2. • أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ عند (1) وعند (−∞) وعند (+∞)، ثم أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقاربه الأفقية.

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=2$$

$y=2$ مقارب أفقي بجوار $\mp\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$\Rightarrow$ $x=1$ مقارب شاقولي

ادرس الوضع النسبي مع المقارب الأفقي:

$$f(x)-y_D=\frac{2x+1}{x-1}-2=\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+2}{x-1}$$

$$=\frac{3}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
البسط	+	|	+
المقام	−	|	+
	−	|	+
	تحت c		فوق c

16 • ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$

1. أثبت أن g محدود .

2. استنتج كلاً من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\right]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right]$

1)

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

$$-2 \leq 2\sin x \leq 2$$

$$1 \leq 3+2\sin x \leq 5$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2\sin x} \leq 1$$

$$\frac{1}{5} \leq g(x) \leq 1$$

$\Leftarrow$ g محدود

2) استنتج $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{3+2\sin x}$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2\sin x} \leq 1$$

$$\frac{x^2}{5} \leq \frac{x^2}{3+2\sin x} \leq x^2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{5} = \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3+2\sin x} = +\infty$$

استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}$

$$-1 \leq \sin x \leq +1$$

$$x-1 \leq x+\sin x \leq x+1$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3+2\sin x} \leq 1$$

$$\frac{x-1}{5} \leq \frac{x+\sin x}{3+2\sin x} \leq x+1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x+1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{5} = +\infty$$

11 • ليكن f التابع المعين بالعلاقة : $f(x) = \dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$

1 - عين D_f مجموعة تعريف التابع f.

2 - أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق :

$f(x) = a + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-2}$ أياً كانت x من D_f

3 ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف D_f

$$f(x) = \frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$$

1 $R \setminus [-1, 2]$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1+8 = 9 > 0 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = \boxed{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = \boxed{-1}$$

$$F(x) = \frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)}$$

(2) أوجد a و b و c :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$$

$$\frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)} = \frac{a}{1}_{(x+1)(x-2)} + \frac{b}{x+1}_{(x-2)} + \frac{c}{x-2}_{(x+1)}$$

$$\frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)} = \frac{a[x^2-x-2]+bx-2b+cx+c}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)} = \frac{ax^2-ax-2a+bx-2b+cx-c}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)} = \frac{ax^2+[-a+b+c]x-2a-2b-c}{(x+1)(x-2)}$$

المقامات متساوية $\Rightarrow$ البسط متساوي مع البسط .

$a = 3$

$-a+b+c = 6 \Rightarrow b+c = 9$

$-2a-2b+c = 0 \qquad -2b+c = 6$

$3b = 3$

$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow c = 8$

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=1 \\ c=8 \end{array}\right] \Rightarrow F(x)=3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}$$

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)= 3+0+0=3$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}-1} f(x)=-\infty \quad / \quad \lim_{x\xrightarrow{>}-1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty \quad / \quad \lim_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$$

16 . ليكن c الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة

$F(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-d}$ ، جد الأعداد الحقيقية a و b و c و d علماً أن الخواص الآتية محققة:

1. المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=3$ مقارب للخط c
2. المستقيم المائل الذي معادلته $y=2x-5$ مقارب للخط c عند $+\infty$ و عند $-\infty$.
3. تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط c .

①

$$\lim_{x\to 3} f(x)= ~~\infty~~ \; 3x+b+\frac{c}{3-a}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\mp\infty$$

$$3-a=0$$

$$\Rightarrow \boxed{a=3}$$

Nohad S A B B A G H

$$y = ax + b$$

②

$$f(x) - y_0 = \frac{c}{x-a} \qquad \lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - y_0] = 0$$

$$a = 2 \;/\; b = -5$$ ~~[illegible]~~ بالمقارب نجد

③

$$f(1) = 2$$

$$f(1) = a + b + \frac{c}{1-a} = 2$$

$$2 - 5 + \frac{c}{1-2} = 2 \Rightarrow -3 + \frac{c}{-2} = 2$$

$$\frac{c}{-2} = 5 \Rightarrow c = -10$$

28. ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

1. احسب نهاية f عند الصفر.
2. هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على R؟ علل إجابتك

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} \quad \text{ح.ع.ت}$$

$$-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$$

نضرب ب x^2

$$-x^2 \leq x^2 \cos\frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} -x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$ 2

f مستمر عند الصفر وبالتالي هو مستمر على كل R.

29) ليكن f التابع المعرف على R وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على R ؟

حتى يكون f مستمراً على R يجب أن يكون f مستمراً عند الصفر.

وشرط الاستمرار عند الصفر

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{0}{0}$$ ح.ع.ت

$$= \frac{1-(x^2+1)}{x(1+\sqrt{x^2+1})} = \frac{-x^2}{x[1+\sqrt{x^2+1}]}$$

$$= \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{2} = 0$$

$x \to 0$ $\qquad m=0$ يجب أن تكون قيمة

---

30 . يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x . ليكن f التابع المعرف على المجال $[0, 2]$ وفق:

$$f(x) = x - E(x)$$

1. ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0, 2]$.
2. هل f مستمر على المجال $[0, 2]$.

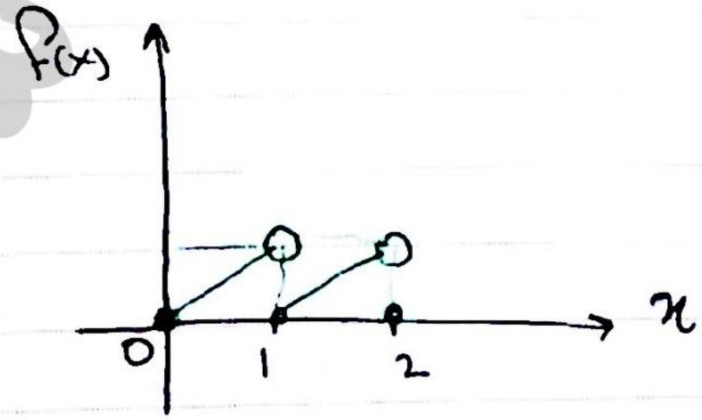
اكتب $f(x)$ بعبارة خالية من $E(x)$

$f(x) = x \qquad 0 \leq x < 1$

$f(x) = x - 1 \qquad 1 \leq x < 2$

$f(x) = x - 2 = 0 \qquad x = 2$

(1)



② الجواب : الحل

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1 \neq f(1) = 1 - 1 = 0$$

غير مستمر عند (1) / فهو غير مستمر على المجال $[0, 2]$

وظيفة من تمارين الوحدة :

التمارين (1 - 3 - 4 - 9 - 12 - 13 - 14 - 17 - 20 - 21 - 22 - 23 - 31)