من إصدارات
المركز العلمي للترجمة

قانون الجذب العام

Universal Gravitation Law

ترجمة
الاستاذ تمام إبراهيم دخان

www.trgma.com

توثيـــــق

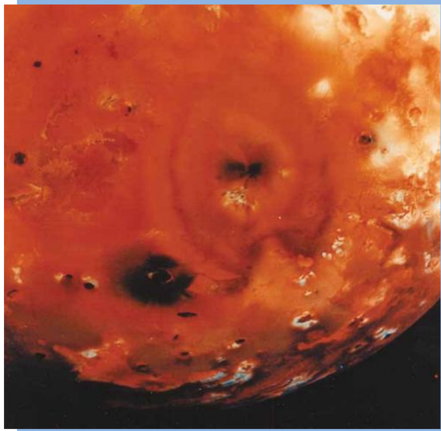
م	البند	البيان
1	المصدر	Physics for Scientists and Engineers By Raymond A. Serway & John W. Jewett 6th Edition
2	الموضوع	الوحدة الأولى الميكانيكا الجزء الثالث عشر قانون الجذب العام
3	المترجم	أ/ تمام إبراهيم دخان
4	المراجعة العلمية	د/ حازم فلاح سكيك
5	المراجعة اللغوية	
6	التصنيف	فيزياء
7	الفئة	كتاب
11	التاريخ	2009-3-25

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

Universal Gravitation Law

قانون الجذب العام

إن فهم العلماء لقانون الجاذبية العام سمح لهم بإرسال مركبة فضائية لأخذ قياسات دقيقة لأجزاء أخرى من نظامنا الشمسي. هذه صورة بركان على قمر المشتري أخذت بمركبة جاليلو الفضائية التي كانت تدور حول المشتري عام 1995، طبعا هذه المادة الحمراء نفذت من تحت السطح. (جامعة أريزونا- ناسا) (Univ. of Arizona/JPL/NASA)



أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

الوحدة الأولى: الميكانيكا

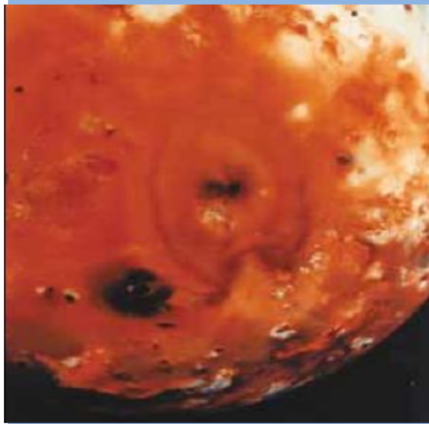
الجزء الثالث عشر: قانون الجذب العام

1.13	قانون نيوتن للجذب العام
2.13	قياس ثابت الجذب العام
3.13	تسارع السقوط الحر وقوة الجاذبية
4.13	قوانين كبلر وحركة الكواكب
5.13	مجال الجاذبية الأرضية
6.13	طاقة وضع الجاذبية الأرضية
7.13	اعتبارات الطاقة في الكواكب وحركة القمر الصناعي

CHAPTER OUTLINE

13.1 Newton's Law of Universal Gravitation
13.2 Measuring the Gravitational Constant
13.3 Free-Fall Acceleration and the Gravitational Force
13.4 Kepler's Laws and the Motion of Planets
13.5 The Gravitational Field
13.6 Gravitational Potential Energy
13.7 Energy Considerations in Planetary and Satellite Motion

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com



قبل عام 1687، تم جمع كمية كبيرة من المعلومات حول حركة القمر والكواكب، لكنه لم يتوفر فهم واضح للقوى المتعلقة بهذه الحركات، في تلك السنة جاء العالم اسحق نيوتن وزودنا بالمفتاح الذي فتح أسرار السماء، وعرّف بقانونه الأول، حيث كان يرى أنه لا بدّ من قوة تؤثر على سطح القمر لأنه بدون هذه القوة سيسير القمر وفق خط مستقيم بدلا من أن يكون في مداره الدائري تقريبا.

فسر نيوتن هذه القوة بأنها جاذبية الأرض للقمر، إلا أنه أدرك أن القوى المسئولة عن جاذبية الأرض للقمر وجاذبية الشمس للكواكب، ليست شيئا خاصا بتلك النظم فقط إنما هي حالة خاصة من الجذب العام والعالمي بين الأجسام.

بعبارة أخرى: رأى نيوتن أن القوة التي تسبب دوران القمر حول الأرض هي نفسها القوة التي أدت إلى سقوط التفاحة من الشجرة.

على حد تعبيره: "نستنتج أن القوة التي تبقي الكواكب في مداراتها يجب أن تتناسب مع مربع المسافة بينها وبين المركز التي تدور حولها، وبذلك عند مقارنة القوة اللازمة لبقاء القمر في مداره مع قوة جاذبية سطح الأرض، وجد الجواب ذاته تقريبا".

سندرس في هذا الفصل قانون الجاذبية العالمي، ونؤكد على وصف حركة الكواكب التي ستزودنا بمعلومات حول أهمية اختبار صحة هذا القانون. ثم نبين بأن قوانين حركة الكواكب التي وضعها يوهانس كبلر تمت متابعتها من قبل قانون الجاذبية العالمي ومفهوم حفظ الاندفاع الزاوي، وسنختم باستنتاج التعبير العام لطاقة الوضع، وحركة الأقمار الصناعية.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

1.13 قانون الجذب العام لنيوتن

ربما سمعت بأسطورة سقوط التفاحة على رأس نيوتن عندما كان في قيلولة تحت الشجرة، إن هذه الأسطورة يفترض بأنها دفعته للتخيل بأن كل الأجسام في الكون تنجذب إلى بعضها البعض، بنفس طريقة جذب التفاحة إلى الأرض. حلل نيوتن البيانات المتعلقة بحركة القمر حول الأرض، ومن هذا التحليل خرج بقوله الجريء، بأن قانون القوة الذي يحكم حركة الكواكب هو نفسه قانون القوة الذي جذب التفاحة عند سقوطها إلى الأرض. كانت هذه أول مرة تتوحد فيها الحركات السماوية والأرضية، سوف نرى في هذا الفصل تفاصيل رياضية لتحليلات نيوتن.

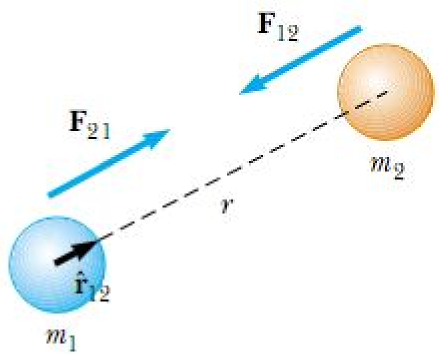
في عام 1987 نشر نيوتن عمله عن قانون الجاذبية في بحثه الرياضي مبادئ الفلسفة الطبيعية، قانون الجذب العام لنيوتن ذكر أن:

كل الأجسام في الكون تتجاذب مع الجسيمات الأخرى بتأثير قوة مباشرة تتناسب طردا مع كتلها وعكسا مع مربع المسافة بينها.

أي أنه إذا كان لدينا كتلتين m_1،m_2 وتفصل بينهما مسافة r، مقدار قوة الجاذبية يعطى بالعلاقة:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (13.1)$$

حيث G ثابت، ويدعى ثابت الجذب العام وقيمته التجريبية في نظام الوحدات الدولية هي:



الشكل رقم 1.13 قوة التجاذب بين جسمين، شعاع الواحدة $r\hat{}_{12}$ موجه من الجسم 1 إلى الجسم 2،
لاحظ أن: $F_{12} = -F_{21}$

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2} \qquad (13.2)$$

إن شكل قانون القوة في المعادلة 1.13 يسمى غالبا بقانون التربيع العكسي، لأن مقدار قوة الجاذبية يتناسب مع مربع المسافة بين الأجسام. يمكننا أن نمثل هذه القوة على شكل شعاع، وذلك بواسطة شعاع الوحدة $\hat{r}_{12}$ (الشكل 1.13) حيث شعاع الواحدة موجه من الجسم 1 إلى الجسم 2، وبالتالي القوة التي يتأثر بها الجسم 1 من الجسم 2 هي:

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} \qquad (13.3)$$

حيث تدل الإشارة السالبة على أن الجسم 2 يجذب الجسم 1، وبالتالي قوة الجسم 2 يجب أن تكون باتجاه الجسم 1، وذلك وفقا لقانون نيوتن الثالث، وهذه القوة يقابلها الجسم 2 على الجسم 1.

عند تعيين القوة F_{21} نجدها مساوية للقوة F_{12} ولكن في الاتجاه المعاكس. وهذا يعني أن هذه القوى تشكل زوجا من الفعل ورد الفعل. وللقوة $F_{12} = - F_{21}$ ميزات عديدة تستحق الذكر من خلال المعادلة (3.13). قوة الجاذبية هي قوة المجال الموجود دائما بين أي كتلتين، بغض النظر عن الوسط الفاصل بينهما. وذلك لأن القوة تتناسب مع مربع المسافة بين الأجسام وتتناقص بشكل ملحوظ مع زيادة المسافة.

كما إن هناك نقطة هامة أخرى نستطيع أن نراها من خلال المعادلة (3.13) وهو أن قوة الجاذبية الناتجة عن كتلة كروية متجانسة ومحدودة الحجم وتؤثر على جسم خارج التوزيع هي نفسها كما لو أن كل الكتلة مركزة في المركز. على سبيل المثال، إن مقدار القوة التي تؤثر بها الأرض على جسم كتلته m قرب سطح الأرض هي:

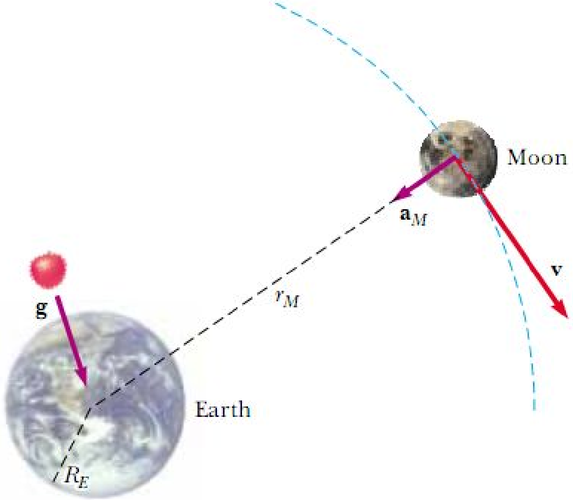
$$F_g = G\frac{M_E m}{R_E^2} \qquad (13.4)$$

حيث M_E هي كتلة الأرض، وR_E هو نصف قطرها، وهذه القوة موجهة نحو مركز الأرض.

استخدم نيوتن في صياغته قانون الجذب العام المنطق الذي يفترض أن قوة الجاذبية تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بين الجسمين المتفاعلين، حيث قارن عجلة القمر في مداره بعجلة جسم يسقط بالقرب من سطح الأرض، مثل التفاحة الأسطورية (شكل 13.2).

على فرض أن كلا العجلتين كان لهما نفس السبب يعني جذب جاذبية الأرض، استخدم نيوتن قانون التربيع العكسي كسبب لتسارع القمر نحو الأرض (تسارع مركزي)، أي يجب أن يكون متناسبا مع $1/r_M^2$، حيث r_M هي المسافة بين مركز الأرض والقمر.

علاوة على ذلك يجب أن يكون تسارع التفاحة نحو الأرض متناسبا مع $1/R_a^2$، حيث R_a هي المسافة بين مركز الأرض والتفاحة، وبما أن التفاحة تقع على سطح الأرض أي R_a R_E نصف قطر الأرض استخدم القيم $r_M=3.84\text{x}10^8\text{m}$ و $R_E=6.370\text{x}10^6\text{m}$، لقد تنبأ نيوتن بأن نسبة عجلة القمر a_M إلى عجلة التفاحة g يعطى بالعلاقة:



الشكل 2.13 إن دوران القمر حول الأرض يكسبه تسارع مركزي a_M جهته نحو الأرض. جسم قرب سطح الأرض كالتفاحة هنا تكتسب تسارعا g .

$$\frac{a_M}{g} = \frac{(1/r_M)^2}{(1/R_E)^2} = \left(\frac{R_E}{r_M}\right)^2 = \left(\frac{6.37 \times 10^6 \text{ m}}{3.84 \times 10^8 \text{ m}}\right)^2 = 2.75 \times 10^{-4}$$

ولذلك فالعجلة المركزية للقمر هي

$$a_M = (2.75 \times 10^{-4})(9.80 \text{ m/s}^2) = 2.70 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

قام نيوتن أيضا بحساب العجلة المركزية للقمر من خلال معرفة المسافة بينه وبين الأرض ومعرفة قيمة زمنه الدوري، $T=27.32$ يوم أو تساوي 2.36×10^6 ثانية. وفي خلال هذه الفترة الزمنية T يقطع القمر مسافة مقدارها $2\pi r_M$، وهي تعادل محيط مداره. ولذلك فإن سرعته المدارية orbital speed هي $2\pi r_M/T$ والعجلة المركزية هي

$$a_M = \frac{v^2}{r_M} = \frac{(2\pi r_M/T)^2}{r_M} = \frac{4\pi^2 r_M}{T^2} = \frac{4\pi^2(3.84\times10^8\ \mathrm{m})}{(2.36\times10^6\ \mathrm{s})^2}$$
$$= 2.72\times10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

وهذا يعطينا دليلا قويا على صحة قانون الجذب العام ويؤكد على طبيعة التربيع العكسي في القوة الجاذبية بين الأجسام.

على الرغم من أن هذه النتائج يجب أن تكون مشجعة جدا لنيوتن، إلا أنه كان قلقا بشدة تجاه الافتراض الذي أدلى به في التحليل. لتقدير تسارع جسم على سطح الأرض، تعامل نيوتن مع الأرض كما لو أن كامل كتلتها تجمعت في المركز. إنه افترض أن الأرض تؤثر بقدر المستطاع كجسيم يسيطر على جسم خارجي تعلق به.

بعد عدة سنوات وفي عام 1687 وعلى أساس عمله الرائد في تطوير حساب التفاضل والتكامل، أثبت نيوتن أن هذا الافتراض كان صحيحا ونتيجة طبيعية لقانون الجذب العام.

لدينا دليل على أن قوة الجاذبية المؤثرة في جسم تتناسب طرديا مع الكتلة وذلك من خلال ملاحظتنا لسقوط الأجسام، (تمت مناقشتها في الفصل 2).

جميع الأجسام بغض النظر عن كتلتها، وبإهمال مقاومة الهواء تسقط بنفس العجلة g قرب سطح الأرض. وذلك وفقا لقانون نيوتن الثاني، وتعطى هذه العجلة بالعلاقة $g = F_g / m$، حيث m هي كتلة الجسم الساقط، إن هذه النسبة هي نفسها لكل الأجسام الساقطة حيث F_g يجب أن تكون متناسبة مباشرة مع الكتلة m، لذلك نلغى الكتلة في النسبة.

إذا ما اعتبرنا الحالة الأكثر عمومية لقوة الجاذبية بين أي جسمين مع الكتلة، مثل كوكبين، نفس هذه الحالة يمكننا تطبيقها لنثبت أن قوة الجاذبية تتناسب مع أحد الكتل. وبناءا على هذا الدليل يمكننا اختيار أي من الكتل مهما كانت، وبالتالي قوة الجاذبية يجب أن تكون متناسبة طردا مع كلا الكتلتين، كما يمكننا رؤية ذلك في المعادلة 3.13.

سؤال للتفكير 1.13

يبقى القمر في مداره حول الأرض دون أن يسقط على الأرض بسبب (a) انه خارج تأثير جاذبية الأرض، (b) متوازن مع قوى جذب الشمس والكواكب الأخرى، (c) محصلة القوة على القمر معدومة، (d) لاشيء من ذلك، (e) كل ما سبق.

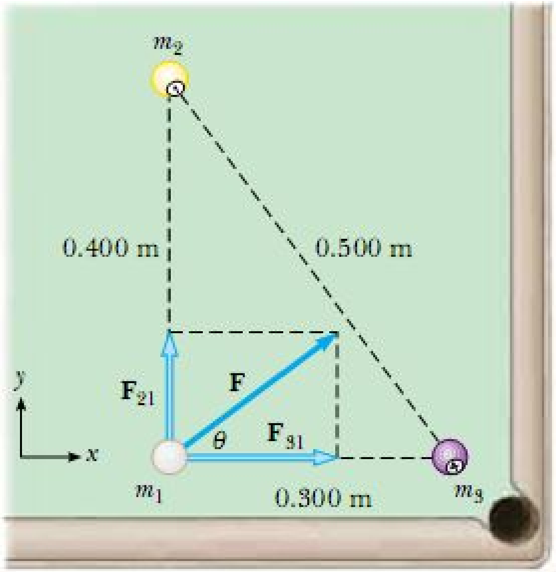
سؤال للتفكير 2.13

كوكب لديه قمران متساويا الكتلة، القمر الأول في مدار دائري نصف قطره r، والقمر الثاني في مدار دائري نصف قطره 2r. إن مقدار قوة الجاذبية التي يؤثر بها الكوكب على القمر الثاني هي (a) أكبر أربع مرات من القوة المؤثرة على القمر الأول، (b) أكبر مرتين من القوة المؤثرة على القمر الأول، (c) تساوي القوة المؤثرة على القمر الأول، (d) نصف القوة المؤثرة على القمر الأول، (e) ربع القوة المؤثرة على القمر الأول

مثال 1.13 كرات البليادرو

ثلاث كرات بليادرو كتلة كل منها 0.300 كيلوجرام موضوعة على طاولة في زوايا مثلث قائم كما في الشكل 3.13. أحسب قوة الجاذبية على الكرة m_1 الناتجة عن الكرتين m_2 وm_3.

الحل: أولا نحسب بشكل منفصل القوة التي تؤثر بها كل من الكرتين الأخريين على الكرة m_1، ثم نوجد مجموع الكميات المتجهة لنحصل على القوة المحصلة، يمكننا أن نرى من خلال الرسم البياني هذه القوة وهي تشير إلى الأعلى ونحو اليمين. نختار المحاور كما في الشكل 3.13، نضع مركز المحاور في الكرة m_1



الشكل 3.13 قوة الجاذبية الناتجة عن الكتلة m_1 ينوب عنها شعاع المحصلة $F_{31}+F_{21}$.

القوة التي تؤثر بها الكتلة m_2 على الكرة m_1 وباتجاه الأعلى مباشرة تعطى بـــ:

$$\mathbf{F}_{21} = G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\frac{(0.300\ \mathrm{kg})(0.300\ \mathrm{kg})}{(0.400\ \mathrm{m})^2}\hat{\mathbf{j}}$$

$$= 3.75 \times 10^{-11}\ \hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{N}$$

من خلال هذه النتيجة نرى أن قوة الجاذبية بين الأجسام العادية لها قيمة ضئيلة جدا.

الآن القوة التي تؤثر بها الكتلة m_3 على الكتلة m_1 وباتجاه اليمين مباشرة تعطى بـــ:

$$\mathbf{F}_{31} = G\frac{m_3 m_1}{r_{31}{}^2}\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$= (6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\,\frac{(0.300\ \mathrm{kg})(0.300\ \mathrm{kg})}{(0.300\ \mathrm{m})^2}\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$= 6.67 \times 10^{-11}\,\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{N}$$

إذا محصلة قوة الجاذبية المؤثرة على m_1 تعطى بالعلاقة:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} = (6.67\hat{\mathbf{i}} + 3.75\hat{\mathbf{j}}) \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$

وبالتالي مقدار هذه القوة هو:

$$F = \sqrt{F_{21}{}^2 + F_{31}{}^2} = \sqrt{(3.75)^2 + (6.67)^2} \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$
$$= 7.65 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$

من ظل الزاوية $\tan\Theta = 3.75/6.67 = 0.562$ يكون اتجاه محصلة قوة الجاذبية $\Theta = 29.3°$ معاكس لحركة عقارب الساعة من المحور x.

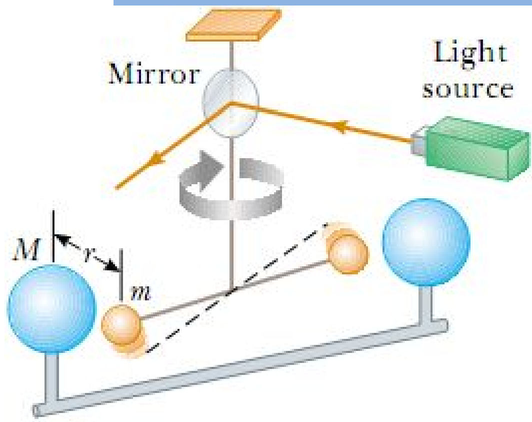
أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

2.13 قياس ثابت الجذب العام Measuring the Gravitational Constant

لقد تم قياس ثابت الجذب العام من خلال تجربة هامة قام بها العالم هنري كافيندش (1737-1810) في عام 1798. جهاز كافيندش يتألف من كرتين صغيرتين كتلة كل منهما m، ثبتتا إلى طرفي قضيب أفقي معلق بخيط رفيع أو بسلك معدني رقيق، كما في الشكل 4.13.

عندما توضع كرتان كبيرتان كتلة كل منهما M بجانب الكرات الأصغر، فإن قوة الجاذبية بين الكرات الأكبر والأصغر تسبب دوران القضيب وبالتالي دوران وبرم سلك التعليق إلى وضع توازن جديد.

تقاس زاوية الدوران من خلال انعكاس الشعاع الضوئي عن المرآة المربوطة على سلك التعليق (حيث ينحرف الشعاع الضوئي بدوران السلك). إن انحراف الشعاع الضوئي هو أسلوب فعال لتضخيم الحركة ودراستها. لقد تم تكرار التجربة بعناية وذلك بأخذ كتل مختلفة وفي عدة حالات. والنتيجة أظهرت أن قوة الجاذبية تتناسب طرديا مع حاصل ضرب الكتلتين mM وتتناسب عكسيا مع مربع المسافة r بينهما.



شكل 4.13 جهاز كافندش لقياس G. الخط المنقط يمثل الموقع الأصلي للقضيب

3.13 تسارع السقوط الحر وقوة الجاذبية Free-Fall Acceleration and the Gravitational Force

في الفصل الخامس، عندما حددنا حاصل ضرب الكتلة في عجلة الجاذبية الأرضية mg كوزن لجسم كتلته m، أشرنا إلى g كمقدار لعجلة السقوط الحر. الآن يمكننا الحصول على فهم أكثر عمقا لـ g. بما أن مقدار القوة التي تعمل على سقوط جسم كتلته m سقوطا حرا بالقرب من سطح الأرض تعطى بالعلاقة 4.13، يمكننا مساواة mg مع هذه القوة لنحصل على:

$$mg = G\frac{M_E m}{R_E{}^2}$$

$$g = G\frac{M_E}{R_E{}^2} \qquad (13.5)$$

الآن بفرض جسم كتلته m يقع على ارتفاع h عن سطح الأرض أو على ارتفاع r عن مركز الأرض، حيث $r = R_E + h$. فإن مقدار قوة الجاذبية التي تؤثر على الجسم هي:

$$F_g = G\frac{M_E m}{r^2} = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

إن مقدار قوة الجاذبية التي تؤثر على الجسم في هذا الموضع تعطى أيضا بالعلاقة $F_g = mg$ حيث g هي قيمة تسارع السقوط الحر من الارتفاع h. بتعويض هذه العلاقة لـ F_g بالعلاقة السابقة نجد أن g هي:

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \quad (13.6)$$

وبالتالي، تتناقص قيمة g بزيادة الارتفاع، أي أنه عندما $r\rightarrow\infty$، فإن الوزن يقترب من الصفر، وذلك لأن وزن الجسم هو mg.

هذه الصورة توضح مركبة الفضاء Endeavor وتلسكوب هابل وكلاهما في حالة سقوط حر بينما هما في مدارهما حول الأرض.

سؤال للتفكير 3.13

يقف سوبرمان على قمة جبل مرتفعة جدا ويقوم برمي كرة البسبول أفقيا وبسرعة كبيرة بحيث تتخذ الكرة مدارا حول الأرض، عندما تكون الكرة في المدار فإن تسارعها: (a) يتوقف على السرعة التي رميت بها الكرة، (b) هو صفر لأن الكرة لم تسقط على الأرض، (c) أقل قليلا من $9.80\ m/s^2$، (d) يساوي $9.80\ m/s^2$.

مثال 2.13 تغير g مع الارتفاع h

محطة الفضاء الدولية تعمل على ارتفاع 350 km. عند الانتهاء من إنشائها بالكامل، سيكون وزنها (مقاسا على سطح الأرض) هو 4.22×10^{6}N. ما هو وزنها عندما تكون في المدار؟

الحل: نوجد أولا كتلة المركبة الفضائية من وزنها على سطح الأرض:

$$m = \frac{F_g}{g} = \frac{4.22 \times 10^6 \text{ N}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 4.31 \times 10^5 \text{ kg}$$

هذه الكتلة ثابتة بغض النظر عن مكان المحطة، وبما أن المحطة الفضائية فوق سطح الأرض، فإننا على أية حال نتوقع أن وزنها في المدار أقل من وزنها على الأرض. بتعويض h 350 km في المعادلة 6.13 نجد أن

$$g = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}$$
$$= \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.350 \times 10^6 \text{ m})^2}$$
$$= 8.83 \text{ m/s}^2$$

Free-Fall Acceleration g at Various Altitudes Above the Earth's Surface

Altitude h (km)	g (m/s^2)
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

الجدول 1.13

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

هذه القيمة تساوي 90% من قيمة g على سطح الأرض بالتالي نتوقع أن وزن المحطة في مدارها على ارتفاع 350 km هو 90% من قيمة وزنها على سطح الأرض.

نستخدم قيمة g في موقع المحطة، فيكون وزن المحطة في المدار هو:

$$mg = (4.31 \times 10^5\ \mathrm{kg})(8.83\ \mathrm{m/s^2}) = \boxed{3.80 \times 10^6\ \mathrm{N}}$$

مثال 3.13 كثافة الأرض

باستخدام نصف القطر المعروف للأرض وقيمة $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ على سطح الأرض، أوجد الكثافة الوسطية للأرض.

الحل: نحن نعلم من العلاقة 1.1 بأن كثافة الوسط هي:

$$\rho = \frac{M_E}{V_E}$$

حيث M_E هي كتلة الأرض، وV_E هو حجمها. من العلاقة 5.13، نستطيع أن نصل إلى كتلة الأرض من قيمة g:

$$g = G\frac{M_E}{{R_E}^2} \longrightarrow M_E = \frac{g{R_E}^2}{G}$$

نعوض هذه القيمة بعلاقة الكثافة فنحصل على:

$$\rho_E = \frac{M_E}{V_E} = \frac{(g{R_E}^2/G)}{\frac{4}{3}\pi {R_E}^3} = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi G R_E}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{9.80\ \mathrm{m/s^2}}{\pi(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(6.37\times10^6\ \mathrm{m})}$$

$$= \boxed{5.51\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}}$$

ماذا لو؟ ماذا لو قيل لك بأن الكثافة النموذجية للجرانيت على سطح الأرض هي $2.75\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$، كيف تتوافق مع كثافة المادة المحسوبة داخل الأرض؟

الجواب: لأن هذه القيمة وسطية وهي محسوبة كمتوسط لكثافة الأرض كاملة، نستنتج أن البنية الداخلية الأساسية للأرض لها كثافة أعلى بكثير من متوسط القيمة. ومن المدهش أن تجربة كافيندش التي حددت G والتي يمكنها العمل على سطح طاولة. اندمجت مع مقاييس السقوط الحر البسيطة لتزودنا بمعلومات عن باطن الأرض.

13.4 قوانين كبلر وحركة الكواكب Kepler’s Laws and the Motion of Planets

لقد لاحظ الناس منذ آلاف السنين حركات الكواكب والنجوم والأجسام السمأو ية الأخرى. وفي وقت مبكر من التاريخ، اعتبر العلماء أن الأرض مركز الكون وهو ما يسمى نموذج مركزية الأرض حيث درسه واعتمده رسميا عالم الفلك الإغريقي كلاوديوس بطليموس Claudius Ptolemy (c. 100–c. 170) في القرن الثاني الميلادي وقد بقي معتمدا مدة 1400 سنة. في عام 1543 جاء العالم الفلكي البولندي نيكولاس كوبرنيكوس Nicolaus Copernicus 1473–1543 واقترح أن الأرض والكواكب الأخرى تدور حول الشمس في مدارات دائرية (نموذج مركزية الشمس).

بعدها جاء الفلكي الدنماركي تايكوبراهي Tycho Brahe (1546–1601) وأراد أن يحدد كيفية بناء السماء وهكذا وضع برنامجا لتحديد مواقع كل من النجوم والكواكب، ومن المثير للاهتمام ملاحظة أنه تم مشاهدة ورصد العديد من الكواكب و777 من النجوم المرئية بالعين المجردة وذلك فقط من خلال سدسية كبيرة (آلة لقياس الارتفاع أو لتحديد الاتجاه) وبوصلة. (على الرغم من أن التلسكوب لم يكن قد اخترع ذاك الوقت).

الفلكي الألماني جوهانس كبلر عمل مساعدا لبراهي لفترة قصيرة قبل وفاته، وهكذا اكتسب معلومات معلمه الفلكي وتجاربه لمدة 16 عاما لاستنباط النموذج الرياضي لحركة الكواكب. مثل هذه المعلومات من الصعب ترتيبها لأن الأرض أيضا تتحرك حول الشمس.

بعد عدة محاولات شاقة، ومن معلومات براهي عن مسار المريخ حول الشمس وجد كبلر الإجابة. إن تحليل كبلر الكامل للحركة الكوكبية يلخص في ثلاث قوانين، تعرف بقوانين كبلر:

1- **كل الكواكب تتحرك في مدارات اهليليجية حول الشمس والشمس تقع في إحدى بؤرتيه.**
2- **الخط الواصل بين الكوكب والشمس يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية.**
3- **مربع الزمن الدوري لأي كوكب حول الشمس يتناسب مع مكعب نصف المحور الكبير للمدار الاهليلجي.**

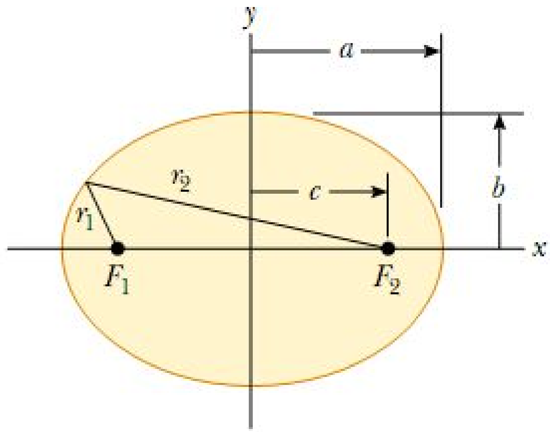
جوهانس كبلر
(1571-1630)
الفلكي الألماني كبلر اشتهر بتطوير قوانين حركة الكواكب معتمدا على الملاحظات الدقيقة لأستاذه تايكو براهي.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

سنناقش كل من هذه القوانين أدناه.

قانون كبلر الأول

لقد اعتدنا على أن مدارات الأجسام حول مراكز قوة الجاذبية هي دائرية كما ناقشنا ذلك في هذا الفصل. يشير قانون كبلر الأول إلى أن المدار الدائري هو حالة خاصة جدا والمدارات الاهليلجية هي الحالة العامة. لقد كانت هذه الفكرة من الصعب تقبلها لدى العلماء في ذلك الوقت، وذلك لأنهم كانوا يرون أن مدارات دائرية كاملة للكواكب تعكس الكمال في السماء.



شكل 5.13 عبارة عن قطع ناقص حيث a هي نصف المحور الرئيسي وb هي نصف المحور الثانوي وكلا البؤرتين تقعان على جانبي المركز وعلى مسافة c منه.

الشكل 5.13 هو شكل هندسي لقطع ناقص. حيث زودنا بنموذج للمدار الاهليلجي للكوكب. القطع الناقص يعرف رياضيا باختيار نقطتين F_1 وF_2 تدعى كل واحدة منهما بالبؤرة focus. بعد ذلك من خلال رسم المنحنى المنقط والذي يمثل مجموع المسافات r_1 وr_2 لـ F_1 وF_2، على التوالي وهو ثابت. المسافة الأطول بين المركز وحدود القطع الناقص (ويمر من كلا البؤرتين) تسمى المحور الرئيسي، هذه المسافة هي $2a$. في الشكل 5.13. يرسم المحور الرئيسي على طول الاتجاه السيني. المسافة a تدعى بنصف المحور الرئيسي.

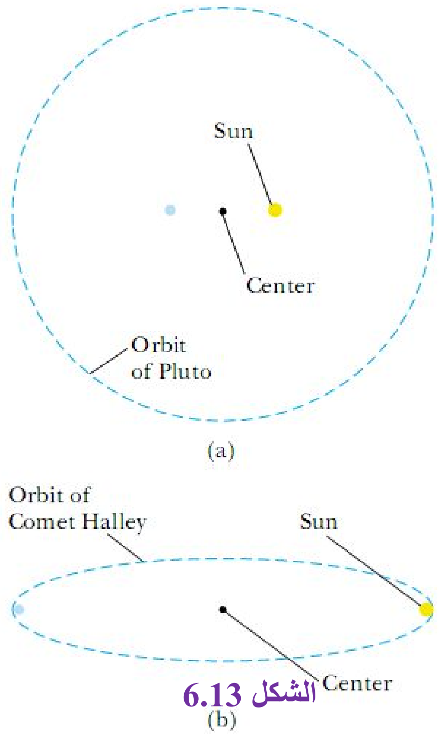
وبالمثل أيضا، المسافة الأقصر بين المركز وحدود القطع الناقص تسمى بالمحور الثانوي وهو $2b$. والمسافة b هي نصف المحور الثانوي. أما بؤرة القطع الناقص تقع على مسافة c من مركز القطع. حيث a^2 c^2+b^2. في المدار الاهليلجي للكوكب حول الشمس تكون الشمس في إحدى بؤرتي القطع الناقص. ولا يوجد أي شيء في البؤرة الأخرى.

إن الانحراف المركزي في القطع الناقص يعرف بـ $e = c/a$ ويرسم الشكل العام للقطع الناقص.

من اجل دائرة $c = 0$ فالانحراف المركزي يساوي الصفر. b هو الأصغر من a، بالتالي فإن القطع الناقص هو الأقصر في الاتجاه y مقارنة مع مداه في الاتجاه x كما في الشكل 5.13. عندما تتناقص b، تتزايد c، والانحراف المركزي e يتزايد. وهكذا فإن القيم العظمى للانحراف المركزي تتوافق مع القطوع الناقصة الأطول والأقل عرضا.

حيث أن نطاق قيم الانحراف المركزي للقطع الناقص هو: $0 < e < 1$.

إن الانحراف في مدارات الكواكب يتفاوت تفاوتا كبيرا بين كواكب المجموعة الشمسية، حيث يبلغ الانحراف المركزي لمدار الأرض 0.017 الذي يجعل منه شبه دائري، من ناحية أخرى يبلغ الانحراف المركزي لمدار بلوتو0.25 وهو الانحراف الأعلى في الكواكب التسعة. الشكل 6.13 a يظهر قطع ناقص مع الانحراف المركزي لمدار بلوتو. لاحظ أنه حتى عند أعلى درجة انحراف مركزي للمدار يكون من الصعب تمييزه عن الدائرة.



الشكل 6.13 (a) تمثل مدار بلوتو والذي يملك أعلى درجة انحراف مركزي $(e = 0.25)$ بين الكواكب في المجموعة الشمسية. الشمس تقع في النقطة الصفراء الكبيرة والتي هي بؤرة القطع الناقص والبؤرة الأخرى هي النقطة الزرقاء. (b) تمثل مدار مذنب هالي.

الشكل 6.13

فلهذا قانون كبلر الأول هو انجاز جدير بالإعجاب. إن الانحراف المركزي لمدار مذنب هالي هو 0.97، حيث إن مداره يوصف بمحور رئيسي أطول بكثير من المحور الثانوي كما في الشكل 6.13 b، ونتيجة لذلك فإن مذنب هالي يقضي فترة طويلة حوالي 76 سنة بعيدا عن الشمس وغير مرئي من الأرض. ويمكننا رؤيته بالعين المجردة في جزء صغير من مداره عندما يقترب من الشمس.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

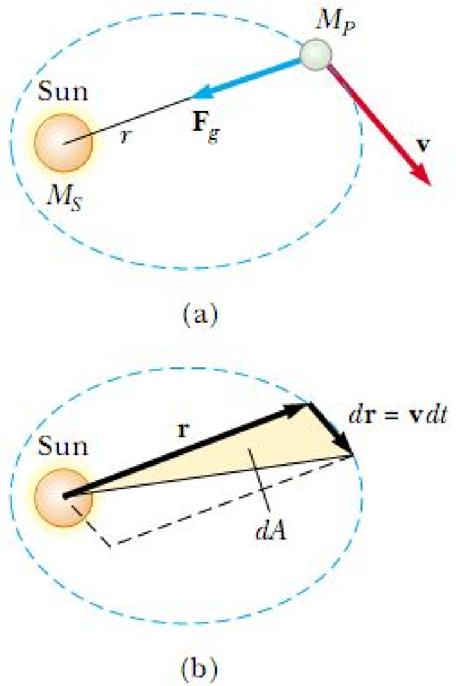
تخيل الآن كوكب في مدار اهليلجي كالذي تراه في الشكل 5.13، تقع الشمس في البؤرة F_2، عندما يكون الكوكب في أقصى اليسار من الرسم، والمسافة بين الكوكب والشمس هي $a + c$. **هذه النقطة تسمى الأوج** *aphelion*. حيث يكون الكوكب أبعد ما يمكن عن الشمس وضمن هذا المدار. (لجسم في مداره حول الأرض، تسمى هذه النقطة الأوج).

بالمقابل، عندما يكون الكوكب في أقصى الاتجاه العمودي من القطع الناقص، **تسمى هذه النقطة بالحضيض** *perihelion* (لمدار الأرض، الحضيض)، والمسافة بين الكوكب والشمس هي $a - c$.

قانون كبلر الأول هو نتيجة مباشرة لطبيعة التربيع العكسي في قوة الجاذبية، وقد ناقشنا المدارات الاهليلجية والدائرية. ووجدنا أن الأجسام على هذه الأشكال من المدارات لابد أن تكون مقيدة بمركز قوة الجاذبية. وتشمل هذه الأجسام الكواكب، الكويكبات، والمذنبات التي تتحرك مرارا حول الشمس، وكذلك الأقمار التي تدور حول الكوكب. كما يمكن أن يكون هناك أيضا أجسام غير مقيدة مثل نيزك قادم من أعماق الفضاء قد يمر من أمام الشمس لمرة واحدة ثم لا يعود أبدا. إن قوة الجاذبية بين الشمس وبين هذه الأجسام تتناسب أيضا عكسيا مع مربع المسافة بينهما، وتسير هذه الأجسام وفق طريقين يشملان: القطوع المكافئة $(e = 1)$ والقطوع الزائدة $(e > 1)$.

قانون كبلر الثاني

نستطيع أن نرى قانون كبلر الثاني كنتيجة لحفظ الاندفاع الزاوي على النحو التالي، نأخذ بعين الاعتبار كوكبا كتلته M_P ويتحرك حول الشمس في مدار اهليلجي كما في الشكل 7.13 a. دعنا نعتبر الكوكب كنظام. وسيكون نموذج الشمس ذو كتلة هائلة أكبر بكثير من كتلة الكوكب الأمر الذي يجعل من الشمس لا تتحرك. إن قوة الجاذبية التي تؤثر في الكوكب هي قوة مركزية، محمولة دائما على نصف القطر وباتجاه الشمس كما في الشكل 7.13 a. كما أن عزم الدوران للكوكب بسبب القوة المركزية من الواضح أنه صفر وذلك لأن F تنطبق على r إذا:



الشكل 7.13(a) قوة الجاذبية المؤثرة على الكوكب وباتجاه الشمس. (b) مدار الكوكب حول الشمس. نصف القطر يمسح خلال الزمن dt مساحة تساوي إلى نصف مساحة متوازي الأضلاع الذي بعداه r و $d\mathbf{r}$.$\mathbf{v}\,dt$.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(r)\hat{\mathbf{r}} = 0$$

نتذكر بأن عزم الدوران الخارجي للنظام يساوي إلى معدل تغير عزم الاندفاع للنظام مع الزمن أي:

$\tau = d\mathrm{L}/dt$، وبما أن $\tau = 0$ فإن عزم الاندفاع L للكوكب ثابت في الحركة:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = M_P\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{constant}$$

بوسعنا أن نرد هذه النتيجة إلى الاعتبار الهندسي التالي، في الفترة الزمنية dt يمسح نصف القطر في الشكل 7.13 b. مساحة dA، والذي يساوي نصف مساحة متوازي الأضلاع $|\mathrm{r} \times d\,\mathrm{r}|$ الذي بعداه r و dr. وبما أن إزاحة الكوكب خلال الفترة الزمنية dt تعطى بالعلاقة: $d\mathrm{r} = \mathrm{v}\,dt$

إذا أصبح لدينا:

$$dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}\,dt| = \frac{L}{2M_P}\,dt$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P} = \text{constant}} \qquad (13.7)$$

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

حيث أن كل من L و M_P ثابتين، وهكذا نستنتج أن نصف القطر بين الشمس والكوكب يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية. ومن المهم إدراك أن هذه النتيجة هي نتيجة لحقيقة أن قوة الجاذبية هي قوة مركزية وهذا بدوره يعني أن الاندفاع الزاوي للكوكب ثابت وبالتالي فإن القانون ينطبق على أي حالة تتضمن قوة مركزية، سواء كانت تربيع عكسي أم لا.

قانون كبلر الثالث

من المفيد أن نرى بأن قانون كبلر الثالث يمكن التنبؤ به من خلال قانون التربيع العكسي للمدارات الدائرية. بالنظر إلى كوكب كتلته M_P يفترض به الحركة حول الشمس (كتلتها M_S) في مدار دائري، كما في الشكل 8.13. وبما أن قوة الجاذبية تولد تسارعا مركزيا للكوكب المتحرك في مداره، نستخدم قانون نيوتن الثاني لجسيم في حركة دائرية منتظمة.

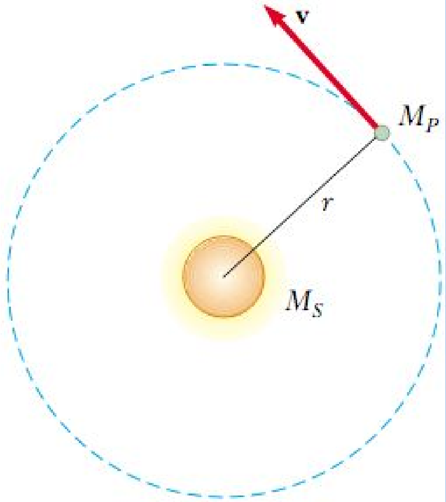
$$\frac{GM_SM_P}{r^2} = \frac{M_Pv^2}{r}$$

السرعة المدارية للكوكب هي $2\pi r/T$، حيث T هي الدور، بالتالي فالمعادلة السابقة تصبح:

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) r^3 = K_S r^3$$

حيث K_S ثابت يعطى بـ : $K_S = 4\pi^2/GM_S$



الشكل 8.13 كوكب كتلته M_P يتحرك في مدار دائري حول الشمس . ان مدارات جميع الكواكب عدا عطارد وبلوتو تقريبا دائرية.

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19}\ \mathrm{s^2/m^3}$$

Useful Planetary Data

Body	Mass (kg)	Mean Radius (m)	Period of Revolution (s)	Mean Distance from Sun (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s^2/m^3)
Mercury	3.18×10^{23}	2.43×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}	2.97×10^{-19}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Earth	5.98×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Mars	6.42×10^{23}	3.37×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Jupiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturn	5.68×10^{26}	5.85×10^7	9.35×10^8	1.43×10^{12}	2.99×10^{-19}
Uranus	8.68×10^{25}	2.33×10^7	2.64×10^9	2.87×10^{12}	2.95×10^{-19}
Neptune	1.03×10^{26}	2.21×10^7	5.22×10^9	4.50×10^{12}	2.99×10^{-19}
Pluto	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^6$	7.82×10^9	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Moon	7.36×10^{22}	1.74×10^6	—	—	—
Sun	1.991×10^{30}	6.96×10^8	—	—	—

الجدول 2.13 عبارة عن مجموعة معلومات كوكبية مفيدة، يحقق العمود الأخير T^2/r^3 نسبة ثابتة. إن الاختلافات الصغيرة في هذا العمود أدت إلى التشكيك في المعلومات المقاسة عن الدور ونصف المحور الرئيسي للكواكب.

هذه المعادلة صحيحة أيضا من أجل المدارات الاهليلجية إذا استبدلنا r بالمسافة a (نصف المحور الرئيسي) الشكل 5.13

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right) a^3 = K_S a^3 \qquad (13.8) \quad \text{Kepler's third law}$$

المعادلة 8.13 هي قانون كبلر الثالث، لأن نصف المحور الرئيسي للمدار الدائري هو نفسه نصف القطر، فالمعادلة 8.13 تصلح لكلا المدارين الدائري والإهليلجي. لاحظ أن ثابت التناسب K_S مستقل عن كتلة الكوكب بالتالي المعادلة 8.13 تصلح من لأي كوكب. إذا اعتبرنا مدار القمر الصناعي كالقمر حول الأرض، مع الانتباه أن الثابت سوف يأخذ قيما مختلفة عند استبدال كتلة الشمس بكتلة الأرض، وهو: $K_E = 4\pi^2/GM_E$

كشف عمل فلكي مؤخرا وجود عدد كبير من أجسام النظام الشمسي ما وراء مدار نبتون. عموما تكمن في نطاق *Kuiper*، وهي المنطقة التي تمتد من حوالي 30 AU (نصف قطر مدار نبتون) إلى 50 AU. (AU هي وحدة فلكية وهي نصف قطر مدار الأرض). تحدد التقديرات حاليا على الأقل 70 000 جسم في هذه المنطقة أقطارها أكبر من 100 km. أولها KBO (Kuiper Belt Object) اكتشف في عام 1992. منذ ذالك الوقت تم اكتشاف الكثير والبعض منها أعطي أسماء مثل Varuna (قطره حوالي 900–1 000 km، اكتشف في عام 2000)، Ixion (قطره حوالي 900–1 000 km، اكتشف عام 2001) و Quaoar (قطره حوالي 800 km، اكتشف عام 2002).

مجموعة فرعية حوالي 1 400 KBOs وتسمى "Plutinos" لأنها تشبه بلوتو. لنعرض خواص هذه الظاهرة، تدور مرتين حول الشمس في نفس الفترة الزمنية لدوران نبتون ثلاث مرات. حتى أن بعض الفلكين طالبوا بعدم اعتبار بلوتو كوكب بل يجب اعتباره كـ KBO. التطبيقات المعاصرة لقوانين كبلر ومثل هذه الاقتراحات الغريبة كاستبدال الاندفاع الزاوي الكوكبي وهجرة الكواكب كل ذلك يوحي إثارة مجال نشيط في البحوث الحالية.

سؤال للتفكير 4.13

بلوتو، الكوكب الأبعد عن الشمس، إن دور مداره يكون: (a) أكبر من سنة (b) أقل من سنة (c) يساوي سنة.

سؤال للتفكير 5.13

كويكب في مدار اهليلجي لا مركزي إلى حد كبير يدور حول الشمس، الدور لمدار هذا الكويكب هو 90 يوما. أي من البيانات التالية صحيحة حول إمكانية الاصطدام بين هذا الكويكب والأرض؟ (a) ليس هناك احتمال خطر في لتصادم (b) ليس هناك احتمالية تصادم (c) ليس هناك معلومات كافية تؤكد ما إذا كان التصادم خطر.

سؤال للتفكير 6.13

قمر صناعي يتحرك في مدار اهليلجي حول الأرض. مثلا عندما يكون في موقعي الحضيض والأو ج. يكون بعده عن مركز الأرض على الترتيب D و4D. بالتالي فإن العلاقة بين السرعتين في هذين الموقعين هي :

(a) $v_p = v_a$ (b) $v_p = 4v_a$ (c) $v_a = 4v_p$ (d) $v_p = 2v_a$ (e) $v_a = 2v_p$.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

مثال 4.13 كتلة الشمس

أحسب كتلة الشمس باستخدام الدور الحقيقي لمدار الأرض حول الشمس 3.156×10^{7} s، وبعدها عن الشمس 1.496×10^{11} m.

الحل: باستخدام العلاقة 8.13 نجد :

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1.496\times10^{11}\ \mathrm{m})^3}{(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(3.156\times10^{7}\ \mathrm{s})^2}$$

$$= \boxed{1.99\times10^{30}\ \mathrm{kg}}$$

في المثال 3.13، تمكنا من خلال فهمنا لقوى الجاذبية من معرفة بعض الشيء حول كثافة باطن الأرض والآن من خلال استخدامنا هذا الفهم أمكننا معرفة كتلة الشمس.

ماذا لو؟ افترض أنك سئلت عن كتلة المريخ. كيف يمكنك تحديد هذه القيمة؟

الاجابة

إن قانون كبلر الثالث يصلح في أي نظام للأجسام التي تدور حول جسم ذو كتلة كبيرة. المريخ يملك قمرين Phobos و Deimos. إذا نعيد كتابة العلاقة 13.8 من أجل أقمار المريخ،

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_M}\right)a^3$$

حيث M_M هي كتلة المريخ. بالتالي فالكتلة هي:

$$M_M = \left(\frac{4\pi^2}{G}\right)\frac{a^3}{T^2} = \left(\frac{4\pi^2}{6.67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}}\right)\frac{a^3}{T^2}$$
$$= (5.92\times10^{11}\ \mathrm{kg\cdot s^2/m^3})\frac{a^3}{T^2}$$

Phobos دوره المداري 0.32 days ومداره شبه دائري، نصف قطره 9 380 km.

و Deimos دوره المداري 1.26 days. ومداره أكثر دائرية، له نصف قطر 23 460 km.

دعنا نحسب كتلة المريخ باستخدام البيانات السابقة:

Phobos

$$M_M = (5.92\times10^{11}\ \mathrm{kg\cdot s^2/m^3}) \times\frac{(9.380\times10^6\ \mathrm{m})^3}{(0.32\ \mathrm{d})^2}\left(\frac{1\ \mathrm{d}}{86\ 400\ \mathrm{s}}\right)^2 = 6.39\times10^{23}\ \mathrm{kg}$$

Deimos

$$M_M = (5.92\times10^{11}\ \mathrm{kg\cdot s^2/m^3}) \times\frac{(2.346\times10^7\ \mathrm{m})^3}{(1.26\ \mathrm{d})^2}\left(\frac{1\ \mathrm{d}}{86\ 400\ \mathrm{s}}\right)^2 = 6.45\times10^{23}\ \mathrm{kg}$$

هذان الحسابان يختلفان في حدود 1% مع بعضهما البعض وكلاهما يختلفان 0.5% مع قيمة كتلة المريخ المعطاة في الجدول 2.13.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

مثال 5.13 قمر صناعي متزامن مع الأرض

اعتبر قمر صناعي كتلته m يتحرك في مدار دائري حول الأرض بسرعة ثابتة v وارتفاع h فوق سطح الأرض. كما هو مبين في الشكل 13.9.

(A) أحسب سرعة القمر الصناعي باعتبار G، h ، R_E (نصف قطر الأرض)، وM_E (كتلة الأرض).

الحل: مغزى الحل من خلال تصور حركة القمر الصناعي حول الأرض في مدار دائري تحت تأثير قوة الجاذبية. يجب أن يملك القمر الصناعي تسارع مركزي، وهكذا فإن حل هذه المشكلة يتضمن قانون نيوتن الثاني وقانون الجاذبية العالمي والحركة الدائرية. لتحليل المشكلة، نلاحظ أن قوة الجاذبية هي القوة الخارجية الوحيدة التي تؤثر في القمر الصناعي، والتي تتجه نحو مركز الأرض وتحافظ على القمر الصناعي في مداره الدائري، وبالتالي محصلة القوى على القمر الصناعي هي قوة الجاذبية

$$F_r = F_g = G\frac{M_E m}{r^2}$$

من قانون نيوتن الثاني وحقيقة أن تسارع القمر الصناعي هو تسارع مركزي، نجد:

$$G\frac{M_E m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

نكتب علاقة السرعة v مع الانتباه الى أن المسافة r بين مركز الأرض والقمر الصناعي هي $r = R_E + h$، نحصل على :

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} = \boxed{\sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}} \qquad (1)$$

(B) إذا كان قمر صناعي متزامن مع الأرض (أي أنه يبقى ظاهرا فوق محطة أرضية ثابتة)، ما هي سرعة تحركه في الفضاء؟

الحل: لكي يبقى ظاهرا فوق محطة ثابتة على الأرض، فإن دور القمر الصناعي يجب أن يكون 24 h وأن يدور القمر الصناعي مباشرة فوق خط الاستواء. ومن أجل قانون كبلر الثالث (العلاقة 13.8) حيث : $a = r$ و $M_S \rightarrow M_E$، يمكننا أن نجد نصف قطر المدار:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_E}\right) r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}}$$

نعوض بالقيم العددية حيث أن الدور هو: $T = 24\text{ h} = 86\,400\text{ s}$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})(86\,400\ \text{s})^2}{4\pi^2}}$$

$$= 4.23 \times 10^7\ \text{m}$$

نوجد سرعة القمر الصناعي باستخدام العلاقة (1):

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}}$$

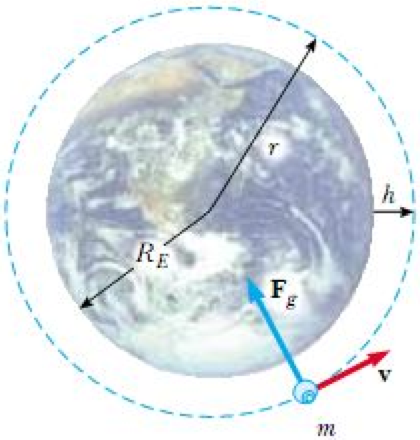
$$= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{4.23 \times 10^{7}\ \mathrm{m}}}$$

$$= \boxed{3.07 \times 10^{3}\ \mathrm{m/s}}$$

لننهي هذه المشكلة، إنه من الممتع ملاحظة أن قيمة r المحسوبة هنا تترجم إلى ارتفاع القمر الصناعي فوق سطح الأرض والذي يبلغ حوالي 36 000 km

وهكذا فإن الأقمار الصناعية المتزامنة مع الأرض لها فائدة السماح للهوائيات الثابتة أن تكون موجهة باتجاه ثابت، لكن ثمة هناك خلل في الإشارات بين الأرض والقمر الصناعي بسبب الانتقال لمسافة طويلة.. كما أنه من الصعب استخدام الأقمار الصناعية المتزامنة مع الأرض في المشاهدة البصرية لسطح الأرض وذلك بسبب ارتفاعها العالي.

ماذا لو؟ ماذا لوكانت حركة القمر الصناعي في الجزء (A) تأخذ مكانا على الارتفاع h فوق سطح كوكب آخر أكبر كتلة من الأرض، لكن له نفس نصف القطر؟ هل ستكون حركة القمر الصناعي بسرعة أكبر أو أقل مقارنة مع حركته حول الأرض؟



الشكل 9.13 (مثال 9.13) قمر صناعي كتلته m يتحرك حول الأرض في مدار دائري نصف قطره r وبسرعة ثابتة v. القوة الوحيدة المؤثرة في القمر الصناعي هي قوة الجاذبية F_g

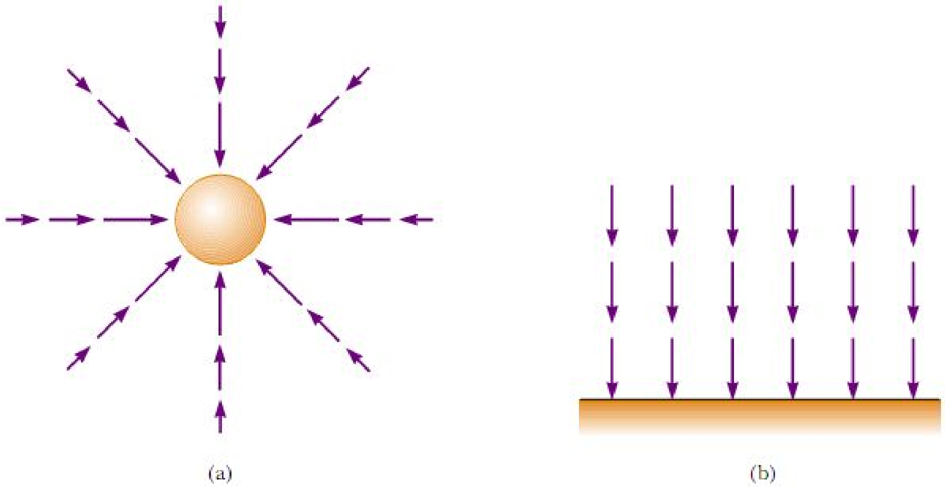
الإجابة الكوكب يجذب القمر الصناعي باتجاهه بقوة جاذبية أكبر وذلك بسبب كتلته الأكبر، بالتالي فالقمر الصناعي عليه التحرك بسرعة أكبر لتجنب جذبه باتجاه السطح. وهذا يتناسب مع تنبؤات العلاقة (1). والتي تدل على أن السرعة v تتناسب مع الجذر التربيعي لكتلة الكوكب، أي بزيادة الكتلة تزداد السرعة أيضا.

13.5 مجال الجاذبية The Gravitational Field

عندما نشر نيوتن نظريته في الجاذبية الكونية، اعتبرت ناجحة لأنها وضحت بشكل مرضي حركة الكواكب. فمنذ عام 1687 استخدمت نفس النظرية في حساب حركات المذنبات، الانحراف في ميزان كافندش. مدارات النجوم الثنائية، ودوران المجرات. وبالرغم من ذلك فإن كل من معاصرو نيوتن وخلفاؤه وجدوا صعوبة في تقبل مفهوم تلك القوة المتبادلة على مسافة كما هو مذكور في قسم 1.5. تساءلوا كيف من الممكن لجسمين أن يتجاذبا مع بعضهما البعض دون أن يكون هناك اتصال فيما بينهما. **نيوتن نفسه لم يستطع الإجابة على هذا السؤال.**

إن النظرة إلى وصف التفاعلات بين الأجسام التي لا تكون على اتصال فيما بينها جاءت بعد وفاة نيوتن بفترة طويلة، ولقد أمكننا النظر إلى التفاعلات الجاذبية بطرق مختلفة، وذلك باستخدام مفهوم حقل الجاذبية المتواجد في كل نقاط الفضاء. عندما يوضع جسم كتلته m في نقطة يكون حقل الجاذبية عندها g، فإن الجسم يخضع لقوة $F_g = mg$. وبكلمة أخرى، الحقل يمارس قوة على الجسم. حقل الجاذبية g يعرف بـ:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} \qquad (13.9)$$



الشكل 10.13 (a) متجهات حقل الجاذبية جوار كتلة كروية متجانسة كالأرض تختلف في كلا الاتجاه والمقدار، ومتجهات نقطة هي باتجاه تسارع الأجسام المختبرة فيما لو وضعت في الحقل.أي أن مقدار متجه الحقل في أي موضع هو مقدار تسارع السقوط الحر في ذلك الموضع. (b) متجهات حقل الجاذبية في منطقة صغيرة قرب سطح الأرض تكون موحدة في كلا الاتجاه والمقدار.

بالتالي يكون حقل الجاذبية في نقطة من الفضاء مساويا لقوة الجاذبية المختبرة لجسيم اختبار موضوع في تلك النقطة المقسمة بواسطة الكتلة إلى جسيم اختبار. لاحظ بأن الوجود لجسيمات الاختبار ليس ضروري من أجل الحقل الواقعي – الأرض تولد حقل الجاذبية.

نسمي الجسم المولد للحقل بجسيم منبع *source particle*. (مع أن الأرض بشكل واضح ليست جسيم، انه من الممكن أن نرى بشكل تقريبي الأرض كجسيم بهدف إيجاد حقل الجاذبية المتولد) يمكننا الكشف عن وجود الحقل وقياس قوته من خلال وضع جسيمة اختبار في الحقل وملاحظة القوة المؤثرة عليه

على الرغم من أن قوة الجاذبية هي في جوهرها تفاعل بين جسمين، فإن مفهوم حقل الجاذبية يسمح لنا بـ "شغل خارج الكتلة لأحد الأجسام. في الحقيقة نصف التأثير لأي جسم (في هذه الحالة، الأرض) على الفضاء الفارغ حول نفسه من ناحية القوة التي ستكون موجودة إذا وجد جسم ثاني في مكان ما من هذا الفضاء.

كمثال عن مفهوم الحقل، اعتبر جسم كتلته m بالقرب من سطح الأرض. وبما أن قوة الجاذبية تؤثر على الجسم بمقدار GM_Em/r^2 (أنظر العلاقة 4.13)، فإن الحقل g على المسافة r عن مركز الأرض هو :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\frac{GM_E}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (13.10)$$

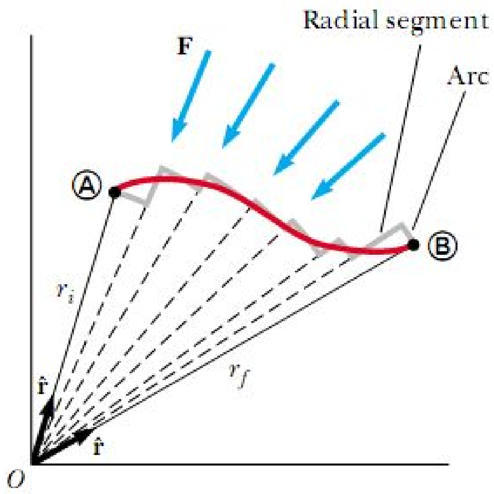
حيث r^ هو متجه الواحدة ويمثل بشعاع خارج من الأرض والإشارة السالبة تدل على أن الحقل باتجاه مركز الأرض. كما هو موضح في الشكل 10.13 a. لاحظ أن متجهات الحقل في نقاط مختلفة تحيط بالأرض تختلف في المقدار والاتجاه. في منطقة صغيرة قرب سطح الأرض، حقل الجاذبية يكون ثابت وموحد تقريبا، كما في الشكل 10.13 b.

العلاقة 10.13 صحيحة في كل النقاط خارج سطح الأرض على افتراض أن الأرض كروية. على سطح الأرض، حيث $r = R_E$، وقيمة عجلة الجاذبية الأرضية g يملك قيمة 9.80 N/kg (إن الواحدة N/kg هي نفسها m/s^2).

13.6 الطاقة وضع الجاذبية الأرضية Gravitational Potential Energy

لقد قدمنا في الفصل الثامن مفهوم طاقة الوضع، والتي هي الطاقة المتعلقة بتكوين النظام للأجسام المتفاعلة بواسطة قوة الجاذبية. كما أكدنا على أن وظيفة الطاقة الكامنة الثقالية mgy في النظام مكون من جسم والأرض صالحة فقط عندما يكون الجسيم قرب سطح الأرض، حيث طاقة الجاذبية تكون ثابتة. ولأن قوة الجاذبية بين جسيمين تتناسب مع $1/r^2$ نتوقع وظيفة أكثر عمومية للطاقة الكامنة إحداها تكون صالحة خارج مجال التقييد قرب سطح الأرض – وستكون مختلفة بشكل واضح عن $U = mgy$.

قبل حسابنا المعادلة العامة لطاقة الوضع، دعنا أولا نؤكد على أن **قوة الجاذبية محفوظة**.(بالرجوع إلى القسم 3.8 نجد أن القوة تكون محافظة إذا كان الشغل المطبق على جسم يتحرك بين نقطتين، مستقلا عن المسار الذي يسلكه الجسم). وتحقيقا لذلك، علينا أن نلاحظ أولا أن قوة الجاذبية قوة مركزية، وبحكم تعريف، القوة المركزية هي أي قوة تكون موجهة على طول خط شعاعي نحو مركز ثابت، وقيمتها تعتمد فقط على الإحداثي الشعاعي نصف القطر r. لذلك فالقوة المركزية يمكننا تمثيلها بواسطة $\boldsymbol{F(r)\hat{r}}$، حيث $\hat{r}$ هي متجهة الوحدة الموجهة من منشأها إلى الجسيم. كما هو واضح في الشكل 11.13.



الشكل 11.13 جسيم يتحرك من A إلى B،ويتأثر بقوة مركزية، F، التي تكون موجهة شعاعيا، المسار مقسم إلى سلسلة قطع ومنحنيات شعاعيه. بالتالي الشغل المبذول على طول المنحني معدوم، الشغل المبذول مستقل عن المسار ويعتمد على الوضعين البدائي والنهائي فقط r_f و r_i.

بالنظر إلى قوة مركزية تؤثر على جسيم يتحرك على طول المسار العام من A إلى B كما في الشكل 11.13. المسار من A إلى B يمكن أن يقرب إلى مجموعة من الخطوات المتسلسلة. في الشكل 11.13، نقسم المسار إلى مدرجات صغيرة ونوصلها بنقطة الأصل، والتي نراها كخطوط منقطة في الشكل. الحدود الخارجية لمجموعة الخطوط هي المسار المكون من الخط الشعاعي الصغير المقسم والمنحني (رمادي اللون في الشكل). نحدد أبعاد طول نصف القطر لكل خط مثل ذلك المنحني القصير لنهايته. ثم يمكننا الاقتراب من المسار الحقيقي مع سلسلة من الحركات المتعرجة التي تتناوب بين الحركة على طول المنحني والحركة على طول الخط الشعاعي.

إذا بالتعريف، القوة المركزية تكون دائما باتجاه طول إحدى القطع الشعاعية. بالتالي فالشغل المبذول من قبل F على طول قطعة شعاعية هو:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r)\ dr$$

بالتعريف، الشغل المبذول بواسطة قوة عمودية على المسار يكون معدوما. لذلك يكون الشغل المبذول على طول أي منحني يكون معدوماً لأن F عمودية على طول المسار لهذه القطع. بالتالي، الشغل الكلي المبذول من قبل القوة F هو مجموع الشغل على طول القطع الشعاعية:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r)\ dr$$

حيث اللاحقتان i و f تشيران إلى الوضعين البدائي والنهائي. لأن التكامل يتعلق فقط بمواقع نصف القطر. هذا التكامل يعتمد فقط القيم البدائية والنهائية لــ r. بالتالي الشغل المبذول يكون نفسه على أي طريق من A إلى B. لأن الشغل المبذول مستقل عن المسار ويعتمد فقط على النقاط النهائية. والآن توصلنا إلى أن أي **قوة مركزية تكون محافظة**. نحن الآن نعلم بأن شغل المبذول يمكنه في أي وقت أن يأخذ شكل قوة مركزية محددة.

بالرجوع إلى شكل العلاقة 15.8 نجد أن التغير في طاقة الوضع المتعلقة بنظام نتيجة إعطاء إزاحة لجزء في النظام يعرف بشغل سالب من قبل قوة الجاذبية على الجزء خلال الإزاحة.

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{r_i}^{r_f} F(r)\ dr \qquad (13.11)$$

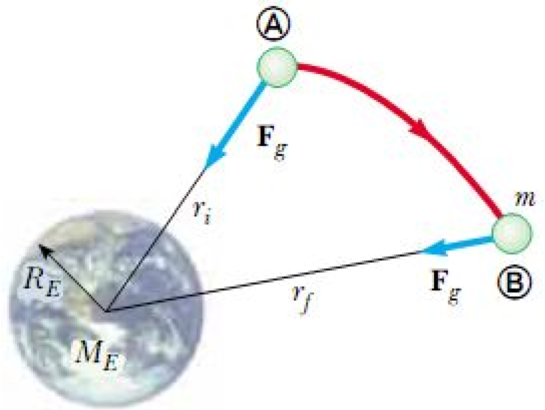
يمكننا استخدام هذه النتيجة لتقدير طاقة الوضع. نفرض جسيم كتلته m يتحرك بين نقطتين A وB "فوق سطح الأرض" (شكل 13.12). الجسيم يخضع لقوة جاذبية تعطى بالعلاقة 1.13، يمكننا أن نعبر عن هذه القوة بـ:

$$F(r) = -\frac{GM_E m}{r^2}$$

تشير الإشارة السالبة إلى أن القوة هي قوة جاذبة. الآن بتعويض هذه العلاقة لـ $F(r)$ بالعلاقة 11.13، يمكننا حساب التغير في طاقة الوضع:

$$U_f - U_i = GM_E m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_E m \left[-\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) \qquad (13.12)$$



الشكل 12.13 جسيم كتلته m يتحرك من A إلى B فوق سطح الأرض، نعبر عن تغير الطاقة الكامنة الثقالية كما في المعادلة 11.13

دائما، يكون اختيار شكل الإشارة من أجل طاقة الوضع هو اختيار كيفي، فإنه كما جرت العادة من أجل اختيار شكل الإشارة لطاقة الوضع صفر تكون هي نفسها تماما من أجل القوة صفر، لنأخذ:

$U_i = 0$ و $r_i = \infty$

فنحصل على النتيجة المهمة التالية:

$$U(r) = -\frac{GM_E m}{r} \qquad (13.13)$$

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

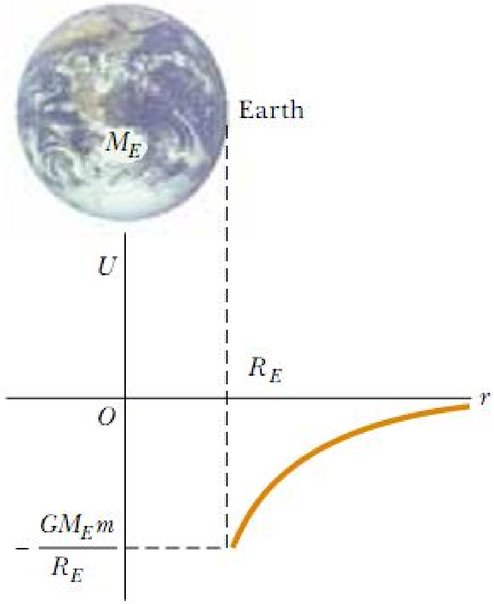
هذه المعادلة تنطبق على نظام جسيم – أرض حيث الجسيم يبتعد عن مركز الأرض مسافة r، بشرط أن يكون $r => R_E$. النتيجة ليست صالحة من أجل جسيمات داخل الأرض، حيث $r < R_E$. لأنه من أجل اختيارنا لـ U_i، تكون قيمة U دائما سالبة (الشكل 13.13).

على الرغم من أن العلاقة (13.13) مستمدة من نظام جسيم – أرض، إلا أنه يمكن تطبيقها على أي جسيمين لذلك فإن طاقة الوضع المرتبطة بأي زوج من الجسيمات كتلها m_1 و m_2 وبينهما مسافة r هي:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad (13.14)$$

نرى من خلال هذه العلاقة أن طاقة الوضع لزوج من الجسيمات تتناسب مع $1/r$، بينما القوة بينهما تتناسب مع $1/r^2$. علاوة على ذلك تكون طاقة الوضع سالبة لأن القوة تجاذبية وتأخذ طاقة الوضع قيمة معدومة عندما يكون الجسيم في اللانهاية. ولأن القوة بين الجسيمات تجاذبيه، نقول أن العامل الخارجي يجب أن ينجز شغلا موجبا حتى يزيد المسافة فيما بينها. فالشغل الذي يبذله العامل الخارجي ينتج زيادة في طاقة وضع الجسيمان المتباعدين. بذلك تصبح U أقل سالبية بزيادة r.

عندما يكون جسيمان ساكنان يبتعدان عن بعضهما مسافة r، الشغل الخارجي يلزمه طاقة تساوي على الأقل $+Gm_1m_2/r$ لكي تبتعد الجسيمات عن بعضها مسافة لانهائية. لذلك من الأفضل أن نفكر في القيمة المطلقة للطاقة الكامنة **كطاقة ترابط** *binding energy* في النظام. إذا كان العمل الخارجي يزودنا بطاقة أكبر من طاقة الترابط، فالطاقة الفائضة في النظام ستتحول إلى طاقة حركية للجسيمات عندما تبتعد الجسيمات عن بعضها مسافة لانهائية.

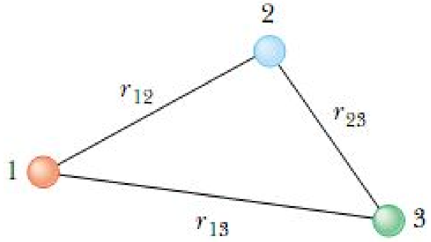


الشكل 13.13 في الصورة نجد طاقة الوضع u تقابل r من أجل جسم فوق سطح الأرض. طاقة الوضع تؤول إلى الصفر عندما r تؤول إلى اللانهاية.

يمكننا تعميم هذا المفهوم على ثلاث جسيمات أو أكثر، في هذه الحالة فإن طاقة الوضع الكلية للنظام هي المجموع لكل أزواج الجسيمات، كل زوج ساهم لفترة يعطى بالمعادلة 14.13. على سبيل المثال، إذا كان لدينا نظام يحوي ثلاث جسيمات، كما في الشكل 14.13، نجد أن:

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) \qquad (13.15)$$

القيمة المطلقة لـ U_{total} تمثل العمل اللازم لفصل الجسيمات مسافة لانهائية.



الشكل 14.13 ثلاث جسيمات متجاذبة

مثال 6.13 التغير في طاقة الوضع

جسيم كتلته m انتقل عموديا مسافة صغيرة Δy قرب سطح الأرض. بين في هذه الحالة أن التعريف العام لطاقة الوضع المعطى بالعلاقة 12.13 يؤول إلى العلاقة المعروفة: $\Delta U = mg.\,\Delta y$.

الحل: يمكننا كتابة المعادلة 12.13 بالشكل:

$$\Delta U = -GM_E m\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right) = GM_E m\left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f}\right)$$

إذا كان الموقعين البدائي والنهائي قريبين من الأرض فإن $r_i - r_f = \Delta y$ و $r_i\, r_f$ R_E^2 (بالرجوع إلى r المقاسة من مركز الأرض) بناء على ذلك فإن التغير في طاقة الوضع يصبح:

$$\Delta U \approx \frac{GM_E m}{R_E{}^2}\Delta y = mg\,\Delta y$$

حيث استخدمنا حقيقة أن

$g = GM_E / R_E^2$ (Eq. 13.5)

تذكر أن نوع الإشارة يكون اختياريا لأن التغير في الطاقة الكامنة يكون ذو معنى.

ماذا لو؟ افرض أنه طلب منك إجراء دراسة عن سطح الغلاف الجوي وسألك المشرف عن أعلى ارتفاع في الغلاف الجوي للأرض حيث شكل المعادلة $U = mg\,\Delta y$ يعطي خطأ 1.0% في تغير طاقة الوضع. فما هو هذا الارتفاع؟

الإجابة: بما أن شكل المعادلة يعطي قيمة ثابتة من أجل g، سوف نعطي قيمة لـــ U أكبر من القيمة المعطاة في المعادلة العامة، العلاقة 12.13، إن خطأ 1.0% سنصفه بالنسبة:

$$\frac{\Delta U_{\text{surface}}}{\Delta U_{\text{general}}} = 1.010$$

بتعويض تغيرات ΔU في هذه العلاقة نجد:

$$\frac{mg\,\Delta y}{GM_E m(\Delta y/r_i r_f)} = \frac{g r_i r_f}{GM_E} = 1.010$$

حيث $r_i = R_E$، و $r_f = R_E + \Delta y$ وبتعويض g من المعادلة 5.13 نجد:

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

$$\frac{(GM_E/R_E^2)R_E(R_E+\Delta y)}{GM_E}=\frac{R_E+\Delta y}{R_E}=1+\frac{\Delta y}{R_E}=1.010$$

وبالتالي:

$$\Delta y = 0.010R_E = 0.010(6.37\times10^6\ \mathrm{m})$$
$$= 6.37\times10^4\ \mathrm{m} = 63.7\ \mathrm{km}$$

7.13 اعتبارات الطاقة في الكواكب وحركة القمر الصناعي

نعتبر جسما كتلته m يتحرك بسرعة v بجوار جسم هائل كتلته M، حيث $m << M$. هذا النظام قد يكون كوكب يتحرك حول الشمس، قمر صناعي في مداره حول الأرض، أو مذنب حلق قديما بجوار الشمس. نفرض أن الجسم ذو الكتلة M ساكن في إطار مرجعي، فتكون الطاقة الميكانيكية الكلية E لنظام الجسمين عندما تبتعد عن بعضها مسافة r هي مجموع الطاقة الحركية للجسم ذو الكتلة m وطاقة وضع النظام، المعطاة بالعلاقة 14.13.

$$E = K + U$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r} \qquad (13.16)$$

نرى من خلال هذه المعادلة أن E قد تكون موجبة أو سالبة أو معدومة، يتوقف ذلك على قيمة v.على أية حال من أجل نظام محدد كنظام أرض-شمس، ستكون E بالضرورة أقل من الصفر، لأننا اتفقنا على أنه عندما $U \to 0$ فإن $r \to \infty$.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

نستطيع أن نثبت بسهولة أن $E < 0$ من أجل نظام يتألف من جسم كتلته m يتحرك في مدار دائري حول جسم ذو كتلة $M \gg m$ (شكل 15.13) بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم ذو الكتلة m نجد:

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

نضرب الطرفين بـ r ونقسم على 2 فنجد:

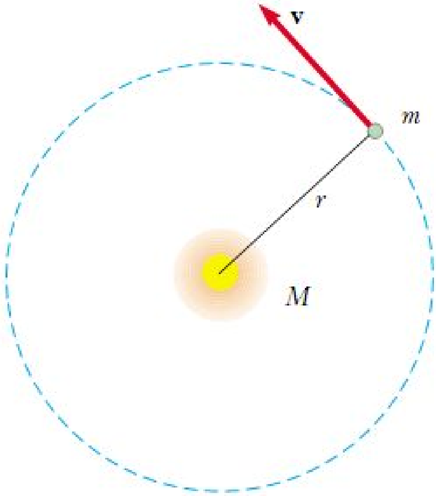
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \qquad (13.17)$$

نعوض في العلاقة 16.13 فنحصل على :

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r}} \qquad \text{(circular orbits)} \qquad (13.18)$$

هذه النتيجة تبين بوضوح أن الطاقة الميكانيكية الكلية تكون سالبة في حالة المدارات الدائرية. علما أن الطاقة الحركية موجبة وتساوي نصف القيمة المطلقة للطاقة الكامنة. القيمة المطلقة لـ E تساوي أيضا طاقة الترابط للنظام، لأن هذا المقدار من الطاقة يجب أن يقدم للنظام لتحريك الجسمان عن بعضهما مسافة لانهائية.



شكل 15.13

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

الطاقة الميكانيكية الكلية تكون أيضا سالبة في حالة المدارات الإهليلجية. العلاقة من أجل E للمدارات الاهليلجية هي نفسها العلاقة 18.13 مع استبدال r بطول نصف المحور الرئيسي *a*

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad \text{(elliptical orbits)} \qquad (13.19)$$

علاوة على ذلك، فالطاقة الكلية ثابتة إذا فرضنا أن النظام معزول.لذلك من اجل جسم كتلته m يتحرك من A إلى B كما في الشكل 12.13، الطاقة الكلية تبقى ثابتة و المعادلة 16.13 تعطي :

$$E = \frac{1}{2}m{v_i}^2 - \frac{GMm}{r_i} = \frac{1}{2}m{v_f}^2 - \frac{GMm}{r_f} \qquad (13.20)$$

نرى أن كلا من الطاقة الكلية والاندفاع الزاوي الكلي للترابط التجاذبي لنظام جسمين تكونان ثابتتين أثناء الحركة.

سؤال للتفكير 7.13

مذنب يتحرك في مدار اهليلجي حول الشمس. أي نقطة في المدار (الحضيض الشمسي، الأو ج) تمثل القيمة الأعلى لـ: 1- سرعة المذنب 2- الطاقة الكامنة للمذنب 3- الطاقة الحركية للمذنب 4-الطاقة الكلية لنظام مذنب-شمس؟

مثال 7.13 تغير مدار القمر الصناعي

أطلق المكوك الفضائي 470-kg قمر اتصالات عندما كان على ارتفاع 280 km فوق سطح الأرض. يغذي المحرك الصاروخي القمر الصناعي ليكون في مدار متزامن مع الأرض، أي ليبقى القمر الصناعي مباشرة فوق محطة أرضية محددة. كم من الطاقة يحتاجها المحرك لتوفير ذلك؟

الحل: نحسب أولا نصف القطر الرئيسي (وليس الارتفاع فوق سطح الأرض) لمدار القمر الصناعي عندما يكون محمولا في المكوك، هذا ببساطة:

$$R_E + 280 \text{ km} = 6.65 \times 10^6 \text{ m} = r_i$$

في المثال 5.13 وجدنا أن نصف قطر المدار للقمر الصناعي المتزامن مع الأرض هو $r_f = 4.23 \times 10^7$ m. وبتطبيق العلاقة 18.13 يمكننا أن نجد من أجل الطاقة البدائية و النهائية

$$E_i = -\frac{GM_E m}{2r_i} \qquad E_f = -\frac{GM_E m}{2r_f}$$

الطاقة المطلوبة لرفع القمر الصناعي :

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_E m}{2}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})(470\ \mathrm{kg})}{2}$$

$$\times \left(\frac{1}{4.23 \times 10^{7}\ \mathrm{m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^{6}\ \mathrm{m}}\right)$$

$$= \boxed{1.19 \times 10^{10}\ \mathrm{J}}$$

وهذه الطاقة تعادل 89 غالونا من البنزين. مهندسو ناسا عليهم حساب التغير في كتلة المركبة الفضائية آخذين بالاعتبار انبثاق احتراق الوقود، بعض الأشياء لم نفعلها هنا. **هل تتوقع حساب محتوى تأثير التغير في الكتلة على إنتاج أكبر أو أقل كمية من الطاقة اللازمة للمحرك؟**

إذا رغبنا في تحديد كيف تتوزع الطاقة بعد تشغيل المحرك، سنجد من أجل المعادلة 17.13 ن التغير في الطاقة الحركية هو (تناقص) ويقابلها تغير في الطاقة الكامنة هو : $\Delta K = (GM_E m/2)(1/r_f - 1/r_i) = -1.19 \times 10^{10}$ J (تزايد)، وهكذا فإن التغير في طاقة المدار للنظام

$$\Delta U = -GM_E m(1/r_f - 1/r_i) = 2.38 \times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

كما حسبناها قبل الآن. $\Delta E = \Delta K + \Delta U = 1.19 \times 10^{10}$ J

إن تشغيل المحرك سبب تحويل الطاقة الكيميائية الكامنة إلى طاقة مدارية للنظام. لأن الزيادة في طاقة الوضع يرافقه نقصان في الطاقة الحركية، نخلص إلى أن السرعة المدارية للقمر الصناعي تتناقص بزيادة الارتفاع.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

سرعة الإفلات Escape Speed

بفرض لدينا جسم كتلته m قذف لأعلى عموديا على سطح الأرض بسرعة ابتدائية v_i، كما هو مبين بالشكل 16.13. يمكننا استخدام اعتبارات الطاقة لإيجاد أدنى قيمة للسرعة الابتدائية يحتاجها الجسم مسافة لانهائية بعيدا عن الأرض. العلاقة 16.13 تعطينا الطاقة الكلية للنظام في أي نقطة. على سطح الأرض v v_i و $r = r_i = R_E$. وعندما يصل الجسم إلى أعلى ارتفاع $v = v_f = 0$ و $r = r_f = r_{\max}$.

بما أن الطاقة الكلية للنظام ثابتة، نعوض هذه الشروط في المعادلة 20.13 فنجد:

$$\frac{1}{2} m v_i^{2} - \frac{G M_E m}{R_E} = - \frac{G M_E m}{r_{\max}}$$

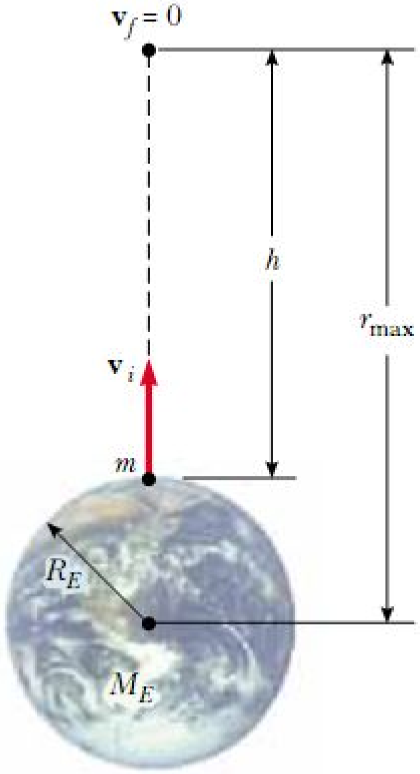
وبالتالي تعطى v_i^2 بـ:

$$v_i^{2} = 2 G M_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_{\max}} \right) \qquad (13.21)$$

لذلك بما أن السرعة الابتدائية معروفة فإنه يمكننا استخدام هذه العلاقة لحساب أعلى ارتفاع h لأننا نعلم أن:

$$\boldsymbol{h = r_{\max} - R_E}$$

نحن الآن يمكننا حساب سرعة الإفلات، التي هي أصغر سرعة يجب أن يملكها الجسم على سطح الأرض حتى يبتعد بشكل نهائي عن الأرض. الانتقال بهذه السرعة الدنيا، الجسم يواصل حركته بعيدا جدا عن الأرض التي سرعتها بشكل تقريبي معدومة.



شكل 16.13

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

بالتالي: $r_{max} \to \infty$ نعوض في العلاقة 21.13 ونأخذ $v_i = v_{esc}$ فنجد:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (13.22)$$

لاحظ أن علاقة v_{esc} مستقلة عن كتلة الجسم، بكلمات أخرى، المركبة الفضائية لها نفس سرعة الإفلات لجزيء. علاوة على ذلك فالنتيجة مستقلة أيضا عن اتجاه السرعة وبإهمال مقاومة الهواء.

إذا أعطي جسم سرعة ابتدائية تساوي v_{esc} فالطاقة الكلية للنظام تساوي الصفر. ويمكننا ملاحظة ذلك عندما $r \to \infty$ فالطاقة الحركية والطاقة الكامنة للجسم في النظام كلاهما معدومة. إذا كانت v_i أكبر من v_{esc}، فإن الطاقة الكلية للنظام أكبر من الصفر والجسم يملك بعض الطاقة الحركية المتبقية $r \to \infty$.

مثال 8.13 سرعة الإفلات لصاروخ

أحسب سرعة الإفلات من الأرض لمركبة فضائية وزنها 5000-kg، وحدد الطاقة الحركية التي يجب أن تملكها على سطح الأرض لتتحرك لانهائيا بعيدا جدا عن الأرض.

الحل: باستخدام العلاقة 22.13 المعطاة بـــ:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5.98 \times 10^{24}\ \mathrm{kg})}{6.37 \times 10^6\ \mathrm{m}}}$$

$$= \boxed{1.12 \times 10^4\ \mathrm{m/s}}$$

ويقابل ذلك حوالي 25 000 mi/h.

الطاقة الحركية للمركبة الفضائية هي:

$$K = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = \frac{1}{2}(5.00 \times 10^3\ \mathrm{kg})(1.12 \times 10^4\ \mathrm{m/s})^2$$

$$= \boxed{3.14 \times 10^{11}\ \mathrm{J}}$$

هذا يكافئ حوالي 2 300 غالون من البنزين.

ماذا لو؟ أردنا إطلاق مركبة فضائية 1000-kg بسرعة الإفلات؟ ما هي الطاقة المطلوبة لذلك؟

الجواب: من المعادلة 22.13، كتلة الجسم المتحرك ليس لها علاقة بسرعة الإفلات، لذلك فسرعة الإفلات من أجل مركبة فضائية 1000-kg هي نفسها من أجل مركبة فضائية 5000-kg. التغير يكون فقط في الطاقة الحركية التي تسببها الكتلة، أي أن المركبة الفضائية 1000-kg تتطلب خمس طاقة المركبة الفضائية 5000-kg.

$$K = \frac{1}{5}(3.14 \times 10^{11}\ \mathrm{J}) = 6.28 \times 10^{10}\ \mathrm{J}$$

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

يمكن تطبيق المعادلات 21.13 و 22.13 على الأجسام المتعلقة بأي كوكب. إنه بشكل عام، سرعة الإفلات من سطح أي كوكب كتلته M ونصف قطره R هي:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (13.23)$$

سرعات الإفلات للكواكب، القمر، والشمس موجودة في الجدول 3.13.

نلاحظ أن القيم تختلف من أجل 1.1 km/s for لبلوتوإلى حوالي 618 km/s من أجل الشمس. هذه النتيجة إلى جانب بعض الأفكار من أجل النظرية الحركية للغازات (أنظر الفصل 21)، تفسر سبب وجود غلاف جوي لبعض الكواكب والبعض الآخر ليس لها.

كما أننا سنرى لاحقا أن الطاقة الحركية لجزيء غاز عند درجة حرارة محددة تعتمد فقط على كتلة الجزيء. الجزيئات الأخف مثل الهيدروجين والهليوم، لها معدل سرعة أعلى من الجزيئات الثقيلة في نفس درجة الحرارة. عندما يكون معدل سرعة الجزيئات الأخف ليس أقل بكثير من سرعة الإفلات من الكوكب، فجزء كبير منهم يملك فرصة للإفلات.

هذه الآلية تفسر لماذا لا تحتفظ الأرض بجزيئات الهيدروجين وذرات الهليوم في غلافها الجوي، ولكنها تحتفظ بالجزيئات الأثقل، مثل الأكسجين والنتروجين.ومن جانب آخر، فإن سرعة الإفلات الكبيرة جدا للمشتري تمكن ذلك الكوكب من الاحتفاظ بالهيدروجين، المكون الأساسي لغلافه الجوي.

Escape Speeds from the Surfaces of the Planets, Moon, and Sun

Planet	v_{esc} (km/s)
Mercury	4.3
Venus	10.3
Earth	11.2
Mars	5.0
Jupiter	60
Saturn	36
Uranus	22
Neptune	24
Pluto	1.1
Moon	2.3
Sun	618

الجدول 3.13

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

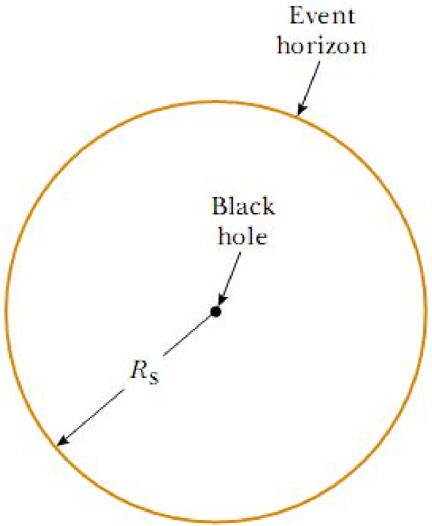
الثقوب السوداء Black Holes

في المثال 7.11 وصفنا بإيجاز حالة نادرة تسمى كارثة سوبرنوفا لانفجار نجم هائل الكتلة، المادة المتبقية في النواة المركزية كجسم يستمر بالانهيار، ومصير هذه النواة الأساسية يعتمد على كتلتها. إذا كانت النواة تملك كتلة أقل من 1.4 مرة من كتلة شمسنا، فإنها تبرد بشكل تدريجي وتنتهي حياتها على شكل نجم قزم أبيض. ولكن إذا كانت كتلة هذه النواة أكبر من ذلك، فقد يعاني مزيدا من الانهيار بسبب قوى الجاذبية. ما تبقى هو نجم نيتروني، راجع المثال 7.11، حيث تنضغط فيه كتلة النجم ليصبح نصف قطره حوالي 10 km. (على الأرض، ملعقة شاي من هذه المادة ستزن حوالي 5 بليون طن).

يموت نجم غير عادي وكبير جدا وقد يحدث هذا عندما تملك النواة كتلة أكبر بحوالي ثلاث مرات الكتلة الشمسية. الانهيار قد يستمر حتى يصبح النجم جسم صغير جدا في الفضاء، ويشار إليه عموما كثقب أسود *black hole*. في الواقع الثقوب السوداء *black holes* هي بقايا النجوم التي انهارت تحت تأثير قوة جاذبيتها. في حال وجود جسم مثل مركبة فضائية بالقرب من ثقب أسود، فإنها تخضع لقوة جاذبية هائلة وقوية، وتكون محصورة للأبد.

إن سرعة الإفلات من ثقب أسود كبيرة جدا، بسبب تركيز كتلة النجم في منطقة ذات نصف قطر صغير جدا (انظر الشكل 23.13)، إذا تجاوزت سرعة الإفلات سرعة الضوء c، فالإشعاع الصادر من الجسم (مثل ضوء مرئي) لا يمكنه الإفلات، والجسم يبدو أسود، وهذا سبب تسمية هذه المنطقة بالثقب الأسود. إن نصف القطر الحرج R_S والذي تكون سرعة الإفلات عنده هي c، يسمى نصف قطر شوارزشيلد Schwarzschild radius (الشكل 17.13). سطح تخيلي للمنطقة المحيطة بالثقب الأسود نصف قطرها يسمى أفق الحدث event horizon. إلى هذا الحد يمكنك الاقتراب من الثقب الأسود وأن تلوذ بالفرار.

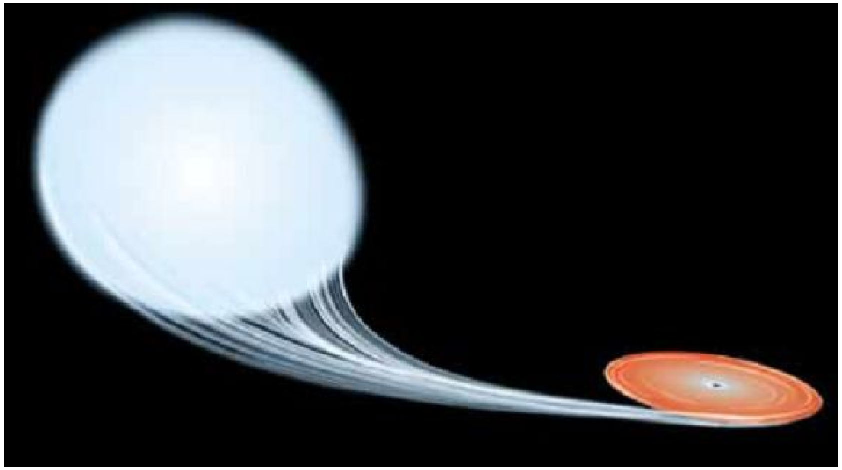
على الرغم من أن الضوء لا يمكنه الفرار من الثقب الأسود، فالضوء الحادث في مكان قريب من الثقب الأسود يكون مرئي. كمثال، إنه من المحتمل أنه من أجل نظام نجمي مزدوج مؤلف من نجم طبيعي واحد وثقب أسود واحد. المادة



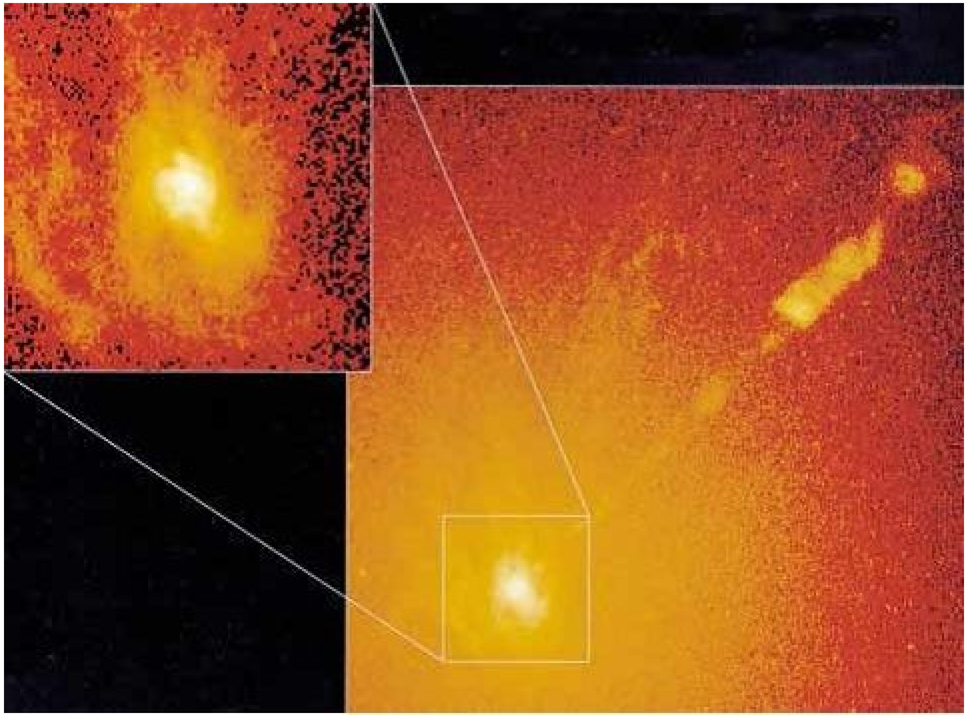
الشكل 17.13 المسافة R_S تساوي نصف قطر شوارزشيلد. أي حدث يحدث ضمن نصف القطر R_S، والمسمى أفق أحدث يكون غير مرئي بالنسبة لمراقب خارجي.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

المحيطة بالنجم العادي يمكنها أن تكون منجذبة للثقب الأسود، وتشكل قرص تراكم حول الثقب الأسود، كما هو مبين في الشكل 18.13.الاحتكاك بين جزيئات القرص المتراكم يؤدي إلى تحويل الطاقة الميكانيكية إلى طاقة داخلية. ونتيجة لذلك فإن الارتفاع المداري للمادة فوق أفق الحدث يتناقص ودرجة الحرارة ترتفع. إن ارتفاع درجة حرارة المادة يؤدي إلى إرسال كميات كبيرة من الإشعاع وتمتد إلى منطقة الأشعة السينية the x-ray من الطيف الكهرومغناطيسي. العديد من المرشحين المحتملين لثقوب سوداء تم معرفتهم من خلال إصدار هذه الأشعة السينية.



الشكل 18.13 نظام نجمي مزدوج يتألف من نجم عادي على اليسار وثقب أسود على اليمين. المادة المنجذبة من النجم العادي تشكل قرص متراكم حول الثقب الأسود، تلك المادة ترتفع إلى درجات حرارة علية جدا مما يسبب في انبعاث الأشعة السينية.



الشكل 19.13 صورة تلسكوب الفضاء هابل للمجرة M87. يظهر الشكل مركز المجرة.

وجهة نظر ترى أن المادة المنبعثة والمتحركة بعيدا عن مركز المجرة إلى أعلى اليمين من الشكل وحوالي عشر سرعة الضوء. مثل هذا الانبعاث يعتقد أنه دليل على وجود ثقب أسود هائل في مركز المجرة.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

هناك أيضا أدلة على وجود ثقوب سوداء هائلة في مراكز المجرات، ذات كتل كبيرة جدا مقارنة بالشمس (هناك دليل قوي على ثقب أسود هائل كتلته 3 -2 مليون كتل شمسية في مركز مجرتنا). نماذج نظرية لهذه الأجسام الغريبة تتنبأ بأن تلك المواد المنبعثة ينبغي أن تكون واضحة على طول محور دوران الثقب الأسود. الشكل 19.13 يظهر صورة تلسكوب هابل الفضائي للمجرة M87. الانبعاث المادي القادم من هذه المجرة يعتقد بأنه الدليل على ثقب أسود هائل في مركز المجرة.

الخلاصـــــــــــــة

♦ ينص قانون الجاذبية العالمي لنيوتن على أن مقدار قوة الجاذبية التي يتجاذب بها جسيمين كتلة كل منهما m_1 و m_2 ويفصل بينهما مسافة r هي:

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (13.1)$$

حيث: $G = 6.673 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2$ هو ثابت الجاذبية العالمي. هذه المعادلة تمكننا من حساب قوة الجاذبية بين الكتل تحت حالات متعددة ومتنوعة.

♦ من أجل جسم على مسافة h فوق سطح الأرض نعلم أن قوة الجاذبية مقدارها mg، حيث g هو تسارع السقوط الحر من ذلك الارتفاع :

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \qquad (13.6)$$

في هذه العلاقة، M_E هي كتلة الأرض وR_E هو نصف قطرها. بالتالي وزن الجسم يتناقص عندما يتحرك الجسم بعيدا عن سطح الأرض.

♦ **قوانين كبلر في حالة الحركة الكوكبية هي:**

(1) كل الكواكب تتحرك في مدارات اهليليجية حول الشمس والشمس تقع في إحدى بؤرتيه.

(2) الخط الواصل بين الكوكب والشمس يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية.

(3) مربع زمن دورة أي كوكب حول الشمس يتناسب مع مكعب نصف المحور الكبير للمدار الاهليلجي.

قانون كبلر الثالث يمكن التعبير عنه بـــــ:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S}\right)a^3 \qquad (13.8)$$

حيث M_S هي كتلة الشمس و a هي نصف المحور الرئيسي. من أجل مدار دائري يمكننا استبداله في المعادلة 8.13 بنصف القطر r. معظم الكواكب تملك مدارات شبه دائرية حول الشمس.

♦ مجال الجاذبية في نقطة من الفضاء يعرف بأنه قوة الجاذبية المؤثرة في أي جسيم اختبار موجود في تلك النقطة مقسوما على كتلة جسيم الاختبار:

$$\mathbf{g} \equiv \frac{\mathbf{F}_g}{m} \qquad (13.9)$$

♦ إن قوة الجاذبية محفوظة، فلذلك يمكننا تعريف طاقة الوضع لنظام مكون من جسمين، حيث طاقة الوضع مرتبطة مع المسافة الفاصلة بين الجسمين r:

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r} \qquad (13.14)$$

وحيث U تؤول إلى الصفر عندما $r \to \infty$. طاقة الوضع الكلية لنظام جسيمات هي مجموع الطاقات لأزواج الجسيمات، وكل زوج يمثل بشرط معطى بالمعادلة14.13.

♦ إذا كان لدينا نظام معزول مؤلف من جسم كتلته m يتحرك بسرعة v بجوار جسم ضخم كتلته M، فالطاقة الكلية E للنظام هي مجموع الطاقات الحركية والكامنة:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \qquad (13.16)$$

♦ الطاقة الكلية أثناء الحركة تكون ثابتة. إذا تحرك جسم في مدار اهليلجي نصف المحور الرئيسي a حول جسم ضخم و $M >> m$ الطاقة الكلية للنظام هي:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad (13.19)$$

♦ من اجل مدار دائري، نطبق نفس العلاقة عند a r . الطاقة الكلية تكون سالبة من أجل أي نظام محدد.

♦ سرعة الإفلات المتوقعة لجسم من سطح كوكب كتلته M ونصف قطره R هي :

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (13.23)$$

أسئلة للتفكير

1 - إذا كانت قوة الجاذبية لجسم تتناسب مباشرة مع كتلته، فلماذا لا تسقط الأجسام ذات الكتل الكبيرة بتسارع أكبر من تلك الصغيرة؟

2 – قوة الجاذبية التي تؤثر بها الشمس عليك تكون موجهة إلى الأسفل وباتجاه الأرض في الليل، وإلى الأعلى ونحو السماء في النهار. إذا كان لديك ميزان حمام حساس بما فيه الكفاية، هل تتوقع أن تزن أكثر في الليل مقارنة بالنهار؟ لاحظ انك على مسافة أبعد عن الشمس في الليل منها خلال النهار. هل تتوقع أن تزن أقل؟

3 – استخدم قانون كبلر الثاني لإقناع نفسك بأن الأرض يجب أن تتحرك أسرع في مدارها خلال شهر ديسمبر (أيلول) لأنها أقرب إلى الشمس منها في شهر يونيو(حزيران) الذي تكون فيه أبعد عن الشمس.

4 – قوة جاذبية الشمس المؤثرة على القمر هي حوالي أضعاف كبيرة من قوة جاذبية الأرض المؤثرة على القمر. لماذا لا تجذب الشمس القمر بعيدا عن الأرض أثناء الكسوف الكلي للشمس؟

5- إن القمر الصناعي في الواقع لا ينتقل في مداره عبر فراغ. إنه يتحرك عبر هواء رقيق جدا. هل تكون مقاومة الهواء سببا في تباطؤ القمر الصناعي؟

6 – كيف تفسر حقيقة أن المشتري وزحل يملكان أدوار أكبر من سنة واحدة؟

7 – إذا كان نظام يتكون من خمس جسيمات، كم عدد الشروط التي تبدو في علاقة طاقة الوضع؟ كم عدد الشروط التي تبدو في نظام يتألف من N جسيمات؟

8 – هل سرعة الإفلات لصاروخ تعتمد على كتلته؟ وضح.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

9 – وازن بين الطاقات اللازمة للوصول إلى القمر من أجل مركبة فضائية وزنها 10^5-kg وقمر صناعي وزنه 10^3-kg.

وضح لماذا المركبة الفضائية تستهلك وقودا أكثر من أجل السفر من الأرض للقمر مقارنة مع رحلة العودة. قدّر الفرق.

11 – من أجل مجموعة معينة من المتجهات المشكلة خط استواء سماوي *celestial equator*. إذا كنت تعيش في خط عرض°40 شمالا، فإن هذه المتجهات تكمن في القوس الخاص بك عبر سماء الجنوب، بما فيها الشرق الأفقي، الغرب الأفقي، وجنوبا °50 فوق الأفق. لكي تستمتع بالفضائيات، فإنك تحتاج لتركيب صحن دون أي عائق في نقطة معينة من خط الاستواء السماوي. لماذا هذا الشرط الخاص؟

14 - لماذا لا نضع قمر صناعي متزامن مع الأرض في مدار حول 45th متوازي؟ ألن يكون هذا أكثر فائدة في الولايات المتحدة من واحد في مدار حول خط الاستواء؟

13 – القيمة المطلقة لطاقة الوضع المرتبطة بنظام أرض – قمر، أكبر من، أصغر من، أو تساوي إلى الطاقة الحركية للقمر بالنسبة للأرض؟

14 – وضح لماذا لا يكون هناك عمل مبذول على كوكب وهو يتحرك في مدار دائري حول الشمس، بالرغم من أن قوة الجاذبية تؤثر على الكوكب. ما هو العمل الكلي المبذول على الكوكب خلال كل دورة، كحركته حول الشمس في مدار اهليلجي؟

15 – وضح لماذا القوة المؤثرة على جسيم بواسطة حقل منتظم يجب أن تكون متجهة نحو مركز الحقل.

هل هكذا سيكون الحال فيما لو وزعت الكتلة على المنطقة توزيعا غير متجانس كرويا؟

16 - في أي موقع من المدار الإهليلجي تكون سرعة الكوكب أكبر ما يمكن؟ وفي أي موقع تكون السرعة أقل ما يمكن؟

17 – إذا أعطيت الكتلة ونصف القطر لكوكب X، كيف تحسب تسارع السقوط الحر على سطح هذا الكوكب؟

18 – إذا كان بالإمكان حفر حفرة إلى مركز الأرض، ما هي القوة التي تبقي جسم كتلته m ممتثلا للمعادلة 1.13 هناك؟ ما رأيك بهذه القوة على m وهي في مركز الأرض؟

19 – في تجربة عام 1798، قال كافندش أن " الأرض وزن " وضح هذا البيان.

20 – المركبة الفضائية فوياجر *Voyager* تسارعت نحو سرعة الإفلات من الشمس بواسطة قوة جاذبية المشتري المؤثرة على المركبة الفضائية. كيف يتم هذا؟

21 - كيف تجد كتلة القمر؟

22 – المركبة الفضائية أبولو13 طورت مشكلة في نظام الأكسجين حول نصف الطريق إلى القمر. لماذا المهمة استمرت حول القمر، وثم عادت، بدلا من عودتها مباشرة إلى الأرض؟

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

مسائل وتمارين

1.13 قانون نيوتن العالمي في الجاذبية

1 – أحسب المقدار المطلوب من قوة الجاذبية حتى تؤثر على شخص آخر يبعد عنك 2 متر. في حالة حلك المطلوب منك قياس أو تقدير قيمهم.

2 – خطط محيطان، كتلة كل منهما 40000 طن في المتر، تتحرك في فصول متوازية، كل 100 متر على حده. ما هو مقدار تسارع أحد الخطوط نحو الآخر الذي سببه تأثير الجاذبية المتبادل بينهما؟ تعامل مع السفن كأنها جسيمات.

3 – جسم 200-kg وجسم 500-kg ويفصل بينهما مسافة 0.400 m.

(a) أوجد محصلة القوة الخارجية التي تؤثر بها هذه الأجسام على جسم كتلته 50.0-kg موجود في منتصف المسافة بينهما.

(b) في أي مكان معين (ما عدا واحدا بعيدا في اللانهاية) يمكن وضع جسم كتلته 50.0-kg حتى يواجه محصلة قوة معدومة؟

4 – جسمان يتجاذبان مع بعضهما بقوة جاذبية مقدار كل منهما 1.00×10^{-8} N عندما تفصل بينهما مسافة 20.0 cm.

إذا كانت الكتلة الكلية للجسمين هي 5.00 kg، ما هي كتلة كل منهما؟

5 – ثلاث كرات موحدة كتلها 2.00 kg، 4.00 kg و 6.00 kg متوضعة في زوايا مثلث قائم، كما في الشكل P13.5، أحسب قوة الجاذبية الناتجة عن الجسم 4.00-kg، على افتراض أن الكرات معزولة عن بقية الكون.

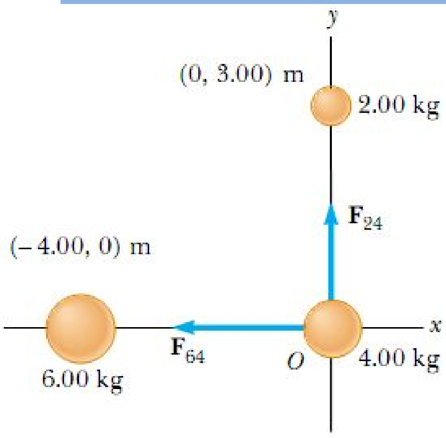


Figure P13.5

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

6 – أثناء كسوف الشمس، فإن القمر والأرض والشمس جميعها تقع على نفس الخط، حيث القمر بين الأرض والشمس

(a) - ما هي القوة التي تؤثر بها الشمس على القمر؟
(b) ما هي القوة التي تؤثر بها الأرض على القمر؟
(c) ما هي القوة التي تؤثر بها الشمس على الأرض؟

2.13 قياس ثابت الجاذبية

7 - في مختبرات الفيزياء التمهيدية، نموذج مقياس كافيندش لقياس ثابت الجاذبية G يستخدم كرات رئيسة ذات كتل 1.50 kg و 15.0 g والتي يفصل بين مراكزها حوالي 4.50 cm. أحسب قوة الجاذبية بين هذه الكرات، ناقش الكل كجسيم موجود في مركز الكرة.

8 – اقترح طالب لقياس ثابت الجاذبية G من خلال تعليق جسمين كرويين في سقف كاتدرائية طويلة وقياس الانحراف في الكبل عن العمودي. نسحب جسم حر مخطط لواحد من الأجسام. إذا كان جسمين 100.0-kg معلقان في أدنى نهاية الكابلات بطول 45.00 m والكابلات معلقة في السقف 1.000 m كل على حده، ما هو الفاصل بين الأجسام؟

3.13 تسارع السقوط الحر وقوة الجاذبية :

9 - عندما يسقط نيزك من على مسافة فوق سطح الأرض تساوي 3.00 مرات نصف قطر الأرض، ما هو تسارعه الذي تسببه جاذبية الأرض؟

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

10- تسارع السقوط الحر على سطح القمر يكون حوالي سدس ذلك الموجود على سطح الأرض.إذا كان نصف قطر القمر حوالي $0.250R_E$، أوجد نسبة متوسط الكثافة ρ_{Moon}/ρ_{Earth}.

11 – في الطريق إلى القمر وصلت المركبة الفضائية أبولو إلى نقطة أصبحت فيها جاذبية القمر أقوى من جاذبية الأرض.

(a) حدد مسافة هذه النقطة عن مركز الأرض.

(b) ما هو التسارع الذي تسببه جاذبية الأرض في هذه النقطة؟

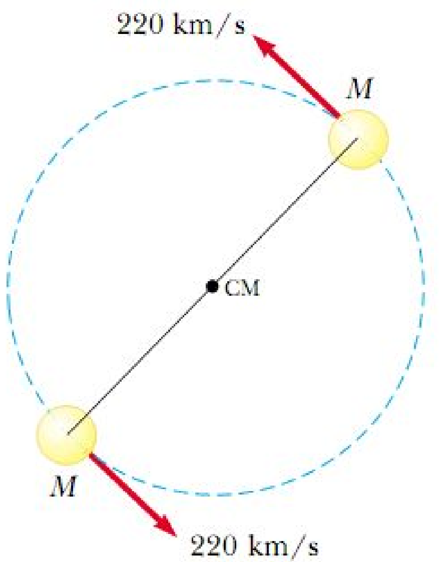


Figure P13.13

4.13 قوانين كبلر وحركة الكواكب

12 –من المركز إلى منتصف المسافة بين الأرض والقمر هي 384 400 km. يكمل القمر دورته في 27.3 يوما.

(a) حدد سرعة القمر المدارية.

(b) إذا كانت الجاذبية ملغاة، فسيتحرك القمر على طول الخط المستقيم المماس للمدار، كما هو موضح في قانون نيوتن الأول. في مداره الحالي في 1.00 s، كم يبعد انخفاض القمر تحت خط المماس ونحو الأرض؟

13 – نظام بلاسكيت *Plaskett's* الثنائي يتألف من نجمين يدوران في مدار دائري حول مركز الكتلة في منتصف الطريق بينهما. ذلك يعني أن كتلة النجمين متساويتين (الشكل P13.13). بفرض أن السرعة المدارية لكل نجم هي 220 km/s، والدور المداري لكل منهما هو 14.4 يوما. أوجد الكتلة M لكل نجم.(للمقارنة، كتلة شمسنا هي 1.99×10^{30} kg).

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

14 – يتحرك جسيم كتلته m على طول خط مستقيم بسرعة ثابتة في الاتجاه x. المسافة b عن المحور x (شكل P13.14). انظر قانون كبلر الثاني حيث يبين ذلك من خلال مشاهدة المثلثين المظللين في الشكل والذين يملكان نفس المساحة عندما $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$.

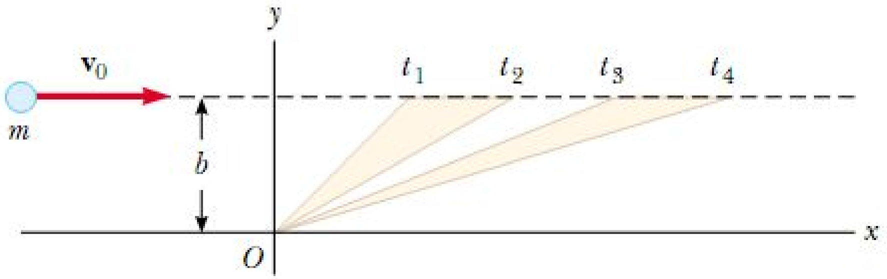


Figure P13.14

15 - قمر Io، لكوكب المشتري، يملك دور مداري 1.77 يوما ونصف قطر 4.22×10^5 km. من خلال هذه البيانات، حدد كتلة المشتري.

16 – وضع القمر الصناعي إكسبلورر الثامن *Explorer VIII* satellite، في مداره في 3 نوفمبر 1960، لتحري الأيونوسفير. لديه بارامترات المدار التالية: الحضيض 459 km، الأوج 2 289 km (كلا المسافتين فوق سطح الأرض)، دوره 112.7 دقيقة. أوجد النسبة v_p/v_a لسرعة الحضيض إلى الأوج.

17 - مذنب هالي (الشكل P13.17) يقترب من الشمس ضمن 0.570 AU، ودوره المداري هو 75.6 سنة. (AU هي الرمز للوحدة الفلكية، حيث : $1\ AU = 1.50\times10^{11}$ m و هي تعني المسافة المتوسطة بين الشمس والأرض).

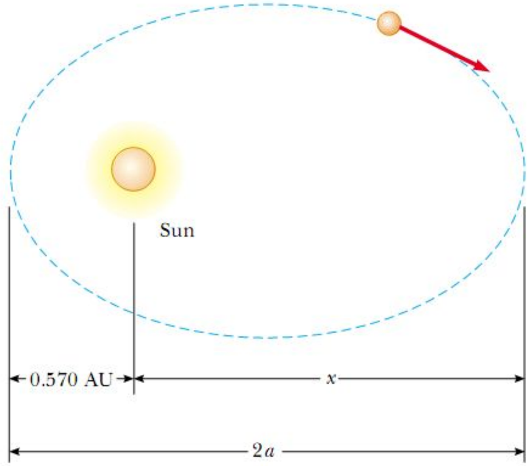


Figure P13.17

ما هي المسافة عن الشمس التي سيقطعها مذنب هالي قبل أن يبدأ رحلة عودته؟

18 – كوكبان X و Y يتحركان عكس عقارب الساعة في مدارات دائرية حول نجم كما في الشكل P13.18. إن أنصاف أقطار هذه المدارات هي نسبة 1:3 . في بعض الوقت، تصطف كما في الشكل P13.18a أي تصنع خطا مستقيما مع النجم. خلال الخمس سنوات القادمة، الانزياح الزاوي للكوكب X هو 90.0°، كما في الشكل P13.18b. أين يكون الكوكب Y في هذا الوقت؟

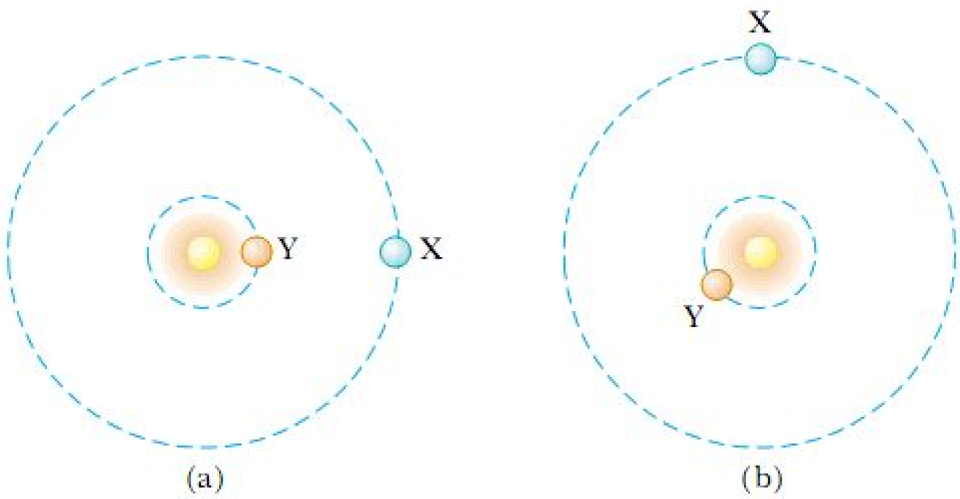


Figure P13.18

19 – قمر صناعي متزامن synchronous satellite والذي يبقى دائما فوق نفس نقطة على خط استواء كوكب، وضع في مدار حول المشتري لدراسة البقع الحمراء المشهورة. يدور المشتري حول محوره مرة كل 9.84 h. استخدم بيانات الجدول 2.13 لإيجاد ارتفاع القمر الصناعي.

20 – نجوم نيترونية هي أجسام كثيفة جدا تتشكل من بقايا انفجار السوبرنوفا supernova. يدور العديد منها بسرعة كبيرة. افرض أن كتلة نجم نيتروني كروي ثابت هي ضعف كتلة الشمس ونصف قطره 10.0 km. حدد السرعة الزاوية العظمى المحتملة حتى يمكن للمادة على سطح النجم في خط الاستواء موجودة فقط في مدار بقوة الجاذبية.

21 – بفرض أن جاذبية الشمس ألغيت. فإن الكواكب ستغادر مداراتها الشبه دائرية وتطير بعيدا وفق خطوط مستقيمة، كما وصفها قانون نيوتن الأول. هل سيكون عطارد أبعد عن الشمس من بلوتو؟ إذا كان الأمر كذلك، أوجد الطول الذي يستغرقه عطارد لإنجاز هذا العبور. وإذا لم يكن كذلك، أعطي أدلة مقنعة بأن بلوتو دائما هو الأبعد عن الشمس.

22 – بسبب الاندماج النووي الحراري في باطنها،الشمس تفقد كتلة بمعدل 3.64×10^{9} kg/s. خلال مدة 5 000-yr من التاريخ المسجل، ما هو مقدار التغير في طول السنة الذي يسببه فقد الكتلة من الشمس؟

اقتراحات: افرض أن مدار الأرض دائري. عزم الدوران الخارجي لا يؤثر في نظام أرض – شمس، لذلك فالاندفاع الزاوي محفوظ. إذا كانت x صغيرة جدا بالمقارنة مع 1، إذا $(1 + x)^n$ تساوي تقريبا إلى $1 + nx$.

5.13 حقل الجاذبية:

23 – ثلاث أجسام متساوية الكتلة وضعت في ثلاث رؤوس مربع طول ضلعه ℓ كما في الشكل P13.23. أوجد حقل الجاذبية في الرأس الرابع بسبب الأجسام الثلاث.

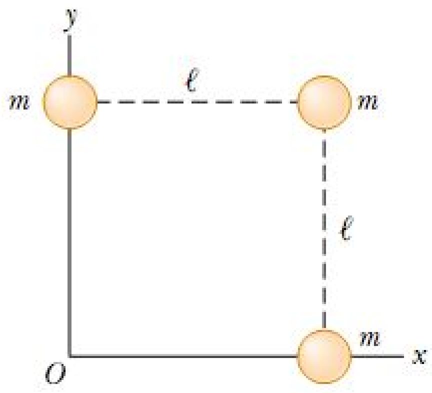


Figure P13.23

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

24 – مركبة فضائية على شكل اسطوانة طولها 100 m، ولها كتلة تشغل 1 000 kg. انحرفت أيضا على مقربة من ثقب أسود يملك كتلة تساوي 100 مرة كتلة الشمس (الشكل P13.24). تشير مقدمة المركبة الفضائية نحو الثقب الأسود، والمسافة بين المقدمة ومركز الثقب الأسود هي 10.0 km.

(a) حدد القوة الكلية على المركبة الفضائية.
(b) ما هو الاختلاف في الحقول الجاذبية التي تؤثر في مقدمة السفينة،وتلك في نهاية السفينة، الأبعد عن الثقب الأسود؟ هذا الاختلاف في التسارع يزداد بسرعة كلما اقتربت السفينة من الثقب الأسود. إنه يضع جسم السفينة تحت توتر شديد وفي النهاية تتمزق إلى أجزاء صغيرة.

25 –أحسب مقدار واتجاه حقل الجاذبية في نقطة P على العمود المنصف للخط الواصل بين جسمين متساويا الكتلة ويفصل بينهما مسافة $2a$ كما هو موضح في الشكل P13.25.

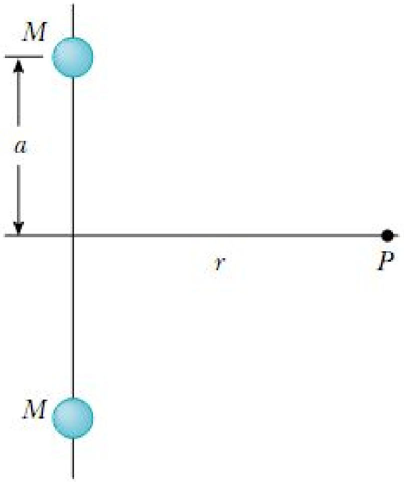


Figure P13.25

6.13 طاقة الوضع

افرض أن $U = 0$ عندما $r \to \infty$

26 – قمر صناعي للأرض كتلته 100 kg وهو على ارتفاع 2.00×10^6 m.

(a) ما هي الطاقة الكامنة لنظام قمر صناعي – أرض؟
(b) ما هو مقدار قوة الجاذبية التي توثر بها الأرض على القمر الصناعي؟
(c) ماذا لو؟ ما هي القوة التي يؤثر بها القمر الصناعي على الأرض؟

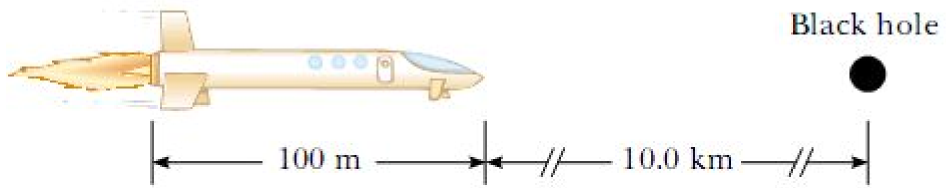


Figure P13.24

27 – ما هو مقدار القوة اللازمة ليتحرك جسم وزنه 1 000-kg من سطح الأرض إلى ارتفاع يساوي ضعفي نصف قطر الأرض؟

28 - أطلقت قذيفة من سطح الأرض إلى أعلى بسرعة 10.0 km/s. إلى أي ارتفاع ستصل؟ وذلك بإهمال مقاومة الهواء ودوران الأرض.

29 - بعد أن تستهلك شمسنا وقودها النووي سيكون مصيرها النهائي هو الانهيار إلى حالة قزم أبيض *white dwarf*، والذي يملك نفس الكتلة تقريبا كما هي الآن، لكن نصف قطره يساوي نصف قطر الأرض. أحسب:

(a) الكثافة المتوسطة للقزم الأبيض.
(b) تسارع السقوط الحر.
(c) والطاقة الكامنة الثقالية لجسم 1.00-kg على سطحه

30 – ما هو مقدار العمل الذي يبذله حقل جاذبية القمر كما في نيزك قادم من الفضاء الخارجي ويؤثر على سطح القمر؟

31 – نظلم مؤلف من ثلاث جسيمات، كتلة كل منها 5.00 g، وضعت في زوايا مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 30.0 cm.

(a) أحسب الطاقة الكامنة للنظام

(b) إذا أطلقت الجسيمات بآن واحد، أين ستصطدم؟

32 – أطلق جسم من سكون على ارتفاع h فوق سطح الأرض.

(a) بين أن سرعته على مسافة r عن مركز الأرض، حيث $R_E < r < R_E + h$ تعطى بالعلاقة :

$$v = \sqrt{2GM_E\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_E + h}\right)}$$

(b) بفرض أن الانطلاق كان على ارتفاع 500 km. طبق التكامل

$$\Delta t = \int_i^f dt = -\int_i^f \frac{dr}{v}$$

لإيجاد زمن سقوط الجسم المتحرك من نقطة الانطلاق إلى سطح الأرض. تظهر الإشارة السالبة لأن الجسم يتحرك عكس الاتجاه الشعاعي، ولذلك سرعته هي $v = - dr/dt$. طبق التكامل عدديا.

7.13 مستويات طاقة الكواكب وحركة القمر الصناعي:

33 - أطلق مسبار فضائي كقذيفة من سطح الأرض بسرعة ابتدائية 2.00×10^4 m/s. ماذا ستكون سرعته عندما يصبح بعيدا جدا عن الأرض؟ وذلك بإهمال الاحتكاك ودوران الأرض.

34 – (a) ما هي السرعة الدنيا بالنسبة للشمس والضرورية لإفلات مركبة فضائية من النظام الشمس إذا بدأت من مدار الأرض؟ (b) أنجز فوياجر 1 *Voyager 1* بسرعة قصوى 125 000 km/h في طريقه لأخذ صورة للمشتري. بالتالي ما هي المسافة عن الشمس التي تكون عندها هذه السرعة كافية للإفلات من النظام الشمسي.

35 – (قمر صناعي treetop) الشكل P13.35 يتحرك في مدار دائري فقط فوق سطح كوكب، بفرض أنه معرض لمقاومة الهواء. برهن أن سرعته المدارية v وسرعة الإفلات من الكوكب تعطى بالعلاقة :

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2}\, v.$$

35 – قمر صناعي 500-kg في مدار دائري على ارتفاع 500 km فوق سطح الأرض، بسبب الاحتكاك الجوي، فالقمر الصناعي في النهاية يسقط على سطح الأرض، أي يضرب الأرض بسرعة 2.00 km/s. ما هو مقدار الطاقة التي تحولت إلى طاقة داخلية بواسطة الاحتكاك؟

37 – قمر صناعي كتلته 200 kg موجود في مدار الأرض على ارتفاع 200 km فوق السطح.

(a) في مدار دائري، ما هي المدة التي يستغرقها القمر الصناعي ليتم دورة واحدة؟
(b) ما هي سرعة القمر الصناعي؟
(c) ما هي الطاقة الدنيا اللازم إعطاؤها لوضع هذا القمر الصناعي في المدار؟ بإهمال مقاومة الهواء لكن بوجود أثر الدوران اليومي للكوكب.

38 – قمر صناعي كتلته m، في الأصل على سطح الأرض، يوضع في مدار الأرض على ارتفاع h.

(a) في مدار دائري، ما هي المدة التي يستغرقها القمر الصناعي ليتم دورة واحدة؟
(b) ما هي سرعة القمر الصناعي؟
(c) ما هي الطاقة الدنيا اللازم إعطاؤها لوضع هذا القمر الصناعي في المدار؟ بإهمال مقاومة الهواء لكن بوجود أثر الدوران اليومي للكوكب. ما هو الموقع على سطح الأرض والاتجاه الذي يجب أن ينطلق منه القمر الصناعي لاستثمار أقل طاقة لازمة؟ تمثل الكتلة ونصف القطر للأرض بـ M_E و R_E .

39 – يدور قمر صناعي 1 000-kg حول الأرض على ارتفاع ثابت 100 km. ما مقدار الطاقة التي يجب أن تضاف إلى النظام ليتحرك القمر الصناعي في مدار دائري وعلى ارتفاع 200 km.

40 – كتلة كوكب أو رانوس حوالي 14 مرة كتلة الأرض، ونصف قطره يساوي حوالي 3.7 نصف قطر الأرض.

(a) أنشئ النسب مع ما يقابلها من قيم الأرض، وأوجد تسارع السقوط الحر لقمم غيوم أو رانوس.
(b) بإهمال دوران الكواكب أوجد سرعة الإفلات الدنيا من أو رانوس.

41 – حدد سرعة الإفلات لصاروخ على الجانب الآخر لجانيميد Ganymede، أكبر أقمار المشتري (الشكل P13.41).

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

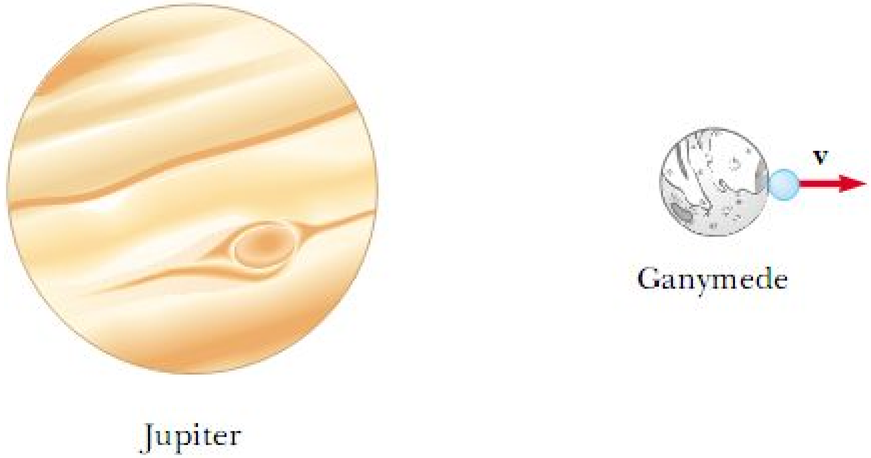


Figure P13.41

نصف قطر جانيميد 2.64×10^{6} m، وكتلته هي 1.495×10^{23} kg. كتلة المشتري هي 1.90×10^{27} kg، والمسافة بين المشتري وجانيميد هي 1.071×10^{9} m.مما لا شك فيه احتواء تأثير الجاذبية بسبب المشتري، لكن يمكنك إهمال حركة المشتري وجانيميد أثناء دورانهما حول مركز الكتلة.

42 - روبرت هيينلين في "القمر هو العشيقة القاسية". السكان المستعمرون للقمر يهددون بإطلاق صخور إلى الأسفل نحو الأرض إذا لم يعطوا استقلالهم (أو على الأقل تمثيل). على افترض مدفع سكة يمكنه إطلاق صخرة كتلتها m، وبضعف سرعة الإفلات القمرية، أحسب سرعة الصخرة عندما تدخل الغلاف الجوي للأرض. (نعني بسرعة الإفلات القمرية بأنها السرعة اللازمة للتحرك بعيدا وبشكل نهائي عن قمر ساكن مفرد في الكون. مشكلة 61 في الفصل 30 توضح مدفع سكة).

43 – قذف جسم عموديا نحو الأعلى من سطح الأرض (نصف قطرها R_E) وبسرعة ابتدائية vi والتي تكون قابلة للمقارنة لكن أقل من سرعة الإفلات v_{esc}.

(a) برهن أن أقصى ارتفاع h يصله الجسم يعطى بالعلاقة :

$$h = \frac{R_E v_i^2}{v_{esc}^2 - v_i^2}$$

(b) مركبة فضائية أطلقت عموديا للأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية 8.76 km/s، والتي هي أقل من سرعة الإفلات 11.2 km/s. ما هو أقصى ارتفاع تصله؟

(c) يسقط نيزك باتجاه الأرض، وهي في الأساس ساكنة قيما يتعلق بالأرض عندما يكون على ارتفاع 2.51×10^7 m. بأي سرعة يضرب النيزك الأرض؟

(d) ماذا لو؟ بفرض أن كرة بيسبول قذفت بسرعة ابتدائية صغيرة جدا مقارنة مع سرعة الإفلات، برهن أن العلاقة في الطلب (a) تتفق مع العلاقة 4.13.

44 – استنتج علاقة العمل اللازمة لتحريك قمر صناعي أرضي كتلته m من مدار دائري نصف قطره $2R_E$ إلى مدار آخر نصف قطره $3R_E$.

45 – مذنب كتلته 1.20×10^{10} kg يتحرك في مدار اهليلجي حول الشمس. المسافة عن الشمس تتراوح بين 0.500 AU و 50.0 AU.

(a) ما هو الانحراف المركزي في مداره؟

(b) ما هو دوره؟

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

(c) في الأوج ما هي الطاقة الكامنة لنظام مذنب – شمس؟ مع العلم أن 1 AU = وحدة فلكية واحدة = متوسط المسافة من الشمس إلى الأرض = 1.496×10^{11} m.

46 – قمر صناعي يتحرك حول الأرض في مدار دائري نصف قطره r.

(a) ما هي السرعة v_0 للقمر الصناعي؟ فجأة، حدث انفجار حطم القمر الصناعي إلى قطعتين، كتلتهما m و$4m$. مباشرة بعد الانفجار القطعة الأصغر ذات الكتلة m ثابتة بالنسبة للأرض وتسقط مباشرة نحو الأرض.

(b) ما هي السرعة vi للقطعة الأكبر مباشرة بعد الانفجار؟

(c) بسبب الزيادة في سرعتها، فإن القطعة الأكبر الآن تتحرك في مدار اهليلجي جديد. أوجد المسافة التي تبعد بها عن مركز الأرض عندما تصل إلى نهاية القطع.

مسائل إضافية:

47 – المرصد الشمسي سوهو (SOHO)يرصد مركبة فضائية تملك مدارا خاصا، اختيرت لكي تشاهد الشمس وهي غير مكسوفة وتكون دائما قريبة بما فيه الكفاية من الأرض لإرسال المعلومات بسهو لة. وهي تتحرك في شبه دائرة حول الشمس وهي أصغر من المدار الدائري للأرض، ومع ذلك فدوره يساوي فقط 1 سنة. وهو يقع دائما بين الأرض والشمس على طول الخط الواصل بينهما. يؤثر كلا الجسمين بقوة الجاذبية على المرصد. برهن أن مسافته عن الأرض يجب أن تكون بين 1.47×10^9 m و1.48×10^9 m. في عام 1772 قرر جوزيف لويس لاغرنج نظريا الموقع الخاص المسموح لهذا المدار. أخذت المركبة الفضائية سوهو SOHO هذا الموقع في 14 فبراير، 1996.

اقتراح : استعمل المعلومات بحيث تكون دقيقة إلى أربعة أرقام. كتلة الأرض هي : 5.983×10^{24} kg

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

48 – لنسمح لـ g_M تمثل الاختلاف في الحقول الجاذبية الناتجة عن القمر في النقاط على سطح الأرض الأقرب من والأبعد عن القمر. أوجد الكسر g_M/g، حيث g هي حقل الجاذبية الأرضية (هذا الاختلاف هو المسئول عن حدوث المد القمري على الأرض).

49 - *مراجعة مشكلة*. كرتان مصمتتان متماثلتان، كل من الكتلة m ونصف القطر r. يطلقان من سكون في فضاء فارغ آخر والبعد بين مركزيهما بمسافة R. ويسمح بالتصادم تحت تأثير جذب الجاذبية.

(a) برهن أن مقدار الاندفاع الذي تتلقاه كل كرة قبل تشكيل الاتصال يعطى بـ $[Gm^3(1/2r - 1/R)]^{1/2}$

(b) ماذا لو؟ أوجد مقدار الاندفاع لكل متلقي إذا كان التصادم مرنا.

50 – كرتان كتلتاهما M و $2M$ وأنصاف أقطارهما R و $3R$ على الترتيب ينطلقان من سكون عندما تكون المسافة بين مركزيهما $12R$. كم ستكون سرعة كل من الكرتين المتحركتين عند التصادم؟ افرض أن الكرتين تتفاعلان فقط مع بعضهما البعض.

51 – في رواية الخيال العلمي "*Ringworld*" للكاتب لاري نيفين، حلقة جامدة من المادة تدور حول نجم (شكل P13.51). السرعة المماسية للحلقة هي 1.25×10^6 m/s ونصف قطرها 1.53×10^{11} m.

(a) برهن أن التسارع المركزي الجاذب للسكان هو 10.2 m/s^2.

(b) سكان عالم الحلقة يعيشون على السطح الداخلي المضاء بالنجوم للحلقة. كل شخص يواجه قوة اتصال طبيعية **n**. تمثل بانفراد، هذه القوة الطبيعية تنتج تسارعا إلى الداخل قيمته 9.90 m/s^2. إضافة لذلك فالنجم في مركز الحلقة يؤثر بقوة جاذبية على الحلقة وسكانها. الاختلاف بين التسارع الكلي والتسارع المشروط بقوة طبيعية يكون بسبب جذب جاذبية مركز النجم. بين أن كتلة النجم تقريبا 10^{32} kg.

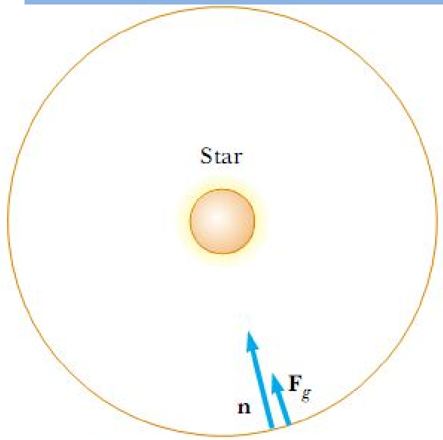


Figure P13.51

52 - (a) برهن أن نسبة تغير تسارع السقوط الحر مع المسافة فوق سطح الأرض هي :

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2GM_E}{{R_E}^3}$$

هذه النسبة في تغير المسافة الزائد يسمى ميل

(b) – إذا كان h صغيرا مقارنة مع نصف قطر الأرض، برهن أن الاختلاف في تسارع السقوط الحر بين نقطتين يبعدان عن بعضهما مسافة عمودية h هو :

$$|\Delta g| = \frac{2GM_E h}{{R_E}^3}$$

(c)- قدر الاختلاف من أجل $h = 6.00$ m، ارتفاع نموذجي لبناية ذات طابقين.

53 – حلقة من مادة ذات بنية مألوفة في علم فلك النجوم والكواكب. تتضمن الأمثلة حلقات زحل وسديم الحلقة. اعتبر حلقة منتظمة كتلتها 2.36×10^{20} kg ونصف قطرها 1.00×10^{8} m. جسم كتلته 1 000 kg موجود في نقطة A على محور الحلقة، يبعد 2.00×10^{8} m عن مركز الحلقة (شكل P13.53). عندما ينطلق الجسم، جاذبية الحلقة تجعل الجسم يتحرك على طول المحور نحو مركز الحلقة (النقطة B).

(a) أحسب الطاقة الكامنة الثقالية لنظام جسم حلقة عندما يكون الجسم في A.
(b) أحسب الطاقة الكامنة الثقالية للنظام عندما يكون الجسم في B.
(c) أحسب سرعة الجسم عندما يمر من خلال النقطة B.

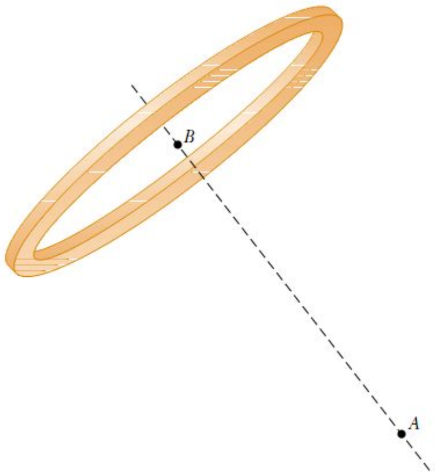


Figure P13.53

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

54 - المسافر *Voyagers* 1 و2 استكشفا سطح قمر المشتري l_o وصورا البراكين النشطة وهي تقذف الكبريت السائل إلى ارتفاع 70 km فوق سطح هذا القمر. أوجد السرعة التي يغادر بها الكبريت السائل البركان. كتلة القمر l_o هي 8.9×10^{22} kg، ونصف قطره 1 820 km.

55 - بصفة رائد فضاء، وترصد كوكبا صغيرا يكون كرويا. بعد هبوطك على الكوكب، بدأت تمشي بخط مستقيم دائما وإلى الأمام، ووجدت نفسك تعود لمركبتك الفضائية من الجانب المعاكس بعد إكمال دورة 25.0 km. تحمل مطرقة وريشة صقر على ارتفاع 1.40 m، أطلقتهما،ولاحظت أنهما يسقطان سوية إلى السطح في 29.2 s. حدد كتلة الكوكب.

56 – يتألف نظام نجمي رباعي ثابت من ثلاثة نجوم، كتلة كل منها m، وتتحرك في نفس المدار الدائري الذي نصف قطره r حول مركز نجم كتلته M. تدور النجوم في نفس الاتجاه، وتترتب كل منها في ثلث الدوران. بين أن دور كل من النجوم الثلاثة يعطى بالعلاقة :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{g\left(M + m/\sqrt{3}\right)}}$$

57 – استعراض مشكلة، موطن اسطواني في فضاء 6.00 km في القطر و30 km طول، تم اقتراحه من قبل (GK أو نيل، 1974). مثل هذا الموطن سيملك مدن، أرض، وبحيرات على السطح الداخلي وهواء وغيوم في المركز، هذا كله سيكون موجودا في مكان بواسطة دوران الأسطوانة حول محورها الطويل. ما هي السرعة التي يجب أن تدور بها الأسطوانة لتحاكي حقل الجاذبية الأرضي في جدران الأسطوانة.

58 – قانون نيوتن في الجاذبية العالمي، صحيح في المسافات ذات المدى الكبير، لكن يعتقد بأنه يفشل من أجل المسافات الصغيرة جدا، التي بنية الفضاء نفسها مجهولة. أصغر بكثير من نواة الذرة، فإن الانتقال في مسافة كهذه يسمى طول بلانك. وهو يحدد من قبل مجموعة من الثوابت G،c و h، حيث c سرعة الضوء في الفراغ وh ثابت بلانك (طرح في الفصل 11) بواحدات الاندفاع الزاوي.

(a) استخدم تحليل الأبعاد لإيجاد تركيب من الثوابت العالمية الثلاث التي لها واحدات طول.
(b) حدد المقدار المطلوب من طول بلانك. عليك أن تعتبر الأعداد الغير صحيحة من الثوابت.

59 – بين أن سرعة الإفلات من سطح كوب ذو كثافة منتظمة تتناسب مباشرة مع نصف قطر الكوكب.

60 – يعتبر العديد من الناس أن مقاومة الهواء تؤثر على حركة الجسم وستجعل الجسم يتحرك أبطأ دائما.في الحقيقة يمكن أن يكون هو المسئول عن جعل الجسم يسرع. اعتبر قمر صناعي أرضي 100-kg في مدار دائري على ارتفاع 200 km، قوة صغيرة من مقاومة الهواء تجعل القمر الصناعي يهبط إلى مدار دائري على ارتفاع 100 km.

(a) أحسب سرعته الابتدائية.
(b) أحسب سرعته النهائية في هذه العملية.
(c) أحسب الطاقة الابتدائية للقمر الصناعي – نظام الأرض.
(d) أحسب الطاقة النهائية للنظام
(e) بين أن النظام يخسر طاقة ميكانيكية وأوجد مقدار الفقد بسبب الاحتكاك.
(f) ما القوة التي تجعل سرعة القمر الصناعي تتزايد؟ ستجد رسم بياني مفيد لجسم حر يساعد في إجابتك.

61 – كوكبان افتراضيان كتلتاهما m_1 و m_2 وأنصاف أقطارهما r_1 و r_2، على الترتيب، يكونان تقريبا في سكون عندما يبتعدان عن بعضهما مسافة لا نهائية. وبسبب جذب الجاذبية ينطلقان نحو بعضهما ويحدث تصادم.

(a) عندما مركزهما إلى مركز الانفصال هو d، أوجد توضيح من أجل السرعة لكل كوكب ومن أجل سرعتهم النسبية.
(b) أوجد الطاقة الحركية لكل كوكب فقط قبل التصادم، إذ أن $m_1 = 2.00\times10^{24}$ kg و $m_2 = 8.00 \times 10^{24}$ kg، $r_1 = 3.00 \times 10^6$ m، $r_2 = 5.00 \times 10^6$ m. (مع العلم أن كلا من الطاقة والاندفاع محفوظين في النظام).

62 – المسافة العظمى من الأرض إلى الشمس (في الأوج) هي 1.521×10^{11} m، والمسافة الأقرب (في الحضيض) هي 1.471×10^{11} m. إذا كانت السرعة المدارية للأرض في الحضيض هي 3.027×10^4 m/s، أحسب:

(a) السرعة المدارية للأرض في الأو ج.
(b) الطاقة الحركية والكامنة لنظام أرض – شمس في الحضيض.
(c) الطاقة الحركية والكامنة في الأو ج. هل الطاقة الكلية ثابتة؟ (بإهمال تأثير القمر والكواكب الأخرى).

63 - (a) أحسب مقدار العمل (بالجول) الذي يجب بذله على حمولة 100-kg للصعود بها على ارتفاع 1 000 km فوق سطح الأرض.

(b)- أحسب كمية العمل الإضافي الذي تتطلبه الحمولة لوضعها في مدار دائري على هذا الارتفاع.

64 –الأشعة السينية النابضة من Cygnus X-1، مصدر أشعة سينية سماوية، سجل على ارتفاع عالي أثناء رحلات للصاروخ. يمكن أن تفسر الإشارات على أنها تنشأ عندما تتأين قطرات المادة تدور حول ثقب أسود بدور 5.0 ms.فإذا كانت القطرة في مدار دائري حول ثقب أسود كتلته $20M$Sun. ما هو نصف قطر مداره؟

65 –دراسة حول علاقة الشمس بمجرتنا – درب التبانة – كشفت أن الشمس تقع بالقرب من الطرف الخارجي لقرص المجرة، أي حوالي 30 000 سنة ضوئية عن المركز. الشمس لها سرعة مدارية تقريبا 250 km/s حول مركز المجرة.

(a) ما هو الدور لحركة الشمس المجرية؟
(b) ما هو المقدار المطلوب من كتلة مجرة درب التبانة؟

افرض أن المجرة مؤلفة في الغالب من نجوم تكون مطابقة للشمس. فما هو المقدار المطلوب من عدد النجوم في مجرة درب التبانة؟

66 – قمر صناعي قديم في مدار *Vanguard I*، أطلق في 30 آذار/مارس. 1958. كتلته 1.60 kg، في مداره الابتدائي المسافة الدنيا عن مركز الأرض كانت 7.02 Mm، وسرعته في نقطة الحضيض كانت 8.23 km/s.

(a) أوجد الطاقة الكلية لنظام قمر صناعي – أرض.
(b) أوجد مقدار الاندفاع الزاوي للقمر الصناعي.
(c) أوجد سرعته في الأوج والمسافة العظمى (الأوج) عن مركز الأرض.

(d) أوجد نصف المحور الرئيسي للمدار.

(e) أحسب دوره.

67 – اكتشف الفلكيون نيزك بعيد يتحرك على طول خط مستقيم، إذا انتشر عبر مسافة $3RE$ عن مركز الأرض، حيث RE هي نصف قطر الأرض. ما هي السرعة الدنيا التي يجب أن يملكها النيزك حتى لا ينحرف النيزك بتأثير جاذبية الأرض مما يجعله يضرب بالأرض؟.

68 - كوكب كروي ذو كثافة منتظمة ρ. برهن أن الدور الأدنى لقمر صناعي يدور حوله يعطى بـ :

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

مستقل عن نصف قطر الكوكب.

69 – نجمان كتلتاهما M و m، ويفصل بينهما مسافة d، يدورا في مدار دائري حول مركز كتلتهم (الشكل P13.69).

برهن أن كل نجم يملك دور يعطى بالعلاقة:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$

على النحو التالي: طبق قانون نيوتن الثاني على كل نجم. مع العلم أن مركز الكتلة يحقق:

$Mr_2 = mr_1$، حيث: $r_1 + r_2 = d$.

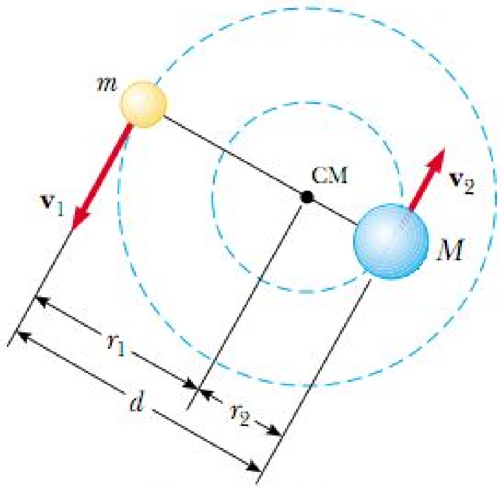


Figure P13.69

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

70 - (a) جسم 5.00-kg ترك من 1.20×10^7 m عن مركز الأرض. بأي تسارع يتحرك بالنسبة للأرض؟

(b) – ماذا لو؟ جسم 2.00×10^{24} kg ترك من 1.20×10^7 m عن مركز الأرض. فبأي تسارع يتحرك بالنسبة للأرض؟ نفرض بأن الجسيمات تتصرف كأزواج من الجسيمات بمعزل عن بقية الكون.

71 – إن تسارع جسم يتحرك في حقل الجاذبية الأرضية هو:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM_E\mathbf{r}}{r^3}$$

حيث **r** شعاع الموضع ويتجه من مركز الأرض نحو الجسم. اختار المبدأ مركز الأرض وافرض أن الجسم الصغير يتحرك في المستوي xy، نجد أن مساقط التسارع على المحاور المتعامدة (الديكارتية) هي:

$$a_x = -\frac{GM_Ex}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \qquad a_y = -\frac{GM_Ey}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

استخدم الكمبيوتر لإعداد وتنفيذ التطبيق العددي لحركة الجسم، وفقا لطريقة أولر. افرض أن الموقع الابتدائي للجسم في $x = 0$ و$y = 2R_E$، حيث R_E هي نصف قطر الأرض. أعط الجسم سرعة ابتدائية 5 000 m/s في اتجاه x.

حاول 5 ثواني. ارسم إحداثيات x وy بمرور الزمن. هل الجسم يضرب الأرض؟ غير السرعة الابتدائية حتى تجد مدار دائري.

أ. تمام إبراهيم دخان
www.trgma.com

إجابات الاختبارات السريعة:

13.1 (4) قوة الجاذبية التي تؤثر بها الأرض على القمر تزوده بمحصلة قوى تسبب التسارع المركزي للقمر.

13.2 (5) قوة الجاذبية تسلك سلوك التربيع العكسي لذلك تتضاعف المسافة فتكون السبب في أن القوة هي ربع الأكبر.

13.3(3) جسم في مدار يسقط بكل بساطة وهو يتحرك حول الأرض. وتسارع الجسم بسبب الجذب. لأن الجسم أطلق من قمة جبل عالية، قيمة g تكون أقل نوعا من قيمتها على السطح.

13.4(1) قانون كبلر الثالث (العلاقة 13.8) الذي يطبق على كل الكواكب، يخبرنا أن دور الكوكب يكون متناسبا مع $a3/2$. ولأن بلوتو هو الأبعد عن الشمس مقارنة مع الأرض، فهو يملك دور أكبر، إن حقل جاذبية الشمس يكون أضعف كثيرا في بلوتو مقارنة منه في الأرض. لذلك فهذا الكوكب يتعرض لتسارع مركزي أقل كثيرا من المؤثر في الأرض، فهو يملك بالمقابل دورا أكبر.

13.5 (1) من قانون كبلر الثالث والدور المعطى، يمكننا حساب المحور الرئيسي للكويكب.

فنجده 1.2×1011 m.

لأن هذا أصغر من المسافة بين الأرض والشمس، لا يوجد احتمالية أن يصطدم الكويكب بالأرض.

13.6 (2) من حفظ الاندفاع الزاوي : $mv_a r_a \;\; mv_p r_p$

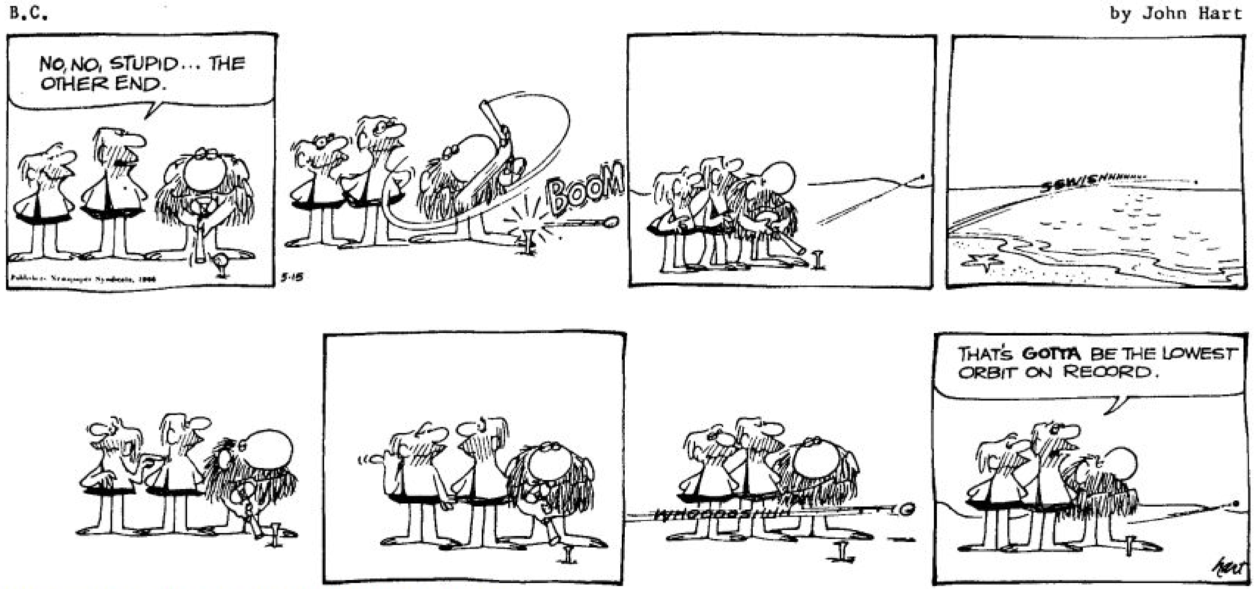
أي أن : $v_p = (r_a/r_p)v_a = (4D/D)v_a = 4v_a$.

13.7 (1) في الحضيض. بسبب حفظ الاندفاع الزاوي فإن سرعة المذنب تكون أعلى في الموقع الأقرب للشمس.

(2)- الأوج. الطاقة الكامنة للمذنب في نظام الشمس تكون أكبر في المسافة الأبعد عن الشمس.

(3)- الحضيض. الطاقة الحركية تكون أعلى في النقطة التي تكون فيها سرعة المذنب الأكبر.

(4)- كل النقاط. الطاقة الكلية هي نفسها بغض النظر عن موقع المذنب في مداره.



By permission of John Hart and Creators Syndicate, Inc.

Figure P13.35