سلسلة المفيد
في كفايات المعلمين
الرياضيات

جميع المراحل

للوصول إلى
فيديوهات شروحات
المعايير **اضغط هنا**

إعـــداد
أ/ سرحان جري السرحان   أ/ أميرة حامد الشمري

2018

فهرسة
مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

بن سرحان ، سرحان بن جري بن خلف
المفيد في كفايات الرياضيات. / سرحان بن جري بن خلف بن سرحان ; أميرة بنت حامد الشمري - الرياض ١٤٣٨هـ
ص ٢٤٩ : ٢١ x ٣٠ سم
ردمك : ٥ - ٥١٢٨ - ٠٢ - ٦٠٣ - ٩٧٨
١- المفيد رياضيات ٢- كفايات رياضيات ٣- معايير قياس
أ. أميرة بنت حامد الشمري (مؤلف مشارك)
ب- العنوان ديوي ٥١٠ ١٤٣٨/١٠١٢٧

رقم الإيداع : ١٤٣٨/١٠١٢٨
ردمك : ٥ - ٥١٢٨ - ٠٢ - ٦٠٣ - ٩٧٨

المقدمة

الرياضيات بعامة الحياة هي المنظمة ليومنا الحاضر، فقد ارتبطت درجة التطور الحضاري للمجتمع بعلاقة طردية مع درجة نمو وازدهار العلوم الرياضية، فإذا كان هناك مجتمع متقدم حضارياً، فإنه على درجة عالية من التقدم الرياضي .

لقد أصبحت الرياضيات الرفيق الوفي للانسان ، والمساعد له منذ بداية وجود البشرية على الأرض حتى وقتنا الحاضر ، فعندما أراد الإنسان في السابق الإجابة على بعض الأسئلة مثل "كم عدد ؟ " ، "ما حجم ؟ " ... إلخ ، اخترع علم الحساب، وبعد ذلك تم ابتكار علم الجبر لتسهيل العمليات الحسابية ، وأمام القياسات والأشكال تم ابتكار علم الهندسة ، وظهر علم حساب المثلثات عندما أراد الإنسان تحديد مواقع الجبال العالية والنجوم .

كما أن الرياضيات ضرورية لفهم الفروع الأخرى في المعرفة ، فجميعها تعتمد عليها بطريق أو بآخر لأنها تعد من العلوم التي لها تكامل متبادل مع ثورة المعلومات ، وليس هناك علم أو فن إلا وكانت الرياضيات مفتاحا له، وإن إتقان أي علم يرتبط بدرجة كبيرة بحجم الرياضيات التي ينتفع بها .

ففي نصف القرن الماضي، جاءت حركة الأهداف السلوكية تؤكد في شكل أفعال إجرائية يمكن قياسها، تلا ذلك حركة نواتج التعلم التي اهتمت بضرورة وجود نظرة استباقية لعوائد ونواتج العملية التعليمية ، ثم انتشرت ثقافة المعايير، وتسابقت المؤسسات التربوية في دول مختلفة في وضع معايير لما يجب أن يعرفه المتعلم من الرياضيات، وما ينبغي أن يقدر على القيام به من خلالها وذلك منذ بداية طفولته وخلال مراحل نموه ومراحل تعليمه وتعلمه حتى تخرجه .

وتمثل "معايير الرياضيات المدرسية" حجر الزاوية في كيفية تعلم الرياضيات وتعليمها، وتقديمها عبر مراحل الدراسة المختلفة، إضافة إلى قواعد المنهاج الرياضي المتزن، الذي يسلط الضوء على الأفكار الرياضية والإجراءات .

وبناء على ما سبق، فإن هذا الكتاب سوف يسلط الضوء على معايير المركز الوطني للقياس والتقويم في المملكة العربية السعودية لاختبار الكفايات في تخصص الرياضيات لجميع مراحل التعليم العام، وإنا لنرجو من الله أن ينفع به، وأن يحقق أمل كل من عمل عليه وأن يجعله شاهداً لنا لا علينا ، وأنه ولي ذلك والقادر عليه وصلى الله وسلم على نبينا محمد .

نصائح عامة من فريق العمل

ثق بالله أولاً ، وبكل قدر يقدره عليك ، واعلم أن الخير كل الخير فيما يكتبه لك ، فطمئن لحسن تدبيره وتصريفه .

ثق بنفسك وبقدرتك على تجاوز كل عثرة في طريقك .

قبل البدء بالمذاكرة ، اطلع على الكتاب بنظرة سريعة ، وتعرف على المواضيع الموجودة فيه .

حدد المواضيع التي تجد فيها صعوبة وخصص لها ساعات للبحث والاطلاع عنها سواء بالكتاب أو خارج الكتاب .

ضع لنفسك جدول ونظام مذاكرة خاص فيك وبالشكل الذي يناسبك ، على أن لا تقل مذاكرتك الذاتية عن ساعتين بشكل يومي .

في نهاية كل موضوع توجد مجموعة من الأسئلة ، حاول حلها أولاً بنفسك ثم إطلع على الحل الصحيح .

جرّب أن تحل بطرق مختلفة وتمرن على ذلك واعتمد الطريقة الاسرع والاسهل بالنسبة لك .

بعد الانتهاء من جميع المعايير ، خصص إسبوع كامل للتدريب على جميع الأسئلة .

حدد ١٥ سؤال ، وخصص لها ٢٥ دقيقة وتدرب على ضبط الوقت والحل بأسرع مايمكن .

في البداية ستخطئ كثيراً ، فلا يصيبك احباط ولكن مع كثرة المحاولات المتكررة ستصل الى نتيجة مرضية .

قياس لا يعتمد على الحظ ، ولكن على قدر مذاكرتك واجتهادك ومحاولاتك في حل الأسئلة يكون مردوده عليك يوم الاختبار .

كل معلومه تبحث عنها ، أو سؤال تحاول حله ، أو قانون تتعلمه يرفع بمشيئة الله درجتك ومخزونك العلمي .

لا تتردد في طلب المساعدة من الاعضاء المتواجدين في المجموعة .

أخيراً ، النجاح تفاؤل وإيمان بالله والتوكل عليه وحسن ظن به لا يهتز ، ونتاج مجهودات وعزيمة لا تكل ولا تمل .

للوصول إلى

فيديوهات شروحات

المعايير اضغط هنا

المعيار الأول
(الأعداد والعمليات عليها)

1) مجموعات الأعداد
2) تصنيف الاعداد
3) خواص الاعداد الحقيقة والعمليات عليها
4) مجموعة الأعداد النسبية
5) العمليات على الأعداد النسبية
6) الاسس والجذور
7) القاسم المشترك الأكبر gcd - المضاعف المشترك الأصغر lcm .
8) اولوية العمليات الحسابية
9) قابلية القسمه
10) التطابقات $a \equiv b \ (mod\ n)$
11) النسبه والنسبة المئوية والتناسب
12) الأعداد المركبة

1) مجموعات الأعداد :

الأعداد المركبة C

تكتب على صورة $a + bi$

حيث a الجزء الحقيقي ، و bi الجزء التخيلي

اذا كان $b = 0$

تكون أعداد حقيقية $\mathbb{R}$

اذا كان $a = 0$

تكون اعداد تخيلية بحته

الأعداد النسبية Q

مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

Z = { ....,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}

مجموعة الأعداد الكلية $\mathbb{W}$

W = { 0,1,2,3,..........}

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

N = { 1,2,3,................}

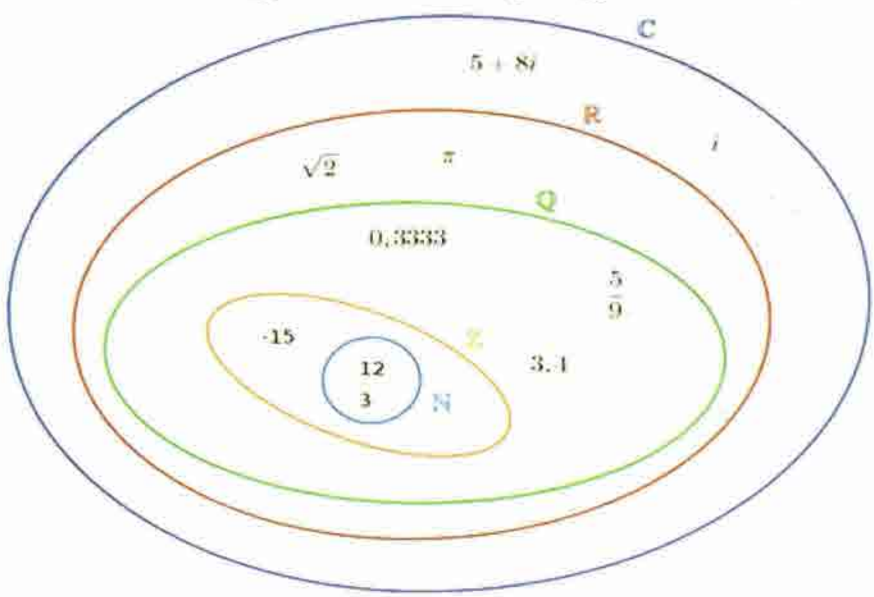
الأعداد غير النسبية I

أمثلة : .... , $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$, ...

π , e , $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ملاحظة : قيمة العدد $\pi = 3.14$ تقريباً والعدد $e = 2.71$ تقريباً .



2) تصنيف الأعداد :

- **مجموعة الأعداد الزوجية**: $\mathbb{E} = \{0 , \pm 2 , \pm 4 , \pm 6 , \pm 8 , \dots\}$
ويمكن كتابتها على الصورة $x = 2n$

- **مجموعة الأعداد الفردية** : $\mathbb{O} = \{\pm 1 , \pm 3 , \pm 5 , \pm 7 , \dots\}$.
ويمكن كتابتها على الصورة $x = 2n + 1$

- **الأعداد الأوليه (غير المؤلفة)** :
هي الأعداد التي تقبل القسمة على نفسها والواحد الصحيح , أي تتكون من حاصل ضرب عاملين فقط هما الواحد الصحيح والعدد نفسه .
$2, 3 , 5 , 7 , 11 , 13, 17,19 \dots$ جميعها أعداد فردية عدا ال 2عدد زوجي .

- **الأعداد المؤلفة (غير أولية)** :
هي الأعداد التي لها أكثر من عاملان .

عدد فردي مؤلف — مثال : $9 , 15 , 21, \dots$

عدد زوجي مؤلف — مثال : $4 , 12, 56 , \dots$

- **العدد صفر** : بعض الكتب تصنفه على أنه عدد زوجي مؤلف لانه يقبل القسمة على جميع الأعداد عدا نفسه .
- **العدد 1** : عدد فردي ليس أولي وليس مؤلف .

للتوضيح :

الأعداد الفردية :

عدد أولي

3 , 5 , 7 , **9** , 11 , 13 , **15** , 17 , 19 , **21** , 23 , …………..

غير أولي (مؤلف)

الأعداد الزوجية :

2 , **4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16 , 18 , 20 , 24 , ………………**

أولي — غير أولي (مؤلف)

- عند جمع عددان فرديان الناتج يكون عدد زوجي مؤلف .

مثال :

$9+3=12 \quad , \quad 7+15=22$

- عند طرح عددان فرديان غير متتاليان الناتج عدد زوجي مؤلف .

مثال :

$11-3=8 \quad , \quad 27-21=6$

مثـــــــال	الحـــل
1) الترتيب التصاعدي للمجموعة $\{2, \sqrt{2}, \pi, e, 3\}$ هو : أ) $\{\sqrt{2}, 2, e, 3, \pi\}$ ب) $\{e, \sqrt{2}, 2, 3, \pi\}$ ج) $\{e, \sqrt{2}, 2, \pi, 3\}$ د) $\{\sqrt{2}, e, 2, \pi, 3\}$	$\pi = 3.14 \quad , \quad e = 2.71$ $1 < \sqrt{2} < 2$ الترتيب تصاعدي $\{\sqrt{2}, 2, e, 3, \pi\}$
2) لأي قيم n الآتية يكون العدد n^2+2n+5 مؤلف(غير أولي) ؟ أ) 6 ب) 5 ج) 4 د) 2	بتجربة الخيارات: $n=6 \rightarrow n^2+2n+5=53$ $n=5 \rightarrow n^2+2n+5=40$ $n=4 \rightarrow n^2+2n+5=29$ $n=2 \rightarrow n^2+2n+5=13$
3) إذا كان $(7k+1)$ عدداً زوجياً حيث $K \in N$ فإن $(7K+1)^2$ هو عدد: أ) زوجي مؤلف ب) فردي مؤلف ج) زوجي أولي د) فردي أولي	مربع العدد الزوجي هو عدد زوجي مؤلف { غير أولي}.
4) عددين أوليين مختلفين بحيث ناتج قسمة عدد أولي على عدد أولي يساوي : أ) عدد فردي ب) عدد أولي ج) عدد كسري د) عدد زوجي	افرض عددين أوليين وليكن 5 , 3 فيكون : $\frac{3}{5}$ أو $\frac{5}{3}$ عدد كسري
5) أي من مجموعة الأعداد يكون الناتج n^2+2n+5 عدد أولي : أ) الأعداد الحقيقية ب) الأعداد الزوجية ج) الأعداد الفردية د) الأعداد النسبية	عند اختيار أي عدد زوجي وليكن 2 ونعوض به في المقدار يكون الناتج أولي $n^2+2n+5=4+4+5=13$ الحل الأعداد الزوجية

3) خواص الأعداد الحقيقية والعمليات عليها :

خاصية المحايد الجمعي	$a + 0 = a$
خاصية المحايد الضربي	$a \cdot 1 = a$
خاصية النظير الجمعي	$a + (-a) = 0$
خاصية النظير الضربي	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$
خاصية الابدال	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$
خاصية التجميع	$a + (b + c) = (a + b) + c$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
خاصية التوزيع	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

المعكوس (النظير) الجمعي لعدد : هو نفسه مع تغيير إشارته.
المعكوس (النظير) الضربي لعدد: هو مقلوبه بنفس الاشارة
(الصفر ليس له معكوس ضربي).

العدد	النظير الجمعي	النظير الضربي
10	-10	$\frac{1}{10}$
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$\frac{-2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-7}{2}$
$\frac{-5}{-7}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$
$\frac{0}{7}$	0	ليس له نظير ضربي

قاعدة الإشارات في الأعداد الصحيحه :

جمع الإشارات المتشابهة	نضع نفس الإشارة ونجمع $-2 + (-3) = -5$	جمع الإشارات المختلفة	نضع إشارة الأكثر ونطرح $4 + (-7) = -3$
طرح	يقلب الطرح الى جمع ويتغير اشارة العدد الثاني ثم نطبق قاعدة الجمع $-2 - (-9) = -5$ $-2 + 9 = 7$		
ضرب الإشارات المتشابهة	الناتج موجب $-2 \times (-3) = 6$	ضرب الإشارات المختلفة	الناتج سالب $4 \times (-7) = -28$
قسمة الإشارات المتشابهة	الناتج موجب $\frac{-6}{-3} = 2$	قسمة الإشارات المختلفة	الناتج سالب $\frac{-6}{3} = -2$

4) مجموعة الأعداد النسبية :

العدد النسبي :
هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة بسط ومقام كلاهما عدد صحيح والمقام لا يساوي صفر

العدد النسبي

- **كسر**
  - **إعتيادي (فعلي)**: البسط أقل من المقام (قيمته أقل من الواحد لذا يسمى كسر حقيقي)
  - **مركب (غير فعلي)**: المقام أكبر من البسط (قيمته أكبر من الواحد لذا يسمى كسر غيرحقيقي)
- **عدد كسري**: مكون من عدد صحيح و كسر
- **كسر عشري**
  - **منتهي**: هو كسر مقامه 10 أو مضاعفاتها
  - **دوري**

كسر اعتيادي	كسر مركب	عدد كسري	كسر عشري
$\frac{1}{2}$ $\frac{6}{6}=1$ $\frac{0}{13}=0$	$\frac{8}{3}$	$5\frac{1}{6}$	$\frac{4}{10}=0.4$ $\frac{19}{100}=0.19$ $\frac{2}{1000}=0.002$ $\frac{1}{3}=0.3333\ldots=0.\overline{3}$

5) العمليات على الأعداد النسبية :

- **العمليات الأساسية :**

1) عمليتي الجمع والطرح (نوحد المقامات) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$

2) عملية الضرب (نضرب البسوط ببعض و المقامات ببعض) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

3) عملية القسمة (تقلب الى ضرب ويقلب الكسر الثاني) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

- **الكسور المتكافئة :**

هي كسور لها نفس القيمة وحدودها مختلفه وذلك بضرب أو قسمة كل من البسط والمقام في أو على نفس العدد

مثال : $\frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times2} = \frac{4}{6}$ أو $\frac{16}{24} = \frac{16\div2}{24\div2} = \frac{8}{12}$

- **تحويل الكسور الدورية الى كسور اعتيادية :**

مثال	القاعدة
$0.\overline{3} = 0.3333\ldots = \frac{3}{10-1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$	$0.\overline{a} = \frac{a}{10-1} = \frac{a}{9}$
$0.\overline{21} = \frac{21}{100-1} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$	$0.\overline{ab} = \frac{ab}{100-1} = \frac{ab}{99}$
$0.3\overline{24} = \frac{324-3}{1000-10} = \frac{321}{990} = \frac{107}{330}$	$0.a\overline{bc} = \frac{abc-a}{1000-10} = \frac{abc-a}{990}$
$0.37\overline{52} = \frac{3752-37}{10000-100} = \frac{3715}{9900}$	$0.ab\overline{cd} = \frac{abcd-ab}{10000-100} = \frac{abcd-ab}{9900}$
$1.2\overline{02} = 1\frac{202-2}{1000-10} = 1\frac{200}{990} = 1\frac{20}{99} = \frac{119}{99}$	$a.b\overline{cd} = a\frac{bcd-b}{1000-10} = a\frac{bcd-b}{990}$

الحـــل	مثـال
$8 \div \frac{4}{5} = 8 \times \frac{5}{4} = 2 \times 5 = 10$	(1 $8 \div \frac{4}{5} =$
$7 - 5\frac{2}{5} = 7 - \frac{27}{5} = \frac{35-27}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$	(2 $7 - 5\frac{2}{5} =$
$0.018 \times 2 = \frac{18}{1000} \times 2 = \frac{18}{500} = \frac{9}{250}$	(3 $0.018 \times 2 =$
$52 \div 0.4 = 52 \div \frac{4}{10} = 52 \times \frac{10}{4}$ $= 13 \times 10 = 130$	(4 $52 \div 0.4 =$
مقام المقام يكون بسط $8\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{2} + \frac{8}{4} = 4 + 2 = 6$	(5 $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} =$
$\frac{23}{6} = \frac{18+5}{6} = \frac{18}{6} + \frac{5}{6} = 3 + \frac{5}{6} = 3\frac{5}{6}$	6) أكتب الكسر غير الفعلي $\frac{23}{6}$ في صورة عدد كسري
المقامات موحدة , سوف نجمع البسوط $\frac{x-(3x+2)}{x+1} = \frac{x-3x-2}{x+1}$ $= \frac{-2x-2}{x+1} = \frac{-2(x+1)}{x+1} = -2$	7) $\frac{x}{x+1} - \frac{3x+2}{x+1}$ يساوي : أ) 2 ب) -2 ج) $\frac{-2x+2}{x+1}$ د) $\frac{-2x+2}{(x+1)^2}$
$0.1\overline{35} = \frac{135-1}{1000-10} = \frac{134}{990} = \frac{67}{495}$	8) الكسر الذي يساوي العدد العشري $0.1\overline{35}$ هو أ) $\frac{63}{495}$ ب) $\frac{64}{495}$ ج) $\frac{67}{495}$ د) $\frac{71}{495}$
$1.\overline{33} = 1\frac{33}{99} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	9) قيمة المقدار $1.\overline{33} =$ .... أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{4}{3}$ ج) $\frac{5}{3}$ د) $\frac{7}{3}$
$\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{2+3}{4} \div \frac{2}{3}$ $= \frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$	(11 $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \cdots$ أ) 1 ب) $\frac{5}{8}$ ج) $\frac{15}{4}$ د) $\frac{15}{8}$
$\frac{16}{5} = 3.2$ $2\sqrt{5} = 4.47$ $\pi = 3.14$ ترتيبها تصاعدياً الثاني	10) ما ترتيب العدد π ضمن الترتيب التصاعدي للأعداد الأربعة التالية: $2\sqrt{5}$, 3.13131 , $\frac{16}{5}$, π أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع

• **للمقارنة بين كسرين :**

1) **إذا كان لهما نفس المقام**	2) **إذا كان لهما نفس البسط**	3) **إذا كان كل من الكسرين مختلفين**
الكسر الأكبر ذو البسط الأكبر $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$ لأن $3 < 4$	الكسر الأكبر ذو المقام الأصغر $\frac{4}{3} > \frac{4}{5}$ لأن $3 < 5$	نضرب مقام الأول في بسط الثاني ونضرب مقام الثاني في بسط الأول (طريقة المقص) ونقارن الناتجين . $2 \times 10 = 20$ $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{10}$ $7 \times 5 = 35$ ولأن $20 < 35$ فإن $\frac{2}{5} < \frac{7}{10}$

• **لترتيب الكسور :**

1) إذا كانت الكسور اعتياديه والفرق بين البسط والمقام عدد ثابت في كل الكسور ، يكون الكسر صاحب البسط والمقام الأكبر هو الكسر الأكبر بينهم

أي الاعداد الآتية أكبر ؟ أ) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{4}{5}$ ج) $\frac{5}{6}$ د) $\frac{6}{7}$	جميع الكسور اعتياديه والفرق بين البسط والمقام العدد 1 فأن اكبر كسر هو $\frac{6}{7}$

2) إذا كانت الكسور اعتيادية والفرق بين البسط والمقام عدد غير ثابت في كل الكسور

الطريقه الأولى : نرتب الكسور حسب المقامات من الاصغر للاكبر ثم نستخدم طريقة المقص .

رتب الكسور التالية تصاعدياً $\frac{5}{7}, \frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{3}{4}$	▪ نرتب الكسور حسب المقامات $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{9}{14}$ ▪ نقارن بطريقة المقص بين كسرين كسرين ▪ نجد بالنهاية أن : $14 \times 5 = 70$ ⟵ $\frac{5}{7}$ $\frac{9}{14}$ ⟶ $7 \times 9 = 63$ $14 \times 3 = 42$ ⟵ $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{14}$ ⟶ $4 \times 9 = 36$ ▪ ▪ الترتيب التصاعدي من اليسار هو : $\frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}$

الطريقه الثانية : التمثيل باستخدام المسافه على خط الاعداد

رتب الكسور التالية تصاعدياً $\frac{2}{3}, \frac{5}{9}, \frac{6}{7}, \frac{3}{16}$	$\frac{2}{3}$: 0 — 1.5 — 3 (2) $\frac{5}{9}$: 0 — 4.5 — 9 (5) $\frac{6}{7}$: 0 — 3.5 — 7 (6) $\frac{3}{16}$: 0 — 8 — 16 (3) الترتيب التصاعدي من اليسار $\frac{3}{16}, \frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}$

6) الاسس و الجذور :

أولاً : الأسس

لكل عدد طبيعي n وعدد حقيقي a فإن :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n}$$

هذا يعني أن الأساس a يضرب بنفسه بعدد الأس (القوة) n

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$$
$$(-6)^2 = (-6)(-6) = 36$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

القاعدة	توضيح	مثال
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	عند ضرب أعداد متساوية الأساس (نجمع الأسس)	$x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	عند قسمة أعداد متساوية الأساس (نطرح الأسس)	$\frac{x^5}{x^2} = x^{5-2} = x^3$
$(x^m)^n = x^{m \times n}$	عند رفع عدد لأكثر من قوة (تضرب في بعضها)	$(x^5)^2 = x^{5\times 2} = x^{10}$
$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	تتوزع القوى في عملية الضرب	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} \quad , y \neq 0$	تتوزع القوى في عملية القسمة	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$
$x^{-m} = \frac{1}{x^m} \quad , \quad x \neq 0$	القوة السالبة لعدد صحيح تحول العدد الى مقام وتصبح موجبة	$x^{-5} = \frac{1}{x^5}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m , \ x, y \neq 0$	القوة السالبة لعدد نسبي يقلب الكسر وتصبح موجبة	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
$x^0 = 1 \quad , \quad x \neq 0$	القوة الصفرية دائما تساوي الواحد	$7^0 = 1$

ملاحظة : الأسس لاتتوزع على عمليتي الجمع والطرح $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

- العدد المربع :

إذا كان a عدد صحيح فإن a^2 يسمى عدد مربع

مثال :

$$a = -1 \rightarrow a^2 = 1$$
$$a = 2 \rightarrow a^2 = 4$$
$$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$$
$$a = -5 \rightarrow a^2 = 25$$
$$a = 12 \rightarrow a^2 = 144$$

الحل	مثال
العدد 10 مجموع مع نفسه 20 مره = 10×20 العدد 10 مضروب في نفسه 20 مره = 10^{20}	1) المقدار الذي يعبر عن العدد 10 مضروب في نفسه 20 مره هو : أ) 10×20 ب) $10 + 20$ ج) 10^{20} د) 2^{10}
الضعف نضرب في 2 $2 \times 2^8 = 2^9$	2) ضعف العدد 2^8 هو : أ) 2^{10} ب) 2^9 ج) 2^{16} د) 2^7
أربع أمثال العدد نضرب العدد في 4 $4^{100} \times 4 = 4^{101}$	3) أربع أمثال العدد 4^{100} هو أ) 4^{25} ب) 4^{99} ج) 1^{100} د) 4^{101}
نصف العدد أي نقسم العدد على 2 $\frac{2^{10}}{2} = \frac{2^{10}}{2^1} = 2^{10-1} = 2^9$	4) نصف العدد 2^{10} هو أ) 2^5 ب) 2^9 ج) 1^{10} د) 4^{10}
ناخذ 3^5 كعامل مشترك $3^5 + 3^5 + 3^5 = 3^5(1+1+1)$ $= 3^5 \times 3 = 3^6$	5) $3^5 + 3^5 + 3^5 = \cdots$ أ) 3^5 ب) 9^5 ج) 3^6 د) 3^{15}
من المعلوم أن $x + x + x = 3x$ $\frac{6^{10} + 6^{10} + 6^{10}}{6^{10}} = \frac{3 \times 6^{10}}{6^{10}} = 3$	6) $\frac{6^{10}+6^{10}+6^{10}}{6^{10}} = \dots\dots\dots$ أ) 3×6^{10} ب) 6^{20} ج) 6^2 د) 3
نأخذ عامل مشترك 3^3 $9 \times 3^3 + 2 \times 3^3 = 3^3(9+2) = 3^3 \times 11$	7) $9 \times 3^3 + 2 \times 3^3 = \cdots$ أ) 11×3^3 ب) 10×3^3 ج) 2×3^3 د) 3^4
$\frac{(7^2)^6 - 7^9}{7^9} = \frac{7^{12} - 7^9}{7^9}$ $= \frac{7^{12}}{7^9} - \frac{7^9}{7^9} = 7^3 - 1$ $= 343 - 1 = 342$	8) $\frac{(7^2)^6 - 7^9}{7^9} = \cdots$ أ) 343 ب) 342 ج) 341 د) 340
$\frac{x^5\, y^5\, z^5}{x^4\, y^4\, z^6} = x^{5-4}\, y^{5-4}\, z^{5-6}$ $= x\ y\ z^{-1} = \frac{xy}{z}$	9) $\frac{x^5\, y^5\, z^5}{x^4\, y^4\, z^6} = \cdots$ أ) $\frac{xy}{z}$ ب) $\frac{xz}{y}$ ج) $\frac{yz}{x}$ د) xyz
$\frac{9^2 \times 3^4}{3^2} = \frac{(3^2)^2 \times 3^4}{3^2} = \frac{3^4 \times 3^4}{3^2}$ $= \frac{3^8}{3^2} = 3^6$	10) $\frac{9^2 \times 3^4}{3^2} = \cdots$ أ) 3^6 ب) 3^7 ج) 3^4 د) 9^2
$49^x = (7 \times 7)^x = 7^x \times 7^x$ $= 5 \times 5 = 25$	11) إذا كان $7^x = 5$ فإن $49^x = \cdots$ أ) 35 ب) 10 ج) 25 د) 49

- إذا كان الاساس يساوي الاساس فإن الأس يساوي الأس

$$x^m = x^n \quad , \quad x \neq 0 \Longleftrightarrow m = n$$

الحل	مثال
$100^{x+3} = 10^{y+6}$ بتحليل العدد 100 إلى 10^2 $(10^2)^{x+3} = 10^{y+6}$ بضرب الأسين $10^{2x+6} = 10^{y+6}$ بمساواة الأسس $2x + 6 = y + 6$ بحذف العدد 6 من الطرفين $2x = y$	1) إذا كان $100^{x+3} = 10^{y+6}$ ، أوجد y بدلالة x أ) $x = y$ ب) $x = 2y$ ج) $y = x + 2$ د) $y = 2x$
$36^{2x} = 6^{x+9}$ بتحليل العدد 36 إلى 6^2 $(6^2)^{2x} = 6^{x+9}$ بضرب الأسين $6^{4x} = 6^{x+9}$ بمساواة الأسس $4x = x + 9$ بحذف العدد x من الطرفين $3x = 9$ بقسمة الطرفين على 3 $x = 3$	2) إذا كان $36^{2x} = 6^{x+9}$ ، فإن قيمة x تساوي : أ) -2 ب) -3 ج) 2 د) 3
$100^3 + x = 10^6 + y$ بتحليل 100^3 إلى 10^6 $10^6 + x = 10^6 + y$ بحذف 10^6 من الطرفين $x = y$	3) إذا كان $100^3 + x = 10^6 + y$ فإن x تساوي : أ) $x = y$ ب) $x = y + 10$ ج) $x = y - 100$ د) $x = 100$
بتجريب الخيارات نجد أن الحل الصحيح هو 7 $2^{7+1} = 2^8 = 256$	4) إذا كان $2^{x+1} = 256$ فإن قيمة x تساوي : أ) 5 ب) 3 ج) 7 د) 9
$2^x \cdot 2^y = 32$ في حالة الضرب نجمع الأسس $2^{x+y} = 32$ بتجريب الخيارات نجد أن $2^5 = 32$ فيكون الأس المناسب هو 5 $x + y = 5$	5) إذا كان $2^x \cdot 2^y = 32$ فإن قيمة $x + y$ تساوي أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) 7
من المعلوم أن $2^{2x} = (2^x)^2$ $2^{2x} = (6)^2 = 36$	6) إذا كان $2^x = 6$ فأوجد قيمة 2^{2x} تساوي : أ) 2 ب) 6 ج) 12 د) 36
$3^{3y} = 27^3$ بتحليل العدد 27 إلى 3^3 $3^{3y} = (3^3)^3$ بضرب الأسين $3^{3y} = 3^9$ بمساواة الأسس $3y = 9$ بقسمة الطرفين على 3 $y = 3$	7) إذا كان $3^{3y} = 27^3$ فأوجد قيمة y . أ) 3 ب) 2 ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$
$\left(\frac{-2a^5}{a^3b^2}\right)^3 = \frac{-2^3a^{15}}{a^9b^6} = \frac{-8a^{15-9}}{b^6}$ $= \frac{-8a^6}{b^6}$	8) $\left(\frac{-2a^5}{a^3b^2}\right)^3 =$ أ) $\frac{-2a^{15}}{b^6}$ ب) $\frac{-8a^6}{b^6}$ ج) $\frac{-8a^{15}}{b^5}$ د) $\frac{8a^2}{b^5}$

تحديد رقم الآحاد لعدد مرفوع لأس :

- رقم الآحاد للعدد 5^n مهما كان الأس هو 5 .
- رقم الآحاد للعدد 6^n مهما كان الأس هو 6 .
- رقم الآحاد للعدد 10^n مهما كان الأس هو 0 .
- رقم الآحاد للعدد 2^n : نقسم الأس n على العدد 4 ونحسب باقي القسمة :

باقي القسمة	3	2	1	0
رقم الآحاد	8	4	2	6

مثال	الحل
ما آحاد العدد 2^{16} ؟ $2^{16} = 65536$ احاده العدد 6	قسمة 16 على 4 يساوي 4 والباقي 0 فإن آحاد 2^{16} نفس آحاد العدد 2^4 $2^4 = 16$
ما آحاد العدد 2^{17} ؟ احاده العدد 2	قسمة 17 على 4 يساوي 4 والباقي 1 فإن آحاد 2^{17} نفس آحاد العدد 2^1 $2^1 = 2$
ما آحاد العدد 2^{18} ؟ احاده العدد 4	قسمة 18 على 4 يساوي 4 والباقي 2 فإن آحاد 2^{18} نفس آحاد العدد 2^2 $2^2 = 4$
ما آحاد العدد 2^{19} ؟ احاده العدد 8	قسمة 19 على 4 يساوي 4 والباقي 3 فإن آحاد 2^{19} نفس آحاد العدد 2^3 $2^3 = 8$

- رقم الآحاد للعدد 3^n : نقسم الأس n على العدد 4 ونحسب باقي القسمة :

باقي القسمة	3	2	1	0
رقم الآحاد	7	9	3	1

مثال	الحل
ما آحاد العدد 3^{12} ؟ $3^{12} = 531441$ احاده العدد 1	قسمة 12 على 4 يساوي 3 والباقي 0 فإن آحاد 3^{12} نفس آحاد العدد 3^4 $3^4 = 81$
ما آحاد العدد 3^{13} ؟ احاده العدد 3	قسمة 13 على 4 يساوي 3 والباقي 1 فإن آحاد 3^{13} نفس آحاد العدد 3^1 $3^1 = 3$
ما آحاد العدد 3^{14} ؟ احاده العدد 9	قسمة 14 على 4 يساوي 3 والباقي 2 فإن آحاد 3^{14} نفس آحاد العدد 3^2 $3^2 = 9$
ما آحاد العدد 3^{15} ؟ احاده العدد 7	قسمة 15 على 4 يساوي 3 والباقي 3 فإن آحاد 3^{15} نفس آحاد العدد 3^3 $3^3 = 27$

- رقم الآحاد للعدد 7^n : نقسم الأس n على العدد 4 ونحسب باقي القسمة :

باقي القسمة	1	2	3	0
رقم الآحاد	7	9	3	1

ثانيا : الجذور :

إذا كان a عدداً حقيقياً و n عدداً صحيحاً موجباً أكبر من 1 ، فإن :

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

يسمى الرمز $\sqrt{\ }$ جذر و n دليل الجذر ، وإذا كان $n = 2$ فإنه يسمى جذر تربيعي ويكتب بالصورة $\sqrt{a}$.

- **الجذر النوني الحقيقي :**

$$\sqrt[n]{a}$$

n زوجي

إذا كان	فإن
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب
$a = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$
$a < 0$	ليس هناك جذور حقيقة

مثال

$\sqrt[4]{81} = 3$

$\sqrt[6]{0} = 0$

$\sqrt{-4}$ ليس هناك جذر حقيقي

n فردي

إذا كان	فإن
$a > 0$	هناك جذر حقيقي موجب
$a = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$
$a < 0$	هناك جذر حقيقي سالب

مثال

$\sqrt[7]{128} = 2$

$\sqrt[5]{0} = 0$

$\sqrt[3]{-125} = -5$

- **العمليات على الجذور :**

مثـــال	القاعدة
$\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{6^2} = 6^{\frac{2}{5}}$	$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$
$\sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$	$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ اذا كان n عدد زوجي و $a \geq 0 , b \geq 0$ أو n عدد فردي
$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad , b \neq 0$
$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3\times 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\times m]{a}$
$3\sqrt{7} + \sqrt{7} = (3+1)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$	$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a+b)\sqrt{x}$
$(2\sqrt{5})(3\sqrt{20}) = 6\sqrt{100} = 6 \times 10 = 60$	$(a\sqrt{x})(b\sqrt{y}) = ab\sqrt{xy}$
$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$	$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

ملاحظة : الجذور لاتتوزع على الجمع والطرح $\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$

حالات خاصة للجذور	
إذا كان $\sqrt[n]{a^m}$ بحيث n و m أعدادا زوجية ، فإنه :	
$\sqrt[n]{a^m} = a^r$ إذا كان r زوجي	$\sqrt[n]{a^m} = \|a^r\|$ إذا كان r فردي
$\sqrt[4]{y^8} = y^2$	$\sqrt[4]{y^4} = \|y\|$
$\sqrt{4x^8} = 2x^4$	$\sqrt{4x^{10}} = 2\|x^5\|$
$\sqrt{(-3)^4} = (-3)^2 = 9$	$\sqrt{(-3)^6} = \|(-3)^3\| = 27$
$\sqrt[4]{81(x+2)^{16}} = 3(x+2)^4$	$\sqrt[4]{81(x+2)^4} = 3\|x+2\|$
$\sqrt{12x^8y^{14}} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{(x^4)^2}\cdot\sqrt{(y^7)^2} = 2\sqrt{3}\,x^4\|y^7\|$	

- **الجذور الصماء و تبسيطها :**

  - إذا كان a ليس مربع كامل ، فإن $\sqrt{a}$ يسمى جذر أصم (غير ناطق)
  - لتبسيط الجذور الصماء ، نبحث عن عددين احدهما مربع كامل يكون حاصل ضربهما يساوي العدد a

مثال : بسط كل مما يلي :

$$\sqrt{18} = \sqrt{9\times 2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt{200} = \sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{100} = 2\times 10 = 20$$

$$\sqrt{\frac{28}{7}}\times\sqrt{\frac{32}{9}} = \sqrt{4}\times\sqrt{\frac{2\times 16}{9}} = 2\times\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

- **المرافق :**

إذا كان $\sqrt{b}$, $\sqrt{a}$ جذور صماء فإن :

- $\sqrt{a}$ مرافق $\sqrt{a}$ بحيث $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$
- $c-\sqrt{a}$ مرافق $c+\sqrt{a}$ بحيث $(c+\sqrt{a})\times(c-\sqrt{a}) = c^2 - a$
- $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ مرافق $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ بحيث $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$

مثال :

$$\sqrt{11}\times\sqrt{11} = 11$$

$$(7+\sqrt{3})\times(7-\sqrt{3}) = 7^2 - 3 = 49 - 3 = 46$$

$$(\sqrt{14}-\sqrt{2})\times(\sqrt{14}+\sqrt{2}) = 14 - 2 = 12$$

- يمكن إعادة كتابة كسر مقامه يحوي جذوراً بصورة كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب البسط والمقام في مرافق المقام (تسمى هذه العملية بـ إنطاق المقام)

مثال	الحل
1) أكتب $\frac{2}{\sqrt{3}}$ على شكل كسر مقامه عدد ناطق	$\frac{2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
2) أكتب $\frac{5}{\sqrt{2}+3}$ في ابسط صورة :	$\frac{5}{\sqrt{2}+3}\cdot\frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3} = \frac{5(\sqrt{2}-3)}{2-9} = \frac{5\sqrt{2}-15}{-7}$

تمارين

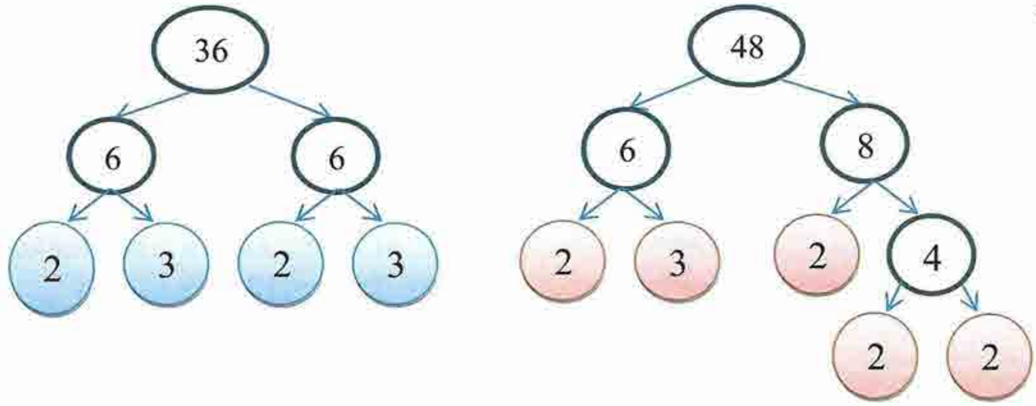
الحــل	مثـال
$\sqrt[10]{3^9} = 3^{\frac{9}{10}} = 3^{0.9}$	1) أوجد الجذر العاشر للعدد 3^9 : أ) $3^{0.9}$ ب) $3^{0.3}$ ج) 3^{10} د) $3^{\frac{10}{9}}$
$\sqrt[10]{27 \times 2^3} = \sqrt[10]{3^3 \times 2^3} = \sqrt[10]{(3 \times 2)^3}$ $= \sqrt[10]{6^3} = 6^{0.3}$	2) أوجد الجذر العاشر للعدد 27×2^3 : أ) $6^{0.3}$ ب) $6^{0.2}$ ج) $2^{\frac{2}{3}}$ د) $3^{\frac{3}{2}}$
$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{-2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \frac{9}{4}$	3) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{-2}{3}} =$ أ) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{4}{9}$ د) $\frac{9}{4}$
$2\sqrt{9 \times 3} - \sqrt{25 \times 3}$ $= 2 \times 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ $= 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ **ناخذ الجذر عامل مشترك** $= (6-5)\sqrt{3} = \sqrt{3}$	4) $2\sqrt{27} - \sqrt{75} =$ أ) 0 ب) $\sqrt{3}$ ج) $3\sqrt{3}$ د) $-\sqrt{3}$
$\sqrt{4 \times 21} + \sqrt{4} \times \sqrt{21}$ $= 2\sqrt{21} + 2\sqrt{21}$ $= 4\sqrt{21}$	5) $\sqrt{84} + \sqrt{4} \times \sqrt{21} =$ أ) $8\sqrt{21}$ ب) $4\sqrt{21}$ ج) $2\sqrt{21}$ د) $\sqrt{21}$
نوجد ماداخل القوس وذلك باخذ الجذر عامل مشترك $\sqrt{5}\,(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = \sqrt{5}\,\left(\sqrt{2}(1+4)\right)$ $= \sqrt{5}(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}\sqrt{5} = 5\sqrt{10}$	6) $\sqrt{5}\,(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) =$ أ) $6\sqrt{5}$ ب) $5\sqrt{10}$ ج) $8\sqrt{5}$ د) $14\sqrt{2}$
نوزع الجذر على البسط والمقام $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{6}$ **نوحد المقامات وذلك بانطاق المقام حتى نتخلص من الجذر** $= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6} \cdot 3}{3}$ $= \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{3\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$	7) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} =$ أ) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ب) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ ج) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ د) $\frac{-4\sqrt{6}}{3}$
نوزع الجذر على البسط والمقام $\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ **نوحد المقامات وذلك بانطاق المقام حتى نتخلص من الجذر** $= \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5} \cdot 5}{5}$ $= \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{-4\sqrt{5}}{5}$	8) $\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5} =$ أ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ب) $\frac{-\sqrt{5}}{5}$ ج) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ د) $\frac{-4\sqrt{5}}{5}$

7) القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر :

القاسم المشترك الأكبر بين عددين أو أكثر gcd: هو أكبر عدد تقبل هذه الأعداد القسمة عليه بدون باق .
أو هو حاصل ضرب العوامل المشتركة فقط بين العددين الأقل تكرارًا.

مـثـال : أوجد القاسم المشترك الأكبر بين العددين 48 , 36

الحـل :



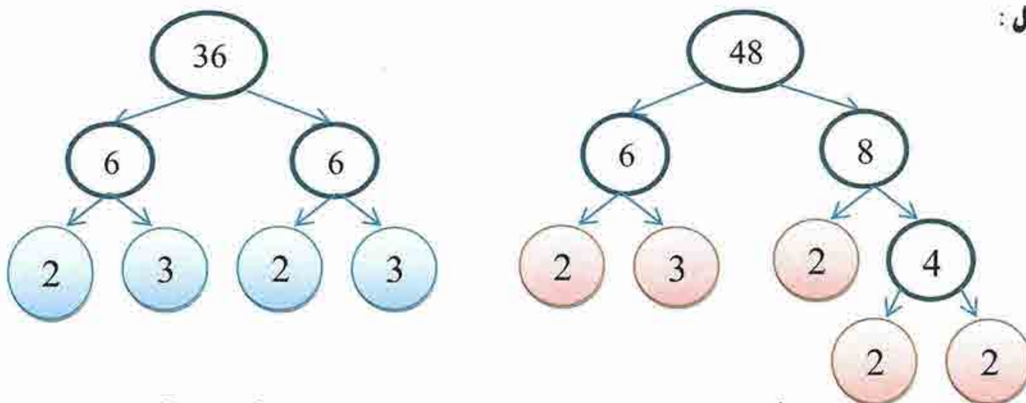
$36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$

$$\gcd(36\,,48) = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

المضاعف المشترك الأصغر بين عددين أو أكثر Lcm: هو أصغر عدد يقبل القسمة على جميع هذه الأعداد .
وهو حاصل ضرب العوامل المشتركة وغير المشتركة للعددين والأكثر تكرارًا.

مـثـال : أوجد المضاعف المشترك الأصغر بين العددين 48 , 36.

الحـل :



$36 = 2^2 \times 3^2$, $48 = 2^4 \times 3$

$$lcm\ (36\,,48) = 2^4 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144$$

ملحوظة هامة : حاصل ضرب gcd لعددين في lcm لنفس العددين = حاصل ضرب العددين

$$36 \times 48 = 12 \times 144$$

8) ترتيب العمليات الحسابية:

1) فك الأقواس
2) حساب الأسس والجذور
3) حساب الضرب والقسمة من اليسار لليمين
4) حساب الجمع والطرح من اليسار لليمين

مثال : أوجد ناتج مايلي :

نوجد الجذر $4\sqrt{81} \div 12 + 5$ نضرب من اليسار $= 4(9) \div 12 + 5$ نقسم $= 36 \div 12 + 5$ نجمع $= 3 + 5 = 8$	نقسم من اليسار $4 + 8 \div 2 \times 4$ نضرب $= 4 + 4 \times 4$ نجمع $= 4 + 16 = 20$
	$\sqrt{7}\left(2\sqrt{7} - \sqrt{28}\right)$ نوجد ماداخل القوس $= \sqrt{7}\left(2\sqrt{7} - \sqrt{7} \times \sqrt{4}\right)$ $= \sqrt{7}\left(2\sqrt{7} - 2\sqrt{7}\right)$ $= \sqrt{7} \times 0 = 0$

مثال	الحل
1) إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين $x\,,14$ يساوي 7 ، والمضاعف المشترك الأصغر لهما 42 فإن $x = \cdots$ أ) 7 ب) 14 ج) 21 د) 42	من المعروف أن القاسم المشترك × المضاعف المشترك = حاصل ضرب العددين $x \cdot 14 = 7 \times 42$ $\Longrightarrow x = \frac{7 \times 42}{14} = 21$
2) إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين $n\,,540$ يساوي 36 فأي مما يلي يمكن أن يكون تحليلاً للعدد n أ) 2×3^3 ب) $2^2 \times 3^3$ ج) $2^3 \times 3^2 \times 11$ د) $2^4 \times 3^3 \times 5$	نحلل $2^2 \times 3^3 \times 5 = 540$ نختار العدد $2^3 \times 3^2 \times 11 = n$ ------------------------------------ القاسم المشترك الأكبر هو $36 = 2^2 \times 3^2$ (العوامل المشتركه بأصغر اس)
3) حاصل ضرب القاسم الأكبر و المضاعف الأصغر للعددين 10 و 25 هو :	حاصل ضرب القاسم الأكبر و المضاعف الأصغر = حاصل ضرب العددين $25 \times 10 = 250$
4) ما أصغر عدد يقبل القسمة على 4 و 6 و 9 معاً : أ) 18 ب) 36 ج) 24 د) 72	$9 = 3^2, \quad 6 = 2 \times 3, \quad 4 = 2^2$ المضاعف المشترك الاصغر $3^2 \times 2^2 = 36$
5) مزرعة مستطيلة الشكل ابعادها 360 m و $240\ m$ اذا اردنا تقسيمها لمربعات متساوية ، اوجد أطول ضلع للمربع : أ) 60 ب) 80 ج) 100 د) 120	$36 = 2^2 \times 3^2$ $24 = 3 \times 2^3$ القاسم المشترك الاكبر $2^2 \times 3 = 12$ اطول ضلع للمربع هو 120
6) قط يستطيع ان يصعد درج ستة ستة بدون باق وثمانية ثمانية بدون باق وعشرة عشرة بدون باق . فما اقل عدد من السلالم يحتوي الدرج : أ) 30 ب) 60 ج) 120 د) 240	$6 = 2 \times 3$ $8 = 2^3$ $10 = 2 \times 5$ المضاعف المشترك الاصغر هو $2^3 \times 3 \times 5 = 120$

9) قابلية القسمة :

قابلية القسمة على 2

يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان آحاده صفر أو عدد زوجي

250 عدد يقبل القسمة على 2 لان بآحاده العدد 0 و هو عدد زوجي
72 عدد يقبل القسمة على 2 لان بآحاده العدد 2 و هو عدد زوجي
24 عدد يقبل القسمة على 2 لان بآحاده العدد 4 و هو عدد زوجي
76 عدد يقبل القسمة على 2 لان بآحاده العدد 6 و هو عدد زوجي
2458 عدد يقبل القسمة على 2 لان بآحاده العدد 8 و هو عدد زوجي

قابلية القسمة على 3

يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3

48 عدد يقبل القسمة على 3 لان مجموع أرقامه 12 ؛ $8+4 = 12$ و 12 من مضاعفات العدد 3
3549 عدد يقبل القسمة على 3 لان مجموع أرقامه 21 ؛ $9+4+5+3 = 21$ و 21 من مضاعفات العدد 3
780 عدد يقبل القسمة على 3 لان مجموع أرقامه 15 ؛ $0+8+7 = 15$ و 15 من مضاعفات العدد 3

قابلية القسمة على 4

يقبل العدد القسمة على4 إذا كان العدد المكون من الآحاد والعشرات يقبل القسمة على 4

80340 عدد يقبل القسمة على 4 لان بآحاد و عشراته الرقم 40 وهو يقبل القسمة على 4
55336 عدد يقبل القسمة على 4 لان بآحاد و عشراته الرقم 36 وهو يقبل القسمة على 4

قابلية القسمة على 5

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان آحاده 0 أو 5

80450 عدد يقبل القسمة على 5 لان بآحاده الرقم 0
84785 عدد يقبل القسمة على 5 لان بآحاده الرقم 5

قابلية القسمة على 6

أي عدد يقبل القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3 في آن واحد

30450 عدد يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 و 3 معا
8532 عدد يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 و 3 معا

قابلية القسمة على 7

أي عدد يقبل القسمة على 7 إذا كان ضعف رقم آحاده مطروح منه باقي الرقم من مضاعفات العدد 7

مضاعفات 7 هي (..................... , ±42 , ±35 , ±28 , ±21 , ±14 , ±7)
343 عدد يقبل القسمة على 7 لأن $(3 \times 2 - 34 = -28)$ و -28 هو من مضاعفات العدد 7
196 عدد يقبل القسمة على 7 لأن $(6 \times 2 - 19 = -7)$ و -7 هو من مضاعفات العدد 7

قابلية القسمة على 8

يقبل العدد القسمة على 8 إذا كان نصف العدد يقبل القسمة على 2 و 4 معا
أو العدد المكون من آحاده وعشراته ومئاته يقبل القسمة على 2 و 4 معا

856 عدد يقبل القسمة على 8 لأن نصفه 428 يقبل القسمة على 2 و 4 معا
786565120 يقبل القسمة على 8 لأن آحاده 0 12 يقبل القسمة على 2 و 4

قابلية القسمة على 9

يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9 أو من مضاعفات العدد 9

90450 عدد يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه: 18=9+0+4+5+0 و 18 من مضاعفات العدد 9

42138 عدد يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه: 8+3+1+2+4 = 18 و 18 من مضاعفات العدد 9

قابلية القسمة على 10

أي عدد يقبل القسمة على 10 إذا كان بآحاده العدد صفر

80450 عدد يقبل القسمة على 10 لان بآحاده العدد 0

قابلية القسمة على 11

هناك 3طرق لثلاثة أنواع من الأعداد :

إذا كانت أرقام العدد كلها متشابهة وكان عدد هذه الأرقام زوجي

مثال: العدد 333333 عدد أرقامه 6 وبالتالي يقبل القسمة على 11

بينما العدد 3333333 عدد أرقامه 7 فلا يقبل القسمة على 11

إذا كان العدد مكون من 3 أرقام مختلفة نجمع رقم الآحاد مع رقم المئات ونطرح منه رقم العشرات فينتج عدد يقبل القسمة على 11

مثال: العدد 913 يقبل القسمة على 11 لأن (9+3-1=11) وهو يقبل القسمة على 11

أما إذا كانت الأرقام مختلفة وكثيرة نبدأ من اليمين بجمع الأرقام في الخانات الفردية وجمع الأرقام في الخانات الزوجية . ثم نطرح المجموع الأصغر من المجموع الأكبر إذا كان الناتج يقبل القسمة على 11 فأن العدد الأصلي يقبل القسمة على 11

مثال: العدد 181907

نجمع الخانات الفردية هي 7 + 9 + 8 = 24

نجمع الخانات الزوجية 0 + 1 + 1 = 2

نطرح الناتجين 24 - 2 = 22 وهو يقبل القسمة على 11

وبالتالي العدد 181907 يقبل القسمة على 11

تحديد اليوم عند مرور عدد n يوم :

- نقسم عدد الأيام n على 7 (عدد أيام الأسبوع) .
- نحدد باقي القسمة :

إذا كان باقي القسمة 0 فإن اليوم الأخير في n يوم هو اليوم السابق لليوم المعطى في السؤال

إذا كان باق القسمة 1 فإن اليوم الأخير في n يوم هو اليوم المعطى بالسؤال .

مثال : إذا كان اليوم هو الاثنين ، فما هو أخر يوم في السنة الهجرية .
(علماً بأن عدد أيام السنة الهجرية يساوي 355 يوم)

الحل : نقسم عدد أيام السنة على 7

$$\begin{array}{r|l} & 050 \\ 7 & 355 \\ & \underline{350 -} \\ & 005 \end{array}$$

نعد خمس أيام بداية من يوم الاثنين يكون أخر يوم في السنة هو الجمعة .

تمارين

مثـال	الحـــل
1) أي الأعداد التالية أولي : أ) 111 ب) 1011 ج) 101 د) 1111	بالنظر إلى الخيارات نجد أن 111 مجموع أرقامه = 3 وبالتالي يقبل القسمة على 3 (غير أولي) 1011 مجموع أرقامه = 3 وبالتالي يقبل القسمة على 3 (غير أولي) 1111 مكون من عدد مكرر 4 مرات بالتالي يقبل القسمة على 11 101 لا يقبل القسمة إلا على نفسه والواحد الصحيح
2) ماهو العدد الذي إذا قسمناه على 21 كان الناتج 37 والباقي 11 أ) 37 ب) 788 ج) 268 د) 777	العدد المطلوب = 21 × 37 + 11 = 788
3) عدد باقي قسمته على 11 يساوي 4 وباقي قسمته على 6 يساوي 2 هو أ) 26 ب) 25 ج) 24 د) 23	نجرب الخيارات بعد طرح الباقي من كل منها أ) 22 = 4 – 26 وَ 22 يقبل القسمة على 11 ب) 21 = 4 – 25 وَ 21 لا يقبل القسمة على 11 ج) 20 = 4 – 24 وَ 24 لا يقبل القسمة على 11 د) 19 = 4 – 23 وَ 19 لا يقبل القسمة على 11 وبالمثل نطرح 2 من الخيارات ونحدد العدد الذي يقبل القسمة على 6 ويكون الحل هو أ)
4) عدد إذا قسمته على 5 الباقي 4 وإذا قسمته على 4 الباقي 3 هو أ) 37 ب) 39 ج) 40 د) 42	نجرب الخيارات بعد طرح الباقي من كل منها أ) 33 = 4 – 37 وَ 33 لا يقبل القسمة على 5 ب) 35 = 4 – 39 وَ 35 يقبل القسمة على 5 ج) 36 = 4 – 40 وَ 36 لا يقبل القسمة على 5 د) 38 = 4 – 42 وَ 38 لا يقبل القسمة على 5 وبالمثل نطرح 3 من الخيارات ونحدد العدد الذي يقبل القسمة على 4 ويكون الحل هو ب)
5) ما هو العدد الذي إذا جمعنا آحاده وعشراته وضاعفنا جمعهما 5 مرات وقسم الناتج على 7 كان الناتج 10 ؟ أ) 86 ب) 56 ج) 75 د) 98	نجرب الخيارات أ) 86 8 + 6= 14 → 14 × 70 = 5 → 70 ÷ 7 = 10
6) ما أصغر عدد يقبل القسمة على 4 و 6 و 9 معاً: أ) 18 ب) 36 ج) 24 د) 72	العدد الذي يقبل القسمة على 9 , 6 , 4 هو 36 وأيضاً 72 والأصغر فيهما هو 36 الحل الصحيح هو ب
7) عدد يقبل القسمة على 2 وَ 5 وباقي قسمته على 7 يساوي 2 هو أ) 240 ب) 230 ج) 200 د) 195	عدد يقبل القسمة على 2 وَ 5 أي يقبل القسمة على 10 وهو العدد الذي آحاده 0 مثل 240 , 230 , 200 ونطرح من كل من الخيارات 2 ونستنتج أي الأعداد يقبل القسمة على 7 فنجد الحل المناسب 240

10) التطابقات :

حسب نظرية اقليديس , $a \equiv b \ (mod\ n)$

- a و b لهما نفس باقي القسمة اذا قسمو على العدد n
- $a - b = kn$ حيث $k \in z^+$
- $n|(a-b)$ أي أن n قاسم للفرق بينهما

مثال توضيح :

$$30 \equiv 12 \ (mod\ 9) \quad \leftrightarrow \quad 9|\ 30-12$$
$$\leftrightarrow \quad 9|18$$

هذا يعني أن 9 قاسم من قواسم العدد 18

مثال :

إذا كان $17 \equiv 3 \ (mod\ n)$ فإن قيمة n تساوي :

أ) **2** ب) **3** ج) **4** د) **5**

الحل :

$$17 \equiv 3 \ (mod\ n) \quad \leftrightarrow \quad n|\ 17-3$$
$$\leftrightarrow \quad n|14$$

والعدد 14 يقبل القسمة على 2

مثال :

إذاكان باقي قسمة العدد n على 7 يساوي 3 , فإن باقي قسمة العدد $8n$ على 7 يساوي :

أ) **2** ب) **3** ج) **4** د) **5**

الحل :

$$a - b = kn$$
نفرض $8n - n = k \times 7$
$$7n = 7k$$
$$n = k$$

إذن $8n \equiv n \ (mod\ 7)$

فإن باقي القسمة يساوي 3

11) النسبة والنسبة المئوية والتناسب :

النسبة

النسبة : هي مقارنة بين متغيرين أو عددين حقيقيين

إذا كان وزن محمد 25 kg ووزن عُمر 100 kg فإن النسبة بين وزن محمد إلى وزن عُمر

$25 : 100 = \frac{25}{100} = 0.25 = 25\%$ **وهذا معناه أن النسبة تكتب بأربع صيغ متكافئة**

مثال	الحل
1) إذا كان نسبة البالغين إلى الصغار هي 4 : 5 على التوالي في مصعد ،إذا كان مجموعهم 36 ، كم عدد البالغين ؟ أ) 15 ب) 20 ج) 25 د) 30	مجموع الأجزاء = 5+ 4 = 9 عدد البالغين = $\frac{\text{مقدار الجزء}}{\text{مجموع الأجزاء}}$ × العدد الكلي عدد البالغين = $\frac{5}{9} \times 36 = 20$
2) ذهبت عائلة مكونة من زوجين و5 أطفال لمطعم اذا كان سعر الوجبة للطفل نصف البالغ , كم قيمة وجبة البالغ إذا دفع الزوج ثمن الوجبات 405 ريال؟ أ) 30 ب) 45 ج) 60 د) 90	أب : أم : طفل : طفل : طفل : طفل : طفل $1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 2 : 2$ مجموع الأجزاء = 9 ثمن وجبة البالغ = $\frac{2}{9} \times 405 = 90$
3) إذا كان عُمر محمد نصف عُمر أحمد ، وعُمر أحمد ثلاثة أمثال عُمر سعيد ،فما نسبة عُمر محمد إلى عُمر سعيد؟ أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{3}{2}$	عُمر محمد : عُمر أحمد : عُمر سعيد 3× $2 : 1$ 2× $1 : 3$ $2 : 6 : 3$ عُمر محمد : عُمر سعيد $= 3 : 2 = \frac{3}{2}$
4) مدرسة أهدت 3 متفوقين 18000 ريال بحيث نصيب كل واحد 4 : 3 : 2 ، فكم نصيب الأكبر ؟ أ) 4000 ب) 6000 ج) 8000 د) 9000	مجموع الأجزاء = $2 + 3 + 4 = 9$ نصيب الجزء الواحد = $\frac{18000}{9} = 2000$ نصيب الأكبر = $4 \times 2000 = 8000$
5) اذا كان لدينا مستطيل وقسم إلى ثلاث مربعات والمربع الواحد قسم إلى 25 جزء وظلل جزء واحد فقط من المربعات الصغيرة أوجد نسبة المظلل : أ) 1:25 ب) 1:75 ج) 3:25 د) 3:75	$\boxed{25}\boxed{25}\boxed{25}$ عدد الاجزاء في المستطيل = $3 \times 25 = 75$ نسبة المظلل = $\frac{1}{75} = 1:75$
6) إذا كانت النسبة بين زوايا مثلث هي 1 : 2 : 3 فإن المثلث أ) منفرج الزاوية ب) حاد الزوايا ج) قائم الزاوية د) متطابق الضلعين	مجموع الأجزاء = $1 + 2 + 3 = 6$ قياس الزاوية الكبرى= $\frac{\text{مقدار الجزء}}{\text{مجموع الأجزاء}}$ × مجموع قياسات زوايا المثلث الزاوية الكبرى = $\frac{3}{6} \times 180 = 90$ يصبح المثلث قائم الزاوية لأن أكبر زاوية فيه قائمة
7) اذا كان x, y, z ثلاثة اعداد طبيعية النسبة بينها $3: 4: 5$ وكانت $y - x = 5$ ، فما قيمة z ؟ أ) 15 ب) 20 ج) 25 د) 30	الفرق بين العددين $y - x = 5$ الفرق بين نسبة x, y $4 - 3 = 1$ قيمة النسبة الواحدة = $\frac{5}{1} = 5$ $Z = 5 \times 5 = 25$

النسبة المئوية

النسبة التي طرفها الثاني **100** تسمى نسبة مئوية ، فمثلاً **100 : 25** تُكتب **25%**

- **كيف يمكننا حساب نسبة الزيادة أو النقصان في أي تمرين**

الزيادة أو النقصان = المقدار الجديد – المقدار القديم

نسبة الزيادة أو النقصان = $\frac{\text{مقدار الزيادة أو النقصان}}{\text{المقدار الأصلي قبل الزيادة أو النقصان}} \times 100\%$

مثال	الحل
أ) كم نسبة الزيادة في الإنتاج عام 2006 م عن عام **2003** م حيث إنتاج عام **2006**م يساوي 3000 ، إنتاج عام **2003** م يساوي 2000 ؟ أ) 40% ب) 50% ج) 60% د) 55%	$1000 = 2000 - 3000 =$ مقدار الزيادة $50\% = 100\% \times \frac{1000}{2000} =$ نسبة الزيادة
2) سعر الجوال 480 ريال إذا اشترينا **10** منها بمبلغ 4080 ريال . كم نسبة التخفيض ؟ أ) 15% ب) 10% ج) 12% د) 8%	$4800 = 480 \times 10 =$ سعر 10 جوالات $720 = 4080 - 4800 =$ مقدار التخفيض $15\% = 100\% \times \frac{720}{4800} =$ نسبة التخفيض
3) مربع اذا جعلنا طول ضلعه 3 امثاله , كم نسبة الزيادة في المساحة أ) 300% ب) 400% ج) 600% د) 800%	نفرض طول ضلع المربع $= x$ ، تصبح مساحته $= x^2$ بعد الزيادة طوله $= 3x$ ، تصبح مساحته $= (3x)^2 = 9x^2$ $\mathbf{9x^2 - x^2 = 8x^2} =$ الزيادة في المساحة $800\% = 100\% \times \frac{8x^2}{x^2} =$ نسبة الزيادة في المساحة

- **إذا أعطيت المقدار الأصلي ونسبة الزيادة أو النقصان وطلب المقدار الجديد**

الزيادة أو النقصان = المقدار الأصلي × النسبة

المقدار الجديد = المقدار الأصلي + الزيادة أو النقصان

مثال	الحل
1) ما السعر الجديد لدراجة نارية ثمنها **17500** ريال إذا زاد سعرها **6%** ؟ أ) 18550 ريال ب) 18750 ريال ج) 18650 ريال د) 19050 ريال	ريال $1050 = 17500 \times \frac{6}{100} =$ مقدار الزيادة ريال $18550 = 1050 + 17500 =$ السعر الجديد
2) كان راتب عامل **1000** ريال شهرياً، ثم خصم **10** من راتبه ثم حصل على علاوة **10%** ، فكم أصبح راتبه؟ أ) 1000 ريال ب) 1100 ريال ج) 990 ريال د) 800 ريال	$1000 \xrightarrow{\text{خصم } 10\%} x \xrightarrow{\text{زيادة } 10\%} y$ ريال $\mathbf{100 = 1000 \times \frac{10}{100}} =$ مقدار الخصم ريال $\mathbf{x = 1000 - 100 = 900}$ المبلغ بعد الخصم ريال $\mathbf{90 = 900 \times \frac{10}{100}} =$ مقدار الزيادة ريال $\mathbf{y = 900 + 90 = 990}$ المبلغ بعد الزيادة

- **إذا أعطانا النسبة من عدد وطلب العدد كاملاً أو نسبة منه**

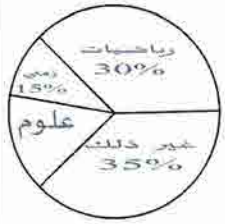
الحـــل	مثـال
نفرض الراتب كاملاً = x ما يعادلها بالريال النسبة $15\% \rightarrow 2400$ $100\% \rightarrow x$ $x = \dfrac{2400 \times 100}{15} = 16000$ ريال	1) إذا وفر موظف من راتبه 15% ويمثل 2400 ريال فكم الراتب كاملاً ؟ أ) 6000 ريال ب) 8000 ريال ج) 10000 ريال د) 16000 ريال
نفرض سعر البضاعة = x ما يعادلها بالريال النسبة $9\% \rightarrow 18$ $100\% \rightarrow x$ $x = \dfrac{18 \times 100}{9} = 200$ ريال	2) إذا دفع رجل مبلغ من المال مقابل بضاعة ثم أرجع له التاجر 18 ريال لأن البضاعة عليها خصم 9% ، أوجد سعر البضاعة. أ) 25 ريال ب) 50 ريال ج) 120 ريال د) 200 ريال

- **إذا أعطيت المقدار بعد الزيادة أو النقصان وطلب منك المقدار الأصلي :**

$$\text{المقدار الأصلي} = \frac{\text{المقدار الجديد} \times 100}{\text{النسبة المعطاه} \pm 100}$$

الحـــل	مثـال
$240 \xrightarrow{\text{خصم } 20\%}$ العدد الأصلي العدد الأصلي $= \dfrac{240 \times 100}{100-20} = \dfrac{240 \times 100}{80}$ $= 300$ **طريقة أخرى** إذا خصمنا 20% يتبقى 80 % التي تعادل 240 $80\% \longrightarrow 240$ $100\% \longrightarrow x$ $x = \dfrac{240 \times 100}{80} = 300$	1) اذا خصمنا 20% من عدد فأصبح 240 فإن العدد هو أ) 300 ب) 400 ج) 450 د) 600
قياس الدائرة = $360°$ نسبة قسم الحاسب = $\dfrac{120}{360} = \dfrac{1}{3}$ ومن المعروف أن $\dfrac{1}{3} = 33.3\%$	2) دائرة مقسمة لثلاث اقسام وفيها قسم الحاسب قياس زاويته $120°$ فما نسبته المئوية ؟ أ) 33% ب) 44% ج) 55% د) 66%

- **مكملة النسبة :** (النسبة المعطاة) $-$ 100% $=$ مكملة النسبة

الحــل	مثال
نسبة طلاب السنة الأولى $= 100\% - (32\% + 28\%) = 40\%$ $40\% \rightarrow 90$ طلاب السنة الأولى $100\,\% \rightarrow x$ الطلاب جميعاً $x = \frac{90\times100}{40} = 225$ طالب	1) إذا كان عدد طلاب السنة الأولى 90 طالب وكان طلاب السنة الثانية 32% وطلاب السنة الثالثة 28% ، أوجد عدد الطلاب ؟ أ) 220 طالب ب) 225 طالب ج) 230 طالب د) 235 طالب
$100\% - 70\% = 30\%$ = نسبة اليابسة $\frac{30}{100} \times 510 = 153$ = مساحة اليابسة	2) إذا كانت مساحة الأرض $510km$ مربع ويغطي حوالي 70% منها الماء , فكم تبلغ مساحة اليابسة ؟ أ) 110 ب) 118 ج) 120 د) 153
نسبة المتبقي من الارض $= 100\% - (25\% + 10\%) = 65\%$ $30 \times 40 = 1200$ = مساحة الأرض $\frac{65}{100} \times 1200 = 780$ = المساحة المتبقية	3) أرض مستطيلة ابعادها 40 , 30 ، تم زراعة 25% منها أرز و 10% منها قمح , احسب مساحة المتبقي منها . أ) 620 ب) 720 ج) 780 د) 870
نسبة الطلاب يفضلون العلوم $= 100\% - (30\% + 15\% + 35\%)$ $= 100\% - 80\% = 20$ $\frac{20}{100} \times 220 = 44$ = عدد الطلاب يفضلون العلوم	4) الشكل أدناه يمثل نتائج استبانة عن المادة الدراسية المفضلة.. أجريت على 220 طالبا ، كم طالب يفضلون العلوم؟  أ) 11 ب) 22 ج) 44 د) 88
مساحة الدائرة الكبيرة $\pi r^2 = 100^2\pi = 10000\pi$ نصف قطر الدائرة الصغيرة $\frac{100}{20} = 5$ مساحة الدائرة الصغيرة $5^2\pi = 25\pi$ النسبة بين الدائرة الصغيره والدائرة الكبيرة $\frac{25}{10000} = \frac{1}{400}$	5) دائرة نصف قطرها 100cm رسم 20 دارة صغيرة على قطرها، اوجد نسبة المساحة بين احدى هذه الدوائر الصغيرة ومساحة الدائرة الكبيرة أ) 1/200 ب) 1/400 ج) 1/50 د) 1/100
نسبة عدد المنتسبين $15\% + 5\% = 20\%$ نسبة غير المتخصصين $100\% - 20\% = 80\%$ عدد الغير المتخصصين $\frac{80}{100} \times 220 = 176$	6) اذا كان في المعهد 15% تخصص كيمياء و 5% تخصص رياضيات وعدد المنتسبين بالمعهد 220 طالب فكم عدد غير المتخصصين في الرياضيات ولا في الكيمياء أ) 11 ب) 33 ج) 122 د) 176

التناسب

التناسب : هو التساوي بين نسبتين متكافئتين $\frac{x}{b} = \frac{a}{c}$

ولإيجاد قيمة المجهول x نستخدم الضرب التقاطعي $x = \frac{a \times b}{c}$

التناسب الطردي

هناك العديد من المقادير التي بزيادة أحدهما يزداد الآخر والعكس صحيح من أشهرها:

1. تتناسب المسافة طردياً مع السرعة عند ثبوت الزمن .
2. تتناسب المسافة طردياً مع الزمن عند ثبوت السرعة.
3. تتناسب المسافة المقطوعة وكمية البنزين المستهلكة .

مثال	الحل
1) جهاز يصنع 75 جم من الخليط كل 30 دقيقة وجهاز آخر يصنع 80 جم كل 40 دقيقة . فكم مجموع ما يصنعه الجهازين من الخليط بعد ساعتين ؟ أ) 240 جم ب) 300 جم ج) 450 جم د) 540 جم	الجهاز الأول كمية الخليط بالجرام الزمن بالدقيقة 75 30 x 120 $x = \frac{120 \times 75}{30} = 300$ جرام الجهاز الثاني كمية الخليط بالجرام الزمن بالدقيقة 80 40 y 120 $y = \frac{120 \times 80}{40} = 240$ جرام المجموع $= 240 + 300 = 540$ جرام
2) مصنع للطاولات لديه 6 خطوط إنتاج، كل منها ينتج 30 طاولة في الساعة. خلال كم ساعة يتم إنتاج y طاولة؟ أ) $\frac{180}{y}$ ب) $\frac{y}{180}$ ج) $\frac{6y}{30}$ د) $\frac{30}{6y}$	6 خطوط تنتج في الساعة $= 6 \times 30 = 180$ طاولة الانتاج الزمن بالساعة 180 1 y x $x = \frac{y}{180}$
3) تستهلك سيارة 20 لتر من البنزين عندما تقطع مسافة 240km , كم تستهلك عندما تقطع مسافة 72km. أ) 5 L ب) 6 L ج) 7 L د) 8 L	كمية البنزين المسافة المقطوعة 20 240 x 72 $x = \frac{72 \times 20}{240} = 6L$
4) يستطيع سامي قراءة 40 صفحة في 20 دقيقة , ففي كم دقيقة يستطيع قراءة 20 صفحة . أ) 8 min ب) 10 min ج) 12 min د) 14 min	عدد الصفحات عدد الدقائق 40 20 20 x $x = \frac{20 \times 20}{40} = 10\ min$

التناسب العكسي

هناك العديد من المقادير التي بزيادة أحدهما يقل الأخر ومن أشهرها:
1. تتناسب السرعة عكسياً مع الزمن عند ثبوت المسافة .
2. الزمن وعدد العمال مع ثبوت كمية العمل .

مثـال	الحـــل
1) ينهي 3 عمال عملهم خلال 8ساعات فكم عاملاً نحتاج لإنهاء العمل في 6 ساعات؟ أ) 4 ب) 5 ج) 6 د) 8	تناسب عكسي : كلما زاد عدد العمال قلت عدد ساعات إنجاز العمل عدد العمال × عدد الساعات = عدد العمال × عدد الساعات $6 \times x = 8 \times 3$ $x = 4$ ∴ عدد العمال المطلوب = 4 عمال
2) إذا كان خالد يعمل في اليوم 5 ساعات فإنه ينجز عمله في 3 أيام , كم ساعة يحتاج في اليوم لكي ينجز عمله في يومين؟ أ) 1.5 ب) 3.5 ج) 5.5 د) 7.5	تناسب عكسي : كلما زاد عدد الساعات قل عدد الأيام لإنجاز العمل عدد الساعات × عدد الأيام = عدد الساعات × عدد الأيام $2 \times x = 5 \times 3$ $x = \frac{15}{2} = 7.5$ ∴ عدد الساعات المطلوبة = 7.5 ساعة
3)في معسكر صيفي يستهلك 50 مشاركاً خزان الماء في 12 يوماً ، فإذا زاد عدد المشاركين 10 آخرين فكم يوماً سيدوم هذا الخزان ؟ أ) 10 ب) 8 ج) 6 د) 12	تناسب عكسي فبزيادة عدد المشاركين في المعسكر يكفي الخزان مدة أقل $50 \times 12 = (50 + 10)x$ $x = \frac{50\times12}{60} = 10$ عشرة أيام تكفي لإنهاء 60 مشاركاً خزان المياه
4) يستطيع 3 عمال إنجاز عمل ما في 12 يوم . كم يستغرق 9 عمال لإنجاز هذا العمل أ) 3 أيام ب) 4 أيام ج) 5 أيام د) 6 أيام	تناسب عكسي عدد العمال × عدد الايام = عدد العمال × عدد الايام $12 \times 3 = x \times 9$ $x = \frac{36}{9} = 4$

تمارين على التناسب الطردي والعكسي

1) يستطيع مزارع زرع 300 زرعة في 60 يوم إذا عمل بمقدار معين من الوقت يومياً . فما المدة التي يستطيع فيها 10 عمال زرع 300 زرعة ؟ أ) 50 ب) 42 ج) 10 د) 6	عدد المزارعين: 1 ، 10 — كمية الزرع: 300 ، 300 — عدد الأيام: 60 ، x $x = \frac{1 \times 300 \times 60}{10 \times 300} = 6$
2) اتفق رجل مع 60 عامل على بناء استراحة في 75 يوم ومر 25 يوم ولم يبني سوى ربع العمل فقط . كم عاملاً يحتاج لينهي البناء في الموعد المحدد ؟ أ) 45 ب) 50 ج) 35 د) 30	عدد العمال: 60 ، x — كمية العمل: $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ — عدد الأيام: 25 ، 50 $x = \frac{60 \times \frac{3}{4} \times 25}{\frac{1}{4} \times 50} = 90$ يجب أن يزيد الرجل 30 عاملاً

12) الأعداد المركبة :

- **العدد المركب** : يكتب على شكل $a + bi$, حيث a الجزء الحقيقي و b الجزء التخيلي .
- **العمليات على الأعداد المركبة** :
  - الجمع $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$
  - الطرح $(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$
  - الضرب $(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$
  - القسمة $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$
  - تساوي عددين مركبين $a+bi = c+di \rightarrow a = c \ , \ b = d$
- **مرافق العدد المركب** : إذا كان $z = a + b\,i$ فإن مرافقه هو $a - b\,i$
  - حاصل ضرب العدد المركب في مرافقه دائما ًّ عدد حقيقي $(a+b\,i)\cdot(a-b\,i) = a^2 + b^2$

مثال	الحل
1) قيمة $(2+3i)+(4+7i)$ تساوي : أ) $6+10i$ ب) $-6+10i$ ج) $6-10i$ د) $-6-10i$	نقوم بجمع الجزء الحقيقي مع الجزء الحقيقي ، والجزء التخيلي مع الجزء التخيلي $(2+4)+(3+7)i = 6+10i$
2) قيمة $(3+7i)-(2+i)$ تساوي : أ) $1-6i$ ب) $-1+6i$ ج) $1+6i$ د) $-5i$	نقوم بطرح الجزء الحقيقي من الجزء الحقيقي ، (والجزء التخيلي من الجزء التخيلي) $(3-2)+(7-1)i = 1+6i$
3) قيمة $(2+i)\cdot(3-5i)$ تساوي : أ) $11-7i$ ب) $-11-7i$ ج) $11+7i$ د) $-11+7i$	$(2+i)\cdot(3-5i) = 2(3-5i)+i(3-5i)$ $= 6-10i+3i-5i^2$ $= 6-10i+3i+5 = 11-7i$
4) قيمتي a , b على الترتيب التي تجعل المعادلة التالية صحيحة $3a+(b+2)i = 9+6i$ هي : أ) $3 , 4$ ب) $-3 , 4$ ج) $3 , -4$ د) $-3 , -4$	$3a = 9 \Longrightarrow a = 3$ $b+2 = 6 \Longrightarrow b = 4$
5) قيمة $\frac{2i}{3+i}$ تساوي : أ) $\frac{-1}{5}+\frac{3}{5}i$ ب) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ ج) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ د) $\frac{-1}{5}-\frac{3}{5}i$	نضرب البسط والمقام في مرافق المقام وهو $(3-i)$ $\frac{2i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{6i+2}{9+1}$ $= \frac{2+6i}{10} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$
6) قيمة $\frac{2i}{1-i}$ تساوي : أ) $1+i$ ب) $-1+i$ ج) $-1-i$ د) $1-i$	$\frac{2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{2i-2}{1+1}$ $= \frac{-2+2i}{2} = -1+i$
7) قيمة $\frac{2i-i}{i}$ يساوي : أ) 1 ب) -1 ج) 0 د) 2	$\frac{(2i-i)\times -i}{i \quad \times -i} = \frac{-2i^2+i^2}{-i^2} = \frac{2-1}{1} = 1$

- **مقياس العدد المركب :**

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

الحل	مثال
$\lvert z\rvert = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$	1) مقياس العدد $4 + 3i$ يساوي : أ) 5 ب) 9 ج) 16 د) 25
$\lvert z\rvert = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$	2) إذا كان $z = -i$ فإن قيمة $\lvert z\rvert$ تساوي : أ) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$

- **قيمة i مرفوعه لأس :**

- $i = \sqrt{-1}$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$
- ...
- $i^n = \begin{cases} n \text{ عدد زوجي} & \begin{cases} \frac{n}{2} = \text{عدد زوجي} & \rightarrow i^n = 1 \\ \frac{n}{2} = \text{عدد فردي} & \rightarrow i^n = -1 \end{cases} \\ n \text{ عدد فردي} & \begin{cases} \frac{n-1}{2} = \text{عدد زوجي} & \rightarrow i^n = i \\ \frac{n-1}{2} = \text{عدد فردي} & \rightarrow i^n = -i \end{cases} \end{cases}$

الحل	مثال
$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \times \sqrt{-1} = 5i$	1) في مجموعة الاعداد التخيلية $\sqrt{-25}$ تساوي أ) 5 ب) -5 ج) $5i$ د) $-5i$
$2i \cdot 3i = 6i^2 = 6(-1)$	2) $2i \cdot 3i$ تساوي : أ) 6 ب) -6 ج) $6i$ د) $-6i$
$\sqrt{-20} . \sqrt{-5} = \sqrt{20}\, i . \sqrt{5}\, i = \sqrt{100}\, i^2 = -10$	3) $\sqrt{-20} . \sqrt{-5}$ تساوي : أ) 10 ب) -10 ج) $10i$ د) $-10i$
$i^{34} = (i^2)^{17} = (-1)^{17} = -1$	4) قيمة العدد المركب i^{34} تساوي : أ) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$
$i^{15} = i^{14} \times i = (i^2)^7 \times i = (-1)^7 i = -i$ الطريقة المختصرة : $\frac{15-1}{2} = \frac{14}{2} = 7$ عدد فردي $\therefore\ i^{15} = -i$	5) قيمة العدد المركب i^{15} تساوي : أ) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$
$\frac{43-1}{2} = \frac{42}{2} = 21$ عدد فردي $\therefore\ i^{43} = -i$	6) قيمة العدد المركب i^{43} هي : أ) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$
$\lvert z\rvert = \sqrt{3^2 + a^2}$ $5 = \sqrt{9 + a^2}$ $25 = 9 + a^2$ نربع الطرفين $a^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow a = 4$	7) مقياس العدد المركب $z = 3 + ai$ يساوي 5 ، فإن قيمة a تساوي : أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

للوصول إلى فيديوهات
شروحات المعايير
اضغط هنا

المعيار الثاني
(الجبر و الدوال الحقيقة)

1) المجموعات
2) العمليات على المجموعات
3) العبارات الجبرية
4) العمليات على العبارات الجبرية
5) المعادلات
6) حل المعادلات
7) المتباينات
8) الدوال
9) العمليات على الدوال
10) الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
11) المصفوفات
12) العمليات الجبرية على المصفوفات
13) المحددات

1) المجموعات :

تعريف المجموعة : هي تجمع من الأشياء المعرفة والمحددة تحديدًا تاماً .

عناصر المجموعة : هي الأشياء التي تتكون منها المجموعة .

الترميز : يرمز للمجموعة بحروف انجليزية كبيرة مثل $A , B , C , ...$ ، و للعناصر بحروف انجليزية صغيرة مثل $a , b , c , ...$.

مثال :

- شهور السنة الهجرية = {محرم ، صفر ، ... ، ذوالقعدة ، ذوالحجة}
- الفاكهة اللذيذة = تعبير لا يدل على مجموعة لأنه يحمل صفة وغير محدد حيث الفاكهة اللذيذة بالنسبة لشخص قد تكون غير لذيذة بالنسبة لشخص آخر .

طرق التعبير عن المجموعة

السرد (القائمة)

نكتب جميع عناصر المجموعة داخل قوسين من النوع { } ونضع فاصلة بين كل عنصر والذي يليه ، مع مراعاة عدم تكرار العناصر ويكون الترتيب غير مهم .

الصفة المميزة

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعه

$A = \{x : \text{زوجي عدد } x\}$

$B = \{x : 0 < x < 9 , \text{عدد فردي } x\}$

مثال : لتكن A مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين $1 , 11$ يمكن كتابتها بطريقتين

- السرد : $A = \{2 , 4 , 6 , 8 , 10\}$.
- الصفة المميزة على الصورة : $A = \{x : 1 < x < 11 , \text{ عدد زوجي } x\}$

رتبة المجموعه : هي عدد عناصر المجموعة .

مثال : لتكن $A = \{2 , 4 , 6 , 8 , 10\}$ ، ماهي رتبة المجموعه ؟

الحل :

رتبة المجموعه هي $|A| = 5$

المجموعة الخالية :

هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر ، ويرمز لها بالرمز { } أو ϕ.

- المجموعة الخالية جزئية من أي مجموعة $\emptyset \subset A$.
- رتبة المجموعه الخالية تساوي صفر .

إذا كانت $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

الانتماء :

- العنصر 2 ينتمي للمجموعة A ، ونكتب ذلك رمزيا $2 \in A$.
- العنصر 3 لا ينتمي للمجموعة A ، ونكتب ذلك رمزيا $3 \notin A$.

الاحتواء :

- المجموعة $B = \{2, 8\}$ مجموعة جزئية من المجموعة A ، وتكتب رمزيا $B \subset A$.
- المجموعه $C = \{3, 4\}$ ليست مجموعه جزئية من المجموعه A ، وتكتب رمزيا $C \not\subset A$.

تساوي المجموعات:

إذا كانت $A \subset B , B \subset A$ تكون المجموعتان متساويتان $A = B$

مثـال : $B = \{x : \text{حرف من كلمة السلام } x\}$ ، $A = \{x : \text{حرف من كلمة سالم } x\}$
فإن $A = B$ (لهما نفس العناصر).

المجموعتان المتكافئتان :

هما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$.

مثـال : إذا كان $B = \{a, b, c\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ فإن $A \equiv B$.(عدد عناصرهما متساو)

مجموعة القوة للمجموعة A :

وهي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A ، ونرمز لها بالرمز $P(A)$
وعدد عناصرها $|P(A)| = 2^n$ حيث n عدد عناصر المجموعة A .

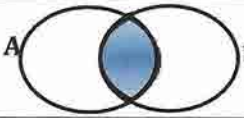
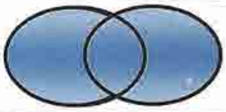
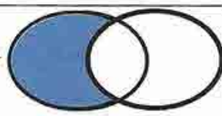
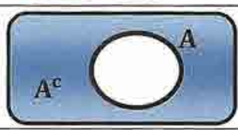
مثـال : إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ فأوجد $P(A)$ موضحا عدد عناصرها.

الحل :

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

عدد عناصر هو $|P(A)| = 2^3 = 8$

2) العمليات على المجموعات :

التقاطع	$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge x \in B\}$ مجموعة العناصر المشتركة في المجموعتين	
الاتحاد	$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ مجموعة جميع عناصر المجموعتين مع عدم التكرار	
الفرق	$A - B = \{x : x \in A \ \wedge x \notin B\}$ مجموعة العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B	
المكملة	$A^c = U - A = \{x : x \in U \ \wedge x \notin A\}$ مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U بعد حذف عناصر المجموعة A منها	

خصائص العمليات على المجموعات : لأي ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U :

الخاصية	الخاصية رمزياً
الابدال	$A \cap B = B \cap A \quad , A \cup B = B \cup A$
التجميع	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
توزيع التقاطع على الاتحاد توزيع الاتحاد على التقاطع	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
قانونا ديمورجان	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
تقاطع المجموعة مع مكملتها	$A \cap A^c = \emptyset \quad , A \cup A^c = U$
المكملة	$(A^c)^c = A \ , \ \emptyset^c = U \ , U^c = \emptyset$
المحايد	$A \cap \emptyset = \emptyset \quad , A \cup \emptyset = A , \qquad A \cap U = A$
تعريف الفرق	$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c$

الضرب الديكارتي :

- لتكن A, B مجموعتين ، نعرف $A \times B$ بأنه حاصل الضرب الديكارتي للمجموعة A في المجموعة B
  $$A \times B = \{ \ (a, b): a \in A \ , b \in B \ \ \}$$
- الرمز (a, b) يسمى زوجاً مرتباً : مركبته الأولى a من المجموعة A ومركبته الثانية b من المجموعة B.
- عدد عناصر $A \times B$ = عدد عناصر المجموعة A × عدد عناصر المجموعة B
  $$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

مثال : إذا كانت $A = \{1,2,3\} , B = \{r , t\}$ فإن :

- $A \times B = \{(1, r), (1, t), (2, r), (2, t), (3, r), (3, t)\}$
- $B \times A = \{(r, 1), (r, 2), (r, 3), (t, 1), (t, 2), (t, 3)\}$
- $n(A \times B) = n(B \times A) = 6$
- $A \times B \neq B \times A$

الحــل	مثــال
الاجابة (ب) لايوجد في المجموعة العنصر 2 $2 \notin a$	1) اذا كان $a = \{\ 1\ ,\ \{1,2\}\ \}$ فأي العبارات الاتية خاطئة : أ) عدد عناصر المجموعة a هي 2 ب) $2 \in a$ ج) $\{1,2\} \in a$ د) $1 \in a$
الاجابة (ب) 2 عنصر ينتمي للمجموعة A $2 \in a$	2) اذا كان $A = \{\ 2\ ,3\ ,\{5\}\ ,7\ \}$ فأي الآتي صحيح : أ) $5 \in A$ ب) $2 \in A$ ج) $2{,}5 \in A$ د) $\{5\} \subseteq A$
$(Z \cap X) \cup (Z \cap Y) = Z \cap (X \cup Y)$ $= Z \cap \quad Z = Z$ حل لآخر : نفرض أن $X = \{1\}, Y = \{2\}\ , Z = \{1,2\}$ $(Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$ $= \quad \{1\} \quad \cup \quad \{2\} \quad = \{1,2\} = Z$	3) اذا كانت المجموعات X, Y, Z تحقق $X \cap Y = \emptyset$ و $X \cup Y = Z$ فإن $(Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$ يساوي : أ) X ب) Y ج) Z د) $\emptyset$
$B \cup C\ = \{b, c, e\} \cup \{a, f, j\}$ $= \{a, b, c, e, f, j\}$ $(B \cup C) \cap A = \{a, b, c, e, f, j\} \cap \{a, d, e, f\}$ $= \{a, e, f\}$	4) اذا كانت $A = \{a, d, e, f\}$ و $B = \{\ b, c, e\ \}$ و $C = \{a, f, j\ \}$ فإن $(B \cup C) \cap A =$ أ) $\{a, e, f\}$ ب) $\{a, d, e, f\}$ ج) $\{a, e, f, j\}$ د) $\{a, b, c, d, e, f, j\}$
$A - B$ تعني العناصر الموجودة في A وليس موجوده في B $A - B = \{2,4\}$	5) اذا كان $A = \{2,4,3,5\}, B = \{3,5,8,10\}$ فإن $A - B$ يساوي : أ) $\{8,10\}$ ب) $\{2,4\}$ ج) $\{3,5\}$ د) $\{2,3,4,5,8,10\}$
$x^2 - 3x + 2 = 0$ $(x-1)(x-2) = 0$ $x = 1, \qquad x = 2$ $B = \{1,2\}$ اذن $B \subset A$	6) اذا كان $A = \{1,2,3\}$ $B = \{\ x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0\ \}$ فإن : أ) $A \subset B$ ب) $B \subset A$ ج) $A \in B$ د) $B \in A$

3) العبارات الجبرية :

- **المتغير** : هو عبارة عن رمز جبري يعبر عن عدد حقيقي وعادة ما يرمز للمتغير بالأحرف ... , x , y , z , w .
- **الحد الجبري** : هي عبارة عن صيغة من متغيرات وأعداد حقيقية مرتبطة فيما بينها .
- **انواع الحدود الجبرية** :

الحد الجبري	المسمى	معامله الثابت	درجته
$7\,x^3$	حد جبري في المتغير x	7	3
x	حد جبري في المتغير x	1	1
$-3\,x^2\,y^4$	حد جبري في المتغيرين x , y	-3	6
$11\,x\,y^2\,z$	حد جبري في المتغيرات x , y , z	11	4
5	حد مطلق	5	0

- **العبارة الجبرية** :

هي عبارة مركبة من جمع أو طرح حدين جبريين أو أكثر ، ودرجتها هي أعلى درجة حد من حدودها المكونه لها

العباره الجبرية	درجتها
$x^3 - 2x^2 + 5$	3
$4x^2y^3 - 5xy^2$	5
$-2xy + 2z + 3x^2$	2

ملاحظة : العبارة الجبرية التي تحوي متغيراً واحداً فقط تسمى (كثيرة حدود)

4) العمليات على العبارات الجبرية :

- **الجمع والطرح :**

يتم عن طريق جمع وطرح الحدودو المتشابهة ، وهي التي لها نفس المتغيرات ونفس الدرجة ولا تختلف إلا في المعاملات فقط .

أمثلة :

$5x^2+2x^2=7x^2$	$3xy^2-5xy^2=-2xy^2$
$(x^2+4y^3)+(5x^2-2y^3)=6x^2+2y^3$	$x^2+10y-x^2=10y$

- **الضرب :**

عند ضرب حد جبري في آخر نضرب المعاملات معاً والمتغيرات معاً مع مراعاة جمع أسس الرموز المتشابهة حسب قاعدة $x^n \times x^m = x^{n+m}$.

أمثلة :

$(3x^2)(6x^5)=18x^7$	$(5)(4x^2)=20x^2$
$(2x)(x^3+3y^2-7)=2x^4+6xy^2-14x$	$(-4x^2y)(2xy^4)=-8x^3y^5$

- **القسمة :**

عند قسمة حد جبري على آخر نقسم المعاملات ونقسم المتغيرات المتشابهة مع مراعاة طرح أسس الرموز المتشابهة حسب قاعدة $\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$.

أمثلة :

$\frac{21x^3}{3x}=7x^2$	$\frac{6x^2}{2}=3x^2$
$\frac{6x^3-10y^2-7}{2}=3x^3-5y^2-\frac{7}{2}$	$\frac{-6x^2y^5}{8x^2y^2}=\frac{-3y^3}{4}$

- **التحليل :**

هو تحويلها كحاصل ضرب عبارات جبرية اخرى .

$ax + ay = a(x + y)$	تحليل بإخراج العامل المشترك الاكبر
$x^2 + y^2$	مجموع مربعين لا يُحلل
$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$	فرق بين مربعين
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	مجموع مكعبين
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	فرق بين مكعبين

المربع الكامل	
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$	$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
مربع الحد الأول ، 2× الحد الأول × الحد الثانى ، مربع الحد الثاني	مربع الحد الأول ، 2× الحد الأول × الحد الثانى ، مربع الحد الثاني
المكعب الكامل	
$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

تحليل كثيرة الحدود على صورة $x^2 + bx + c$

إذا كان الحد c موجب و $c = nm$ $b = n + m$	إذا كان الحد c سالب و $c = nm$ $b = n - m$ بحيث إن $n > m$
$x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$	$x^2 + bx - c = (x + n)(x - m)$
مثال : $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$	**مثال :** $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$
$x^2 - bx + c = (x - n)(x - m)$	$x^2 - bx - c = (x - n)(x + m)$
مثال : $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$	**مثال :** $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

تحليل كثيرة الحدود على صورة $ax^2 + bx + c$

$$2x^2 + 7x - 15$$

- نضرب $2 \times -15 = -30$
- نبحث عن عددان حاصل ضربهما -30 وحاصل جمعهما 7 نجد العددان -3 , 10

$$2x^2 + 7x - 15 = (2x - 3)(2x + 10) = (2x - 3)\left(\frac{2x}{2} + \frac{10}{2}\right)$$
$$= (2x - 3)\ (x + 5)$$

الحل	مثال
فرق بين مربعين $10000 - (99 \times 99) = 100^2 - 99^2$ $= (100-99)(100+99)$ $= (1)(199) = 199$	1) $10000 - (99 \times 99) = \cdots$ أ) 189 ب) 199 ج) 200 د) 140
$\dfrac{\frac{1}{x}-y}{\frac{1}{y}-x} = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{yx}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{xy}{y}} = \dfrac{\frac{1-xy}{x}}{\frac{1-xy}{y}}$ $= \dfrac{1-xy}{x} \times \dfrac{y}{1-xy}$ $= \dfrac{y}{x}$	2) $\dfrac{\frac{1}{x}-y}{\frac{1}{y}-x}$ يساوي : أ) $\dfrac{x}{y}$ ب) $\dfrac{y}{x}$ ج) $-\dfrac{x}{y}$ د) -1
تربيع الطرفين $(x+y)^2 = (4)^2$ $x^2 + 2xy + y^2 = 16$ بالتعويض بقيمة $xy = 2$ في المعادله $x^2 + 2(2) + y^2 = 16$ $x^2 + 4 + y^2 = 16$ $x^2 + y^2 = 16 - 4$ $x^2 + y^2 = 12$	3) اذا كانت $x + y = 4$, $xy = 2$ فما قيمة $x^2 + y^2$ ؟ أ) 10 ب) 12 ج) 14 د) 16
نستخرج عامل مشترك من البسط ونحلل العبارة في المقام $\dfrac{3x^2-6x}{x^2+3x-10} = \dfrac{3x(x-2)}{(x-2)(x+5)}$ $= \dfrac{3x}{x+5}$	4) اذا كان $x \neq -5$, $x \neq 2$ فإن المقدار $\dfrac{3x^2-6x}{x^2+3x-10} =$ أ) $\dfrac{1}{2}$ ب) $\dfrac{3}{5}$ ج) $\dfrac{3x}{x+5}$ د) $\dfrac{3}{x-2}$
$(2x+3)^2 - (x-1)^2$ $= 4x^2 + 12x + 9 - (x^2 - 2x + 1)$ $= 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 2x - 1$ $= 3x^2 + 14x + 8$	5) المقدار $(2x+3)^2 - (x-1)^2$ يساوي : أ) $x^2 + 14x + 8$ ب) $3x^2 + 14x + 8$ ج) $x^2 + 10x + 10$ د) $3x^2 + 10x + 10$

5) المعادلات :

• **المعادلة :**
هي عباره عن صيغة جبرية تعبر عن علاقة التساوي بين عبارتين رياضيتين تحوي إحداهما أو كلاهما المتغير x .

أمثلة :

(a $2x + 6 = 10$

(b $x^2 = 9$

(c $x + 3 = x + 4$

• **حل المعادلة (جذر المعادلة) :**
عملية إيجاد قيم المتغير التي تجعل العبارة الرياضية صحيحه تسمى حل المعادلة

▪ في المعادلة a)
اذا عوضنا عن المتغير $x = 1$ لحصلنا على $8 = 10$ وهذه علاقة خاطئة ،
ولكن اذا عوضنا عن المتغير $x = 2$ لحصلنا على $10 = 10$ وهذه علاقه صحيحة ،
في هذه الحاله العدد 2 حلاً للمعادلة .

▪ في المعادلة b)
اذا عوضنا عن المتغير $x = 3$ لحصلنا على $9 = 9$ وهذه علاقة صحيحه ،
ولكن اذا عوضنا عن المتغير $x = -3$ لحصلنا على $9 = 9$ وهذه علاقه صحيحة ،
في هذه الحاله مجموعة الحلول للمعادلة $\{3 , -3\}$.

▪ في المعادلة c)
اذا عوضنا عن المتغير x بأي قيمة ، لحصلنا على علاقة خاطئة ،
في هذه الحاله المعادلة ليس لها حل .

∴ قد يكون للمعادلة : **حل واحد** أو **أكثر من حل** أو **ليس لها حل** .

ملاحظة :
المعادلة تكون فيها إشارة التساوي =
وللتعبير عن مجموعة الحل نستخدم أقواس المجموعه { }

6) حل المعادلات :

- حل المعادلات الخطية في مجهول واحد :

❖ إذا كانت المعادلة على الصورة $ax + b = 0$ فإن حلها هو $x = -\left(\frac{b}{a}\right)$

مثال : أوجد حل المعادلة $3x - 1 = 5$ ؟

الحل :

الطريقه الأولى بالعمليات الجبريه	الطريقة الثانية بالصورة العامة
$3x = 5 + 1$ $3x = 6$ $x = 2$	$3x - 1 - 5 = 0$ $3x - 6 = 0$ $\therefore x = -\left(\frac{-6}{3}\right) = 2$

مثال : أوجد حل المعادلة $3(2x - 1) - 7 = 6x - 10$ ؟

الحل :

نقوم بعملية ضرب العدد 3 بالقوس

$$6x - 3 - 7 = 6x - 10$$
$$6x - 10 = 6x - 10$$

تسمى المعادلة متطابقه

أي أنها تكون صحيحه لجميع قيم المتغير فإن مجموعة الحل هي R

- حل المعادلات التربيعية في مجهول واحد :

❖ اذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2 + bx = 0$ فإن حلولها هي $x = 0 \;,\; x = -\frac{b}{a}$

مثال : أوجد حل المعادله $2x^2 = 5x$ ؟

الحل : نحول المعادلة الى الصورة العامه فتصبح : $2x^2 - 5x = 0$

الطريقه الأولى بالتحليل	الطريقة الثانية
$x\,(2x - 5) = 0$ $x = 0 \quad or \quad 2x - 5 = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = \frac{5}{2}$	$2x^2 - 5x = 0$ $x = 0 \quad or \quad x = -\left(\frac{-5}{2}\right)$ $x = 0 \quad or \quad x = \frac{5}{2}$

❖ اذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2 + b = 0$ فإن حلولها هي $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\, i$

مثال : أوجد حل المعادله $4x^2 + 8 = 0$ ؟

الحل :

الطريقه الأولى بالتحليل	الطريقة الثانية
$4\,(x^2 + 2) = 0$ $x^2 + 2 = 0$ $x^2 = -2$ $x = \pm\sqrt{-2}$ $\therefore x = \pm\sqrt{2}\, i$	$4x^2 + 8 = 0$ $\therefore x = \pm\sqrt{\frac{8}{4}}\, i$ $\therefore x = \pm\sqrt{2}\, i$

❖ اذا كانت المعادلة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ، تحل المعادلة بإستخدام القانون العام

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ حيث أن المميز هو $\Delta = b^2 - 4ac$:

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2 - 4ac > 0$	جذران حقيقيان (نسبيان أو غير نسبيان)

مثال : أوجد حل المعادله $2x^2 - 7x + 5 = 0$

الحل : نوجد المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(5) = 49 - 40 = 9 > 0$$

∵ المميز اكبر من صفر و مربع كامل ∴ يوجد جذران حقيقيان نسبيان

$$x_2 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7-3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_1 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{7+3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

مثال : أوجد حل المعادله $x^2 - 6x + 4 = 0$

الحل : نوجد المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(4) = 36 - 16 = 20 > 0$$

∵ المميز اكبر من صفر وليس مربع كامل ∴ يوجد جذران حقيقيان غير نسبيان

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{20}}{2(1)} = \frac{6 - 2\sqrt{5}}{2} = 3 - 2\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{20}}{2(1)} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{2} = 3 + 2\sqrt{5}$$

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي واحد

مثال : أوجد حل المعادله $x^2 + 10x + 25 = 0$

الحل : نوجد المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4(1)(25) = 100 - 100 = 0$$

∴ يوجد حقيقي واحد

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-10}{2} = -5$$

قيمة المميز	عدد الجذور وأنواعها
$b^2 - 4ac < 0$	جذران تخيليان (مركبان)

مثال : أوجد حل المعادله $x^2 + 2x + 5 = 0$

الحل : نوجد المميز

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$$

∴ يوجد جذران مركبان

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2(1)} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i$$

• حل المعادلات التي تتضمن القيمة المطلقة :

تعلمنا سابقاً أن القيمة المطلقة لعدد هي المسافة من الصفر الى هذا العدد على طول خط الأعداد الحقيقية ،
فلو قلنا أن $|x| = 3$ فإن العدد x أما أن يكون $x = 3$ أو $x = -3$
وهنا أيضا في المعادلات يجب الأخذ بعين الأعتبار أن العبارة داخل رمز القيمة المطلقة إما أن تكون موجبة أو سالبة

مثال : أوجد حل المعادلة $|6x - 3| = 9$ ؟

الحل :

$$\begin{array}{lcl} 6x - 3 = 9 & or & 6x - 3 = -9 \\ 6x = 12 & or & 6x = -6 \\ x = 2 & or & x = -1 \end{array}$$

مجموعة الحل = $\{-1 , 2\}$

مثال : أوجد حل المعادلة $|x - 2| = -5$ ؟

الحل :

حل المعادلة $\emptyset$ لأن القيمة المطلقة لاتساوي السالب

• حل المعادلات الجذرية :

المعادلات التي تحتوي متغيرات تحت الجذر تسمى معادلات جذرية ، ولحل هذه المعادلات نقوم بتربيع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر .

مثال : أوجد حل المعادلة $\sqrt{x+5} + 7 = 10$ ؟

الحل :

$$\sqrt{x+5} + 7 = 10$$
$$\sqrt{x+5} = 3$$
$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2 = 3^2$$
$$x + 5 = 9$$
$$x = 4$$

مثال : أوجد حل المعادلة $\sqrt{x+1} = x - 1$ ؟

الحل :

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = (x-1)^2$$
$$x + 1 = x^2 - 2x + 1$$
$$x^2 - 2x - x + 1 - 1 = 0$$
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x\,(x - 3) = 0$$
$$\begin{array}{lcl} x = 0 & or & x - 3 = 0 \\ x = 0 & or & x = 3 \end{array}$$

التحقق

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{0+1} = 0 - 1 & , & \sqrt{3+1} = 3 - 1 \\ \sqrt{1} = -1 & , & \sqrt{4} = 2 \\ 1 \neq -1 & , & 2 = 2 \end{array}$$

حل دخيل   حل صحيح

∴ حل المعادله الوحيد هو 3

• حل نظام المعادلات الخطية :

إذا كان لدينا معادلتين خطيتين مثل $\begin{matrix} y = ax + b \\ y = cx + d \end{matrix}$ فإنه يسمى نظام المعادلات الخطية

ويمكن حل هذا النظام بأكثر من طريقة حيث أن الحل يكتب على صورة زوج مرتب (x , y)

أنواع الأنظمة :

- نظام متسق : إذا كان للنظام حل ← مستقل ← حل واحد فقط / غير مستقل ← عدد لا نهائي من الحلول
- نظام غير متسق : إذا كان النظام ليس له حل

مثال : أوجد حل النظام $\begin{matrix} y = 2x + 1 \\ 3x + y = -9 \end{matrix}$ ؟

الحل :

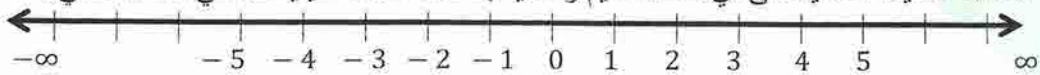
الطريقة المباشرة :	**طريقة التعويض :**	**طريقة الحذف :**
1)نكتب المعادلتين بدلالة y $y = 2x + 1$ $y = -3x - 9$ $2x + 1 = -3x - 9$ $2x + 3x = -9 - 1$ $5x = -10$ $x = -2$ 2)نعوض $x = -2$ في أي معادلة $y = 2(-2) + 1$ $y = -4 + 1$ $y = -3$ 3) الحل هو $(-2 , -3)$	1) نعوض عن قيمة $y = 2x + 1$ في المعادلة الثانية $3x + 2x + 1 = -9$ $5x + 1 = -9$ $5x = -10$ $x = -2$ 2) نعوض $x = -2$ في أي معادلة $y = 2(-2) + 1$ $y = -4 + 1$ $y = -3$ 3) الحل هو $(-2 , -3)$	1) نكتب النظام على أن يكون الحدان المتشابهان فوق بعض $-2x + y = 1$ $3x + y = -9$ 2) نضرب المعادله الأولى بالعدد -1 $2x - y = -1$ $3x + y = -9$ 3) نجمع المعادلتين $5x = -10$ $x = -2$ 4) نعوض $x = -2$ في أي معادلة $y = 2(-2) + 1$ $y = -4 + 1$ $y = -3$ 5) الحل هو $(-2 , -3)$

مثال	الحل
1) ما أصفار كثيرة الحدود $x^4 - 2x^2 + 1$ ؟ أ) ±1 ب) ±2 ج) 1 د) 2	$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)(x^2 - 1)$ $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ $x = \pm1$ وممكن الحل بتعويض الخيارات في المعادلة
2) مجموعة حل المعادلة $12x^2 - 7x + 1 = 0$ هي : أ) $\left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right\}$ ب) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ ج) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$ د) $\left\{\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right\}$	بالتعويض في القانون العام $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 12 \times 1}}{2 \times 12} = \frac{7 \pm 1}{24}$ $= \frac{7+1}{24}\ or\ \frac{7-1}{24} = \frac{8}{24}\ or\ \frac{6}{24} = \frac{1}{3}\ or\ \frac{1}{4}$
3) مجموعة حل المعادلة $x^2 - 49 = 0$ في R هي : أ) $\{-49,49\}$ ب) $\{-7,7\}$ ج) $(-7,7)$ د) $[-7,7]$	$x^2 - 49 = 0$ $x^2 = 49$ $x = \pm7$ مجموعة حل المعادلة هي $\{-7,7\}$
4) مجموعة حل المعادلة $\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2-n}$ هي : أ) $\{0, \frac{1}{2}\}$ ب) $\{-1\}$ ج) $\{1\}$ د) $\emptyset$	• نستبعد الخيارات التي تحتوي أصفار المقام وهي -1 , 1 , 0 فإن الحل هو $\emptyset$ • الحل بطريقة المقص : $\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2 - n}$ $n^2 - n = n(n+1)$ $n^2 - n \neq n^2 + n$ اذن الحل $\emptyset$
5) مجموعة حل المعادلة $\|2x - 1\| = 5$ هي : أ) $\{-2,3\}$ ب) $R - \{-2,3\}$ ج) $(2,3)$ د) $R - (-2,3)$	$\|2x - 1\| = 5$ $2x - 1 = 5 \quad , \quad 2x - 1 = -5$ $2x = 6 \quad , \quad 2x = -4$ $x = \frac{6}{2} = 3 \quad , \quad x = -\frac{4}{2} = -2$ مجموعة حل المعادلة $\{-2,3\}$
6) مجموعة حل المعادلة $\sqrt{4x+1} = \sqrt{2x+2}$ في مجموعة الأعداد الحقيقية هي : أ) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ب) $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ج) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ د) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$	تربيع الطرفين $(\sqrt{4x+1})^2 = (\sqrt{2x+2})^2$ $4x + 1 = 2x + 2$ $4x - 2x = 2 - 1$ $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
7) قيمة x في حل هذا النظام $x + 2y = 13$ $2x + y = 11$ هي : أ) $x = 1$ ب) $x = 3$ ج) $x = -1$ د) $x = -3$	نضرب المعادله الثانية بالعدد -2 $x + 2y = 13$ $-4x - 2y = -22$ $-3x = -9$ $x = 3$

7) المتباينات :

- **خط الأعداد الحقيقية :**

يمكن تمثيل الأعداد الحقيقية هندسياً على أي خط مستقيم ونسميه بخط الأعداد الحقيقية كما في الشكل التالي :



- **الفترات :**

المتباينة	الفترة	التمثيل البياني
$a \leq x \leq b$	$[a , b]$	a b
$a \leq x < b$	$[a , b)$	a b
$a < x \leq b$	$(a , b]$	a b
$a < x < b$	(a , b)	a b
$x > a$	(a , ∞)	a
$x \geq a$	$[a , \infty)$	a
$x < a$	$(-\infty , a)$	a
$x \leq a$	$(-\infty , a]$	a

- **خصائص المتباينات :**

- اذا كان $a > b$ فإن :
  - $a - b > 0$
  - $a + c > b + c$
  - $a - c > b - c$
- إذا كان $a x + b > 0$ فإن $x > -\frac{b}{a}$

اذا كان $0 < a < b \; , \; n > 0$ فإن :
- $a^n < b^n$

- الرفع لأس عدد سالب (تتغير الاشارة)

اذا كان $0 < a < b \; , \; n < 0$ فإن :
- $a^n > b^n$

اذا كان $a > b \; , \; m > 0$ فإن :
- $am > bm$
- $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$

- الضرب والقسمة بعدد سالب (تتغير الاشارة)

اذا كان $a > b \; , \; m < 0$ فإن :
- $am < bm$
- $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$

مثال :	أوجد مجموعة حل المتباينة : $2x - 3 > 0$ في $\mathbb{R}$
الحل :	$x \in \left(\frac{3}{2} , \infty\right)$ $\quad$ $2x - 3 > 0 \Longrightarrow x > \frac{3}{2}$
مثال :	أوجد مجموعة حل المتباينة : $2x - 3 > 1$ في $\mathbb{R}$
الحل :	$x \in (2 , \infty)$ $\quad$ $2x - 3 > 1 \Longrightarrow x > \frac{1+3}{2} \Rightarrow x > 2$

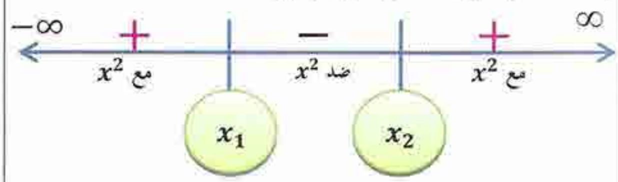
- **حل المتباينات التربيعية :**

$a\,x^2 + bx + c > 0$ لحل هذه المتباينة نتبع الخطوات التالية :

- نحلل المقدار الثلاثي .
- نحدد أصفار المقدار مع تحديد إشارة المقدار الجبري على خط الأعداد .
- نختار الفترة التي تحقق المتباينة فإذا كانت المتباينة أكبر من الصفر نختار المناطق الموجبة والعكس .

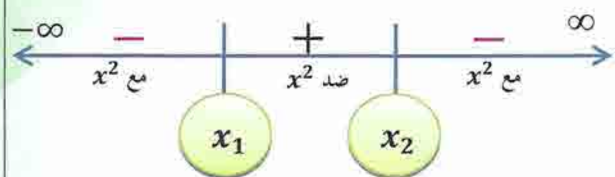
إذا كان للمقدار جذران حقيقيان $b^2 - 4ac > 0$

إذا كانت إشارة معامل x^2 موجبة



مجموعة الحل = $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

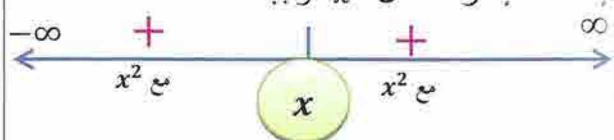
إذا كانت إشارة معامل x^2 سالبة



مجموعة الحل = (x_1 , x_2)

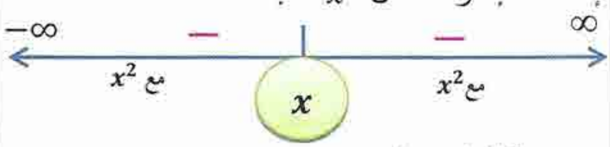
إذا كان للمقدار جذر حقيقي مكرر $b^2 - 4ac = 0$

إذا كانت إشارة معامل x^2 موجبة



مجموعة الحل = $(-\infty, \infty)$

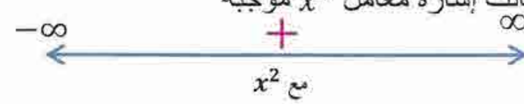
إذا كانت إشارة معامل x^2 سالبة



مجموعة الحل = $\emptyset$

إذا كان للمقدار جذران تخيليان $b^2 - 4ac < 0$

إذا كانت إشارة معامل x^2 موجبة

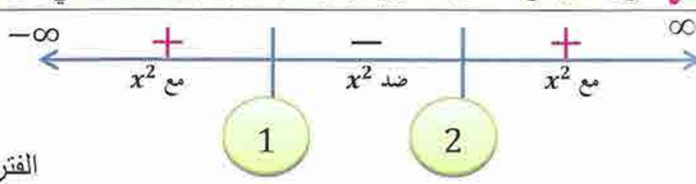


مجموعة الحل = $(-\infty, \infty)$

إذا كانت إشارة معامل x^2 سالبة

مجموعة الحل = $\emptyset$

مثال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2 - 3x + 2 > 0$ في $\mathbb{R}$.



$$(x-2)(x-1) > 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$\Longrightarrow x = 2 \quad , \quad x = 1$$

الفترة التي تحقق المتباينة هي $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

- **حل المتباينات التي تحوي القيمة المطلقة :**

$\lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$
إذا كان $\lvert x\rvert < a$ **فإن** $-a < x < a$ (اذا كان رمز التباين أصغر يكون الحل فترة واحدة)
مثـال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\lvert 2x-4\rvert < 6$ في $\mathbb{R}$.   **الحـل** : $-6 < 2x-4 < 6$ $-6+4 < 2x-4+4 < 6+4$ $-2 < 2x < 10$ بالقسمة على 2 $-1 < x < 5$ الفترة التي تحقق المتباينة هي $(-1\,,5)$
إذا كان $\lvert x\rvert > a$ **فإن** $x > a \;\&\; x < -a$ حيث $a > 0$ (اذا كان رمز التباين أكبر يكون الحل اتحاد فترتين)
مثال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\lvert 2x-4\rvert > 6$ في $\mathbb{R}$.   **الحـل** : $2x-4 < -6 \quad \& \quad 2x-4 > 6$ $2x < -2 \quad \& \quad 2x > 10$ بالقسمة على2 $x < -1 \quad \& \quad x > 5$ $x \in (-\infty,-1) \quad \& \quad x \in (5\,,\infty)$ مجموعة الحل = $(-\infty,-1) \cup (5\,,\infty)$
إذا كان $x^2 < a$ **فإن** $\lvert x\rvert < \sqrt{a}$
مثـال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2 \le 4$ في $\mathbb{R}$ **الحـل** : $x^2 \le 4$ $\lvert x\rvert \le \sqrt{4}$ $\lvert x\rvert \le 2$ $-2 \le x \le 2$ الفترة التي تحقق المتباينة هي $[-2\,,2]$
إذا كان $x^2 > a$ **فإن** $\lvert x\rvert > \sqrt{a}$
مثـال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $x^2-3 \ge 12$ في $\mathbb{R}$ **الحـل** : $x^2 \ge 12-3$ $x^2 \ge 9$ $\lvert x\rvert \ge \sqrt{9}$ $\lvert x\rvert \ge 3$ $x \ge 3 \;\&\; x \le -3$ مجموعة الحل = $(-\infty,-3\,] \cup [\,3\,,\infty)$

- **حل المتباينات الكسرية :**

مثال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{1}{x} > 5$ في $\mathbb{R}$.

الحل :

- نجعل أحد طرفي المتباينة صفر
- $\frac{1}{x} - 5 > 0 \xrightarrow{\text{نوحد المقامات}} \frac{1-5x}{x} > 0$
- نوجد الأصفار :
- $1 - 5x = 0 \rightarrow -5x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$
- $x = 0$
- نحدد الفترات

	$-\infty$	0	$\frac{1}{5}$	∞
$1-5x$	$+$	$+$	$-$	
x	$-$	$+$	$+$	
اشارة الكسر	$-$	$+$	$-$	

- إشارة المتباينة أكبر من فإن مجموعة الحل سوف تكون الفترة الموجبة فقط
- مجموعة الحل $(0 , \frac{1}{5})$

مثال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{1}{x-3} \leq 2$ في $\mathbb{R}$.

الحل :

- نجعل أحد طرفي المتباينة صفر
- $\frac{1}{x-3} - 2 \leq 0 \xrightarrow{\text{نوحد المقامات}} \frac{1-2(x-3)}{x-3} \leq 0 \Longrightarrow \frac{1-2x+6}{x-3} \leq 0 \Longrightarrow \frac{-2x+7}{x-3} \leq 0$
- نوجد الأصفار :
- $-2x + 7 = 0 \rightarrow -2x = -7 \rightarrow x = \frac{7}{2}$
- $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$
- نحدد الفترات

	$-\infty$	3	$\frac{7}{2}$	∞
$-2x+7$	$+$	$+$	$-$	
$x-3$	$-$	$+$	$+$	
اشارة الكسر	$-$	$+$	$-$	

- إشارة المتباينة أصغر من أو يساوي فإن مجموعة الحل سوف تكون الفترة السالبة فقط
- مجموعة الحل $(-\infty , 3) \cup [\frac{7}{2} , \infty)$

الفترة مفتوحه عند 3 لأنه صفر للمقام

مثـــال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{2x+1}{x+2} \geq 0$ في $\mathbb{R}$.

الحـــل :

- المتباينه أحد طرفيها صفر
- نوجد الأصفار :
- $2x + 1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$
- $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$
- نحدد الفترات

	∞	$\frac{-1}{2}$	-2	$-\infty$
$2x+1$	$+$		$-$	$-$
$x+2$	$+$		$+$	$-$
اشارة الكسر	$+$		$-$	$+$

- إشارة المتباينة أكبر من أو يساوي فإن مجموعة الحل سوف تكون الفترة الموجبة فقط
- مجموعة الحل $(-\infty, -2) \cup [\frac{-1}{2}, \infty)$ الفترة مفتوحه عند -2 لأنه صفر للمقام

مثـــال : أوجد مجموعة حل المتباينة : $\frac{x+1}{-2x+4} \leq 0$ في $\mathbb{R}$.

الحـــل :

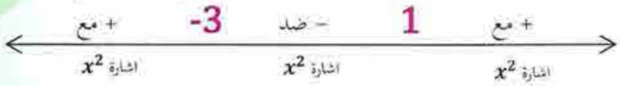
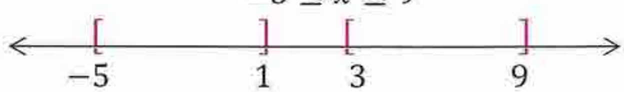
- المتباينه أحد طرفيها صفر
- نوجد الأصفار :
- $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$
- $-2x + 4 = 0 \rightarrow -2x = -4 \rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$
- نحدد الفترات

	∞	2	-1	$-\infty$
$x+1$	$+$		$+$	$-$
$-2x+4$	$-$		$+$	$+$
اشارة الكسر	$-$		$+$	$-$

- إشارة المتباينة أصغر من أو يساوي فإن مجموعة الحل سوف تكون الفترة السالبة فقط
- مجموعة الحل $(-\infty, -1] \cup (2, \infty)$ الفترة مفتوحه عند 2 لأنه صفر للمقام

- المتباينة التي يكون فيها اشارة $>$ أو $<$
نعبر عن مجموعة الحل بإستخدام أقواس الفترة المفتوحة (،)
- المتباينة التي يكون فيها اشارة $\leq$ أو $\geq$
نعبر عن مجموعة الحل بإستخدام أقواس الفترة المغلقة [،]

ملاحظة : يمكن كتابة الحل بالصفة المميزة مثال : $x \in [2, \infty)$ يمكن كتابتها بالصورة $\{x \mid x \geq 2\}$

مثال	الحل
1) مجموعة حل المتباينة $\frac{1-x^2}{2} \le 0$ هي : أ) $[-1,1]$ ب) $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ ج) $[1,\infty)$ د) $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$	$2 \times \frac{1-x^2}{2} \le 0$ $1 - x^2 \le 0$ $x^2 \ge 1 \Rightarrow \|x\| \ge \pm 1$ $x \ge 1$ *or* $x \le -1$ *مجموعة الحل* $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$
2) مجموعة حل المتباينة $\frac{2}{x^2+2x-3} < 0$ هي : أ) $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$ ب) $(3,1)$ ج) $(-\infty,-3) \cup (1,\infty)$ د) $(-3,1)$	• نوجد أصفار المقام $x^2 + 2x - 3 = 0$ $(x-1)(x+3) = 0$ $x = 1, x = -3$  نختار الفترة السالبه لان رمز المتباينه أصغر من مجموعة الحل $(-3,1)$
3) اذا كانت x عددا حقيقيا فما العبارة المكافئة للعبارة $1 \le \|x-2\| \le 7$ ؟ أ) $3 \le x \le 9$ or $-5 \le x \le 1$ ب) $x \ge 3$ *or* $x \le 1$ ج) $1 \le x \le 3$ د) $-5 \le x \le 9$	$\|x-2\| \ge 1$ $-(x-2) \ge 1$ *or* $x - 2 \ge 1$ $-x + 2 \ge 1$ *or* $x \ge 3$ $-x \ge -1$ *or* $x \ge 3$ $x \le 1$ *or* $x \ge 3$ $\|x-2\| \le 7$ $-7 \le x - 2 \le 7$ $-5 \le x \le 9$  $3 \le x \le 9$ *or* $-5 \le x \le 1$
4) مجموعة حل المتباينة $\|x\| + 6 < 0$ هي : أ) $\emptyset$ ب) $(-6,6)$ ج) R د) $R \setminus [-6,6]$	$\|x\| + 6 < 0$ $\|x\| < -6$ وهذا مستحيل $\emptyset$
5) حل المتباينة التالية $\|2x-3\| \le 1$: أ) $[1,2]$ ب) $\{1,2\}$ ج) $(1,2)$ د) $R \setminus [1,2]$	$\|2x-3\| \le 1$ $-1 \le 2x - 3 \le 1$ $2 \le 2x \le 4$ $1 \le x \le 2$ $x \in [1,2]$
6) مجموعة حل المتباينة $\|x-3\| > 1$ هي : أ) $(1,3)$ ب) $(-\infty,2) \cup (4,\infty)$ ج) $(2,4)$ د) $(-\infty,1) \cup (3,\infty)$	$\|x-3\| > 1$ $x - 3 < -1$ *or* $x - 3 > 1$ $x < -1 + 3$ *or* $x > 1 + 3$ $x < 2$ *or* $x > 4$ مجموعة الحل هي $(-\infty,2) \cup (4,\infty)$

8) الـــدوال :

• العلاقة :

هي ارتباط بين كميتين ، بحيث ترتبط عناصر مجموعة مثل X مع عناصر مجموعة مثل Y ، حيث تسمى X مجال العلاقة ، أما Y تسمى المجال المقابل وتتضمن عناصر المدى جميعها

• طرق التعبير عن العلاقة :

نوع التمثيل	جبرياً	بيانياً	عددياً
التعريف	معادلة جبرية تربط بين الاحداثيين x , y	تحديد نقاط في المستوى الاحداثي تمثل الأزواج المرتبة	1) جدول من القيم 2) مجموعة من الأزواج المرتبة 3) المخطط السهمي

• تعريف الداله (التطبيق) :

هي علاقة بين مجموعتين ، يرتبط كل عنصر من عناصر المجال X بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل Y والمدى هو مجموعة القيم الفعلية للدالة .

مثال : إذا كان $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ، أثبت أن $f(x) = 2x - 5$ دالة ؟ وحدد المجال والمجال المقابل والمدى

الحل :

المجال : مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

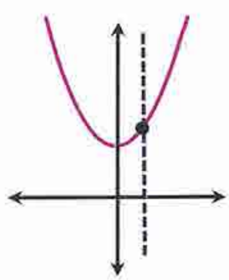
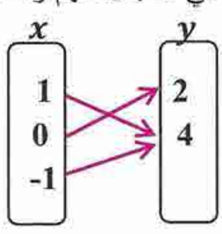
المجال المقابل : مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

x	1	2	3	4	...
$f(x)$	-3	-1	1	3	...

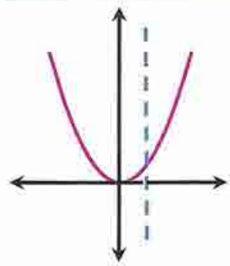
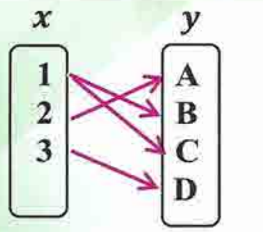
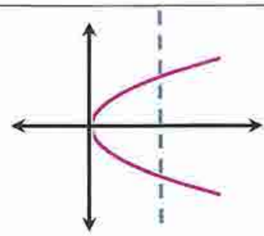
المدى : $\{-3 , -1 , 1 , 3 , ...\}$

• متى تكون العلاقه داله ؟

<table>
<tr><th>نوع التمثيل</th><th>جبرياً</th><th>بيانياً</th><th>عددياً</th></tr>
<tr><td>الحاله ومثال عليه</td>
<td>في المعادلة ، المتغير y مرفوع الى أس فردي
$y = x^2 + 2$
وهي داله في x وايضا يمكن كتابتها على الشكل
$f(x) = x^2 + 2$

مثال : لو كان لدينا المعادلة
$y^2 = x$
فإننا نستطيع كتابتها
$y = \pm\sqrt{x}$
هذا يعني أن أي قيمة لـx سوف يكون لها صورتين وهذه ليست داله</td>
<td>باختبار الخط الرأسي

اذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط</td>
<td>1) في جدول القيم لا تتكرر قيم x
<table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>y</td><td>4</td><td>2</td><td>4</td></tr></table>
2) في الأزواج المرتبة يكون للعنصر x صورة واحدة فقط في المجال المقابل
$(-1,4) , (0,2) , (1,4)$
3) في المخطط السهمي يخرج من كل عنصر في المجال سهم واحد فقط
</td></tr>
</table>

مثال : **في كل علاقة مما يأتي ، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا :**

<table>
<tr><th>أمثلة معادلات</th><th>أمثله بيانية</th><th>أمثلة جدول</th></tr>
<tr>
<td>$x = 3y^2$
y ليست دالة في x
لأن y أسها عدد زوجي</td>
<td>
y دالة في x
باختبار الخط الرأسي نجد أنه يقطع المنحنى في نقطة واحدة</td>
<td>
y ليست دالة في x
لأن العنصر 1 له صورتان</td>
</tr>
<tr>
<td>$3x - 4y = 10$
y دالة في x
لأن y أسها عدد فردي</td>
<td>
y ليست دالة في x
باختبار الخط الرأسي نجد أنه يقطع المنحنى في أكثر من نقطة</td>
<td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>2</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>-2</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>9</td><td>-3</td></tr></table>
y دالة في x
لأن قيم x ليس بها تكرار</td>
</tr>
</table>

إيجاد قيم الدالة عند نقطة

دالة ذات قاعدة واحدة :
تعوض بقيمة x مباشرة في الدالة

دالة متعددة التعريف :
تعوض بقيمة x القاعدة التي يقع العدد في نطاقها

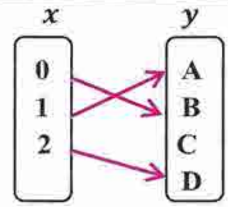
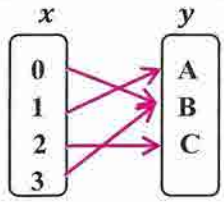
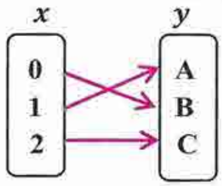
<table>
<tr><th>مثال</th><th>مثال</th></tr>
<tr>
<td>
أوجد قيمة الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$ عند $x = 2$

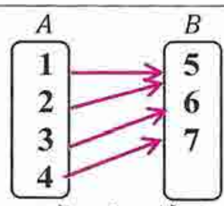
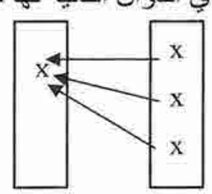
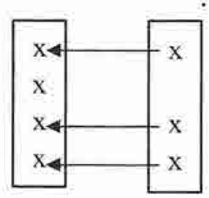
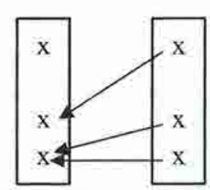
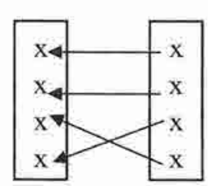
الحل :
نعوض مباشرة في الدالة عن كل x بـ 2
$f(2) = (2)^2 + 8(2) - 24$
$= 4 + 16 - 24$
$= -4$
</td>
<td>
إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & ,x > 5 \\ x-9 & ,x \le 5 \end{cases}$ فإن $f(4) =$
أ) 17   ب) -4   ج) 5   د) -5

الحـل :
الدالة ذات قاعدتين
القاعدة الأولى : $f(x) = 3x + 2$ ونعوض فيها
بالأعداد الأكبر من 5
القاعدة الثانية : $f(x) = x - 9$ ونعوض فيها
بالأعداد الأقل من أو يساوي 5

بالنسبة للسؤال نجد أن العدد 4 ينتمي للفترة الأقل من أو يساوي 5
أي نعوض في القاعدة الثانية
$f(4) = 4 - 9 = -5$
</td>
</tr>
</table>

- **أنواع الدوال (التطبيق) :**

تطبيق متباين	تطبيق شامل	تطبيق تقابل
كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر وحيد في المجال المقابل (لايمكن أن يرتبط عنصران من المجال بنفس العنصر من المجال المقابل)	جميع عناصر المجال المقابل مرتبطة بعناصر في المجال	إذا كان التطبيق متباين وشامل (داله لها معكوس)
		

مثال	الحل
1) أي العلاقات التالية تمثل بوصفها دالة حقيقية في x ؟ أ) $x^2 = 5y^2$ ب) $y^2 - 3x = 6$ ج) $\frac{x}{y} = y - 6$ د) $2y^3 + 3x^2 = 5$	تكون y دالة حقيقية في x اذا كان اسها فردي $2y^3 + 3x^2 = 5$
2) اذا كانت $A = \{1,2,3,4\}$ ، $B = \{5,6,7\}$ فإن التطبيق F من A إلى B المعرف كما يلي : $F = \{(1,5) , (2,5) , (3,6) , (4,7)\}$ أ) ليس متابيناً. ب) متبايناً وليس شاملاً . ج) شاملاً وليس متبايناً. د) متبايناً وشاملاً .	 العنصران 2 و 1 مرتبطان بنفس العنصر (ليس متباين) جميع عناصل المجال المقابل مرتبطة (شامل)
3) أي الدوال التالية لها معكوس : أ)  ب)  ج)  د) 	الجواب د لأن الداله متباينه وشامله
4) إذا كانت $k \neq 0 , f(x) = x^2 + 3x + k$ $f(k) = 0$ فإن $f(1)$ تساوي : أ) $k - 4$ ب) 4 ج) k د) 0	$f(k) = k^2 + 3k + k = 0$ $k^2 + 4k = 0$ $k(k + 4) = 0$ $k \neq 0 \quad or \quad k = -4$ $f(1) = 1 + 3 - 4 = 0$

المقطع

المقطع x أصفار الدالة

- من الرسم البياني: نقطة تقاطع المنحنى مع محور x
- من معادلة المنحنى: نضع $y = 0$ في المعادلة

المقطع y

- من الرسم البياني: نقطة تقاطع المنحنى مع محور y
- من معادلة المنحنى: نضع $x = 0$ في المعادلة

ملاحظة : المقطع $\boldsymbol{x}$ قد يكون واحد أو أكثر , المقطع $\boldsymbol{y}$ واحد أو أقل .

تماثل المنحنى

حول محور x

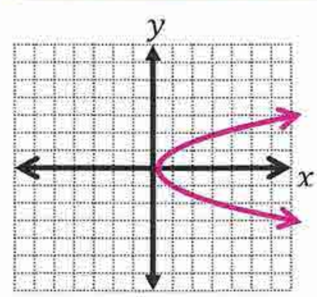
إذا كانت النقطة (x, y) واقعه على المنحنى فإن النقطة $(x, -y)$ واقعة أيضاً على المنحنى

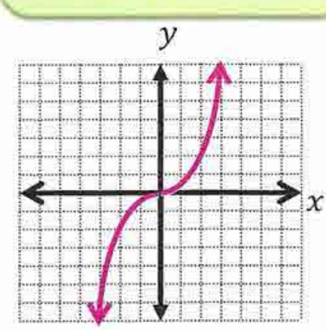
حول نقطة الأصل
(يمثل دالة فردية)

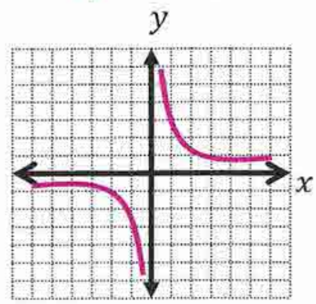
إذا كانت النقطة (x, y) واقعه على المنحنى فإن النقطة $(-x, -y)$ واقعة أيضاً على المنحنى

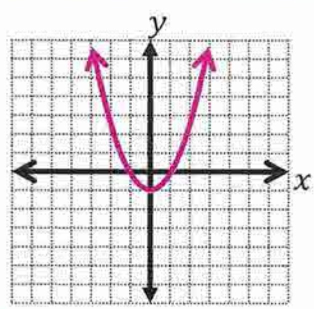
حول محور y
(يمثل دالة زوجية)

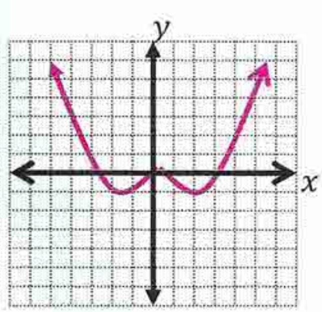
إذا كانت النقطة (x, y) واقعه على المنحنى فإن النقطة $(-x, y)$ واقعة أيضاً على المنحنى









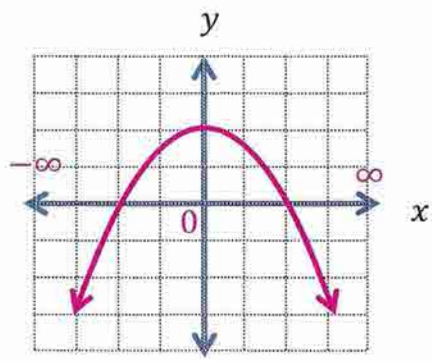


ملاحظة : إذا كان المنحنى غير متماثل حول محور y أو نقطة الأصل فإن الدالة لا زوجية ولا فردية

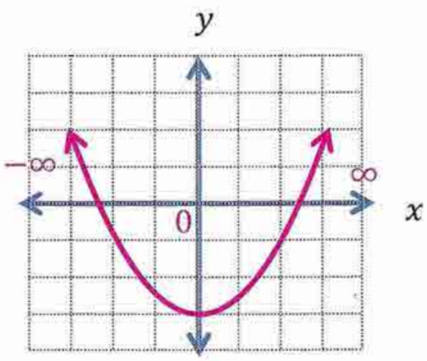
اطراد الدالة

تزايديه	ثابتة	تناقصية
كلما زادت قيمة x زادت قيمة y	كلما زادت قيمة x تثبت قيمة y	كلما زادت قيمة x نقصت قيمة y

- بمعنى بسيط ابدأ من الطرف اليسار للمنحنى وحرك إصبعك على المنحنى فإذا كان صاعدًا لأعلى فإن الدالة تزايديه , إذا كان هابطاً لأسفل فإن الدالة تناقصية .
- فترة التزايد أو التناقص تعين من محور x .



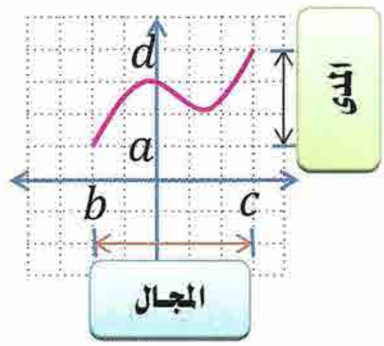
الدالة تزايديه في الفترة $(-\infty, 0)$
الدالة تناقصية في الفترة $(0, \infty)$



الدالة تزايديه في الفترة $(0, \infty)$
الدالة تناقصية في الفترة $(-\infty, 0)$

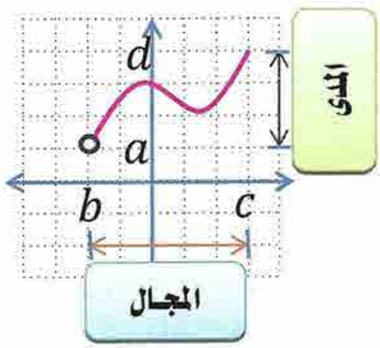
تحديد مجال ومدى الدوال بيانياً :

المجال	المدى
يعيّن من الطرف اليسار إلى الطرف اليمين للمنحنى على محور x مع حذف النقاط التي تكون عندها الدالة غير معرفة من الفترة التي حددتها.	يعيّن من أسفل نقطة إلى أعلى نقطة للمنحنى على محور y مع حذف النقاط التي تكون الدالة غير معرفة من الفترة التي حددتها.



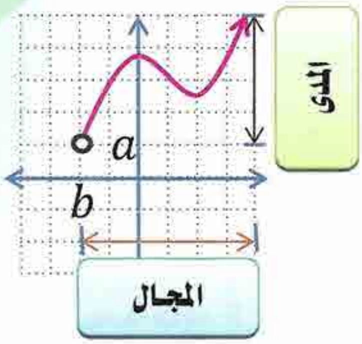
المجال = $[b , c]$

المدى = $[a , d]$



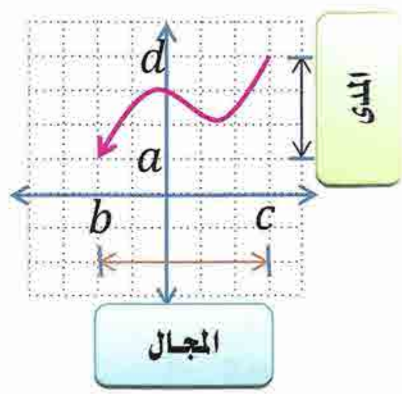
المجال = $(b , c]$

المدى = $(a , d]$



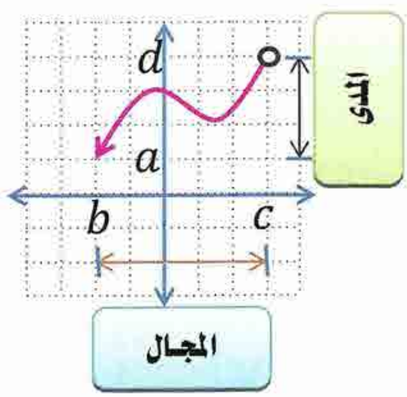
المجال = (b , ∞)

المدى = (a , ∞)



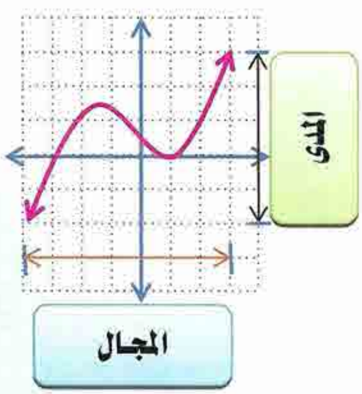
المجال = $(-\infty , C]$

المدى = $(-\infty , d]$



المجال = $(-\infty , C)$

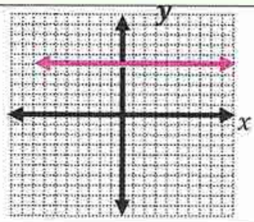
المدى = $(-\infty , d)$

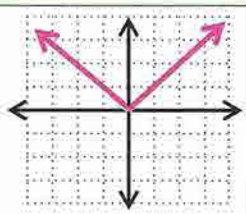


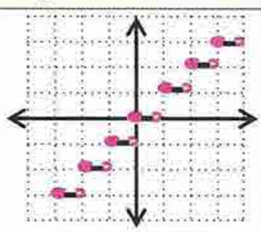
المجال = $(-\infty , \infty)$

المدى = $(-\infty , \infty)$

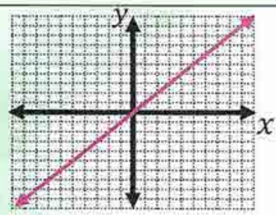
تحديد مجال ومدى الدوال جبرياً :

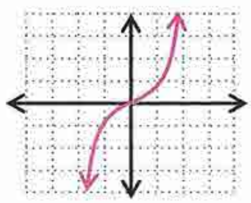
الدالة	خصائصها	الرسم البياني
الثابتة $f(x) = c$	التمثيل البياني : خط مستقيم يوازي محور x ويقطع y في $(0\ ,c)$ المجال = $\mathcal{R}$ المدى = $\{c\}$ التماثل : حول محور y (دالة زوجية) الاطراد : دالة ثابتة على مجالها	

الدالة	خصائصها	الرسم البياني	
دالة المقياس $f(x) = \|x\|$	التمثيل البياني : منحنى (شكل حرف V) المجال = $\mathcal{R}$ المدى = $[0,\infty)$ التماثل : حول محور y (دالة زوجية) الاطراد : دالة متناقصة في $(-\infty,0]$ ، دالة متزايدة في $(0,\infty)$		
مثال :	$f(x) = \|x\| + 3$ المجال : R لايجاد المدى : $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in R$ $\|x\| + 3 \geq 3$ المدى : $[3\ ,\infty)$	$f(x) = \|x - 5\|$ المجال : R لايجاد المدى : $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in R$ $\|x - 5\| \geq 0$ المدى : $[0\ ,\infty)$	$f(x) = -\|x\|$ المجال : R لايجاد المدى : $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in R$ $-\|x\| \leq 0$ المدى : $(-\infty\ ,0\ ]$

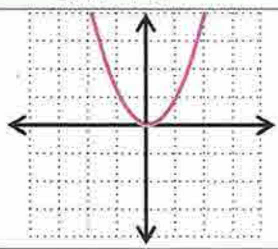
الدالة	خصائصها	الرسم البياني
دالة الصحيح (الدرجية) $f(x) = [\![x]\!]$	التمثيل البياني : تمثل بقطع مستقيمة نصف مغلقة المجال = $\mathcal{R}$ المدى = Z التماثل : لا يوجد(دالة لا فردية ولا زوجية) الاطراد : دالة متزايدة على مجالها	
$f(x)$ = أكبر عدد صحيح يكون أقل من أو يساوي x	إذا كانت $f(x) = [\![x]\!]$ ، فإن : $f\left(\frac{9}{2}\right) = 4$ $\quad f(-8) = -8$ $f(-0.75) = -1$	$f(2.1) = 2$ $f(0.75) = 0$

دالة كثيرة حدود المجال R

الدالة	خصائصها	الرسم البياني
الدالة المحايدة $f(x) = x$	التمثيل البياني : خط مستقيم يمر بنقطة الأصل المجال = $\mathcal{R}$ المدى = $\mathcal{R}$ التماثل : حول نقطة الأصل (دالة فردية) الأطراد : دالة متزايدة على مجالها	

الدالة	خصائصها	الرسم البياني
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$	التمثيل البياني :تمثل بمنحنى متماثل حول نقطة الأصل المجال = $\mathcal{R}$ المدى = $\mathcal{R}$ التماثل : حول نقطة الأصل(دالة فردية) الأطراد : دالة متزايدة على مجالها	

ملاحظة : الدالة المحايدة والتكعيبية المدى : R دائماً

الدالة	خصائصها	الرسم البياني
الدالة التربيعية $f(x) = x^2$	التمثيل البياني : قطع مكافئ (شكل حرف U) المجال = $\mathcal{R}$ المدى = $[0,\infty)$ التماثل : حول محور y (دالة زوجية) الأطراد : دالة متزايدة في $(0,\infty)$ ، دالة متناقصة في $(-\infty,0]$	

مثال :

$f(x) = x^2 + 3$

المجال : R

لايجاد المدى :

$\forall x \in R \qquad x^2 \geq 0$

$x^2 + 3 \geq 3$

المدى : $[3,\infty)$

$f(x) = -x^2 + 7$

المجال : R

لايجاد المدى :

$\forall x \in R \qquad x^2 \geq 0$

$-x^2 \leq 0$

$-x^2 + 7 \leq 7$

المدى : $(-\infty,7]$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$a > 0 \rightarrow$ المدى $\left[f\left(\frac{-b}{2a}\right),\infty\right)$

$a < 0 \rightarrow$ المدى $\left(-\infty, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$

$f(x) = x^2 - 6x + 7$

المجال : R

لايجاد المدى :

$a = 1\ , b = -6 \rightarrow \frac{-(-6)}{2} = 3$

$f(3) = 9 - 18 + 7 = -2$

المدى : $[-2,\infty)$

$f(x) = -x^2 - 4x + 5$

المجال : R

لايجاد المدى :

$a = -1\ , b = -4 \rightarrow \frac{-(-4)}{2(-1)} = -2$

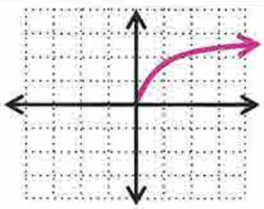
$f(-2) = -4 + 8 + 5 = 9$

المدى : $(-\infty,9]$

الداله الجذرية :

دليله فردي
- الجذر في البسط: المجال $= R$
- الجذر في المقام: المجال $= R - \{$أصفار المقام$\}$

دليله زوجي
- الجذر في البسط: ما تحت الجذر $\geq$ صفر
- الجذر في المقام: ما تحت الجذر $>$ صفر

الدالة	خصائصها	الرسم البياني
الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{x}$	**التمثيل البياني :** منحنى **المجال =** $[0, \infty)$ **المدى =** $[0, \infty)$ **التماثل :** لا يوجد (دالة لا زوجية ولا فردية) **الاطراد :** دالة متزايدة في $(0, \infty)$	

مثال :

$f(x) = \sqrt{x-3}$

لإيجاد المجال :

$x - 3 \geq 0$

$x \geq 3$

المجال : $[3\ ,\ \infty)$

لايجاد المدى :

$\sqrt{x} \geq 0 \qquad \forall x \in R$

$\sqrt{x-3} \geq 0$

المدى : $[0\ ,\ \infty)$

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

لإيجاد المجال :

$9 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq -9$

$x^2 \leq 9$

$|x| \leq 3$

$-3 \leq x \leq 3$

المجال : $[-3\ ,3\ ]$

لايجاد المدى :

$\sqrt{x} \geq 0 \qquad \forall x \in R$

$\sqrt{9 - x^2} \geq 0$

المدى : $[0\ ,\ \infty)$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$

لإيجاد المجال :

$x^2 - 16 > 0$

$x^2 > 16 \rightarrow |x| > 4$

$x > 4\ or\ x < -4$

المجال : $(-\infty, -4) \cup (4\ , \infty)$

لايجاد المدى :

$\sqrt{x} > 0 \qquad \forall x \in R$

$\sqrt{x^2 - 16} > 0$

المدى : $(0\ ,\ \infty)$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}$

لإيجاد المجال :

$16 - x^2 > 0$

$-x^2 > -16$

$x^2 < 16 \rightarrow |x| < 4$

$-4 < x < 4$

المجال : $(-4,4)$

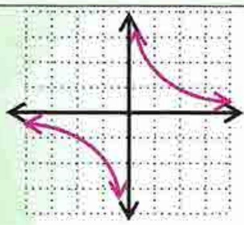
لايجاد المدى :

$\sqrt{x} > 0 \qquad \forall x \in R$

$\sqrt{16 - x^2} > 0$

المدى : $(0\ ,\ \infty)$

الدالة الكسرية المجال = $R-\{\text{أصفار المقام}\}$

<table>
<tr><th>الدالة</th><th colspan="2">خصائصها</th><th>الرسم البياني</th></tr>
<tr><td>الدالة الكسرية
$f(x)=\dfrac{1}{x}$</td><td colspan="2">التمثيل البياني : تمثل بمنحنى متماثل حول نقطة الأصل
المجال = $\mathcal{R}-\{0\}$
المدى = $\mathcal{R}-\{0\}$
التماثل : حول نقطة الأصل(دالة فردية)
الاطراد : دالة متناقصة على مجالها</td><td></td></tr>
<tr><td>مثال :</td><td>$f(x)=\dfrac{x-3}{x-2}$
<u>لإيجاد المجال :</u>
نوجد أصفار المقام
$x-2=0$
$x=2$
المجال : $R-\{2\}$
<u>لإيجاد المدى :</u>
نوجد الداله العكسية
$y=\dfrac{x-3}{x-2}$
$y(x-2)=x-3$
$yx-2y-x=-3$
$(y-1)x=2y-3$
$x=\dfrac{2y-3}{y-1}$
نوجد أصفار المقام
$y-1=0$
$y=1$
المدى : $R-\{1\}$</td><td>$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-7x}$
<u>لإيجاد المجال :</u>
نوجد أصفار المقام
$x^2-7x=0$
$x(x-7)=0$
$x=0\ \ or\ \ x=7$
المجال : $R-\{0,7\}$</td><td>$f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$
<u>لإيجاد المجال :</u>
نوجد أصفار المقام
$x^2-6x+5=0$
$(x-1)(x-5)=0$
$x=1\ \ or\ \ x=5$
المجال : $\mathbb{R}-\{1,5\}$</td></tr>
</table>

الدالة الكسرية الجذرية

مثال :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$$

لإيجاد المجال :

لأن الداله جذرية $\frac{x+2}{3-x} \geq 0$

- نوجد أصفار البسط $x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$
- وأصفار المقام $3 - x = 0 \rightarrow x = 3$
- نحدد الفترات

	$-\infty$	-2	3	∞
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	
$3 - x$	$+$	$+$	$-$	
اشارة الكسر	$-$	$+$	$-$	

- نختار الفترة الموجبة $[-2, 3)$

الفترة مفتوحه عند 3 لأنه صفر للمقام

لإيجاد المدى :

نوجد الداله العكسية $y = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$

نربع الطرفين $y^2 = \frac{x+2}{3-x}$

$$y^2(3-x) = x + 2$$
$$3y^2 - y^2x = x + 2$$
$$3y^2 - 2 = y^2x + x$$
$$3y^2 - 2 = (y^2 + 1)\,x$$
$$\frac{3y^2 - 2}{y^2 + 1} = x$$

نوجد أصفار المقام $\therefore y^2 + 1 = 0$

$$\therefore y^2 = -1$$

المدى $[0, \infty)$

مثال :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

لإيجاد المجال :

- مجال البسط $x \geq -2 \qquad x + 2 \geq 0 \rightarrow$
- مجال المقام $x > 3 \qquad 3 - x > 0 \rightarrow$

- نحدد التقاطع

$$[-2, \infty) \cap (3, \infty) = (3, \infty)$$

- المجال : $(3, \infty)$

لإيجاد المدى :

نوجد الداله العكسية $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$

نربع الطرفين $y^2 = \frac{x+2}{3-x}$

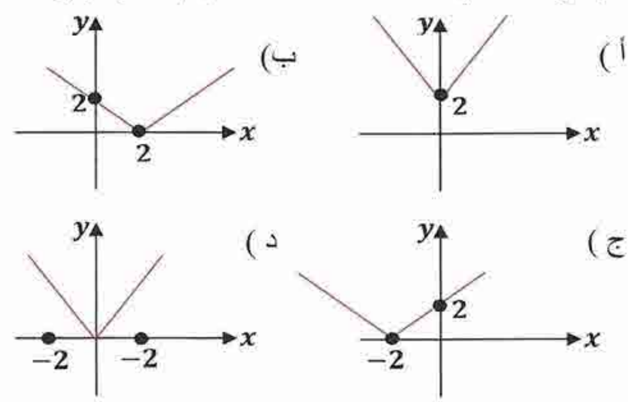
$$y^2(3-x) = x + 2$$
$$3y^2 - y^2x = x + 2$$
$$3y^2 - 2 = y^2x + x$$
$$3y^2 - 2 = (y^2 + 1)\,x$$
$$\frac{3y^2 - 2}{y^2 + 1} = x$$

نوجد أصفار المقام $\therefore y^2 + 1 = 0$

$$\therefore y^2 = -1$$

المدى $[0, \infty)$

مثال	الحل
1) اوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ أ) $(2, \infty)$ ب) R ج) $(-\infty, 2)$ د) $R - \{2\}$	مجال الدالة الجذرية الذي دليل الجذر عدداً فردياً والجذر في البسط هو R
2) ما مدى الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$ أ) $[0, \infty)$ ب) $[2, \infty)$ ج) $[1, \infty)$ د) $(-\infty, \infty)$	مدى الداله الجذرية $0 \leq$ الجذر $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$ $\sqrt{x^2 - 1} + 1 \geq 0 + 1$ $f(x) \geq 1$ $[1, \infty)$

مثال	الحل
3) النقطة $\left(-\frac{1}{3}\text{ ، }-1\right)$ لا تقع على بيان الدالة : أ) $f(x)=[x]$ ب) $f(x)=[3x]$ ج) $f(x)=3x$ د) $f(x)=\lvert -3x\rvert$	الخيار أ) $\left[-\frac{1}{3}\right]=-1$ صحيح الخيار ب) $\left[3\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=[-1]=-1$ صحيح الخيار ج) $3\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$ صحيح الخيار د) $\left\lvert -3\left(-\frac{1}{3}\right)\right\rvert=\lvert 1\rvert=1$ غير صحيح
4) الفترة $(-\infty,0]$ هي مدى الدالة : أ) $f(x)=-\lvert x-1\rvert \ , \ x\in R$ ب) $f(x)=\lvert x\rvert-1 \ , \ x\in R$ ج) $f(x)=\lvert -x\rvert \ , \ x\in R$	$f(x)=-\lvert x-1\rvert, x\in R$ مهما كانت قيمة x الناتج من المطلق موجب لكن إشارة السالب سوف تجعله في الفترة السالبة
5) أي مما ياتي يمثل بياناً للدالة $f(x)=\lvert x\rvert+2$ 	أ) $f(x)=\lvert x\rvert+2$ على المحور y الموجب ب) $f(x)=\lvert x-2\rvert$ على المحور x الموجب ج) $f(x)=\lvert x-(-2)\rvert$ على المحور x السالب د) $f(x)=\lvert x\rvert$ التمثيل البياني الأصلي دالة المقياس الاجابة الصحيحه أ
6) إعتبر الدالة $f(x)=ax^2+bx+c$ ، إذا علمت أنه يوجد x_0 وحيدة تحقق $f(x_0)=0$ ، فيمكن استنتاج أن : أ) الدالة f تمس محور x ب) الدالة f تقع كاملة فوق محور x ج) الدالة f تقع كاملة تحت محور x د) الدالة f تقطع محور x في نقطتين	$\because f(x_0)=0$ $\therefore \ y=0$ هذا يعني أن الدالة تمس محور x في نقطة واحده
7) أي ممايلي يمثل مجال الدالة $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2+9}}$ أ) $(0,\infty)$ ب) $(9,\infty)$ ج) $(3,\infty)$ د) $(-\infty,\infty)$	نوجد أصفار المقام $x^2+9=0 \ \rightarrow \ x^2=-9 \ \rightarrow x=\pm 3i$ بما أن أصفار المقام أعداد مركبة إذا المجال $R=(-\infty,\infty)$ مجموعة الأعداد الحقيقية
8) مجال الدالة $f(x)=\sqrt{x-4}$ هو: أ) $[4,\infty)$ ب) $[-4,4]$ ج) $(-\infty,4]$ د) $[-4,\infty)$	$x-4\geq 0$ $x\geq 4$ $[4,\infty)$
9) ما مجال الدالة $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x^2-x-2}$ أ) $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$ ب) $(-\infty,-2)\cup(1,\infty)$ ج) $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,\infty)$ د) $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,\infty)$	مجال الدالة الكسرية R ما عدا اصفار المقام $x^2-x-2=0$ $(x-2)(x+1)=0$ $x=2 \ ,x=-1$ $R/\{-1,2\}$ $(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,\infty)$

9) العمليات على الدوال :

1) جمع أو طرح دالتين :

- اجمع الحدود المتشابهة فقط أو اطرحها.
- مجال الدالة $(f \pm g)(x)$ = مجال الدالة $f(x)$ $\cap$ مجال الدالة $g(x)$.

2) ضرب دالتين :

- اضرب حدود الدالة الأولى في جميع حدود الثانية.
- مجال الدالة $(f \cdot g)(x)$ = مجال الدالة $f(x)$ $\cap$ مجال الدالة $g(x)$.

3) قسمة دالتين :

- اقسم الدالتين وبسط إن أمكن ذلك .
- مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ = مجال الدالة $f(x)$ $\cap$ مجال الدالة $g(x)$ مع استبعاد أصفار المقام .

4) تركيب (تحصيل) دالتين :

- إذا كان مدى الداله g مجموعة جزئية من مجال الداله f فإنه يمكن إيجاد دالة التركيب $f \circ g$ بالشكل : $(f \circ g)(x) = f[\,g(x)]$
- مجال الدالة $f \circ g(x)$ = جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f .

مثال : أوجد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ لكل زوج من الدوال التالية إذا كان ممكناً :

$$f = \{ \ (1,8)\,,(0,13)\,,(14,9)\,,(15,11) \ \}$$
$$g = \{ \ (8,15)\,,(5,1)\,,(10,14)\,,(9,0) \ \}$$

الحل : لإيجاد $(f \circ g)(x)$ نبدأ (من عند الدالة المكتوبة جهة اليمين) من عند الدالة g أولاً :

الدالة g — الدالة f — الدالة $(f \circ g)$

$$(8,15) \xrightarrow{\text{ابحث في } f \text{ عن الزوج الذي يبدأ } 15} (15\,,11) \xrightarrow{\text{احذف } 15} (8\,,11)$$
$$(5,1) \xrightarrow{\text{ابحث في } f \text{ عن الزوج الذي يبدأ } 1} (1\,,8) \xrightarrow{\text{احذف } 1} (5\,,8)$$

وهكذا بالنسبة لباقي الأزواج المرتبة فيكون $(f \circ g)(x) = \{(8,11)\ ,(5\,,8\,)\,,(10,9)\,,(9,13)\}$

لإيجاد $(g \circ f)(x)$:

الدالة f — الدالة g — الدالة $(g \circ f)$

$$(1,8) \xrightarrow{\text{ابحث في } g \text{ عن الزوج الذي يبدأ } 8} (8\,,15) \xrightarrow{\text{احذف } 8} (1\,,15)$$
$$(0,13) \xrightarrow{\text{ابحث في } g \text{ عن الزوج الذي يبدأ } 13} \text{لايوجد} \Longrightarrow \text{لايوجد}$$
$$(14,9) \xrightarrow{\text{ابحث في } g \text{ عن الزوج الذي يبدأ } 9} (9\,,0) \xrightarrow{\text{احذف } 9} (14\,,0)$$

وهكذا بالنسبة لباقي الأزواج المرتبة فيكون

$$(g \circ f)(x) = \{\,(1\,,15\,)\,,(14,0)\ \}$$

مثال : إذا كانت $g(x) = 5x - 6$, $f(x) = 2x^2 + 8$ أوجد ما يلي : $(f \circ g)(x),\quad (g \circ f)(x)$

الحل :

$$(f \circ g)(x) = 2(\,5x - 6)^2 + 8 = 2(\,25x^2 - 60x + 36) + 8 = 50x^2 - 120x + 80$$
$$(g \circ f)(x) = 5(2x^2 + 8) - 6 = 10x^2 + 34$$

5) الدالة العكسية :

تكون للدالة f دالة عكسية $f^{-1}(x)$ إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة .

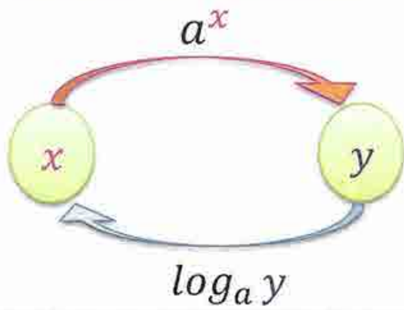
جبرياً : هناك بعض الطرق المختصرة لبعض الدوال

- إذا كان $f(x) = ax + b$ فإن $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$.
- إذا كان $f(x) = \frac{ax+b}{c}$ فإن $f^{-1}(x) = \frac{cx-b}{a}$
- إذا كان $f(x) = ax^n + b$ فإن $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{\frac{x-b}{a}}$ إذا كانت n عدد فردي .
- إذا كان $f(x) = ax^n + b$ فإن $f^{-1}(x) = \pm\sqrt[n]{\frac{x-b}{a}}$ إذا كانت n عدد زوجي .
- إذا كان $f(x) = \sqrt[n]{\frac{cx-b}{a}}$ فإن $f^{-1}(x) = \frac{ax^n+b}{c}$.

مثال	الحل
1) الدالة العكسية f^{-1} للدالة $f(x) = \sqrt{x-16}$ حيث $x \geq 16$ هي : أ) $x+16$ ب) x^2+16 ج) $x-16$ د) x^2-16	- نسمي $f(x)$ الى y $y = \sqrt{x-16}$ - نبدل بين x و y $x = \sqrt{y-16}$ - نربع الطرفين لتخلص من الجذر ثم نوجد y $x^2 = y - 16$ $y = x^2 + 16$
2) اذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x+1}$ فإن $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$ تساوي : أ) $\frac{1}{2}$ ب) 1 ج) 2 د) 8	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \sqrt{x+1}(x+1)$ $\left(\frac{f}{g}\right)(3) = (3+1)\sqrt{3+1} = 4\sqrt{4} = 8$
3) إذا كانت $f(x) = 5x - 6$, $g(x) = -3x - 4$ فإن $(fog)(-2)$ يساوي : أ) 2 ب) 4 ج) -2 د) -4	$g(-2) = -3(-2) - 4 = 6 - 4 = 2$ $f(g(-2)) = f(2)$ $= 5(2) - 6 = 10 - 6 = 4$
4) لتكن $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = 2x^2$ فإن $(gof)(x)$ يساوي : أ) $4x$ ب) $4x^2$ ج) $2\|x\|$ د) $2\|x\|\sqrt{x}$	$gof(x) = g(f(x))$ $= 2(f(x))^2$ $= 2(\sqrt{2x})^2$ $= 2(2x) = 4x$
5) اذا كان $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \tan x$ فإن $(fog)(x)$ يساوي : أ) $\sqrt{\tan x}$ ب) $\tan\sqrt{x}$ ج) $\sqrt{x\tan x}$ د) $\sqrt{x}\tan x$	$(fog)(x) = f(g(x))$ $= f(\sqrt{x}) = \tan\sqrt{x}$

10) الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية :

$$\log_a y = x \iff y = a^x \quad , \ a > 0 \ , \ a \neq 1$$
$$\log_a y > x \iff y > a^x \quad , \ a > 0 \ , \ a \neq 1$$



مثال: $\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$

توضيح اللوغاريتم $\log_2 8$: ماهو الأس الذي يجعل 2 يساوي 8 ؟ الجواب 3

- **خصائص اللوغاريتمات :**

$\log_a 1 = 0$	$x = a^{\log_a x}$
$\log_a a = 1$	$\dfrac{1}{\log_a x} = \log_x a$
$\log_a 0 = \begin{cases} -\infty & if\ a > 1 \\ \infty & if\ a < 1 \end{cases}$	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x \cdot \log_a b$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	إذا كان : $\log_a x = \log_a y$ فإن : $x = y$
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	لوغاريتم الأساس 10 يكتب على الشكل : $\log_{10} x = \log x$
$\log_a x^n = n \log_a x$	لوغاريتم الأساس الطبيعي e يكتب على الشكل : $\log_e x = \ln x$
$\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} \log_a x$	$\ln e^x = x \quad , \quad e^{\ln x} = x$

الحل	مثال
لأن $3^3 = 27$ فإن $\log_3 27 = 3$	1) قيمة $log_3\ 27$ تساوي : أ) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5
لأن $2^{-6} = \frac{1}{64}$ فإن $\log_2 \frac{1}{64} = -6$	2) قيمة $log_2 \frac{1}{64}$ تساوي : أ) -4 ب) -5 ج) -6 د) -7
لأن $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0.001$ فإن $\log_{10} 0.001 = -3$	3) قيمة $log_{10}\ 0.001$ تساوي : أ) -2 ب) -3 ج) -4 د) 3
غير معرف لأن العدد الذي يمين اللوغاريتم سالب	4) $log_{10}(-10)$ تساوي : أ) -1 ب) -10 ج) 10 د) غير معرف
$10^3 = 1000 \Longleftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$	5) الصورة الاسية $10^3 = 1000$ تكافئ الصورة اللوغاريتمية : أ) $log_{10}\ 1000 = 3$ ب) $log_3\ 1000 = 10$ ج) $log_{1000}\ 10 = 3$ د) $log_3\ 10 = 1000$
$8^x = 64 \Longleftrightarrow log_8\ 64 = x$ فإن $x = 2$	6) ما هي قيمة x في المعادلة $log_8\ 64 = x$: أ) 2 ب) 3 ج) 4 د) 8
$log_6 \sqrt[3]{36} = log_6 (36)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(log_6 36)$ $= \frac{1}{3}(2) = \frac{2}{3}$ **طريقة مختصرة :** **انظر للأساس ستجده 6 والعدد الذي تحت الجذر هو 36** **ما قيمة n التي تجعل $6^n = 36$ ← n=2** **فيكون الحل هو 2 مقسوماً على دليل الجذر 3**	7) قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$ تساوي : أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{2}{3}$ د) $\frac{3}{2}$
$3\, log_2\, x + 5\, log_2\, y =$ $log_2\, x^3 + log_2\, y^5 = log_2\, x^3 \cdot y^5$ طريقة مختصرة : العملية بين اللوغاريتمين جمع تحول إلى ضرب ونضع العدد 3 أس لـ x ، ونضع العدد 5 أس لـ y	7) العبارة $3\, log_2\, x + 5\, log_2\, y$ تكافئ : أ) $log_2 \frac{x^3}{y^5}$ ب) $8\, log_2(x+y)$ ج) $log_2\, x^3 y^5$ د) $log_3\, x^2 y^5$
$3\, log_2\, x - 5\, log_2\, y =$ $log_2\, x^3 - log_2\, y^5 = log_2 \frac{x^3}{y^5}$ طريقة مختصرة : العملية بين اللوغاريتمين طرح تحول إلى قسمة ونضع العدد 3 أس لـ x ، ونضع العدد 5 أس لـ y	8) العبارة $3\, log_2\, x - 5\, log_2\, y$ تكافئ : أ) $log_2 \frac{x^3}{y^5}$ ب) $-log_2(x-y)$ ج) $log_2\, x^3 y^5$ د) $log_3\, x^2 y^5$
$2\, log_5\, 12 - log_5\, 8 - 2\, log_5\, 3$ $= log_5\, 12^2 - log_5\, 8 - log_5\, 3^2$ $= log_5\, 12^2 - (log_5\, 8 + log_5\, 3^2)$ $= log_5 \frac{12^2}{8 \times 3^2} = log_5 \frac{12 \times 12}{8 \times 3 \times 3} = log_5\, 2$	9) ما قيمة $2\, log_5\, 12 - log_5\, 8 - 2\, log_5\, 3$ أ) $log_5\, 2$ ب) $log_5\, 3$ ج) $log_5\, 0.5$ د) 3

مثال	الحل
10) حل المعادلة $log_5 x = 4$ هو x تساوي : أ) 125 ب) 625 ج) 25 د) 1225	$log_5 x = 4 \Longleftrightarrow x = 5^4 = 625$
11) حل المعادلة $log_{10} x = -3$ هو x تساوي أ) 1000 ب) 0.001 ج) 0.0001 د) 0.01	$log_{10} x = -3 \Longleftrightarrow x = 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$
12) حل المعادلة $3\,log_2 x = log_2 8$ هو : أ) 8 ب) 2 ج) 3 د) 64	$3\,log_2 x = log_2 8 \Leftrightarrow log_2 x^3 = log_2 8$ $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$
13) حل المعادلة $log_4 16 - log_4 x = log_4 8$ هو : أ) 2 ب) 4 ج) 8 د) $\frac{1}{2}$	$log_4 16 - log_4 x = log_4 8$ $log_4 \frac{16}{x} = log_4 8 \Longrightarrow \frac{16}{x} = 8 \Longrightarrow x = 2$
14) حل المتباينة : $log_2 x > 3$ هو : أ) $x > 6$ ب) $x > 8$ ج) $x > 9$ د) $x > \frac{3}{2}$	$log_2 x > 3 \Longrightarrow x > 2^3$ $\Longrightarrow x > 8$
15) اذا كان $a = log2$, $b = log3$ فإن $\frac{1}{2} log(\frac{9}{4})$ يساوي : أ) $b - a$ ب) $\frac{b}{a}$ ج) $\frac{5}{6}\frac{b}{a}$ د) $\frac{5}{6}(b-a)$	$\frac{1}{2} log\left(\frac{9}{4}\right) = log\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow log\sqrt{\frac{9}{4}} = log\frac{3}{2} = log3 - log2 = b - a$
16) $ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right) =$ أ) $ln\,a - ln\,b$ ب) $\frac{a}{b}$ ج) $a - b$ د) $ln(a-b)$	$ln\left(\frac{e^a}{e^b}\right) = ln\,e^{a-b} = a - b$
17) مجموعة حل المعادلة $log_2(x+2) = 3$ هي : أ) $\{1\}$ ب) $\{4\}$ ج) $\{6\}$ د) $\{8\}$	من خصائص اللوغارتمات $y = log_a x \Rightarrow a^y = x$ $2^3 = x + 2$ $8 = x + 2$ $x = 6$
18) اذا كانت $5^x = 10$, فان x تساوي : أ) $\frac{log10}{log5}$ ب) $\frac{-log10}{log5}$ ج) $\frac{log5}{log10}$ د) $log\frac{1}{2}$	$5^x = 10$ $log5^x = log10$ $x \log 5 = log10$ $x = \frac{log10}{log5}$

11) المصفوفات :

المصفوفات :

تنظيم لمجموعة من الأعداد على هيئة صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين مربعين أو بين قوسين هلاليين.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad or \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a_{11} هو العنصر الموجود في الصف الأول والعمود الأول

a_{12} هو العنصر الموجود في الصف الأول والعمود الثاني

رتبة المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

عدد الأعمدة × عدد الصفوف

2×3

أنواع المصفوفات :

- **المصفوفة المستطيلة :** هي مصفوفه عدد صفوفها لايساوي عدد اعمدتها
$\begin{bmatrix} 11 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

الحالات الخاصة

- **مصفوفة صف :** تتكون من صف واحد فقط $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- **مصفوفة عمود :** تتكون من عمود واحد فقط $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

- **مصفوفة مربعة :** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة
$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

الحالات الخاصة

- **المصفوفة القطرية :** هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي مقادير حقيقية ليست بالضرورة متساوية وباقي العناصر أصفار.

الحالات الخاصة

- **مصفوفة الوحدة :** كل عناصر قطرها الرئيسي يساوي 1 وباقي عناصرها أصفار
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- **المصفوفة القياسية :** كل عناصر قطرها الرئيسي متساوية القيمة وباقي عناصرها اصفار
$\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- **المصفوفة المتماثلة :** هي مصفوفة مربعة لو تم تدويرها لأعطت المصفوفة الأصلية أي أن عناصر المصفوفة متماثلة حول القطر
$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -6 \\ 2 & -6 & 12 \end{bmatrix}$

- **مصفوفه مثلثية عليا :** جميع العناصر التي تحت القطر تساوي صفر
$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
- **مصفوفه مثلثية سفلى :** جميع العناصر التي فوق القطر تساوي صفر
$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- **مصفوفة صفرية :** كل عناصرها أصفار قد تكون مستطيلة أو مربعه
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

12) العمليات الجبرية على المصفوفات :

تساوي المصفوفات :

تتساوى المصفوفتان A , B وتكتب $A = B$ إذا وفقط إذا كان :

1) كل من المصفوفتين من نفس النوع أي أن :

عدد صفوف A = عدد صفوف B

عدد أعمدة A = عدد أعمدة B

2) جميع العناصر المتناظرة متساوية .

مثال : إذا كان $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 3 \\ 0 & y \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ فإن قيمة x هي :

الحل:

$x + 1 = 8 \Rightarrow x = 8 - 1 \rightarrow x = 7$

الجمع والطرح :

نجمع أو نطرح كل عدد في المصفوفة الأولى مع نظيره في المصفوفة الثانية إذا كان لهما الرتبة نفسها

مثال :

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 3+(-5) \\ 1+2 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3 & 3-(-5) \\ 1-2 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :عملية جمع المصفوفات :

- إبدالية $A + B = B + A$
- تجميعية $(A + B) + C = A + (B + C)$

الضرب في عدد ثابت :

نضرب العدد في جميع عناصر المصفوفة .

مثال :

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ فإن $3A$ تساوي :

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \\ 0 & -9 & 24 \end{bmatrix}$$

ضرب مصفوفتين :

1) إذا كان لدينا المصفوفتان $A\,,B$ ، فإنه للحصول على حاصل الضرب $AB = A \times B$ يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B .

مثال :
اذا كانت المصفوفة A من الرتبة 4×3 والمصفوفة B من الرتبة 3×2
هل نستطيع ايجاد قيمة AB ؟
وقيمة BA ؟
الحل :

BA	A	$\times$	B	AB	$=$	B	$\times$	A
غير معرف	4×3	$\times$	3×2	4×2		3×2	$\times$	4×3

ملاحظة :عملية ضرب المصفوفات :

- ليست إبدالية $AB \neq BA$
- تجميعية $A\,(BC) = (AB)C$

2) لضرب المصفوفتين فإنه يتم ضرب العناصرالمتناظرة من الصف الأول في A مع العمود الأول في B ثم جمع حواصل الضرب وهكذا

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

مثال : إذا كانت $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، أوجد AB

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6+1 & 4-8 & 8-5 \\ 0-3 & 0+24 & 0+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -3 & 24 & 15 \end{bmatrix}$$

مثال : إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ، فإن A^2 :

أ) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 64 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 36 & 72 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 80 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times1)+(2\times4) & (1\times2)+(2\times8) \\ (4\times1)+(8\times4) & (4\times2)+(8\times8) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 36 & 64 \end{bmatrix}$$

13) المحددات :

- إذا كان لدينا مصفوفة مربعه فإننا نرمز لقيمة المحدد (دالة المحدد أو مفكوك المحدد) بـالرمز $det\ (A)$ أو $|A|$ أو Δ

- **محدد المصفوفه 2×2 (المحدد الثنائي) :**

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال : أوجد محدد المصفوفه التاليه :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 4 \times 2 = 15 - 8 = 7$$

- **محدد المصفوفه 3×3 (المحدد الثلاثي) :**

1) **استخدام الصف الأول :**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & s \end{vmatrix} = a(e \cdot s - h \cdot f) - b(d \cdot s - g \cdot f) + c(d \cdot h - g \cdot e)$$

مثال : اوجد المحدد

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \end{vmatrix} = \mathbf{1(4 \times 6 - 2 \times 2) - 3(1 \times 6 - 1 \times 2) + 12(1 \times 2 - 1 \times 4)}$$

$$= \mathbf{1(24 - 4) - 3(6 - 2) + 12(2 - 4)}$$

$$= \mathbf{1\ (20)\ \ - 3\ (4)\ \ + 12(-2)}$$

$$= \mathbf{20\ \ - 12\ \ - 24\ \ = -16}$$

2) **طريقة كرامر** : نكرر أول عمودين ثم نضرب عناصر الأقطار :

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & s & g & h \end{array}\right. = (aes + bfg + cdh) - (ceg + afh + bds)$$

مثال : اوجد المحدد

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{12} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right. = \mathbf{(24 + 6 + 24) - (48 + 4 + 18)}$$

$$= \mathbf{54 - 70 = -16}$$

3) **طريقة اخرى :**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & s \end{vmatrix} = \frac{|\text{الازرق}|\,|\text{الأخضر}| - |\text{الأحمر}|\,|\text{الأصفر}|}{e}$$

مثال : اوجد المحدد

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & & \mathbf{3} & & \mathbf{12} \\ & \mathbf{1} & & \mathbf{-42} & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{4} & & \mathbf{2} \\ & \mathbf{-2} & & \mathbf{20} & \\ \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{6} \end{vmatrix} = \frac{\mathbf{(1 \times 20) - (-2 \times -42)}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{20 - 84}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{-64}}{\mathbf{4}} = \mathbf{-16}$$

- **حالات خاصة من المحددات :**

- اذا احتوى القطر الرئيسي في المصفوفة القطرية أو المصفوفة المثلثية على الصفر فإن محدد المصفوفة يساوي صفر (ليس لها معكوس)

مثال	الحل
1) أوجد محدد المصفوفة : $A = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	لان القطر يحتوي على صفر فإن محدد المصفوفه = صفر
2) قيم x التي تجعل محدد المصفوفة $\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & 1+x & 6 \\ 0 & 0 & \frac{2x-1}{3} \end{vmatrix}$ تساوي صفراً هي : أ) $0,1,\frac{1}{2}$ ب) $0,-1,\frac{1}{2}$ ج) $0,-1,\frac{1}{2}$ د) $0,-\frac{1}{2},1$	هي القيم التي تجعل احدى عناصر القطر = صفر • $x = 0$ • $1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$ • $\frac{2x-1}{3} = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$ $\Rightarrow 2x = 1$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

مدور المصفوفة (منقول المصفوفة) :

هو نقل أو تدوير عناصر كل صف إلى عمود والعكس ويرمز له بالرمز A^T

مثال : إذا كانت المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ فإن مدور المصفوفة هو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

النظير الضربي للمصفوفة (معكوس المصفوفة) :

النظير الضربي للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ يرمز له بالرمز A^{-1} ويمكن ايجاده بإستخدام القانون :

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{|A|}$$

- إذا كان محدد المصفوفه يساوي صفر $|A| = 0$ فإن المصفوفه ليس لها نظير ضربي (غير قابلة للإنعكاس)
- إذا كان محدد المصفوفة ≠ صفر , فإن المصفوفه لها نظير ضربي (قابلة للإنعكاس)

أمثلة			
1) النظير الضربي للمصفوفة $Q=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$			
أ) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$	ب) $\begin{bmatrix} -3 & -9 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$	ج) $\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$	د) لا يوجد نظير ضربي
أولا نوجد محدد المصفوفة لا يوجد لها نظير ضربي		$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 2 \times 9 = 18 - 18 = 0$	
2) النظير الضربي للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$			
أ) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	ب) $\begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{-3}{19} \end{bmatrix}$	ج) $\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$	د) $\begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{3}{19} \end{bmatrix}$
$\lvert A \rvert = -12 - 7 = -19$ $A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{-19} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{7}{19} \\ \frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \end{bmatrix}$			
3) قيمة x التي تجعل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} x & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي			
أ) 6	ب) -12	ج) 12	د) 9
لكي تكون المصفوفة ليس لها نظير ضربي (غير قابله للانعكاس) يجب أن يكون المحدد = صفر $\lvert A \rvert = 2x - 24 = 0 \quad \Longrightarrow x = 12$			

• حل نظام المعادلات الخطية :

نفرض نظام لمعادلات خطية في مجهولين x , y على الشكل التالي

$$\begin{aligned} ax + by &= f \\ cx + dy &= h \end{aligned}$$

الطريقة الأولى : حل النظام بإستخدام معكوس المصفوفة

- يمكن كتابة المعادلات بإستخدام المصفوفات على الصورة $AX = B$ ، حيث A مصفوفة المعاملات ، X مصفوفة المجاهيل (المتغيرات) ، و B مصفوفة الحدود المطلقة (الثوابت) .

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ h \end{bmatrix}$$

- للنظام حل وحيد ← إذا كانت المصفوفة A قابلة للإنعكاس (لها نظير)
- للنظام عدد لانهائي من الحلول ← إذا كانت المصفوفة A غير قابلة للإنعكاس (ليس لها نظير)

- يكتب النظام على الشكل $X = A^{-1}B$

مثال : إذا كان $3x + 4y = 1$

$5x + 2y = -3$ ادرس امكانية وجود حل للنظام ؟ وأذكره إن وجد

الحل :

أولا : نكتب النظام على الشكل المصفوفي $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ثانيا : نوجد محدد المصفوفة $|A| = 6 - 20 = -14$

ثالثا : نوجد معكوس المصفوفة A

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}{-14}$$

ثالثا : نوجد حل النظام $X = A^{-1}B$

$$X = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}}{-14} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 2 + 12 \\ -5 - 9 \end{bmatrix}}{-14} = \frac{\begin{bmatrix} 14 \\ -14 \end{bmatrix}}{-14} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية : حل النظام بإستخدام المحددات (طريقة كرامر)

الحد الثابت الحد الثابت

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} f & b \\ h & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & f \\ b & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

ملاحظات :

1) إذا كان محدد المصفوفة يساوي صفر ($\Delta = |A| = 0$) فإن للنظام عدد لانهائي من الحلول أو حلول غير تافهه أو ليس لها حل أو نظام غير متسق .

2) إذا كان محدد المصفوفة لايساوي صفر ($\Delta = |A| \neq 0$) فإن للنظام حل وحيد

مثال : إذا كان $3x + 4y = 1$
$5x + 2y = -3$ ادرس امكانية وجود حل للنظام ؟ وأذكره إن وجد

الحل : بما أن المحدد لايساوي صفر فإن للنظام حل وحيد

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 20 = -14$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{2+12}{-14} = \frac{14}{-14} = -1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-9-5}{-14} = \frac{-14}{-14} = 1$$

حل النظام هو $(-1, 1)$

مثال : النظام التالي
$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ 2x + y + z &= 7 \\ -x - 2y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

إذا علمت أن $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$ ، وأن $x = 3$ ، فإن قيمة $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ تساوي =

أ) $\frac{3}{6}$ ب) $\frac{6}{3}$ ج) 6^2 د) 3×6

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \rightarrow 3 = \frac{\Delta_x}{6} \rightarrow \Delta_x = 3 \times 6$$

- **بعض خواص المحددات :**

إذا كانت A , B مصفوفتين من الرتبة $n \times n$ فإن :

- $|A^T| = |A|$
- $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $|A| = a \rightarrow |A^m| = a^m$
- $|kA| = k^n |A|$

مثال	الحل
1) اذا كان k عدداً حقيقياً و A مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ فإن المحدد $\|kA\|$ يساوي : أ) $k\|A\|$ ب) $k^n\|A\|$ ج) $nk\|A\|$ د) $k\|A\|^n$	من خصائص المحدد $\|kA\| = k^n\|A\|$
2) إذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 و كان $\|A\| = -2$ ، فما قيمة $\|2A^T(A^{-1})^2\|$: أ) ب) ج) د)	$\|2A^T\ (A^{-1})^2\| = \|2A^T\| \cdot \|(A^{-1})^2\|$ $= 2^3\ \|A\| \cdot \frac{1}{\|A^2\|}$ $= 8 \times -2 \times \frac{1}{4} = -4$

تمارين

مثال	الحل
1) أي العبارات الأتية صحيحة : أ) كل مصفوفة قطرية لها معكوس . ب) كل مصفوفة قطرية متماثلة لها معكوس. ج) كل مصفوفة متماثلة مصفوفة قطرية د) كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة	كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة والعكس غير صحيح فليست كل مصفوفة متماثلة هي مصفوفة قطرية
3) قيمة $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ تساوي : أ) 55 ب) 60 ج) 66 د) 76	$3(3+7) - 4(0-14) + 5(0-2)$ $30 \quad +56 \quad -10 \quad = 76$
4) قيمة a التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ غير قابلة للانعكاس هي: أ) $\frac{4}{3}$ ب) $-\frac{1}{2}$ ج) 2 د) $-\frac{4}{3}$	تكون غير قابلة للانعكاس (ليس لها نظير ضربي) عندما تكون قيمة المحدد تساوي صفر $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ a & 4 \end{vmatrix} = (-2 \times 4) - (a \times 6) = 0$ $-8 \quad -6a \quad = 0$ $-8 = 6a$ $a = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$
5) قيمة a التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ غير قابلة للانعكاس هي: أ) -1 ب) 0 ج) 1 د) -2	تكون غير قابلة للانعكاس عندما تكون قيمة المحدد = صفر $\Delta = 0$ $\Delta = 1(0-1) - 0 + a(0-1) = 0$ $= -1 - a = 0$ $a = -1$

مثال	الحل
6) اذا كانت A و B مصفوفتين من الدرجة 3×3 ، فأي العبارات صحيحة : أ) $\lvert A - B\rvert = \lvert B - A\rvert$ ب) إذا كان $AB = A^2$ فإن $A = B$ ج) إذا كان $AB = 0$ فإن $A = 0$ أو $B = 0$ 7) إذا كان $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ فإن $AB = BA$	$AB = A^2$ $AB = AA$ $\therefore B = A$
8) ما ناتج جمع قيم k التي تجعل للنظام حلولاً غير تافهة : $(k+1)x + (k+3)y = 0$ $2x + ky = 0$ أ) -1 ب) 1 ج) 2 د) 3	تكون الحلول غير تافهة اذا كان المحدد = صفر $\begin{vmatrix} k+1 & k+3 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$ $k(k+1) - 2(k+3) = 0$ $k^2 - k - 6 = 0$ $(k-3)(k+2) = 0$ $k = 3 \text{ or } k = -2$ $k_1 + k_2 = 3 - 2 = 1$
9) اذا كانت A مصفوفة متماثله $(A^T = A)$ $A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، فإن A تساوي : أ) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$	بما ان $A^T = A$ فإن : $A + A^T = A + A = 2A$ $2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ نقسم جميع عناصر المصفوفة على2 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
10) اذا كانت $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة X تساوي: أ) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$	• بتعويض قيمة X في الخيارات $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 2(-7)+5(3) & 2(-3)+5(1) \\ 1(-7)+3(3) & 1(-3)+3(1) \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} -14+15 & -6+5 \\ -7+9 & -3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ • طريقة اخرى للحل عن طريق ايجاد النظير الضربي • نوجد محدد المصفوفه $\lvert A\rvert = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ $X = A^{-1}B$ $X = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

للوصول إلى فيديوها ت
شروحات المعاييـ ر
اضغط هنا

المعيار الثالث
(الهندسة)

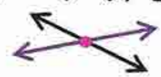
1) المستقيمات – المستويات - الزوايا
2) الزوايا الناتجه من تقاطع مستقيم مع مستقيمان متوازيان
3) النقاط في المستوى الإحداثي
4) ميل و معادلة المستقيم
5) المسافه بين نقطتين - المسافه بين نقطة ومستقيم - نقطة منتصف قطعة مستقيمة
6) خواص المضلعات
7) أنواع المثلثات و تصنيفها
8) تشابه المثلثات
9) تطابق المثلثات
10) نظرية فيثاغورث
11) العلاقات في المثلث
12) الاشكال الرباعية
13) مساحة المضلعات
14) الدائرة
15) الأشكال ثلاثية الأبعاد (المجسمات)
16) القطوع المخروطية (المكافئ - الناقص -الزائد)
17) التحويلات الهندسيه (انعكاس – انسحاب – تمدد – دوران)
18) حساب المثلثات
19) المتجهات في المستوى الاحداثي
20) الاحداثيات الديكارتية والاحداثيات القطبية

1) المستقيمات و المستويات و الزوايا :

1) أي نقطتين في المستوى يمر بهما مستقيم واحد .

2) أي مستقيم ونقطة خارجه يمر بهما مستوى واحد .

3) إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط

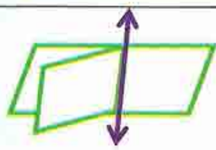


4) أي مستقيمين متقاطعين يمر بهما مستوى واحد

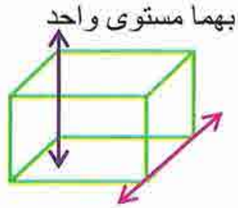
5) أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بهما مستوى واحد

6) إذا وقعت نقطتين في مستوى فإن المستقيم المار بهما يقع كلياً في ذلك المستوى .

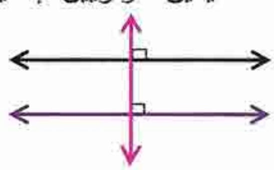
7) يتقاطع المستويان في مستقيم .



8) المستقيمان المتخالفان لا يمر بهما مستوى واحد ولا يتقاطعان ولا يتوازيان .



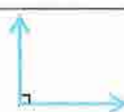
9) إذا عامد مستقيم أحد مستقيمين متوازيين فإنه يُعامد الآخر



أنواع الزوايا:

الزاوية الحادة:
قياسها اكبر من الصفر وأصغر من $90°$

الزاوية القائمة: قياسها $90°$

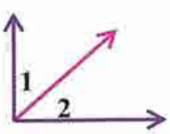


الزاوية المنفرجة:
قياسها اكبر من $90°$ وأصغر من $180°$

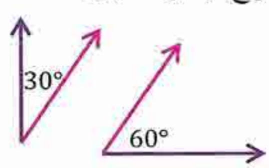
الزاوية المستقيمة : قياسها $180°$

الزاوية المنعكسة :
قياسها اكبر من $180°$ وأصغر من $360°$

الزاويتان المتتامتان : هما زاويتان مجموع قياسهما $90°$

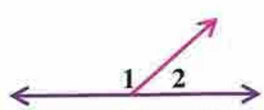


$m\angle 1 + m\angle 2 = 90°$

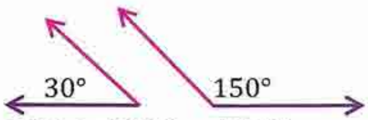


$30° + 60° = 90°$

الزاويتان المتكاملتان: هما زاويتان مجموع قياسهما $180°$



$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$



$30° + 150° = 180°$

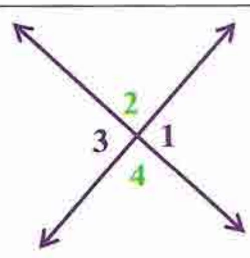
كل زاويتين متقابلتين بالرأس : متطابقتان

$m\angle 1 = m\angle 3$, $m\angle 2 = m\angle 4$

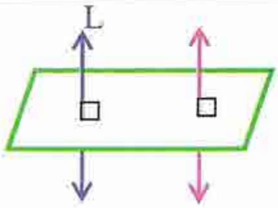
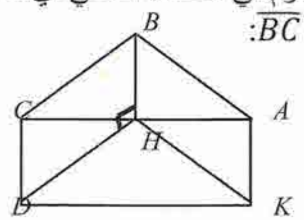
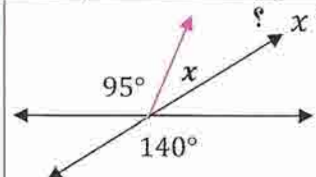
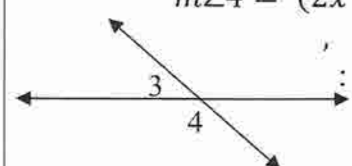
كل زاويتين متجاورتين : متكاملتان

$m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

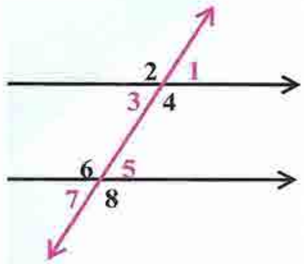


تمارين

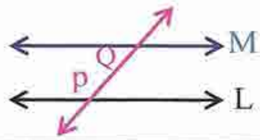
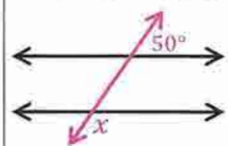
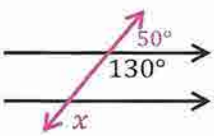
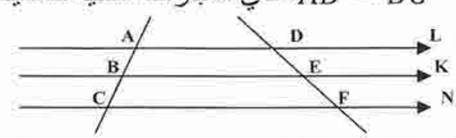
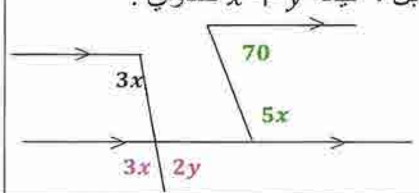
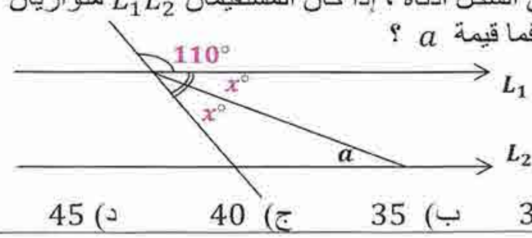
مثال	الحل
1) اذا كان المستقيم L عمودي على المستوى P في الفراغ , فيمكن أن نستنتج ما يلي: أ) أي مستقيم يوازي L عمودي على P ب) أي مستقيم يقطع P يجب ان يقطع L ج) أي مستقيم يخالف L يقطع المستوى P د) أي مستقيم عمودي على L يقع في المستوى P	
2) الشكل أدناه مرسوم في الفضاء الثلاثي أي قطعة مستقيمة تخالف $\overline{BC}$:  أ) $\overline{AC}$ ب) $\overline{AK}$ ج) $\overline{DH}$ د) $\overline{BH}$	المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد أي انهما لا يتقاطعان ولا يتوازيان
3) في الشكل أدناه ، ما قيمة x ؟  أ) $40°$ ب) $45°$ ج) $50°$ د) $55°$	زاويتان متقابلتان بالرأس , متساويتان في القياس $x + 95° = 140°$ $x = 140° - 95° = 45°$
4) إذا كان $m\angle 4 = (2x+60)°$, $m\angle 3 = (2x)°$ فإن $m\angle 3$ بالدرجات :  أ) $60°$ ب) $70°$ ج) $50°$ د) $40°$	$m\angle 4 + m\angle 3 = 180°$ $(2x+60)° + (2x)° = 180°$ $(4x+60)° = 180°$ $x° = \frac{180° - 60°}{4} = 30°$ $m\angle 3 = (2x)° = 60°$

2) الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمان متوازيان :

في الشكل M , N مستقيمان متوازيان وقطعهما المستقيم L ، ينتج 8 زوايا (4 حادة متطابقة و 4 منفرجة متطابقة)



كل زاويتين متناظرتين وفي جهة واحدة من القاطع متطابقتين	كل زاويتين متبادلتين داخلياً متطابقتين	كل زاويتين متبادلتين خارجياً متطابقتين
$\angle 1 \cong \angle 5$ $\quad$ $\angle 3 \cong \angle 7$ $\angle 2 \cong \angle 6$ $\quad$ $\angle 4 \cong \angle 8$	$\angle 3 \cong \angle 5$ $\angle 4 \cong \angle 6$	$\angle 1 \cong \angle 7$ $\angle 2 \cong \angle 8$
كل زاويتين متحالفتين داخلياً وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتين		
$m\angle 3 + m\angle 6 = 180°$ ، $m\angle 4 + m\angle 5 = 180°$		

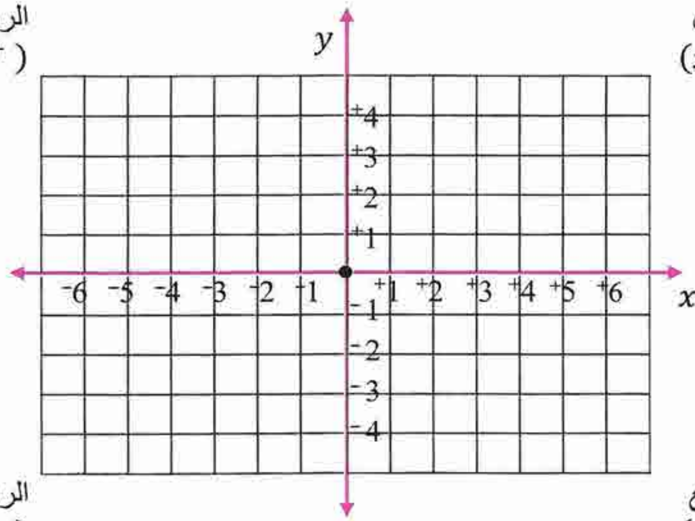
مثال	الحل
1) في الشكل أدناه المستقيمان M, L متوازيان، إذا كان $m\angle Q = 2x - 11$ ، $m\angle p = 4x + 5$، فما قياس p بالدرجات؟  أ) $119°$ ب) $129°$ ج) $139°$ د) $149°$	زاويتان متحالفتان $m\angle p + m\angle Q = 180°$ $x + 5 + 2x - 11 = 180°$ $x - 6 = 180°$ $= \frac{180° + 6}{6} = \frac{186°}{6} = 31°$ $\imath\angle p = 4(31°) + 5 = 129°$
2) في الشكل ، إذا كان المستقيمان متوازيان ، فإن قياس الزاوية x يساوي :  أ) $100°$ ب) $110°$ ج) $120°$ د) $130°$	نحسب الزاوية المجاورة للزاوية التي قياسها $50°$ فتكون  $180° - 50° = 130°$ (زاويتان متكاملتان) وبالتالي $x = 130°$ (زاويتان متناظرتان متطابقتان)
3) إذا كان L, K, N مستقيمات متوازية وكان $\overline{AB} = \overline{BC}$، فأي العبارات التالية صحيحة دائماً ؟  أ) $\overline{AB} = \overline{DE}$ ب) $\overline{BC} = \overline{EF}$ ج) $\overline{DE} = \overline{EF}$ د) $\overline{AC} = \overline{DF}$	بما أن $\overline{AB} = \overline{BC}$ إذن المسافه بين المستقيمات المتوازية متساوية هذا يثبت ان $\overline{DE} = \overline{EF}$
4) في الشكل المقابل ، قيمة $x + y$ تساوي :  أ) 70 ب) 79 ج) 90 د) 110	- زاويتان متحالفتان $70 + 5x = 180$ $5x = 110 \rightarrow x = 22$ - زاويتان متجاورتان $3x + 2y = 180$ $6 + 2y = 180$ $2y = 114 \rightarrow y = 57$ $x + y = 22 + 57 = 79$
5) في الشكل أدناه ، إذا كان المستقيمان $L_1 L_2$ متوازيان ، فما قيمة a ؟  أ) 30 ب) 35 ج) 40 د) 45	زوايا متجاورة على مستقيم $x + 110 = 180$ $x = 180 - 110 = 70$ $= 35°$ الزاوية a والزاويه x متبادلتان داخلياً $a = x = 35°$

3) النقاط في المستوى الإحداثي :

نظام الاحداثيات الديكارتية
- يتكون من محورين : المحور السيني الأفقي x والمحور الصادي العمودي y . - المحورين متعامدين ومتقاطعين عند النقطة $(0,0)$ والتي تسمى نقطة الأصل . - يقسم النظام الى اربع ارباع وتتحدد أي نقطة على هذه الإحداثيات بـ (x,y)

الربع الأول (x^+ , y^+)

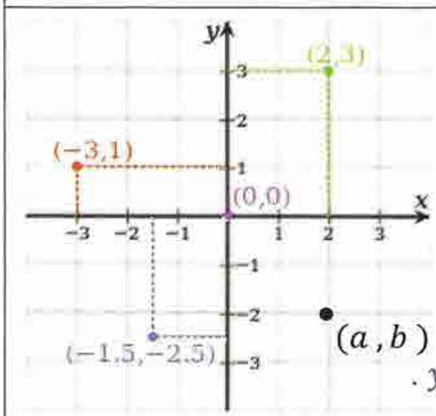
الربع الثاني (x^- , y^+)



الربع الرابع (x^+ , y^-)

الربع الثالث (x^- , y^-)

مثال :



النقطة $(0 , 0)$ نقطة الأصل .

النقطة $(2 , 3)$ تقع في الربع الأول
احداثيها السيني موجب $x = 2$ ، واحداثيها الصادي موجب $y = 3$.

النقطة $(-3 , 1)$ تقع في الربع الثاني
احداثيها السيني سالب $x = -3$ ، واحداثيها الصادي موجب $y = 1$.

النقطة $(-1.5 , -2.5)$ تقع في الربع الثالث
احداثيها السيني سالب $x = -1.5$ ، واحداثيها الصادي سالب $y = -2.5$.

النقطة (a , b) تقع في الربع ....
احداثيها السيني .... $= x$ ، واحداثيها الصادي .... $y =$.

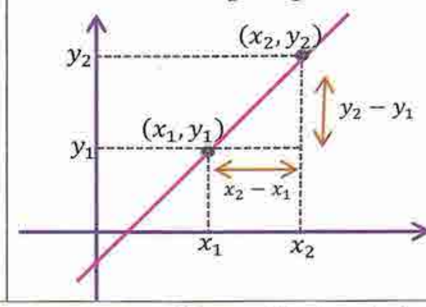
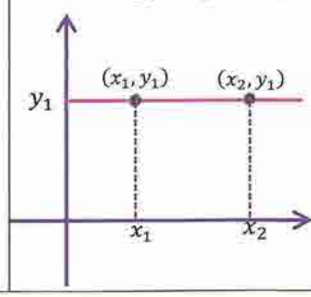
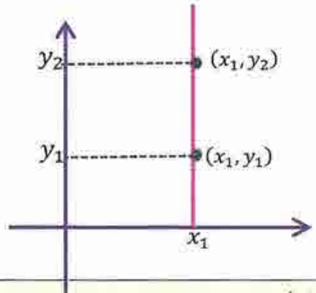
مثـال	الحـــل
اذا كانت (x,y) جميع النقاط في المستوى والتي تحقق $xy \geq 0, x \leq 0$ فإن هذه النقاط تمثل الربع؟ أ) الأول ب) الثاني ج) الثالث د) الرابع	$x = -$ $xy = +$ $\therefore y = -$ بما ان (x,y) سالبة اذن تقع في الربع الثالث

4) ميل و معادلة المستقيم :

معادلة المستقيم على الصورة العامة : $y - y_1 = m(x - x_1)$

حيث m ميل المستقيم , x_1 الإحداثي السيني لنقطة يمر بها المستقيم و y_1 الإحداثي الصادي لنفس النقطة

ميل المستقيم :

ميل المستقيم المار بنقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	ميل المستقيم الأفقي $= 0$ $m = \frac{y_1 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$	ميل المستقيم الرأسي غير معرف $m = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0}$
		

ميل المستقيم الذي معادلته $y = mx + c$ هو m (معامل x)

ميل المستقيم الذي معادلته $ax + by = c$ هو $\frac{-a}{b}$ $\left(\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}\right)$

ميل المستقيم الموازي للمستقيم الذي معادلته $ax + by = c$ هو $\frac{-a}{b}$

(المستقيمان المتوازيان لهما نفس الميل)

ميل المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $ax + by = c$ هو $\frac{b}{a}$

(ميل العمودي هو مقلوب ميل المستقيم المعطى مع تغيير الاشارة وحاصل ضرب ميلي المستقيمان المتعامدان $= -1$)

معادلة المستقيم :

معادلة المستقيم الذي ميله m والمقطع $y = c$ $y = mx + c$	معادلة المستقيم الذي يمربالنقطة (a, b) ويوازي محور x $y = b$ (المستقيم أفقي)
معادلة المستقيم الذي ميله m ويمر بالنقطة (x_1, y_1) معادلته : $y - y_1 = m(x - x_1)$	معادلة المستقيم الذي يمربالنقطة (a, b) ويوازي محور y $x = a$ (المستقيم رأسي)

معادلة المستقيم الذي يمربالنقطة (x_1, y_1) و يوازي المستقيم $ax + by = c$

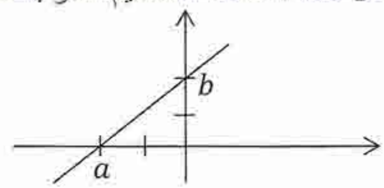
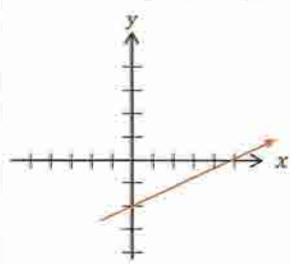
$$y - y_1 = \frac{-a}{b}(x - x_1)$$

معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (x_1, y_1) و عمودي على المستقيم $ax + by = c$

$$y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$$

تمارين

مثال	الحل
1) ميل المستقيم $2y-x=0$ هو : أ) 1 ب) -1 ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{-1}{2}$	• بالتعويض مباشرة في $\frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}=\frac{1}{2}$ • او بوضعه على الصورة $y=mx+b$ $2y-x=0\rightarrow 2y=x\rightarrow y=\frac{1}{2}x\rightarrow m=\frac{1}{2}$
2) معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $-2x+y=-4$ ويمر بالنقطة $(5,3)$ هي : أ) $y=2x-7$ ب) $y=2x+13$ ج) $y=\frac{1}{2}x-7$ د) $y=\frac{1}{2}x+13$	المستقيمان المتوازيان ميلهم متساوي $=\frac{-(-2)}{1}=2$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-3=2(x-5)$ $y=2x-10+3$ $y=2x-7$
3) معادلة المستقيم العمودي على المستقيم $y=2x+1$ ويمر بالنقطة $(2,-4)$ هي : أ) $y=-2x$ ب) $y=\frac{-1}{2}x-3$ ج) $y=\frac{-1}{2}x-5$ د) $y=2x-8$	ميل المستقيم المعلوم $=2$ فإن ميل المستقيم المطلوب $=\frac{-1}{2}$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $y+4=\frac{-1}{2}(x-2)$ $y=\frac{-1}{2}x+1-4$ $y=\frac{-1}{2}x-3$
4) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2,1)$ ويعامد المستقيم $x+4y-8=0$ هي : أ) $y+4x=9$ ب) $y-4x=9$ ج) $2y-4x=9$ د) $2y+4x=9$	ميل المستقيم المعلوم $=\frac{-1}{4}$ فإن ميل المستقيم المطلوب $=4$ $y-y_1=m(x-x_1)$ $y-1=4(x+2)$ $y=4x+8+1$ $y=4x+9$ $y-4x=9$
5) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2\,,-1)$ وعمودي المستقيم $2x-3y=5$ هي : أ) $3y=2x+7$ ب) $3y=2x-3$ ج) $2y+3x=2$ د) $3y-2x=-7$	ميل المستقيم المعلوم $=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}$ ميل المستقيم المطلوب $=\frac{-3}{2}$ $y+1=\frac{-3}{2}(x-2)$ $y=\frac{-3}{2}x+3-1\Longrightarrow y=\frac{-3}{2}x+2$ $2y=-3x+2\Longrightarrow 2y+3x=2$
6) ما التمثيل البياني لمعادلتي المستقيمين: $y-3x=-5$ و $3y+x=8$ ؟ أ) المستقيمان متوازيان ب) يقطعان المحور x في نفس النقطة ج) المستقيمان متعامدان د) يقطعان المحور y في نفس النقطة	ميل المستقيم $y-3x=-5$ هو $m_1=\frac{3}{1}=3$ ميل المستقيم $3y+x=8$ هو $m_2=\frac{-1}{3}$ $m_1.m_2=3\times\frac{-1}{3}=-1$ المستقيمان متعامدان

مثـال	الحـل
7) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2,-1)$ ويوازي محور x هي : أ) $x=2$ ب) $x=-1$ ج) $y=2$ د) $y=-1$	$y=-1$
8) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2,-1)$ ويوازي محور y هي : أ) $x=2$ ب) $x=-1$ ج) $y=2$ د) $y=-1$	$x=2$
9) في الشكل أدناه ، معادلة المستقيم المار بالنقطتين a, b هي :  أ) $y=x+2$ ب) $y=x-2$ ج) $y=-x+2$ د) $y=-x-2$	ميل المستقيم $= \frac{\text{التغير الراسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{2}{2} = 1$ المقطع $y=2$ فإن معادلة المستقيم $y=x+2$
10) إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (a,b) و (c,d) يساوي 0.5 فما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2-4a, 3-4b)$ و $(2-4c, 3-4d)$ ؟ أ) 2 ب) -2 ج) 0.5 د) -0.5	$m_1=\frac{b-d}{a-c}=0.5$ $m_2=\frac{(3-4b)-(3-4d)}{(2-4a)-(2-4c)}$ $=\frac{-4b+4d}{-4a+4c}=\frac{-4(b-d)}{-4(a-c)}=\frac{b-d}{a-c}$ $=0.5$
11) أي مما يلي يمثل معادلة المستقيم المبين في الشكل أدناه؟  أ) $y=\frac{2}{5}x+2$ ب) $y=10x-2$ ج) $y=10x+2$ د) $y=\frac{2}{5}x-2$	ميل المستقيم $= \frac{\text{التغير الراسي}}{\text{التغير الأفقي}}$ $m=\frac{2}{5}$ المقطع $y=-2$ فإن معادلة المستقيم $y=\frac{2}{5}x-2$

<table>
<tr><th>الحل</th><th>مثال</th></tr>
<tr><td>

▪ خذ أي نقطتين على المستقيم من الرسم وليكن

$(0\ ,3)\ ,(1.5\ ,0\ )$

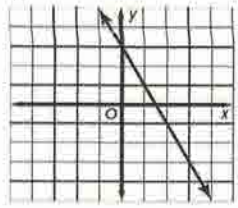
$$m = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0-3}{1.5-0} = \frac{-3}{1.5} = -2$$

▪ طريقة مختصرة :

ميل المستقيم $= \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{3}{-1.5} = -2$

</td><td>

12) ميل المستقيم الممثل بيانياً على المستوى الإحداثي الآتي هو :



أ) 2   ب) -2

ج) $\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{2}$

</td></tr>
<tr><td>

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = 3(x - 1)$

$y = 3x - 3 + 2$

$y = 3x - 1$

▪ طريقة مختصرة :

نختار الحل الذي فيه معامل xهو3 ، ثم نختار المعادلة التي تساوى طرفيها بعد التعويض بالنقطة فيها

</td><td>

13) معادلة المستقيم الذي ميله 3 ويمر بالنقطة $(1\ ,2)$ هي :

أ) $y = 2x + 1$ ب) $y = 3x - 1$

ج) $y = 3x - 2$ د) $y = 3x + 2$

</td></tr>
<tr><td>

الميل $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-5}{4-2} = \frac{-2}{2} = -1$

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$y - 5 = -1(x - 2)$

$y - 5 = -x + 2 \Longrightarrow y = -x + 7$

</td><td>

14) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2\ ,5)\ ,(\ 4\ ,3)$ هي :

أ) $y = -x + 7$ ب) $y = -x - 3$

ج) $y = x - 4$ د) $y = -x - 5$

</td></tr>
<tr><td>

ميل المستقيم المعلوم معادلته $= \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

المستقيمان متوازيان لهما نفس الميل

$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - 1 \Longrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

$3y = 2x - 7 \Longrightarrow 3y - 2x = -7$

</td><td>

15) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(2\ ,-1)$ ويوازي المستقيم $2x - 3y = 5$ هي :

أ) $3y = 2x + 7$ ب) $3y = 2x - 3$

ج) $2y + 3x = 2$ د) $3y - 2x = -7$

</td></tr>
</table>

5) المسافه بين نقطتين / المسافه بين نقطة ومستقيم / نقطة منتصف قطعة مستقيمه :

المسافه بين نقطتين

البعد بين النقطتين $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ← $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

مثال : أوجد المسافة بين النقطتين $A(5\,,1),B(-3\,,7)$	**الحل :** $|AB|=\sqrt{(5-(-3))^2+(1-7)^2}$ $=\sqrt{8^2+(-6)^2}=\sqrt{64+36}$ $=\sqrt{100}=10$

المسافه بين نقطة ومستقيم

البعد بين نقطة (x_1,y_1) ومستقيم $ax+by+c=0$ ← $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

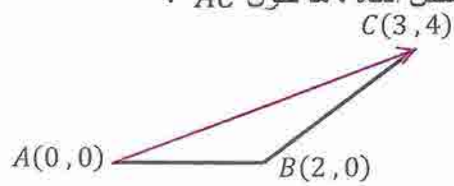
مثال : البعد بين نقطة $(1,0)$ والمستقيم $3x+4y+7=0$ يساوي	**الحل :** $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $=\dfrac{|3(1)+4(0)+7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{10}{5}=2\Box$

نقطة منتصف قطعة مستقيمة

نقطة منتصف قطعة مستقيمة طرفيها $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ← $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

مثال : أوجد احداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي طرفيها $A(7\,,2),B(-3\,,4)$	**الحل :** $(x_m,y_m)=\left(\dfrac{7+-3}{2},\dfrac{2+4}{2}\right)$ $=\left(\dfrac{4}{2},\dfrac{6}{2}\right)=(2\,,3)\Box$

تمارين

مثال	الحل
1) في الشكل أدناه ، ما طول $\overline{AC}$ ؟  أ) 5 ب) 7 ج) 16 د) 25	$\|AC\| = \sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}$ $= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
2) إذا كانت النقطة $(0,4)$ تقع على محيط دائرة مركزها $(3,0)$ فما طول نصف قطر الدائرة؟ أ) 5 ب) 7 ج) 16 د) 25	$r = \sqrt{(3-0)^2+(0-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
3) إذا كانت النقطة $(4,3)$ تقع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(x,0)$ و $(5,z)$ فإن $x+z$ تساوي: أ) 7 ب) 9 ج) 6 د) 2	$\left(\frac{5+x}{2},\frac{z+0}{2}\right) = (4,3)$ $\frac{5+x}{2} = 4$, $\frac{z+0}{2} = 3$ $5+x = 8 \Rightarrow x = 3$, $\frac{z}{2} = 3 \Longrightarrow z = 6$ $x+z = 3+6 = 9\square$
4) إذا كانت المسافة بين النقطتين $(1,-2)$ $(1,y)$ تساوي 3 ، فإن إحدى قيم y هي : أ) 3 ب) 1 ج) -3 د) -1	$3 = \sqrt{(1-1)^2+\left(y-(-2)\right)^2}$ $3 = \sqrt{(y+2)^2}$ $3 = y+2$ or $3 = -(y+2)$ $y = 3-2 = 1$ or $3 = -y-2$ or $y = -5$

6) خواص المضلعات :

- **المضلع** : أي شكل هندسي مغلق مستو , أضلاعه مستقيمه , وله زوايا , فإنه يسمى مضلعاً .
- **المضلعات المنتظمة** :

تكون منتظمة في أطوال اضلاعها وقياس زواياها (**مثلث متطابق الأضلاع – مربع – مخمس – ......**)

- **المضلعات غير المنتظمة** :

تكون اضلاعها او زواياها مختلفه في القياس (**مثلث متطابق الضلعين – مثلث مختلف الاضلاع – شكل رباعي – متوازي اضلاع – مستطيل – معين – خماسي – ....**)

ملاحظة : الدائرة لاتعتبر مضلعاً لعدم وجود أضلاع و زوايا لها .

إذا كان لدينا مضلع عدد أضلاعه n

- مجموع قياسات زواياه الداخلية ← $(n-2) \times 180°$
- عدد أقطاره ← $\frac{n(n-3)}{2}$
- عدد الأقطار التي تنطلق من أحد رؤوسه ← $n-3$

إذا كان المضلع منتظم

- قياس إحدى زواياه ← $180° - \frac{360°}{n}$
- قياس زاويته الخارجية ← $\frac{360°}{n}$

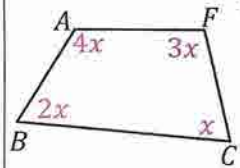
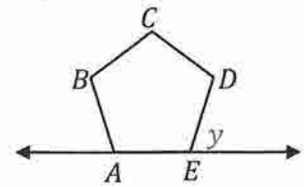
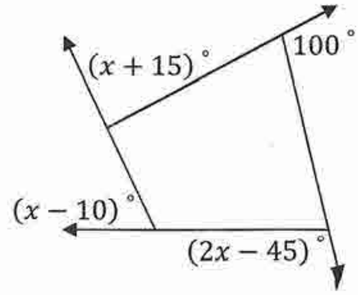
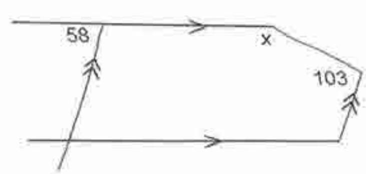
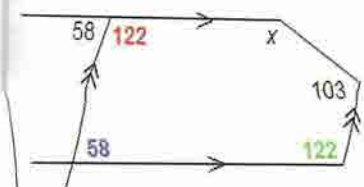
مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع = $360°$

حساب عدد أضلاع مضلع

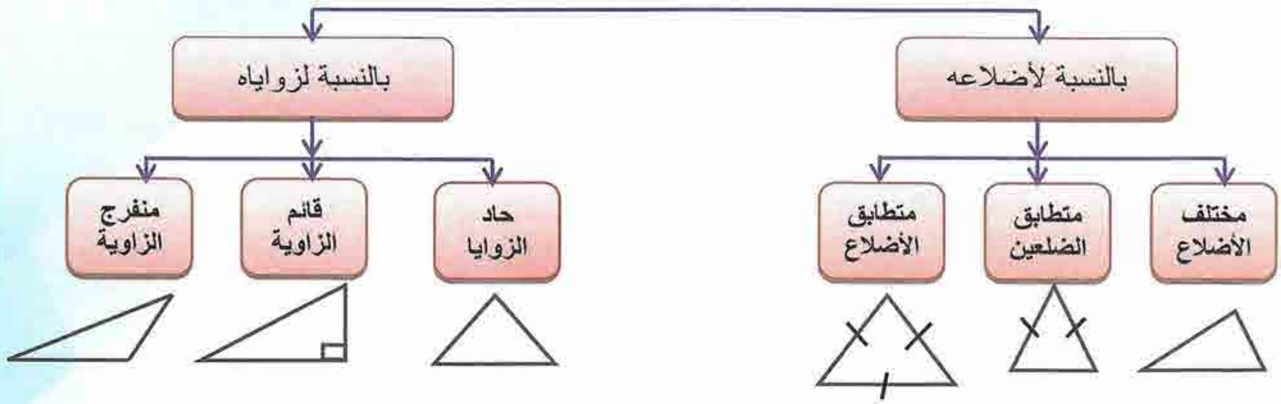
- غير منتظم بمعلومية مجموع قياسات زواياه ← $\frac{\text{مجموع قياسات زواياه}}{180°} + 2$
- منتظم بمعلومية قياس إحدى زواياه ← $\frac{360°}{180° - \text{قياس إحدى زواياه}}$

مثال : ما عدد أضلاع مضلع مجموع قياسات زواياه الداخلية $720°$ ؟ $\frac{720°}{180} + 2 = 4 + 2 = 6$	**مثال** : ما عدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلية $108°$ ؟ $\frac{360°}{180° - 108°} = \frac{360°}{72°} = 5$

تمارين

مثال	الحل
1) ماقياس الزاوية B ؟  أ) 18 ب) 36 ج) 40 د) 72	مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = $360°$ $x + 2x + 3x + 4x = 360$ $10x = 360$ $x = 36$ $m\angle B = 2x = 2(36) = 72$
2) الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم ، والمستقيم l يحوي AE ماقياس $\angle y$ ؟  أ) 18 ب) 36 ج) 40 د) 72	قياس الزاوية الخارجية للمضلع المنتظم $\frac{360°}{5} = 72$
3) ماقيمة x ؟  أ) 25 ب) 50 ج) 75 د) 100	مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع = 360 $x + 15 + x - 10 + 2x - 45 + 100 = 360$ $4x + 60 = 360$ $4x = 300$ $x = 75$
4) ما قياس الزاوية x في الشكل المرافق؟  أ) 155 ب) 145 ج) 135 د) 125	 1) بالتجاور على مستقيم لدينا زاويتان متكاملتان مجموع قياسهما $180°$ 2) بالتوازي والتبادل لدينا زاويتان متساويتان بالقياس 3) بالتوازي والتحالف لدينا زاويتان متكاملتان مجموع قياسهما $180°$ 4) مجموع زوايا المضلع الخماسي = $(n-2) \times 180°$ $540 = 3 \times 180 =$ (5 $x = 540 - (122 + 122 + 103 + 58)$ $x = 540 - 405 = 135°$

7) أنواع المثلثات وتصنيفها :

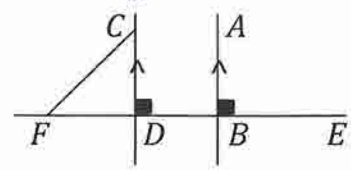
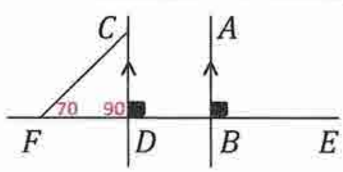
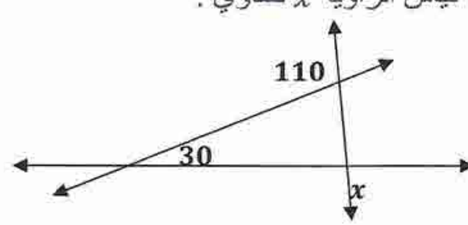
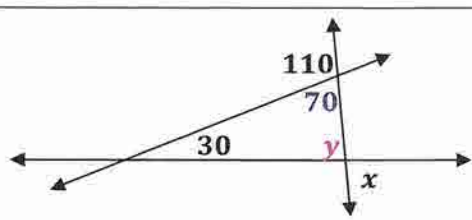


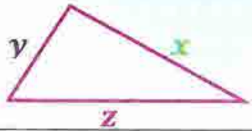
- **خواص المثلثات :**

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث = $180°$ ومجموع قياس الزوايا الخارجية للمثلث = $360°$.
- طول أي ضلع في المثلث يكون أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من الفرق بينهما (متباينة المثلث)
- قياس الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخليتين البعيدتين .

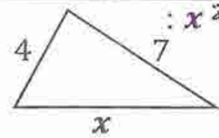
- **أمثلة في الخواص :**

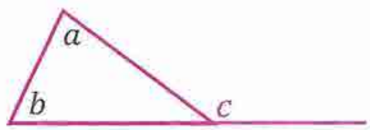
مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث = $180°$ ومجموع قياس الزوايا الخارجية للمثلث = $360°$

مثال	الحل
1) في الشكل أدناه ، إذا علمت أن $\overline{AB} \backslash\backslash \overline{CD}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{BF}$ ، $\angle CFD = 70$ ، فإن قياس الزاوية $\angle DCF$ بالدرجات تساوي :  أ) 20 ب) 30 ج) 40 د) 50	 مجموع زوايا المثلث $70 + 90 + x = 180$ $x = 180 - 160 = 20$
2) قياس الزاوية x تساوي :  أ) 60 ب) 70 ج) 80 د) 90	 زاويتان متجاورتان $180 - 110 = 70$ مجموع زوايا المثلث $y + 30 + 70 = 180$ $y = 180 - 100 = 80$ زاويتان متقابلتان بالرأس $x = y = 80°$



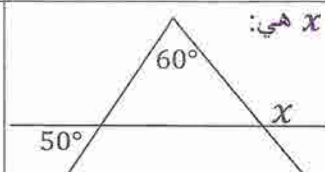
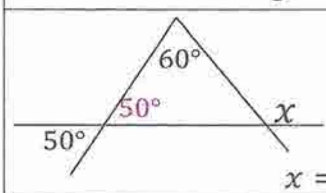
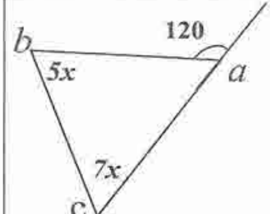
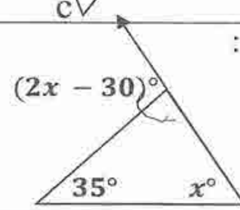
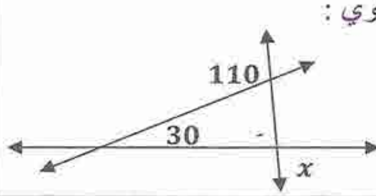
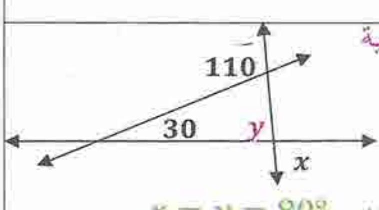
- طول أي ضلع في المثلث يكون أصغر من مجموع الضلعين الأخرين وأكبر من الفرق بينهما (نظرية متباينة المثلث) .

مثال	الحل
1) إذا كان طولا ضلعين في مثلث هما $3\ cm , 7\ cm$ ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث ؟ أ) $3\ cm$ ب) $4\ cm$ ج) $5\ cm$ د) $10\ cm$	مجموع طولي الضلعين $7+3=10$ الفرق بين طولي الضلعين $7-3=4$ يجب أن يكون الضلع الثالث أصغر من 10 واكبر من 4 العدد 5
2) أي مما يلي لا يمكن أن يكون قيمة x :  أ) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11	مجموع طولي الضلعين $7+4=11$ الفرق بين طولي الضلعين $7-4=3$ جميع الخيارات تقع بين 11 و 3 ماعدا العدد 11 فلا يمكن أن يكون قيمة x
3) إذا كان طولا ضلعين في مثلث 12 , 7 ، فأي مما يأتي لا يمكن أن يكون محيط مثلث ؟ أ) 29 ب) 34 ج) 37 د) 38	مجموع طولي الضلعين $12+7=19$ الفرق بين طولي الضلعين $12-7=5$ يجب أن يكون الضلع الثالث أصغر من 19 واكبر من 5 نجرب الخيارات بطرح 19 من المحيط $34-19=15$ √ $29-19=10$ √ $38-19=19$ × $37-19=18$ √

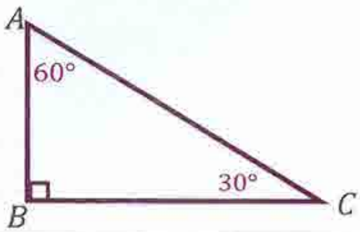


- قياس الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين البعيدتين

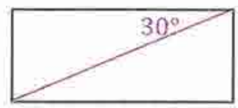
$a+b=c$

مثال	الحل
1) في الشكل المرافق ، قيمة x هي:  أ) 95° ب) 100° ج) 110° د) 120°	ستجد بالرسم هناك زاويتان متساويتان بالتقابل بالرأس  نظرية الزاوية الخارجية $x=50°+60°=110°$
2) في الشكل أدناه، قياس الزاوية c بالدرجات يساوي:  أ) 10° ب) 20° ج) 60° د) 70°	$5x+7x=120°$ نظرية الزاوية الخارجية $12x=120°$ $x=10°$ $c=7x=7\times 10=70°$
3) قيمة x في الشكل أدناه تساوي :  أ) 60° ب) 65° ج) 70° د) 75°	نظرية الزاوية الخارجية $2x-30=x+35$ $2x-x=35+30$ $x=65°$
4) قياس الزاوية x تساوي :  أ) 60 ب) 70 ج) 80 د) 90	 نظرية الزاوية الخارجية $y+30=110$ $y=110-30$ $y=80$ زاويتان متقابلتان بالرأس $x=y=80°$

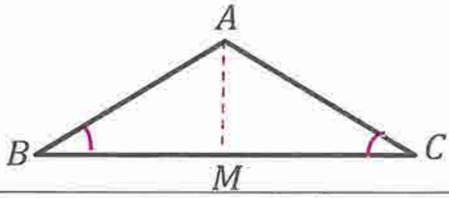
المثلث الثلاثيني الستيني



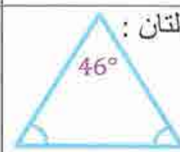
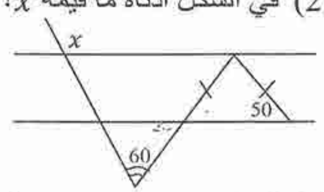
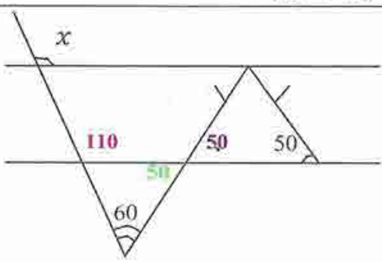
- هو مثلث قائم الزاوية قياس إحدى زواياه $30°$ وقياس الثانية $60°$.
- طول الضلع المقابل للزاوية $30° = \frac{1}{2} \times$ طول الوتر .
- طول الضلع المقابل للزاوية $60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ طول الوتر .

مثال	الحل
في الشكل ادناه ،إذا كان طول قطر المستطيل 10 سم ، فما أبعاده ؟  أ) $6 \ , \ 8$ ب) $5 \ , \ 5\sqrt{3}$ ج) $3 \ , \ 4$ د) $10 \ , \ 10\sqrt{3}$	طول الضلع المقابل للزاوية $30° = \frac{1}{2} \times 10 = 5$ احدى زوايا المستطيل $= 90$ ∴الزاويه المقابله للطول $= 60$ طول الضلع المقابل للزاوية $60° = = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 10 = 5\sqrt{3}$

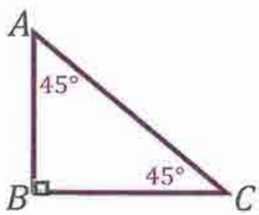
المثلث المتطابق الضلعين



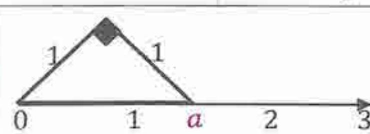
- هو مثلث فيه زوايا القاعدة متطابقة $m\angle B = m\angle C$
- يتساوى فيه طولا الضلعان المناظران لهما $|AB| = |AC|$
- المستقيم $\overline{AM}$ ينصف الزاوية A و ينصف القاعدة وعمودي عليها

مثال	الحل
1) ماقياس كل من الزاويتان المجهولتان :  أ) 46 ب) 65 ج) 67 د) 75	زوايا القاعده متطابقه ، نطرح الزاويه المعلومه من 180 $2x = 180 - 46$ $2x = 134$ $x = 67°$
2) في الشكل أدناه ما قيمة x؟  أ) 100 ب) 110 3) ج) 120 د) 130	مثلث متطابق الضلعين زوايا القاعدة متطابقه بالتقابل بالرأس الزاويتان متساويتان في القياس نظرية الزاوية الخارجية $= 60 + 50 = 110$ بالتناظر والتوازي $x = 110$ 

المثلث القائم الزاوية المتطابق الضلعين



- هو مثلث قائم الزاوية قياس إحدى زواياه $45°$ وقياس الثانية $45°$
- يتساوى فيه طولا ضلعي القائمة $|AB| = |BC|$
- طول الوتر = طول ضلع القائمة $\times \sqrt{2}$
- طول أحد ضلعي القائمة = $\frac{\text{طول الوتر}}{\sqrt{2}}$ = نصف طول الوتر $\times \sqrt{2}$

مثال	الحل
في الشكل أدناه ما قيمة a؟ أ) 1.5 ب) $\sqrt{2}$ ج) $\sqrt{3}$ د) 2.5 	المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين طول الوتر = طول الضلع $\times \sqrt{2}$ $= 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

8) تشابه المثلثات :

حالات التشابه :

1) يتشابه مثلثان إذا تساوت زاويتان من المثلث الأول مع زاويتين في المثلث الثاني .
2) يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما
3) يتشابه مثلثان إذا تساوى قياس زاوية من مثلث وقياس زاوية من مثلث آخر و تناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويهما هاتين الزاويتين فإن المثلثين يتشابهان .

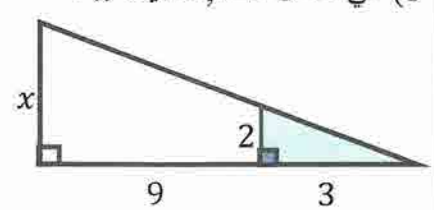
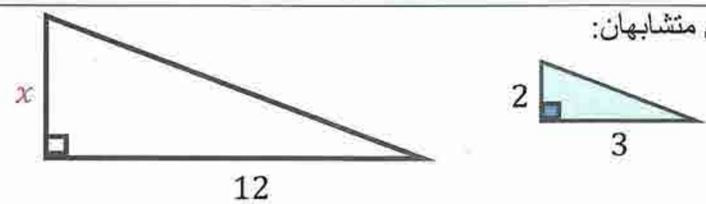
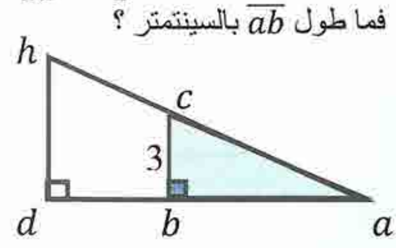
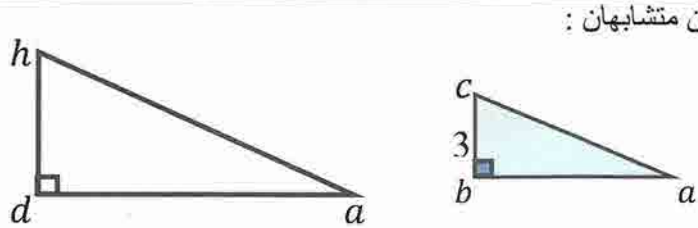
نظرية :

1) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما .
2) النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين تساوي النسبه بين طولي اي ضلعين متناظرين فيهما .

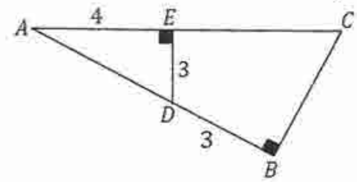
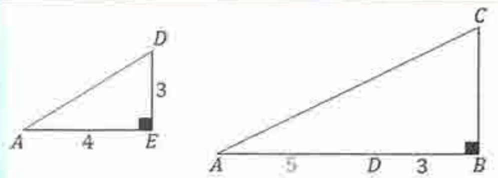
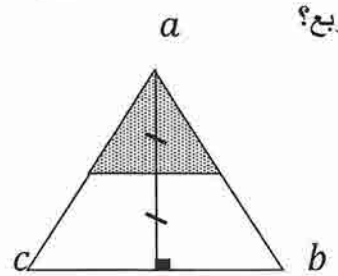
التناسب يعني : $\dfrac{\text{أحد أضلاع المثلث الصغير}}{\text{الضلع المناظر في المثلث الكبير}} = \dfrac{\text{ضلع أخر في المثلث الصغير}}{\text{الضلع المناظر في المثلث الكبير}}$

ملاحظة : للتناسب أشكال اخرى ولكن يجب مراعاة الترتيب

تمارين

مثال	الحل
1) في الشكل ادناه , ما قيمة x ؟ 	المثلثان متشابهان:  $\frac{x}{2} = \frac{12}{3} \Longrightarrow x = \frac{24}{3} = 8$
2) في الشكل أناه , إذا كان $\frac{dh}{ad} = \frac{1}{2}$, فما طول $\overline{ab}$ بالسينتمتر ؟ 	المثلثان متشابهان :  $\frac{dh}{ad} = \frac{bc}{ab}$ $\frac{1}{2} = \frac{3}{ab} \Rightarrow ab = 2 \times 3 = 6$

تمارين

مثال	الحل
3) أوجد طول $\overline{BC}$ ؟ 	المثلثان متشابهان :  $\overline{AD} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ $\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$ $\frac{\overline{BC}}{3} = \frac{8}{4} \Longrightarrow \quad 4\overline{BC} = 3 \times 8 \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = \frac{28}{4} = 6$
4) في الشكل أدناه abc مثلث متطابق الضلعين $ab=ac$ إذا كانت مساحة المثلث المظلل $8cm^2$ فما مساحة المثلث abc بالسنتيمتر المربع؟  أ) 40 ب) 32 ج) 24 د) 16	المثلثان متشابهان : النسبة بين مساحتيهما تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\text{مساحة المثلث الصغير}}{\text{مساحة المثلث الكبير}}$ $\frac{1}{4} = \frac{8}{x} \quad \Longrightarrow \quad x = 4 \times 8 = 32\ cm^2$

9) تطابق المثلثات :

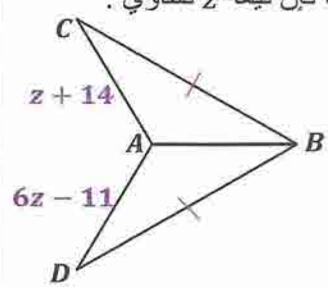
- اذا كان لدينا مثلثان لهما نفس القياس والشكل فإن المثلثان متطابقان ، ويرمز للتطابق بالرمز $\cong$.
- إذا كان $\Delta RMN \cong \Delta ABC$ ، فإن حسب ترتيبها عند التسمية :

الزوايا المتناظرة والمتطابقه	$\angle A \cong \angle R$, $\angle B \cong \angle M$, $\angle C \cong \angle N$
الأضلاع المتناظرة المتطابقة	$\overline{AB} \cong \overline{RM}$, $\overline{BC} \cong \overline{MN}$, $\overline{AC} \cong \overline{RN}$

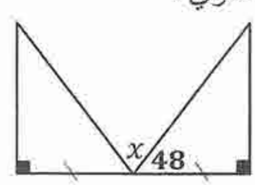
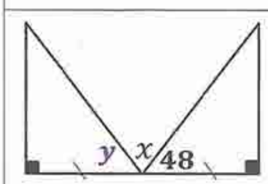
• حالات تطابق المثلثات :

الحاله الأولى (SSS) : إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المتناظرة لها في مثلث آخر .

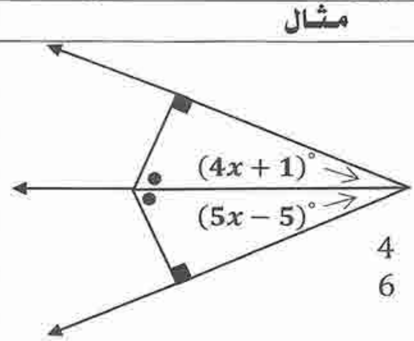
الحاله الثانية (SAS) : إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر .

مثال	الحل
اذا كان AB ينصف الزاوية B ، فإن قيمة z تساوي :  أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6	الضلع AB ضلع مشترك المثلثان متطابقان بضلعان والزاوية المحصورة بينهما $6z - 11 = z + 14$ $6z - z = 11 + 14$ $5z = 25$ $z = 5$

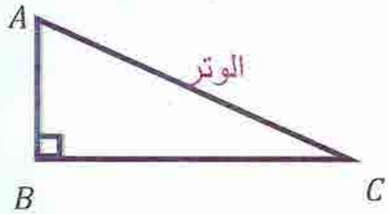
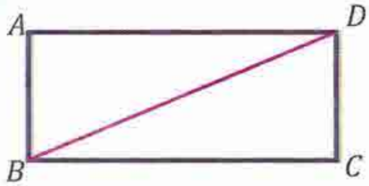
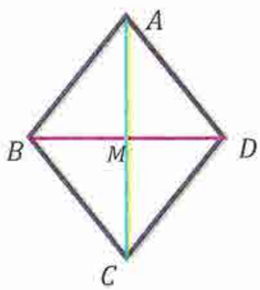
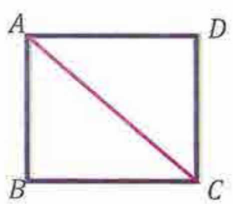
الحاله الثالثة (ASA) : إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر .

مثال	الحل
المثلثان متطابقان إذا كان قياس x تساوي ؟  أ) 42 ب) 48 ج) 84 د) 96	نفرض أن المثلثان متطابقان بحالة زاويتين وضلع فيكون قياس الزاوية $y = 48$  $x = 180 - (48 + 48) = 180 - 96 = 84$

الحاله الرابعه (AAS) : إذا طابقت زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث مع نظائرها في مثلث آخر .

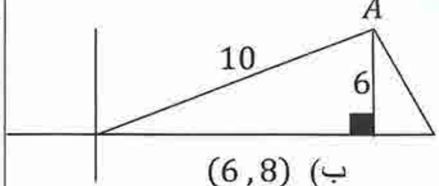
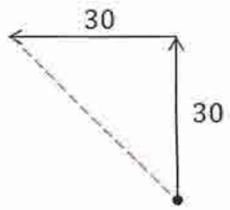
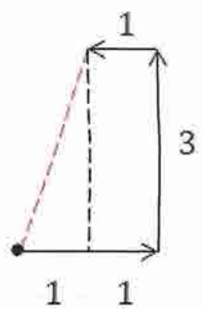
مثال	الحل
قيمة x تساوي :  أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6	المثلثان متطابقان بزاويتان وضلع مشترك غير محصور بينهما ينتج $5x - 5 = 4x + 1$ $5x - 4x = 5 + 1$ $x = 6$

10) نظرية فيثاغورث :

1) مربع طول الوتر = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$	
2) مربع طول قطر المستطيل = مجموع مربعي بعداه $|BC|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$	
3) مربع طول ضلع المعين = مربع نصف طول القطر الأول + مربع نصف طول القطر الثاني $|AM|^2 + |MD|^2 = |AD|^2$	
4) مربع طول قطر المربع = 2 × مربع طول ضلعه $|AD|^2 + |CD|^2 = |AC|^2$	

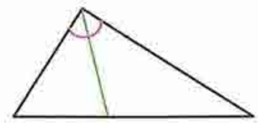
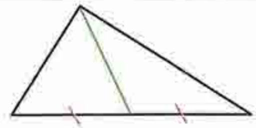
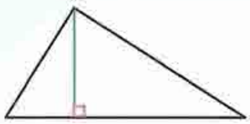
- **أطوال أضلاع بعض المثلثات القائمة المشهورة :**

3 , 4 , 5 ومضاعفاتها	5 , 12 , 13
6 , 8 , 10	7 , 24 , 25
9 , 12 , 15	8 , 15 , 17

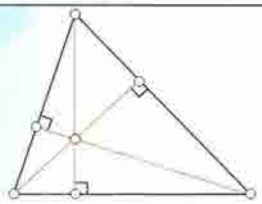
الحل	مثال
حسب نظرية فيثاغورث للمثلثات القائمة طول الضلع الثالث في المثلث القائم الزاوية $= 8$ بالتالي النقطة A تقابل محور x عند 8 ومحور y عند 6 . إحداثيات النقطة A هي $(8,6)$	1) في الشكل أدناه ، ما إحداثيات النقطة $\boldsymbol{A}$ ؟  أ) $(8,6)$ ب) $(6,8)$ ج) $(6,10)$ د) $(10,6)$
ينتج لنا مثلث متطابق الضلعين:  طول الوتر = طول ضلع$\times\sqrt{2}$ $= \sqrt{2} \times 30$ $= 30\sqrt{2}$ أو باستخدام فيثاغورث: الوتر $= \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{2 \times 30^2}$ $= 30\sqrt{2}$	2) يعمل نواف في مصنع يبعد عن منزله مسافة 30km في اتجاه الشمال، إذا نقل المصنع لمسافة 30km غرب موقعه الحالي، فكم ستكون المسافة بالكيلو متر من المصنع في موقعه الجديد ومنزل نواف؟ أ) $42\sqrt{2}$ ب) 42 ج) $30\sqrt{2}$ د) 30
باستخدام نظرية فيثاغورث $m = \sqrt{3^2 + 1^2}$ $= \sqrt{9+1}$ $= \sqrt{10}$ 	3) تحرك هادي كيلو مترين باتجاه الشرق، ثم سار شمالاً ثلاثة كيلومترات، ثم انعطف غرباً ومشى كيلو متراً واحداً، ما المسافة بين نقطة البداية وموضعه الحالي بالكيلومترات؟ أ) 4 ب) 10 ج) $\sqrt{4}$ د) $\sqrt{10}$

11) العلاقات في المثلث :

(مفاهيم) قطع مستقيمه في المثلث :

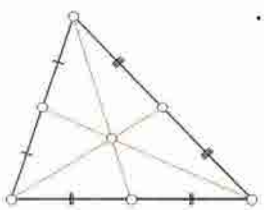
منصف الزاويه	القطعه المتوسطة	الارتفاع
		

ارتفاعات المثلث



- **ارتفاع المثلث :** هو قطعة مستقيمة من أحد رؤوس المثلث إلى المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل ، وتكون عمودية عليه .
- ارتفاعات المثلث تلتقي جميعاً في نقطة واحدة تسمى نقطة التقاء المرتفعات .

متوسطات المثلث

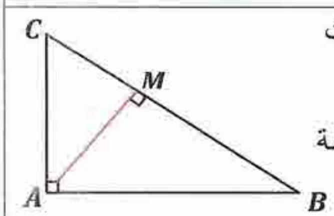


- **متوسط المثلث :** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي رأس الى منتصف الضلع المقابل له .
- متوسطات المثلث تلتقي جميعاً في نقطة واحدة تسمى نقطة التقاء المتوسطات .
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة 2 : 1 من جهة القاعده .

المسافه من نقطة التقاطع الى ضلع المثلث $= \frac{1}{3} \times$ **طول القطعه المتوسطة**

المسافه من نقطة التقاطع الى رأس المثلث $= \frac{2}{3} \times$ **طول القطعه المتوسطة**

نظرية إقليدس للمثلث القائم الزاوية



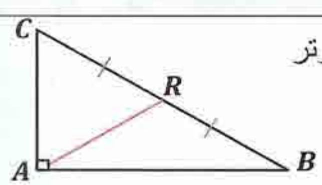
إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في A والضلع AM هو الارتفاع العمودي لهذا المثلث

$$(AM)^2 = BM \times CM$$

- حاصل ضرب الارتفاع العمودي في الوتر يساوي حاصل ضرب ضلعي الزاوية القائمة

$$AM \times CB = AC \times AB$$

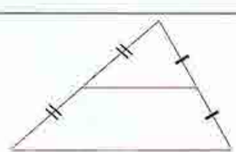
من خواص المثلث قائم الزاوية



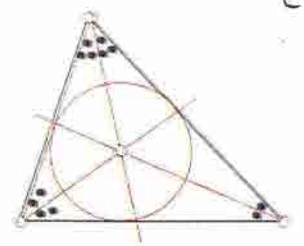
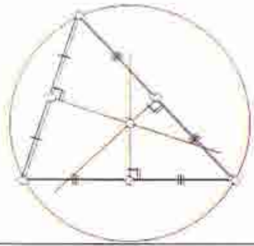
القطعه المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف الوتر

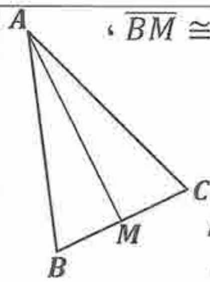
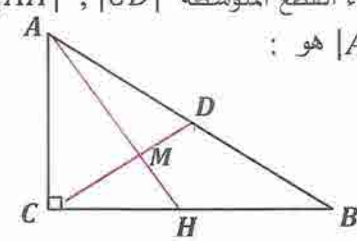
$$AR = \frac{1}{2}\, CB$$

القطعة المنصفه لضلعي مثلث



القطعة الواصله بين منصفي ضلعين في مثلث ، توازي الضلع الثالث

الدائرة الداخلية للمثلث	الدائرة الخارجية للمثلث
مركز الدائرة : نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلية للمثلث ، وتبعد البعد نفسه عن أضلاع المثلث . **نصف قطر الدائرة :** المسافة من نقطة التقاطع إلى أي ضلع من أضلاع المثلث 	**مركز الدائرة :** نقطة تقاطع الأعمدة المنصفة لأضلاعه ، وتبعد البعد نفسه عن رؤوس المثلث . **نصف قطر الدائرة :** المسافة من نقطة التقاطع إلى أي رأس من رؤوس المثلث 

مثال	الحل
1) في الشكل المجاور ، إذا كان $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ ، فأي عبارة مما يأتي صحيحة ؟  أ) $\overline{AM}$ ارتفاع $\Delta\, ABC$. ب) $\overline{AM}$ منصف الزاوية في $\Delta\, ABC$ ج) $\overline{AM}$ قطعة متوسطة في $\Delta\, ABC$ د) $\overline{AM}$ عمود منصف في $\Delta\, ABC$	$\overline{AM}$ قطعة متوسطة في $\Delta\, ABC$ لانه قطعة مستقيمة واصله من رأس في المثلث الى منتصف الضلع المقابل له
2) المثلث ABC قائم الزاوية في C فإذا كانت M نقطة التقاء القطع المتوسطة $\|CD\|$, $\|AH\|$ فإن طول $\|AB\|$ هو :  أ) $2\|DM\|$ ب) $3\|DM\|$ ج) $5\|DM\|$ د) $6\|DM\|$	CD قطعة متوسطة بين رأس الزاوية القائمة والوتر AB يحقق خاصيتين: من تعريف المثلث القائم $\|CD\| = \frac{1}{2} \times \|AB\|$ من تعريف القطع المتوسطة $\|DM\| = \frac{1}{3} \times \|CD\|$ بالتعويض $\|DM\| = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \|AB\|$ $\|DM\| = \frac{1}{6} \times \|AB\|$ $\|AB\| = 6\|DM\|$

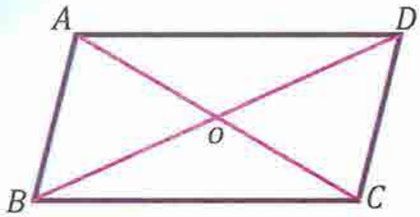
12) الأشكال الرباعية :

الأشكال الرباعيّة : عبارة عن أشكال هندسيّة، لها أربعة أضلاع، وأربع زوايا، وأربعة رؤوس، ويوجد في كل شكل رباعي قطران .

تنقسم الى قسمين أساسيين : متوازي أضلاع – شبه منحرف

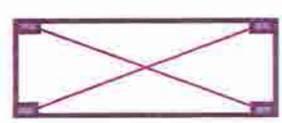
متوازي الأضلاع

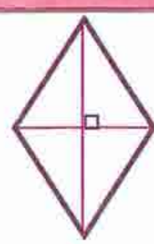
- تعريفه ← **هو شكل رباعي أضلاعه المتقابلة متوازية** $\overline{AB} \parallel \overline{CD}\ ,\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
- أضلاعه ← **أضلاعه المتقابلة متطابقة**
- زواياه ← **زواياه المتقابلة متطابقة**
- قطراه ← **القطران ينصف كل منهما الآخر**



الحالات الخاصة لمتوازي الأضلاع

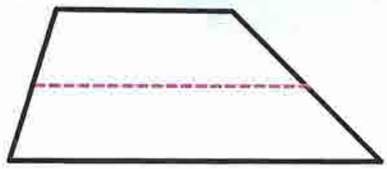
- **المستطيل** ← **هو متوازي أضلاع زواياه قائمة** أو **هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان**
- **المعين** ← **هو متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة** أو **هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان**
- **المربع** ← **هو متوازي أضلاع أضلاعه متطابقة وزواياه قائمة** أو **هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتطابقان**



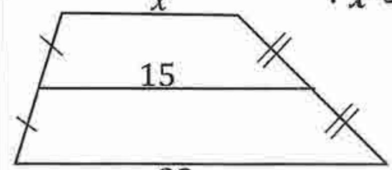


أضلاعه: المتقابلة فقط متطابقة	أضلاعه: متطابقة	أضلاعه: متطابقة
زواياه : قائمة قياس كل منها $90°$	زواياه : المتقابلة متطابقة	زواياه : قائمة قياس كل منها $90°$
قطراه : ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان	قطراه : ينصف كل منهما الآخر ومتعامدان	قطراه : ينصف كل منهما الآخر ومتعامدان ومتطابقان

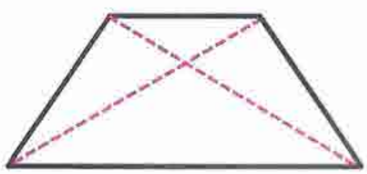
شبه المنحرف



- هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان .
- يسمى الضلعان المتوازيان قاعدتا شبه المنحرف
- يسمى الضلعان الغير متوازيان ساقان
- القاعدة المتوسطة = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين .

مثال	الحل
في الشكل ادناه ، ماقيمة x ؟  أ) 6 ب) 7 ج) 8 د) 9	القاعدة المتوسطة = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين $\frac{x+23}{2}=15$ $x+23=30$ $x=30-23=7$

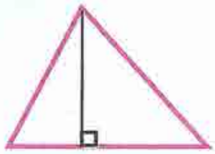
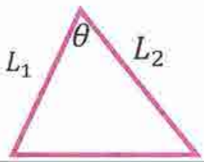
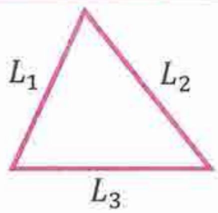
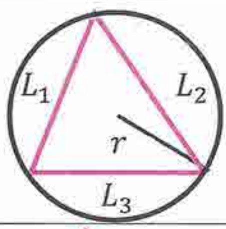
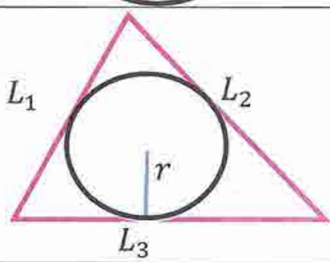
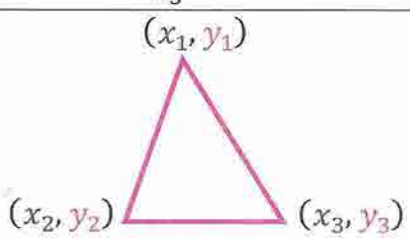
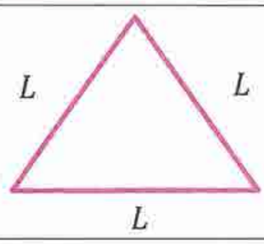
شبه المنحرف المتطابق الساقين

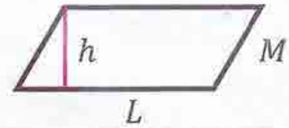
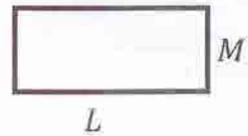
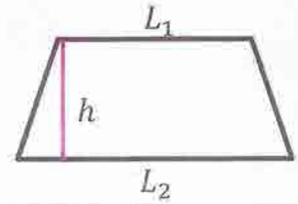
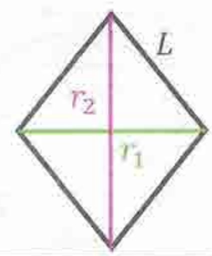


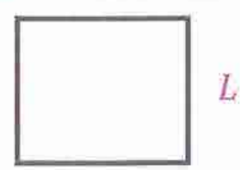
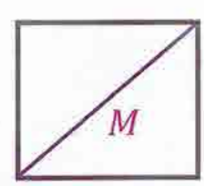
- الساقان متطابقان
- الاقطار متطابقة .
- زاويتا القاعدة متطابقة .

مثال	الحل
1) أي شكل مما يأتي يمكن أن يكون مثالاً مضاداً للاستنتاج الأتي:" اذا تطابقت أضلاع الشكل الرباعي فإنه مربع"؟ أ) المستطيل ب) متوازي الاضلاع ج) المعين د) شبه المنحرف	المقصود بالمثال المضاد يحقق الفرض ولا يحقق النتيجة اذا تطابقت أضلاع الشكل الرباعي فإنه ليس مربع • المعين: جميع اضلاعه متطابقة وهو ليس مربع • المستطيل ومتوازي الاضلاع: كل ضلعين متقابلين متطابقان • شبه منحرف: له ضلعان متوازيان
2) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالاً مضاداً للتخمين الأتي: إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل؟ أ) المربع ب) متوازي الاضلاع ج) المعين د) شبه المنحرف المتطابق الساقين	المقصود بالمثال المضاد يحقق الفرض ولا يحقق النتيجة اذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه ليس مستطيل • المربع: قطراه متطابقين وهو مستطيل • المعين ومتوازي الاضلاع: قطراه ليس متطابقان • شبه المنحرف متطابق الساقين: قطراه متطابقين ولكنه ليس مستطيل

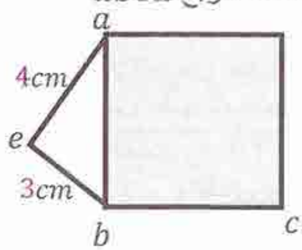
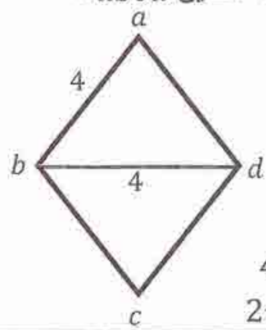
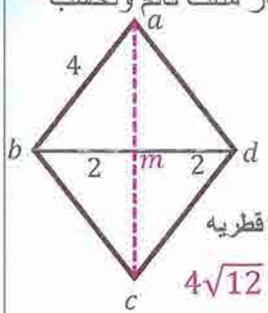
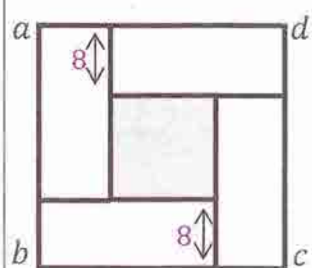
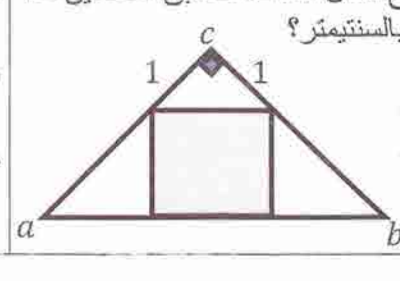
13) مساحات المضلعات :

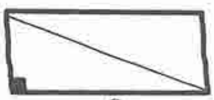
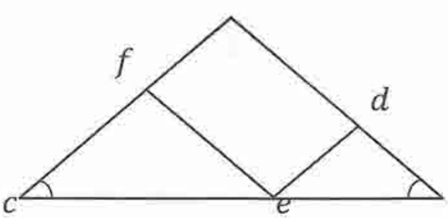
مساحة المثلث	الشكل
$\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع	
$A = \frac{1}{2} L_1 \times L_2 \times \sin\theta$	
$S = \frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}$ $A = \sqrt{S\ (S - L_1)\,(S - L_2)\,(S - L_3)}$	
$A = \frac{L_1 \times L_2 \times L_3}{4r}$	
$A = \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{2}\right) \times r$	
إحداثيات رؤوسه $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ $A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$	
مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه L $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ L^2$	

الشكل	المحيط	المساحه
متوازي الأضلاع 	$2L + 2M$	المساحه = طول القاعدة × الارتفاع $A = L \times h$
المستطيل 	$2L + 2M$	المساحة = الطول × العرض $A = L \times M$
شبه المنحرف 	مجموع أطوال أضلاعه	المساحة = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع $A = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right) \times h$
المعين 	المحيط $= 4L$	مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه $A = \frac{1}{2} \times r_1 \times r_2$

الشكل	المحيط	المساحه
المربع بمعلومية طول ضلعه L 	المحيط $= 4L$	المساحة $= L^2$ المساحة = مربع طول ضلعه
المربع بمعلومية طول قطره M 	المحيط $= 2M\sqrt{2}$	المساحة $= \frac{1}{2}M^2$ المساحة = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره

تمارين

مثال	الحل
1) في الشكل أدناه، ما مساحة المربع $abcd$ بالسنتيمتر المربع؟  أ) 5 ب) 7 ج) 25 د) 49	في Δabe القائم الزاوية في e (نحسب طول الوتر ab) $\lvert ab\rvert=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$ من المثلثات القائمة المشهوره (3 , 4 , 5) طول ضلع المربع = 5 مساحة المربع = مربع طول ضلعه = $5^2=25$
2) الشكل المقابل ، ما مساحة المعين $abcd$ ؟  أ) $8\sqrt{5}$ ب) $4\sqrt{5}$ ج) $4\sqrt{12}$ د) $2\sqrt{12}$	نصل القطر الثاني ونعين طوله (نختار مثلث قائم ونحسب طول ضلعه المجهول)  $am=\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{12}$ $ac=2\sqrt{12}$ مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه $4\times2\sqrt{12}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{12}$
3) في الشكل المقابل المربع $abcd$ طول ضلعه 28 ما مساحة المربع المظلل ؟  أ) 100 ب) 121 ج) 144 د) 400	طول ضلع المربع المظلل $=28-(8+8)$ $=28-16$ $=12$ مساحة المربع المظلل $=12\times12=144$
4) مثلث احداثيات رؤوسه $(0,0)(-2,8)(4,12)$ فإن مساحته تساوي : أ) 8 ب) 18 ج) 28 د) 38	$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4&12&1&4&12\\-2&8&1&-2&8\\0&0&1&0&0\end{vmatrix}$ بإستخدام طريقة كرامر $A=\frac{1}{2}\lvert(32+0+0)-(0+0-24)\rvert$ $=\frac{1}{2}\lvert56\rvert=28$
5) إذا تم رسم مربع داخل المثلث متطابق الضلعين فما مساحة المربع بالسنتيمتر؟  أ) 1 ب) $\sqrt{2}$ ج) 2 د) $\sqrt{3}$	طول ضلع المربع= طول وتر المثلث القائم طول الوتر $=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ مساحة المربع $=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

مثال	الحل
6) ما أكبر مساحة بالسنتيمتر المربع لمستطيل محيطه 24 سم ؟ أ) 24 ب) 30 ج) 36 د) 42	محيط المستطيل= 2 × (الطول + العرض) الطول + العرض = $\frac{\text{المحيط}}{2} = \frac{24}{2} = 12$ نوجد عددين مجموعهما = 12 ثم نضربهما لنجد أكبر مساحة المساحه = الطول × العرض = 6 × 6 = 36 ∴ اكبر مساحة نحصل عليها للمستطيل عندما يكون مربع
7) مثلث قائم الزاوية اطوال اضلاعه 6, 8, 10 مساحة المستطيل تساوي ضعف مساحة المثلث حيث طول أحد أضلاع المستطيل 6 cm ، فإن محيط المستطيل يساوي : أ) 25 ب) 27 ج) 28 د) 30	من المثلثات القائمة المشهورة 3 , 8 , 10 محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض) $(8+6) \times 2 =$ $(14) \times 2 =$ $28 =$ 
8) نسبة طول المستطيل إلى عرضه هي 5 : 12 ، إذا كانت مساحة المستطيل $240\ cm^2$ ، فكم طول قطر المستطيل بالسنتيمتر ؟ أ) 26 ب) 28 ج) 30 د) 32	المستطيل عباره عن مثلثين قائمي الزاوية ومن المثلثات القائمة المشهورة 13 , 12 , 5 العرض : الطول : القطر 13 : 12 : 5 نضاعف النسبه 10 : 24 : 26 مساحة المستطيل = 10 × 24 = 240 ∴ قطر المستطيل = 26 
9) في الشكل أدناه abc مثلث متطابق الضلعين ، إذا كان $ab = ac = 18\ cm$، فما محيط متوازي الاضلاع $adef$ ؟  أ) 32 ب) 34 ج) 36 د) 38	**بما أن abc مثلث متطابق الضلعين ، فإن $\angle b = \angle c$** **في المثلث الصغير** بالتوازي والتناظر $\angle a = \angle d$ فينتج أن $\angle c = \angle e$ ∴ $\angle b = \angle e$ زوايا القاعده متطابقه ، المثلث متطابق الضلعين $db = de$ **في المثلث الكبير** بالتوازي والتناظر $\angle a = \angle f$ فينتج أن $\angle b = \angle e$ ∴ $\angle c = \angle e$ زوايا القاعده متطابقه ، المثلث متطابق الضلعين $fc = fe$ $ab = ad + db$, $ac = af + fc$ $18 = ad + de$, $18 = af + fe$ **محيط متوازي الاضلاع** $ad + de + af + fe = 36$
10) إذا كان الشكل ادناه يمثل مساحة غرفة, فكم متر مربع نحتاج لفرشها بالسجاد :  أ) 30 ب) 45 ج) 54 د) 60	مساحة شبة المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع القاعدتين ×الارتفاع) $\frac{4 \times (6+9)}{2} = \frac{60}{2} = 30$

14) الدائرة :

تعريف الدائرة :

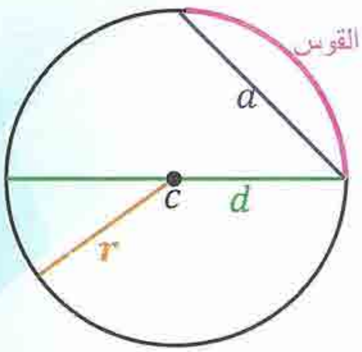
هي المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد بعد ثابت عن نقطة معينة , هذه النقطة تدعى مركز الدائرة c

نصف القطر : هو بعد مركز الدائرة عن أي نقطة تقع على الدائرة . r

الوتر : هو قطعة تصل بين نقطتين على الدائرة . a

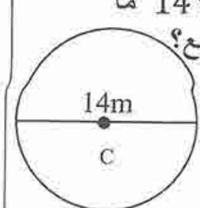
القطر: هو وتر يمر بمركز الدائرة d

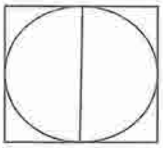
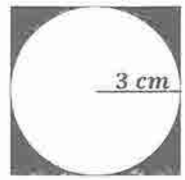
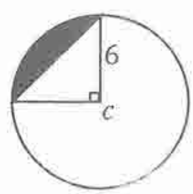
القوس : هو جزء من محيط الدائرة



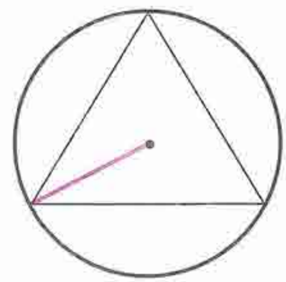
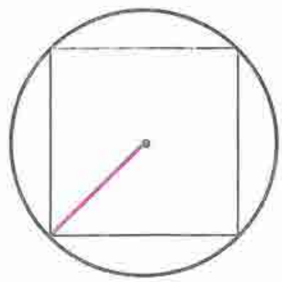
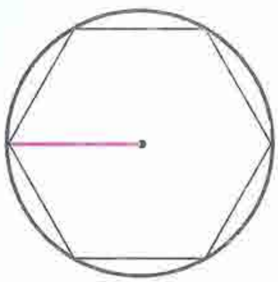
دائرة طول نصف قطرها r

محيط الدائرة	مساحة الدائرة
$2\pi r$	πr^2

مثال	الحل
1) في الشكل أدناه C دائرة قطرها $14\,m$ ما المساحة التقريبية للدائرة بالمتر المربع؟  أ) 44 ب) 88 ج) 154 د) 308	القطر = 14 $\Longleftarrow$ نصف القطر = 7 مساحة الدائرة $= \pi r^2 = \pi(7)^2$ $= \frac{22}{7} \times 7^2 = 22 \times 7 = 154$
2) محيط دائرة $44cm$ ، ما مساحتها التقريبية بالسنتيمتر المربع ؟ $(\pi = \frac{22}{7})$ أ) $\frac{154}{7}$ ب) $\frac{98}{7}$ ج) 154 د) 49	• محيط الدائرة $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$ $\frac{44}{7} r = 44 \Longrightarrow r = 44 \times \frac{7}{44} \Longrightarrow r = 7$ مساحة الدائرة $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times 7^2 = 22 \times 7 = 154$
3) إذا كانت القيمة العددية لمساحة دائرة 5 أضعاف القيمة العددية لمحيطها ، فإن نصف قطر الدائرة يساوي : أ) 5 ب) 10 ج) 15 د) 20	القيمة العددية لمساحة الدائرة = 5 اضعاف محيطها $\Longrightarrow \pi r^2 = 5 \times 2\pi r$ $r^2 = 10r$ $r = 10$

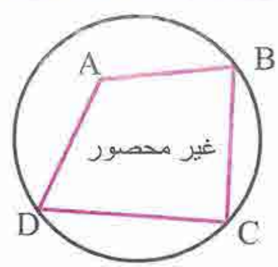
مثال	الحل
4) اذا كان ضلع المربع يساوي قطر الدائرة وكانت مساحة الدائرة تساوي 16π فكم مساحة المربع ؟ أ) 42 ب) 62 ج) 64 د) 76	مساحة الدائرة $16\pi = \pi r^2$ طول نصف قطر الدائرة $4 = r$ طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة = 8 مساحة المربع $8 \times 8 = 64$ 
5) في الشكل أدناه ، نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى مساحة الدائرة التي مركزها C تساوي :  أ) $\frac{4}{\pi} - 1$ ب) $1 - \frac{4}{\pi}$ ج) $4 - \frac{1}{\pi}$ د) $\frac{1}{\pi} - 4$	نص القطر= 3 ، القطر= ضلع المربع = 6 • مساحة المربع= $6 \times 6 = 36$ • مساحة الدائرة = $\pi r^2 = 9\pi$ • مساحة المنطقة المظلله= مساحة المربع – مساحة الدائرة $\Longrightarrow 36 - 9\pi$ • نسبة مساحة المنطقة المظلله الى مساحة الدائرة $\Longrightarrow \frac{36-9\pi}{9\pi} = \frac{9(4-\pi)}{9\pi} = \frac{4-\pi}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1$
6) دائرة نصف قطرها $100cm$ رسم 20 دائرة صغيرة على قطرها ، اوجد نسبة المساحة بين احدى هذه الدوائر الصغيرة ومساحة الدائرة الكبيرة : أ) $\frac{1}{200}$ ب) $\frac{1}{400}$ ج) $\frac{1}{100}$ د) $\frac{1}{50}$	قطر الدائرة الكبيرة = 200 قطر الدائرة الصغيرة الواحدة = $\frac{200}{20} = 10$ مساحة الدائرة الكبيرة = $\pi\,(100^2)$ مساحة الدائرة الصغيرة = $\pi\,(5^2)$ $\frac{\text{مساحة الصغيره}}{\text{مساحة الكبيرة}} = \frac{\pi 5^2}{\pi 100^2} = \left(\frac{5}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{20}\right)^2 = \frac{1}{400}$
7) في الشكل أدناه ، دائرة مركزها C، ما مساحة الجزء المظلل؟  أ) $9\pi - 18$ ب) $9\pi - 36$ ج) $36\pi - 18$ د) $36\pi - 36$	• مساحة الدائرة = $\pi r^2 = 36\pi$ • مساحة ربع الدائرة = $\frac{36\pi}{4} = 9\pi$ • مساحة المثلث = $6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$ مساحة المنطقة المظلله = مساحة ربع الدائرة – مساحة المثلث $\Longrightarrow 9\pi - 18$
8) مثلث قاعدته تساوي $7cm$ ومساحة المثلث يساوي مساحة دائرة نصف قطرها $7cm$, احسب ارتفاع المثلث : أ) 7π ب) 12π ج) 14π د) 18π	مساحه الدائرة = مساحه المثلث $\frac{1}{2} \times 7 \times h = \pi(7)^2$ $h = 2 \times 7\pi$ $h = 14\pi$
9) ما مساحة اكبر دائرة يمكن رسمها داخل مربع طول ضلعة $8\ cm$ ؟ أ) 12π ب) 14π ج) 16π د) 21π	طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة = 8 نصف قطر الدائرة = 4 مساحة الدائرة= $\pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi$

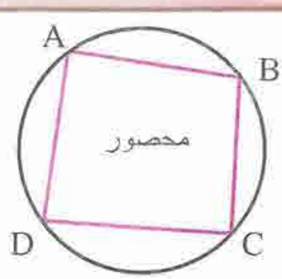
المضلعات المحاطة في دائرة طول نصف قطرها r

المثلث المتطابق الأضلاع	المربع	سداسي منتظم
طول ضلع المثلث $= \sqrt{3}\,r$	طول ضلع المربع $= \sqrt{2}\,r$	طول ضلع السداسي $= r$
		
طول ضلع المثلث المتطابق الأضلاع المحاط بدائرة نصف قطرها **$7\ cm$**	طول ضلع المربع المحاط بدائرة نصف قطرها **$5cm$**	طول ضلع السداسي المنتظم المحاط بدائرة نصف قطرها **10**
$7\sqrt{3} =$	$5\sqrt{2} =$	$10 =$

الشكل الرباعي الدائري :

شكل رباعي محصور داخل دائرة هو شكل رباعي جميع رؤوسه تقع على الدائرة .



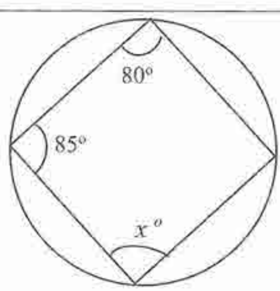


اذا كان شكل رباعي محصور داخل دائرة فان مجموع زاويتين متقابلتين يساوي $180°$

$$m\angle A + m\angle C = 180°$$

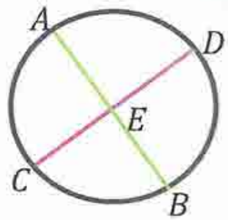
$$m\angle B + m\angle D = 180°$$

مثال : في الشكل أدناه ما قيمة x؟



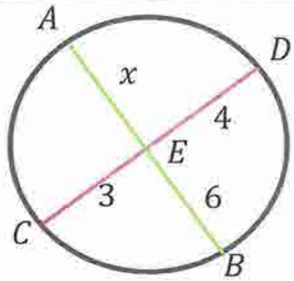
الحل : $x + 80 = 180 \quad \Rightarrow \quad x = 100°$

قطع مستقيمة خاصة في الدائرة :



- إذا تقاطع وتران داخل دائرة فإن حاصل ضرب طولي جُزأي كل وتر متساويان.

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED$$

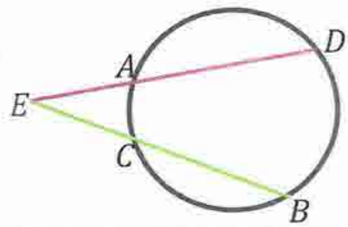


مثال : أوجد قيمة x في الشكل المقابل

أ) **2** ب) **4** ج) **6** د) **7**

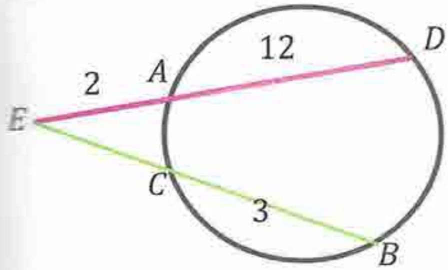
الحل :

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED$$
$$x \cdot 6 = 3 \cdot 4$$
$$x = 2$$



- إذا رُسم قاطعان إلى دائرة من نقطة خارجها فإن حاصل ضرب طول القاطع الأول في طول الجزء الخارجي منه يساوي حاصل ضرب طول القاطع الثاني في طول الجزء الخارجي منه.

$$EA \cdot ED = EC \cdot EB$$



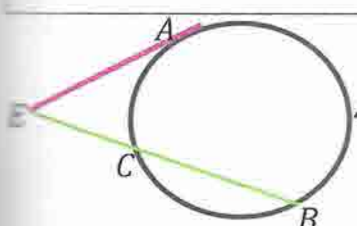
مثال : أوجد قيمة EC في الشكل المقابل

أ) **3** ب) **4** ج) **6** د) **7**

الحل :

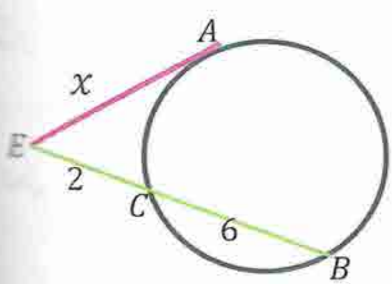
$$EA \cdot ED = EC \cdot EB$$
$$2 \cdot 14 = EC \cdot (3 + EC)$$

بتجربة الخيارات ينتج أن $EC = 4$



- إذا رسم مماس للدائرة وقاطع من نقطة خارج الدائرة فإن مربع طول المماس يساوي حاصل ضرب طول القاطع في طول الجزء الخارجي منه.

$$EA^2 = EC \cdot EB$$



مثال : أوجد قيمة x في الشكل المقابل

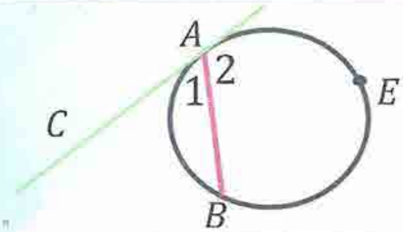
أ) **3** ب) **4** ج) **6** د) **7**

الحل :

$$EA^2 = EC \cdot EB$$
$$x^2 = 2 \cdot (2 + 6)$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4\square$$

القاطع والمماس وقياسات الزوايا

إذا تقاطع قاطع ومماس عند نقطة التماس،
فإن قياس كل زاوية متكوّنة من التقاطع **يساوي نصف** قياس القوس الذي تقابله.

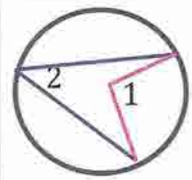


$$m\angle 1 = \frac{1}{2}(m\,\widehat{AB})$$

$$m\angle 2 = \frac{1}{2}(m\,\widehat{AEB})$$

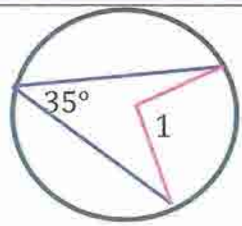
قياس الزاوية المحيطية **يساوي نصف** قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس .

$$m\angle 2 = \frac{1}{2}\, m\angle 1$$

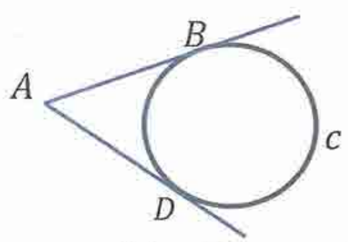
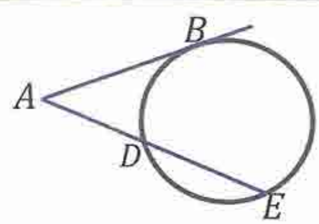
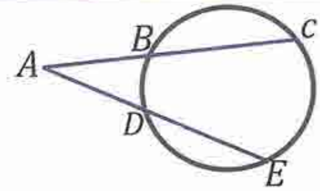
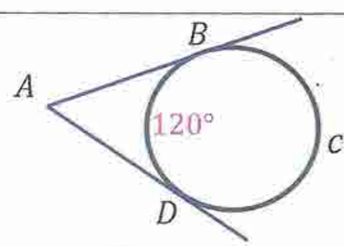
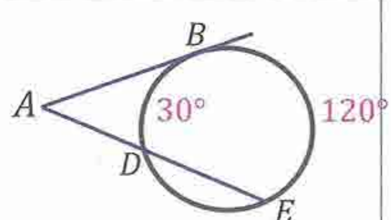
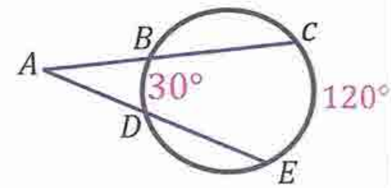


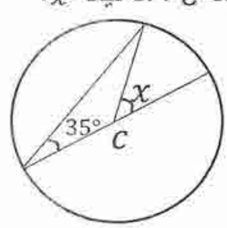
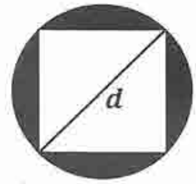
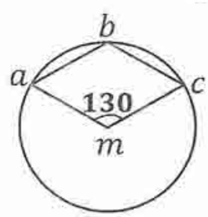
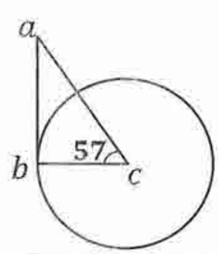
مثال : أوجد قياس الزاوية 1

الحل : $m\angle 1 = 70°$



إذا تقاطع قاطعان أو قاطع ومماس أو مماسان خارج دائرة
فإن قياس الزاوية المتكونة **يساوي نصف** الفرق الموجب بين قياسي القوسين المقابلين لها.

 $m\angle A = \frac{1}{2}(m\,\widehat{BCD} - m\,\widehat{BD})$	 $m\angle A = \frac{1}{2}(m\,\widehat{BE} - m\,\widehat{BD})$	 $m\angle A = \frac{1}{2}(m\,\widehat{EC} - m\,\widehat{BD})$
 $m\angle A = \frac{1}{2}(m\,\widehat{BCD} - m\,\widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(240° - 120°)$ $= 60°$	 $m\angle A = \frac{1}{2}(m\,\widehat{BE} - m\,\widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(120° - 30°)$ $= 45°$	 $m\angle A = \frac{1}{2}(m\,\widehat{EC} - m\,\widehat{BD})$ $m\angle A = \frac{1}{2}(120° - 30°)$ $= 45°$

مثال	الحل
1) مربع محصور داخل دائرة مساحة المربع $100cm$ ، فإن مساحة الدائرة تساوي : أ) π ب) 14π ج) 25π د) 50π	طول ضلع المربع = 10 المربع محصور داخل الدائرة $r\sqrt{2} = 10$ نصف قطر الدائرة $r = \frac{10}{\sqrt{2}}$ ∴ مساحة الدائره $\pi r^2 = \pi\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 = \pi\,\frac{100}{2} = 50\pi$ **<u>مساحة الدائرة</u> = نصف مساحة المربع المحصور داخله × π**
2) في الشكل أدناه ، دائرة مركزها C ، ما قيمة x؟  أ) 75 ب) 70 ج) 65 د) 60	• الزاوية المركزية تساوي ضعف الزاوية المحيطية الزاوية المحيطية = 35 الزاوية المركزية = $70 = 2 \times 35$
3) في الشكل أدناه ، وضع مربع داخل دائرة طول قطرها d ، ما مساحة المنطقة المظللة بدلالة d ؟  أ) $d^2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$ ب) $d^2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4})$ ج) $d^2(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2})$ د) $d^2(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4})$	القطر $= d$, نصف القطر $= \frac{d}{2}$ • مساحة الدائرة $\pi r^2 = \pi\frac{d^2}{4}$ • مساحة المربع = $\frac{\text{قطر المربع في نفسه}}{2} = \frac{d^2}{2}$ • مساحة المنطقة المظلله $\pi\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{2} = d^2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})$
4) في الشكل أدناه ، ما قياس الزاوية $\widehat{abc}$ ؟  أ) 65 ب) 115 ج) 120 د) 130	الزاوية المركزية تساوي قياس القوس المقابل لها = 130 الزاوية المحيطية تساوي نصف قياس القوس المقابل لها قياس القوس المقابل للزاوية المحيطية $360 - 130 = 230$ $\widehat{abc} = \frac{230}{2} = 115$
5) إذا كان المستقيم ab مماس للدائرة C عند النقطة b ، ما قياس الزاوية $\widehat{cab}$ ؟  أ) 23 ب) 33 ج) 43 د) 36	• بما ان المماس يعامد القطر $m\angle b = 90°$ • الزاوية المركزية = 57 $\widehat{cab} = 180 - (90 + 57) = 180 - 147 = 33$

معادلة الدائرة :

الصورة العامة لمعادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

مركزها (h,k) **وطول نصف قطرها** r

مثال : اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(4,-2)$ ، وطول قطرها $d=6$

الحل :

$$(h,k)=(4,-2) \quad , \quad d=6 \to r=3$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-4)^2+(y+2)^2=9$$

إذا كانت معادلة الدائرة $x^2+y^2-2hx-2ky+c=0$

مركزها $(h,k)=\left(\frac{-\text{معامل } x}{2},\frac{-\text{معامل } y}{2}\right)$

وطول نصف قطرها $r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

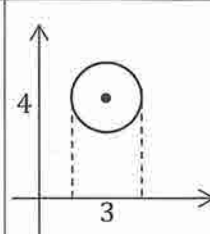
مثال : إذا كانت معادلة الدائرة : $x^2+y^2-6x+8y+2=0$, ماهو مركزها ونصف قطرها ؟

الحل :

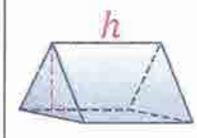
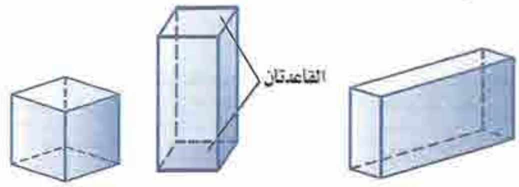
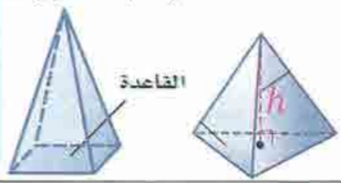
مركزها $(h,k)=\left(\frac{-\text{معامل } x}{2},\frac{-\text{معامل } y}{2}\right)=\left(\frac{-(-6)}{2},\frac{-8}{2}\right)=(3,-4)$

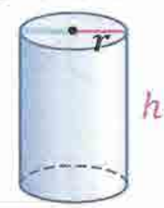
طول نصف قطرها $r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{3^2+(-4)^2-2}=\sqrt{23}$

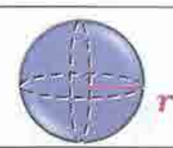
مثال	الحل
1) المعادلة : $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ تمثل معادلة دائرة مركزها : أ) $(-1,5)$ ب) $(1,-5)$ ج) $(5,-1)$ د) $(-5,1)$	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ $(-5,1)$
2) الدائرة التي مركزها $(-2,4)$ و طول نصف قطرها 10 وحدات تكون معادلتها : أ) $(x+2)^2+(y-4)^2=100$ ب) $(x+2)^2+(y-4)^2=10$ ج) $(x-2)^2+(y+4)^2=100$ د) $(x-2)^2+(y+4)^2=20$	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ $(x+2)^2+(y-4)^2=100$
3) المعادلة $(x+5)^2+(y-1)^2=16$ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها : أ) 5 وحدات ب) 8 وحدات ج) 4 وحدات د) 16 وحدات	$r^2=16$ $r=\sqrt{16}=4$

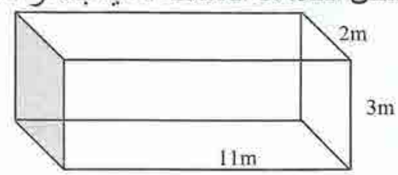
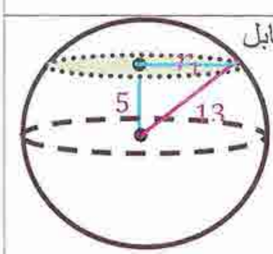
مثـال	الحــل
4) ما قيمة c التي تجعل المعادلة $(2x-1)^2+cy^2-6y=14$ تمثل دائرة ؟ أ) -4 ب) -2 ج) 4 د) 2	في معادلة الدائرة يتساوى كل من معاملي y^2, x^2 معامل x^2 بعد فكك القوس $= 4$ $(2x-1)^2 = 4x^2 - \dots\dots$ $\therefore c = 4$
5) دائرة طرفي قطر فيها هما $(-2,1)$, $(6,7)$ يكون مركزها : أ) $(4,3)$ ب) $(2,4)$ ج) $(4,8)$ د) $(8,6)$	المركز هو منتصف القطعة المستقيمة التي تمثل القطر منتصف قطعة مستقيمة $= \left(\frac{6-2}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$ $= \left(\frac{4}{2}, \frac{8}{2}\right) = (2, 4)$
6) اذا كانت النقطة $(0,4)$ تقع على محيط دائرة ومركزها $(3,0)$ ، فان طول نصف قطر الدائرة : أ) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{7}$ ج) **5** د) **7**	نصف قطر الدائرة = المسافة بين النقطه ومركز الدائرة $= \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}$ $= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
7) مساحة الدائرة التي معادلتها $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-6=0$ تساوي : أ) 3π ب) 6π ج) 12π د) 18π	نضع المعادلة على الصورة القياسية : $x^2+y^2=r^2$ معادلة الدائرة هي : $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=6$ $\xrightarrow{\text{عامل مشترك}} \frac{1}{2}(x^2+y^2)=6$ $\xrightarrow{\text{بضرب الطرفين في 2}} x^2+y^2=12$ $\therefore$ مساحة الدائرة $= \pi r^2 = 12\pi$
8) طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2+8y=9$ يساوي : أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6	المعادلة في الصورة العامة $x^2+y^2+8y-9=0$ $r = \sqrt{\left(\frac{-\text{معامل}\, x}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\text{معامل}\, y}{2}\right)^2 - c}$ $r = \sqrt{0+\left(\frac{8}{2}\right)^2+9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
9) معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات ومركزها $(3,2)$ هي : أ) $x^2+y^2=9$ ب) $x^2+y^2=4$ ج) $(x-3)^2+(y-2)^2=4$ د) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$	فقرة أ و ب مستحيلة لان المركز ليس نقطة الاصل وبما انها تمس محور الصادات فأن البعد من المحور للمركز هو نصف القطر  $r = 3 - 0 = 3$ معادلة الدائرة هي: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(x-3)^2+(y-2)^2=9$
10) معادلة الدائرة هي:  أ) $x^2+y^2-3x-4y=1$ ب) $x^2+y^2+3x-4y=1$ ج) $(x+3)^2+(y+4)^2=1$ د) $(x-3)^2+(y-4)^2=1$	معادلة الدائرة التي مركزها (h,k) هي : $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ومن الرسم $h=3$, $k=4$ $\Longrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2=1$

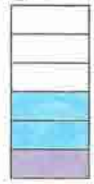
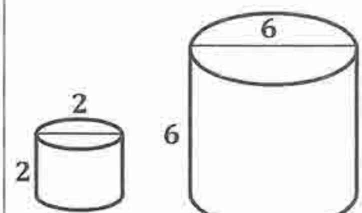
15) الأشكال ثلاثية الأبعاد (المجسمات) :

المجسم	المنشور الثلاثي	المنشور الرباعي	الهرم
الشكل والتعريف	مجسم له قاعدتان مثلثات و3 اوجه مستطيلة أو مربعه 	مجسم له 6 اوجه ، اذا كان : - جميع الاوجه مستطيلات (متوازي مستطيلات) - القاعدتان مربعة، والباقي مستطيلات (شبه مكعب) - جميع الاوجه مربعات (مكعب) 	مجسم له قاعدة واحدة مضلع ، و أوجهه الجانبية مثلثات ، اذا كان : - قاعدته مثلث (هرم ثلاثي) - قاعدته مربعة (هرم رباعي) - قاعدته مخمس (هرم خماسي) 
المساحه الجانبية		محيط القاعدة × الارتفاع	$\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع
المساحه الكليه		المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة
الحجم		مساحة القاعدة × الارتفاع	$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

	الإسطوانة	المخروط
الشكل والتعريف	مجسم له قاعدتان دائريتان متطابقتان ، وسطح منحن يصل القاعدتين معاً 	مجسم له قاعدة دائرية ، وسطح منحن يصل القاعدة بالرأس 
المساحه الجانبية	محيط القاعدة × الارتفاع $2\pi r \times h$	$\frac{1}{2}$ محيط القاعدة ×طول الراسم $\pi r \times h$
المساحه الكليه	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين $2\pi r^2 + 2\pi r \times h$	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $\pi r^2 + \pi r \times h$
الحجم	مساحة القاعدة × الارتفاع $\pi r^2 \times h$	$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع $\frac{1}{3}\pi r^2 \times h$
ملاحظة	- المساحه الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2}$ المساحه الجانبية للأسطوانه - المساحه الكلية للمخروط = $\frac{1}{2}$ المساحه الكلية للأسطوانه - حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانه	

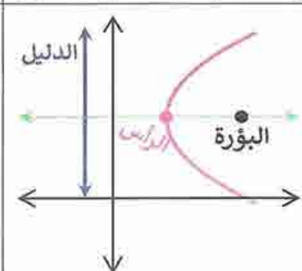
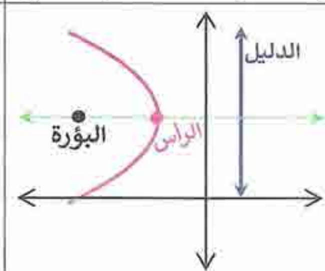
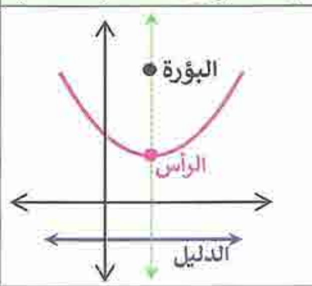
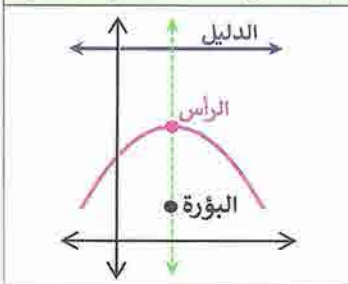
الكرة		المساحه الكليه	$4\pi r^2$
		الحجم	$\frac{4}{3}\pi r^3$

مثال	الحل
1) في الشكل أدناه، ما المساحه الكلية بالمتر المربع؟  أ) 61 ب) 66 ج) 122 د) 166	نلاحظ أن أبعاد متوازي المستطيلات هي 11 , 3 , 2 المساحة الكلية $= 2\,[2 \times 3 + 2 \times 11 + 11 \times 3]$ $= 2[6 + 22 + 33]$ $= 2[61] = 122$
2) ما مساحة سطح الهرم الرباعي المنتظم الذي طول قاعدته 5cm، وارتفاعه الجانبي 10cm بالسنتيمتر مربع؟ أ) 115 ب) 120 ج) 125 د) 130	محيط القاعدة = محيط المربع = 20 مساحة القاعدة = مساحة المربع = 25 المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي $= \frac{1}{2} \times 20 \times 10 = 100$ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة $= 100 + 25$ $= 125$
3) اسطوانة ارتفاعها $10cm$، ومساحتها الجانبية $100\,\pi$ ، ما حجمها بالسنتمترات المكعبة ؟ أ) $300\,\pi$ ب) $250\,\pi$ ج) $200\,\pi$ د) $150\,\pi$	المساحة الجانبية $= 2\pi rh = 100\,\pi$ $100\,\pi = 2\pi r(10)$ $5 = r$ حجم الاسطوانة $= \pi\, r^2 h = \pi \times 5^2 \times 10$ حجم الاسطوانة $= 250\,\pi$
4) إذا كانت أبعاد متوازي مستطيلات أعداداً صحيحة وكانت المساحات السطحية للسطوح هي 6,6,8,8,12,12 فما حجمه؟ أ) 24^2 ب) 12^2 ج) 24 د) 12	$6 = 2 \times 3$ $8 = 2 \times 4$ $12 = 3 \times 4$ تكون أبعاد متوازي المستطيلات هي 4 , 3 , 2 حجم متوازي المستطيلات= $2 \times 3 \times 4 = 24$
5) كرة نصف قطرها 13cm، قطعها مستوٍ يبعد عن المركز بمقدار 5cm، ما محيط الدائرة للمقطع المتكون؟ أ) 12π ب) 24π ج) 26π د) 144π	في المثلث القائم الزاوية في الشكل المقابل  $r_1^{\,2} = 13^2 - 5^2 = 144$ $r_1 = 12$ محيط الدائرة للمقطع المتكون= $2\pi r_1$ $= 24\pi$
6) اسطوانة محيط قاعدتها 31.4 m وارتفاعها 4m مملوءه بالماء وكان بها فتحة تفرغ $1m^3$ في دقيقة , ففي كم دقيقة يتم تفريغها كاملة ؟ أ) $318\,min$ ب) $314\,min$ ج) $3140\,min$ د) $3.14\,min$	محيط القاعدة $= 2\pi r = 31.4$ $31.4 = 2(3.14)r$ $5 = \frac{31.4}{2(3.14)} = r$ حجم الاسطوانة $= \pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 4$ حجم الاسطوانة $= 314$ يتم تفريغ الاسطوانة في $= \frac{314}{1} = 314\,min$

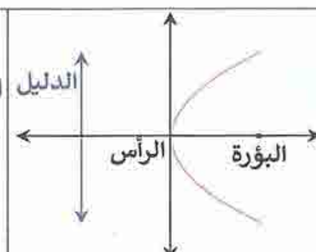
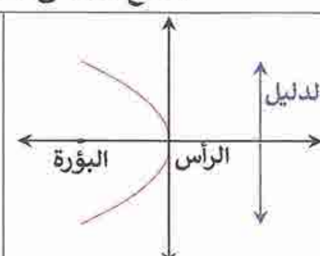
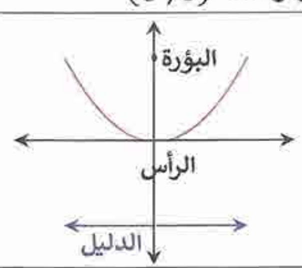
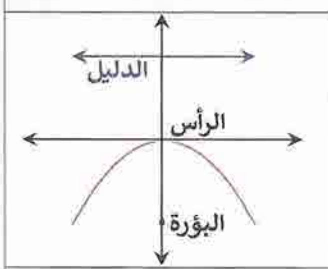
مثال	الحل
7) اسطوانة مملوءة حتى سدسها فإذا اضفنا 6 لترات أصبحت مملوءة حتى النصف ، فكم حجم الأسطوانة ؟ أ) 8 ب) 10 ج) 12 د) 18	• نفرض أن حجم الإسطوانة x  $\frac{1}{6}x + 6l = \frac{1}{2}x \rightarrow 6l = \frac{2}{6}x$ $x = \frac{36}{2} = 18$ • يمكن حلها بالرسم لكل جزء $3l$ حيث الاسطوانة مقسمة الى ستة اجزاء $6 \times 3 = 18$
8) متوازي مستطيلات ابعاده 4,5,8 نريد ان نضع به مكعبات ، طول حرف المكعب الواحد 2cm فكم مكعب يمكن ان نضع ؟ أ) 12 ب) 14 ج) 16 د) 15	يجب ان تكون ابعاد متوازي المستطيلات تقبل القسمة على طول حرف المكعب. • حجم متوازي المستطيلات $8 \times 4 \times 4 = 128$ • حجم المكعب $2 \times 2 \times 2 = 8$ $\frac{128}{8} = 16$
9) في الشكل أدناه ، كم عدد الاسطوانات الصغيره اللازمة لملء الإسطوانة الكبيرة ؟  أ) 3 ب) 9 ج) 18 د) 27	حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع • حجم الأسطوانة الكبيرة $6 \times \pi(3)^2 = 54\pi$ • حجم الأسطوانة الصغيرة $2 \times \pi(1)^2 = 2\pi$ • نحتاج إلى : $\frac{54\pi}{2\pi} = 27$
10) مجموع مساحة أوجه مكعب يساوي $96cm^2$ ، ماطول ضلع المكعب : أ) 3 ب) 4 ج) 7 د) 8	مساحة أوجة المكعب = $6x^2$ $6x^2 = 96$ $x^2 = 16$ $x = 4$
11) صنبور يدفع 500 لتر في الدقيقة ، ما الزمن الذي يستغرقة في ملء خزان على شكل متوازي مستطيلات أبعادها $1m, 2m, 3m$؟ أ) 11 ب) 12 ج) 13 د) 14	حجم الخزان بالمتر= $6m^2 = 3 \times 2 \times 1$ حجم الخزان باللتر = $6000L$ $500 \times t = 6000$ $t = \frac{6000}{5000} = 12$
12) اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها 14 سم وارتفاعها 5 سم مُلأ 90% منها ، احسب حجم المتبقي : أ) 3080 ب) 308 ج) 2772 د) 900	**نسبة ما تبقى** = $100\% - 90\% = 10\%$ **حجم الاسطوانة** = $\pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 14^2 \times 5 = 3080$ **حجم ما تبقى من الاسطوانة** = $\frac{10}{100} \times 3080 = 308$

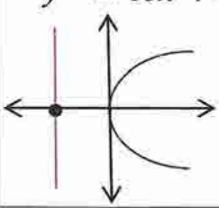
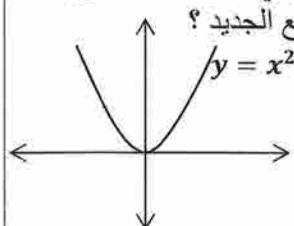
16) القطوع المخروطية :

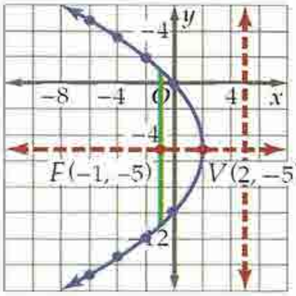
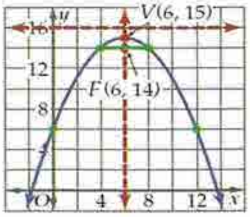
قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد
		

القطع المكافئ الذي رأسه $(h\,,k)$			
الحد التربيعي y في المعادله (أفقي)		الحد التربيعي x في المعادله (رأسي)	
معامل x موجب مفتوح لليمين	معامل x سالب مفتوح لليسار	معامل y موجب مفتوح للاعلى	معامل y سالب مفتوح للأسفل
$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	$(y-k)^2 = -4c(x-h)$	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	$(x-h)^2 = -4c(y-k)$
			
الرأس : $(h\,,k)$	الرأس : $(h\,,k)$	الرأس : $(h\,,k)$	الرأس : $(h\,,k)$
البؤرة : $(h+c\,,k)$	البؤرة : $(h-c\,,k)$	البؤرة : $(h\,,k+c)$	البؤرة : $(h\,,k-c)$
الدليل : $x = h - c$	الدليل : $x = h + c$	الدليل : $y = k - c$	الدليل : $y = k + c$

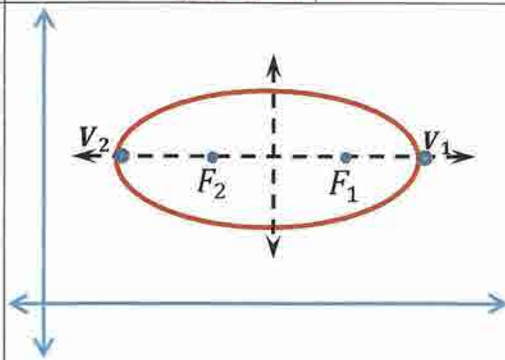
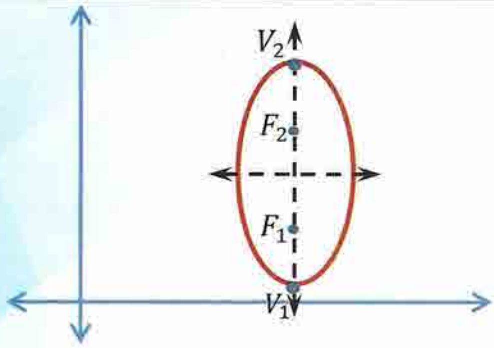
- طول الوتر البؤري العمودي $= |4c|$

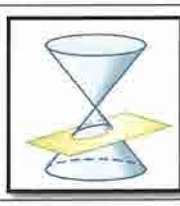
القطع المكافئ الذي رأسه $(0\,,0)$			
			
$y^2 = 4cx$	$y^2 = -4cx$	$x^2 = 4cy$	$x^2 = -4cy$
رأسه : $(0\,,0)$	رأسه : $(0\,,0)$	رأسه : $(0\,,0)$	رأسه : $(0\,,0)$
بؤرته : $(c\,,0)$	بؤرته : $(-c\,,0)$	بؤرته : $(0\,,c)$	بؤرته : $(0\,,-c)$
دليله : $x = -c$	دليله : $x = c$	دليله : $y = -c$	دليله : $y = c$

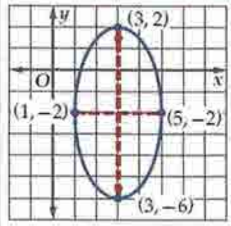
مثال	الحل
1) القطع المكافئ الذي معادلته $(x-4)^2 = 8(y+3)$ يكون رأسه : أ) $(-4\,,3)$ ب) $(4,-3)$ ج) $(-3\,,4)$ د) $(3\,,-4)$	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$ $(x-4)^2 = 8\,(y+3)$ $(h\,,k) = (4,-3)$
2) القطع المكافئ الذي معادلته $(x-4)^2 = 8(y+3)$ تكون بؤرته : أ) $(2,-1)$ ب) $(6,-1)$ ج) $(4\,,-5)$ د) $(4\,,-1)$	$4c = 8 \rightarrow c = 2$ البؤرة $= (h\,,k+c) = (4\,,-3+2)$ $= (4\,,-1)$
3) القطع المكافئ الذي معادلته $(x-4)^2 = 8(y+3)$ يكون دليله : أ) $y = -5$ ب) $y = -1$ ج) $x = -5$ د) $x = -1$	$4c = 8 \rightarrow c = 2$ الدليل $y = k - c = -3 - 2 = -5$ $y = -5$
4) القطع المكافئ الذي معادلته $(x-4)^2 = 8(y+3)$ يكون مفتوح ناحية : أ) اليمين ب) اليسار ج) لأعلى د) لأسفل	لان الحد التربيعي هو x فأن المنحنى مفتوح رأسياً ومعامل y موجب ∴ القطع مفتوح لأعلى
5) القطع المكافئ الذي معادلته $(x-1)^2 = 4(y+2)$ طول وتره البؤري يساوي : أ) وحدتان ب) 4 وحدات ج) 6 وحدات د) 8 وحدات	طول الوتر البؤري العمودي $= \|4c\| = \|4\| = 4$
6) ما معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $x = -2$ والبؤرة $(2,0)$ ؟ أ) $y^2 = 8x$ ب) $x^2 = 8y$ ج) $x^2 = 4y$ د) $y^2 = 4x$	معادلة القطع المكافئ على الصورة : $y^2 = 4cx$ البؤرة: $(2,0) = (c,0)$ دليله: $x = -c = -2$  $y^2 = 2 \times 4x$ $y^2 = 8x$
7) إذا تم عمل انسحاب لقطع مكافئ في الشكل أدناه ليكون رأسه $(-1,2)$ فما معادلة القطع الجديد ؟  أ) $y-1 = (x+2)^2$ ب) $y+1 = (x-2)^2$ ج) $y+2 = (x-1)^2$ د) $y-2 = (x+1)^2$	رأس القطع المكافئ دائما معامل x بعكس الاشارة وايضا معامل y عكس الاشارة $(-1\,,2)$ $1 \quad -2$ $y - 2 = (x+1)^2$
8) مستقيم يقطع بيان القطع المكافئ $y = 2x^2 - 8x + 9$ عند النقطتين $(0\,,a)$ و $(b\,,1)$ ، ما ميل المستقيم ؟ أ) -4 ب) -2 ج) 2 د) 4	نعوض عن $x = 0$ في المعادلة $y = 0 - 0 + 9 = 9 \rightarrow (0,9)$ نعوض عن $y = 1$ في المعادلة $1 = 2x^2 - 8x + 9$ $2x^2 - 8x + 8 = 0$ $x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x-2) = 0$ $x = 2 \rightarrow (2\,,1)$ الميل $= \frac{9-1}{0-2} = \frac{8}{-2} = -4$

مثال	الحل
9) الشكل ادناه يمثل قطع مكافئ ، معادلة دليله هي :  أ) $y = -5$ ب) $y = 5$ ج) $x = -5$ د) $x = 5$	الدليل عمودي على المحور x الموجب $\therefore$ معادلة دليله $x = 5$
10) أي من المعادلات الاتية تعبر عن الشكل المقابل  أ) $(x-6)^2 = -4(y-15)$ ب) $(x+6)^2 = -4(y+15)$ ج) $(x-6)^2 = 4(y-15)$ د) $(y-6)^2 = -4(x-15)$	بما أن القطع رأسي ، فإن الحد التربيعي هو x وبما أنه مفتوح للأسفل ، فإن معامل y سالب
11) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-2,4)$ وبؤرته $(-2,7)$ تكون : أ) $(x+2)^2 = -12(y-4)$ ب) $(x+2)^2 = -12(y+4)$ ج) $(x+2)^2 = 12(y-4)$ د) $(y-4)^2 = 12(x+2)$	بما أن الاحداثي السيني للرأس والبؤرة متساويان فأن القطع المكافئ رأسي، الحد التربيع هو x الرأس$(-2,4) \rightarrow (-2,4+3) = (-2,7)$ الدليل $c = 3$ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ $(x+2)^2 = 12(y-4)$
12) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-2\ ,4)$ ودليله $x = -4$ تكون : أ) $(y+4)^2 = -8(x+2)$ ب) $(y-4)^2 = -8(x+2)$ ج) $(x-2)^2 = -8(y-4)$ د) $(y-4)^2 = 8(x+2)$	بما أن الدليل عمودي على المحور x فهذا قطع مكافئ الحد التربيعي y الدليل $x = h - c = -4$ $-2 - c = -4 \quad \rightarrow c = 2$ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ $(y-4)^2 = 8(x+2)$
13) $x^2 = -9y$ تمثل المعادلة : أ) قطع ناقص طرفا محوره الأصغر $(0,3)(0,-3)$ ب) قطع ناقص بؤرتاه $(0,3)(0,-3)$ ج) قطع مكافئ مفتوح إلى أسفل د) قطع مكافئ مفتوح إلى اليسار	بما أن الحد التربيعي x فقط إذاً هذا قطع مكافئ ومفتوح رأسياً وبما أن معامل y سالب ، فإنه مفتوح للأسفل

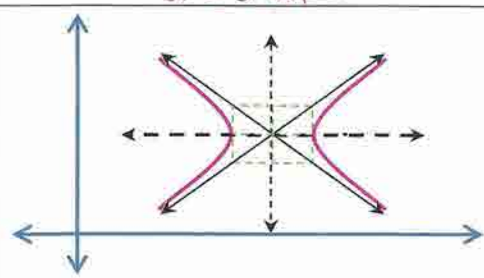
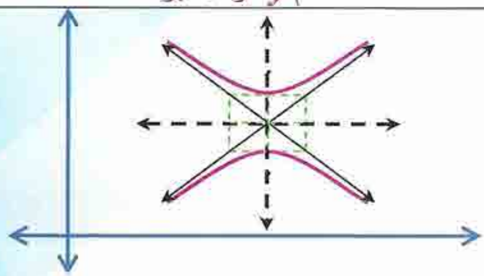
القطع الناقص

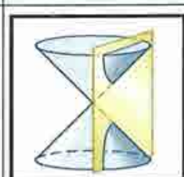
الاتجاه	المحور الأكبر أفقي مقام x هو الأكبر	المحور الأكبر رأسي مقام y هو الأكبر
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$
المركز	(h,k)	(h,k)
الرأسان V	$(h\pm a,\ k)$	$(h,\ k\pm a)$
الرأسان المرافقان	$(h,\ k\pm b)$	$(h\pm b,\ k)$
البؤرتان F	$(h\pm c,\ k)$	$(h,\ k\pm c)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طول المحور الأصغر	$2b$	
العلاقة بين a,b,c :	$c^2=a^2-b^2$	

مثال	الحل
1) عند قطع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بمستوى كما بالشكل ينتج قطع مخروطي هو  أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	قطع ناقص
2) القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y+5)^2}{9}=1$ يكون مركزه أ) $(-1,5)$ ب) $(1,-5)$ ج) $(5,-1)$ د) $(-5,1)$	$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-(-5))^2}{9}=1$ المركز $(1,-5)$
3) القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$ يكون طول محوره الاكبر : أ) 4 وحدات ب) 3 وحدات ج) 6 وحدات د) 8 وحدات	$a^2=16 \rightarrow a=4$ المحور الاكبر $=2a=2\times 4=8$

مثال	الحل
4) من الشكل المقابل ، طول المحور الاصغر هو  أ) 4 وحدات ب) 3 وحدات ج) 6 وحدات د) وحدتان	نقطة بداية المحور الأصغر $(1, -2)$ نقطة نهاية المحور الأصغر $(5, -2)$ طول المحور $5 - 1 = 4$
5) القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ تكون بؤرتاه هما : أ) $(\pm 3, 0)$ ب) $(\pm 9, 0)$ ج) $(0, \pm 3)$ د) $(0, \pm 9)$	$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$ $c = 3$ القطع الناقص اتجاهه افقي $(h \pm c\ , k) = (0 \pm 3\ , 0) = (\pm 3\ , 0)$
6) معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل و طولا محوريه 8 , 10 وحدات و محوره الاكبر ينطبق على محور x تكون أ) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ب) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ ج) $\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$ د) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$	المحور الاكبر $2a = 10 \rightarrow a = 5$ المحور الاصغر $2b = 8 \rightarrow b = 4$ معادلة القطع $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
7) مجموع بعدي النقطة (0,4) عن بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ تساوي ؟ أ) 6 ب) 8 ج) 10 د) 12	• مجموع بعدي النقطة عن البؤرتي = طول المحور الأكبر $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$ • طول المحور الأكبر = $2a$ $2a = 2 \times 4 = 8$

القطع الزائد

الاتجاه	المحور القاطع أفقي مقام x هو الأكبر	المحور القاطع رأسي مقام y هو الأكبر
التمثيل البياني		
المعادلة	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
المركز	(h,k)	(h,k)
الرأسان V	$(h \pm a, \quad k)$	$(h, \quad k \pm a)$
البؤرتان F	$(h \pm c, \quad k)$	$(h, \quad k \pm c)$
طول المحور القاطع	$2a$	
طول المحور المرافق	$2b$	
خطا التقارب	$(y-k)=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$(y-k)=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c : $c^2=a^2+b^2$		

مثال	الحل
1) عند قطع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بمستوى كما بالشكل ينتج قطع مخروطي هو  أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	قطع زائد
2) المحل الهندسي لجميع النقاط المستوية التي يكون الفرق المطلق بين بعديها عن بؤرتين مقدار ثابت هو أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	قطع زائد
3) القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-5)^2}{9}-\frac{(x+1)^2}{16}=1$ يكون مركزه أ) $(-1,5)$ ب) $(1,-5)$ ج) $(5,-1)$ د) $(-5,1)$	$\frac{(y-5)^2}{9}-\frac{(x--1)^2}{16}=1$ $(-1,5)$
4) خطا التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{1}=1$ هما أ) $y=\pm\frac{1}{2}x$ ب) $y=\pm 2x$ ج) $y=\pm\frac{1}{4}x$ د) $y=\pm 4x$	المحور القاطع رأسي والمركز $(0,0)$ $(y-0)=\pm\frac{2}{1}(x-0)$ $y=\pm 2x$

تحديد نوع القطع المخروطي
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد
$B^2 - 4AC = 0$	$B^2 - 4AC < 0$	$B^2 - 4AC > 0$

تمارين

مثال	الحل
1) المعادلة $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ تمثل : أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	معامل x^2 ومعامل y^2 احدهما سالب والاخر موجب المعادلة تمثل قطع زائد
2) المعادلة $y^2 + 4x^2 - 2xy + 3x - 2y - 12 = 0$ تمثل : أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	معامل x^2 ومعامل y^2 كلاهما موجب المعادلة تمثل قطع ناقص
3) المعادلة $y^2 - 5x + 4y - 3 = 0$ تمثل: أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	الحد التربيعي الوحيد y المعادلة تمثل قطع مكافئ
4) المعادلة $4x^2 + 4y^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ تمثل: أ) قطع مكافئ ب) قطع ناقص ج) قطع زائد د) دائرة	معامل x^2 ومعامل y^2 متساويان المعادلة تمثل دائرة

17) التحويلات الهندسية (الانعكاس ، الانسحاب ، التمدد ، الدوران) :

قواعد التحويلات

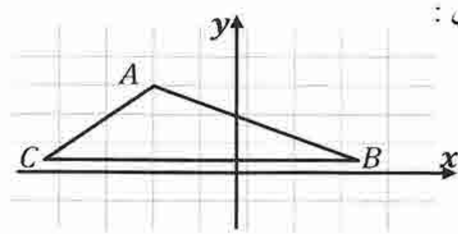
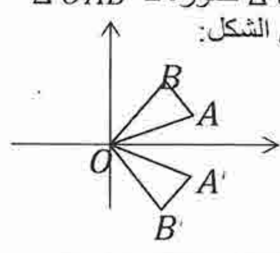
الانعكاس (التناظر)
- حول محور x: $(x,y) \Rightarrow (x,-y)$
- حول محور y: $(x,y) \Rightarrow (-x,y)$
- حول نقطة الأصل: $(x,y) \Rightarrow (-x,-y)$
- حول المستقيم $y = x$: $(x,y) \Rightarrow (y,x)$
- حول المستقيم $y = k$: $(x,y) \Rightarrow (x,2k-y)$

الانسحاب (ازاحه)
- صورة النقطة (x,y) بإزاحة (a,b) هي $(x+a,y+b)$

التمدد (مغير البعد)
- صورة النقطة (x,y) بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k هي (kx,ky)

الدوران
- مركزه نقطة الأصل وبزاوية $90°$: $(x,y) \Rightarrow (-y,x)$
- مركزه نقطة الأصل وبزاوية $270°$: $(x,y) \Rightarrow (y,-x)$
- مركزه نقطة الأصل وبزاوية $180°$: $(x,y) \Rightarrow (-x,-y)$

مثال	الحل
1) صورة النقطة $(2,-1)$ بالانعكاس حول محور x هي : أ) $(-2,1)$ ب) $(2,1)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(-1,2)$	نكتب الاحداثي x نفسه ونغير إشارة الإحداثي y فيصبح الحل $(2,1)$
2) صورة النقطة $(2,-1)$ بالانعكاس حول محور y هي : أ) $(-2,1)$ ب) $(2,1)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(-1,2)$	نكتب الاحداثي y نفسه ونغير إشارة الإحداثي x فيصبح الحل $(-2,-1)$
3) صورة النقطة $(2,-1)$ بالانعكاس حول نقطة الأصل هي : أ) $(-2,1)$ ب) $(2,1)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(-1,2)$	ونغير إشارة كل من الإحداثي x والإحداثي y فيصبح الحل $(-2,1)$
4) صورة النقطة $(2,-1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$: أ) $(-2,1)$ ب) $(2,1)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(-1,2)$	نبدل الإحداثي y محل الإحداثي x و نبدل الإحداثي x محل الإحداثي y فيصبح الحل : $(-1,2)$
5) صورة النقطة $(2,-1)$ بإزاحة $(3,1)$ هي: أ) $(5,0)$ ب) $(1,2)$ ج) $(5,2)$ د) $(1,-2)$	$2\ (,-1) \xRightarrow{\text{إزاحة } (3,1)} (2+3,-1+1)$ $= (5,0)$
6) انعكاس النقطة $(2,-1)$ في المستقيم $y = 3$ هي ؟ أ) $(4,-1)$ ب) $(2,7)$ ج) $(2,-1)$ د) $(-1,2)$	انعكاس النقطة (x,y) في المستقيم $y = k$ ، هو $(x,2k-y)$ $(x,2k-y) = (2,2(3)-(-1))$ $= (2,7)$

مثال	الحل
7) صورة النقطة $(2,-1)$ بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 2 هي : أ) $(4,2)$ ب) $(4,-2)$ ج) $(-4,2)$ د) $(2,-1)$	$(2,-1) \xrightarrow{\text{تمدد معامله 2}} (2\times 2, 2\times -1) \Rightarrow (4,-2)$
8) صورة النقطة $(2,-1)$ بدوران مركزه نقطة الأصل بزاوية 90° هي أ) $(-2,1)$ ب) $(1,-2)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(1,2)$	$(x,y) \Rightarrow (-y,x)$ $(2,-1) \xrightarrow{\text{دوران } 90^\circ} (1,2)$
9) صورة النقطة $(2,-1)$ بدوران مركزه نقطة الأصل بزاوية 180° هي أ) $(-2,1)$ ب) $(1,-2)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(1,2)$	$(x,y) \Rightarrow (-x,-y)$ $(2,-1) \xrightarrow{\text{دوران } 180^\circ} (-2,1)$
10) صورة النقطة $(2,-1)$ بدوران مركزه نقطة الأصل بزاوية 270° هي : أ) $(-2,1)$ ب) $(1,-2)$ ج) $(-2,-1)$ د) $(1,2)$	$(x,y) \Rightarrow (y,-x)$ $(2,-1) \xrightarrow{\text{دوران } 270^\circ} (-1,-2)$
11) اذا انتقلت النقطه $(2,0)$ إلى النقطة $(-2,0)$ بدوران مركزه نقطة الاصل واتجاهه مع عقارب الساعه, فإن زاوية الدوران هي: أ) 90 ب) 180 ج) 270 د) 360	باستخدام الرسم على المستوى الاحداثي نجد ان الدوران كان بزاوية 180 درجة
12) انعكاس النقطة A حول محور السينات في الشكل هي :  أ) $(2,3)$ ب) $(-2,3)$ ج) $(2,-3)$ د) $(-2,-3)$	(x,y) بالانعكاس حول محور السينات هي $(x,-y)$ وحيث ان النقطة $A=(-2,3)$ $\xrightarrow{\text{انعكاس } A} (-2,-3)$
13) أجري انسحاب إلى اليمين للنقطة $(2,-3)$ بمقدار وحدة واحدة ، ثم انسحاب إلى أسفل بمقدار وحدتين ، ثم تناظر حول نقطة الأصل ، ما مجموع إحداثيات النقطة الناتجة؟ أ) 8 ب) -8 ج) 2 د) -2	$(2,-3) \xrightarrow{\text{إنسحاب } (1,-2)} (3,-5) \xrightarrow[\text{نقطة الأصل}]{\text{تناظر حول}} (-3,5)$ $-3+5=2$
14) اذا كان المثلث $\Delta OA'B'$ صورة لـ ΔOAB فما نوع التحويل الممثل في الشكل:  أ) انعكاس ب) انتقال ج) دوران د) تمدد	

انسحاب المستقيمات والمنحنيات :

انسحاب مستقيم $y = ax + b$ عدد n من الوحدات	
لليمين والأسفل $y = ax + b - n$	لليسار والأعلى $y = ax + b + n$
مثال	**الحل**
إذا أجرينا انسحاباً لمستقيم معادلته $y = x - 1$ ، بمقدار 5 وحدات لأعلى ، فما معادلة المستقيم الجديد؟ أ) $y = x - 5$ ب) $y = x + 4$ ج) $y = 5x - 1$ د) $y = x - 6$	$y = x - 1 + 5$ $y = x + 4$

انسحاب منحنى الدالة التربيعية الأم $y = x^2$ عدد n من الوحدات			
لليمين $y = (x - n)^2$	اليسار $y = (x + n)^2$	للاعلى $y = x^2 + n$	الاسفل $y = x^2 - n$
مثال		**الحل**	
عند سحب المنحنى $y = (x - 2)^2 - 3$ خمس وحدات للاعلى ووحدتان لليسار فإن المنحنى الناتج يمكن كتابته : أ) $y = x^2 + 2$ ب) $y = (x - 4)^2 - 8$ ج) $y = x^2 - 8$ د) $y = (x - 4)^2 + 2$		$y = (x - 2 + 2)^2 - 3 + 5$ $y = x^2 + 2$	

انسحاب دائرة $x^2 + y^2 = r^2$ عدد n من الوحدات			
لليمين $(x - n)^2 + y^2 = r^2$	اليسار $(x + n)^2 + y^2 = r^2$	للاعلى $x^2 + (y - n)^2 = r^2$	الاسفل $x^2 + (y + n)^2 = r^2$
مثال		**الحل**	
اذا اجرينا انسحاب للدائرة $(x - 2)^2 + y^2 = 9$ بمقدار 3 وحدات لليمين و وحده واحدة للاسفل ، فما معادلة الدائرة الجديدة ؟		$(x - 2 - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$	

انسحاب منحنى دالة المطلق الأم $y = \|x\|$ عدد n من الوحدات			
لليمين $y = \|x - n\|$	اليسار $y = \|x + n\|$	للاعلى $y = \|x\| + n$	الاسفل $y = \|x\| - n$
مثال		**الحل**	
اذا اجرينا انسحابا لمنحنى الدالة $f(x) = \|x + 2\|$ وحدتان للأعلى و 5 وحدات لليمين ، فما معادلة الدالة بعد الأنسحاب ؟		$f(x) = \|x + 2 - 5\| + 2$ $= \|x - 3\| + 2$	

18) حساب المثلثات :

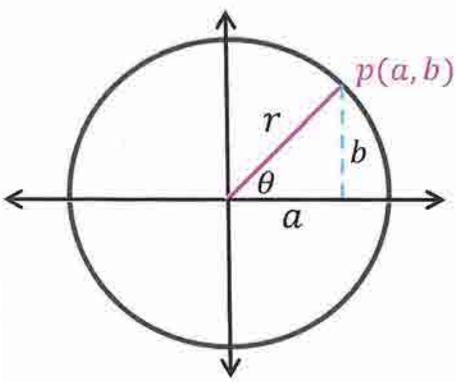
- **الزوايا المشهورة :**

الزاوية بالدرجات	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
الزاوية بالراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

التحويل إلى راديان نضرب الزاوية في $\frac{\pi}{180°}$	
ماقياس الزاوية $30°$ بالراديان ؟	$30° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$
التحويل إلى درجات نضرب الزاوية في $\frac{180°}{\pi}$	
ماقياس الزاوية $\frac{\pi}{2}$ بالدرجات ؟	$\frac{\pi}{2} \times \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{2} = 90°$

- **الدوال المثلثية :**

تعرف الدوال بأنها احداثيات نقطة تتحرك على دائرة الوحدة ، حيث :



الدوال	تعريفها	مقلوبها
دالة الجيب	$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{r}$	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
دالة جيب التمام	$\cos\theta = \frac{\text{االمجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{r}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
دالة الظل	$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{b}{a}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

- **خواص الدوال المثلثية :**

الدالة	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
المجال	R	R	$\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$
المدى	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
التماثل	دالة فردية $\sin(-\theta) = -\sin\theta$	دالة زوجية $\cos(-\theta) = \cos\theta$	دالة فردية $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
طول الدورة	$\sin\theta = \sin(\theta \pm 2\pi)$	$\cos\theta = \cos(\theta \pm 2\pi)$	$\tan\theta = \tan(\theta \pm \pi)$

* حيث n عدد صحيح .

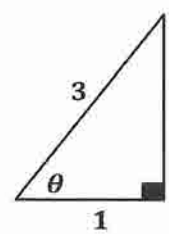
- **قيم الدوال المثلثية للزوايا المشهورة :**

الزاوية	$30° = \frac{\pi}{6}$	$45° = \frac{\pi}{4}$	$60° = \frac{\pi}{3}$	$90° = \frac{\pi}{2}$	$180° = \pi$	$270° = \frac{3\pi}{2}$	$360° = 2\pi$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرفه	0	غير معرفه	0

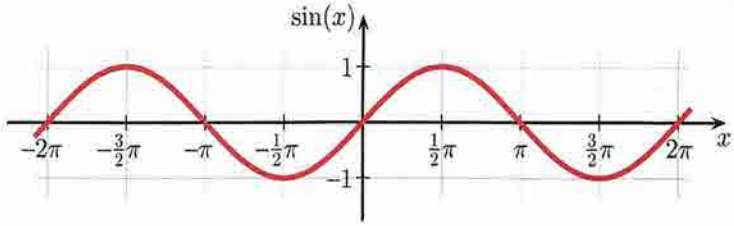
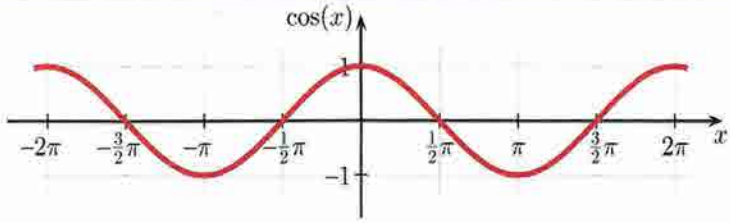
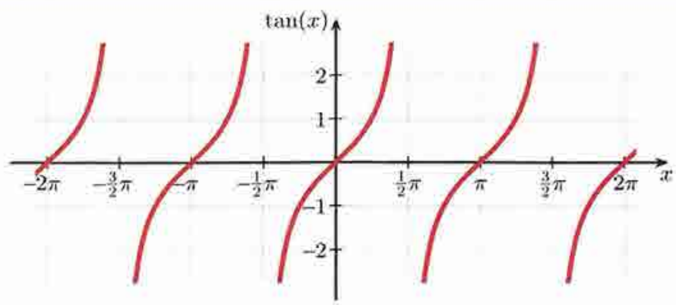
- **الطريقه المختصرة لحفظ قيم الدوال المثلثية :**

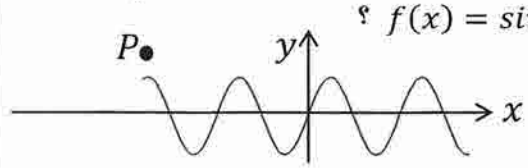
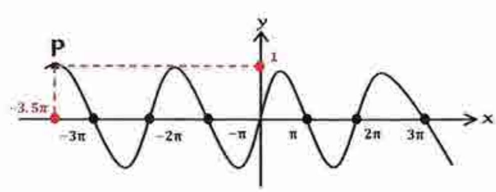
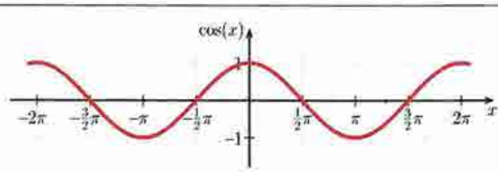
$$\begin{array}{c|ccccc} & 0° & 30° & 45° & 60° & 90° \\ \hline sin & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ cos & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{\sqrt{\ \ }}{2}$$

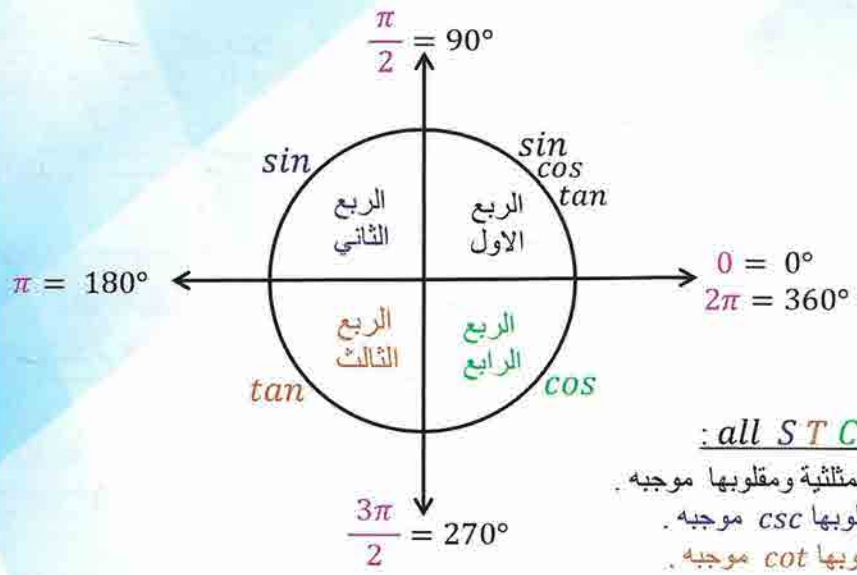
مثال	الحل
1) في الشكل أدناه ، ما قيمة $\cos(90-\theta)$:  أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\cos(90-\theta) = sin\,\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ نوجد طول الضلع المقابل بأستخدام نظرية فيثاغورس $x = \sqrt{3^2 - 1^2} \implies x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
2) اذا كانت $y = 2\cos x - 3$ فما أكبر قيمة ممكنة لـ y : أ) -3 ب) -1 ج) 1 د) 2	cos دائما قيمته محصورة بين $[-1,1]$ نعوض بقيمة cos في المعادلة : $y = 2\cos x - 3 = 2(1) - 3 = -1 \xLeftarrow{\text{أكبر قيمة}}$ $y = 2\cos x - 3 = 2(-1) - 3 = -5 \xLeftarrow{\text{أصغر قيمة}}$
3) مجموعة حل المعادلة $sin^2 x - 1 = 0$ حيث $x \in [\,0,2\pi\,]$ هي: أ) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ب) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ ج) $\{0,\pi\}$ د) $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$	$sin^2 x = 1 \implies sin\,x = \pm 1$ $\therefore sin\,x = 1 \implies x = 90° = \frac{\pi}{2}$ $sin\,x = -1 \implies x = 270° = \frac{3\pi}{2}$
4) مجموعة حل المعادلة $tan^2 x - 3 = 0$ في الفترة $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$ هي: أ) $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ ب) $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ ج) $\left\{\frac{-\pi}{3}\right\}$ د) $\left\{\frac{-\pi}{6}\right\}$	$tan^2 x = 3 \implies tan\,x = \pm\sqrt{3}$ $-\sqrt{3}$ مرفوض $\therefore tan\,x = \sqrt{3} \rightarrow tan\,60° = \sqrt{3}$ $x = 60° = \frac{\pi}{3}$

- **الشكل البياني الدوال :**

$sin\,x$

$cos\,x$

$tan\,x$


مثال	الحل
1) في الشكل ادناه ، ما احداثيات النقطة P في بيان الدالة $f(x) = sin\,x$ ؟  أ) $\left(\frac{-7\pi}{2}, 1\right)$ ب) $\left(\frac{-5\pi}{2}, 1\right)$ ج) $\left(\frac{-\pi}{2}, 1\right)$ د) $(-7\pi, 1)$	 $x = -3.5\pi = \dfrac{-7\pi}{2}$, $y = 1$ $\therefore \left(\dfrac{-7\pi}{2}, 1\right)$
2) في الفترة $[0\,,2\pi]$ عدد نقاط تقاطع منحنى الدالة $cos\,x$ مع محور السينات هو؟ أ) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3	 من خلال الرسم لدالة $cos\,x$ الفترة من $[0\,,2\pi]$ مرت بنقطتين على محور السينات

• ـارة الدوال المثلثية :



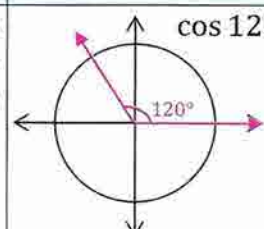
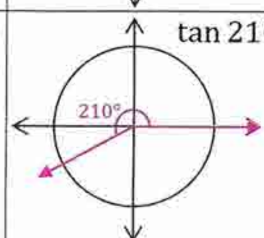
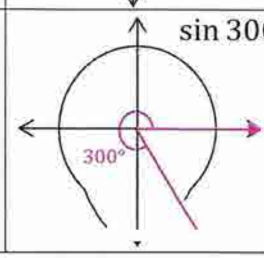
نطبقـ رلةؤلة التالية لتحديد الإشارة $C\ T\ S\ all$:

- فـ بعـبع الأول : جميع الدوال المثلثية ومقلوبها موجبه .
- فـ بعـبع الثاني : فقط sin ومقلوبها csc موجبه .
- فـ بعـبع الثالث : فقط tan ومقلوبها cot موجبه .
- فـ بع الرابع : فقط cos ومقلوبها sec موجبه .

• ، ت الإسناد :

هي ت حادة α يصنعها الضلع النهائي للزاوية القياسية θ مع المحور السيني .

الربعـبر ي $\alpha = 180° - \theta$ ، الربع الثالث $\alpha = \theta - 180°$ ، الربع الرابع $\alpha = 360° - \theta$

مثال	الحل
1(1) قيمة $\cos 120°$ 	نلاحظ أن الزاوية $120°$ تقع في الربع الثاني وبالتالي $\cos120°$ في الربع الثاني سالبة وأيضاً يوجد مفتاح في الربع الثاني يحول الزاوية إلى زاوية حادة مشهورة $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$
2) ^ قيمة $\tan 210°$ 	نلاحظ أن الزاوية $210°$ تقع في الربع الثالث وبالتالي $\tan210°$ في الربع الثالث موجبة وأيضاً يوجد مفتاح في الربع الثالث يحول الزاوية إلى زاوية حادة مشهورة $\tan 210° = \tan(180° + 30°) = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
3) قيمة $\sin 300°$ 	نلاحظ أن الزاوية $300°$ تقع في الربع الرابع وبالتالي $\sin300°$ في الربع الرابع سالبة وأيضاً يوجد مفتاح في الربع الرابع يحول الزاوية إلى زاوية حادة مشهورة $\sin 300° = \sin(360° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ·in 3(= s = sin(– ‾‾) =) = - irin = ‾‾

مثال : حل المعادلة : $2\cos\theta + 1 = 0$ حيث $-360° \le \theta \le 360°$

الحل : $2\cos\theta + 1 = 0 \Longrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$

نلاحظ أن قيمة $\cos\theta$ سالبة مما يعني أن الزاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث

ومن المعلوم أيضاً أن $\cos\theta = \frac{1}{2}$ عندما تكون $\theta = 60°$

نكتب مفتاح كل ربع

$\theta = 180° + 60° = 240°$ | $\theta = 180° - 60° = 120°$

مجموعة حل المعادلة هي $\{120°\ ,\ 240°\}$ أو $\left\{\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}\right\}$

مثال : حل المعادلة : $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$ حيث $-360° \le \theta \le 360°$

الحل : $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0 \Longrightarrow \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

نلاحظ أن قيمة $\sin\theta$ سالبة مما يعني أن الزاوية تقع في الربع الثالث أو الرابع

ومن المعلوم أيضاً أن $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ عندما تكون $\theta = 60°$

نكتب مفتاح كل ربع

$\theta = 360° - 60° = 300°$ | $\theta = 180° + 60° = 240°$

مجموعة حل المعادلة هي $\{240°\ ,\ 300°\}$ أو $\left\{\frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}\right\}$

- **المتطابقات المثلثية :**

متطابقات فيثاغورث		
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

متطابقات الزاويتين المتتامتين		
$\sin A = \cos B$	$\tan A = \cot B$	إذا كان $\angle A + \angle B = 90°$ متتامتين فإن :

متطابقات ضعف الزاوية		
$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

متطابقات نصف الزاوية		
$\sin\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$	$\cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

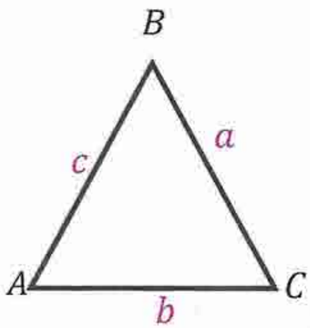
متطابقات مجموع أو الفرق بين زاويتين
$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$
$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$
$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$

مجموع أو الفرق بين دالتين لزاويتين	
$\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2} \cdot \cos\dfrac{A-B}{2}$	$\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2} \cdot \sin\dfrac{A-B}{2}$
$\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2} \cdot \cos\dfrac{A-B}{2}$	$\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2} \cdot \sin\dfrac{A-B}{2}$
$\tan A + \tan B = \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A \cdot \cos B}$	$\tan A - \tan B = \dfrac{\sin(A-B)}{\cos A \cdot \cos B}$

تحويل حاصل ضرب دالتين
$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}(\ \cos(A-B) - \ \cos(A+B)\ )$
$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\ \cos(A-B) + \ \cos(A+B)\ )$
$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}(\ \sin(A-B) + \ \sin(A+B)\ )$
$\tan A \cdot \tan B = \frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B}$

- **لحل المثلث غير القائم :**

قانون الجيب	قانون جيب التمام
يستخدم اذا علم إحدى الحالتين : 1) قياس زاويتين وطول ضلع 2) ضلعين وزاوية تقابل احداهما $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	يستخدم عند معرفة طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



مثـال	الحــل
1) أصغر قيمة للمقدار $9 - 6\sin x\cos x$ هي؟ أ) 6 ب) 0 ج) 3 د) -6	من متطابقات ضعف الزاوية $2\sin x\cos x = \sin 2x$ $9 - 3(2\sin x\cos x) = 9 - 3\sin 2x$ • $\sin$ دائما قيمته محصورة بين $[-1,1]$ $\therefore\ -1 \le \sin \le 1$ • نعوض بقيمة $\sin$ في المعادلة لإيجاد أصغر قيمة أكبر قيمة $\Longleftarrow$ $9 - 3\sin 2x = 9 - 3(-1) = 12$ أصغر قيمة $\Longleftarrow$ $9 - 3\sin 2x = 9 - 3(1) = 6$
2) قيمة $\frac{\sin 5x + \sin x}{\cos 5x + \cos x}$ هي : أ) $\tan 2x$ ب) $\cot 2x$ ج) $\tan 3x$ د) $\cot 3x$	$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2} \times \cos\frac{A-B}{2}$ $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2} \times \cos\frac{A-B}{2}$ $= \frac{2\sin\frac{6x}{2} \times \cos\frac{4x}{2}}{2\cos\frac{6x}{2} \times \cos\frac{4x}{2}} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$

19) المتجهات في المستوى الاحداثي :

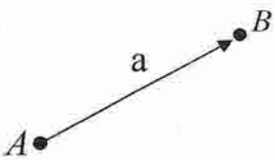
الكميات الفيزيائية

كميات قياسية (عددية)	كميات متجهه
هي كمية لها مقدار دون اتجاه ويدل العدد على مقدار الكمية , مثل : المسافة والزمن والكتلة ودرجة الحراره	هي كمية لها مقدار واتجاه , مثل : القوة والسرعة والأزاحة للتعبير نستخدم نظام للأحداثيات

مثال : حدد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كل مما يأتي :

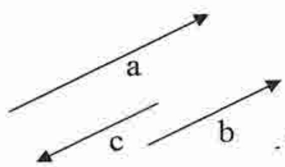
1) تسير سيارة بسرعة $60\ mi/h$ وبزاوية $45°$ شرق الجنوب. (كمية متجهه)
2) قطعت سياره مسافه قدرها $20\ km$. (كمية قياسية)
3) هبوط مظلي رأسياً لأسفل بسرعة $12.5\ mi/h$. (كمية متجهه)
4) يسير شخص على قدميه بسرعة $75\ m/min$ باتجاه الغرب . (كمية متجهه)

- **المتجهات :**



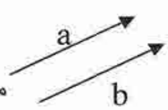
يمكن تمثيل المتجه هندسياً بقطعة مستقيمة لها اتجاه أو سهم يظهر المقدار والإتجاه .
الشكل المجاور قطعة مستقيمة متجهة لها نقطة البداية A ونقطة النهاية B
يرمز للمتجه $\overrightarrow{AB}$ أو $\overline{a}$ أو **a**

- **خواص المتجهات :**



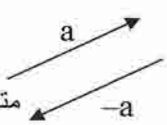
متجهات متوازية

المتجهات المتوازية :
لها الاتجاه نفسه ، أو اتجاهان متعاكسان ، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه .



متجهان متساويان

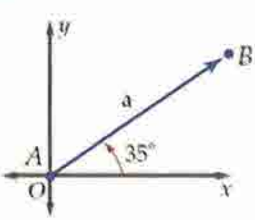
المتجهان المتساويان :
المتجهين a ، b متساويان إذا كان لهما نفس المقدار ونفس الاتجاه .



متجهان متعاكسان

المتجهان المتعاكسان :
إذا أعطينا المتجه a فإن a– هو متجه مساوٍ له في المقدار ويعاكسه في الاتجاه .

الوضع القياسي :
يكون المتجه في الوضع القياسي إذا كانت نقطة بدايته هي نقطة الأصل (0 , 0)



اتجاه المتجه :
يعبر عنه بالزاويه التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الافقي(الاتجاه الموجب للمحور x)

- **الصورة الاحداثية للمتجهات :**

إذا كان المتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي بدايته النقطة $A(x_1\,, y_1\,, z_1)$ ونهايته النقطة $B(x_2\,, y_2\,, z_2)$ ، فإن :

الصورة الاحداثية للمتجه	$\overrightarrow{AB} = B - A = \langle x_2 - x_1\,, y_2 - y_1\,, z_2 - z_1 \rangle$
صورة المتجه بدلالة متجهات الوحدة i , j , k	$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$

مثال	الحل
1) الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $B(4,5)\,,\, A(-3,1)$ هي: أ) $\langle -7,-4 \rangle$ ب) $\langle 7,-4 \rangle$ ج) $\langle 7,4 \rangle$ د) $\langle -7,4 \rangle$	$\overrightarrow{AB} = \langle 4-(-3)\,, 5-1 \rangle = \langle 7,4 \rangle$
2) متجه نقطة بدايته (0,0) ونقطة نهايته (1,1) المتجه الذي يساويه هو الذي نقطة بدايته : أ) (1,1) ونقطة نهايته (0,0) ب) (1,1) ونقطة نهايته (3,3) ج) (1,1) ونقطة نهايته (1,0) د) (1,0) ونقطة نهايته (2,1)	نوجد الصورة الأحداثية لكل المتجهات $\overrightarrow{AB} = B - A = (1,1) - (0,0)$ $= (1-0,1-0) = (1,1)$ نبحث في الخيارات عن المتجه الذي صورته الاحداثية (1,1) الخيار د) $= (2,1) - (1,0)$ $= (2-1,1-0) = (1,1)$
3) اذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle 2,3 \rangle$ فإن المتجه $\overrightarrow{AB}$ يكتب بدلالة متجهي الوحدة i,j على الصورة : أ) 2i + 3j ب) 2i − 3j ج) 2i + j د) 2j + 3i	$i \quad j$ $2 \quad 3$ $\overrightarrow{AB} = 2i + 3j$

- **طول المتجه :**

وهو طول القطعة المستقيمة التي تمثله ، ويرمز لطول المتجه $|AB|$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مثال	الحل
1) طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(1,1)\,,\, B(4,5)$ هي: أ) 13 ب) $\sqrt{13}$ ج) 5 د) $\sqrt{5}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2}$ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
2) اذا كان المتجه $V = \langle 3,2 \rangle$ فإن $\lvert V \rvert$ يساوي : أ) 13 ب) $\sqrt{13}$ ج) 5 د) $\sqrt{5}$	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

- **متجه الوحدة :**

إذا كان لدينا متجه غير صفري V فإن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه V وطوله يساوي 1 هو :

$$u = \frac{V}{|V|}$$

مثال	الحل
أوجد متجه وحدة $\boldsymbol{u}$ له نفس اتجاه المتجه $V = \langle \mathbf{-4} , \mathbf{-2} \rangle$.	$\lvert V\rvert = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ $u = \frac{V}{\lvert V\rvert} = \langle \frac{-8}{2\sqrt{5}} , \frac{-2}{2\sqrt{5}} \rangle = \langle \frac{-4\sqrt{5}}{5} , \frac{-\sqrt{5}}{5} \rangle$

- **نقطة منتصف المتجه :**

هي احداثيات منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها نقطتي بداية ونهاية المتجه

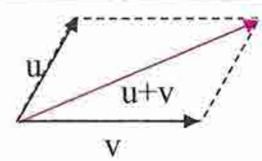
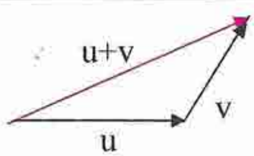
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

مثال	الحل
في الفضاء احداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها (2,0,1) و نقطة نهايتها (6,2,3) هي : أ) (6,2,3) ب) (2,0,1) ج) (4,1,2) د) (8,2,4)	$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right)$ $= (4, 1, 2)$

إذا كان المتجهان $v = \langle x_2 , y_2 \rangle$, $u = \langle x_1 , y_1 \rangle$ ، فإن :

- **جمع المتجهات (المحصله) :**

عند جمع متجهين أو أكثر فإن الناتج يكون متجهاً ويسمى (المحصله) .

 محصلة متجهين بطريقة متوازي الأضلاع	 محصلة متجهين بطريقة المثلث

$$u + v = \langle x_1 + x_2 , y_1 + y_2 \rangle$$

مثال	الحل
إذا كان $u = \langle 2,3 \rangle$ ، $v = \langle 3,-4 \rangle$ فإن $u + v$ تساوي : أ) $\langle 5,7 \rangle$ ب) $\langle 5,1 \rangle$ ج) $\langle 5,-1 \rangle$ د) $\langle 1,-1 \rangle$	$u + v = \langle 2 + 3 , 3 + (-4) \rangle$ $= \langle 5, -1 \rangle$

ملاحظة : عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه فإن محصلتهما تساوي صفر (**المتجه الصفري**) $\vec{0}$

- **ضرب المتجه في عدد حقيقي :**

إذا ضرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ، فإن الناتج يكون متجهاً و طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$

- إذا $k > 0$ فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه .
- إذا $k < 0$ فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

$$k\,\mathbf{v} = \langle kx_1\ , k\,y_1\rangle$$

- **طرح متجه من متجه آخر :**

$$u - v = \langle x_1 - x_2\ ,\ y_1 - y_2\rangle$$

مثال	الحل
ليكن $\overrightarrow{b} = (y,x), \overrightarrow{a} = (x,y)$ متجهين إذا كان $\overrightarrow{3a} - \overrightarrow{b} = (0,-8)$ ، فإن قيمة المتجه $\overrightarrow{a}$ تساوي ؟ أ) $(-1,-3)$ ب) $(-1,3)$ ج) $(1,-3)$ د) $(1,3)$	$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ $\overrightarrow{3a} - \overrightarrow{b} = (3x - y, 3y - x) = (0, -8)$ $3x - y = 0$ ، $y = 3x$ | $3y - x = -8$ ، $3y = x - 8 \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$ $3x = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \Longrightarrow 3x - \frac{1}{3}x = -\frac{8}{3}$ $\frac{8}{3}x = \frac{-8}{3} \Longrightarrow x = -1$ نعوض بقيمة x لايجاد y $\quad y = 3x = 3(-1) = -3$ ∴ قيمة المتجه $\vec{a}$ تساوي $(-1,-3)$

- **الضرب الداخلي :**

- حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عدداً وليس متجهاً (خلاف الجمع و الضرب في عدد حقيقي) .
- إذا كان حاصل ضرب متجهين يساوي صفر ، فإن المتجهان متعامدان .
- حاصل ضرب المتجه في نفسه يساوي مربع طوله $u \cdot u = |u|^2$

$$u \cdot v = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

مثال	الحل
1) إذا كان $\vec{u} =< 1,-1,2 >$ و $\vec{v} =< 3,1,1 >$ فإن حاصل ضرب $\vec{u}\,\vec{v}$ يساوي ؟ أ) 4 ب) $(3,-1,2)$ ج) 6 د) $(4,0,3)$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1 \times 3) + (-1 \times 1) + (2 \times 1)$ $= 3 - 1 + 2 = 4$ إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فإن المتجهان متعامدان
2) إذا كان $u = \langle a, 2\rangle$ ، $v = \langle 3,6\rangle$ فإن قيمة a التي تجعل المتجهين متعامدين هى : أ) 4 ب) -4 ج) 3 د) 7	بم أن المتجهان متعامدان : $u \cdot v = 3a + 12 = 0$ $a = \frac{-12}{3} = -4$

- **الزاوية بين متجهين :**

إذا كانت θ الزاوية بين متجهين غير صفريين v , u فإن :

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

الحل	مثال
$\cos\theta = \frac{\langle -1,-1\rangle \cdot \langle -9\ ,\ 0\rangle}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\,\sqrt{(-9)^2+0}} = \frac{9+0}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \theta = 45^\circ$	ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -9,0\rangle , \langle -1,-1\rangle$ ؟ أ) 90° ب) 135° ج) 45° د) 0°

- **صورة المتجه بدلالة طولة والزاوية θ :**

يمكن كتابة المتجه $V = \langle a\ , b\rangle$ المعطى طوله $|V|$ وزاوية اتجاهه $\boldsymbol{\theta}$ مع الاتجاه الأفقي

على الصورة الإحداثية $V = \langle\ |V|\,cos\theta\ , |V|\,sin\theta\ \rangle$ أو بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}\ ,\mathbf{j}$ $V = |V|\,cos\theta\ i\ + |V|\,sin\theta j$

الحل	مثال
$V = \langle\ 8\,cos60^\circ , 8\,sin60^\circ\ \rangle$ $= \langle\ 4 , 4\sqrt{3}\ \rangle$	الصورة الاحداثية للمتجه $\boldsymbol{V}$ اذا كان طوله $|v| = 8$ وزاوية اتجاهه $\theta = 60^\circ$ مع المحور الأفقي :

الضرب الإتجاهي للمتجهات

إذا كان $\mathrm{a} = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}\ \ ,\ \mathrm{b} = b_1\mathrm{i} + b_2\mathrm{j} + b_3\mathrm{k}$

فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين هو المتجه :

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{a} \times \mathrm{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathrm{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathrm{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathrm{k}$$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة ، فمثلاً :

- مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $u\ ,v$ ضلعان متجاوران فيه يساوي $|u \times v|$

مثال : أوجد مساحة متوازي الاضلاع الذي فيه $u = (2,3,-2)\ ,v = (2,0,1)$ ضلعان متجاوران

الحل :

$$u \times v = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-0)\mathrm{i} - (2+4)\mathrm{j} + (0-6)\mathrm{k}$$

$$= 3\mathrm{i} - 6\mathrm{j} - 6\mathrm{k}$$

$|u \times v| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$ وحده مربعه

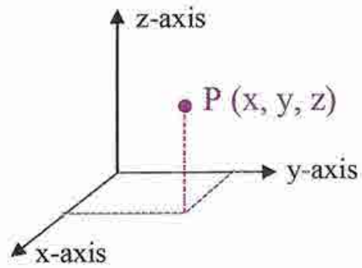
- إذا التقت ثلاثة متجهات $t\ ,u\ ,v$ في مستويات مختلفة في نقطة البداية ، فإنها تكون أحرفاً متجاورة لمتوازي سطوح (مجسم متعدد الأوجه ، كل وجه على شكل متوازي أضلاع) حجم متوازي السطوح يساوي القيمة المطلقة للضرب الثلاثي القياسي لهذه المتجهات $|t \cdot (u \times v)|$

مثال	الحل
1) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $t = 4i - 2j - 2k$ $,u = 2i + 4j - 3k$ $v = i - 5j + 3k$ أحرف متجاورة ؟	$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$ $t\,.(u\ \times v) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$ $= 4[12-15] + 2[6+3] - 2[-10-4]$ $= -12 + 18 + 28 = 34$ حجم متوازي السطوح $= \|t\,.(u\ \times v)\| = \|34\| = 34$
2) اذا كانت المتجهات $\langle 3,2,1\rangle, \langle 1,1,2\rangle, \langle 1,1,1\rangle$ أضلاع لمتوازي سطوح فإن حجمه بالوحدات المكعبة يساوي؟ أ) **1** ب) **4** ج) **5** د) **9**	حجم متوازي السطوح $= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$ $= (3+4+1) - (2+6+1) = 8 - 9 = -1$ حجم متوازي السطوح $= \|-1\| = 1$

معادلة مستوى في الفضاء الثلاثي

إذا كان هناك نقطة $p(x_0, y_0, z_0)$ تنتمي لمستوى في الفضاء الثلاثي والمتجه $\overrightarrow{n} = \langle a, b, c\rangle$ عمودي عليه ,
فإن معادلة المستوى هي :

$$ax + by + cz + d = 0$$



مثال : أوجد معادلة المستوى إذا كانت النقطة (3 , 1 , 1) تنتمي له والمتجه $\overrightarrow{n} = \langle 1, -2, 2\rangle$ عمودي عليه

الحل :

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$$
$$(1 \times 3) + (-2 \times 1) + (2 \times 1) + d = 0$$
$$3 - 2 + 2 + d = 0 \Rightarrow \quad d = -3$$

معادلة المستوى هي :

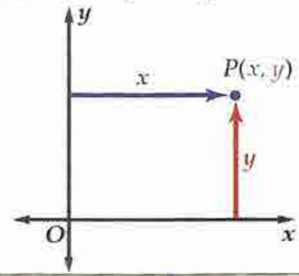
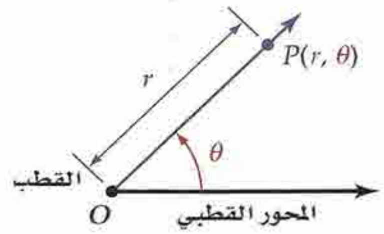
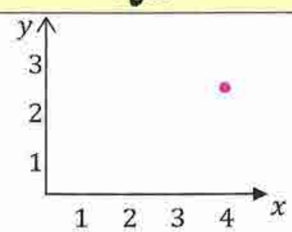
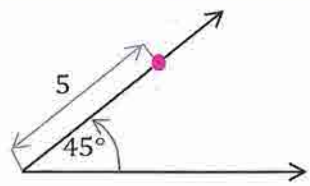
$$x - 2y + 2z - 3 = 0$$

ملاحظة : إذا كان هناك مستويان متوازيان فإن المتجة العمودي على إحداهما يكون عمودي على الآخر

مثال	الحل
1) ما المتجه العمودي على المستوى $: \ 2x + 4y - 6z = 12$ أ) $\langle -2, -4, -6\rangle$ ب) $\langle 1,2,-3\rangle$ ج) $\langle -6,4,2\rangle$ د) $\langle 3,2,-1\rangle$	نوجد معاملات x , y , z $\langle 2,4,-6\rangle \xrightarrow{\text{اقسم على 2}} \langle 1,2,-3\rangle$
2) مامعادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (5 , −2 , 4) ويوازي المستوى $3x + y - 6z + 8 = 0 \ :$ أ) $3x - y + 6z - 8 = 0$ ب) $x + 3y - 6y + 11 = 0$ ج) $3x + y - 6y + 8 = 0$ د) $3x + y - 6y + 11 = 0$	بما أن المستويان متوازيان فإن المتجه ⟨ 3 , 1 , −6 ⟩ عمودي على كلاهما فالحل إما الخيار ج أو د وللتأكد نوجد قيمة d $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ $3(5) + (-2) - 6(4) + d = 0$ $15 - 2 - 24 + d = 0$ $-11 + d = 0 \implies d = 11$ الجواب د)

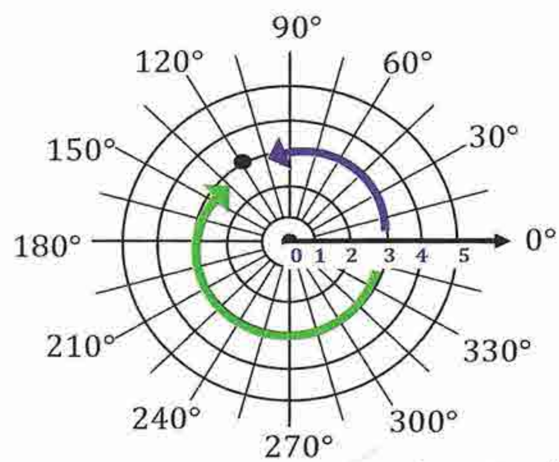
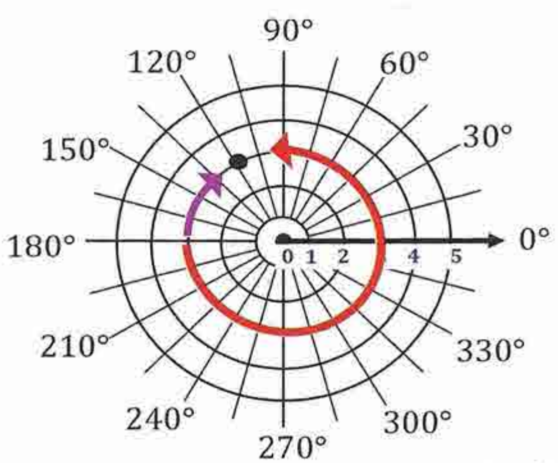
20) الاحداثيات الديكارتية و الاحداثيات القطبية :

الصورة الديكارتية والصورة القطبية للنقاط :

نظام الاحداثيات الديكارتية (المستوى الاحداثي)	نظام الاحداثيات القطبية (المستوى القطبي)
- يتكون من محورين x و y متعامدين ومتقاطعين عند النقطة $(0,0)$ والتي تسمى نقطة الأصل - تتحدد أي نقطة على هذه الإحداثيات بـ (x, y) 	- نظام المحاور القطبية والذي يحدد بالمسافة r والزاوية θ التي تصنع مع المحور الأفقي - تتحدد أي نقطة على هذه الإحداثيات بـ (r, θ) 
مثال :	**مثال :**
$(4\ ,2.5\ )$	$(5,45^{\circ})$

- **تمثيل النقاط في المستوى القطبي :**

يوجد اربع ازواج مختلفه يمثل كل منها النقطة نفسها في المستوى الأحداثي القطبي :

	
من المحور السيني الموجب : - عكس اتجاه عقارب الساعه $(3\ ,120^{\circ})$ - مع اتجاه عقارب الساعه $(3\ ,-240^{\circ})$	**من المحور السيني السالب :** - عكس اتجاه عقارب الساعه $(-3\ ,300^{\circ})$ - مع اتجاه عقارب الساعه $(-3\ ,-60)$

العلاقة بين الاحداثيات الديكارتية (x, y) والاحداثيات القطبية (r, θ)

- لكتابة النقطة (r, θ) في الصورة الديكارتية :

$$(x\,, y\,) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$$

الحل	مثال
$(x\,, y\,) = (r\cos\theta\,, r\sin\theta)$ $= (-2\cos 270^\circ, -2\sin 270^\circ)$ $= (-2\times 0\quad , \quad -2\times -1\ )$ $= (0\,,2)$	الصورة الديكارتية للنقطة $(-2, 270^\circ)$ هي : أ) $(2,0)$ ب) $(0,-2)$ ج) $(-2,0)$ د) $(0,2)$

لكتابة النقطة $(x\,, y)$ في الصورة القطبية :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{عندما } x > 0$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ \quad \text{عندما } x < 0$$

الحل	مثال
$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $\theta = tan^{-1}\left(\frac{0}{-2}\right) + 180^\circ$ عندما $x < 0$ $= tan^{-1}0 + 180^\circ = 0 + 180 = 180^\circ$ $(2\,,180^\circ)$	الصورة القطبية للنقطة $(-2\,,0)$ هي : أ) $(2\,,0^\circ)$ ب) $(2\,,90^\circ)$ ج) $(2\,,180^\circ)$ د) $(2\,,270^\circ)$

الصورة الديكارتية والصورة القطبية للمعادلات :

تعلمنا تحويل النقاط من الصورة الديكارتية (x, y) الى الصورة القطبية (r, θ) والعكس ، والآن سوف نطبق ذلك على المعادلات :

المعادلة $x^2 + y^2 = r^2$ في الصورة القطبية ← نأخذ الجذر التربيعي للطرفين فتصبح $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

المعادلة $x^2 + y^2 - ax - by = 0$ في الصورة القطبية ← نعوض في $r = a\cos\theta + b\sin\theta$

مثال	الحل
1) الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + y^2 = 9$ هي : أ) $\theta = 9$ ب) $r = 9$ ج) $r = 3$ د) $\theta = 81$	$x^2 + y^2 = 9 \xrightarrow{\text{اخذ الجذر}} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9}$ $r = 3$
2) الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ هي : أ) $r = \sin\theta$ ب) $r = 2\sin\theta$ ج) $r = 4\sin\theta$ د) $r = 8\sin\theta$	$x^2 + (y-2)^2 = 4$ $x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$ $x^2 + y^2 - 4y = 0$ $r = 4\sin\theta$

اذا كانت المعادله قيمة الزاوية θ ← $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ونوجد قيمة tan للزاوية المعطاة

اذا كانت المعادلة قيمة r ← $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ثم نربع الطرفين

اذا كانت المعادلة تحوي $\cos\theta , \sin\theta$ ← $y = r\sin\theta$, $x = r\cos\theta$ نعوض في المعادله

مثال	الحل
1) الصورة الديكارتية للمعادلة $r = 3$ هي : أ) $x^2 + y^2 = 9$ ب) $x^2 + y^2 = 3$ ج) $x^2 + y^2 = 6$ د) $x^2 + y^2 = 1$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $3 = \sqrt{x^2 + y^2} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} x^2 + y^2 = 9$
2) الصورة الديكارتية للمعادلة $r = \frac{10}{\sin\theta + \cos\theta}$ هي : أ) $x = 10$ ب) $x + y = 10$ ج) $x^2 + y^2 = 10$ د) $x + y = 20$	$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $x + y = r(\cos\theta + \sin\theta)$ $r = \frac{x+y}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{10}{\sin\theta + \cos\theta}$ $x + y = 10$
3) الصورة الديكارتية للمعادلة $\theta = \frac{\pi}{6}$ هي : أ) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ب) $y = \sqrt{3}x$ ج) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}y$ د) $x = \sqrt{3}y$	$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{y}{x}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

الصورة الديكارتية والصورة القطبية للأعداد المركبة :

تعلمنا أن العدد المركب يكتب على صورة $z = a + bi$ ، ومقياسه $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
حيث الجزء الحقيقي $a = r\cos\theta$ ، والجزء التخيلي $b = r\sin\theta$ ، فإن :

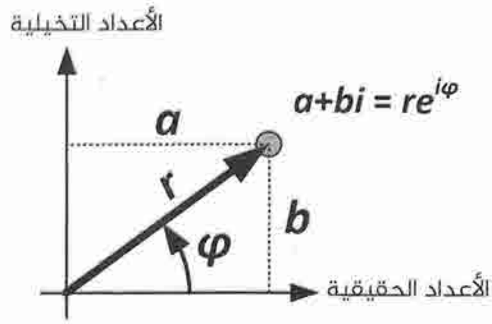
الصورة القطبية للعدد المركب

$$Z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال	الحل
اذا كان التمثيل القطبي للعدد المركب Z هو $(2, \frac{3\pi}{2})$ فإن التمثيل الديكارتي هو : أ) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ب) $(2,0)$ ج) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ د) $(0,-2)$	$r = 2$, $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270$ $x = r\cos\theta \to 2\ \cos 270 = 2 \times 0 = 0$ $y = r\sin\theta \to 2\ \sin 270 = 2 \times (-1) = -2$ $(x, y) = (0, -2)$

العدد المركب على صيغة أويلر

$$Z = r\,e^{i\theta}$$



مثال	الحل
إذا كان العدد المركب في المستوى الاحداثي $z = 1 + \sqrt{3}i$ ، أوجد العدد على صيغة اويلر ؟	$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \to \quad \theta = \frac{\pi}{3}$ $Z = 2\,e^{\frac{\pi}{3}i}$

ضرب الأعداد المركبة وقسمتها :

إذا كان $z_1 = (r_1, \theta_1)$ ، $z_2 = (r_2, \theta_2)$ فإن : $z_1 . z_2 = (r_1 . r_2 \ , \theta_1 + \theta_2)$	
مثال	**الحل**
اذا كان $z_1 = (2, 30^\circ)$ و $z_2 = (3, 20^\circ)$ عددين مركبين مختلفين فما قيمة العدد المركب $z_1 z_2$: أ) $(5, 50^\circ)$ ب) $(5, 60^\circ)$ ج) $(6, 50^\circ)$ د) $(6, 60^\circ)$	$z_1 . z_2 = (r_1 . r_2 \ , \theta_1 + \theta_2)$ $= (2 \times 3 \ , 30^\circ + 20^\circ)$ $= (6 \ , 50^\circ)$

إذا كان $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن : $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \ [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$	
مثال	**الحل**
إذا كان $z_1 = 5(\cos 115^\circ + i\sin 115^\circ)$ ، $z_2 = 2(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ)$ **أوجد** $z_1 \cdot z_2$ ؟	$z_1 \cdot z_2 = 5 \times 2 \ [\cos(115^\circ + 65^\circ) + i\sin(115^\circ + 65^\circ)]$ $= 10 \ [\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ]$ $= 10 \ [-1 + 0] = -10$

$z_1 \div z_2 = \frac{r_1}{r_2} \ [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$	
مثال	**الحل**
إذا كان $z_1 = 8(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$ ، $z_2 = 4(\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ)$ **أوجد** $z_1 \div z_2$ ؟	$z_1 \div z_2 = \frac{8}{4} \ [\cos(110 - 50) + i\sin(110 - 50)]$ $= 2 \ [\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ]$ $= 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right] = 1 + \sqrt{3}i$

نظرية ديموافر

اذا كان z عدداً مركباً على الصورة القطبية ، وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال : إذا كان $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ، **أوجد** z^6 ؟

الحل :

$$z^6 = 2^6 \left(\cos 6 \cdot \frac{\pi}{3} + i\sin 6 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 64 (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64 (1 + 0i) = 64$$


المعيار الرابع
القيـــاس
القيـــاس

المعيار الرابع
(القياس)

1) وحدات القياس والتحويل بينها ضمن النظام نفسه

2) مقياس الرسم

3) مسائل رياضية تطبيقية تشمل وحدات الزمن

1) وحدات القياس :

وحدات القياس

- **الطول**: يقاس بالمليمتر بالسنتيمتر بالمتر بالكيلومتر
- **المساحه**: تقاس سنتمتر مربع متر مربع قدم مربع ميل مربع
- **الحجم**: يقاس متر مكعب سنتيمتر مكعب ملم مكعب
- **الزوايا**: تقاس بالراديان بالدرجه
- **الزمن**: يقاس بالثانية بالدقيقة بالساعه باليوم .
- **الوزن**: يقاس بالطن غرام كيلو غرام

نوع القياس	**للتحويل :** **من وحده اكبر الى اصغر (نضرب)** **من وحده اصغر الى اكبر (نقسم)**
الطول	1 سم = 10 ملم 1 دسم = 10 سم 1 متر = 10 دسم 1 متر = 100 سم 1 كيلومتر = 1000 متر
المساحه	1 متر مربع = 100 × 100 سم مربع 1 كيلومتر مربع = 1000 × 1000 متر مربع
الحجم	1 متر مكعب =10 × 10 × 10 دسم مكعب = 1000 دسم مكعب 1 متر مكعب = 100 × 100 × 100 سم مكعب 1 كيلومتر مكعب = 1000 × 1000 × 1000 متر مكعب
الزوايا	$\pi = 180°$
الزمن	الدقيقة = 60 ثانية الساعه = 60 دقيقه اليوم = 24 ساعه الأسبوع = 7 ايام الشهر = 4 اسابيع السنه = 12 شهر
الوزن	1 غرام = 1000مليغرام 1 كيلو غرام = 1000 غرام 1 طن = 1000 كيلو غرام
حجم السائل	1 لتر = 1000 مليلتر 1 دسم مكعب = 1 لتر 1 متر مكعب = 1000 لتر

تمارين

الحـــل	مثال
$\frac{\text{1 سم}}{\text{26 سم}} = \frac{\text{10 ملم}}{x}$ $x = 26 \times 10 = 260$ ملم	1) __ ملم = 26 سم أ) 0,026 ملم ب) 0,26 ملم ج) 2,6 ملم د) 260 ملم
$\frac{\text{1000 جرام}}{\text{2450 جرام}} = \frac{\text{1 كجم}}{x}$ $x = \frac{2450}{1000} = 2,45$ ملم	2) كتلة كيس من التفاح 2450 جراما , فما كتلته بالكيلوجرامات ؟ أ) 0,0245 كجم ب) 2,45 كجم ج) 0,245 كجم د) 24,5 كجم
1 دقيقة = 60 ثانية 600 متر = 600 × 100 = 60000 سم $\frac{\text{1000 سم}}{\text{1 ث}} = \frac{\text{60000 سم}}{\text{60 ث}}$ 1000 سم في الثانيه	3) إذا كانت سرعة جسم 600 متر في الدقيقة , فكم سرعته بالسنتيمتر لكل ثانية ؟ أ) 3600 ب) 1000 ج) 360 د) 100
1 كم = 1000 متر 1 كم = 1000 × 100 = 100000 سم 1 كم^2 = 100000 × 100000 = 10000000000 سم بالضرب نحرك الفاصله يمين : $0,00064 \times 10000000000 = 6400000$	4) كم سنتيمتر مربع لكل $0,00064\ km^2$ ؟ أ) 0,64 ب) 64 ج) 64000 د) 6400000

2) مقياس الرسم :

- الاشياء التي تكون كبيرة جداً كما في الخرائط أوالتصاميم أو في رسوم مخططات المنازل يمكن تمثيلها بالتصغير .
- الاشياء التي تكون صغيرة جداً كالميكروبات والحشرات يمكن تمثيلها بالرسم أو بالتصوير وذلك باستخدام التكبير .
- مقياس الرسم أومقياس النماذج : هو عبارة عن النسبة الثابتة بين الأبعاد الخطية الموجودة على الرسم أو الخريطة والأبعاد الأصلية المقابلة لها على الطبيعه ، وهي لاتعني دائماً نسبة القياس الاصغر الى القياس الاكبر.
- يكتب المقياس بثلاثة اشكال :

المقياس الكتابي	المقياس النسبي	المقياس الكسري	المقياس الخطي
$1\,cm : 5\,m$	$1 : 500$	$\frac{1}{500}$	0 5 10 15 20 25 m

- في كتابة وقراءة مقياس الرسم ، مهم جداً الانتباه الى اتجاه الكتابة . الاتجاه هو من اليسار الى اليمين .
- العدد في اليسار يمثل قياسات الجسم في الرسم ، والعدد في اليمين يمثل قياسات الجسم في الواقع .
- في مقياس الرسم ، اذا لم يكتب اسماء وحدات القياس ، فإن مقياس الرسم يمثل النسبة بين عدد وحدات القياس من نفس النوع في التمثيل وفي الواقع .

مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

مثال	الحل
1) في نموذج طائرة إذا كان 1 سم = 6 أمتار فإن عامل مقياس الرسم يساوي : أ) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{1}{60}$ ج) $\frac{1}{600}$ د) $\frac{1}{6000}$	$\frac{1\text{ سم}}{6\text{ م}} = \frac{1\text{ سم}}{600\text{ سم}}$ مقياس الرسم = $\frac{1}{600}$
2) المسافه بين بلدين 25 كيلو متر , فإذا كانت المسافه بين البلدين على الخريطة 5 سنتيمترات , جد مقياس الرسم الذي رسمت به هذه الخريطة ؟ أ) $\frac{1}{5}$ ب) $\frac{1}{500}$ ج) $\frac{1}{5000}$ د) $\frac{1}{500000}$	الكيلومتر = 1000 متر المتر = 100 سم ∴ الكيلومتر = $1000 \times 100 = 100000$ سم 25 كيلو متر = $25 \times 100000 = 2500000$ سم مقياس الرسم = $\frac{5\text{ سم}}{25\text{ كم}} = \frac{5}{2500000} = \frac{1}{500000}$
3) إذا كان مقياس الرسم في خريطة $1\ cm : 250\ km$ ، وكان المسافة بين مدينتين في الخريطة $3.5\ cm$ ، فكم المسافة الفعلية بين المدينتين بالكيلو متر؟ أ) 625 ب) 725 ج) 875 د) 975	مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$ $\frac{1cm}{250km} = \frac{3.5cm}{x}$ $x = 250 \times 3.5 = 875$
4) إذا كان مقياس الرسم على الخريطة 1 سنتيمتر:40 كيلو متراً, وكانت المسافة بين المدينتين في الخريطة 30 سنتيمتراً, فكم المسافة الفعلية بينهما بالكيلو متر؟ أ) 120 ب) 240 ج) 1200 د) 2400	مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$ $\frac{1cm}{40\ km} = \frac{30\ cm}{x}$ $x = 40 \times 30 = 1200$

3) مسائل رياضية تطبيقية تشمل وحدات الزمن :

مثال	الحل
انطلقت سيارة A الى المدينة B بسرعة $60km/h$ وانطلقت بعدها بنصف ساعة سيارة بسرعة $80km/h$ ، فبعد كم دقيقة سيلتقيان ؟ أ) $15\ min$ ب) $30\ min$ ج) $60\ min$ د) $90\ min$	زمن الألتقاء = $\dfrac{\text{السرعة الأولى} \times \text{الفارق الزمني بينهما}}{\text{السرعة الثانية} - \text{السرعة الأولى}}$ $t = \frac{30\times60}{80-60} = \frac{1800}{20} = 90$
عند الساعة الثامنة انطلقت سيارة من المدينة A بسرعة $80km/h$. بعدها بساعة تبعتها على نفس الطريق سيارة سرعتها $120km/h$ ، متى تلحق السيارة الثانية بالسيارة الاولى ؟ أ) $10:00$ ب) $10:30$ ج) $11:00$ د) $11:30$	زمن الألتقاء = $\dfrac{\text{السرعة الأولى} \times \text{الفارق الزمني بينهما}}{\text{السرعة الثانية} - \text{السرعة الأولى}}$ $t = \frac{1\times80}{120-80} = \frac{80}{40} = 2\ h$ ∴ يلتقيان بعد ساعتين من انطلاق السيارة الثانية بما أن السيارة الثانية انطلقت الساعة التاسعة اذن يلتقيان معاً عند الساعة الحادية عشر
هناك سيارتان الأولى تسير بسرعة $100\ km/h$ والثانية تسير بسرعة $110\ km/h$ ، بعد كم دقيقة يصبح الفرق بينهم $20\ km$ ؟ أ) $30\ min$ ب) $60\ min$ ج) $90\ min$ د) $120\ min$	الفرق بينهما بعد $1h \longleftarrow 10\ km/h$ $t \longleftarrow 20\ km/h$ $t = \frac{20}{10} = 2\ h$ الزمن بالدقايق $t = 60\ min \times 2 = 120\ min$
تستهلك سيارة L 30 في الساعة, وسيارة أخرى تستهلك $20\ L$ في الساعة. احسب الفرق في عدد اللترات بينهما بعد 10 ساعات؟ أ) $100\ L$ ب) $120\ L$ ج) $210\ L$ د) $500\ L$	$30\ L \times 10 = 300$ $20\ L \times 10 = 200$ الفرق بعد 10 ساعات يساوي $300 - 200 = 100$
حوض ماء تملئه الحنفية الاولى في ساعتين والثانية في 3 ساعات والثالثة في 6 ساعات, اذا كان الحوض فارغ وفتحنا الحنفيات في وقت واحد بكم ساعة يمتلئ الحوض؟ أ) ساعة ب) ساعة ونصف ج) ساعتين د) ساعتين ونصف	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$ ساعة واحده
حنفية تملئ الحوض في 4 ساعات وأخرى في 3 ساعات وهناك مخرج يفرغ الحوض في ساعتين, لو شغلنا الحنفيتان والمخرج معاً كم ساعة نحتاج لملء الحوض؟ أ) 2 ب) 4 ج) 6 د) 12	$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

للوصول إلى فيديوهات
شروحات المعايير
اضغط هنا

المعيار الخامس
(الإحصاء)

1) **الدراسات المسحية وانواع العينات**
(أساليب جمع العينات / العينات العشوائية)

2) **التمثيلات البيانية**
(الجداول / القطاعات الدائرية / المدرج التكراري)

3) **مقاييس النزعة المركزية**
(المتوسط الحسابي / الوسيط / المنوال)

4) **مقاييس التشتت**
(المدى/الربيعيات / المدى الربيعي / التباين / الانحراف المعياري)

5) **التوزيع المتصل والمنفصل .**

1) الدراسات المسحيه وانواع العينات :

- **الدراسة المسحية :**

إحدى الطرائق المنهجية للبحث والمعرفة وهي جزء من المنهج الوصفي لدراسة ظاهرة ما للخروج بنتائج دقيقة عنها والتنبؤ بحجم الظاهرة في المستقبل .
ومن اهم أدواتها الاستبيانات والمقابلات الشخصية والاتصال بالهاتف...الخ

- **العينـــات :**

- العينة : اختيار مجموعة صغيرة من مجتمع لإجراء الدراسة عليها.

مثال توضيحي :

المجتمع	طلاب الصف الثاني المتوسط جميعاً
العينة	مجموعة من طلاب الصف الثاني متوسط

- **أنواع العينـــات :**

العينات غير المتحيزة : تُعطي العينة غير المتحيزة نتائج صادقة لتمثيل المجتمع.

النوع	الوصف	مثال توضيحي
العينة العشوائية البسيطة	فرص اختيار عناصر أو أفراد المجتمع متساوية	يكتب كل طالب اسمه على قصاصة ورقية وتوضع الأسماء في صندوق وتُسحب القصاصات دون النظر إليها.
العينة العشوائية الطبقية	يقسم المجتمع إلى مجموعات متشابهة ، ثم يتم اختيار عينة عشوائية بسيطة من كل نوع	يتم اختيار الطلاب عشوائياً من كل مرحلة من مراحل الدراسة
العينة العشوائية المنتظمة	يتم اختيار العناصر أو الأفراد بناء على فترة زمنية أو فئة محددة	يتم اختيار الطالب الذي ترتيبة20 ومضاعفات الـ20 من القائمة المرتبة أبجدياً للطلاب الملتحقين بالمدرسة

العينات المتحيزة : في العينة المتحيزة يتم تفضيل بعض أقسام المجتمع على سائر الأقسام.

النوع	الوصف	مثال توضيحي
العينة الملائمة	تتكون من أفراد المجتمع الذين يسهل الوصول إليهم	لتمثيل جميع الطلاب الملتحقين بالمدرسة يتم اختيار أحد الفصول بالمدرسة لإجراء الدراسة
العينة التطوعية	تتكون من أفراد يرغبون في الانضمام إلى العينة	يقوم طلاب المدرسة الراغبون في إبداء آرائهم بتعبئة استبانة الدراسة الإحصائية على شبكة المعلومات

2) التمثيلات البيانية :

تأخذ الظواهر الإحصائية المدروسة قيماً عددية كثيرة ومتكررة ، كما هو عليه الحال أثناء توزيع درجات الطلاب في مادة دراسية مثلاً أو تصنيف أعمار عناصر مجتمع معين أو كمية السيارات المستوردة من بلد معين .
إن تصنيف وتبويب مجمل البيانات المدروسة يعني بالضرورة ترتيب هذه البيانات تصاعديا أو تنازلياً مما يسمح لنا استخلاص صورة واضحة عن المدى الذي تتراوح فيه البيانات على عدد من الفئات حيث يتم تفريغ المعلومات على أساس هذه الفئات، ومن ثم نحدد العدد المقابل لكل فئة من هذه الفئات لنستنتج تكرارات القيم العددية ضمن فئاتها .

• أنواع التمثيلات البيانية :

تمثل القراءات التالية الفترات الزمنية التي يقضيها 80 طالباً من طلاب كليات الجامعة في المكتبة أسبوعياً.

24	15	22	28	17	12	20	16	23	16
22	15	23	18	11	21	17	30	16	29
19	39	19	18	14	20	28	18	29	24
20	22	34	12	29	25	17	23	20	18
24	14	32	27	18	21	15	19	17	16
21	19	23	26	24	13	23	15	25	22
25	16	18	23	20	10	22	15	18	16
15	26	17	20	21	19	20	21	27	31

جدول التوزيع التكراري :

مثال : شكل جدول توزيع تكراري لهذه البيانات .

- بما أن أصغر قراءة هي 10 وأكبر قراءة 39 فيمكن حساب المدى وهو $R = 39 - 10 = 29$
- باختيار عدد الفئات 6 (اختياري) يمكن أن نحسب طول الفئة وهي هنا $29 \div 6 = 4.833 \approx 4$
- حدود الفئات هي اقل قيمة مضاف لها طول الفئة وهكذا

$$10 - 14 , 15 - 19 , 20 - 24 , 25 - 29 , 30 - 34 , 35 - 39$$

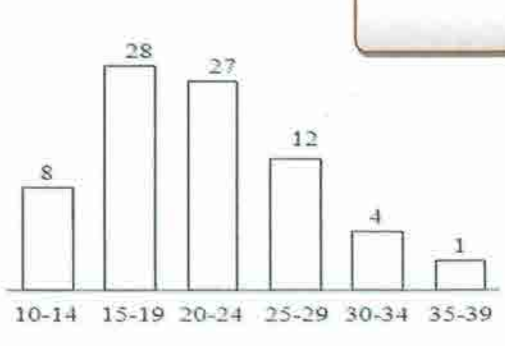
ساعة	العلامات الاحصائية	التكرارات
$10 - 14$	~~///~~ ///	8
$15 - 19$	~~///~~ ~~///~~ ~~///~~ ~~///~~ ~~///~~ ///	28
$20 - 24$	~~///~~ ~~///~~ ~~///~~ ~~///~~ ~~///~~ //	27
$25 - 29$	~~///~~ ~~///~~ //	12
$30 - 34$	~~///~~	4
$35 - 39$	/	1
المجموع		80

ملاحظة : ~~///~~ حزمة تعبر عن 5 تكرارات

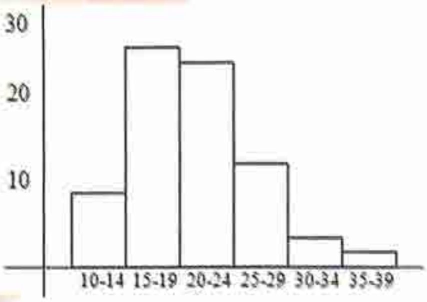
الأعمدة البيانية :

وبشكل مشابه للمدرج التكراري هناك تمثيلاً يدعى **الأعمدة البيانية** حيث تمثل ارتفاعات هذه الأعمدة (المستطيلات غير المتلاصقة) التكرارات الموافقة لفئاتها .

مثال :
مثل بيانياً وبطريقة الأعمدة المستطيلة البيانات الممثلة بجدول التوزيع التكراري على افتراض أنها ليست مستمرة (منفصلة) .



المدرج التكراري :

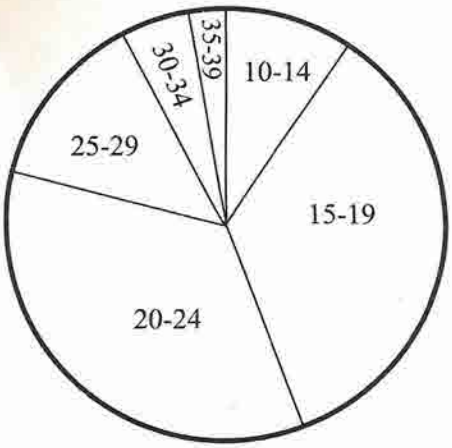


تتمثل هذه الطريقة برسم مجموعة من **المستطيلات المتلاصقة ذات عرض واحد ولكنها بأطوال مختلفة** حيث يتناسب طول كل مستطيل مع تكرار الفئة التي يمثلها , ويجب الانتباه هنا إلى أن المدرج التكراري لا يمكن استخدامه عندما تكون الفئات مفتوحة

مثال : مثل بيانياً المعلومات الواردة في الجدول مستخدماً طريقة المدرج التكراري .

التمثيل الدائري :

يحسب التكرار النسبي لكل فئة ثم يضرب في $360°$ وهي درجات الدائرة حول مركزها ، فالزاوية الناتجة تمثل مساحة القطاع المقابل للفئة .



- فئة $14 - 10$زاوية قطاعها : $\frac{8}{80} \times 360 = 36°$
- فئة $19 - 15$ زاوية قطاعها: $\frac{28}{80} \times 360 = 126°$
- فئة $24 - 20$ زاوية قطاعها : $\frac{27}{80} \times 360 = 121°$
- فئة $29 - 25$ زاوية قطاعها : $\frac{12}{80} \times 360 = 54°$
- فئة $34 - 30$ زاوية قطاعها : $\frac{8}{80} \times 360 = 18°$
- فئة $39 - 35$ زاوية قطاعها : $\frac{8}{80} \times 360 = 5°$

مثال	الحل
1) القطاع الدائري الآتي يمثل توزيع ألوان48 قميصاً ماعد القمصان الزرقاء ؟  أ) **16** ب) **12** ج) **8** د) **6**	$\frac{60}{360} \times 48 = \frac{1}{6} \times 48 = 8$
2) الشكل ادناه يمثل نتائج استبيان عن المادة الدراسية المفضلة أجري على 220 طالباً في مدرسة ابتدائية كم طالباً يفضلون مادة العلوم ؟  أ) **11** ب) **22** ج) **44** د) **88**	نوجد نسبة العلوم من 100% $100 - (30 + 15 + 35) = 100 - 80 = 20\%$ عددهم← $\frac{20}{100} \times 220 = 44$

3) مقاييس النزعة المركزية :

1) المتوسط الحسابي : (الوسط الحسابي)

$$X = \frac{\sum x}{n}$$

هو الإحصائي الذي يأخذ في الاعتبار جميع البيانات ، قيمته تساوي مجموع البيانات مقسوماً على عددها ، ويكون أكثر فائدة عندما لاتحتوي البيانات قيماً متطرفة .

مثال :	احسب المتوسط الحسابي لما يلي: 5 , 8 , 1 , 2
الحل :	$X = \frac{5+8+1+2}{4} = \frac{16}{4} = 4$

2) الوسيط :

هو القيمة التي تقسم البيانات إلى جزئيين بحيث يكون عدد البيانات التي أقل منها يساوي عدد البيانات التي أكبر منها مع مراعاة ترتيب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً ، يكون اكثر فائدة عندما تحتوي البيانات قيماً متطرفة ، ولاتوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات .

القيمة المتطرفة : هي واحدة من البيانات أكبر أو أصغر كثيراً من بقية البيانات .

أ) إذا كان عدد البيانات فردياً :

مثال :	إذا كانت الأعداد التالية تمثل أعمار سبعة طالبات من المستوى الثاني ، ما وسيط البيانات ؟ 24 , 22 , 19 , 23 , 20 , 21 , 18
الحل :	نرتب الاعمار ترتيبا تصاعديا 18 19 20 21 22 23 24 الوسيط = 21

ب) إذا كان عدد البيانات زوجياً :

	القيمة ليست متكررة	القيمة متكررة
مثال	إذا كانت الأعداد التالية تمثل أعمار ثمانية طالبات من المستوى الثاني ، ماوسيط البيانات ؟ 23 , 19, 21 , 25 , 20, 22, 18, 24	إذا كانت الأعداد التالية تمثل أعمار ثمانية طالبات من المستوى الثاني ، ، ماوسيط البيانات ؟ 23, 19, 22 , 25 , 20, 22, 18, 24
الحل	• نرتب الأعداد تصاعدياً 18 19 20 21 22 23 24 25 • الوسيط = $\frac{21+22}{2} = 21.5$	• نرتب الأعداد تصاعدياً 18 19 20 22 22 23 24 25 • الوسيط = 22

3) المنوال :

هو عبارة عن القيمة التي تتكرر أكثر من غيرها أو الأكثر شيوعاً .

مثال	الحل
احسب المنوال للبيانات : 9 , 7 , 2 , 5 , 1 , 0 , 0	المنوال = 0 (وحيد المنوال)
احسب المنوال للبيانات : 9 , 7 , 7 , 2, 5 , 1 , 0 , 0	المنوال = 0 و 7 (مزدوج المنوال)
احسب المنوال للبيانات : 3, 3, 9, 7, 7, 2, 5, 1, 0, 0	المنوال = 0 و 3 و 7 (ثلاثي المنوال)
احسب المنوال للبيانات : 9, 9, 7, 7, 0, 0	(لايوجد منوال لأن القيم تتكرر بالتساوي)

الحـــل	مثـال
$\frac{(2x+7)+(3-2x)}{2}=y$ $\frac{2x-2x+7+3}{2}=y \Longrightarrow \frac{10}{2}=y$ $2y=10 \Longrightarrow y=5 \Longrightarrow 5y=25$	1) إذا كان المتوسط الحسابي للعددين $(2x+7), (3-2x)$ يساوي y فإن 5y تساوي ؟ أ) 30 ب) 25 ج) 20 د) 15
الوسط الحسابي لخمسة أعداد = 12 مجموع الاعداد الخمسة $5 \times 12 = 60$ الوسط الحسابي لثلاثة اعداد = 10 مجموع الاعداد الثلاثة $3 \times 10 = 30$ مجموع العددين الباقيين $\therefore 60 - 30 = 30$ الوسط الحسابي $\Rightarrow \frac{30}{2} = 15$	2) الوسط الحسابي لخمسة أعداد يساوي 12 إذا حذفنا ثلاثة أعداد وسطها الحسابي 10 فما الوسط الحسابي للعددين الباقيين؟ أ) **12** ب) **13** ج) **14** د) **15**
الوسط الحسابي = 3.6 الوسيط = 3 المنوال = 3 الوسط الحسابي أعلى من الوسيط والمنوال	3) إذا كانت درجات مجموعة طلاب في اختبار هي كالتالي 1,2,3,6,6,5,4,3,3 فإن : أ) الوسط الحسابي أقل من الوسيط و أعلى من المنوال ب) الوسط الحسابي أعلى من الوسيط وأقل من المنوال ج) الوسط الحسابي أعلى من الوسيط و المنوال د) الوسط الحسابي أقل من الوسيط و المنوال
مجموع درجات 3 اختبارات $76 \times 3 = 228$ أقل درجة يجب ان يحصل عليها في الاختبار الرابع ليكن تقديره B← $B = 80\%$ مجموع درجات 4 اختبارات $80 \times 4 = 320$ $\Rightarrow \quad 320 - 228 = 92\%$	4) حصل نواف على متوسط درجات 76% في ثلاث اختبارات , ما أقل درجة يجب أن يحصل عليها في الاختبار الرابع ليكون تقديره B ؟ (نسبة الحصول على تقدير B هو 80% كحد ادنى) أ) 90% ب) 94% ج) 92% د) 84%
نوجد المجموع من المتوسط $10 \times 4 = 40$ نجرب الخيارات : نعوض عن كل x بـ 3 $1+3+9+27=40$ $\therefore x = 3$	5) إذا كان المتوسط الحسابي للأعداد الطبيعية $1, x, x^2, x^3$ هو 10 فما قيمة x ؟ أ) **1** ب) **2** ج) **3** د) **4**
مجموع الدرجات $7 \times 5 = 35$ مجموع درجاته في اربع اختبارات هي $8.5+8+8+9.5=34$ نوجد الاختبار الخامس $x = 35 - 34 = 1$	6) متوسط درجات يزيد في 5 اختبارات لمقرر دراسي 7 درجات، إذا كانت درجاته في 4 اختبارات 9.5, 8 , 8 , 8.5 ، فكم درجته في الاختبار الخامس ؟ أ) **5** ب) **4** ج) **2** د) **1**

مثال	الحل
7) اوجد الوسيط للأعداد إذا كان $x > 2$, $2x+3\ ,\ 3x\ ,\ x\ ,\ 2x+2$	نفرض عدد اكبر من2 وليكن 3 الاعداد 8 , 3 , 9 , 9 ترتيب تصاعدي 9 , 9 , 8 , 3 الوسيط $= \frac{8+9}{2} = 8.5$
8) في أحدى الادارات يعمل 5 موظفين إذا كان موظفان يتقاضان 50 ريالاً في الساعة و موظف 80 ريالاً في الساعة وموظف 100 ريال في الساعة وموظف 120ريال في الساعة فكم ريالاً في الساعة وسيط ما يتقاضون موظفي الإدارة ؟ أ) 80 ب) 50 ج) 100 د) 120	نرتب القيم تصاعديا 50, 50 ,80 ,100,120
9) يستخدم الوسيط لوصف البيانات عندما ؟ أ) تريد وصف انتشار البيانات ب) تحتوي مجموعة البيانات قيماً متطرفة ج) تحتوي مجموعة البيانات قيماً متساوية د) لا تحتوي مجموعة البيانات قيماً متطرفة	تحتوي مجموعة البيانات قيماً متطرفة
10) حصلت فاطمة على الدرجات التالية 90,86,87 في أول ثلاث اختبارات ما الدرجة التي يجب ان يحصل عليها في الاختبار الرابع حتى يكون متوسط درجاتها 90 ؟ أ) 91 ب) 93 ج) 97 د) 98	المتوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع الدرجات}}{\text{عدد الاختبارات}}$ $\frac{86+87+90+x}{4} = 90$ $263 + x = 360$ $x = 360 - 263 = 97$
11) اذا كان المتوسط الحسابي لست اعداد هو 20 , وكان متوسط مجموع عددين منهما 50 , فما المتوسط الحسابي لبقية الأعداد الأربعة ؟ أ) 5 ب) 6 ج) 7 د) 10	مجموع الاعداد الست $6 \times 20 = 120$ مجموع عددين $2 \times 50 = 100$ مجموع الاعداد الأربعة $120 - 100 = 20$ المتوسط $= \frac{20}{4} = 5$
12) إذا كان المتوسط الحسابي للقيم x,11,14,8 هو 12 فما هي أعلى قيمة في هذه القيم : أ) 11 ب) 14 ج) 15 د) 16	• مجموع القيم = المتوسط × عدد القيم $12 \times 4 = 48$ $x + 11 + 8 + 14 = 48$ $x + 33 = 48$ $x = 48 - 33 = 15$
13) اوجد المنوال للقيم 8, 2, 3, 7, 2 , 5 ؟ أ) 2 ب) 3 ج) 5 د) 6	المنوال هو العدد الأكثر تكراراً 2

الحـــل	مثـال
المتوسط = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{399}{3} = 133$ الاعداد هي 131 133 135 متوسط أول عددين = $\frac{133+131}{2} = 132$	14) ثلاثة أعداد فردية متتالية مجموعها 399 ، فما هو المتوسط الحسابي للعدد الأول والثاني : أ) 130 ب) 131 ج) 132 د) 133
المتوسط = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{396}{6} = 66$ ، نضع 6 مربعات ، متوسط الاعداد 66 ولكنه ليس فردي فيكون 61 63 65 66 67 69 71 متوسط أول عددين = $\frac{61+63}{2} = 62$	15) مجموع 6 اعداد فردية متتالية 396 اوجد متوسط اول عددين ؟ أ) 61 ب) **62** ج) 63 د) **64**
نضع 15 مربع ، متوسط هذه الاعداد 15 ، وبما أن المطلوب أول خمس اعداد، نكتفي باليسار 8 9 10 11 12 13 14 15 متوسط أول خمس اعداد = 10	16) 15 عدد متتالي متوسطهم 15 ، فما متوسط اول خمسة اعداد ؟ أ) 5 ب) **8** ج) 10 د) **15**
نضع خمس مربعات ، متوسطها 8 لانها اعداد متتالية نكمل الباقي 6 7 8 9 10 أكبر عدد هو 10	17) خمسة اعداد متتالية متوسطهم 8 فأوجد أكبر عدد فيها ؟ أ) **8** ب) **10** ج) **11** د) **12**
$\frac{a+b+c}{3} = 4 \Longrightarrow a+b+c = 12$ $\frac{d+e+f+g}{4} = 6 \Longrightarrow d+e+f+g = 24$ $\frac{12+24}{7} = 5.14$	18) اذا علمت ان متوسط 3 اعداد مختلفة هو 4 ، ومتوسط 4 اعداد أخرى هو 6 ، فإن متوسط جميع الاعداد : أ) **5.14** ب) **5** ج) **6.24** د) **3.75**
نضع 4 مربعات ، متوسطهم 12 ، × 12 11 متوسط ثلاث درجات بعد حذف الاعلى = 11 نلاحظ أنه بعد إكمال الاعداد 15 12 13 12 11 10 9 أعلى درجة = 15	19) اذا كان متوسط درجات اربع طلاب يساوي 12 ، اذا حذفنا أعلى درجة يصبح المتوسط 11 فما قيمة أعلى درجة ؟

مثال	الحل
20) المتوسط الحسابي لأربع اعداد يساوي 20 ، فإذا كان المتوسط الحسابي عند استبعاد إحدى هذه الأعداد يساوي 15 ، فإن العدد الذي تم استبعاده هو : أ) **5** ب) **20** ج) **32** د) **35**	نفرض أن مجموع 4 اعداد هو x $\frac{x}{4}=20 \rightarrow x=80$ نفرض أن مجموع 3 اعداد هو y $\frac{y}{3}=15 \rightarrow y=45$ العدد المستبعد= $x-y= 80-45= 35$
21) متوسط ست اعداد فردية متتالية 8 ، احسب متوسط آخر عددين ؟ أ) **11** ب) **12** ج) **13** د) **14**	نضع 6 مربعات ، متوسط الاعداد 8 ولكنه ليس عدد فردي فيكون $\boxed{3}\quad \boxed{5}\quad \boxed{7}\ 8\ \boxed{9}\quad \underbrace{\boxed{11}\quad \boxed{13}}$ متوسط أخر عددين = 12
22) عددان متوسطهما الحسابي 48 ، والفرق بينهم 196 فما العدد الأكبر ؟ أ) **50** ب) **52** ج) **146** د) **147**	نفرض أن العددين x, y المتوسط $= \frac{x+y}{2} = 48 \Longrightarrow x+y=96$ الفرق بينهما $\Longrightarrow x-y=196$ $\xRightarrow{\text{نحل النظام بالجمع}} 2x=196+96$ $x=\frac{292}{2}=146$ $146+y=96 \quad \Longrightarrow y=-50$
23) متوسط درجات سلطان في أول خمسة اختبارات قصيرة هو 92 ، فإذا أراد تحسين متوسط درجاته ليصبح 93 ، فما الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الاختبار القصير التالي : أ) **95** ب) **98** ج) **97** د) **100**	• مجموع الاختبارات الخمسة = المتوسط ×عدد القيم $92 \times 5 = 460$ • مجموع الاختبارات الستة = المتوسط × عدد القيم $93 \times 6 = 558$ • الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الاختبار الأخير $558 - 460 = 98$
24) إذا علمت أن 7 هو وسيط البيانات $3,11,2,13,x,1,3,8,9$ فما هي قيمة x ؟ أ) **3** ب) **6** ج) **7** د) **8**	نرتب البيانات ترتيب تصاعدي: $1,2,3,3,7,8,9,11,13$ $\downarrow$ الوسيط
25) اشترى أحمد 3 كتب قيمة كل واحد منها 15ريالاً. ثم اشترى كتابين أحدهما بـ 10 ريالات والأخر بـ 20 ريالاً ما متوسط أسعار الكتب التي اشتراها أحمد ؟ أ) **14** ب) **15** ج) **16** د) **17**	متوسط الحسابي $= \frac{15+15+15+10+20}{5}$ $= \frac{75}{5} = 15$

4) مقاييس التشتت :

تشير الى مقدار تباعد البيانات أو تقاربها عن الوسط الحسابي .

1) **المدى** : يستخدم لوصف انتشار البيانات ، وقيمته = اكبر قيمه – اصغر قيمه
2) **الربيع الأدنى** : وسيط النصف الأدنى من البيانات .
3) **الربيع الأعلى** : وسيط النصف الأعلى من البيانات .
4) **المدى الربيعي** : هو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.

مثال : أوجد مقاييس التشتت للبيانات في الجدول المجاور

نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا 204 139 123 85 85 40 24 20

الحل

- المدى يساوي $204 - 20 = 184$
- الوسيط = 85
- الربيع الأدنى= $\frac{24+40}{2} = 32$
- الربيع الأعلى = $\frac{123+139}{2} = 131$
- المدى الربيعي يساوي $131 - 32 = 99$

برامج قناة رياضية في عام

المباراة	العدد
سباق سيارات	20
سباق الخيل	40
كرة القدم	204
كرة السلة	123
كرة اليد	85
كرة الطائرة	139
تنس الطاولة	85
السباحة	24

5) التباين :

تباين عينة

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

مجموع مربعات (الفرق بين القيم والمتوسط)

$n-1$

أو

$$S^2 = \frac{\sum(x_i)^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

مجموع مربعات القيم – n × مربع المتوسط

$n-1$

تباين مجتمع

$$S^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

مجموع مربعات (الفرق بين القيم والمتوسط)

n

أو

$$S^2 = \frac{\sum(x_i)^2 - n\bar{x}^2}{n}$$

مجموع مربعات القيم – n × مربع المتوسط

n

6) **الانحراف المعياري** : هو $\sqrt{S^2}$ الجذر التربيعي الموجب للتباين. أهم مقاييس التشتت وأكثرها استخداما .

مثال : إحسب التباين والانحراف المعياري للقيم 9 , 5 , 3,4, 2 , 1

الحل : بالخطوات

$\overline{x}$ المتوسط الحسابي $= \frac{1+2+3+4+5+9}{6} = \frac{24}{6} = 4$

مجموع مربع (الفرق بين القيم والمتوسط)

$= (1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (9-4)^2$

$= (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (5)^2$

$= 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 25 = 40$

التباين $S^2 = \frac{40}{6-1} = \frac{40}{5} = 8$

الانحراف المعياري $S = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$

مثال : إحسب التباين والانحراف المعياري للقيم 16 , 14 , 10 , 8 , 2

الحل : بالجدول

$\overline{x}$ المتوسط الحسابي $= \frac{2+8+10+14+16}{5} = \frac{50}{5} = 10$

القيم	مربع الفرق بين القيم والمتوسط
x_i	$(x_i - \overline{x})^2$
2	64
8	4
10	0
14	16
16	36
$\sum x_i = 34$	$\sum (x_i - \overline{x})^2 = 120$

التباين $S^2 = \frac{\text{مجموع مربعات (الفرق بين القيم والمتوسط)}}{n-1} = \frac{120}{4} = 30$

الانحراف المعياري $S = \sqrt{30}$

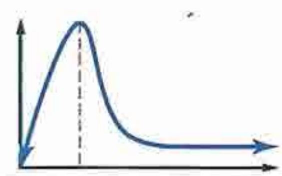
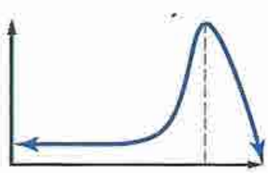
مثال	الحل
1) إذا كان عدد الساعات التدريبية لخالد خلال 5 ايام متتالية على النحو التالي 1,2,2,3,4 فإذا تدرب في اليوم الأول ساعتين بدلاً من ساعة فأي القيم التالية ستقل ؟ أ) المدى ب)المنوال ج)الوسيط د)المتوسط الحسابي	4,3,2,2,1 الواحد يصبح 2⟵ لأنه تدرب ساعتين 4,3,2,2,2 المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة في القيمة الاولى 3=1-4 في القيمة الجديدة 2=2-4 ∴ الجواب هو المدى
2) اذا كان المدى للبيانات الآتية $6,7,10,x,15,20$ يساوي 15 ، فأي القيم الآتية يمكن أن تكون قيمة x ؟ أ) **3** ب) **11** ج) **16** د) **21**	المدى = اكبر قيمة ـ اصغر قيمة $x-6=15$ $x=15+6=21$
3) في أي الفترات التالية يقع الانحراف المعياري للدرجات{ 9,10,12,11,8 } ؟ أ) $[0,1)$ ب) $[1,2)$ ج) $[2,3)$ د) $[3,4)$	$\sum x=8+9+10+11+8=50$ $\sum x^2=64+81+100+121+144=510$ $\sigma=\sqrt{\frac{\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}}=\sqrt{\frac{510-\frac{(50)^2}{5}}{5-1}}$ $=\sqrt{\frac{510-500}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}\approx\frac{1}{2}(3)$ $=1.5\in[1,2)$
4) لدينا 10 قراءات احصائية مجموع مربعاتها 520 ، فإذا كان متوسط هذه القراءات هو 4 ، فإن الانحراف المعياري لها : أ) **5** ب) **6** ج) **16** د) **20**	**بما أن المتوسط 4 للقراءات كلها ، فهو يمثل متوسط مجتمع** $\sum(x_i)^2=520$ *مجموع مربعاتها* $\bar{x}^2=4^2=16$ *مربع المتوسط* $n\bar{x}^2=10\times16=160$ *مربع المتوسط في عدد البيانات* $S^2=\frac{\sum(x_i)^2-n\bar{x}^2}{n}=\frac{520-160}{10}=\frac{360}{10}=36$ $S=\sqrt{36}=6$
5) قام طالب بأخذ 9 قياسات ثم ألغى أكبر قيمتين و أصغر قيمتين فتبقى لديه 5 قيم . أي مما يلي لن يتأثر بحذف القيم الأربع : أ) المتوسط الحسابي ب) الوسيط ج) المدى د) الانحراف المعياري	المدى = اكبر قيمة – اصغر قيمة (يتأثر) المتوسط الحسابي =مجموع القيم على عددها (يتأثر بحسب الاعداد) والانحراف المعياري يتأثر بتغير المتوسط الحسابي الوسيط لم يتأثر لانه حذف نفس عدد القيم من البداية والنهاية

5) التوزيع المنفصل والمتصل :

من التوزيعات الاحتمالية في علم الاحصاء التوزيعات الطبيعية والملتوية ، غير أن التوزيع الطبيعي افضلها لأنه يمثل كثيراً من الظواهر التي تقابلنا في الحياة العملية مثل الأطوال و الأوزان و الأعمار ودرجات الحرارة ... و غيرها من الظواهر المتصلة .

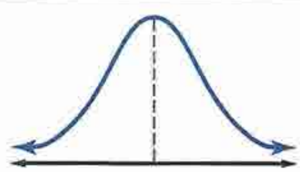
- **التوزيعات المنفصلة (توزيعات ملتوية) :**

تأخذ عدداً محدوداً من القيم وغالباً ماتكون أعداد صحيحه .

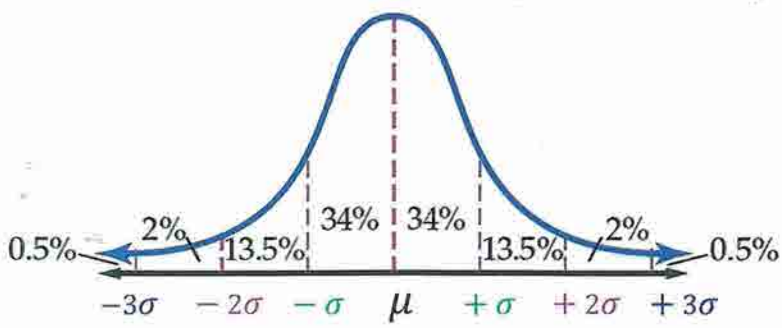
التواء موجب (ملتوِ الى اليمين)	التواء سالب (ملتوِ الى اليسار)
	
▪ معظم البيانات تتمركز في **اليسار**	▪ معظم البيانات تتمركز في **اليمين**

- **التوزيعات المتصلة (التوزيع الطبيعي) :**

توزيع احتمالي متغيره العشوائي متصل ، يأخذ عدداً غير محدد من القيم مة في فترة من الأعداد الحقيقية .

توزيع طبيعي	 المتوسط=الوسيط=المنوال	▪ منحنى يشبه الجرس ▪ متماشل حول المستقيم الرأسي المار بالمتوسط ▪ يتساوى فيه المتوسط والوسيط والمنوال ▪ يقترب من المحور x ولكن لا يمسه ▪ المساحة تحت المنحنى تساوي 1 أو 100%

- **القانون التجريبي (خصائص التوزيع الطبيعي) :**

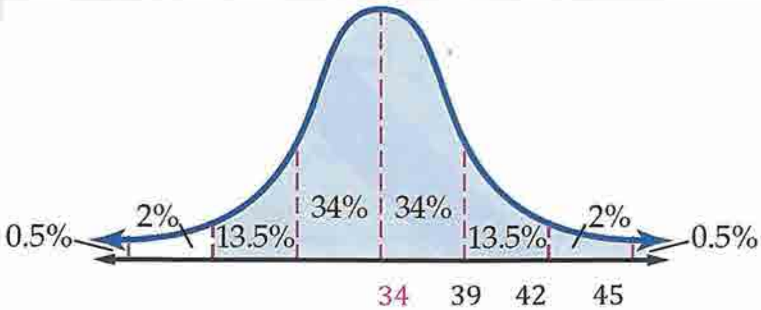


ليكن المتوسط الحسابي μ ، والانحراف المعياري σ :

- تقع 68% من البيانات ضمن الفترة $(\mu-\sigma\ ,\ \mu+\sigma)$
- تقع 95% من البيانات ضمن الفترة $(\mu-2\sigma\ ,\ \mu+2\sigma)$
- تقع 99% من البيانات ضمن الفترة $(\mu-3\sigma\ ,\ \mu+3\sigma)$

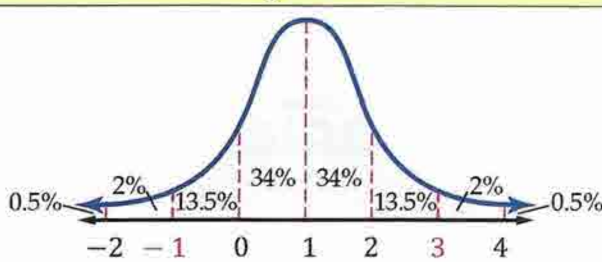
مثال : توزيع طبيعي متوسطه (34) وانحرافه المعياري (5) ، أوجد احتمال أن تزيد قيمة لـ x عشوائياً في هذا التوزيع عن (39) ؟

الحل :



إحتمال أن تزيد قيمة x أكثر من 39 :

$$p(x > 39) = \%13.5 + \%2 + \%0.5 = \%16$$

مثال	الحل
لدينا مجموعة من البيانات متوسطها يساوي **1** وانحرافها المعياري يساوي **1** أي العبارات الآتية يجب أن تكون صحيحة ؟ أ) توجد على الأقل قيمة واحدة متكررة مرتين في هذه البيانات ب) معظم البيانات في الفترة $[-1,3]$ ج) مدى البيانات في الفترة $[-2,2]$ د) الوسيط لهذه البيانات هو $\frac{3}{2}$	 99% من البيانات تقع بين $(\mu - 3\sigma\ ,\ \mu + 3\sigma) = (1 - 3(1)\ ,\ 1 + 3(1)) = (-2\ ,4)$ نأخذ الفترة المغلقة داخلها $[-1,3]$ صحيحة

للوصول إلى فيديوهات شروحات المعايير

اضغط هنا

المعيار السادس
(الرياضيات المتقطعة والاحتمالات)

1) الانماط

2) مبادئ العد

3) مضروب العدد

4) التباديل

5) التوافيق

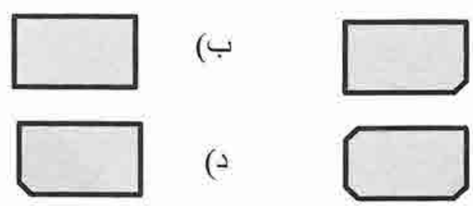
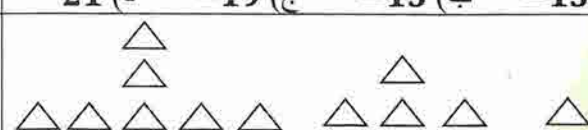
6) نظرية ذات الحدين

7) مسلمات الاحتمال

1) الانماط :

• **النمط :**

هو التسلسل والتتابع في الأعداد أو الأشكال أو الرموز التي تتبع قاعدة معينة .

مثال	الحل
1) ما العدد التالي لمجموعة الاعداد 15 , 25 , 35 , 45 , … … أ) 50 ب) 55 ج) 65 د) 75	لاحظ في النمط أننا نضيف 10 في كل مرة . 15 , 25 , 35 , 45 , … … +10 +10 +10 +10 العدد التالي هو 55
2) الاعداد ادناه تسمى اعداداً مثلثية ، فإن العدد المثلثي التالي يساوي :  1 3 6 10 أ) 12 ب) 14 ج) 15 د) 18	لاحظ في النمط أننا نضيف أعداد متتالية. 1 3 6 10 +2 +3 +4 +5 العدد التالي هو 15
3) ما الشكل التالي في النمط أدناه ؟  1 2 3 ....  أ) ب) ج) د)	في الشكل 2 اكتملت الزاوية الاعلى يسار في الشكل 3 اكتملت الزاوية الاعلى يمين اذاً اكتمال الزوايا مع اتجاه عقارب الساعه الشكل 4 سوف تكتمل الزاوية الاسفل يمين الحل د)
4) ما الحد التالي في المتتابعة 20 , 16 , 11 , 5 , −2 , −10 , … أ) −13 ب) −15 ج) −19 د) −21	20 , 16 , 11 , 5 , −2 , −10 , … -4 -5 -6 -7 -8 -9
 1 2 3 5) عدد المثلثات في النمط السادس هو ؟ أ) 7 ب) 10 ج) 13 د) 16	في كل مره نزيد ثلاثة مثلثات $1 + 3 = 4$ $4 + 3 = 7$ $7 + 3 = 10$ $10 + 3 = 13$ $13 + 3 = 16$ اذا في النمط السادس = 16

2) مبادئ العد :

في حياتنا نحتاج الى معرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب مجموعة من الأشياء سواء بشروط أودون شروط ، و مبدأ العد يساعدنا على تحديد ذلك .

• مبدأ الضرب :

لتكن T تجربة عدد امكانات نتائجها كبير جداً ويتحقق إنجازها من عدة تجارب متتابعة بحيث كل تجربة لا تعتمد على الكيفية التي أنجزت بها التجربة السابقة :

- تجربة أولى لها n_1 نتيجة ، تجربة ثانية لها n_2 نتيجة ، ... ، تجربة أخيرة لها n_k نتيجة

فإن عدد الامكانات المختلفة الممكنة للتجربة الكلية تكون $T = n_1 \times n_2 \times \dots\dots \times n_k$

مثال : كم من الأعداد الصحيحة من 100 إلى 999 تتمتع بالخاصية التالية :

• لا تحتوي على تكرار في الخانات (جميع خاناتها مختلفة) ؟

الأعداد { 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 } فيكون لدينا 10 اختيارات

1) نبدأ من اليسار، يمكن اختيار أي عدد غير الصفر لخانة المئات، لدينا 9 اختيارات .
2) خانة العشرات نختارها من الأعداد الباقية ، لدينا 9 اختيارات .
3) خانة الآحاد يبقى 8 اختيارات .

الحل : 648 عدد صحيح لايحتوي تكرارات .

آحاد	عشرات	مئات
8	9	9
$9 \times 9 \times 8 = 648$		

• تمثل أعدادا زوجية ؟

هنا يسمح التكرار ، ولكن الشرط أن يكون عدد زوجي (أي أن آحاده عدد زوجي)

الاعداد { 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 } فيكون لدينا 10 اختيارات

1) اختيار خانة المئات يتم بـ 9 اختيارات { 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 }
2) اختيار خانة العشرات بـ 10 اختيارات {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}
3) اختيار خانة الآحاد عدد زوجي بـ 5 اختيارات { 8, 6, 4, 2, 0}

الحل : 450 عدد صحيح لايحتوي تكرارات .

آحاد	عشرات	مئات
5	10	9
$9 \times 10 \times 5 = 450$		

• تمثل أعدادا فردية وجميع خاناتها مختلفة ؟

هنا لايسمح بالتكرار ، وشرط أن يكون عدد فردي (أي أن آحاده عدد فردي)

نعلم أن الاعداد الفردية { 1,3,5,7,9} فإذا اخترنا المئات والعشرات ، فإن اختيار الأحاد يكون كالتالي :
إذا لم يتم استخدام أي رقم فردي فإن عدد طرق الاختيار 5 ، وإذا تم استخدام رقم فردي واحد فإن عدد طرق الاختيار 4 ، وإذا تم استخدام رقميين فرديين فإن عدد طرق الاختيار 3 ، وإذا بدأنا من اليمين إلى اليسار بخانة الأحاد ثم العشرات فالمئات سوف تقع في ورطة مشابهة ألا وهي اختيار المئات عند الصفر . الحل هو :

1) اختيار خانة الأحاد بـ 5 طرق {1,3,5,7,9} .
2) اختيار خانة المئات بـ 8 طرق (نستبعد الصفر والعدد الذي في الاحاد)
3) يبقى لخانة العشرات 8 طرق .

الحل : 320 عدد صحيح فردي و لايحتوي تكرارات .

آحاد	عشرات	مئات
5	8	8
$8 \times 8 \times 5 = 320$		

في مبدأ الضرب :

التجربة T تتحقق بإنجاز كل تجربة على حده ، الاولى و الثانية و الثالثة و ....

((و تعني ×))

• مبدأ الجمع :

لتكن T تجربة عدد امكانات نتائجها كبير جداً ويتحقق إنجازها بأي من التجارب بحيث لا يجتمع إنجاز اثنتين منها في آن واحد :

- تجربة أولى لها n_1 نتيجة
- تجربة ثانية لها n_2 نتيجة

...

- تجربة أخيرة لها n_k نتيجة

فإن عدد الامكانات المختلفة الممكنة للتجربة الكلية تكون $T = n_1 + n_2 + \dots\dots + n_k$

مثال : ينظم أحد المعاهد 4 دورات مختلفة في الاقتصـــاد، 5 دورات مختلفة في اللغة، 7 دورات مختلفة في الحاسب الآلي. كم عدد الاختيارات الممكنة لمتقدم يرغب في أخذ :

• دورة واحدة في كل مجال من المجالات الثلاثة؟

يرغب المتقدم في اختيار ثلاث دورات، دورة في الاقتصـــاد ودورة في اللغة ودورة في الحاسـب الآلي. يستطيع المتقدم انجاز مهمة الاختيار على مراحل :

المرحلة الأولى : اختيار دورة اقتصاد، لديه 4 طرق

المرحلة الثانية : اختيار دورة لغة، لديه 5 طرق

المرحلة الثالثة : اختيار دورة حاسب آلي، لديه 7 طرق.

الحل : عدد طرق اختيار الثلاث دورات ، من قاعدة الضرب ، يساوي $140 = 7 \times 5 \times 4$

• دورة واحدة في أي من المجالات الثلاثة؟

يرغب المتقدم في اختيار دورة واحدة إما في الاقتصاد أو في اللغة أو في الحاسب الآلي،

عدد طرق اختيار هذه الدورة، من قاعدة الجمع ، يساوي $16 = 7 + 5 + 4$

• دورتين في مجالين مختلفين من المجالات الثلاثة؟

سوف نستعين بقاعدتي الضرب والجمع معاً. الدورتان تكونان في مجالين مختلفين في إحدى الحالات التالية :

من قاعدة الضرب :

عدد طرق اختيار دورتين , الاقتصاد واللغة يساوي $20 = 5 \times 4$

وعدد طرق اختيار دورتين , الاقتصاد والحاسب يساوي $28 = 7 \times 4$

وعدد طرق اختيار دورتين , اللغة والحاسب يساوي $35 = 7 \times 5$

من قاعدة الجمع :

الحل : عدد طرق اختيار دورتين في مجالين مختلفين يساوي $83 = 35 + 28 + 20$

في مبدأ الجمع :

التجربة T تتحقق بإنجاز اي تجربة منها إما الاولى أو الثانية أو الثالثة أو ....

((أو تعني +))

مثال	الحل
1) كم عدد الاعداد الفردية المكونة من رقمين مختلفين من المجموعة $\{1,2,3,4,5,6\}$ ؟ أ) 12 ب) 15 ج) 18 د) 30	يجب ان يحتل منزلة الآحاد عدد فردي بينما منزلة العشرات يمكن أن يحتلها أي عدد آحاد: 3 ، عشرات: 6 $6 \times 3 = 18$
2) يقف 5 طلاب في دائرة ويلعبون لعبة تمرير الكرة فإذا مرر كل طالب الكرة لكل زميل من زملائه مرة واحدة فما مجموع التمريرات ؟ أ) 5 ب) 5×4 ج) $5!$ د) 2^5	الطالب الأول يمرر 4 تمريرات الطالب الثاني يمرر 4 تمريرات وهكذا .. من قاعدة الجمع المكرر $4+4+4+4+4 = 5 \times 4$
3) بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ثلاث خانات عشرية تنتمي الى المجموعة $\{0,2,3,5,7,9\}$ بحيث يقبل القسمة على 5 ؟ أ) 72 ب) 36 ج) 60 د) 30	حتى يقبل القسمة على 5 يجب ان يكون آحاده 0 أو 5 الـ 0 مستبعد لأنه يمين الفاصلة فاختياره يصبح العدد من خانتين عشرية جزء من الف: 1 ، جزء من مئة: 6 ، جزء من عشرة: 6 ، 0 , $6 \times 6 \times 1 = 36$
4) كم عدد الأعداد الطبيعية المكونة من 4 خانات مختلفة؟ أ) $10 \times 9 \times 8 \times 7$ ب) 10^4 ج) $9 \times 9 \times 8 \times 7$ د) 9^4	**الاعداد {9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0} لدينا 10 اختيارات في منزلة الالوف نستبعد الصفر فيكون لدينا 9 طرق في المئات بعد استبعاد عدد الالوف يكون لدينا 9 طرق وهكذا ..** آحاد: 7 ، عشرات: 8 ، مئات: 9 ، آلاف: 9 $9 \times 9 \times 8 \times 7$
5) تضم قائمة مطعم 3 أنواع من الشوربة و 5 أنواع سلطة و 6 أنواع لحم ، بكم طريقة يمكن اختيار وجبة مكونة من 3 أصناف ؟ أ) 30 ب) 60 ج) 90 د) 120	الوجبة شوربة: 3 ، سلطة: 6 ، لحم: 5 $5 \times 6 \times 3 = 90$
6) كم عدداً طبيعياً مكوناً من ثلاث منازل وأصغر من 300 يمكن تكوينه من الارقام $\{1,2,3,4,5\}$ إذا كان التكرار غير مسموح؟ أ) 24 ب) 32 ج) 40 د) 60	أصغر من 300 أي أن احتمال خانة المئات إما 1 أو 2 آحاد: 3 ، عشرات: 4 ، مئات: 2 $2 \times 4 \times 3 = 24$
7) تحمل ألواح السيارات في المملكة 3 حروف و 3 ارقام ، فكم عدد اللوحات التي تحمل 3 حروف متطابقة و 3 ارقام ليست جميعها متطابقة ؟ أ) 25200 ب) 27720 ج) 28000 د) 28950	**في السؤال ذكر أن الارقام ليست جميعا متطابقه ، فإنه وارد التكرار في لذا نحسب المتطابقة ونطرحه من العدد الكلي** اللوحات الكليه الارقام: 10 ، 10 ، 10 — الحروف: 1 ، 1 ، 28 $28 \times 1000 = 28000$ اللوحات المتطابقة الارقام: 1 ، 1 ، 10 — الحروف: 1 ، 1 ، 28 $28 \times 10 = 280$ العدد المطلوب $28000 - 280 = 27720$

3) مضروب العدد :

قبل أن نبدأ ، سوف نأخذ موضوع " مضروب العدد " موجزاً لما له اهمية واستخدامات في المواضيع القادمة .

- **حين نعبر عن الجمع المكرر للعدد نفسه ، فإننا نستخدم الضرب** $5+5+5 = 3 \times 5$
- **حين نعبر عن الضرب المكرر للعدد نفسه ، فإننا نستخدم الصورة الأسية** $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

والآن سوف نتعرف الى تعبير رياضي جديد هو مضروب العدد .

- **مضروب العدد :**

▪ نرمز لمضروب العدد الطبيعي n بالرمز $n!$ ونعرفه كما يلي :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots\dots\dots \times 2 \times 1$$

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
..

- **الخاصية الأساسية للمضروب :**

يمكن كتابة العدد المضروب بصور مختلفة مثل :

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

مثال
$9! = 9 \times 8! = 9 \times 8 \times 7!$
$\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 42$
$\dfrac{6!}{2! \times 3!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 6 \times 5 \times 2 = 60$

- **استنتاج :**

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n$$

مثال
$\dfrac{10!}{9!} = \dfrac{10 \times 9!}{9!} = 10$
$\dfrac{6! \times 3!}{5! \times 4!} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

4) التبـاديـل :

لتكن A مجموعه بها n من العناصر ، نعرف التبديل بأنه عدد طرق ترتيب عناصر المجموعة بأخذها جميعا أو جزء منها في كل مرة . (الترتيب مهم)

مثال :	لتكن المجموعة : $A = \{1,2,3\}$ 1) أكتب جميع تباديل المجموعة A 2) أكتب جميع التباديل بطول 2 من A
الحل :	1) نضع عناصر A بكل ترتيب ممكن : 312 213 123 321 231 132 عدد التباديل يساوي 9 2) التباديل المكونة من عنصرين : 13 23 12 31 32 21 عدد التباديل يساوي 9

- **التباديل بدون تكرار:**

هي عدد طرق ترتيب n من العناصر في r من المرات بدون تكرار.

$$p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال	يتضمن النظام الغذائي بإحدى المستشفيات تقديم خمسة أنواع من الفاكهة تفاح، برتقال، مانجا، موز، رمان بكم طريقة يمكن لمريض أن يختار حبتين فاكهة مختلفة ؟
الحل :	عدد طرق اختيار الفاكهة الأولى 5 خيارات ، والفاكهة الثانية 4 خيارات هذا يذكرنا بمبدأ الضرب بدون تكرار 5×4 فإن عدد طرق الاختيار هو عدد التباديل بطول 2 من مجموعة بها 5 عناصر وهذا يساوي $p_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$

ملحوظة : اختصارا للحل نستخدم $p_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots}_{r}$

- **التباديل مع التكرار:**

هي عدد طرق ترتيب n من العناصر في r من المرات مع جواز التكرار .

$$n^r$$

مثال :	كم عدد الاعداد الطبيعية المكونة من 3 ارقام من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$؟
الحل :	بما أن التكرار مسموح ، فإن عدد الاعداد $= 5^3 = 125$

- **التباديل الخطية بدون تكرار :**

$$n!$$

هي عدد طرق ترتيب n من العناصر تؤخذ جميعها في خط مستقيم .

مثال : إذا كان لدينا علب توابل في كما الشكل أدناه ، بكم طريقة يمكن تنظيم العلب بشكل خطي ؟

الحل : النوع الاول من التوابل لديه 5 خيارات ، النوع الثاني لديه 4 خيارت والثالث 3 خيارات والرابع خيارين والاخير خيار واحد فقط ، هذا يعيدنا الى مفهوم مبدأ الضرب

أي أن عدد الطرق $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

وهذا يعني ان عدد الطرق $120 = !5$

- **التباديل الخطية مع التكرار:**

$$\frac{n\,!}{n_1! \times n_2! \times \dots}$$

هي عدد طرق ترتيب n من العناصر تؤخذ جميعها في خط مستقيم

منها n_1 تحمل صفة من نوع معين ، و n_2 تحمل صفة من نوع ثاني ... وهكذا

مثال : إذا كان لدينا مجموعة من الازهار ، واردنا غرسها في أصيص مستطيل ، بكم طريقة يمكن ترتيبها ؟

الحل : لدينا 7 ازهار يتكرر اللون الاحمر 3 مرات ، واللون الأزرق مرتين ، لذا فإن عدد التباديل لهذه الأزهار هو :

$$\frac{7!}{2\,! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 420$$

- **التباديل الدائرية :**

$$(n-1)!$$

هي عدد طرق ترتيب n من العناصر تؤخذ جميعها في شكل دائري إلى نقطة مرجع ثابتة

مثال : إذا كان لدينا علب توابل في كما الشكل أدناه ، بكم طريقة يمكن تنظيم العلب بشكل دائري ؟

الحل : في التباديل الخطية عدد الطرق الكلية = !5 لكن هنا لو قمنا بتدوير العلب في اتجاه واحد موضعا جديدا لا ينتج لنا تبديل مختلف لان ترتيب العلب لايختلف بالنسبة لبعضها البعض ، لذا فأن التدوير خمس مواضع هو الترتيب (التبديل) نفسه ، لذا نستنتج أن التباديل على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \times 4!}{5} = 4! = (5-1)!$$

الحل	مثال
لو أخذنا كتاب في اليوم الأول سنأخذ كتاب مختلف عن اليوم الثاني ، لذا الترتيب مهم (تباديل) $p_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720$	1) لدى عبدالرحمن 10 كتب مختلفة ويريد أن يختار منها كتاباً يقرأه في اليوم الأول ثم كتاباً يقرأه في اليوم الثاني ثم كتاباً يقرأه في اليوم الثالث ، بكم طريقة يمكن اختيار هذه الكتب ؟ أ) 6 ب) 30 ج) 100 د) 720
تباديل خطية $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$	2) بكم طريقة يمكن لستة طلاب أن يجلسوا في شكل صف به ستة مقاعد متجاورة ؟ أ) 6 ب) 36 ج) 120 د) 720
تباديل دائرية $(7-1)! = 6!$	3) ماعدد الطرق المختلفة التي يمكن أن يجلس بها 7 اشخاص حول طاولة دائرية ؟ أ) $7!$ ب) $6!$ ج) $(6)(5)$ د) $(7)(6)$
تباديل دائرية $(6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $= 120$	4) بكم طريقة يمكن ان يجلس 6 موظفين حول طاولة دائرية في اجتماع ، وذلك في اتجاه واحد ؟ أ) 6 ب) 36 ج) 120 د) 720
خمسة جوائز مختلفة ، توزع جميعها $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$	5) بكم طريقة يمكن توزيع خمس جوائز مختلفة على خمسة طلاب بحيث يأخذ كل طالب جائزة واحدة ؟ أ) 5 ب) 120 ج) 625 د) 725
عدد تباديل 5 عناصر من 9 عناصر $P_5^9 = \frac{9!}{4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!}$ $= 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$	6) بكم طريقة يمكن ان يجلس 5 اشخاص في صف به 9 كراسي ؟ أ) 15100 ب) 15000 ج) 15120 د) 15150
عدد تباديل 3 عناصر من 7 عناصر $P_3^7 = 7 \times 6 \times 5 = 210$	7) اذا كان هناك 7 اشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا سوى 3 كراسي ، بكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي الثلاثة معاً ؟ أ) 200 ب) 205 ج) 210 د) 215
عدد تباديل 2 عناصر من 7 عناصر $P_2^7 = 7 \times 6 = 42$	8) مسجد له 7 ابواب ، بكم طريقة يستطيع شخص دخول المسجد من باب والخروج من الآخر ؟ أ) 40 ب) 42 ج) 44 د) 46

مثال	الحل
9) الأعداد الطبيعية المكونة من 3 خانات من المجموعة $A = \{5,7,8,9\}$ ؟ أ) **24** ب) **27** ج) **64** د) **81**	تباديل مع تكرار $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
10) يقيم شخص في فندق ، يقدم له الفندق قائمة من الطعام مكونة من 5 انواع من الماكولات للاختيار منها . فبكم طريقه يمكن تكوين وجباته الثلاث في الايام التي سيقضيها في الفندق ؟ أ) **15** ب) **60** ج) **100** د) **125**	تباديل مع تكرار يختار 3 وجبات من 5 ماكولات $5^3 = 125$
11) كم عدد الأرقام الهاتفية المكونة من 10 ارقام خانات تبدأ بـ 055 ؟ أ) $7!$ ب) 10^7 ج) $10!$ د) $(10-1)!$	تباديل مع تكرار تتحدد الأرقام الهاتفية التي تبدأ 055 باختيار سبعة أرقام مع التكرار من الأرقام العشـــرة وترتيبها في الخانات السبعة الأخيرة. وبالتالي فعدد الأرقام الممكنة هو 10^7
12) بكم طريقة يمكن صف 6 كتب بطريقة مستقيمة على ارفف مكتبة إذا كان 3 كتب حمراء و 2 بيضاء وكتاب واحد أصفر ؟ أ) 9 ب) 36 ج) 60 د) 120	تباديل خطية مع تكرار كل كتاب له لون (صفه) $\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 60$
13) بكم طريقة يمكن توزيع هدايا فئة 100 ريال ، و 5 هدايا فئة 500 ريال على سبعة أشخاص يستحقونها ؟ أ) **7** ب) **10** ج) **14** د) **21**	تباديل خطية مع تكرار لدينا هديتين متشابهتين و **5** هدايا متشابهة $\frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = \frac{42}{2} = 21$

5) التــوافيــق :

لتكن A مجموعة بها n عنصرا ، كل مجموعة جزئية تسمى توفيقاً وهو اختيار عدد من عناصر المجموعة بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم (عشوائي) . أي أن المقارنة بين اختيار وآخر تبنى فقط على أساس العناصر المكونة لكل منهما.

مثال : لتكن المجموعة $A = \{a, b, c, d\}$

1) أوجد جميع المجموعات الجزئية من A المكونة من عنصرين.
2) أوجد جميع المجموعات الجزئية من A المكونة من 3 عناصر.

الحل :

1) هذه المجموعات $\{c, d\}$ $\{b, d\}$ $\{b, c\}$ $\{a, d\}$ $\{a, c\}$ $\{a, b\}$

2) هذه المجموعات $\{b, c, d\}$ $\{a, c, d\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, b, c\}$

- **التوافيق بدون تكرار :**

عدد الطرق المختلفه لاختيار مجموعة بسعة k من مجموعة بها n عنصرا بدون تكرار.

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال : يتضمن النظام الغذائي بإحدى المستشفيات تقديم سلة بها ثلاث حبات من أنواع مختلفة من الفواكه، فبكم طريقة يمكن تكوين سلة الفاكهة إذا كانت الأنواع المتوفرة: تفاح، برتقال، موز، رمان , خوخ ؟

الحل : لاحظ أنه طلب تكوين سله والسله تعني مجموعة والسلة التي بها تفاحة وموزه ورمانة لا تختلف عن سلة بها رمانة وتفاحة وموزه، أي أن الترتيب غير مهم وبدون تكرار ، لذا فعدد الطرق الممكنة لتكوين سلة الفاكهة هو عدد التوافيق بسعة 3 من مجموعه بها 5 عناصر

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

ملحوظة : لأي عددين صحيحين غير سالبين n و r بحيث $r \in n$ فإن $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

مثال	الحل
احسب $\binom{8}{5}$	$\binom{8}{5} = C_5^8 = \frac{8!}{5! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 3 \times 2 \times 1} = 56$ اختصاراً نستطيع أن نكتب : $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$ أول ثلاثة أعداد من مضروب n مقسومة على أول ثلاثة أعداد من مضروب r

- **توافيق خاصة :**

$C_0^n = 1$	التوافيق بسعة 0 : المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها صفر وهي المجموعة الخالية .
$C_1^n = n$	التوافيق بسعة 1 : المجموعات الجزئية المكونة من عنصر واحد عددها يساوي عدد عناصر المجموعة n
$C_n^n = 1$	التوافيق بسعة n : المجموعات الجزئية المكونة من جميع العناصر ،وهي واحدة فقط .

مثال : يراد سحب أربع كرات من صندوق به 7 كرات سوداء و3 كرات حمراء.
1) بكم طريقة يقع سحب أربع كرات سوداء؟
2) بكم طريقة يقع سحب 3 سوداء وواحدة حمراء؟

الحل : 1) واضح أن الترتيب غير مهم (عشوائي) . عدد طرق سحب مجموعة من أربع كرات سوداء يساوي عدد التوافيق بسعة 4 من مجموعة بها 7 عناصر وهو

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

2) يمكن إتمام السحب لـ 3 سوداء وواحدة حمراء كما يلي :

- سحب 3 كرات من السبعة السوداء، بطرق عددها $\binom{7}{3}$
- سحب كرة من الثلاثة الحمراء، بطرق عددها $\binom{3}{1}$

من قاعدة الضرب نجد أن عدد الطرق الممكنة لسحب 3 سوداء وواحدة حمراء يساوي

$$\binom{7}{3} \times \binom{3}{1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{3}{1} = 105$$

مثال : يراد توزيع 9 كتب مختلفة على طالبين ، بحيث يأخذ الأول 4 كتب ويأخذ الثاني كتابين ، بكم طريقة يمكن توزيعها على الطالبين ؟

الحل : توزيع الكتب عشوائي (لايهم الترتيب) بما أن الكتب مختلفة فإن التكرار هنا غير مسموح ، أي أن :

الطالب الأول يأخذ مجموعه مكونة من 4 كتب من بين 9 كتب

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

بعد ذلك يتبقى 5 كتب

الطالب الثاني يأخذ مجموعة مكونة من كتابين من بين 5 كتب

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

من قاعدة الضرب نجد أن عدد الطرق الممكنة للتوزيع $126 \times 10 = 1260$

- **التوافيق مع التكرار:**

عدد الطرق المختلفه لاختيار مجموعة بسعة k من مجموعة بها n عنصرا **مع جواز تكرار.**

$$C_r^n = \frac{(n+r-1)!}{r!\ (n-1)!}$$

مثال : يريد معلم شراء قلمين من مجموعة اقلام { أحمر ، أزرق ، أخضر ، أسود } ،

1) بكم طريقة يمكن اختيار قلمين مختلفين ؟
2) بكم طريقة يمكن اختيار قلمين ؟

الحل : 1) اختيار الاقلام عشوائي (الترتيب غيرمهم) ، ذكر انهم مختلفين فيكون توافيق بدون تكرار :

جميع الخيارت لدينا بدون تكرار :

احمر وازرق ، ازرق واخضر ، اخضر واسود
احمر واخضر ، ازرق واسود
احمر واسود

لدينا 6 خيارات ، وباستخدام القاعدة : $C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\times3}{2\times1} = 6$

---

2) اختيار الاقلام عشوائي (الترتيب غيرمهم) لم يحدد مختلفين ام لا فيكون توافيق مع جواز التكرار :

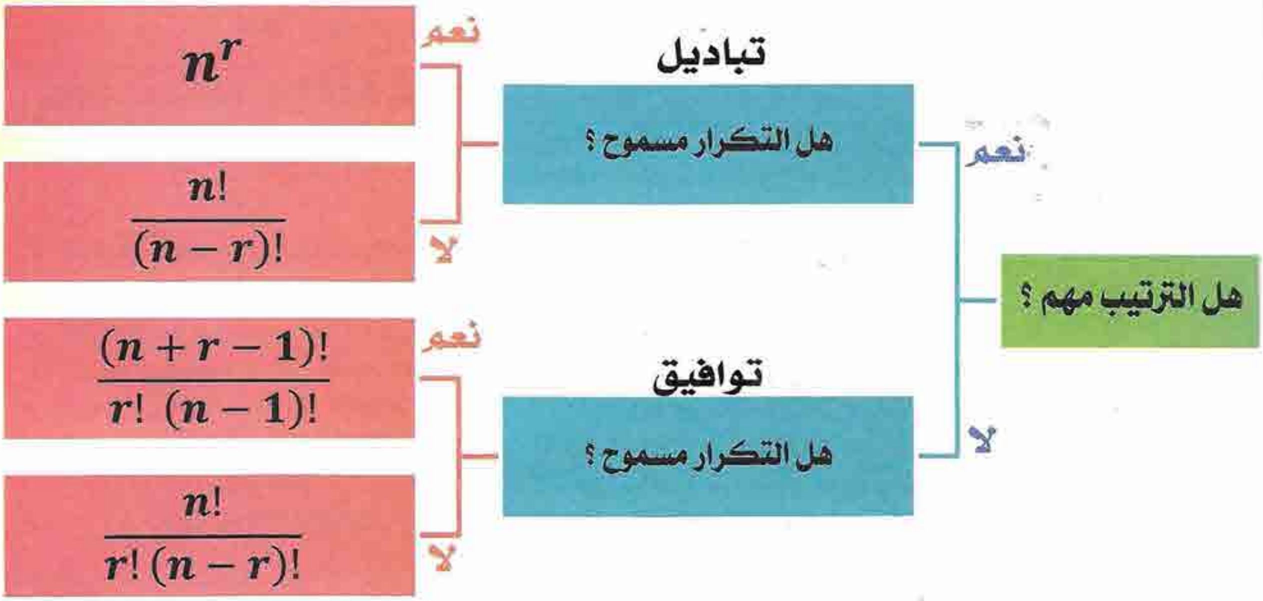
جميع الخيارت لدينا مع تكرار :

احمر واحمر ، ازرق وازرق ، اخضر واخضر ، اسود واسود
احمر وازرق ، ازرق واخضر ، اخضر واسود
احمر واخضر ، ازرق واسود
احمر واسود

لدينا 10 خيارات ، وباستخدام القاعدة : $C_2^4 = \frac{(4+2-1)!}{2!\ (4-1)!} = \frac{5!}{2!\times3!} = \frac{5\times4\times3!}{2\times1\times3!} = 10$

الحــل	مثـال
$\binom{11}{7} = \binom{11}{4} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$	1) احسب $\binom{11}{7}$
لجنة تعني مجموعة والترتيب غير مهم (توافيق) 10معلمين تختار منهم 4 $\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$	2) بكم طريقة يمكن لمدير مدرسة اختيار لجنة مكونة من 4 أعضاء من بين 10 معلم؟ أ) 40 ب) 210 ج) 1260 د) 5040
باستخدام التوافيق (لايهم الترتيب) $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)r!}$ $C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6$	3) ارادت 4 نوادي إقامة مباريات لكرة القدم بينها بحيث تلعب هذه النوادي مثنى مثنى ، فبكم طريقة يمكن إتمام ذلك ؟ أ) **12** ب) **10** ج) **6** د) **5**
باستخدام التوافيق (لايهم الترتيب) للمثلث ثلاثة رؤوس $C_3^4 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$	4) تقع 4 نقاط على دائرة فكم مثلث يمكن رسمة بحيث تكون رؤوسه على الدائرة ؟ أ) **2** ب) **4** ج) **6** د) **8**
باستخدام التوافيق بدون تكرار (لايهم الترتيب) $C_2^8 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28$	5) تقع 8 نقاط على دائرة فكم قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة من هذه النقاط ؟ أ) **8** ب) **16** ج) **28** د) **56**
باستخدام التوافيق بدون تكرار (ترتيب غير مهم) $C_2^{11} = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = \frac{110}{2} = 55$	6) علبة ألوان فيها 11 لون إذا مزجت لونين لونين كم لون جديد سوف يتكون ؟ أ) 22 ب) 55 ج) 110 د) 121

مخطط مختصر للتباديل والتوافيق



6) نظرية ذات الحدين :

• **مثلث باسكال :** كلنا يعلم أن مفكوك المقدار $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ هو مجموع تربيع الحد الاول وتربيع الحد الثاني وحاصل ضرب الحد الاول في الثاني في العدد 2 ، لكن لو كان المقدار مرفوع الى قوة اكبر ؟ يمكن استعمال مثلث باسكال لايجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a+b)^0 & & & & & & 1 & & & & & \\
(a+b)^1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a+b)^2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a+b)^3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a+b)^4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a+b)^5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

مثال : $(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

لكن بدلاً من استعمال مثلث باسكال لايجاد معاملات المفكوك ، سوف نستعمل نظرية ذات الحدين .

التمهيد :

لو اردنا اختيار مجموعة عشوائية مكونة من عنصرين من مجموعتين مختلفتين متساويتين a , b ، فكم عدد الطرق التي يمكن بها اختيار العنصرين ؟ حتماً سوف نستخدم التوافيق :

من خلال مبدأ الضرب والجمع : (و تعني × ، أو تعني +)

إما أن يكون العنصرين من المجموعة $a \times a = a$ (توفيق بسعة 2 من n من المجموعه a)

أو يكونان من المجموعة $b \times b = b$ (توفيق بسعة 2 من n من المجموعه b)

أو يكون الاول من a والثاني من b $a \times b = b$ (توفيق بسعة 1 من مجموعه a و توفيق بسعة 1 من مجموعه b)

أو يكون الاول من b والثاني من a $b \times a = a$ (توفيق بسعة 1 من مجموعه b و توفيق بسعة 1 من مجموعه a)

نستنتج أن عدد طرق اختيار المجموعه يساوي $a^2 + 2ab + b^2$ وهو مفكوك المقدار $(a+b)^2$ مربع مجموع حدين

• **نظرية ذات الحدين :**

اذا كان n عدداً طبيعياً , فإن مفكوك ذات الحدين :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

مثال : أوجد مفكوك $(a+b)^6$ ، باستخدام نظرية ذات الحدين

الحل :

$$(a+b)^6 = a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a\, b^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{2} a^2 b^4 + \binom{6}{1} a\, b^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} a^4 b^2 + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} a^3 b^3 + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} a^2 b^4 + 6a\, b^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6a\, b^5 + b^6$$

ملحوظة : عدد الحدود في المفكوك $n + 1$

صيغة مجموع الحدود في مفكوك ذات الحدين

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ a^{n-k} \ b^k$$

الحد العام $\binom{n}{k} \ a^{n-k} \ b^k$

لايجاد قيمة k لأي حد مطلوب : رتبة الحد $= k+1$
والتعويض باستخدام الحد العام

مثال : أوجد الحد الخامس في مفكوك $(x+y)^{11}$

الحل : نستعمل صيغة الحد العام ، حيث قيمة k في الحد الخامس تساوي $k = 5 - 1 = 4$

$$\binom{n}{k} \ a^{n-k} \ b^k$$

$$\binom{11}{4} \ a^{11-4} \ b^4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \ a^7 \ b^4 = 330 \ a^7 \ b^4$$

الحد الثابت : هو قيمة المعامل للحد $k+1$
حيث أن قيمة k عندما يكون مجموع أسي a و b يساوي صفر

مثال : أوجد الحد الثابت في مفكوك $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

الحل :
- نعوض في الحد العام :

$$\binom{n}{k} \ a^{n-k} \ b^k$$

$$\binom{6}{k} \ (x^2)^{6-k} \ (x^{-1})^k$$

$$\binom{6}{k} \ x^{12-2k} \ x^{-k}$$

- لايجاد قيمة k : نجمع أسي x و y ونساويه بصفر

$$12 - 2k - k = 0 \ \rightarrow \ 3k = 12 \ \rightarrow \ k = 4$$

- الحد الثابت

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

طريقة حل اسرع :

$$k = \frac{n \cdot p}{p - q} = \frac{6 \times 2}{2 - (-1)} = \frac{12}{3} = 4$$

الأس الكبير
اس الحد الاول
اس الحد الثاني

- الحد الثابت

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

الحد الأوسط في مفكوك

- **إذا كان الأس زوجي فإنه يوجد حد أوسط واحد وقيمة $k = \frac{n}{2}$ ،**
حيث أن k هي الاس الجديد للحدان x , y

مثال : أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(x+y)^8$

الحل : $n = 8$ عدد زوجي نقسم على 2 ← $k = \frac{8}{2} = 4$

- معامل الحد $\binom{8}{4} = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$
- اسس المتغيرات x^4y^4

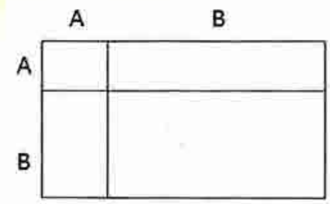
الحد الاوسط $70x^4y^4$

- **اذا كان الاس فردي فإنه يوجد حدان اوسطان وقيمة $k_1 = \frac{n-1}{2}$ ، $k_2 = \frac{n+1}{2}$ ،**
حيث أن k_1 اس الحد x في الحد الاول ، و k_2 اس الحد x في الحد الثاني

مثال : أوجد الحدان الأوسطان في مفكوك $\left(2x - \frac{1}{2}y\right)^5$

$n = 9$ عدد فردي

للحد الاوسط الأول	للحد الاوسط الثاني
$k = \frac{5-1}{2} = 2$	$k = \frac{5+1}{2} = 3$
معامل الحد	معامل الحد
$\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$	$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$
اسس المتغيرات	اسس المتغيرات
$(2x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^3 = 4x^2 \times \frac{1}{8}y^3$	$(2x)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 8x^3 \times \frac{1}{4}y^2$
الحد الاوسط الاول	**الحد الاوسط الاول**
$10 \times 4x^2 \times \frac{1}{8}y^3 = 5\,x^2\,y^3$	$10 \times 8x^3 \times \frac{1}{4}y^2 = 20\,x^3\,y^2$

مثال	الحل
1) الشكل التالي يمثل :  أ) نظرية فيثاغورس ب) فرق بين مربعين ج) مجموع مكعبين د) نظرية ذات الحدين	مساحة الشكل = الطول × العرض $(A+B)\times(A+B)=(A+B)^2$ مربع مجموع حدين ((نظرية ذات الحدين))
2) بإستخدام نظرية ذات الحدين $(x+y)^n=\sum\binom{n}{i}x^{n-i}y$ ماقيمة المقدار $\sum_i^n\binom{n}{i}(1)^{n-i}(1)^n$ ؟ أ) n^2 ب) n^3 ج) 2^n د) 3^n	$\sum_i^n\binom{n}{i}(1)^{n-i}(1)^n$ $a=1\ ,\quad b=1$ $(1+1)^n=2^n$
3) ما الحد الثابت في مفكوك $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^9$: أ) 64 ب) 74 ج) 84 د) 94	$\binom{9}{k}\ (x^2)^{9-k}\ (x^{-1})^k$ $\binom{9}{k}\ x^{18-2k}\ x^{-k}$ لايجاد قيمة k : نجمع أسي x و y ونساويه بصفر $18-2k-k=0 \rightarrow 3k=18$ $\rightarrow k=6$ ▪ الحد الثابت $\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$
4) الحد الاوسط في مفكوك $(2x+\frac{y}{2})^4$ هو : أ) $12x^2y^2$ ب) $6x^2y^2$ ج) $12xy^3$ د) $y12x^3$	$n=4$ عدد زوجي نقسم على 2 ← $k=\frac{4}{2}=2$ اسس المتغيرات x^2y^2 نوجد معامل الحد $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2\times1}=6$ الحد الاوسط $6x^2y^2$
5) الحد الأوسط في مفكوك $(2x+\frac{1}{2}y)^6$ هو : أ) $20x^3y^3$ ب) $60x^4y^2$ ج) x^3y^3 د) $10x^2y^4$	$n=6$ زوجي نقسم على 2 ← $k=\frac{6}{2}=3$ اسس المتغيرات x^3y^3 نوجد معامل الحد $\binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ الحد الاوسط $20x^3y^3$

7) مسلمات الاحتمال :

لايمكن في كثير من المسائل الاقتصادية أو الاجتماعية ، اعطاء اجابات أو حلول دقيقة وذلك لكثرة العوامل المؤثرة فيها . تمكننا النظريات وقواعد علم الاحتمالات من التعامل مع مثل هذه المسائل واعطاء توقع أو تقدير لحلها .

فصاحب مكتبة ما لايستطيع أن يحدد تماماً وبدقة عدد الدفاتر التي سيبيعها خلال فترة أسبوع أو أشهر ، بل سيحاول اعطاء تقدير لهذا العدد بحيث يبقى هذا العدد عشوائياً .

في مثل هذه الحالات وفي المسائل والتطبيقات التي ترتبط بظواهر عشوائية نستخدم مفهوم الاحتمال .

- **مدخل :**

نفرض أننا نقوم برمي حجر نرد :

- كل مرة نرمي فيها النرد تسمى محاولة .
- مجموعة النواتج التي يمكن أن نحصل عليها بعد كل محاولة تسمى فضاء العينة .
- المجموعة الجزئية من فضاء العينة تسمى حدث أو حادثه .

فضاء العينة : $S = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$		
الحدث	**المجموعه**	**نوعه**
ظهور عدد فردي	$F = \{ 1 , 3 , 5 \}$	
ظهور عدد أصغر من 2	$C = \{ 1 \}$	بسيط
ظهور عدد أصغر من 7	$M = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$	مؤكد
ظهور عدد أكبر من 10	$E = \emptyset$	مستحيل

مثال : عند رمي حجر نرد :

الحدث A (الحصول على احد عوامل العدد 6) $A = \{1,2,3,6\}$

الحدث B (الحصول على العدد 5) $B = \{5\}$

الحدث C (الحصول على عدد زوجي) $C = \{2 , 4 , 6\}$

- **العمليات على الاحداث :**

من المثال السابق :

- الحدث $\overline{A}$: هو الحدث المتتم أو المكمل لـ A . $\overline{A} = \{4 , 5\}$
- الحدث $A \cup B$: هو الحدث الذي يعبر عن حصول A أو B . $A \cup B = \{1,2,3,5,6\}$
- الحدث $A \cap C$: هو الحدث الذي يعبر عن حدوث A و C في آن واحد . $A \cap C = \{2,6\}$
- الحدث $A - C$: هو الحدث المكون من عناصر الحدث A ولا تنتمي الى C . $A - C = \{1, 3\}$

- **الاحداث المستقلة :**

هي الاحداث التي لا يمكن أن تقع في آن واحد .

في المثال السابق : يكون الحدثان A و C حدثين مستقلين لانه لايمكننا الحصول عليهما في آن واحد .

- **الاحداث المتنافية (المنفصلة) :**

هي الأحداث التي لايمكن أن تقع معاً ، أي أن وقوع احدها ينفي وقوع الثاني . $A \cap C = \emptyset$

في المثال السابق : يكون الحدثان A و B حدثين متنافيين لانه لايمكن أن يقعان معاً .

- **الإحتمال :**

إذا كان فضاء العينة S فيه جميع العناصر متكافئة ، نعرّف احتمال حدوث الحدث A بأنه :
عدد عناصر المجموعه A على عدد عناصر فضاء العينة ونرمز له بالرمز $P(A)$

$$P(A) = \frac{A \text{ عدد عناصر}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

مثال : عند رمي حجر نرد ، ما احتمال الحصول على أحد عوامل العدد 6 ؟ الحل : (فضاء العينة) $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ (الحصول على أحد عوامل العدد 6) $A = \{1,2,3,6\}$ عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6 وعدد عناصر الحدث A تساوي 4 ، فإن الاحتمال : $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

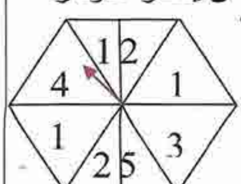
- **خواص الاحتمال :**

- إذا كان فضاء العينة S فإن احتماله يساوي 1 . $P(S) = 1$
- إذا كانت $P(A)$ ترمز لاحتمال وقوع الحدث A فإن $0 \leq P(A) \leq 1$
(أي أن قيمة احتمال الحدث لايمكن أن تكون أكبر من الواحد الصحيح لأنها تعبر عن نسبة $1 = 100\%$)
- احتمال وقوع الحادثة المستحيلة يساوي 0 ، اما احتمال وقوع الحادثة المؤكدة يساوي 1 .
- إذا كان احتمال وقوع الحدث A هو $P(A)$ فإن احتمال وقوع الحدث المكمل $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

مثال : صندوق به 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء ، وكرتان صفراء ، فإذا سحبت كرة واحدة عشوائياً،
ما احتمال ان تكون صفراء ؟
عدد الكرات الصفراء = 2 العدد الكلي للكرات = 9 الاحتمال $P(\text{صفراء}) = \frac{2}{9}$
ما احتمال ان تكون غير صفراء ؟
احتمال أن تكون صفراء $P(\text{صفراء}) = \frac{2}{9}$ احتمال ان تكون غير صفراء $P(\text{غير صفراء}) = 1 - P(\text{صفراء}) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

ملاحظة هامة :

- عدد عناصر فضاء العينة لرمي حجر النرد = 6^n حيث n عدد الرميات .
- عدد عناصر فضاء العينة لرمي قطعة نقود = 2^n حيث n عدد الرميات .

<table>
<tr><th>مثال</th><th>الحل</th></tr>
<tr><td>1) لعب نادي 12 مبارة ودية ، فاز في 6 و خسر في 4 و تعادل في 2 ، بقي أمامه مباراة واحدة ، فما احتمال أن يتعادل فيها استناداً إلى نتائجة السابقة :
أ) 1/12 ب) 1/10
ج) 1/5 د) 1/6</td><td>$P(\text{احتمال التعادل}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td>2) سُئل طلاب احد الفصول عن عدد الأخوة لديهم ، ثم جمعت الإجابات ووضعت في جدول التكرار أدناه إذا أختير طالب عشوائياً. فما احتمال أن عدد أخوته 2 على الاقل ؟
<table>
<tr><th>عدد الأخوة</th><th>التكرار</th></tr>
<tr><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>6</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
</table>
أ) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{9}{10}$
ج) $\frac{11}{15}$ د) $\frac{5}{6}$</td><td>A : عدد الطلاب من لديهم 2 اخوان واكثر
$5 + 10 + 6 + 4 = 25$
S : عدد الطلاب الكلي
$2 + 5 + 10 + 6 + 4 = 30$
$P(A) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$</td></tr>
<tr><td>3) صندوق مغلق يحتوي على 12 علبة حليب و 4 علب عصير . إذا سحب أحمد علبتين دون إرجاع وكانت العلبة الأولى علبة عصير فإن احتمال أن تكون العلبة الثانية علبة حليب يساوي :
أ) 0.80 ب) 0.75
ج) 0.70 د) 0.65</td><td>فضاء العينة = $16 = 4 + 12$
سحب علبة عصير مع عدم الارجاع = $\frac{4}{16}$
نقص من فضاء العينة علبة عصير واحدة اذن عند سحب علبة حليب يكون فضاء العينه 15
سحب علبة حليب = $\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,80$</td></tr>
<tr><td>4) إذا القي حجرا نرد فما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 9 ؟
أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{6}$
ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{1}{18}$</td><td>مجموع فضاء العينة = $6 \times 6 = 36$
الاعداد التي مجموعها 9 هي $\{4,5,3,6\}$
عدد مرات ظهورها = 4
الاحتمال = $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$</td></tr>
<tr><td>5) في الشكل أدناه مؤشر يتحرك ليستقر عشوائياً على أحد الأجزاء الثمانية ، ما احتمال أن يستقر المؤشر على جزء يحمل رقم أقل من 3 ؟


أ) $\frac{2}{8}$ ب) $\frac{3}{8}$
ج) $\frac{5}{8}$ د) $\frac{6}{8}$</td><td>فضاء العينة = 8
الأجزاء التي تحمل رقم أقل من 3 = 5 أجزاء
اذن احتمال الحدث = $\frac{5}{8}$</td></tr>
<tr><td>6) مقرر له شعبتان يختار منها (احمد – سامي) شعبة عشوائياً ، ما احتمال ان يكونا في نفس الشعبة ؟
أ) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{1}{8}$
ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{4}$</td><td>مرة واحدة يكونان في نفس الشعبة
$\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{1}{2}$
عدد الشعب</td></tr>
</table>

- **احتمال الحوادث المستقلة :**

الحادثتان A و B مستقلتين (حدوث A لا يتأثر في حدوث B) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

مثال	**صندوق به 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء ، سحبت منه كرتان مع الارجاع ، فما احتمال أن تكون حمراء و بيضاء ؟**
الحل	**و : تعني × ، مع الارجاع : مستقلة** **احتمال A : لدينا 4 كرات حمراء من العدد الكلي 7 ،** $P(A) = \frac{4}{7}$ **وبعد الارجاع لم يتغير العدد الكلي ، فيكون احتمال B : لدينا 3 كرات بيضاء من العدد الكلي 7 ،** $P(B) = \frac{3}{7}$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $= \frac{4}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

- **احتمال الحوادث الغير مستقلة :**

الحادثتان B وAغير مستقلتين(وقوع الحادثة A يغير طريقة وقوع الحادثةB) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$

مثال :	**صندوق به 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء سحبت منه كرتان دون ارجاع ، ما احتمال أن تكون كلاهما حمراء ؟**
الحل :	**و : تعني × ، مع الارجاع : غير مستقلة** **احتمال A : لدينا 4 كرات حمراء من العدد الكلي 7 ،** $P(A) = \frac{4}{7}$ **لم يتم الارجاع ، تغير العدد الكلي الى 6 فيكون احتمال B : لدينا 3 كرات حمراء من العدد 6 ،** $P(B) = \frac{3}{6}$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$ $= \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

- **الحوادث المتنافية :**

الحادثتان A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كانتا غير متقاطعتين $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
(يستحيل وقوعهما معاً لانه لايوجد نواتج مشتركة بينهما)

مثال :	**صندوق به 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء سحبت منه كرتان مع الارجاع ،** **فما احتمال ان تكونا كلاهما بيضاء أو حمراء ؟**
الحل :	**أو : تعني + ،** **احتمال A : كلاهما بيضاء ،** $P(A) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$ **احتمال B : كلاهما حمراء ،** $P(B) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

- **الحوادث الغير متنافية :**

الحادثتان A و B غير متنافيتان (يوجد نواتج مشتركة بينهما) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال : **رمي حجر نرد مرقم ، ما احتمال ظهور احد عوامل العدد 6 أو ظهور عدد فردي ؟**

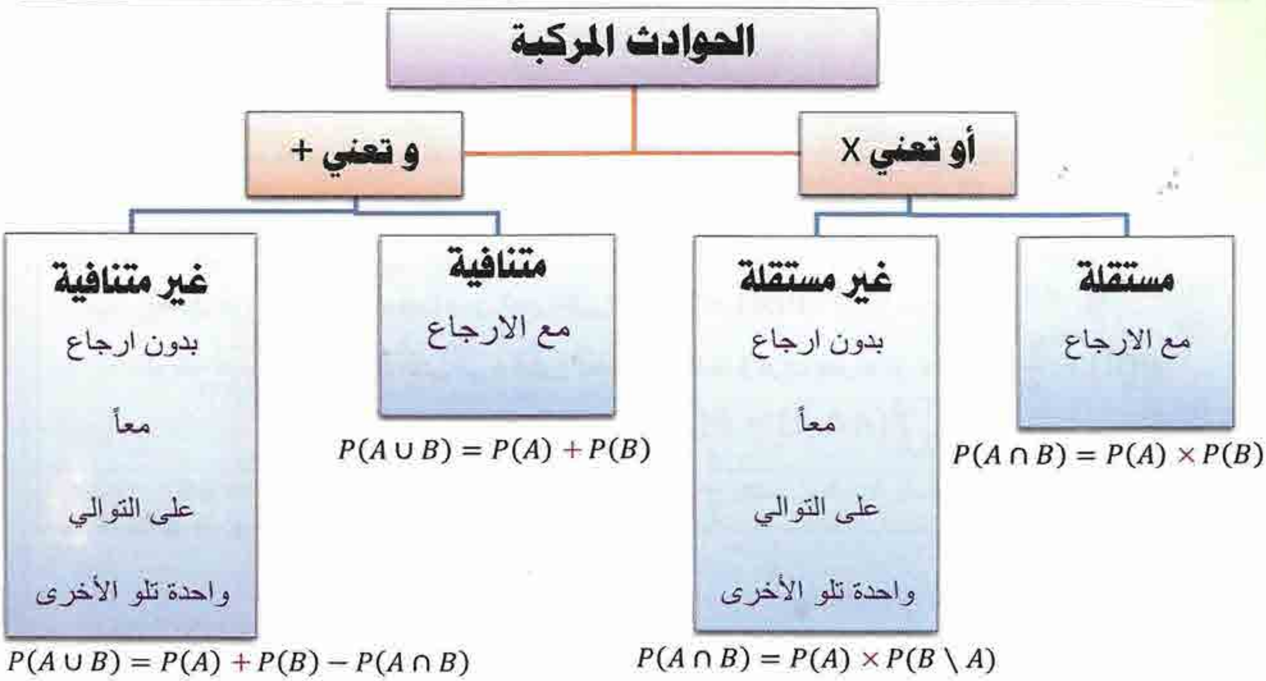
الحل : **أو : تعني + ، ولانه يوجد نواتج مشتركة : حوادث غير متنافية**

احتمال A : لدينا 4 اعداد (عوامل العدد 6) من فضاء العينة 6 ، $P(A) = \frac{4}{6}$

احتمال B : لدينا 3 اعداد (فردية) من فضاء العينة 6 ، $P(B) = \frac{3}{6}$

احتمال A و B : (فردي ومن عوامل 6) ، $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{36} = \frac{2}{6}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$



- **الاحتمال المشروط :**

الحادثتان B و A غير مستقلتين فإن احتمال وقوع الحادثة B إذا علم أن الحادثة A قد وقعت .

$$P(B \setminus A) = P(A \cap B) \div P(A)$$

مثال : **رمي مكعب مرقم من 1 الى 6 ، ما احتمال ظهور عدد أقل من 5 علما بأن العدد الظاهر فردي ؟**

الحل : <u>الشرط :</u> **احتمال الحادثة A : لدينا 3 اعداد فردية من فضاء العينة 6 ،** $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

احتمال الحادثة B : لدينا 4 اعداد (اقل من 5) من فضاء العينة 6 ، $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

احتمال الحادثه A و B : (فردي واقل من 5) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

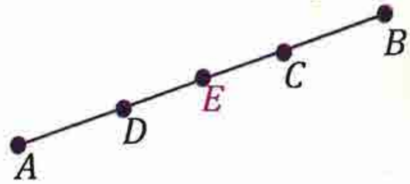
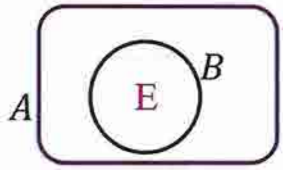
$$P(B \setminus A) = P(A \cap B) \div P(A)$$
$$= \frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

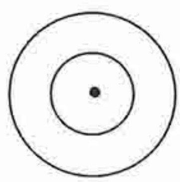
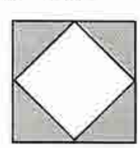
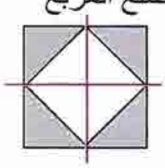
مثال : صندوق به 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء سحبت منه كرتان على التوالي :
احتمال أن تكون الكرتان حمراء ؟ $$P(\text{حمراء و حمراء}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$
احتمال أن تكون الكرتان بيضاء ؟ $$P(\text{بيضاء و بيضاء}) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$$
احتمال أن تكون حمراء أو بيضاء ؟ $$P(\text{حمراء و حمراء}) = \frac{2}{7} \quad , \quad P(\text{بيضاء و بيضاء}) = \frac{1}{7}$$ $$P(\text{كلاهما حمراء أو كلاهما بيضاء}) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$
احتمال أن تكون الكرة الاولى بيضاء و الاخرى حمراء ؟ $$P(\text{الاولى بيضاء}) = \frac{4}{7} \quad , \quad P(\text{بعد السحب الثانية حمراء}) = \frac{3}{6}$$ $$P(\text{الاولى بيضاء و الثانية حمراء}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

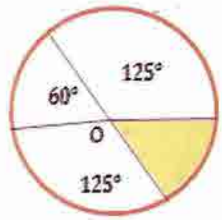
الحـــل	مثـال
لأن الحادثتين متنافيتين $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $= \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	1) إذا كانت **A,B** حادثتين متنافيتين وكان $P(B) = \frac{1}{4}$ ، $P(A) = \frac{1}{2}$ فإن $P(A \cup B)$ يساوي ؟ أ) **1** ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{1}{8}$ د) **0**
فراغ العينة $S = 2^6 = 64$ عدم ظهورها =1 ظهورها على الأقل مرة واحدة $64 - 1 = 63$ اذن الاحتمال = $\frac{63}{64}$	2) رميت قطعة نقود معدنية **6** مرات ما احتمال ظهور صورة واحدة على الأقل ؟ أ) $\frac{1}{64}$ ب) $\frac{1}{32}$ ج) $\frac{5}{64}$ د) $\frac{63}{64}$
فراغ العينة = $2^4 = 16$ احتمال الحدث = $\frac{1}{2}$ (ظهور الصورة عند رمي النقود مرة واحدة) احتمال الحدث = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$	3) رميت قطعة نقدية 4 مرات ، ما احتمال ان تظهر الصورة في 4 مرات معاً ؟
A طلاب اللغة العربية **B** طلاب الرياضيات عدد المتفوقين $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - (A \cap B)$ $= 8 + 6 - 3 = 11$ عدد الغير متفوقين $= 40 - 11 = 29$	4) اذا كان **40** طالب يدرسون اللغة العربية والرياضيات وكان هناك **8** متفوقين في اللغة العربية و **6** متفوقين في الرياضيات و **3** متفوقين فيهم جميعاً ، فكم عدد الغير متفوقين فيهم جميعا أ) **24** ب) **27** ج) **29** د) **32**
فراغ العينة = $3 + 2 = 5$ بما أن السحب مع الارجاع اذن أحتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاء : الحوادث المستقلة تعني حدوث A لا يؤثر على حدوث B $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$	5) صندوق يحتوي على كرتان خضراء و 3 كرات بيضاء إذا سحبت عشوائياً كرتان على التوالي مع الإرجاع ، فما احتمال أن تكون كلا الكرتان بيضاء؟ أ) $\frac{9}{25}$ ب) $\frac{6}{25}$ ج) $\frac{2}{5}$ د) $\frac{3}{5}$
حوداث متنافية لانه لايوجد عناصر مشتركة بين الحادثتين $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	6) إذا رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة, فإن احتمال ظهور عدد فردي أو العدد 6 على وجه المكعب هو:

الحل	مثال
حوادث غير مستقلة تعني حدوث A يؤثر على حدوث B $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$ • عدد الطلاب= $20 = 6 + 4 + 3 + 7$ • احتمال الطالب الاول من الصف السادس $\frac{6}{20}$ • احتمال الطالب الثاني من الصف الثالث $\frac{7}{19}$ $P(A \cap B) = \frac{6}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{42}{380}$	7) في احدى المدارس الابتدائية يوجد في الملعب 7 طلاب من الصف الثالث و 3 من الصف الرابع و 4 من الصف الخامس و 6 من الصف السادس تم اختيار طالبين لمساعدة المدرس في تنظيم الطلاب ، فما احتمال ان يكون الطالب الأول من الصف السادس والطالب الثاني من الصف الثالث؟ أ) **1/10** ب) **1/20** ج) **42/380** د) **42/400**
• الحوادث المستقلة تعني حدوث A لا يؤثر على حدوث B $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	8) إذا كان احتمال أن يرمي محمد الكرة ويصيب الهدف هو 1/3 ، و احتمال أن يرمي أحمد الكرة ويصيب الهدف هو 1/4 ، فما احتمال ان يصيبا الهدف كليهما معاً : أ) **1/12** ب) **7/12** ج) **5/12** د) **9/12**
فراغ العينة= $2^8 = 256$ عدد الحوداث = $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28$ احتمال صورتين = $\frac{\text{عدد الحوادث}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{256}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{64}}$	9) رميت قطعة عملة 8 مرات ، فما احتمال ظهور الصورة مرتين : أ) **7/32** ب) **7/64** ج) **1/8** د) **5/16**
حوادث غير متنافية (لانها تشترك بنواتج) $P(A) = 0.8 \quad , \quad P(B) = 0.8$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $= 0.8 + 0.8 - (0.8 \times 0.8)$ $= 1.6 - 0.64 = 0.96$	10) احتمال اصابة الهدف لنوع من الصواريخ تساوي 0.8 ، وتم اطلاق صاروخين على هدف معين . بفرض أن اصابة الصاروخ الأول مستقلة عن اصابة الصاروخ الثاني فما احتمال أن الهدف قد أصيب : أ) 0.96 ب) 0.92 ج) 0.84 د) 0.8

- **الاحتمال الهندسي :**

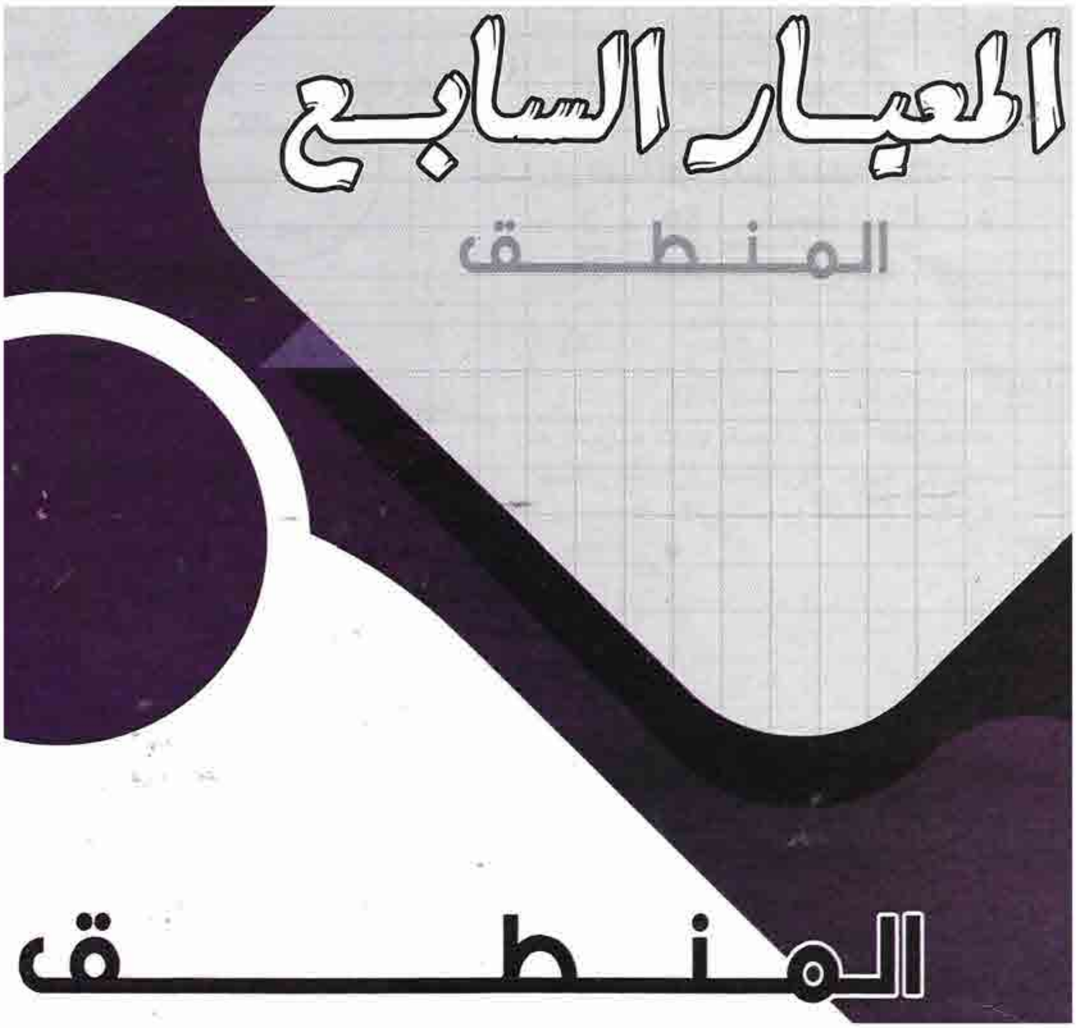
احتمال الاطوال	احتمال المساحات
إذا كان $\overline{DC} \subset \overline{AB}$ ، واختيرت النقطة E عشوائيا التي تقع على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ فإن احتمال أن تقع E على القطعة المستقيمة $\overline{DC}$ هو :  $P(E \in \overline{DC}) = \frac{DC}{AB}$	اذا كانت $B \subset A$ واختيرت نقطة Eعشوائيا التي تقع في المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B هو :  $P(E \in B) = \frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$

مثال	الحل
1) إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على $\overline{JM}$ ، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.  أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{3}{7}$ ج) $\frac{3}{4}$ د) $\frac{1}{3}$	عدد النواتج الممكنة $= 4 + 7 + 3 = 14$ عدد نواتج الحدث $= 7$ $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$
2) في الشكل أدناه قطر الدائرة الكبرى يساوي ضعف قطر الدائرة الصغرى إذا صوب رجل سهم إلى الهدف فإن احتمال أن يستقر السهم في الدائرة الصغرى يساوي ؟  أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) 1	**احتمال استقرار السهم في الدائرة الصغيره** $= \frac{\text{مساحة الدائرة الصغرى}}{\text{مساحة الدائرة الكبرى}}$ نفرض ان نصف قطر الدائرة الصغرى $= m$ نفرض ان نصف قطر الدائرة الكبرى$= 2m$ مساحة الصغرى $= m^2\pi$ مساحة الكبرى $= \pi(2m)^2 = 4m^2\pi$ اذن الاحتمال $= \frac{m^2\pi}{4m^2\pi} = \frac{1}{4}$
3) رسم مربع داخل المربع الكبير بحيث تكون رؤوسه في منتصف اضلاع المربع الكبير، اذا وضعنا نقطة عشوائية فما احتمالان تكون في الجزء المظلل:  أ) 0.25 ب) 0.5 ج) 0.125 د) 0.75	احتمال ان تقع في الجزء المظلل $= \frac{\text{مساحة الجزء المظلل}}{\text{مساحة المربع الكبير}}$ أي راس من رؤوس المربع الداخلي يقسم ضلع المربع الخارجي بنسبة **1:1** لو قسمنا الشكل الى مثلثات لأصبح  $\frac{\text{مساحة الجزء المظلل}}{\text{مساحة المربع الكبير}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0.5$

الحـــل	مـثـال
$\frac{\text{مساحة الدائرة الصغرى}}{\text{مساحة الدائرة الكبرى}} = \frac{r^2\pi}{r^2\pi} = \frac{2^2\pi}{4^2\pi} = \frac{4\pi}{16\pi} = \frac{1}{4}$	4) اطلق شخص سهماً على هدف مكون من 3 دوائر متحدتا المركز حيث طول نصف قطر الدائرة الأولى 2 سم ويزداد طول نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 سم فما احتمال اصابة الهدف في الدائرة الصغرى أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{9}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{3}$
• ايجاد المنطقة المظللة $125 + 60 + 125 + x = 360$ $310 + x = 360$ $x = 360 - 310 = 50$ • احتمال ان النقطة تكون داخل المنطقة المظللة $\frac{\text{المنطقة المظللة}}{\text{الدائرة كلها}} = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$	5) اذا اختيرت نقطة عشوائيا تقع داخل الدائرة فما احتمال أن تكون داخل المنطقة المظللة  أ) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{5}{18}$ ج) $\frac{5}{36}$ د) $\frac{1}{9}$

للوصول إلى فيديوهات شروحات المعايير

اضغط هنا



المعيار السابع
(المنطق)

1) **التقرير الرياضي**
2) **أدوات الربط**
3) **العبارات الشرطية**
4) **التكافؤ المنطقي**
5) **القياس المنطقي**

1) التقرير الرياضي :

- **المنطق الرياضي :**
  - هو إقامة الدليل لصحة أو عدم صحة جملة خبرية وذلك باستخدام الرموز كمتغيرات .

- **العبارات المنطقية :**
  - الجمل الخبرية يجب أن تكون إما صواباً أو خطأ ولا تحتمل أن تكون في وضع آخر .
  - الجمل غير الخبرية فهي الجمل التي لا يمكن الحكم عليها بالصواب أو الخطأ .
  - نسمى الجملة الخبرية تقريرا أو عبارة منطقية

- **أمثلة لبعض العبارات المنطقية :**

إذا كان $ab = ba$ فإن $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	عبارة منطقية
مربع أي عدد حقيقي يكون اكبر من أو يساوى صفر	عبارة منطقية
العدد 3 عدد أولى	عبارة منطقية
كل عدد زوجي هو مجموع عددين فرديين	عبارة منطقية
كل عدد فردى هو مجموع عددين زوجيين	عبارة منطقية
$5 > 3$	عبارة منطقية
ما أجمل هذا اليوم !	ليست عبارة منطقية
يا محمد لا تؤجل عمل اليوم إلى الغد	ليست عبارة منطقية

المفهوم	الرمز	مثال
العبارة المنطقية	p أو q	p : أبها مدينة سعودية عبارة صحيحة
نفي العبارة المنطقية	$\sim p$ أو $\sim q$	$\sim p$: أبها ليست مدينة سعودية عبارة خاطئة
قيمة الصواب	صحيح (True) بالرمز T خطأ (False) بالرمز F	

- **جدول الصواب :**
  - من الطرائق المناسبة لتنظيم قيم الصواب للعبارات المنطقية .

p	$\sim p$
T	F
F	T

إذا كانت p عبارة صحيحه (T) فإن $\sim p$ تكون عبارة خاطئة (F) .

إذا كانت p عبارة خاطئة (F) فإن $\sim p$ تكون عبارة صحيحة (T) .

2) أدوات الربط :

- **العبارات المركبة :**

- يمكن ربط عبارتين أو أكثر بأدوات ربط لتكوين عبارة مركبة .

عبارة الوصل	
التعريف	عبارة مركبة مكونة من ربط عبارتين أو أكثر بأداة الربط (و)
العبارات	p : أبها مدينة سعودية q : أبها مدينة سياحية
مثال	$p \wedge q$: أبها مدينة سعودية و مدينة سياحية

جدول الصواب

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- تكون عبارة الوصل صحيحة فقط عندما تكون العبارتين صحيحه .

عبارة الفصل	
التعريف	عبارة مركبة مكونة من ربط عبارتين أو أكثر بأداة الربط (أو)
العبارات	p : أحمد يدرس الكيمياء q : أحمد يدرس الأدب العربي
مثال	$p \vee q$: أحمد يدرس الكيمياء أو الأدب العربي

جدول الصواب

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- تكون عبارة الفصل صحيحة إذا كانت إحدى مركباتها على الاقل صحيحة .

مثال : كون جدول صواب للعبارة المركبة التالية : $p \wedge \sim q$

الحل :

1) نكون جدول نكتب فيه قيم الصواب لـ p و q .
2) نستعمل قيم الصواب لـ q لتحديد قيم الصواب لـ $\sim q$
3) نقارن قيم $\sim q$ و p لتحديد قيم الوصل $p \wedge \sim q$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F

مثال : كون جدول صواب للعبارة المركبة التالية : $p \wedge (\sim q \vee \sim p)$

الحل :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \vee \sim p$	$p \wedge (\sim q \vee \sim p)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

3) العبارة الشرطية :

- تكتب عبارة (إذا كان ... فإن ...) على الصورة " إذا كان p فإن q " بإعتبار أن p الفرض و q النتيجة ، ويرمز لها بالرمز $p \to q$.

- **العبارات الشرطية المرتبطة :**

العبارة	مكونه من	الرمز	مثال
العبارة الشرطية	فرض ونتيجة	$p \to q$	إذا تساوى قياس زاويتين فإنهما متطابقتان
عكس العبارة الشرطية	تبديل الفرض بالنتيجة في العبارة الشرطية	$q \to p$	إذا تطابقت زاويتان فإن لهما نفس القياس
معكوس العبارة الشرطية	نفي كل من الفرض والنتيجه في العبارة الشرطية	$\sim p \to \sim q$	إذا كان قياس زاويتين غير متساويان فإنهما غير متطابقتان
المعاكس الايجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية	$\sim q \to \sim p$	إذا كانت الزاويتان غير متطابقتين فإن قياسهما غير متساويين

مثال	الحل
إذا كان مجموع قياسي زاويتين **°90** فإن الزاويتين متتامتان . أي العبارات التالية هي عكس العبارة الشرطية أعلاه ؟ أ) إذا كانت الزاويتان متتامتان فإن مجموع قياسهما °90 ب) إذا كانت الزاويتان غير متتامتين فإن مجموع قياسهما °90 ج) إذا كانت الزاويتان متتامتين فإن مجموع قياسهما لا يساوي °90 د) إذا كانت الزاويتان غير متتامتين فإن مجموع قياسهما لا يساوي °90	العباره الشرطية $p \to q$ p : مجموع قياسي زاويتين **°90** q : الزاويتين متتامتان عكس العبارة الشرطية $q \to p$ الجواب أ)
1) يعرف المكافئ العكسي للعباره $A \longrightarrow B$ بأنه $\sim B \longrightarrow \sim A$, ما المكافئ العكسي للعباره: "إذا كان $x > 5$ فإن $x > 3$ " ؟ أ) إذا كان $x > 3$ فإن $x > 5$ ب) إذا كان $x \leq 5$ فإن $x \leq 3$ ج) إذا كان $x < 3$ فإن $x < 5$ د) إذا كان $x \leq 3$ فإن $x \leq 5$	نكون جدول : <table><tr><th>A</th><th>B</th><th>$\sim A$</th><th>$\sim B$</th><th>$\sim B \longrightarrow \sim A$</th></tr><tr><td>$x > 5$</td><td>$x > 3$</td><td>$x \leq 5$</td><td>$x \leq 3$</td><td>إذا كان $x \leq 3$ فإن $x \leq 5$</td></tr></table>

- **العبارة الشرطية الثنائية :**

هي ربط عباره شرطيه وعكسها بأداة الوصل " و" $(p \to q) \wedge (q \to p)$ ويرمز لها اختصارا $p \leftrightarrow q$
وتقرأ p إذا وفقط إذا q .

إذا كان.. فإن..

$\longrightarrow$

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

العبارة الشرطية دائماً صحيحة
إلا إذا كان الفرض صحيح والنتيجة خاطئة

إذاً وفقط إذاً

$\longleftrightarrow$

p	q	$p \longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

العبارة الشرطية الثنائية تكون صحيحة
إذا كان الفرض والنتيجة كلاهما صحيحان أو كلاهما خاطئان

مثال : كون (أكتب) جدول الصواب للتقرير التالي : $(p \to q) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$

الحل :

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$(q \vee \sim p)$	$(p \to q) \leftrightarrow (q \vee \sim p)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

ملاحظة :
نقول أن تقرير ما صائب منطقياً إذا كانت جميع قيم صوابه صائبة ونقول أن تقريراً ما خاطئ منطقياً إذاكانت جميع قيم صوابه خاطئة.

مثال

جدول الصواب الآتي يمثل :

A	B	?
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

أ) $A \vee B$ ب) $A \longrightarrow B$
ج) $B \longrightarrow A$ د) $A \longleftrightarrow B$

الحل

نكون جدول :

$A \vee B$	$A \longrightarrow B$	$B \longrightarrow A$	$A \longleftrightarrow B$
T	T	T	T
T	F	T	F
T	T	F	F
F	T	T	T

- **بعض خواص الروابط المنطقية :**

$\sim(\sim p) \equiv p$
$p \wedge p \equiv p$
$p \vee p \equiv p$

وصل العبارات	
$p \wedge T = p$	$p \wedge \sim p = F$
	$p \wedge F = F$

فصل العبارات	
$p \vee F = p$	$p \vee \sim p = T$
	$p \vee T = T$

التبديل
$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

التوزيع
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

قوانين دي مورجان
$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$
$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

مثال	الحل
التقرير $\sim(p \vee (\sim p \wedge q))$: أ) تقرير صائب دائما ب) يكافئ منطقياً التقرير $p \wedge q$ ج) يكافئ منطقياً التقرير $\sim p \wedge \sim q$ د) يكافئ منطقياً التقرير $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	قانون ديمورجان $\sim(p \vee (\sim p \wedge q))$ $\equiv \sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$ $\equiv \sim p \wedge (\sim(\sim p) \vee \sim q)$ توزيع $\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q)$ $\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ $\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q)$ $= (\sim p \wedge \sim q)$
التقرير $[p \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \vee q$ يكافئ التقرير؟ أ) $p \wedge q$ ب) $p \vee q$ ج) $\sim p \wedge q$ د) $\sim p \vee q$	نوزع الوصل $[p \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \vee q$ $\equiv [p \vee ((p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q))] \vee q$ $\equiv [p \vee (F \vee (p \wedge q))] \vee q$ $\equiv [p \vee (p \wedge q)] \vee q$ $\equiv [(p \wedge q)] \vee q$ $\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q)$

4) التكافؤ المنطقي :

- نقول أن التقريران متكافئان منطقياً (متكافئان) أو (متساويان) إذا كان جدولا الصواب لهما متطابقين أو متساويين , ونرمز لذلك بالرمز $\equiv$

عكس العبارة الشرطية يكافئ المعكوس لها	العباره الشرطية تكافئ المعاكس الإيجابي لها
$q \to p \equiv \sim p \to \sim q$	$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

مثال : أثبت أن التقرير التالي متكافئ منطقياً : $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

الحل :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

مثال	الحل
إذا كان : $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ أ) p صائب ، q صائب ب) p خاطئ ، q صائب ج) p صائب ، q خاطئ د) p خاطئ ، q خاطئ	<table><tr><td>p</td><td>q</td><td>$p \vee q$</td><td>$p \leftrightarrow q$</td></tr><tr><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td></tr><tr><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>T</td><td>T</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>T</td></tr></table>من الجدول: $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ إذا كانت P صائب ، q صائب
ليكن $x \in Z$ ، اعتبر التقريرين $\{p: x^2 =$ عدد زوجي$\}$ ، $\{q : x =$ عدد زوجي$\}$ إن أفضل طريقة لبرهان أن $p \to q$ هي بيان أن : أ) $q \to p$ ب) $\sim q \to p$ ج) $\sim p \to \sim q$ د) $\sim q \to \sim p$	$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

5) القياس المنطقي :

نعلم أنه في علاقة المساواة نستخدم خاصية التعدي ، مثلا :
إذا كان $b = c$ و $a = b$ فإن $a = c$ **. كذلك في العبارات الشرطية :**

إذا كانت العبارتان الشرطيتان $p \to q\ , q \to r$ صحيحتين ، فإن $p \to r$ صحيحه . و تكتب بالرموز :

$$[(p \to q\ ) \wedge \ (q \to p)] \to (p \to r)$$

مثال :

إذا كان $2x = 14$ ، فإن $x = 7$ ، وإذا كان $x = 7$ فإن $\frac{1}{7} = \frac{1}{x}$ و عليه فإنه :

إذا كان $2x = 14$ فإن $\frac{1}{7} = \frac{1}{x}$

مثال	الحل
"إذا نجح محمد في اختباراته , فسيسافر مع زملائه " " إذا سافر محمد مع زملائه , فسيذهب الى أبها " حدد أي العبارات الآتيه تنتج منطقياً من العبارتين السابقتين : أ) إذا سافر محمد , فإنه نجح في اختباراته ب) إذا ذهب محمد الى أبها , فسيذهب مع زملائه ج) إذا نجح محمد في اختباراته , فسيذهب الى أبها د) إذا ذهب محمد الى أبها , فإنه نجح في اختباراته	نكون جدول :

$p \to q$	q	p
إذا نجح محمد في اختباراته , فسيسافر مع زملائه	سافر مع زملائه	نجح محمد في اختباراته

$q \to$ r	r	q
إذا سافر محمد مع زملائه , فسيذهب الى أبها	يذهب الى ابها	سافرمحمد مع زملائه

$p \to$ r	$q \to$ r	$p \to q$
إذا نجح محمد في اختباراته , فسيذهب الى ابها	إذا سافر محمد مع زملائه , فسيذهب الى أبها	إذا نجح محمد في اختباراته , فسيسافر مع زملائه

للوصول إلى فيديوهات شروحات المعايير

اضغط هنا

المعيار الثامن
(التفاضل و التكامل)

1) المتتابعات (الحسابيه – الهندسيه)

2) المتسلسلات (الحسابيه – الهندسيه)

3) النهايات lim

4) الإشتقاق

5) التكامل

6) حساب المساحات و الحجوم بإستخدام التكامل

7) خصائص دالة المقياس .

1) المتتابعات :

المتتابعة :

- مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط محدد أو ترتيب معين ويسمى كل عدد في المتتابعة حداً .
- أما أن تكون منتهية (لها عدد محدد من الحدود مثل : $-2, 0, 2, 4, 6$) .
- أو غير منتهية (تستمر الى مالا نهاية مثل : $0, 1, 2, 3, 4, ...$) .
- يوجد مقدار ثابت بين كل حد والآخر يسمى (الأساس) .

حسابية

الأساس يساوي ناتج طرح أي حد لاحق من الحد الذي يسبقه .

مثال :

$1,6,11,16, ...$ متتابعه حسابية أساسها $5 = 1 - 6$

لايجاد حد مطلوب :

أساس المتتابعة $d = \dfrac{a_l - a_m}{l - m}$

الحد النوني $a_n = a_1 + d(n-1)$

مثال :

متتابعه حسابيه حدها الأول 27 وحدها السادس 12 ، ماهو الحد الرابع ؟

أ) 15 ب) 9

ج) 18 د) 27

الحل :

$$d = \frac{a_6 - a_1}{6-1} = \frac{12-27}{5} = \frac{-15}{5} = -3$$

الحد الرابع
$$a_4 = a_1 + d(4-1) = 27 - 3(3) = 27 - 9 = 18$$

هندسية

الأساس يساوي ناتج قسمة أي حد لاحق على الحد الذي يسبقه .

مثال :

$2,4,8,16,32, ...$ متتابعه هندسية أساسها $2 = \frac{16}{8}$

لايجاد حد مطلوب :

أساس المتتابعة $r^{l-m} = \dfrac{a_l}{a_m}$

الحد النوني $a_n = a_1 r^{n-1}$

مثال :

متتابعة هندسية حدها الأول 2 وحدها السادس 64 ، ماهو الحد الثالث ؟

أ) 8 ب) 4

ج) 32 د) 20

الحل :

$$r^{6-1} = \frac{a_6}{a_1} \Longrightarrow r^5 = \frac{64}{2} = 32 \Longrightarrow r = 2$$

الحد الثالث
$$a_3 = a_1 r^{3-1} = 2(2)^2 = 8$$

مثال	الحل
1) ماترتيب اول حد سالب في المتتابعة 124 , 119 , 114 , 109 , ... أ) 24 ب) 25 ج) 26 د) 27	المتتابعه حسابيه اساسها $d = -5$ $a_n = a_1 + d(n-1)$ التجريب بالخيارات : $a_{24} = 124 - 5(24-1) = 124 - 115$ موجب $a_{25} = 124 - 5(25-1) = 124 - 120$ موجب $a_{26} = 124 - 5(26-1) = 124 - 125$ سالب الحد 26 اول حد سالب
2) قيمة الحد الثامن في المتتابعة الحسابيه $x+2\ ,\ x+5\ ,\ 2x+5\ , ...$ أ) 26 ب) 25 ج) 30 د) 27	$d = x+5-(x+2) = x+5-x-2 = 3$ $d = 2x+5-(x+5) = 2x+5-x-5 = x$ $\therefore d = 3 = x$ $a_1 = x+2 = 3+2 = 5$ $a_8 = a_1 + d(8-1)$ $= 5+3(7) = 5+21 = 26$
3) تشكل قياسات زوايا المثلث أدناه متتابعه حسابية ، إذا كان قياس الزاوية الصغرى $36°$ ، فما قياس الزاوية الكبرى ؟ أ) $75°$ ب) $90°$ ج) $97°$ د) $84°$	نفرض الاساس d ، مجموع قياسات زوايا المثلث $=180°$ $a_1\quad ,\quad a_2\quad ,\quad a_3$ $36° + 36°+d + 36°+2d = 180°$ $108° + 3d = 180°$ $3d = 180° - 108° = 72 \quad \to \quad d = \frac{72}{3} = 24$ الزاوية الكبرى $a_3 = 36 + 2(24) = 36 + 48 = 84°$
4) راتب موظف علاوته السنوية **300** ريال يمثل : أ) متتابعه متقاربة ب) متتابعه هندسية ج) متتابعة حسابية د) متتابعة متذبذبة	لو فرضنا ان اول راتب للموظف عن التعيين 7000 ريال سوف يكون $7000, 7300, 7600, 7900, 8200, ...$ بما ان الزيادة ثابته سنويا ، اذا المتتابعه حسابية
5) في المتتابعة الحسابية ... ... ,4,11,18 ، ما أول حد مكون من 3 خانات ؟ أ) 100 ب) 101 ج) 102 د) 103	اساس المتتابعة $d = 11 - 4 = 7$ تجريب الخيارات في الحد النوني $a_n = a_1 + (n-1)d$ $100 = 4 + 7x \Rightarrow \quad x = \frac{96}{7} = 13{,}7$ $101 = 4 + 7x \Rightarrow \quad x = \frac{97}{7} = 13{,}8$ $102 = 4 + 7x \Rightarrow \quad x = \frac{98}{7} = 14$ $103 = 4 + 7x \Rightarrow \quad x = \frac{99}{7} = 14{,}1$ بفرض $x = n - 1$ رتبة الحد ، ويجب أن تكون عدد طبيعي

مثال	الحل
6) الحد السابع في المتتابعة $1,-2,4,-8,16,\dots\dots$ ؟ أ) 128 ب) -128 ج) 64 د) -64	يتبين لنا أن المتتابعه هندسيه لان قسمة حد على الحد الذي يسبقه عدد ثابت -2 $r=\frac{-2}{1}=-2$ و $a_1=1$ اي ان الحد السابع $a_7=a_1r^{7-1}=1(-2)^6=64$
7) متتابعه هندسية حدها الثاني $6-$ وحدها الخامس 162 فإن الحد العام لهذه المتتابعه : أ) $2(-3)^{n-1}$ ب) $-2(3)^{n-1}$ ج) $2(3)^{n-1}$ د) $-2(-3)^{n-1}$	اساس المتتابعه $r^{5-2}=\frac{162}{-6}\rightarrow r^3=-27\rightarrow r=-3$ الحد الأول $r=\frac{a_2}{a_1}\rightarrow a_1=\frac{a_2}{r}=\frac{-6}{-3}=2$ مباشره الجواب أ)
8) متتابعه هندسية حدها الأول 27 وحدها السادس $\frac{-1}{9}$, ماهو الحد الرابع ؟	$r^{6-1}=\frac{a_6}{a_1}\Longrightarrow r^5=\frac{\frac{-1}{9}}{27}=\frac{-1}{9}\div 27$ $=\frac{-1}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{-1}{3^2\times 3^3}=\frac{-1}{3^5}$ الاساس $r^5=\frac{-1}{3^5}\Longrightarrow r=\frac{-1}{3}$ الحد الرابع $a_4=a_1\,r^{4-1}=27\times r^3$ $=27\times\left(\frac{-1}{3}\right)^3=27\times\frac{-1}{27}=-1$
9) ما الحد النوني للمتتابعة الهندسية $2,16,128,\dots\dots$ ؟ أ) $a_n=2(6)^{n-1}$ ب) $a_n=2(-6)^{n-1}$ ج) $a_n=2(8)^{n-1}$ د) $a_n=2(-8)^{n-1}$	الحد الاول $a_1=2$ فقط نوجد اساس المتتابعة $r=\frac{16}{2}=8$ الاجابه ج)
10) الحد العاشر في المتتابعة $\frac{1}{2},1,2,4,8,\dots\dots\dots$ ؟ أ) 128 ب) 256 ج) 512 د) 244	$\frac{a_3}{a_2}=\frac{2}{1}=2$, $\frac{a_4}{a_3}=\frac{4}{2}=2$ المتتابعة هندسية واساسها $r=2$ والحد العاشر: $a_{10}=a_1r^{10-1}=\frac{1}{2}(2)^9=\frac{2^9}{2^1}=2^8=256$
11) ما الحد التالي في المتتابعه الهندسيه $8,6,\frac{9}{2},\frac{27}{8},\dots$ ؟ أ) $\frac{11}{8}$ ب) $\frac{9}{4}$ ج) $\frac{81}{32}$ د) $\frac{27}{16}$	نوجد اساس المتابعه $r=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ الحد التالي = نضرب الاساس بأخر حد $\frac{27}{8}\times\frac{3}{4}=\frac{81}{32}$
قطع شخص مسافة A إلى B ، ثم قطع نصف ما قطع ، ثم قطع النصف الأخر ، ما نوع المتتابعة : أ) تايلور ب) هندسية ج) حسابية د) متذبذبة	نفرض المسافه **1** $\mathbf{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots}$ المتتابعة هندسية

الأوساط الحسابية والهندسية :

- هي الحدود الواقعه بين حدين غير متتاليين في متتابعة .
- باستخدام مفهوم الحد النوني نعوض قيمة الحد المعطى لإيجاد الاساس .

الحد النوني للمتتابعه الحسابية : $a_n = a_1 + d(n-1)$

الحد النوني للمتتابعه الهندسية : $a_n = a_1 r^{n-1}$

مثال	الحل
1) أوجد الاوساط الحسابيه في المتتابعه $-8, \_\_, \_\_, \_\_, 16$	عدد حدود المتتابعه 5 ، اذا $n=5$ ، نوجد قيمة d $a_5 = a_1 + d(5-1)$ $16 = -8 + 4d \Longrightarrow 4d = 16 + 8$ $4d = 24 \Longrightarrow d = \frac{24}{4}$ $= 6$ $-8, -2, 4, 10, 16$
2) الوسط الهندسي بين العددين 16 , 4 يساوي : أ) 6 ب) 8 ج) 10 د) 12	$4, \ldots, 16$ $a_3 = a_1 r^{3-1}$ $16 = 4r^2 \Longrightarrow r^2 = \frac{16}{4} = 4 \Longrightarrow \lvert r \rvert = 2$ كل مره نضرب في **2** $4, 8, 16$
3) الوسطين الهندسيين بين العددين 9 , $\frac{1}{3}$ يساوي : أ) 1 , 3 ب) 3 , 6 ج) 1 , 6 د) 0 , 6	$\frac{1}{3}, \ldots, \ldots, 9$ $a_4 = a_1 r^{4-1}$ $9 = \frac{1}{3} r^3 \Longrightarrow r^3 = 9 \times 3 = 27 \Longrightarrow \lvert r \rvert = 3$ كل مره نضرب في **3** $\frac{1}{3}, 1, 3, 9$

2) المتسلسلات :

- **المتسلسلة :**
  - هي مجموع حدود المتتابعة .
  - ناتج جمع n حداً من المتسلسلة تسمى المجموع الجزئي ويرمز لها S_n .

حسابية	هندسية منتهية
بمعلومية الحد الاول والاخير $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$	بمعلومية الحد الاول والاخير $S_n = \frac{r\,a_n - a_1}{r-1}$
بمعلومية الحد الاول والاساس $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$	بمعلومية الحد الاول $S_n = \frac{r^n\,a_1 - a_1}{r-1}$

- **رمز المجموعة :**

يمكن التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة بإستعمال رمز المجموعة :

$$S_n = \sum_{k}^{m} f(k)$$

حيث $f(k)$ صيغة حدود المتسلسلة ولايجاد عدد الحدود نستخدم $n = m - k + 1$

مثال	الحل
أوجد $\sum_{n=2}^{9}(6n-1)$ أ) 256 ب) 328 ج) 583 د) 128	متتابعه هندسية **عدد الحدود** $n = 9 - 2 + 1 = 8$ **الحد الاول** $a_1 = 6(2) - 1 = 12 - 1 = 11$ **الحد النوني** $a_{10} = 6(9) - 1 = 54 - 1 = 53$ **مجموع الحدود** $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{8}{2}[11 + 53]$ $= \frac{8 \times 64}{2} = 4 \times 64 = 256$

- المتسلسلة الهندسية غير المنتهية :

هي التي لها عدد لا نهائي من الحدود ، إن كان لها مجموع فإنها متقاربة ، وإن لم يكن لها مجموع فإنها متباعدة

إذا كان $|r| < 1$ متقاربة ، المجموع $S_n = \frac{a_1}{1-r}$	إذا كان $|r| \geq 1$ متباعدة
مثال: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$ $|r| = \frac{1}{2} < 1$	مثال: $\sum_{n=0}^{\infty}(3^n)$ $|r| = 3 > 1$

مثال	الحل
1) اذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية 5 وأساسها 2 ومجموعها 1275 فإن عدد حدودها : أ) 7 ب) 8 ج) 9 د) 10	متسلسلة هندسية منتهية $S_n = \frac{r^n a_1 - a_1}{r-1}$ $1275 = \frac{5(2^n)-5}{1}$ $1275 + 5 = 5(2^n) \rightarrow 1280 = 5(2^n)$ $2^n = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \rightarrow n = 8$
2) مامجموع الاربعه حدود الاولى للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 12\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ أ) $\frac{1280}{81}$ ب) $\frac{320}{27}$ ج) $\frac{80}{9}$ د) $\frac{80}{81}$	$\sum_{n=0}^{4} 12\left(\frac{-1}{3}\right)^n = 12\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ $= 12\left[\left(\frac{-1}{3}\right)^0 + \left(\frac{-1}{3}\right)^1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^3\right]$ $= 12\left[1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{-1}{27}\right] = \frac{80}{9}$
3) $1-2+3-4+5-6+7\ldots\ldots+999-1000+1001=$ أ) 501 ب) -501 ج) -1001 د) 500	$\underbrace{1-2}+\underbrace{3-4}+\underbrace{5-6}+\ldots\ldots+\underbrace{999-1000}+1001$ $= (-1)+(-1)+(-1)+\ldots\ldots\ldots+(-1) + 1001$ $= -500 + 1001$ $= 501$
4) قيمة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ أ) 5 ب) $\frac{5}{2}$ ج) 10 د) 20	$\sum_{n=0}^{\infty} a_1(r)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\therefore |r| = \frac{1}{2} < 1$ تقاربية $S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 5 \times 2 = 10$

الحل	مثال
متسلسلة هندسية غير منتهية الاساس اقل من الواحد $\lvert r\rvert = \frac{1}{2}$ حدها الاول يساوي $a_1 = \frac{1}{2^0} = 1$ مجموعها يساوي $s_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ ∴ متقاربة ومجموعها 2	المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هي متسلسلة : أ) متقاربة ومجموعها $\frac{1}{2}$ ب) متقاربة ومجموعها 2 ج) متقاربة ومجموعها 1 د) متباعدة
$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$ $= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$ مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية يساوي: $s_n = \frac{a_1}{1-r}$, حدها الاول يساوي: $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, الاساس اقل من الواحد يساوي: $r = \frac{1}{2}$ $s_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .... أ) ∞ ب) 0 ج) 1 د) 2
متسلسلة حسابية $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots \ldots\ldots\ldots +100$ $d = 1$, $n = 100$, $a_1 = 1$, $a_n = 100$ $s_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ $= \frac{100}{2}[1 + 100] = 50(101) = 5050$	أوجد مجموع أول 100 عدد طبيعي : أ) 4500 ب) 4750 ج) 4950 د) 5050
مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية $s_n = \frac{a_1}{1-r}$ حدها الاول $a_1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$ والاساس اقل من الواحد $\lvert r\rvert = \frac{1}{2}$ $s_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$	مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ يساوي : أ) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) **3**

3) النهايات :

النهاية تؤول الى نقطة

النهاية تؤول الى (∞) أو $(-\infty)$

• النهاية تؤول الى نقطة :

كلما اقتربت قيم x من c من كلا الجهتين , فإن نهاية $f(x)$ هي L .

$$\lim_{x\to c} f(x)$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$$

إذا كانت نهاية اليمين $L_1 =$ نهاية اليسار $L_2 \Longleftarrow$ النهاية موجوده

إذا كانت نهاية اليمين $L_1 \neq$ نهاية اليسار $L_2 \Longleftarrow$ النهاية غيرموجوده

إذا كانت $f(x), g(x)$ دالتين في x وكان k عدد ثابت فإن :		
1) $\lim_{x\to c} k = k$	2) $\lim_{x\to c} x = c$	3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$
4) $\lim_{x\to c} k\, f(x) = k \lim_{x\to c} f(x) = k\, f(c)$	5) $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$	
6) $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) = f(c) \pm g(c)$		
7) $\lim_{x\to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = f(c) \cdot g(c)$		
8) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$		

مثال	الحل
1) أوجد $\lim_{x\to 3} 7$	$\lim_{x\to 3} 7 = 7$
2) أوجد $\lim_{x\to 3} (x^2 - 2x + 1)$	$\lim_{x\to 3} (x^2 - 2x + 1) = 3^2 - 2(3) + 1 = 4$
3) أوجد $\lim_{x\to 4} \frac{3x^2+2}{x-1}$	$\lim_{x\to 4} \frac{3x^2+2}{x-1} = \frac{3(4)^2+2}{4-1} = \frac{50}{3}$
4) أوجد $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x-1}$	$\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x-1} = \frac{5-5}{5-1} = \frac{0}{4} = 0$
5) إذا كانت : $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \geq 1 \\ 7x-3 & ; x < 1 \end{cases}$ أوجد : $\lim_{x\to 1} f(x)$	لإيجاد النهاية المطلوبة لابد من ايجاد النهاية اليمنى والنهاية اليسرى $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+3) = 1 + 3 = 4$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (7x-3) = 7(1) - 3 = 4$ نجد أن قيمة النهاية اليمنى = قيمة النهاية اليسرى وبالتالي $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

• حالات عدم التعيين :

عندما يكون ناتج التعويض المباشر في **الدوال النسبيه** يساوي $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$ ، فإن طرق معالجتها :

- نحلل كل من البسط والمقام إن أمكن ثم نختصر المقادير المتطابقة .
- نضرب في المرافق بسطاً ومقاماً إذا كانت حالة عدم تعيين وتحتوي على جذر .
- نستخدم قاعدة لوبيتال : نشتق البسط لوحده ونشتق المقام لوحده .

مثال	الحل
أوجد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$	1) بالتعويض المباشر ينتج حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ 2) نقوم بتحليل البسط ثم الاختصار : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$
أوجد $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}$	1) بالتعويض المباشر ينتج حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ 2) نقوم بتحليل البسط ثم الاختصار : $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-3)}{x+2}$ $=\lim\limits_{x\to -2}(x-3)=-2-3=-5$
أوجد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$	1) تعويض مباشر : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{\sqrt{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ 2) نقوم بالضرب في المرافق بسطاً ومقاماً : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$ $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to c}\frac{x^m-c^m}{x^n-c^n}=\frac{m}{n}(c)^{m-n}$$

مثال	الحل
أوجد $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3-8}$	بالتعويض المباشر ينتج حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ نطبق النظرية : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-2^4}{x^3-2^3}=\frac{4}{3}(2)^{4-3}=\frac{4}{3}(2)=\frac{8}{3}$
أوجد $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^5-243}{x^4-81}$	بالتعويض المباشر ينتج حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$ نطبق النظرية : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^5-3^5}{x^4-3^4}=\frac{5}{4}(3)^{5-4}=\frac{5}{4}(3)=\frac{15}{4}$

- **النهاية تؤول الى (∞) أو ($-\infty$) :**

أولاً : نهاية دوال القوى عند ∞ أو $-\infty$

$$f(x) = x^n$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & n \text{ زوجي} \\ -\infty, & n \text{ فردي} \end{cases}$$

أمثلة		
$\lim_{x\to\infty} x^7 = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$

ثانياً : نهاية دوال كثيرة حدود عند ∞ أو $-\infty$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

نحل كما لو كانت نهاية دالة القوى

أمثلة	
$\lim_{x\to\infty}(2x^3 - 2x^2 + 7x - 1) = \lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$	$\lim_{x\to-\infty}(3x^6 + 4x^5 + 8) = \infty$
$\lim_{x\to\infty}(-x^2 + 3x + 4) = \lim_{x\to\infty} -x^2 = -\lim_{x\to\infty} x^2 = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty}(2x^3 + x - 1) = -\infty$

ثالثاً : نهاية الدوال النسبية عند ∞ أو $-\infty$

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

درجة البسط = درجة المقام	درجة البسط < درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام
$m = n$	$m > n$	$m < n$
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a}{b}$	$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$	$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = (-1)^{n-m}\infty \end{cases}$ ✓

أمثلة	أمثلة	أمثلة
$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3 - x}{2x^3 + 1} = \frac{7}{2}$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x-1} = \infty$
	$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{2x^4 + 1} = 0$	$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3 + 1}{x^2 + 1} = (-1)^{3-2}\infty = -\infty$

أمثلة
1) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-2x^2+7x-1)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3)=2(\infty)^3=\infty$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-2x^2+7x-1)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=2(-\infty)^3=-\infty$
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{2x^3+4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3}{2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{2}=\frac{4}{2}=2$
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+3}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4}{2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{2}=\frac{4(\infty)}{2}=\infty$
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-1}{2x^4+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3}{2x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{2x}=\frac{4}{2(\infty)}=0$
6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^3+4x^2-1}=\frac{1}{\infty}=0$
7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4}}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\frac{2}{1}=2$
8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3x+5}}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}\|x\|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2}(-x)}{x}=\frac{-\sqrt{2}}{1}=-\sqrt{2}$ ملحوظة : • عندما $x\to\infty$ فإن $\|x\|=x$. • عندما $x\to-\infty$ فإن $\|x\|=-x$.
9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0$
10) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ بتوحيد المقام $=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{x}\right)=\frac{1-0}{0}=\infty$

ملاحظة : إذا كان a عدد حقيقي ، فإن $a^{\infty}=\infty$ / $a^{-\infty}=0$ / $\frac{a}{0}=\infty$

• نهايات خاصة تؤول الى (0) أو (∞) أو (∞−) :

نهايات خاصة			
$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$		$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to 0} e^x = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$		$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$	$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$
$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$		$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x-1} = 1$		$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	
$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$		$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = \infty \quad ,n>0$			

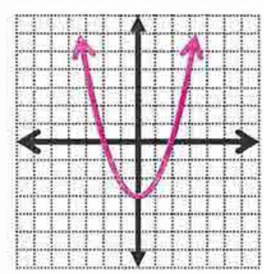
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
مثال :	مثال :	مثال :
1) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x} = 2$ 2) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan 3x} = \frac{1}{3}$	$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$ $= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \frac{5}{3}$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 3x} = \frac{\sin 5x}{x} \cdot \frac{x}{\tan 3x} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$		

ملاحظة : نستطيع استخدام (قاعدة لوبيتال) في ايجاد نهاية الدوال الخاصة وذلك بعد ما نتطرق للاشتقاق .

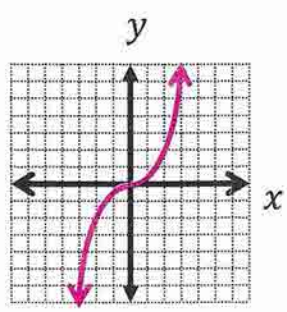
سلوك طرفي التمثيل البياني لمنحنى الدالة

- الطرف الأيمن للمنحنى
  - لأعلى: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
  - لأسفل: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
  - أفقي: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = C$
- الطرف الأيسر للمنحنى
  - لأعلى: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
  - لأسفل: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
  - أفقي: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = C$

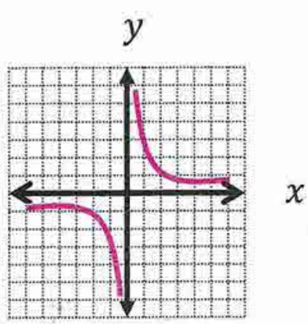
حيث C هو القيمة المناظرة على محور y .



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

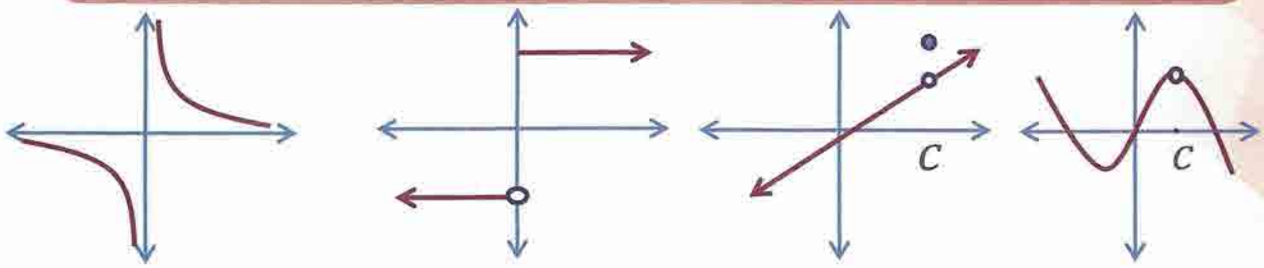


$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

إتصال الداله عند نقطة :

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا تحقق :

1) $f(c)$ معرفه
2) $\lim_{x\to c} f(x) =$ موجوده
3) $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$



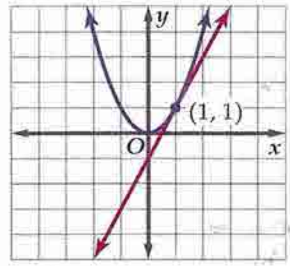
الدالة غير متصلة لأنها غير معرفه عند $x = c$	الدالة غير متصلة لأن $f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x)$ **عدم اتصال قابل للإزالة (نقطي)**	الدالة غير متصلة لأن $\lim_{x\to c} f(x)$ غيرموجوده **عدم اتصال قفزي**	الدالة غير متصلة لأن الداله غير معرفه عند $x = 0$ **عدم اتصال لا نهائي**

مثال	الحل
1) إذا كانت الدالة : $f(x) = \begin{cases} x+1 & ;x<1 \\ c-x & ;x\geq 1 \end{cases}$ متصلة عند $x = 1$, أوجد قيمة c :	الدالة متصلة عند $x = 1$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ $c-1 = 1+1$ $c-1=2$ $c=3$
2) إذا كانت الدالة : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & ;x\neq 3 \\ c & ;x=3 \end{cases}$ متصلة عند $x = 3$, أوجد قيمة c :	الدالة متصلة عند $x = 3$ $f(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ $c = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$ $c = \lim_{x\to 3}(x+3) \Longrightarrow c = 6$
3) ماقيمة c التي تجعل الدالة $f(x) = \begin{cases} x+3 & ;x\leq 2 \\ cx+6 & ;x>2 \end{cases}$ متصلة على R : أ) $\frac{-1}{2}$ ب) 0 ج) 1 د) $\frac{1}{2}$	نوجد النهاية اليمنى واليسرى : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2c+6$ نساوي الطرفين حتى يكون هناك نهاية للدالة : $2c+6=5$ $2c = 5-6 = -1 \rightarrow c = \frac{-1}{2}$

معدل التغير اللحظي (ميل مماس المنحني عند نقطة) :

معدل التغير اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$
هو ميل المماس عند هذه النقطة ، ويعطى بالصيغة :
شرط أن تكون النهاية موجودة .

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

الحل	مثال
$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(2+h) = 2 + 0 = 2$	ميل مماس منحنى الداله $y = x^2$ الممثلة بالشكل أدناه يساوي :  أ) 0 ب) 1 ج) 2 د) 4

السرعة المتوسطة المتجهة :

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفة دالة في الزمن $f(t)$ ،
فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في الفترة الزمنية a و b
تعطى بالصيغة :

$$v = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

الحل	مثال
$f(3) = 3(3)^2 - 12(3) = -9$ $f(2) = 3(2)^2 - 12(2) = -12$ $v = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{-9 - (-12)}{1}$ $= -9 + 12 = 3$	تمثل المعادلة $f(t) = 3t^2 - 12t$ المسافة بالأميال ، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعه باتجاه خط النهاية . ماسرعته المتوسطة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق ؟ أ) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3

السرعة المتجهة اللحظية :

إذا أعطي موقع جسم متحرك بوصفة دالة في الزمن $f(t)$ ،
فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تعطى بالصيغة :
شرط أن تكون النهاية موجودة .

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

الحل	مثال
$f(3+h) = 100 - 9(3+h)^2$ $= 100 - 9(9 + 6h + h^2)$ $= 100 - 81 - 54h - 9h^2$ $f(3) = 100 - 9(9) = 100 - 81$ $v = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{-54h - 9h^2}{h}$ $= \lim_{h \to 0} \frac{h(-54 - 9h)}{h}$ $= \lim_{h \to 0} -54 - 9h = -54$ سرعة الكرة $54ft/m$ والاشارة السالبة تعني ان الكرة تهبط لاسفل	سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 100 ft وتمثل الدالة $f(t) = 100 - 9t^2$ ارتفاع الكره عن سطح الارض بالاقدام. أوجد السرعه المتجهة اللحظية للكرة بعد 3 دقائق ؟ أ) 27 ب) 54 ج) 73 د) 81

4) الاشتقاق :

الدالة y	$y = a$	$y = ax$	$y = x^n$
المشتقة y'	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = a$	$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = x^3$	$y' = 3x^2$
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 6\sqrt[3]{x}$	$y = 6(x)^{\frac{1}{3}}$ $y' = 6 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = 2x^{\frac{-2}{3}}$

الدالة	$y = f(x) \pm g(x)$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 5x^3 + 7x - 2$	$\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 7$
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = x^{-5} + x^{\frac{2}{3}}$	$\frac{dy}{dx} = -5x^{-5-1} + \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1}$ $= -5x^{-6} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3}$	لابد من تعديل الدالة : $y = x^{\frac{2}{3}} + x^{-3}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + (-3x^{-3-1})$ $= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-4}$

الدالة	$y = f(x) \cdot g(x)$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = (4x^3 + 2)(2 - 3x)$	$\frac{dy}{dx} = 12x^2(2 - 3x) + (-3)(4x^3 + 2)$ $= 24x^2 - 36x^3 - 12x^3 - 6$ $= 24x^2 - 48x^3 - 6$ $= -48x^3 + 24x^2 - 6$

الدالة	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
المشتقة	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \frac{4x^3+2}{2-3x}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^2(2-3x)-(-3)(4x^3+2)}{(2-3x)^2}$ $= \dfrac{24x^2-36x^3+12x^3+6}{(2-3x)^2}$ $= \dfrac{24x^2-24\,x^3+6}{(2-3x)^2}$

الدالة	$y = [f(x)]^n$
المشتقة	$\dfrac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1}\cdot \acute{f}(x)$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $f(x) = (x^5+2x^3+1)^7$	$f(x)' = 7(x^5+2x^3+1)^6\cdot(5x^4+6x^2)$

الدالة	إذا كانت $y = f(z)\ ,\ z = g(x)$
المشتقة	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$

مثال	الحل
إذا كانت $y = z^2$ وكانت $z = x^2-2x+5$ أوجد $\frac{dy}{dx}$	$\dfrac{dy}{dz} = 2z \quad , \quad \dfrac{dz}{dx} = 2x-2$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}$ $= 2z\,(2x-2)$ $= 2(x^2-2x+5)\,(2x-2)$ طريقة أخرى : نعوض عن z في y فيكون الناتج : $y = (x^2-2x+5)^2$ $\dfrac{dy}{dx} = 2(x^2-2x+5)(2x-2)$

اشتقاق الدوال الاسيه واللوغاريتمية :

الدالة	$y = e^{f(x)}$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{3x^2-2}$	$\frac{dy}{dx} = e^{3x^2-2} \cdot (6x)$ $= 6x\, e^{3x^2-2}$

الدالة	$y = a^{f(x)}$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} \cdot f'(x)\, ln(a)$

مثال : أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 2^{3x^2-2}$

الحل : $y' = 2^{3x^2-2} \cdot (6x)\, ln(2)$

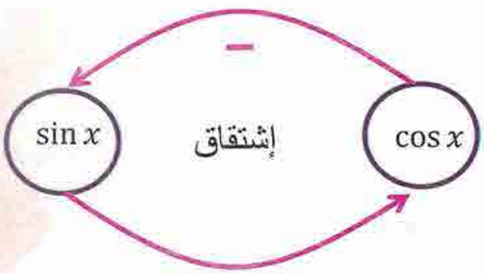
الدالة	$y = ln\, f(x)$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = \frac{\acute{f}(x)}{f(x)}$

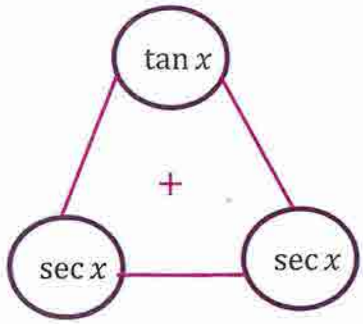
مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = ln(4x^2 - 1)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4x^2 - 1}$

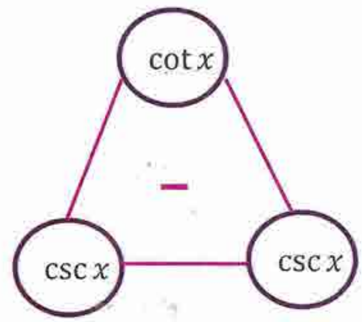
الدالة	$y = log_a f(x)$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = \frac{\acute{f}(x)}{f(x)} \cdot \frac{1}{ln\, a}$

مثال	الحل
أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = log_3(4x^2 - 1)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{4x^2 - 1} \cdot \frac{1}{ln\, 3}$

إشتقاق الدوال المثلثية :







مشتقة أي دالة يساوي حاصل ضرب الدالتين الأخريين في المثلث مع مراعاة الاشارات.

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\tan u)' = (\sec u)^2 \cdot u'$	$(\cot u)' = -(\csc u)^2 \cdot u'$
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\sec u)' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$	$(\csc u)' = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'$

$$y = sin\ 5x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 5\ cos\ 5x$$
$$y = tan\ x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = sec^2 x$$
$$y = sec\ x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = secx \cdot tan\ x$$
$$y = cot\ 5x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -5csc^2 5x$$
$$y = csc\ 7x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -7\ csc\ 7x \cdot cot\ 7x$$

مثال : أوجد المشتقة الأولى للدالة

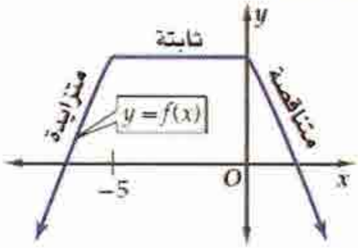
الحل :

$f(x) = sin(3x+1)$
$f'(x) = \cos(3x+1) \cdot (3)$

$f(x) = tan(x^{-2})$
$f'(x) = \sec^2(x^{-2}) \cdot (-2x^{-3})$

$f(x) = \sec(2x^2+1)$
$f'(x) = sec(2x^2+1)\ tan(2x^2+1) \cdot (4x)$

القيم القصوى المطلقة للدالة :

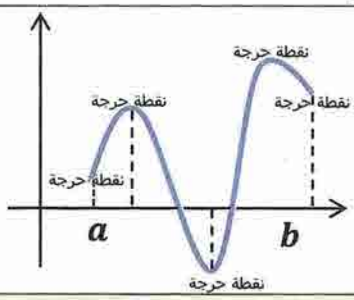


- **الدوال المتزايدة - المتناقصة - الثابتة :**

في الشكل المجاور , يتبين منحنى الدالة $f(x)$:

- الدالة متزايدة في الفتره $(-\infty , -5)$
- الدالة ثابته في الفتره $(-5 , 0)$
- الدالة متناقصة في الفتره $(0 , \infty)$

مثال	الحل
إبحث نوع الدالة $f(x) = x^3$	نوجد اصفار المشتقه $f'(x) = 3x^2 \implies 3x^2 = 0$ $\implies x = 0$ وبالتالي تكون $f(x)$ موجبة لكل $x \in R$ إذا $f(x)$ متزايدة على R ويمكن القول أيضا أن الدالة ثابتة - ∞ + + + + + + (0) + + + + + + ∞



- **النقاط الحرجة :**

- هي النقاط واقعه على منحنى الدالة ، يحدث عندها تغير في اشارة الانحناء .
  (تفصل بين الجزأين المتزايد والمتناقص في المنحنى)
- تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق أو المشتقه عندها تساوي صفر .

مثال	الحل
1) القيم الحرجة للدالة $f(x) = 2x^2 + 8x$ في الفترة $[-5,0]$ تساوي : أ) -1 ب) -2 ج) -3 د) -4	نشتق الدالة $f'(x) = 4x + 8$ نساويها بصفر $4x + 8 = 0$ $4x = -8$ النقطة الحرجة هي $x = -2$
2) القيم الحرجة للدالة $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 1$ في الفترة $[-2,1]$ تساوي : أ) $-1, -2$ ب) $-1 , 1$ ج) $1 , 1$ د) $1 , 2$	نشتق الدالة $f'(x) = 12x^3 - 12x$ نساويها بصفر $12x^3 - 12x = 0$ $12x(x^2 - 1) = 0$ $12x(x+1)(x-1) = 0$ $x = -1 \quad or \quad x = 1$

- **القيمة العظمى والقيمة الصغرى :**

اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على $[a,b]$ فإن لها قيمة عظمى وقيمة صغرى وذلك إما عند طرفي الفتره أو عند إحدى النقاط الحرجة .

مثال	الحل
اوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة $f(x)=2x^2+8x$ في الفترة $[-5,0]$	1) نوجد اصفار المشتقة $f'(x)=4x+8=0$ $4x=-8$ النقطة الحرجة هي $x=-2$ 2) نوجد قيمة الدالة عند 0 , -2 , -5 $f(-5)=2(-5)^2+8(-5)=50-40=10$ عظمى $f(-2)=2(-2)^2+8(-2)=8-16=-8$ صغرى $f(0)=2(0)^2+8(0)=0-0=0$

- **كيف يمكن أن نحدد حالة الدالة :**

1) نوجد النقاط الحرجه (نشتق الدالة ونساويها بصفر) .
2) نحدد القيمة العظمى والقيمة الصغرى ثم ندرس الاشارات على خط الاعداد :
   - من صغرى الى عظمى ⟸ الدالة متزايدة
   - من عظمى الى صغرى ⟸ الدالة متناقصة
3) نوجد أصفار المشتقه الثانية ثم ندرس الاشارات على خط الأعداد :
   - + الداله مقعرة لاعلى
   - − الدالة مقعرة لأسفل
4) نقاط الانقلاب (نعوض اصفار المشتقه الثانية في الدالة الاصلية) .

مثال : حدد متى تكون الدالة $f(x)=x^3+3x^2-9x+6$ متزايدة - متناقصة - مقعرة لأعلى - مقعرة لأسفل ونقاط الانقلاب .

الحل :

1) نوجد النقاط الحرجة : نشتق الدالة ونساويها بصفر .

$$f'(x)=3x^2+6x-9$$
$$3(x^2+2x-3)=0 \Longrightarrow 3(x-1)(x+3)=0$$
$$\Longrightarrow x_1=1\ , x_2=-3$$

2) نحدد فترات التزايد والتناقص : لأن الفترة مفتوحه ناخذ قيمة x بين الفترات .

x	-4	0	2
$f'(x)$	5	-3	5

$-\infty$ + + + + + + + | - - - - - - - | + + + + + + + ∞

متزايده -3 متناقصه 1 متزايده

3) التقعر : نوجد اصفار المشتقة الثانية .

$$f''(x)=2x+2 \Longrightarrow 2x+2=0 \Longrightarrow 2x=-2 \Longrightarrow x=-1$$

x	-2	0
$f''(x)$	-2	2

- - - - - - | + + + + +

مقعره لأسفل -1 مقعره لأعلى

4) نقاط الأنقلاب : نعوض بأصفار المشتقه الثانية في الدالة الأصلية .

$f(-1)=-1+3+9+6=17 \Longrightarrow (-1\ ,17)$ نقطة انقلاب

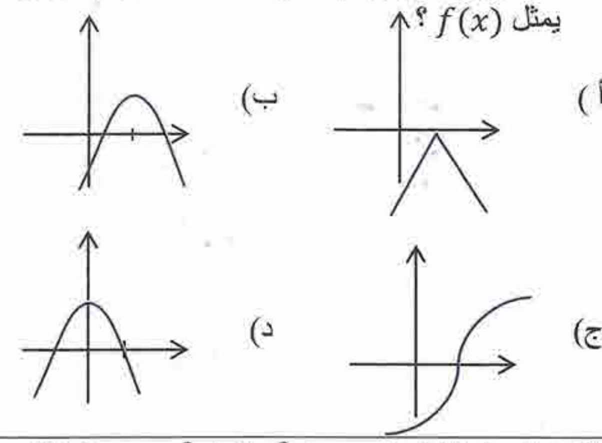
نظرية القيمة المتوسطة :

اذا كانت $f(x)$ متصلة على $[a,b]$ ، وكانت $a < b$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي واحد $c \in (a,b)$ بحيث تكون مشتقة الدالة عند هذا العدد تساوي القيمة المتوسطة ، والتي تعطى بالصيغة :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

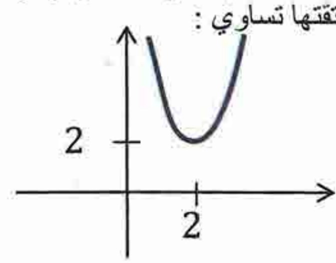
الحل	مثال
$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ $= \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$ $= \frac{[1+2] - [-8-4]}{3} = \frac{3+12}{3} = \frac{15}{3} = 5$	1) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^3 + 2x$ على الفتره $[-2,1]$ أ) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5
$f(b) = f(1) = 1 + 1 = 2$ $f(a) = f(0) = 0 + 1 = 1$ $f'(c) = 2c$ $2c = \frac{2-1}{1-0}$ $2c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}$ طريقة سريعه : اذا كانت الدالة تربيعية فإن قيمة c هي (اجمع حدود الفترة واقسم على 2)	2) ماقيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,1]$ أ) -1 ب) $\frac{-1}{2}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) 1

ملاحظة : اذا كان $f(a)$, $f(b)$ مختلفين في الاشارة فإن القيمة المتوسطة $f(c) = 0$ ، ويسمى c صفر الدالة .

مثال	الحل
1) اوجد مشتقة : $y = (x^2+1)^6$	$y' = 6(x^2+1)^{6-1} \times 2x$ $= 12x(x^2+1)^5$
2) اوجد المشتقة: $y = \sqrt[3]{x^7}$	$y = \sqrt[3]{x^7} = x^{\frac{7}{3}}$ $y' = \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$
3) إذا كانت الدالة f متصلة ومتناقصة في الفترة $[1,\infty)$ ، وكان $f'(1) = 0$ ، فأي الأشكال التالية يمكن أن يمثل $f(x)$ ؟  	أ) بيان دالة القيمة المطلقة $f(x) = -\|x-1\|$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ ب) بيان دالة تربيعية $f(x) = -(x-1)^2 + 1$, متناقصة في الفترة $[1,\infty)$ ، مشتقتها: $\grave{f}(1) = -2x + 2 =$ $-2(1)) + 2 = 0$ ج) دالة متزايدة في الفترة $(-\infty,1],[1,\infty)$ د) بيان دالة تربيعية متناقصة في الفترة $[0,\infty)$ ∴الحل (ب)
4) اعتبر الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ،حيث $a > 0$ أي العبارات التالية قد لا تكون صحيحة : أ) يوجد x_0 بحيث $f(x_0) < 0$ ب) يوجد x_0 بحيث $f(x_0) > 0$ ج) يوجد x_0 بحيث $f'(x_0) < 0$ د) يوجد x_0 بحيث $f'(x_0) > 0$	بما أن اشتقاق $f(x)$ دالة تربيعية فإنها دائما اكبر من الصفر وليس اصغر من الصفر ∴ يوجد x_0 بحيث $f'(x_0) > 0$
5) إذا كانت $f'(-3) = 1$, $g'(-3) = 5$, $f(-3) = 2$, $g(-3) = 3$, فإن $(fg)'(-3)$ تساوي : أ) 13 ب) 14 ج) 15 د) 16	قاعدة: $(fg)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ $(fg)'(-3) = 1(3) + 2(5)$ $= 3 + 10 = 13$
6) إذا كانت $f(x) = \frac{7}{2}\sqrt[3]{x^5}$ فإن $f'(x)$ يساوي؟ أ) $\frac{21}{10x^{\frac{2}{5}}}$ ب) $\frac{35x^{45}}{10}$ ج) $\frac{35}{6x^{\frac{2}{3}}}$ د) $\frac{35x^{\frac{2}{3}}}{6}$	$f(x) = \frac{7}{2}\sqrt[3]{x^5} = \frac{7}{2}\, x^{\frac{5}{3}}$ $\grave{f}(x) = \frac{7}{2}\left(\frac{5}{3}\right) x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{35}{6}x^{\frac{2}{3}}$

الحل	مثال
$y=(x^3+1)(2x^3-2)=2x^6-2$ $y'=2\times 6\,x^{6-1}=12x^5$	7) إذا كانت $y=(x^3+1)(2x^3-2)$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟ أ) $2x$ ب) $12x^5$ ج) $6x^2$ د) $10x^4+6x^2-4x$
عبارة عن فرق مربعين $y=(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})=(1)^2-(\sqrt{x})^2$ $y=1-x$ $y'=-1$	8) إذا كانت $y=(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x})$ فإن y' تساوي : أ) -1 ب) $(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1)(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})$ ج) 1 د) $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)+(1-\frac{1}{2\sqrt{x}})$
$x^2+y^2=20\xRightarrow{\text{مشتقتها}}2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $2y\frac{dy}{dx}=-2x\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$ $\xRightarrow{\text{التعويض بـ } (2,4)}\quad\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$	9) إذا كانت $x^2+y^2=20$ فإن $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(2,4)$ تساوي ؟ أ) $\frac{-5}{2}$ ب) $\frac{-1}{2}$ ج) $\frac{3}{2}$ د) $\frac{5}{2}$
لاحظ أن e^2 عدد ثابت مشتقته تساوي الصفر	10) اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y=e^2$: أ) $2e^2$ ب) e^3 ج) $2e$ د) 0
$z=xy+x^2y+y^2x$ اشتق جزئياً بالنسبة لـ y $\therefore\frac{dz}{dy}=x+x^2+2yx$	11) إذا كانت $z=xy+x^2y+y^2x$: اوجد $\frac{dz}{dy}$ ؟ أ) $x+x^2+2xy$ ب) $1+x^2+2y$ ج) $y+2xy+y^2$ د) $1+2xy+x^2$
$y^2=xy+2x^2\Longrightarrow y^2-xy=2x^2$ $\xRightarrow{\text{بالاشتقاق}}\ 2y\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}-y=4x$ $\frac{dy}{dx}[2y-x]=4x+y$ $\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{y+4x}{2y-x}$	12) إذا كانت $y^2=xy+2x^2$ اوجد $\frac{dy}{dx}$ ؟ أ) $\frac{2y-x}{y+4x}$ ب) $\frac{y+4x}{2y-x}$ ج) $2y-x$ د) $y+4x$

<table>
<tr><th>مثال</th><th>الحل</th></tr>
<tr><td>13) إذا كانت $y = e^{2x+1}$ ، فإن $\frac{d^{100}y}{dx^{100}}$ عند $x = 0$ تساوي :

أ) $200e$ ب) $2^{100}e$
ج) 100^2e د) 0</td><td>$\frac{dy}{dx} = (2)(e^{2x+1})$
$\frac{d^2y}{dx^2} = (2)(2)(e^{2x+1}) = 2^2(e^{2x+1})$
$\frac{d^3y}{dx^3} = (2^2)(2)(e^{2x+1}) = 2^3(e^{2x+1})$
نستنتج أن
$\frac{d^{100}y}{dx^{100}} = 2^{100}(e^{2x+1})$
بالتعويض بقيمة $x = 0$
$2^{100}\left(e^{2(0)+1}\right) = 2^{100}e$</td></tr>
<tr><td>14) إذا كان الرسم التالي للدالة $f(x)$ فإن مشتقتها تساوي :

</td><td>$f(x) = (x-2)^2 + 2$
$f(x) = x^2 - 4x + 4 + 2$
$f(x) = x^2 - 4x + 6$

$\therefore \grave{f}(x) = 2x - 4$</td></tr>
<tr><td>15) اوجد نقطة الانقلاب للدالة :
$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

أ) $(16,4)$
ب) $(2,7)$
ج) $(3,18)$
د) $(4,16)$</td><td>نقاط الانقلاب (نعوض اصفار المشتقة الثانية في الدالة الاصلية)
$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$
$\xrightarrow{\text{المشتقة الاولى}} f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
$\xrightarrow{\text{المشتقة الثانية}} f''(x) = 6x - 24$

نساوي المشتقة الثانية بالصفر $6x - 24 = 0$
$6x = 24 \Longrightarrow x = 4$

بالتعويض $x = 4$ في الدالة $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$
$= 4^3 - 12(4^2) + 36(4)$
$= 64 - 192 + 144 = 16$
نقطة الانقلاب $(4,16)$</td></tr>
</table>

5) التكامل :

- اذا كانت الدالة f دالة متصلة وأمكن ايجاد F قابلة للأشتقاق بحيث $F'(x) = f(x)$ ، فإن :

$$\int f(x)\, dx = F(x)$$

تقرأ تكامل الدالة f بالنسبة للمتغير x تساوي F

- لتكن u و v دالتين قابله للإشتقاق في x :

$\int a\, dx = ax + c$	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int k\, u\, dx = k \int u\, dx$
$\int [u \pm v]\, dx = \int u\, dx \pm \int v\, dx$		
مثال: أحسب التكاملات التالية :		

1) $\int (5x^3 + 2x^2 + 7x - 2) dx$ $= \dfrac{5x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{7x^2}{2} - 2x + c$	2) $\int \left(5x^4 + \dfrac{2}{x^2} + \sqrt{x} - 2\right) dx$ $= \int \left(5x^4 + 2x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} - 2\right) dx$ $= \dfrac{5x^5}{5} + \dfrac{2x^{-1}}{-1} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x + c$ $= x^5 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2x + c$

$\int (ax + b)^n\, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$
مثال: أحسب التكامل التالي $\int (5x + 11)^2\, dx = \dfrac{(5x+11)^3}{5(3)} + c = \dfrac{(5x+11)^3}{15} + c$

$$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$ تكامل (داله قوى مضروبه في مشتقتها)

مثال: أحسب التكاملات التالية

1) $\int 6x^2 (2x^3 - 1)^4 \, dx = \frac{(2x^3 - 1)^5}{5} + c$ $\frac{\cancel{3}x^3 (2x^4 - 1)^5}{\cancel{3} \quad 4 \quad 5} + c$

$\frac{2x^3 (2x^3 - 1)^5}{5} + c$

2) $\int (x^2 + 1) \sqrt{x^3 + 3x + 1} \, dx$ let $u = x^3 + 3x + 1$

$\Longrightarrow u' = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1)$

$$\frac{1}{3} \int 3(x^2 + 1) \sqrt{x^3 + 3x + 1} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 3x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1} + c$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 3x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 + 3x + 1)^3} + c$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = ln|u| + c$$ تكامل (مشتقة دالة مقسومة على الدالة نفسها)

مثال: أحسب التكاملات التالية

1) $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$

2) $\int \frac{2x^3 + 1}{x^4 + 2x + 1} dx$ let $u = x^4 + 2x + 1$

$\Longrightarrow u' = 4x^3 + 2 = 2(2x^3 + 1)$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2(2x^3 + 1)}{x^4 + 2x + 1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^4 + 2x + 1| + c$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

مثال: أحسب التكامل التالي

$$\int e^{3x+7}\,dx = \frac{e^{3x+7}}{3} + c$$

$$\int e^{u}\cdot u'\,dx = e^{u} + c$$

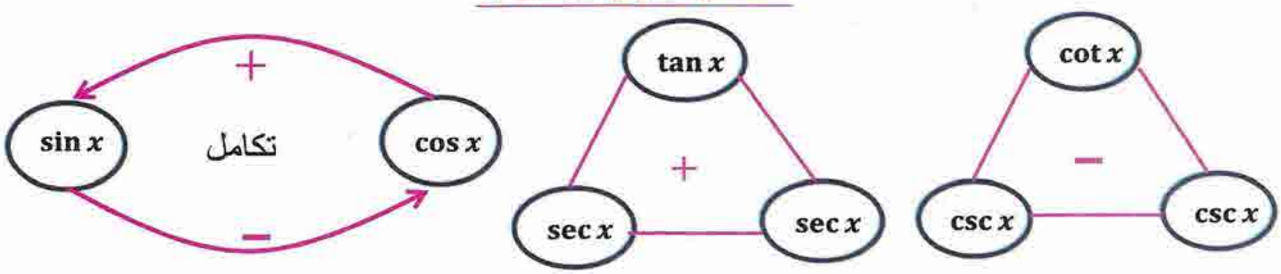
مثال: أحسب التكامل التالي

$$\int e^{3x^2+1}\cdot x\,dx \qquad let\ \ u = 3x^2+1 \ \Rightarrow\ u' = 6x$$

$$= \frac{1}{6}\int e^{3x^2+1}\cdot 6x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\,e^{3x^2+1} + c$$

تكامل الدوال المثلثية :



تكامل ضرب أي دالتين يساوي الدالة الثالثة في الشكل السابق مع مراعاة الاشارات.

$\int \sin u\,dx = \frac{-\cos u}{u'} + c$	$\int \sec x\,\tan x\,dx = \sec x + c$	$\int \csc x\,\cot x\,dx = -\csc x + c$
$\int \cos u\,dx = \frac{\sin u}{u'} + c$	$\int sec^2x\,dx = \tan x + c$	$\int csc^2x\,dx = -\cot x + c$

1) $\int \sin 3x\,dx = \frac{-\cos 3x}{3} + c$

2) $\int tan^2x\,dx = \int (sec^2x - 1)dx = \tan x - x + c$

3) $\int sin^2x\cos x\,dx = \frac{sin^3x}{3} + c$ دالة × مشتقتها

4) $\int \frac{sinx}{cos^2x}dx = \int cos^{-2}x\sin x\,dx = \frac{-cos^{-1}x}{-1} + c = \frac{1}{\cos x} + c$

مثال	الحل
1) $\int (x-1)^2 dx =$ أ) $\frac{1}{x-2}+c$ ب) $2(x-2)^3+c$ ج) $\frac{(x-1)^3}{3}+c$ د) x^2-x+c	$\int (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3}+c$
2) $\int \sin(x^2)x\,dx$ يساوي : أ) $-\frac{1}{2}\cos(x^2)+c$ ب) $\cos(x^2)\frac{x^2}{2}+c$ ج) $\frac{\sin^2(x^2)}{2}+c$ د) $\frac{\cos^2(x)}{2}+c$	من خواص التكامل $\int u' \cdot \sin u\,dx = -\cos u + c$ $\int \sin(x^2)x\,dx = \frac{1}{2}\int 2x\,.\sin(x^2)\,dx$ $\frac{1}{2}[-\cos(x^2)]+c = -\frac{1}{2}\cos(x^2)+c$
3) إذا قذف جسم لأعلى ، يتم حساب أعلى نقطة يصل إليها المقذوف باستخدام : أ) التفاضل ب) الدالة الأسية ج) التكامل د) الدالة اللوغاريتمية	لتحديد المسافة نستخدم التكامل ولتحديد السرعة نستخدم التفاضل وبالسؤال طلب تحديد أعلى نقطة أي المسافة الجواب التكامل
4) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ هو : أ) $y=\frac{x^2}{y}+c$ أ) $y=\frac{2x^3}{3y^2}+c$ ب) $6y-6x=\pi-3\sqrt{3}$ ج) $3y^2=2x^3+c$	$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \Longrightarrow y\,dy = x^2\,dx$ نحل المعادلة بالتكامل : $\Longrightarrow \int y\,dy = \int x^2\,dx$ $\Longrightarrow \frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+c$ $\xleftarrow{\text{بالضرب في 6}}$ $\Longrightarrow 3y^2 = 2x^3+c$
5) $\int (x^2+2x)^3(2x+2)dx$ يساوي : أ) $6(x^2+2x)+c$ ب) $\frac{(x^2+2x)^4}{4}+c$ ج) $\frac{(x^2+2x)^4}{4}-\frac{(2x+2)^2}{2}+c$ د) $\frac{(x^2+2x)^4}{4}(x^2+2x)+c$	تكامل دالة قوى مضروب في مشتقتها $\int u^n\,.\grave{u}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ $\int (x^2+2x)^3(2x+2)dx = \frac{(x^2+2x)^{3+1}}{3+1}+c$ $=\frac{(x^2+2x)^4}{4}+c$

التكامل المحدد :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

الحل	مثال
$\int_1^2 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$ $= \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$	1) $\int_1^2 (x-1)dx =$: أ) 1 ب) -1 ج) $-\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$
$\int_0^3 ax\,dx = 9$ $\frac{ax^2}{2}\Big|_0^3 = 9 \Longrightarrow \left(\frac{9a}{2}\right) - (0) = 9 \Longrightarrow a = 9 \times \frac{2}{9} = 2$	2) إذا كان $\int_0^3 ax\,dx = 9$ ، فإن قيمة a تساوي : أ) 2 ب) 3 ج) 6 د) 9

- **بعض خواص التكامل المحدد :**

$\int_a^b k\,dx = k\,(b-a)$	
$\int_1^3 5\,dx = 5\,(3-1) = 5 \times 2 = 10$	أوجد $\int_1^3 5\,dx$

$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$	
$\int_0^3 5x^2 - 5\,dx = \int_0^3 5(x^2-1)dx$ $= 5\int_0^3 x^2 - 1\,dx = 5\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^3 = 3\,(6-0) = 18$	أوجد $\int_0^3 5x^2 - 5\,dx$:

$\int_a^a f(x)dx = 0$	
$\therefore \int_2^2 2(x^2+1)^3 x\,dx = 0$	أوجد $\int_2^2 2(x^2+1)^3 x\,dx$: أ) 25 ب) 125 ج) 0 د) 625

<table>
<tr><td colspan="2">$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>$$\int_1^6 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^6 f(x)dx$$
$$2 = x + 5 \Longrightarrow x = -3$$
$$\therefore \int_1^3 2f(x) = 2\int_1^3 f(x) = 2 \times (-3) = -6$$</td><td>إذا كان
$\int_1^6 f(x)dx = 2$ ، $\int_3^6 f(x)dx = 5$ ،
فإن $\int_1^3 2f(x)$ يساوي :
أ) -6 ب) -3
ج) 6 د) 3</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$$
$$8 = 2 + \int_2^5 f(x)dx$$
$$\int_2^5 f(x)dx = 8 - 2$$
$$= 6 \Longrightarrow \int_5^2 f(x)dx = -6$$</td><td>إذا كان
$\int_0^5 f(x)dx = 8$, $\int_0^2 f(x)dx = 2$ ،
أوجد $\int_5^2 f(x)dx$:
أ) 6 ب) -6
ج) 10 د) -10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>الحل</th><th>مثال</th></tr>
<tr><td>

$$\int_0^1 kx^2dx + \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 1$$

$$\left[\frac{kx^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 1$$

$$\left(\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}\right) - (0+0) = 1$$

$$\frac{1}{3}k + \frac{2}{3} = 1 \Longrightarrow \frac{1}{3}k = 1 - \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{1}{3}k = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow k = 1$$

</td><td>

1) إذا كان $\int_0^1 (kx^2 + \sqrt{x})dx = 1$ فما قيمة k ؟

أ) -2 ب) 0

ج) 1 د) -1

</td></tr>
<tr><td>

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

فترة التكامل في الفترة $(1,2)$ ∴ ناخذ معادلة $x \geq 1$

$$\int_1^2 |x-1|dx = \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

</td><td>

2) أوجد قيمة التكامل $\int_1^2 |x-1|\,dx$

أ) 1 ب) 0

ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{3}{2}$

</td></tr>
<tr><td>

من خواص التكامل $\int e^u . \acute{u}\,dx = e^u + c$

مشتقة $-x^2 = -2x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{-1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} -2xe^{-x^2}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{2}\left[e^{-\infty} - e^{-\infty}\right] = \frac{-1}{2}(0) = 0$$

</td><td>

3) أوجد قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$:

أ) 0

ب) 1

ج) ∞

د) غير معرف

</td></tr>
<tr><td>

اولا نكامل بالنسبة لـx ثم نكامل بالنسبة لـy

$$\int_0^1 xy\ dx = \left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^1 = \frac{1}{2}y$$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}y\ dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

</td><td>

4) $\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy$ يساوي :

أ) 2 ب) 1

ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{4}$

</td></tr>
<tr><td>

قانون دالة الكثافة الاحتمالية: $\int_a^b f(x)dx = 1$

$$\int_0^1 c(1-x)dx = 1$$

$$\int_0^1 (c - cx)dx = 1 \Longrightarrow \left[cx - \frac{cx^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

$$\Longrightarrow c - \frac{c}{2} = 1 \xRightarrow{\text{توحيد المقام}} \frac{c}{2} = 1 \Longrightarrow c = 2$$

</td><td>

5) إذا كان x متغير عشوائي متصل دالة كثافته الاحتمالية هي $f(x) = c(1-x)$ حيث $0 \leq x \leq 1$ ، و الدالة تساوي صفر خارج هذه الفترة فما مقدار الثابت c ؟

أ) 8

ب) 6

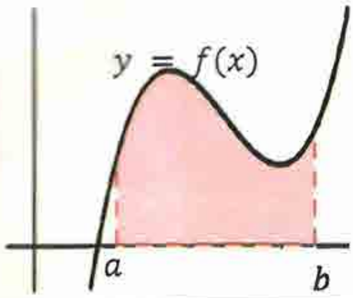
ج) 4

د) 2

</td></tr>
</table>

6) حساب المساحات والحجوم باستخدام التكامل :

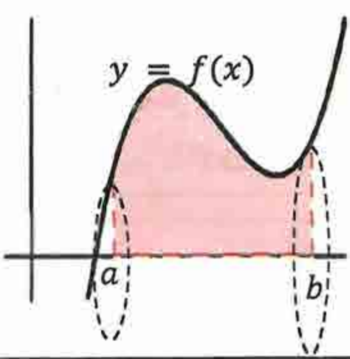
اذا كانت الدالة $y = f(x) \geq 0y$ ، فإن المساحه تحت منحنى الدالة ومحور x والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ ، تعطى بالصيغة :



$$A = \int_a^b f(x)dx$$

الحل	مثال
$A = \int_1^3 2x\,dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_1^3 = 3^2 - 1^2 = 8$	1) المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = 2x$ ومحور x على الفترة $[1, 3]$: أ) 4 ب) 6 ج) 8 د) 10
• من خواص التكامل $\int e^u . \grave{u}\, dx = e^u + c$ • مشتقة x تساوي واحد • فترة التكامل هي $[0,1]$ $\int_0^1 e^x\, dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$	2) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 0 \ , y = e^x \ \ , x = 0 \ \ , x = 1$ تساوي ؟ أ) 1 ب) e ج) $e - 1$ د) $1 - \frac{1}{e}$

إذا دارت المساحة المحدودة بالمنحنى $y = f(x)$ والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ حول محور x دورة كاملة فإنه ينشأ حجم دوراني ، يعطى بالصيغة :



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

الحل	مثال
$V = \pi \int_0^1 y^2\ dx = \pi \int_0^1 (x^2)^2\ dx$ $\pi \int_0^1 x^4\ dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$ $= \pi \left[\frac{1}{5} - 0\right] = \frac{1}{5}\pi$	الحجم الناشئ من دوران المساحة المحدودة بالمنحنى $y = x^2$ والخطين المستقيمين $x = 0 \, , x = 1$ حول محور x : أ) $\frac{2}{5}\pi$ ب) $\frac{2}{3}\pi$ ج) $\frac{1}{5}\pi$ د) $\frac{1}{3}\pi$

7) خصائص دالة المقياس :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & ; x\ge 0 \\ -x & ; x<0 \end{cases}$$

النهايه :

مثال : أوجد $\lim\limits_{x\to 2}|x-2|$

الحل :

$$f(x)=|x-2|=\begin{cases} x-2 & ; x\ge 2 \\ -(x-2) & ; x<2 \end{cases}$$

0 1 2 3 4

$2-x$ | $x-2$

$$\lim_{x\to 0}|x-2|=\lim_{x\to 0}(2-x)=2-0=2$$

$$\lim_{x\to 4}|x-2|=\lim_{x\to 4}(x-2)=4-2=2$$

$$\lim_{x\to 2}|x-2|=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0 \end{cases}$$

الإتصال :

مثال : إدرس اتصال الدالة $f(x)=|x-2|$

الحل :

1) $f(2)=2-2=0$

2) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-}(2-x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0 \end{cases}$

3) $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

الدالة متصلة عند جميع الأعداد الحقيقة لأنها حققت الشروط الثلاثة

الاشتقاق :

مثال : أدرس قابلية اشتقاق الدالة $f(x)=|x-2|$ عند $x=2$

الحل :

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & ; x\ge 2 \\ -1 & ; x<2 \end{cases}$$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

التكامل :

مثال : أوجد التكاملات :

الحل : لأن الداله غير قابلة للاشتقاق عند 2 نأخذ الفترة المناسبة

-2 -1 0 1 2 3 4

$2-x$ | $x-2$

$$\int_{-2}^{4}|x-2|\,dx=\int_{-2}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{4}(x-2)dx$$

$$=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2}+=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{4}=\cdots\ldots$$

$$\int_{0}^{1}|x-2|\,dx=\int_{0}^{1}(2-x)dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\int_{3}^{4}|x-2|\,dx=\int_{3}^{4}(x-2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{3}^{4}=(8-8)-\left(\frac{9}{2}-6\right)=\frac{3}{2}$$