4.1 Quadratic Functions

الدوال التربيعية .

Polynomial Function

دالة كثيرة الحدود .

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

n: degree "الدرجة"

a_n: Leading Coefficient المعامل الرئيس .

دالة كثيرة الحدود Polynomial Function	الاسم Name	درجتها Degree	المعامل الرئيس Leading Coefficient
$f(x) = 2$	ثابتة Constant	0	2
$f(x) = 5x - 1$	خطية Linear	1	5
$f(x) = 4x^2 - x + 1$	تربيعية Quadratic	2	4
$f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x + 5$	تكعيبية Cubic	3	2
$f(x) = x^4 + \sqrt{2}x^3 - 3x^2$	Quartic متعددة الرابعة	4	1

$f(x) = 0 \Rightarrow$ Zero Polynomial has NO degree

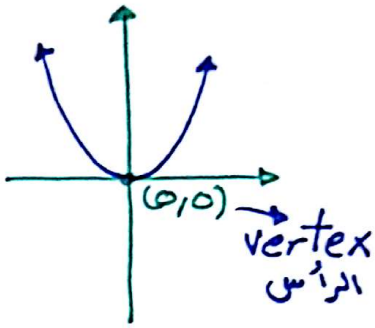
الصفر دالة كثيرة حدود حقيقية ليس لها درجة .

Scanned by CamScanner

Quadratic Function

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ⟶ الصورة العامة.

$f(x) = x^2$ ⟶ Parabola ⟶ قطع مكافئ.



مجال Domain: $(-\infty, \infty)$

المدى Range: $[0, \infty)$

تزايدية increasing: $[0, \infty)$

تناقصية decreasing: $(-\infty, 0]$

Graph of Quadratic Function

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$F(x) = a(x-h)^2 + k$

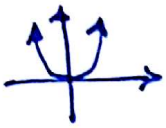
(h,k) ⟶ Vertex الرأس , axis of symmetry محور التماثل $x = h$

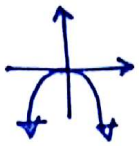
$h = \frac{-b}{2a}$, $k = f(h)$.

Scanned by CamScanner

a

- $a>0$ المنحنى مفتوح لأعلى open up
- $a<0$ المنحنى مفتوح لأسفل open down
- $0<|a|<1$ Wider يتوسع
- $|a|>1$ narrower يضيق





h: Horizontal shift الانتقال الأفقي "يتحرك باتجاه محور x"

- $h>0$ Right المنحنى ينتقل إلى اليمين
- $h<0$ left. المنحنى ينتقل إلى اليسار

k: Vertical shift الانتقال الرأسي "يتحرك باتجاه محور y"

- $k>0$ up ينتقل إلى أعلى
- $k<0$ down ينتقل لأسفل

- y-intercept الجزء الذي يقطع محور y.

$$f(0)=c$$

- x-intercept الجزء الذي يقطع محور x.

حل المعادلة التربيعية "توجد قيم x"

Solve the equation

$$ax^2+bx+c=0$$

"تمييز" b^2-4ac

- >0 "موجب"

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- $=0$

$$x=\frac{-b}{2a}$$

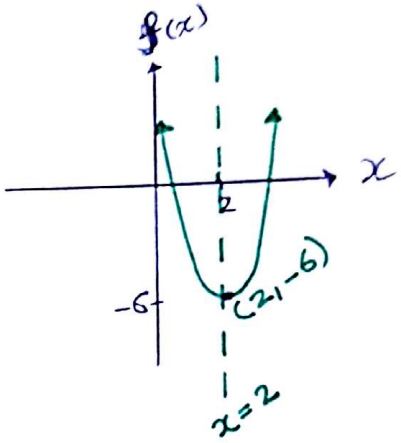
- <0 "سالب" no-x intercept

Scanned by CamScanner

Example 1 p.(117) :-

Graph each function. Give the domain and range.

ارسمي الدوال ... وأوجدي مجالها ومداها.



(a) $f(x) = x^2 - 4x - 2$

Domain : $(-\infty, \infty)$

Range : $[-6, \infty)$ ← أفضل طريقة من الرسم

حتى نرسم لابد أن نعرف رأس القطع

Vertex : $(h,k) = (2,-6)$ ← الرأس. axis : $x = h$ ← محور التماثل

$x = 2$

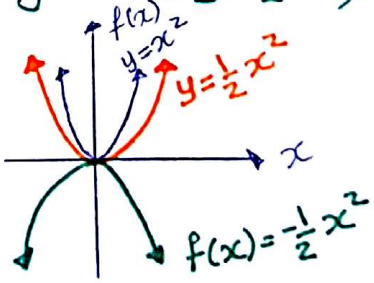
$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$k = f(h) = f(2) = (2)^2 - 4(2) - 2 = -6$$

$a > 0$ ← موجب ← القطع مفتوح لأعلى.

(b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ ← سالب ← القطع مفتوح لأسفل

« Compare with $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ » ← قارني



Domain : $(-\infty, \infty)$

Range : $(-\infty, 0]$

Vertex : $(h,k) = (0,0)$, axis : $x = h$

$x = 0$

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2(-\frac{1}{2})} = 0$$

$$k = f(h) = f(0) = 0$$

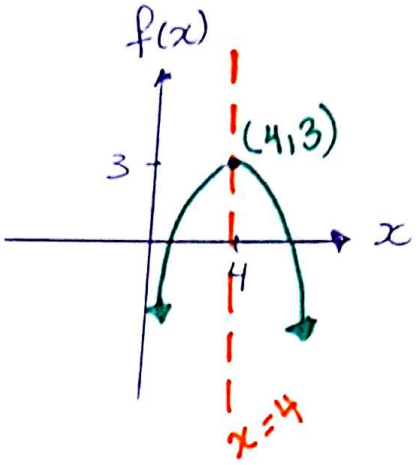
بالمثل بالنسبة لـ $y = x^2$ ، $y = \frac{1}{2}x^2$ ولكن بمدى يختلف

Range of $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$: $[0, \infty)$

Scanned by CamScanner

سؤال ٥ من ملحق الأسئلة

(c) $F(x) = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$



Domain : $(-\infty, \infty)$

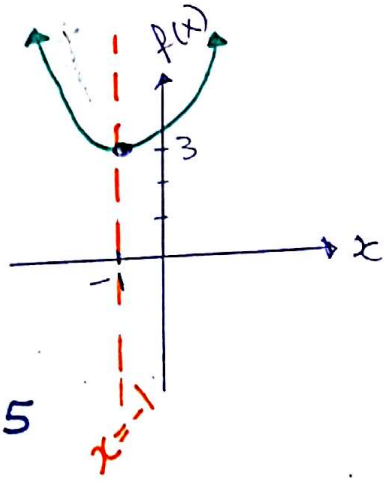
Range: $(-\infty, 3]$

Vertex : $(h,k) = (4,3)$, axis : $x=h$
$x=4$

HW2 $p_0(120)$:~ Find the axis and vertex

أوجد رأس ومحور التماثل.

$f(x) = 2x^2 + 4x + 5$



Vertex : $(h,k) = (-1,3)$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = \frac{-4}{4} = -1$

$k = f(h) = f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) + 5$

$= 3$

axis : $x = h$

$x = -1$

$f(x) = a(x-h)^2 + k$

$= 2(x+1)^2 + 3$

Scanned by CamScanner

- Completing the square:

- Graph $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$

$$f(x) = -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1$$

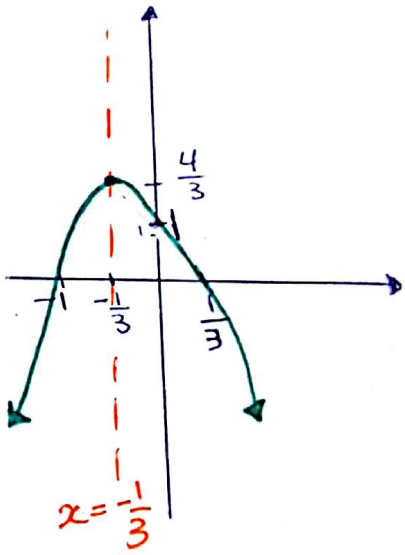
$$= -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 1$$

$$= -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - 3\left(-\frac{1}{9}\right) + 1$$

$$= -3\left(x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} + 1$$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$$= -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}$$



Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $(-\infty, \frac{4}{3}]$

Vertex: $(h, k) = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

axis: $x = h \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

y-intercept: $f(0) = -3(0)^2 - 2(0) + 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

x-intercept: $-3x^2 - 2x + 1 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$(3x - 1)(x + 1) = 0$

$3x - 1 = 0$ or $x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ $x = -1$

increasing $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, decreasing $[-\frac{1}{3}, \infty)$

Scanned by CamScanner

* كيف نوجد الدالة من خلال الرسم ؟

- في الخطوات السابقة : المعطى : الدالة ، المطلوب : الرسم .

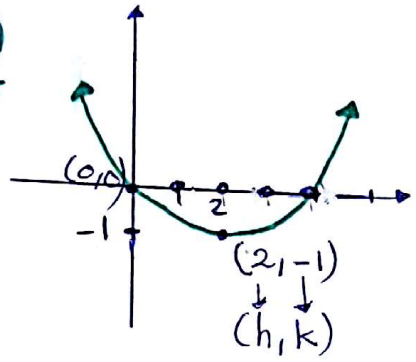
- الآن العكس : المعطى : الرسم ، المطلوب : الدالة .

موضوع سؤال

Page (123) : Find a quadratic function.

أوجد دالة تربيعية .

(17)



من خلال الرسم نلاحظ أن

① vertex = (2, -1)

$h = 2, \quad k = -1$

② $a > 0 \Rightarrow$ المنحنى مفتوح لأعلى

* نكتب الصورة العامة للدالة التربيعية بدلالة h,k

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$f(x) = a(x-2)^2 + (-1)$$

نوجد قيمة a من خلال التعويض عن كل x بحيث نوجد f(0) ولابد أن تكون قيمة a الناتجة موجبة لأن الرسم مفتوح لأعلى .

$$f(0) = a(0-2)^2 - 1$$

$$0 = a(-2)^2 - 1$$

$$0 = 4a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

لماذا f(0) = 0 ؟!

لأن من الرسم عندنا النقطة (0,0) معناها :

$(x, f(x))$

$(0, f(0))$

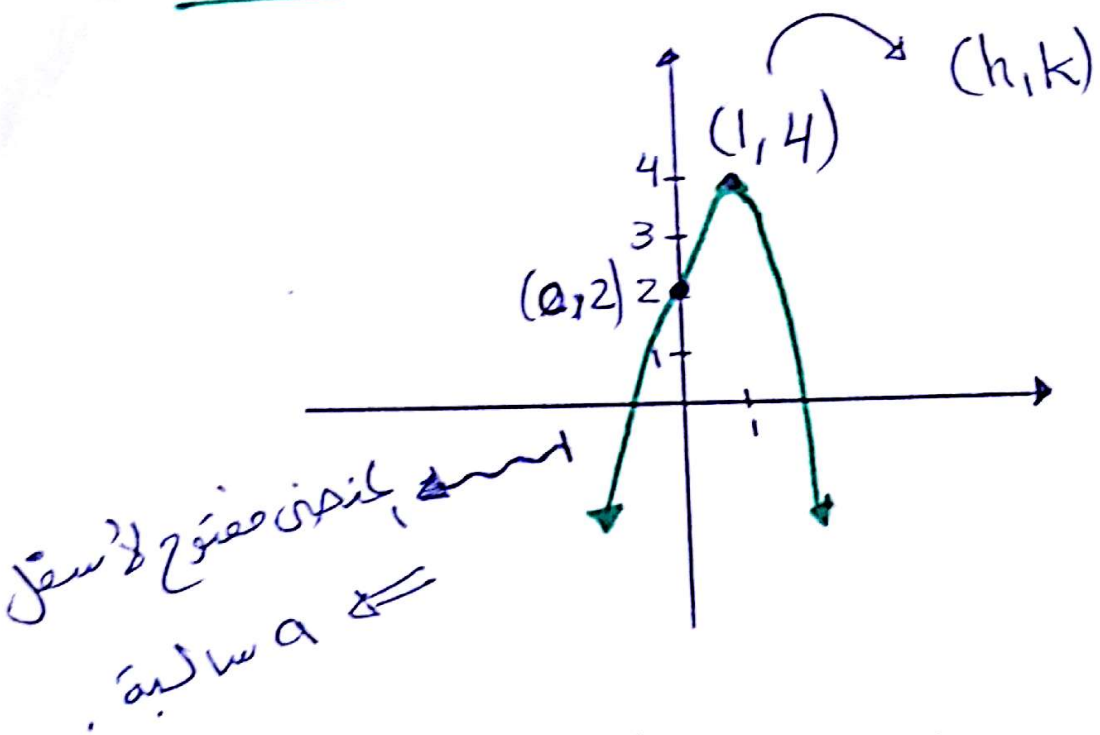
$(0, 0)$

∴ quadratic function is :-

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$$

Scanned by CamScanner

(18)



نعوض بالنقطة الثانية لنجد قيمة a

Vertex $(1,4) = (h,k)$

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

$$= a(x-1)^2 + 4$$

$$f(0) = a(0-1)^2 + 4$$

$$2 = a(-1)^2 + 4 = a + 4$$

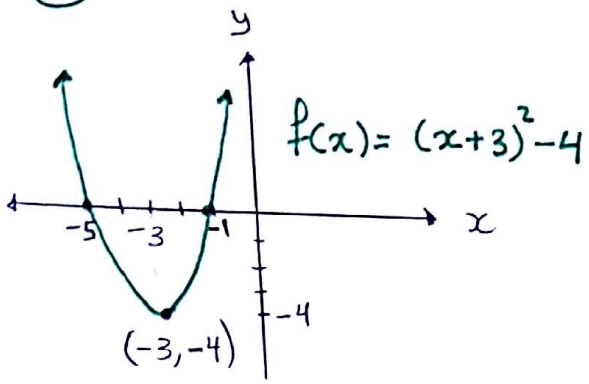
$$\therefore a = 2 - 4 \Rightarrow a = -2$$

$$\therefore \boxed{f(x) = -2(x-1)^2 + 4}$$

Scanned by CamScanner

Exercise 4.1

(1)



Domain: $(-\infty, \infty)$

Range: $[-4, \infty)$

Vertex: $(h,k) = (-3,-4)$

axis: $x=h \Rightarrow x=-3$

y-intercept: $f(0) = (0+3)^2 - 4$

$= 9-4 = 5$

$y = 5$

x-intercept:

من هذه الرسمة: الخط يقطع محور x عند:

$x=-1, \quad x=-5$

or

Solve the equation:

$(x+3)^2 - 4 = 0$

$(x+3)^2 = 4$

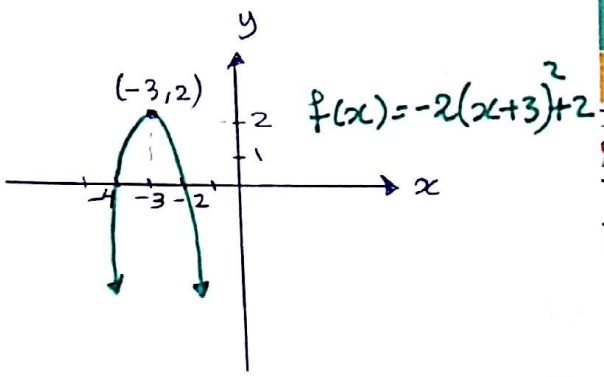
$x+3 = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

(طريقة الجذر التربيعي)

$x = -3 \pm 2$

$x = -1, \quad x = -5$

(2)



Domain: $(-\infty, \infty)$

Range: $(-\infty, 2]$

Vertex: $(h,k) = (-3,2)$

axis: $x=h \Rightarrow x=-3$

y-intercept:

$f(0) = -2(0+3)^2 + 2 = -2(9)+2$

$= -18+2 = -16$

$y = -16$

x-intercept:

من الرسمة: $x=-4, \quad x=-2$

or Solve the equation

$-2(x+3)^2 + 2 = 0$

$-2(x+3)^2 = -2$

$(x+3)^2 = \frac{-2}{-2} = 1$

$x+3 = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$x = -3 \pm 1$

$x = -4, \quad x = -2$

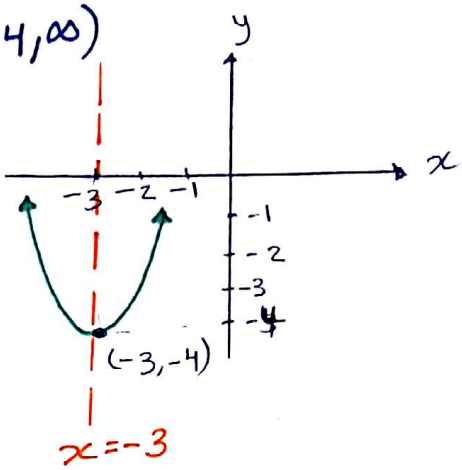
Scanned by CamScanner

⑥ $f(x) = (x+3)^2 - 4$

Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $[-4, \infty)$

Vertex: $(h,k) = (-3,-4)$

axis: $x = h \Rightarrow x = -3$



تزايدية increasing $[-3, \infty)$

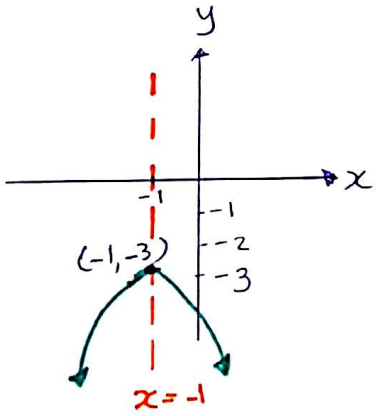
تناقصية decreasing $(-\infty, -3]$

⑦ $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$

Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $(-\infty, -3]$

Vertex: $(h,k) = (-1,-3)$

axis: $x = h \Rightarrow x = -1$



increasing $(-\infty, -1]$, decreasing $[-1, \infty)$

⑧ $f(x) = x^2 - 2x + 3$

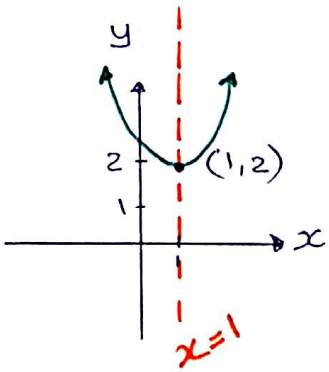
Domain: $(-\infty, \infty)$, Range: $[2, \infty)$

Vertex: $(h,k) = (1,2)$

$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$

$k = f(h) = f(1) = 1^2 - 2(1) + 3 = 2$

axis: $x = h \Rightarrow x = 1$



increasing $[1, \infty)$, decreasing $(-\infty, 1]$

Scanned by CamScanner

4.2 - 4.3 Synthetic Division.

القسمة التركيبية

Division Algorithm:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \qquad \text{----} \quad (1)$$

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{ناتج القسمة} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في $g(x)$

$$g(x)\ \frac{f(x)}{g(x)} = g(x)\left(q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}\right)$$

$$\boxed{f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)}$$

$\frac{f(x)}{x-k}$ معاملات $f(x)$ في k

طريقة تركيب تنازلي.

$x-4 \Rightarrow k=4$

$x+4 \Rightarrow k=-4$

Scanned by CamScanner

Example 1. $P_o(125)$: Use synthetic division

$$\frac{5x^3-6x^2-28x-2}{x+2} \longrightarrow x-(-2) \Rightarrow k=-2$$

-2	5	-6	-28	-2
	↓	-10	32	-8 (+)
	5	-16	4	-10 → Remainder الباقي
	معامل x^2	معامل x	الحد الثابت	$f(-2)$

quotient

حاصل القسمة = خارج القسمة

$\times$ بالضرب

$$\therefore f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$$

$$5x^3-6x^2-28x-2 = (x+2)(5x^2-16x+4) + (-10)$$

Special case of the Division Algorithm:- حالة خاصة من الحالة السابقة:

$$\boxed{f(x) = (x-k)\,q(x) + r}$$

الفرق بين $r(x)$ و r

r = عدد ثابت

$r(x)$ = دالة في متغير

درجة $f(x)$ أكبر من درجة quotient بواحد

Scanned by CamScanner

Remainder Theorem:- نظرية الباقي

$$\frac{f(x)}{x-k} \Longrightarrow f(k) = r$$ ← Remainder الباقي

من المثال السابق: $k=-2$ ، $r=-10$

$$f(-2) = -10$$

$$f(x) = 5x^3 - 6x^2 - 28x - 2$$

$$f(-2) = 5(-2)^3 - 6(-2)^2 - 28(-2) - 2 = -10$$ ← الباقي

k ↙

Factor Theorem:- نظرية العوامل

$$\frac{f(x)}{x-k}$$ ، $x-k$ is factor of $f(x) \Longleftrightarrow f(k)=0$ ← الباقي

$x-k$ عامل من عوامل $f(x)$ اذا كان الباقي = صفر ،

k صفر للدالة $f(x)$ اذا كان الباقي = صفر . وايضاً

HW1 P. (130): Factor $f(x) = 6x^3 + 19x^2 + 2x - 3$ if -3 is zero of $f(x)$

صفر للدالة ⟸ الباقي = صفر (-3)

-3	6	19	2	-3
		-18	-3	3 (+)
	6	1	-1	0

-3 is zero of $f(x)$ ، $(x+3)$ is factor of $f(x)$

$$f(x) = (x+3)(6x^2 + x - 1)$$

Scanned by CamScanner

Example 2 p. (127)

Decide whether the given number k is a zero of f(x).

حدد هل k صفر للدالة ؟ ⟸ يكون صفر للدالة اذا كان الباقي = صفر

(a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$, $k = 1$

او ممكن يكتب بشكل آخر $x-1$

1	1	-4	9	-6
↓		1	-3	6
	1	-3	6	0

(+)

1 معامل x^2 — -3 معامل x — 6 الثابت — 0 الباقي remainder

1 هو صفر للدالة $f(x)$ ⟸ صفر = الباقي

$f(x) = (x-1)(x^2 - 3x + 6) + 0$ ← الباقي

1 is zero of $f(x)$

$x-1$ is a factor of $f(x)$ — factor = عامل — $(x-1)$ عامل من عوامل $f(x)$

(b) $f(x) = x^4 + x^2 - 3x + 1$, $k = -1$ أو $x+1$

x^3 معامل

-1	1	0	1	-3	1
↓		-1	1	-2	5
	1	-1	2	-5	6

(+)

-1 ⟸ ليس صفر للدالة $f(x)$ ⟸ الباقي ≠ صفر

$x+1$ ليس عامل.

-1 is not zero of $f(x)$

$x+1$ is not a factor of $f(x)$

$f(x) = (x+1)(x^3 - x^2 + 2x - 5) + 6$ ← الباقي

Scanned by CamScanner

(c) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5$; $k = 1+2i$

$1+2i$	1	-2	4	2	-5
		$1+2i$	-5	$-1-2i$	5
	1	$-1+2i$	-1	$1-2i$	0

(+)

الباقي = صفر ⟸ $1+2i$ صفر للدالة

$(1+2i)(-1+2i)$
$= -1 + 2i - 2i + 4i^2$
$= -1 - 4 = -5$

$1+2i$ is Zero of $f(x)$

$x-(1+2i)$ is a factor of $f(x)$

$$f(x) = (x-(1+2i))(x^3 + (-1+2i)x^2 - x + (1-2i)) + 0$$

Exercises 4.2 :

(3) $\dfrac{x^4+5x^3+4x^2-3x+9}{x+3}$

-3	1	5	4	-3	9
		-3	-6	6	-9
	1	2	-2	3	0

(+)

$$f(x) = (x+3)(x^3+2x^2-2x+3) + 0$$

Scanned by CamScanner

(6) $\dfrac{x^3+x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}}{x+\frac{1}{2}}$

$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0

(+)

$f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right) + 0$

(10) $f(x) = 2x^3+3x^2-16x+10$; $k=-4$

-4	2	3	-16	10
		-8	20	-16
	2	-5	4	-6

(+)

$f(x) = (x+4)(2x^2-5x+4) + (-6)$

(23) $f(x) = 2x^3+9x^2-16x+12$, $k=1$

1	2	9	-16	12
		2	11	-5
	2	11	-5	7

(+)

1 is not zero of $f(x)$

$x-1$ is not factor of $f(x)$

$f(x) = (x-1)(2x^2+11x-5) + 7$

Scanned by CamScanner

(29) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$, $k = 2 - i$

$2-i$	2	-1	3	-5
		$4-2i$	$4-7i$	$7-21i$ (+)
	2	$3-2i$	$7-7i$	$2-21i$

$2-i$ is not zero of $f(x)$

$(2-i)(3-2i)$
$= 6 - 4i - 3i + 2i^2$
$= 6 - 7i - 2$
$= 4 - 7i$

$(2-i)(7-7i)$
$= 14 - 14i - 7i + 7i^2$
$= 14 - 21i - 7$
$= 7 - 21i$

Exercises 4.3 p.(136)

(3) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$; $x - 1$ ⟶ $k = 1$

1	1	-5	3	1
		1	-4	-1 (+)
	1	-4	-1	0

1 is zero of $f(x)$; $(x-1)$ is factor of $f(x)$

$f(x) = (x-1)(x^2 - 4x - 1)$

(6) $4x^2 + 2x + 54$; $x - 4$

4	4	2	54
		16	72 (+)
	4	18	126

4 is not zero of $f(x)$; $(x-4)$ is not factor of $f(x)$

$f(x) = (x-4)(4x+18) + 126$

Scanned by CamScanner

(8) $2x^4+5x^3-2x^2+5x+6$; $x+3$

-3	2	5	-2	5	6
		-6	3	-3	-6 (+)
	2	-1	1	2	0

-3 is Zero of $f(x)$; $(x+3)$ is a factor of $f(x)$

$$f(x)=(x+3)(2x^3-x^2+x+2)$$

(13) $f(x)=2x^3+(3-2i)x^2+(-8-5i)x+(3+3i)$;

$k=1+i$

$1+i$	2	$3-2i$	$-8-5i$	$3+3i$
		$2+2i$	$5+5i$	$-3-3i$ (+)
	2	5	-3	0

$1+i$ is Zero of $f(x)$

$x-(1+i)$ is factor of $f(x)$.

$$f(x)=(x-(1+i))(2x^2+5x-3)$$

Scanned by CamScanner