حل ورقة عمل الدرس السادس — أ. وسام كامل . أ. رشا طوس

السؤال الأول:

1)
$$\begin{cases} P: x+y-2z=0 \ (1) \\ Q: y-2z+3=0 \ (2) \end{cases}$$

من المعادلة

$\vec{n}_P(1,1,-2)$

$\vec{n}_Q(0,1,-2)$

الشعاعين $\vec{n}_P$ و $\vec{n}_Q$ غير مرتبطين خطياً لأنه مركباتهما غير متناسبة $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{1}$

إذن المستويان متقاطعان

بالحل المشترك نجد الفصل المشترك

من المعادلة (2) $\boxed{y=-3+2z}$

نعوض في (1)

$x+2z-3-2z=0$

$\boxed{x=3}$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2t-3 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

2) نحل معادلات المستويات الثلاث حلاً مشتركاً أو نحل معادلة الفصل المشترك مع R

بالحل المشترك للمستقيم و R

نعوض في R

$2(2t-3)+t+1=0$

$4t+t-6+1=0$

$\boxed{t=1}$

نعوض $x=3 \quad y=-1 \quad z=1$

إذن نقطة التقاطع $(3,-1,1)$

السؤال الثاني:

$x^2+y^2+z^2-6x+8y=0$

$x^2-6x+y^2+8y+z^2=0$

$x^2-6x+9-9+y^2+8y+16-16+z^2=0$

$(x-3)^2+(y+4)^2+z^2=25$

تمثل كرة مركزها $I(3,-4,0)$ ونصف قطرها 5

$$dist(I,P)=\frac{|2(3)-(-4)+2(0)+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$=\frac{|12|}{\sqrt{9}}=4<R=5$$

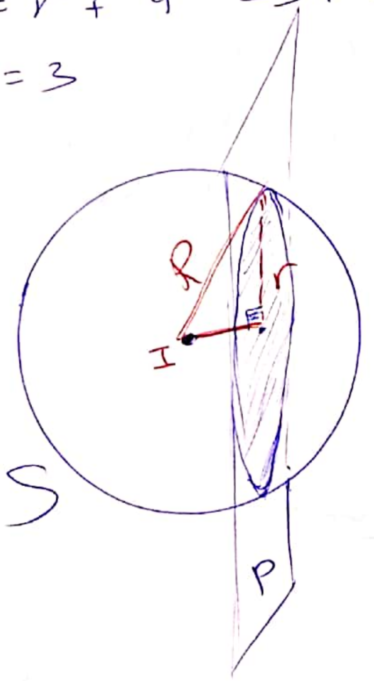
إذن المستوي قاطع للكرة بدائرة

حساب نصف قطر المقطع الدائري حسب فيثاغورث

$R^2=r^2+(dist(I,P))^2$

$5^2=r^2+4^2 \Rightarrow r^2=9$

$r=3$



$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2$$

$$\cancel{x^2}-2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{z^2}+6z+9=\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}-6y+9+\cancel{z^2}-6z+\cancel{9}$$

$$-4x+2y+12z-5=0$$

السؤال الرابع:

لإيجاد الحل المشترك لمعادلتي المستويين نجد الفصل المشترك

$$\begin{cases} 2x-y+z-4=0 & (1) \\ x+y+2z-5=0 & (2) \end{cases}$$

نجمع (1) و (2)

$$3x+3z-9=0$$

$$(3)\quad x=-z+3$$

نعوض في (1)

$$-2z+6-y+z-4=0$$

$$-z-y+2=0$$

$$y=z-2$$

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t-2 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

نفرض $A'(-t+3, t-2, t)$ المسقط العمودي لـ A على الفصل المشترك

$$\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$$

$$(-t, t-1, t-2)\cdot(-1,1,1)=0$$

$$+t+t-1+t-2=0$$

$$3t-3=0 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

$$A'(-1+3, 1-2, 1)$$

$$A'(2,-1,1)$$

$$AA'=\sqrt{(2-3)^2+(-1+1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$$

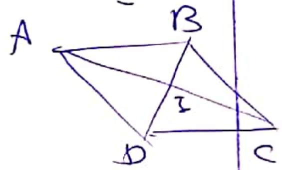
إذن بعد A عن المستويين P و Q هو $\sqrt{2}$

السؤال الثالث:

$A(1,2,-3)$

$B(-1,3,3)$ $C(4,-1,3)$

ليكون $ABCD$ معين يجب أن يكون



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

و $AB=AD$

نفرض إحداثيات $D(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

$$(-2,1,6)=(4-x,-1-y,3-z)$$

$$-2=4-x \Rightarrow x=6$$

$$1=-1-y \Rightarrow y=-2$$

$$6=3-z \Rightarrow z=-3$$

$$AB=\sqrt{(-2)^2+1^2+6^2}=\sqrt{41}$$

$$AD=\sqrt{5^2+(-4)^2+0^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

إذن $ABCD$ معين عندما $D(6,-2,-3)$

$\overrightarrow{AC}(3,-3,6)$

$\overrightarrow{BD}(7,-5,-6)$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=21+15-36=0$$

إذن $BD \perp AC$ فالقطران متعامدان

قطرا المعين متناصفان

$$x_I=\frac{x_C+x_A}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$y_I=\frac{y_C+y_A}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$z_I=\frac{z_C+z_A}{2}=\frac{3-3}{2}=0$$

$$I\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

معادلة المستوي المحوري

نفرض $M(x,y,z)$ $MA=MB$

نربع الطرفين $MA^2=MB^2$

السؤال الخامس:

1) إثبات: $\vec{MA} - 2\vec{MB} = -\vec{MJ}$

$\ell_1 = \vec{MA} - 2\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IA} - 2\vec{MI} - 2\vec{IB}$

$= -\vec{MI} + \underbrace{\vec{IA} - \vec{IA}}_{=0} = -\vec{MJ} = \ell_2$

محققة

إثبات: $\vec{MC} - 2\vec{MD} = -\vec{MJ}$

$\ell_1 = \vec{MC} - 2\vec{MD}$

$= \vec{MJ} + \vec{JC} - 2\vec{MJ} - 2\vec{JD}$

$= -\vec{MJ} + \underbrace{2\vec{JD} - 2\vec{JD}}_{=0} = -\vec{MJ} = \ell_2$

محققة

2) نفرض G مركز ثقل المثلث BCD

$\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MG}$

$3\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} =$

$3\vec{MA} - (\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) =$

$3\vec{MA} - (3\vec{MG}) = 3\vec{MA} + 3\vec{GM}$

$= 3(\underbrace{\vec{MA} + \vec{GM}}_{شال}) = 3\vec{GA}$

$\Rightarrow \|3\vec{MG}\| = \|3\vec{GA}\|$

$3MG = 3GA \Rightarrow MG = GA$

مجموعة النقاط M تمثل كرة مركزها G ونصف قطرها GA

التمرين الأول:

1) $\vec{AB}(-3, 2, 1)$

$$(AB): \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = 1t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{u}_D = \vec{n}_P = (1, -1, 2)$

$$D: \begin{cases} x = K - 1 \\ y = -K + 2 \\ z = 2K + 7 \end{cases} \quad K \in \mathbb{R}$$

نقطة تقاطع D و (AB) بالحل المشترك

$-3t + 2 = K - 1$ (1)

$2t + 1 = -K + 2$ (2)

$t - 1 = 2K + 7$ (3)

من (1) $\boxed{K = -3t + 3}$

نعوض في (3) $t - 1 = -6t + 6 + 7$

$7t = 14 \Rightarrow \boxed{t = 2}$

$\Rightarrow \boxed{K = -3}$

نعوض في (2)

$4 + 1 = +3 + 2$

$5 = 5$ محققة

متقاطعان في نقطة $(-4, 5, 1)$

2) المسقط القائم لـ D على المستوي P

نفرض $D'(x, y, z)$ المسقط القائم لـ D على P

$\vec{D'D} = K\vec{n}_P$

$(-1-x, 2-y, 7-z) = K(1, -1, 2)$

$-1 - x = K \Rightarrow x = -1 - K$

$2 - y = -K \Rightarrow y = 2 + K$

$7 - z = 2K \Rightarrow z = 7 - 2K$

بما أن D' تقع في المستوي P نعوض

$(-1-K) - (2+K) + 2(7-2K) + 1 = 0$

$-1 - K - 2 - K + 14 - 4K + 1 = 0$

$-6K = -12$

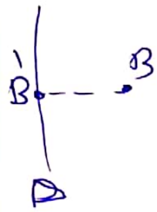
$\boxed{K = 2}$

$D'(-3, 4, 3)$ وبالتالي

المسقط القائم لـ B على D

نفرض B' مسقط قائم لـ B على D

حيث $B'(x, y, z)$



$$\vec{BB'} \cdot \vec{u_D} = 0$$

$$(x+1, y-3, z)(1, -1, 2) = 0$$

$$x + 1 - y + 3 + 2z = 0$$

$$x - y + 2z + 4 = 0$$

بما أن B' تنتمي للمستقيم D إذن

$$K - 1 - (-K + 2) + 2(2K + 7) + 4 = 0$$

$$6K + 15 = 0 \Rightarrow K = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$$

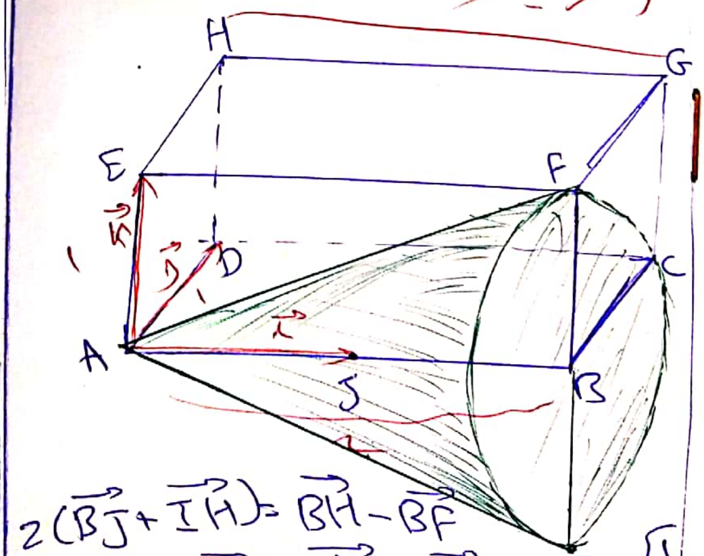
$$x = -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$$

$$y = -\left(-\frac{5}{2}\right) + 2 = \frac{9}{2}$$

$$z = 2\left(-\frac{5}{2}\right) + 7 = \frac{4}{2} = 2$$

$$B'\left(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 2\right)$$

التمرين الثاني



1)

$$2(\vec{BJ} + \vec{IH}) = \vec{BH} - \vec{BF}$$

$$2\vec{BJ} + 2\vec{IH} = \vec{BH} + \vec{FB}$$

$$\vec{BA} + \vec{EH} = \vec{FH}$$

$$\vec{FE} + \vec{EH} = \vec{FH}$$

ومنه $\vec{FH} = \vec{FH}$

محققة

2) من العلاقة السابقة

$$2\vec{BJ} + 2\vec{IH} = \vec{BH} - \vec{BF}$$

$$2\vec{BI} + 2\vec{IJ} + 2\vec{IF} + 2\vec{FH} = \vec{FH}$$

$$2\vec{BF} + 2\vec{FI} + 2\vec{IJ} + 2\vec{JF} = -\vec{FH}$$

شعاعان متعاكسان $= 0$

$$2\vec{FB} - 2\vec{IJ} = \vec{FH}$$

إذن الأشعة $\vec{FH}$ و $\vec{IJ}$ و $\vec{FB}$ مرتبطة خطيا

حيث $\vec{FB}$ و $\vec{IJ}$ غير مرتبطان خطيا

3) نفرض معلم متجانس $(A, \frac{1}{2}\vec{AJ}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$K(2, 1, \frac{1}{2})$ $I(0, \frac{1}{2}, 1)$

حساب إحداثيات منتصف $[AG]$

$A(0,0,0)$ $G(2,1,1)$

$$x_o = \frac{x_A + x_G}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$y_o = \frac{y_A + y_G}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$z_o = \frac{z_A + z_G}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$O\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{OK}\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\vec{OI}\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{OK} \cdot \vec{OI} = 1(-1) + \frac{1}{2}(0) + 0\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\|\vec{OK}\| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\|\vec{OI}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$\|\vec{OK}\|\cdot\|\vec{OI}\| = \sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$$

$$\vec{OK}\cdot\vec{OI} = |\vec{OK}|\cdot|\vec{OI}|\cos K\hat{O}I$$

$$-1 = \frac{5}{4}\cos K\hat{O}I$$

$$\cos K\hat{O}I = -\frac{4}{5}$$

$r = FB = 1$

$h = AB = 2$

محوره $(O,\vec{i})$

المعادلة $y^2+z^2-\frac{1}{4}x^2=0$

$0 \le x \le 2$

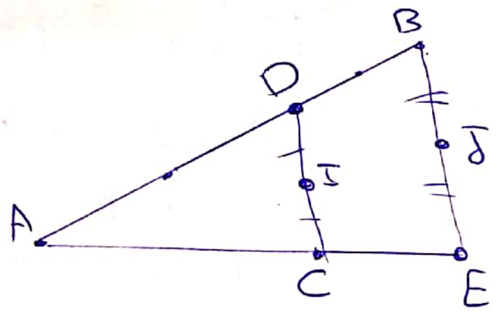
التمرين الثالث :

$3\vec{AD} = 2\vec{AB} \Rightarrow \vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB}$

$\vec{AE} = 3\vec{CE}$

$\vec{AE} = 3\vec{CA} + 3\vec{AE}$

$-2\vec{AE} = -3\vec{AC} \Rightarrow \vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AC}$



في المثلث ADC حسب علاقة المتوسط

$\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AD}+\vec{AC})$

$\vec{AI} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\vec{AB}+\vec{AC})$

في المثلث ABE حسب علاقة المتوسط

$\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AE})$

$= \frac{1}{2}(\vec{AB}+\frac{3}{2}\vec{AC})$

$\frac{2}{3}\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\vec{AB}+\vec{AC})$

$\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AJ}$

إذن الشعاعان $\vec{AI}$ و $\vec{AJ}$ مرتبطان خطيا لأنه ينتج أحدهما الآخر بضربه بعدد حقيقي

$\Leftarrow$ A و I و J تقع على استقامة واحدة.

التمرين الرابع :

$A(1,0,-1)$ $B(2,2,3)$

$C(3,1,-2)$ $D(-4,2,1)$

1) $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{1+2+3}{3} = 2$

$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{0+2+1}{3} = 1$

$z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{-1+3-2}{3} = 0$

$G(2,1,0)$

2) $x_{G'} = \frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$= \frac{3(1)+(-1)(0)+1(-1)}{3-1+1} = \frac{2}{3}$

$y_{G'} = \frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

$= \frac{3(0)+(-1)(2)+1(1)}{3-1+1} = \frac{-1}{3}$

$z_{G'} = \frac{3(-1)+(-1)(3)+1(-2)}{3-1+1}$

$= \frac{-8}{3}$

$G'(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{-8}{3})$

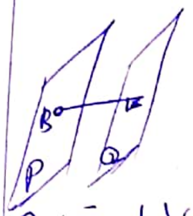
3) بما أن G مركز ثقل المثلث ABC

$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC} = 3\vec{MG}$

بما أن G' مركز الأبعاد المتناسبة للنقط $(A,3)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

$$dist(B, Q) = \frac{|4(0)+2(0)-2(-3)-1|}{\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5\sqrt{24}}{25}$$



نفرض $\vec{u}(a, b, c)$

2] بما ان المستقيم محتوى في المستوى P

$\vec{u} \cdot \vec{n}_P = 0$

$(a, b, c)(2, 1, -1) = 0$

$2a + b - c = 0$ (1)

$\vec{AB} = K\vec{u}$

$(-1, -3, -5) = K(a, b, c)$

$-1 = Ka$

$-3 = Kb$

$-5 = Kc$

باختيار $K = 1$

$\Rightarrow a = -1,\ b = -3,\ c = -5$

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -3t + 3 \\ z = -5t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

طريقة أسهل:

A و B تنتميان للمستقيم

لذا المستوي P كما عرفته من المستقيمات تقع فيه لذلك لنأخذ B تقع على المستقيم فتكون كتبنا أحدها

$\vec{AB}(-1, -3, -5)$

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -3t + 3 \\ z = -5t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = (3-1+1)\vec{MG'}$

$3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG'}$

$\Rightarrow \|3\vec{MG}\| = \|3\vec{MG'}\|$

$3MG = 3MG'$

$MG = MG'$

تمثل معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

4] نفرض $M(x, y, z)$

$MG = MG'$

نربع الطرفين

$MG^2 = MG'^2$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = \left(x-\tfrac{2}{3}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{3}\right)^2 + \left(z+\tfrac{8}{3}\right)^2$$

بالإصلاح نجد

$$-4x - \tfrac{8}{3}y - \tfrac{16}{3}z - \tfrac{8}{3} = 0$$

نضرب ب $-\frac{3}{4}$

$+3x + 2y + 4z + 2 = 0$

التمرين الخامس:

$P: 2x + y - z = 3$

$Q: 4x + 2y - 2z = 1$

$\vec{n}_P(2, 1, -1)$ $\vec{n}_Q(4, 2, -2)$

$\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ مرتبطان خطيا لذا مركباتها متناسبة إذن المستويان متوازيان

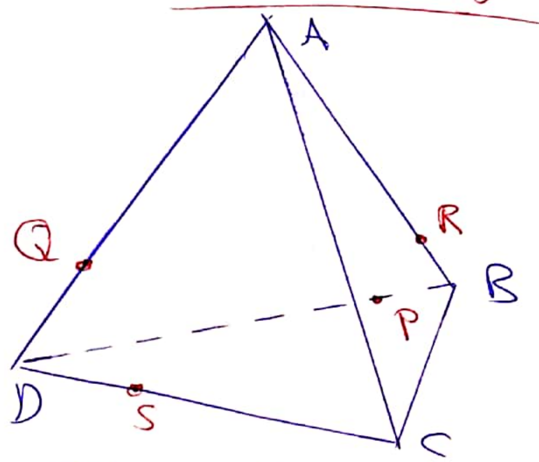
لنفرض نقطة B تنتمي للمستوي P

$x = 0,\ y = 0 \Rightarrow z = -3$

$B(0, 0, -3)$

لنجد بعد النقطة B عن المستوى Q

التمرين السادس:



من العلاقة $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BA}$

R مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,4)$

من العلاقة $\overrightarrow{DS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

S مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(C,1)$ $(D,3)$

من العلاقة $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$

P مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(C,1)$ $(B,4)$

من العلاقة $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

Q مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ $(D,3)$

لنفرض G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$

حسب الخاصية التجميعية G مركز أبعاد متناسبة لـ $(R,5)$ و $(S,4)$

$\Rightarrow G\in(SR)$

حسب الخاصية التجميعية G مركز أبعاد متناسبة لـ $(Q,4)$ و $(P,5)$

$\Rightarrow G\in(PQ)$

النقطة G مركز أبعاد متناسبة وتنتمي للمستقيمان (SR) و (QP) معاً

إذن (SR) و (PQ) متقاطعان

المسألة الأولى:

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$$

$$2\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AK}-3\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KG}$$

$$\vec{0}=-2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KG}$$

$\Leftarrow$ K مركز أبعاد متناسبة لـ $(C,-2)$ $(B,1)$ $(G,3)$

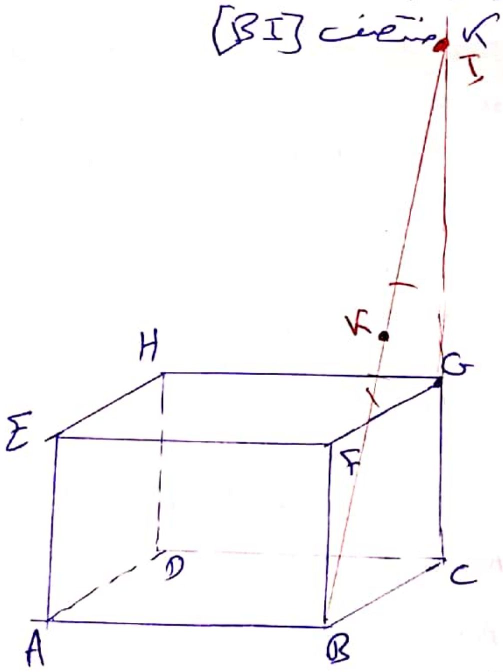
رسم K

لنفرض I مركز أبعاد متناسبة لـ $(G,3)$ $(C,-2)$

$$\overrightarrow{CI}=\frac{3}{3-2}\overrightarrow{CG}\Rightarrow\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CG}$$

حسب الخاصية التجميعية K مركز أبعاد متناسبة لـ $(I,1)$ و $(B,1)$

إذن K منتصف $[BI]$



حل الطلب الأول: من العلاقة

$$2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$$

$$\cancel{2\overrightarrow{AB}}+2\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}+\cancel{\overrightarrow{BA}}+3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BG}$$

$$2\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{BK}=-\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$$

الأشعة $\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BG}$ مرتبطة خطياً

$\Leftarrow K\in(BCG)$

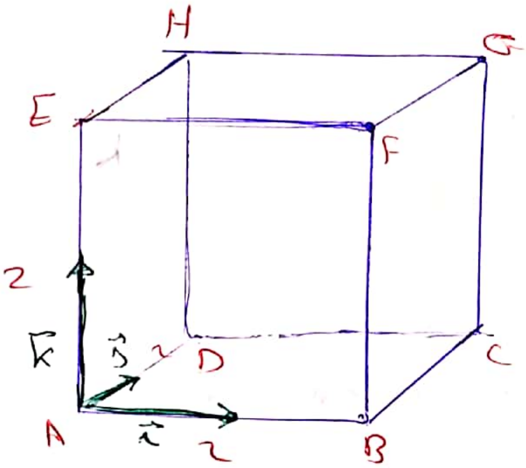
$$V = \frac{1}{3} S h$$ (3

$S_{ABEF} = 2^2 = 4$

$h = GF = 2$

$$V = \frac{1}{3}(4)(2) = \frac{8}{3}$$

(4



(a

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,2,0)$

$D(0,2,0)$ $E(0,0,2)$ $F(2,0,2)$

$G(2,2,2)$ $H(0,2,2)$

(b

$\vec{AB}(2,0,0)$

$\vec{AC}(2,2,0)$

$\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطان خطياً لذن مركباتها غير متناسبة إذن هما شعاعي توجيه المستوي

نفرضها ناظم المستوي ABC

$\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

$(a,b,c)(2,0,0) = 0 \Rightarrow 2a = 0$ $\boxed{a=0}$

$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 0$

$(a,b,c)(2,2,0) = 0$

$2a + 2b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow \boxed{b=0}$

لنفرض $\boxed{c=1}$

$z + d = 0$

نعوض النقطة B

$0 + d = 0 \Rightarrow d = 0$

$(ABC): \boxed{z = 0}$

[c $r = FB = 2$

$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 4$

$(x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$

[d تعديل: ادرس الوضع النسبي للمستوى ABC والكرة S.

$$dist(F, ABC) = \frac{|2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = 2$$

$dist(F, ABC) = R$

إذن المستوي مماس للكرة في النقطة B

المسألة الثانية:

[1
$$D' : \begin{cases} x = -2t + 5 \\ y = 1t - 1 \\ z = 1t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

[2 $\vec{u}_D(3,2,4)$, $\vec{u}_{D'}(-2,1,1)$

غير مرتبطان خطياً لذن مركباتها غير متناسبة

إذن المستقيمان إما متقاطعان أو متخالفان بالحل المشترك

$-2t + 5 = 1 + 3K$ ①

$t - 1 = 1 + 2K$ ②

$t - 2 = 4K$ ③

من ③ $\boxed{t = 4K + 2}$ نعوض في ②

$4K + 2 - 1 = 1 + 2K$

$2K = 0 \Rightarrow K = 0$

$\Rightarrow t = 2$

نعوض في ① $-2(2) + 5 = 1 + 3(0)$

$1 = 1$ محققة

إذن متقاطعان في نقطة

نعوض $K=0$ في D $\Leftarrow C(1,1,0)$

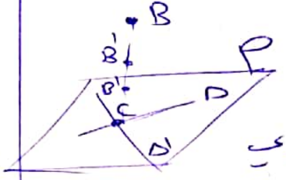
3) $\vec{u}_{D} \cdot \vec{u}_{D'} =$

$(3,2,4)(-2,1,1) =$

$-6+2+4=0$

إذن متعامدان D و D' .

4)



a) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعي توجيه المستوي هما $\vec{u}_{D'}$ و $\vec{u}_{D}$

$\vec{n} \cdot \vec{u}_{D} = 0$

$(a,b,c) \cdot (3,2,4) = 0$

$\boxed{3a+2b+4c=0}$ (1)

$\vec{n} \cdot \vec{u}_{D'} = 0$

$(a,b,c)(-2,1,1) = 0$

$\boxed{-2a+b+c=0}$ (2)

بالحل المشترك لـ (1) و (2)

من (2)

(3) $\boxed{b=2a-c}$

نعوض في (1)

$3a+4a-2c+4c=0$

$\boxed{7a+2c=0} \Rightarrow c=-\frac{7}{2}a$

$b = 2a+\frac{7}{2}a = \frac{11}{2}a = b$

باختيار $a=2 \Leftarrow b=11 , c=-7$

$\vec{n}(2, 11, -7)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$2x+11y-7z+d=0$

نعوض نقطة C

$2(1)+11(1)-7(0)+d=0$

$13+d=0$

$\boxed{d=-13}$

$\boxed{P: 2x+11y-7z-13=0}$

b) لنفرض أن مسقط B على المستوي P هو $B'(x,y,z)$

$\vec{BB'} = K\vec{n}_P$

$(x-3, y-12, z+7) = K(2,11,-7)$

$x-3=2K \Rightarrow x=2K+3$

$y-12=11K \Rightarrow y=11K+12$

$z+7=-7K \Rightarrow z=-7K-7$

$B'(2K+3, 11K+12, -7K-7)$

النقطة B' تنتمي للمستوي P

$2(2K+3)+11(11K+12)-7(-7K-7)-13=0$

$4K+6+121K+132+49K+49-13=0$

$174K=-174$

$\Rightarrow K=-1$

$x=1 , y=1 , z=0$

$B'(1,1,0)$

إذن: B' هي C ⇐ C مسقط B على P

5) $P': 13x-y-2z-41=0$

بالحل المشترك لـ P' و D

$13(1+3K)-(1+2K)-2(4K)-41=0$

$13+39K-1-2K-8K-41=0$

$29K=29 \Rightarrow \boxed{K=1}$

$x=1+3(1)=4$

$y=1+2(1)=3$

$z=4(1)=4$

$D(4,3,4)$

المسألة الثالثة:

1

$$d:\begin{cases} x=4t-1 \\ y=1t+0 \\ z=-2t+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

$$d':\begin{cases} x=3K \\ y=K \\ z=-K+1 \end{cases} \quad K\in\mathbb{R}$$

بما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطان خطياً إذن
إما المستقيمان متقاطعان أو متخالفان

$4t-1=3K$ (1)

$t=K$ (2)

$-2t+2=-K+1$ (3)

نعوض (2) في (3)

$2-2t=-t+1$

$+t=+1 \Rightarrow \boxed{t=+1=K}$

نعوض في (1)

$+4-1=3(1)$

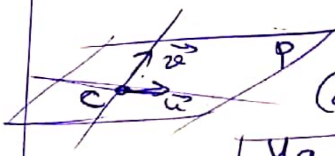
$3=3$ محققة

إذن المستقيمان متقاطعان في نقطة

$x=3 \quad y=1 \quad z=0$

$I(3,1,0)$

2 نفرض $\vec{n}(a,b,c)$



$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$

$(a,b,c)(4,1,-2)=0$

$\boxed{4a+b-2c=0}$ (1)

$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

$(a,b,c)(3,1,-1)=0$

$\boxed{3a+b-c=0}$ (2)

من (1) $\boxed{b=-4a+2c}$ (3)

نعوض في (2)

$3a-4a+2c-c=0$

$-a+c=0 \Rightarrow \boxed{c=a}$

نعوض في (3)

$b=-4a+2a=-2a$

$\boxed{b=-2a}$

نفرض $a=1 \Leftarrow b=-2,\ c=1$

$\vec{n}(1,-2,1)$

$ax+by+cz+d=0$

$x-2y+z+d=0$

نعوض نقطة C

$(3)-2(1)+0+d=0$

$1+d=0$

$\boxed{d=-1}$

$P: \boxed{x-2y+z-1=0}$

3 نفرض $\vec{n}_Q(a,b,c)$

$\vec{n}_P\cdot\vec{n}_Q=0$

$(a,b,c)\cdot(1,-2,1)=0$

$\boxed{a-2b+c=0}$ (1)

$\vec{AB}\cdot\vec{n}_Q=0$

$(1,0,-1)(a,b,c)=0$

$\boxed{a-c=0} \Rightarrow \boxed{a=c}$ (2)

نعوض (2) في (1)

$a-2b+a=0 \Rightarrow \boxed{a=b}$

نفرض $a=1 \Leftarrow b=1,\ c=1$

$\vec{n}_Q(1,1,1)$

$ax+by+cz+d=0$

$x+y+z+d=0$

$0+0+1+d=0$ نعوض B

$\boxed{d=-1}$

$Q: \boxed{x+y+z-1=0}$

4

$$R=dist(I,Q)=\frac{|(3)+(1)+(0)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\sqrt{3}$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=3$$

5 بالحل المشترك للمستويين P و Q

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0 & ① \\ x+y+z-1=0 & ② \end{cases}$$

بطرح ① و ②

$-3y=0 \Rightarrow y=0$

نعوض في ① $x+z-1=0$

$\boxed{x=1-z}$

معادلات وسيطية
$$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

إذن $C'(-t+1,0,t)$

$\overrightarrow{CC'}\cdot\vec{u}=0$

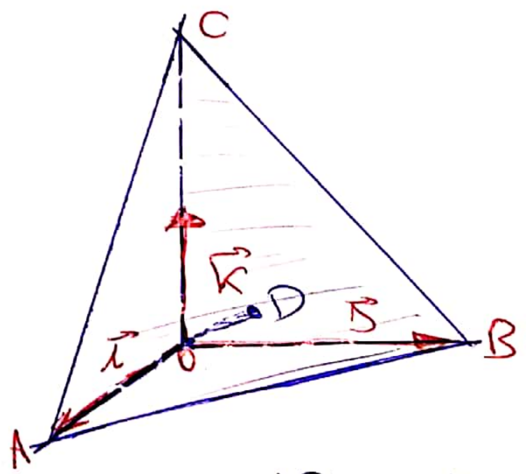
$(-t-1,1,t)\cdot(-1,0,1)=0$

$+t+1+0+t-1=0$

$2t=0 \Rightarrow t=0$

$C'(1,0,0)$

المسألة الرابعة:



$O(0,0,0)$ $A(1,0,0)$

$B(0,1,0)$ $C(0,0,2)$

نفرض $D(x,y,z)$

نوجد ناظم المستوي (ABC)

$\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$

$\overrightarrow{AC}(-1,0,2)$

مستقلين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

نفرض ناظم المستوي (ABC)

$\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$(a,b,c)(-1,1,0)=0$

$-a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=a}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$(a,b,c)(-1,0,2)=0$

$-a+2c=0 \Rightarrow \boxed{c=+\frac{1}{2}a}$

نفرض $a=2 \Leftarrow b=2$ و $c=1$

$\vec{n}(2,2,1)$

$P: 2x+2y+z+d=0$

نعوض A $2+0+0+d=0$

$d=-2$

$\boxed{2x+2y+z-2=0}$

$\overrightarrow{OD}=k\vec{n}$

$(x,y,z)=k(2,2,1)$

$x=2k$

$y=2k$ $D(2k,2k,k)$

$z=k$

نعوض D في المستوي

$4k+4k+k-2=0$

$9k=2 \Rightarrow k=\frac{2}{9}$

$\Rightarrow x=\frac{4}{9}\ ,\ y=\frac{4}{9}\ ,\ z=\frac{2}{9}$

$D(\frac{4}{9},\frac{4}{9},\frac{2}{9})$

2)

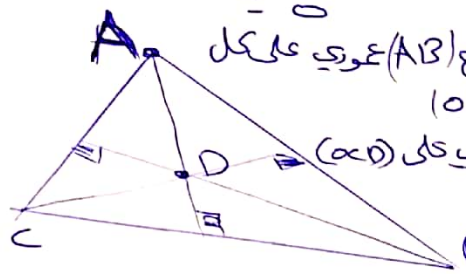
$\vec{OD} \cdot \vec{AB}$

$\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) \cdot (-1, 1, 0)$

$-\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 0 = 0$

$\vec{OC} \cdot \vec{AB} = (0, 0, 2)(-1, 1, 0)$

$= 0$



عبارة المستقيم (AB) عمودي على كل من (OD) و (OC)

⇐ AB عمودي على (OCD)

3)

$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (-1, 1, 0)\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{-16}{9}\right)$

$= -\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 0 = 0$

$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (-1, 0, 2)\left(\frac{4}{9}, \frac{-5}{9}, \frac{2}{9}\right)$

$= -\frac{4}{9} + 0 + \frac{4}{9} = 0$

$AC \perp BD$ & $CD \perp AB$ عبارة

⇐ D نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث ABC

4) الارتفاع OC القاعدة OBA

$S_{OAB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{1}{2}$

$h = 2$

$V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{3}$

انتهى

بالتوفيق لجميع الطلبة.

Wissam & Rasha