}$$

$$\frac{15}{2} = S_{(A\hat{C}D)} . \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{(A\hat{C}D)} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

وهي مساحة المثلث $A\hat{C}D$.

حل المسألة : « 22 » 2022

(II)

1) $\overrightarrow{BC} = (0, -1, 1)$

$\overrightarrow{BD} = (-1, -1, 1)$

$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}$

المركبات المتقابلة غير متناسبة

الشعاعين $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين

النقاط B و C و D ليست على استقامة واحدة.

2) معادلة المستوي (BCD):

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (BCD):

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$(a,b,c) \cdot (0,-1,1) = 0$

$-b + c = 0$ (1)

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$(a,b,c) \cdot (-1,-1,1) = 0$

$-a - b + c = 0$ (2)

نفرض $c = 1 \Leftarrow -b + 1 = 0$

$\Rightarrow b = 1$

نعوض في (2): $-a - 1 + 1 = 0$

$\Rightarrow a = 0$

$\vec{n}(0,1,1)$

$D(0,0,1)$

$(BCD): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$(BCD): 0(x-0) + 1.(y-0) + 1.(z-1) = 0$

$(BCD): y + z - 1 = 0$

3) بما أن D و (BCD) متعامدان فإن:

$\vec{u} = \vec{n} = (0,1,1)$

$$D: \begin{cases} x = 2 \\ y = t - 2 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

4) إيجاد إحداثيات K المسقط العامودي لـ A على المستوي (BCD):

ط1: K هي نقطة تقاطع D و (BCD)

نعوض D في (BCD):

$y + z - 1 = 0$

$t - 2 + t + 2 - 1 = 0$

$2t = 1$

$t = \frac{1}{2}$

نعوض في D:

$x = 2$

$y = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$z = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow K\left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ط2: نفرض $K(x,y,z)$ المسقط العامودي لـ A على المستوي (BCD):

$\overrightarrow{AK}$ عمودي على المستوي (BCD)

$\vec{n}$ عمودي على المستوي (BCD)

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \alpha \vec{n}$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y+2 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

حل المسألة « 23 » :

① تمثيل وسيطي لـ (BC) :

$\vec{v} = \vec{BC} = (1, -1, 2)$

$$(BC) : \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = -t' & ; t' \in \mathbb{R} \\ z = 2t' - 1 \end{cases}$$

② نعوض تمثيل (BC) في معادلة P :

$P : 2y + z + 1 = 0$

$2(-t') + 2t' - 1 + 1 = 0$

$-2t' + 2t' - 1 + 1 = 0$

$0 = 0$ محققة

⇐ (BC) محتوى في المستوي P.

③ الوضع النسبي بين (BC) و Δ :

$\vec{u} = (0, 1, -2)$

$\vec{v} = (1, -1, 2)$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين

Δ و (BC) غير متوازيين

* ندرس التقاطع :

$-1 = t' + 1$ —— ①

$2 + t = -t'$ —— ②

$1 - 2t = 2t' - 1$ —— ③

من ① نجد :

$\boxed{t' = -2}$

نعوض في ② :

$2 + t = 2 \Rightarrow t = 0$

نعوض في ③ للتحقق :

$1 - 2(0) \overset{?}{=} 2(-2) - 1$

$1 \overset{?}{=} -5$ غير محققة

⇐ (BC) و Δ غير متقاطعان

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y + 2 = \alpha \Rightarrow y = \alpha - 2 \\ z - 2 = \alpha \Rightarrow z = \alpha + 2 \end{array}\right\} (*)$$

K ينتمي إلى المستوي (BCD) فهي تحقق معادلته « نعوض * في (BCD) ».

$y + z - 1 = 0$

$\alpha - 2 + \alpha + 2 - 1 = 0$

$2\alpha = 1$

$\alpha = \frac{1}{2}$

نعوض في (*) :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow K\left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

⑤ معادلة الكرة التي تقبل [AD] قطراً لها :

* نصف القطر : $R = \frac{\|\vec{AD}\|}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$

* مركز الكرة هو I منتصف [AD] :

$x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$

$y_I = \frac{y_1 + y_2}{2} = -1$

$z_I = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{3}{2}$

$I\left(1, -1, \frac{3}{2}\right)$

$S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$

$S : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

⇐ (BC) و D لا يتقاطعان في مستوٍ واحد.

④ ⓐ بُعد A عن المستوي P:

$$dist(A,P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|2+3+1|}{\sqrt{0+4+1}}=\frac{6}{\sqrt5}$$

ⓑ حتى تكون D نقطة من P يجب أنه يتحقق:

إما: إحداثيات D تحقق معادلة المستوي P

أو: بُعد D عن المستوي P يساوي الصفر.

« نعوض D في P:

$2(0)-1+1\overset{?}{=}0$

محققة $0=0$

$D\in P$

ⓒ $\vec{BC}=(1,-1,2)$

$\vec{BD}=(1,0,0)$

$\vec{CD}=(0,1,-2)$

نلاحظ أن:

$\vec{BD}\cdot\vec{CD}=0+0-0=0$

$\Leftarrow \vec{BD}\perp\vec{CD}$

المثلث $B\hat{C}D$ قائم في D.

مساحة المثلث $B\hat{C}D$:

$$S=\frac{\|\vec{BD}\|\cdot\|\vec{CD}\|}{2}=\frac{\sqrt1\cdot\sqrt5}{2}=\frac{\sqrt5}{2}$$

ⓓ بما أن $dist(A,P)\neq0$

فإن $A\notin P$

ومنه ABCD رباعي وجوه

« لأن المستوي (BCD) هو المستوي P »

حجم رباعي الوجوه:

$V=\frac13 S_b\cdot h$

$V=\frac13\times\frac{\sqrt5}{2}\times\frac{6}{\sqrt5}$

$=\frac66=1$

5) معادلة الكرة التي مركزها A وعرضها B.

$R=\|\vec{AB}\|=\sqrt{4+0+16}=\sqrt{20}$

$S:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$S:(x+1)^2+(y-1)^2+(z-3)=20$

2022 حل المسألة « 24 »:

(I)

$A(1,1,2)$

$P: x-y+2z-1=0$

$Q: 2x+y+z+1=0$

① $\vec{n}_P=(1,-1,2)$

$\vec{n}_Q=(2,1,1)$

$\frac12\neq\frac{-1}{1}\neq\frac21$

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً

P و Q غير متوازيين، فهما متقاطعان.

في فصل مشترك d.

② $x-y+2z-1=0$ ①

$2x+y+z+1=0$ ②

نجمع ①، ② : $3x + 3z = 0$

(نقسم على 3) :

$x + z = 0$

نعزل x : $x = -z$

نعوض في ① :

$-z - y + 2z - 1 = 0$

$z - y - 1 = 0$

نعزل y : $y = z - 1$

نفرض : $z = t$

$$d: \begin{cases} x = -t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

③ معادلة المستوي R المار من A ويعامد كلاً من P و Q.

ط: نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم المستوي R

* بما أن P و R متعامدان فإن:

$\vec{n} \perp \vec{n}_P \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_P = 0$

$(a, b, c) \cdot (1, -1, 2) = 0$

$a - b + 2c = 0$ ①

* بما أن Q و R متعامدان فإنه:

$\vec{n} \perp \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_Q = 0$

$(a, b, c) \cdot (2, 1, 1) = 0$

$2a + b + c = 0$ ②

نجمع ①، ② :

$3a + 3c = 0$

(÷3) $a + c = 0$

نفرض $c = 1 \Rightarrow a + 1 = 0$

$\Rightarrow a = -1$

نعوض في ② :

$-2 + b + 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

ناظم المستوي R : $\vec{n}(-1, 1, 1)$

$A(1, 1, 2)$

$R: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$R: -1(x - 1) + 1.(y - 1) + 1.(z - 2) = 0$

$R: -x + 1 + y - 1 + z - 2 = 0$

$R: -x + y + z - 2 = 0$

أو :

$R: x - y - z + 2 = 0$

New طريقة

ط2: بما أن P و Q مستويين متقاطعين بالمستقيم d.

وبما أن R عمودي على المستويين P و Q فهو عمودي على الفصل المشترك d.

أي :

$\vec{n} = \vec{u}_d = (-1, 1, 1)$

$A(1, 1, 2)$

$R: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$R: -1.(x - 1) + 1.(y - 1) + 1.(z - 2) = 0$

$R: -x + 1 + y - 1 + z - 2 = 0$

$R: -x + y + z - 2 = 0$

$\Rightarrow R: x - y - z + 2 = 0$

المستوي العمودي على مستويين متقاطعين عمودي على فصلهما المشترك.

④ B نقطة تقاطع d مع المستوي R:
بالحل المشترك بين d و R:

$$\begin{cases} R: x - y - z + 2 = 0 \\ x = -t \\ y = t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$-t - (t-1) - t + 2 = 0$$
$$-t - t + 1 - t + 2 = 0$$
$$-3t = -3$$
$$t = 1$$

نعوض في d:

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 1 \end{array}\right\} B(-1, 0, 1)$$

⑤ *حساب بعد النقطة A عن المستقيم d:

ط$_1$: بالمسقط القائم.

ط$_2$: بما أن d و R متعامدان
و B هي نقطة تقاطع d مع R.
فإنه B هي المسقط القائم لـ A على d.

$\Rightarrow dist(A, d) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

⑥ معادلة الكرة S التي مركزها A وتمس المستوي Q.

$$dist(A, Q) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$= \frac{|2+1+2+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

لأن المستوي Q يمس الكرة S
فإنه : $R = dist(A, Q)$
$R = \sqrt{6}$

$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$$

حل المسألة ((25)): 2021 I

① $\vec{AB} = (3, -1, -2)$
$\vec{AC} = (-2, 2, -4)$

نشرط تعامد مستقيمين:

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \overset{?}{=} 0$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x_1 . x_2 + y_1 . y_2 + z_1 . z_2$
$= -6 - 2 + 8 = 0$

$\Leftarrow \vec{AC} \perp \vec{AB}$

⇐ المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

② $\vec{n}(2, 4, 1)$

حتى يكون $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC) يجب أن يكون عمودي على $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$:

$\vec{n} . \vec{AB} = 6 - 4 - 2 = 0$
$\vec{n} \perp \vec{AB}$

$\vec{n} . \vec{AC} = -4 + 8 - 4 = 0$
$\vec{n} \perp \vec{AC}$

⇐ $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي (ABC).

⇐ $\vec{n}$ ناظم للمستوي (ABC).

معادلة المستوي (ABC):

$A(-1, 2, 3)$ $\vec{n}(2, 4, 1)$

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$2(x+1)+4(y-2)+1.(z-3)=0$

$2x+2+4y-8+z-3=0$

$2x+4y+z-9=0$

③ بيان أن d معامد المستوي (ABC) : لأنه

$\vec{u}=\vec{n}=(2,4,1)$

$$d:\begin{cases} x=2t+3 \\ y=4t+1 \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=t+1 \end{cases}$$

④ بعد النقطة D عن المستوي (ABC) :

$$dist(D,(ABC))=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|6+4+1-9|}{\sqrt{4+16+1}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

حجم الهرم : $V=\frac{1}{3}S_b.h$ ...(*)

S_b : مساحة المثلث $(\hat{ABC})$ وهو قائم في A (حسب الطلب (1)).

$$S_b=\frac{\|\vec{AB}\|.\|\vec{AC}\|}{2}=\frac{\sqrt{9+1+4}.\sqrt{4+4+16}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{14}.\sqrt{24}}{2}=\frac{\sqrt{7}.\sqrt{2}.\sqrt{4}.\sqrt{6}}{2}$$

$$=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$$

$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.S_b.h$

$=\frac{1}{3}.2\sqrt{21}.\frac{2}{\sqrt{21}}=\frac{4}{3}$

⑤ G م.أ.ن ل $(A,1)(B,-1)(C,2)$

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{-1-2-6}{2}=\frac{-9}{2}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2-1+8}{2}=\frac{9}{2}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{3-1-2}{2}=0.$$

إحداثيات G $\Rightarrow G\left(-\frac{9}{2},\frac{9}{2},0\right)$

شرط توازي مستقيمين هو الارتباط الخطي للأشعة التوجيه.

$\vec{CG}=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$\vec{AB}=(3,-1,-2)$

$$\frac{-\frac{3}{2}}{3}\overset{?}{=}\frac{\frac{1}{2}}{-1}\overset{?}{=}\frac{1}{-2}$$

$$-\frac{1}{2}\overset{?}{=}-\frac{1}{2}\overset{?}{=}-\frac{1}{2}$$

المركبات المتقابلة متناسبة الشعاعين $\vec{CG}$ ، $\vec{AB}$ مرتبطين خطيا المستقيمين (CG) ، (AB) متوازيان.

حل المسألة ((26)) : 2020 II

مكعب

① $A(0,0,0)$ $G(2,2,2)$

$B(2,0,0)$ $H(0,2,2)$

O نقطة تقاطع القطرين $[AG]$ و $[HB]$

إذاً: O إما منتصف $[AG]$

أو منتصف $[HB]$.

$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$z_0 = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\Rightarrow O(1,1,1)$

② معادلة المستوي (GOB):

$\vec{GO} = (-1,-1,-1)$

$\vec{GB} = (0,-2,-2)$

$\vec{GO}$ و $\vec{GB}$ غير مرتبطين خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (GOB):

$\vec{n} \perp \vec{GO} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{GO} = 0$

$(a,b,c)\cdot(-1,-1,-1) = 0$

$-a-b-c=0$ ①

$\vec{n} \perp \vec{GB} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{GB} = 0$

$(a,b,c)\cdot(0,-2,-2) = 0$

$-2b-2c=0$ ②

$b+c=0$ *

نفرض $b=1 \Leftarrow 1+c=0$

$\Rightarrow c=-1$

نعوض في ①: $-a-1+1=0$

$a=0$

$\vec{n}(0,1,-1)$, $O(1,1,1)$

$(GOB):\ a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$0(x-1)+1.(y-1)-1.(z-1)=0$

$y-1-z+1=0$

$\Rightarrow (GOB):\ y-z=0$

③ $\vec{OG}\cdot\vec{OB} = ?$

$\vec{OG} = (1,1,1)$

$\vec{OB} = (1,-1,-1)$

$\Rightarrow \vec{OG}\cdot\vec{OB} = 1-1-1 = -1$

حساب $\cos(G\hat{O}B)$:

$\vec{OG}\cdot\vec{OB} = \|\vec{OG}\|.\|\vec{OB}\|.\cos(G\hat{O}B)$

$\Rightarrow \cos(G\hat{O}B) = \frac{\vec{OG}\cdot\vec{OB}}{\|\vec{OG}\|.\|\vec{OB}\|}$

$= \frac{-1}{\sqrt{3}\,.\,\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}$

④ - $\vec{u} = \vec{DC} = (2,0,0)$

$(DC):\ \begin{cases} x = 2t+2 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases} \ ;\ t \in \mathbb{R}$

(($D(0,2,0)$ $C(2,2,0)$))

⑤ - لشرط توازي مستقيم مع مستوي هو:

$\vec{u}.\vec{n} = 0$ --- (*)

$\vec{u} = (2,0,0)$

$\vec{n} = (0,1,-1)$

$\Rightarrow \vec{n}.\vec{u} = 0+0-0 = 0$

$\Leftarrow$ المستقيم (DC) يوازي المستوي (GOB).

⑥ - لدينا: $\vec{DA}+\vec{DC} = \vec{DB}$ (متوازي أضلاع)

$\Rightarrow \vec{DA}+\vec{DC}-\vec{DB} = \vec{0}$

$\Leftarrow$ D م.ا.م لـ $(A,1)$ $(B,-1)$ $(C,1)$

$\Leftarrow$ $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=1$.

حل المسألة « 27 »: 2020 I

مرسم

① $A(0,0,0)$

$B(3,0,0)$

$D(0,3,0)$

$E(0,0,3)$

$C(3,3,0)$

② معادلة المستوي (EBC):

$\vec{EB}=(3,0,-3)$

$\vec{EC}=(3,3,-3)$

$\vec{EB}$, $\vec{EC}$ غير مرتبطين خطياً.

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (EBC):

$\vec{n}\perp\vec{EB}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{EB}=0$

$(a,b,c)\cdot(3,0,-3)=0$

$3a-3c=0$ — ①

$\vec{n}\perp\vec{EC}\Rightarrow\vec{n}\cdot\vec{EC}=0$

$(a,b,c)\cdot(3,3,-3)=0$

$3a+3b-3c=0$ — ②

نفرض $c=1$ ⇐ $3a-3=0$

$a=1$

نعوض في ②: $3+3b-3=0$

$b=0$

$\vec{n}(1,0,1)$, $E(0,0,3)$

$(EBC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1.(x-0)+0(y-0)+1.(z-3)=0$

$(EBC): x+z-3=0$

③ بما أن المستقيم d عمودي على المستوي (EBC) فإنه:

$\vec{u}=\vec{n}(1,0,1)$

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=0 \quad ; t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$$

④ H منتصف $[EB]$:

$x_H=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3}{2}$

$y_H=\frac{y_1+y_2}{2}=0$

$z_H=\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{3}{2}$

$H\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

حتى يكون H المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC) يجب أن يتحقق شرطين.

① $H\in(EBC)$

② $\vec{AH}$, $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

* نعوض H في المستوي (EBC):

$\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3\overset{?}{=}0$

$3-3\overset{?}{=}0$

$0\overset{?}{=}0$ محققة

$H\in(EBC)$

* نحسب $\vec{AH}$:

$\vec{AH}=\left(\frac{3}{2},0,\frac{3}{2}\right)$

$\vec{n}=(1,0,1)$

$\vec{AH}$, $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

⇐ H هي المسقط القائم لـ A على المستوي (EBC).

⑤ $V=\frac{1}{3}S_b\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{(EBC)}\cdot\|\vec{AH}\|$

* نحدد نوع المثلث $E\hat{B}C$:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{EB}=(3,0,-3)\\ \vec{EC}=(3,3,-3)\\ \vec{BC}=(0,3,0)\end{array}\right\}\ \vec{EB}\cdot\vec{BC}=0$$

⇐ المثلث $E\hat{B}C$ قائم في B.

$$S = \frac{\|\vec{EB}\| . \|\vec{BC}\|}{2} = \frac{\sqrt{18}.\sqrt{9}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$\|\vec{AH}\| = \sqrt{\frac{9}{4} + 0 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

نعوض في V :

$$V = \frac{1}{3} . \frac{9\sqrt{2}}{2} . \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$V = \frac{9}{2}$ (وحدة مكعبة).

حل المسألة «28» : 2019

II

$A(1,2,0)$

$P : 2x - y + 2z - 2 = 0$

$Q : x + y + z - 1 = 0$

$R : x - z - 1 = 0$

① نشرط تقاطع مستويين هو نفي الارتباط الخطي للنواظم :

$\vec{n}_P = (2,-1,2)$

$\vec{n}_Q = (1,1,1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1}$

$\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطيا

P و Q غير متوازيان $\Leftarrow$ P, Q متقاطعان.

التمثيل الوسيطي للفصل المشترك Δ :

$2x - y + 2z - 2 = 0$ —①

$x + y + z - 1 = 0$ —②

بالجمع نجد :

$3x + 3z - 3 = 0$

$(\div 3)$:

$x + z - 1 = 0$

نعزل x :

$x = -z + 1$ —(*)

نعوض في ② :

$-z + 1 + y + z - 1 = 0$

$y = 0$ —(**)

نفرض : $z = t$

$$\Delta : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 0 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

② نشرط تعامد R و Δ هو الارتباط الخطي لشعاع التوجيه والناظم

$\vec{u} = (-1,0,1)$

$\vec{n} = (1,0,-1)$

نلاحظ :

$\vec{n} = -\vec{u}$

$\Leftarrow$ Δ و R متعامدان.

* إثبات انتماء A إلى R :

«نعوض إحداثيات A في معادلة المستوي R» :

$x - z - 1 = 0$

$1 - 0 - 1 \overset{?}{=} 0$

$0 \overset{?}{=} 0$ محققة

$\Rightarrow A \in R$

③ بما أن P و Q متقاطعان في Δ و R و Δ متعامدان

فإن المستويات P و Q و R تتقاطع في نقطة I و هي نقطة تقاطع Δ مع R

نعوض Δ في R :

$x - z - 1 = 0$

$-t + 1 - t - 1 = 0$

$t = 0$

نعوض في Δ :

$$\begin{rcases} x = -0 + 1 = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{rcases} I(1,0,0)$$

④ بُعد النقطة A عن المستقيم Δ:

$$dist(A, \Delta) = \|\vec{AI}\|$$

$$= \sqrt{0^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{4} = 2$$

حل المسألة ((29)) : 2018 I

① $\vec{AB} = (0, 1, 1)$

$\vec{AC} = (3, -1, 0)$

الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② معادلة المستوي (ABC):

ط1: نفرض $\vec{n}(a, b, c)$ ناظم المستوي (ABC)

$\vec{n} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a, b, c) \cdot (0, 1, 1) = 0$

$b + c = 0$ — ①

$\vec{n} \perp \vec{AC} \rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$(a, b, c) \cdot (3, -1, 0) = 0$

$3a - b = 0$ — ②

نفرض $b = 3 \Leftarrow 3a - 3 = 0$

$\Rightarrow a = 1$

نعوض في ①: $3 + c = 0$

$c = -3$

$\vec{n}(1, 3, -3)$, $C(4, 0, 0)$

$(ABC): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1 \cdot (x-4)+3(y-0)-3(z-0)=0$

$x-4+3y-3z=0$

$x+3y-3z-4=0$

ط2: نعوض إحداثيات النقاط في المعادلة

البعض وجميعها تكون محققة.

③ $P: x+2y-z-4=0$

$Q: 2x+3y-2z-5=0$

شرط تقاطع مستويين هو نفي الارتباط الخطي لشعاعي الناظم

$\vec{n}_P = (1, 2, -1)$

$\vec{n}_Q = (2, 3, -2)$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-2}$$

الشعاعين $\vec{n}_P$, $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً.

المستويين P, Q غير متوازيان فهما متقاطعان.

* التمثيل الوسيطي للفصل المشترك d:

$x+2y-z-4=0$ — ①

$2x+3y-2z-5=0$ — ②

نضرب المعادلة الأولى بـ (-2):

$-2x-4y+2z+8=0$ — ③

نجمع ② , ③:

$-y+3=0$

$\boxed{y=3}$

نعوض في ①:

$x+2(3)-z-4=0$

$x-z+2=0$

نعزل x:

$\boxed{x = z-2}$

نفرض $z = t$:

$$d: \begin{cases} x = t-2 \\ y = 3 \quad ; t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

④ نقطة تقاطع المستويات P , Q , (ABC)

هي نقطة تقاطع d مع (ABC).

نعوض d في (ABC):

$x + 3y - 3z - 4 = 0$

$t - 2 + 3(3) - 3t - 4 = 0$

$t - 2 + 9 - 3t - 4 = 0$

$-2t = -3$

$t = \frac{3}{2}$

نعوض في d:

$x = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$y = 3$

$z = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$

5) بُعد النقطة A عن المستقيم d:

نفرض $A'(x, y, z)$ هي المسقط العامد لـ A على المستقيم d.

$\vec{AA'}$ عمودي على d

$\Rightarrow \vec{AA'} \cdot \vec{u}_d = 0$

$(x-1, y-1, z) \cdot (1, 0, 1) = 0$

$x - 1 + z = 0 \quad --- (*)$

A' تنتمي إلى المستقيم d « فهي تحقق معادلاته » نعوض d في *:

$t - 2 - 1 + t = 0$

$2t = 3$

$t = \frac{3}{2}$

نعوض في d:

$x = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$y = 3$

$z = \frac{3}{2}$

$A'\left(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$

$dist(A, d) = \|\vec{AA'}\|$

$= \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}}$

$= \frac{\sqrt{34}}{2}$

2018 حل المسألة « 30 »

II

1) $\vec{AB} = (-1, -1, -4)$

$\vec{CD} = (-4, 4, 0)$

$\vec{CE} = (-3, -1, 1)$

2) $\frac{-4}{-3} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{0}{1}$

المركبات المتقابلة غير متناسبة

الشعاعين $\vec{CD}$، $\vec{CE}$ غير مرتبطين

النقاط C، D، E ليست على استقامة واحدة.

3) حتى يعامد (AB) المستوي (CDE) يجب أنه يتحقق: $\vec{AB}$ عمودي على كل من $\vec{CD}$، $\vec{CE}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = +4 - 4 + 0 = 0$

$\Leftarrow \vec{AB} \perp \vec{CD}$

$\vec{AB} \cdot \vec{CE} = +3 + 1 - 4 = 0$

$\Leftarrow \vec{AB} \perp \vec{CE}$

$\Leftarrow$ (AB) يعامد المستوي (CDE)

دورة أولى 201 I

حل المسألة «31»:

1) مكعب

$A(0,0,0)$

$F(1,0,1)$ $H(0,1,1)$, $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$

2) معادلة المستوي (ACH):

$\vec{AC} = (1,1,0)$

$\vec{AH} = (0,1,1)$

$\vec{AC}$, $\vec{AH}$ غير مرتبطين خطياً.

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم للمستوي (ACH):

$\vec{n} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$(a,b,c) \cdot (1,1,0) = 0$

$a + b = 0$ —— (1)

$\vec{n} \perp \vec{AH} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{AH} = 0$

$(a,b,c) \cdot (0,1,1) = 0$

$b + c = 0$ —— (2)

نفرض $c=1$ ⇐ $b+1=0$

$\Rightarrow b=-1$

نعوض في (1): $a-1=0$

$\Rightarrow a=1$

$\vec{n}(1,-1,1)$, $A(0,0,0)$

$(ACH): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$(ACH): 1.(x-0) - 1.(y-0) + 1.(z-0)$

$(ACH): x - y + z = 0$

3) بشرط توازي المستويين P و (ACH) هو الارتباط الخطي للنواظم:

$\vec{n} = (1,-1,1)$, $\vec{n'} = (-2,2,-2)$

4) معادلة المستوي (CDE):

لدينا: (AB) عمودي على المستوي (CDE)

⇐ $\vec{AB}$ ناظم للمستوي (CDE).

$\vec{n} = \vec{AB} = (-1,-1,-4)$, $C(4,0,0)$

$(CDE): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-1(x-4) - 1.(y-0) - 4(z-0) = 0$

$-x + 4 - y - 4z = 0$

$x + y + 4z - 4 = 0$

5) بعد B عن المستوي (CDE):

ط:

$$dist(B,(CDE)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1+0-4-4|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{18}}$$

ط: المسقط القائم « ☺ ».

6) بما أن المستوي (CDE) يمس الكرة فإنه:

$$R = dist(B,(CDE)) = \frac{7}{\sqrt{18}}$$

$$S: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$$

$$S: (x-1)^2 + (y)^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{18}$$

نلاحظ أن :

$$\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

⟸ $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ مرتبطين خطياً.

P و (ACH) متوازيان.

④ I مركز ثقل المثلث $\overset{\triangle}{ACH}$:

$$x_I = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{0+1+0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y_I = \frac{y_1+y_2+y_3}{3} = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$z_I = \frac{z_1+z_2+z_3}{3} = \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$I\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

حتى تقع النقاط D و I و F على استقامة

يجب أن يكون الشعاعين $\vec{FI}$ ، $\vec{FD}$ مرتبطين خطياً.

$\vec{FD} = (-1, 1, -1)$

$\vec{FI} = \left(-\frac{2}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$$\frac{-1}{-\frac{2}{3}} \overset{?}{=} \frac{1}{\frac{2}{3}} \overset{?}{=} \frac{-1}{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{3}{2} \overset{?}{=} \frac{3}{2} \overset{?}{=} \frac{3}{2}$$

محققة

⟸ $\vec{FI}$ و $\vec{FD}$ مرتبطين خطياً لتناسب المركبات المتقابلة.

⟸ النقاط D ، I ، F تقع على استقامة واحدة.

⑤ $S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

$S: (x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 3$

شرط تماس المستوي (ACH) مع الكرة S هو

$$dist(\Omega, (ACH)) \overset{?}{=} R = \sqrt{3}$$

$$dist(\Omega, (ACH)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|1.1-1(-1)+1.1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3} = R$$

⟸ المستوي يمس الكرة S.

حل المسألة « 32 » : 2017 I

مكعب

① A(0,0,0) G(2,2,2)

B(2,0,0) H(0,2,2)

D(0,2,0) F(2,0,2)

E(0,0,2) C(2,2,0)

معادلة المستوي (GBD) :

$\vec{GB} = (0,-2,-2)$

$\vec{GD} = (-2,0,-2)$

الشعاعين $\vec{GB}$ و $\vec{GD}$ غير مرتبطين خطياً

* نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (GBD) :

$\vec{n} \perp \vec{GB} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{GB} = 0$

$(a,b,c).(0,-2,-2) = 0$

$-2b-2c = 0$ ①

$\vec{n} \perp \vec{GD} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{GD} = 0$

$(a,b,c).(-2,0,-2) = 0$

$-2a-2c = 0$ ②

نفرض $c=1$ ⟸ $a=-1$ ⟸ $b=-1$

⟸ $\vec{n}(-1,-1,1)$

B(2,0,0)

$(GBD): a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$-1.(x-2)-1.(y-0)+1.(z-0)=0$

$-x+2-y+z=0$

$-x-y+z+2=0$

$(\div -)\quad x+y-z-2=0$

② $\vec{u}=\vec{EC}=(2,2,-2)$

$$(EC):\begin{cases} x=2t \\ y=2t \\ z=-2t+2 \end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$$

③ لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم (EC) مع المستوى (GBD): I

نعوض المستقيم (EC) في المستوى (GBD):

$x+y-z-2=0$

$2t+2t-(-2t+2)-2=0$

$4t+2t-2-2=0$

$6t=4$

$t=\frac{2}{3}$

نعوض t في (EC):

$x=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

$y=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

$z=-2\left(\frac{2}{3}\right)+2=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$

$J\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$

④ $\vec{EM}=\frac{1}{3}\vec{EC}$

نفرض $M(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$x=\frac{2}{3}$

$y=\frac{2}{3}$

$z-2=-\frac{2}{3} \Rightarrow z=\frac{4}{3}$

$M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

⑤ شرط تعامد المستقيمين هو الجداء السلمي لشعاعي التوجيه يساوي الصفر.

$\vec{HM}=\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{+1}{3}\right)$

$\vec{EC}=(2,2,-2)$

$\Rightarrow \vec{HM}.\vec{EC}=2.\frac{2}{3}+2.\left(-\frac{1}{3}\right)-2\left(+\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$

$\Leftarrow \vec{HM}\perp\vec{EC}$

(EC) و (HM) متعامدان.