# تحليل المعطيات /السنة الرابعة–إحصاء رياضي/

## المحاضرة الرابعة والخامسة

# جدول المعطيات

# DATA TABLE

الدكتورة: فاطمة عبد الرحمن شلاف

للعام الدراسي 2020–2019

## مدخل إلى جدول المعطيات:

ترتيب البيانات (كيف نرتب البيانات):

في معظم الدراسات الإحصائية يتم ترتيب البيانات ضمن جداول تكون فيها الأعمدة عبارة عن متغيرات (سمات المفردات المدروسة)، والأسطر عبارة عن المفردات المدروسة أي المشاهدات التي يتم وصفها من خلال المتغيرات (القيم التي يأخذها المتغير).

بفرض لدينا $p$ متغير عشوائي وقمنا بإجراء $n$ قياس على الـ$p$ متغير فعندئذ يعبر المقدار

$$x_{ij};\begin{cases} i = 1,2,\dots,n \\ j = 1,2,\dots,p \end{cases}$$

$x_{ij}$: هو القيمة التي يأخذها المتغير $j$ بالمشاهدة $i$ ويعطى جدول المعطيات بالشكل التالي:

**جدول(١): طريقة عرض البيانات ضمن جدول البيانات**

| المتغير n | . | . | . | المتغير 2 | المتغير 1 | القيم $x_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{1p}$ | . | . | . | $x_{12}$ | $x_{11}$ | المشاهدة 1 |
| $x_{2p}$ | . | . | . | $x_{22}$ | $x_{21}$ | المشاهدة2 |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $x_{np}$ | . | . | . | $x_{n2}$ | $x_{n1}$ | المشاهدة n |

ويمكن وضع هذه القيم ضمن مصفوفة تدعى هذه المصفوفة بمصفوفة المعطيات كما هو موضح في المعادلة التالية:

$$X_{n\times p} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & x_{np} \end{bmatrix}$$

وبالتالي يمكن أن نعرف كلاً من المتوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الارتباط لهذه المصفوفة كما يلي:

### ١- المتوسط الحسابي:

يعرف المتوسط الحسابي لكل متغير في جدول المعطيات من خلال العلاقة التالية:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\ ; j = 1,2, \dots p$$

### ٢- التباين:

يعرف التباين لكل متغير من المتغيرات عن طريق العلاقة التالية:

$$S_j^2 = S_{\mathrm{jj}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{X}_j\right)^2$$

### ٣- التغاير بين المتغيرات:

$$S_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{X}_j\right)\left(x_{ik} - \bar{X}_k\right)$$

وبالتالي مصفوفة التغاير تعطى بالشكل التالي:

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdot & \cdot & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdot & \cdot & S_{2p} \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdot & \cdot & S_{pp} \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة متناظرة حيث أن:

$$S_{jk} = S_{kj}$$

**مثال:**

إذا كان لدينا البيانات التالية:

| القيم $x_{ij}$ | المتغير1 | المتغير2 |
|---|---|---|
| المشاهدة 1 | 42 | 4 |
| المشاهدة2 | 52 | 5 |
| المشاهدة3 | 48 | 4 |
| المشاهدة4 | 58 | 3 |

التي يمكن كتابتها ضمن مصفوفة للبيانات بالشكل التالي:

$$X' = \begin{bmatrix} 42 & 52 & 48 & 58 \\ 4 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

**المطلوب:**

حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري:

**الحل:**

نلاحظ من المعطيات التي لدينا أن:

$$p = 2, n = 4$$

المتوسط الحسابي للمتغير $j$:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \, ; j = 1,2, \dots p$$

وبالتالي تكون قيمته للمتغير الأول هي:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = \frac{1}{4}(42 + 52 + 48 + 58) = 50$$

وتكون قيمته للمتغير الثاني هي:

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = \frac{1}{4}(4 + 5 + 4 + 3) = 4$$

وبالتالي يكون:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 42 & 4 \\ 52 & 5 \\ 48 & 4 \\ 58 & 3 \end{bmatrix}$$

لحساب الانحراف المعياري:

نحسب أولا التباين من خلال العلاقة التالية:

$$S_j^2 = S_{jj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{X}_j\right)^2$$

وبالتالي ينتج لدينا التباين:

$$S_1^2 = S_{11} = 34, S_2^2 = S_{22} = 0.5$$

وبالتالي يكون لدينا $S_j = \sqrt{S_{jj}}$ ومنه يكون $S_1 = 5.83, S_2 = 0.73$

.........................................

# أساسيات جدول المعطيات

**١- جدول المعطيات لبيانات بحجوم أكبر:**

تم التوضـــيح في الفقرة الســـابقة كيفية إيجاد كل قيمة من مصـــفوفة التغاير ومتجه المتوسـطات ولكن سـوف نتعامل مع كم أكبر من البيانات لذا سـنتعامل مع المصـفوفات دون اللجوء إلى القيم الفردية في الحســاب كما ســيتم ذكر كيفية حســاب كل من مصــفوفة التباين ومصفوفة التوقع ومصفوفة الارتباط والجدول المعياري للمعطيات كما يلي:

إن جدول المعطيات يعطى من خلال العلاقة التالية:

$$X_{n\times p}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & x_{2p} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & x_{np} \end{bmatrix}$$

حيث علمنا أن:

$p$: عدد المتغيرات.

$n$: عدد المشاهدات (السجلات) أو الحالات(المفردات) المدروسة.

**٢- خواص مصفوفة البيانات:**

بما أننا نتعامل مع مصفوفة لذلك ستحقق خواص المصفوفات التي سنذكرها من خلال الجدول التالي:

**جدول(٢): خواص عامة للمصفوفات**

| الاسم | التعريف | الترميز | مثال |
|---|---|---|---|
| عددي (scalar) | $p = n = 1$ | $x$ | $3$ |
| متجه عمود (column vector) | $p = 1$ | $x$ | $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ |
| متجه سطر (row vector) | $n = 1$ | $x^T$ | $(1 \quad 3)$ |
| متجه الواحدات Vector of ones | $\underbrace{(1,1,\dots,1)^T}_{n}$ | $1_n$ | $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ |
| المتجه الصفري Vector of zeros | $\underbrace{(0,0,\dots,0)^T}_{n}$ | $0_n$ | $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ |
| مصفوفة مربعة square matrix | $p = n$ | $X_{p\times p}$ | $\begin{bmatrix}2 & 5\\0 & 2\end{bmatrix}$ |
| مصفوفة قطرية Diagonal matrix | $x_{ij} = 0; i \neq j, n = p$ | $diag(x_{ii})$ | $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ |
| المصفوفة الواحدية identitymatrix | $diag\,\underbrace{(1,1,\dots,1)}_{n}$ | $I_p$ | $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ |
| مصفوفة الواحدات Unit matrix | $x_{ij} = 1; n = p$ | $1_n 1_n^T$ | $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ |
| المصفوفة المتناظرة Symmetric matrix | $x_{ij} = x_{ji}$ | | $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}$ |
| المصفوفة الصفرية Null matrix | $x_{ij} = 0$ | $0$ | $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ |
| مصفوفة مثلثية عليا Upper triangular matrix | $x_{ij} = 0; i < j$ | | $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\0 & 1 & 3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ |
| المصفوفة المتعامدة Orthogonal matrix | $X^T X = I = X X^T$ | | $\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$ |

**٣- مصفوفة الأوزان:**

هي مصفوفة قطرية من الرتبة $n \times n$ ، ونرمز لها بالرمز $D$:

وتكتب بالشكل التالي:

$$D_{n\times n} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ 0 & 0 & . & . & p_n \end{bmatrix}$$

وفي حال كانت الأوزان متساوية، أي $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ فعندئذ:

$$D = \frac{1}{n} I_n$$

**٤- مركز الثقل:**

يدعى المتجه $g_{p\times1}$ المعرف من خلال العلاقة التالية بمركز الثقل:

$$g_{p\times1} = X'_{p\times n}.D_{n\times n}.1_{n\times1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_p \end{bmatrix}$$

ملاحظة:

إذا كانت الأوزان متساوية فعندئذ يكون متجه الثقل (مركز الثقل $\bar{X}_j$ ) هو المتوسط الحسابي للأعمدة.

وتوجد صيغة $g_{p\times1}$ كما يلي:

$$g_{p\times 1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{n2} \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdot & \cdot & x_{np} \end{bmatrix}_{p\times n} \begin{bmatrix} p_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & p_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ 0 & 0 & . & . & p_n \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

**٥- التوقع الرياضي لجدول المعطيات:**

يعطى التوقع الرياضي لجدول المعطيات $E(X)$ من خلال المعادلة التالية:

$$E(X)=1_{n\times 1}.\,g'_{1\times p}=\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_p \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_p \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \cdot & \cdot & \bar{x}_p \end{bmatrix}_{n\times p}$$

**٦- الجدول المركزي:**

إذا كان لدينا مجموعة قيم متوسطها الحسابي $\bar{x}$، فالقيمة المركزية لها $y$ تعطى من خلال العلاقة التالية:

$$y=x-\bar{x}$$

وبالاعتماد عل هذه القيمة سنوجد الجدول المركزي كما يلي:

$$Y=X-E(X)=\begin{bmatrix} x_{11}-\bar{x}_1 & x_{12}-\bar{x}_2 & \cdot & \cdot & x_{1p}-\bar{x}_p \\ x_{21}-\bar{x}_1 & x_{22}-\bar{x}_2 & \cdot & \cdot & x_{2p}-\bar{x}_p \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ . & . & \cdot & \cdot & . \\ x_{n1}-\bar{x}_1 & x_{n2}-\bar{x}_2 & \cdot & \cdot & x_{np}-\bar{x}_p \end{bmatrix}_{n\times p}$$

**مصفوفة التباين:**

$$\Sigma=X'DX-gg'$$

ونعرف المصفوفة القطرية $V$ التي عناصرها القطرية هي $\sigma_{ii}$:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \Rightarrow V^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$V^{\frac{-1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \frac{1}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

**٧- مصفوفة الارتباط:**

أولا نعرف كل قيمن من مصفوفة الارتباط من خلال المعادلة التالية:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{jj}}} = \frac{cov(X_i, X_j)}{\sqrt{var(X_i)}\sqrt{var(X_i)}}$$

وبالتالي تعط مصفوفة الارتباط من خلال المعادلة التالي:

$$\rho = V^{\frac{-1}{2}} \Sigma V^{\frac{-1}{2}}$$

**٨- الجدول المعياري:**

تعطى القيمة المعيارية من خلال العلاقة التالية:

$$z_{ij} = \frac{y_{ij}}{\sigma_{ij}} = \frac{x_{ij} - E(X_j)}{\sigma_{ij}}$$

وبالتالي يكون الجدول المعياري:

$$Z = YV^{\frac{-1}{2}}$$

### ٩- مثال تطبيقي:

ليكن لدينا جدول المعطيات التالي:

**جدول(٣): جدول يظهر لنا أربع متغيرات لخمس أشخاص من مجتمع ما**

| ساعات النوم | سنوات التعلم | الوزن | العمر |
|---|---|---|---|
| 8 | 14 | 44 | 19 |
| 7 | 15 | 45 | 20 |
| 6 | 16 | 58 | 21 |
| 8 | 15 | 46 | 20 |
| 7 | 16 | 50 | 25 |

**والمطلوب:**

١- أوجد التوقع الرياضي ومصفوفة التباين ومصفوفة الارتباط والجدول المعياري لمصفوفة المعطيات.

وذلك في حالة الأوزان متساوية وفي حالة الأوزان غير متساوية:

**الحل:**

**أولاً:في حالة الأوزان متساوية:**

لدينا مصفوفة المعطيات بالشكل التالي:

$$X = \begin{bmatrix} 19 & 44 & 14 & 8 \\ 20 & 45 & 15 & 7 \\ 21 & 58 & 16 & 6 \\ 20 & 46 & 15 & 8 \\ 25 & 50 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الأثقال تكون بالشكل التالي:

$$D = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} * I_5$$

لنحسب مركز الثقل:

$$g_{p\times 1} = X'_{p\times n}.D_{n\times n}.1_{n\times 1} = \begin{bmatrix} 19 & 20 & 21 & 20 & 25 \\ 44 & 45 & 58 & 46 & 50 \\ 14 & 15 & 16 & 15 & 16 \\ 8 & 7 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \frac{1}{5} * I_5 * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{19}{5} & \frac{20}{5} & \frac{21}{5} & \frac{20}{5} & \frac{25}{5} \\ \frac{44}{5} & \frac{45}{5} & \frac{58}{5} & \frac{46}{5} & \frac{50}{5} \\ \frac{14}{5} & \frac{15}{5} & \frac{16}{5} & \frac{15}{5} & \frac{16}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 21 \\ 48.6 \\ 15.2 \\ 7.2 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

لنحسب التوقع الرياضي لجدول المعطيات:

$$E(X) = 1_{n\times 1}.g'_{1\times p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} * [21 \quad 48.6 \quad 15.2 \quad 7.2] = \begin{bmatrix} 21 & 48.6 & 15.2 & 7.2 \\ 21 & 48.6 & 15.2 & 7.2 \\ 21 & 48.6 & 15.2 & 7.2 \\ 21 & 48.6 & 15.2 & 7.2 \\ 21 & 48.6 & 15.2 & 7.2 \end{bmatrix}$$

لنحسب الجدول المركزي:

$$Y = X - E(X) = \begin{bmatrix} -2 & -4.6 & -1.2 & 0.8 \\ -1 & -3.6 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 9.4 & 0.8 & -1.2 \\ -1 & -2.6 & -0.2 & 0.8 \\ 4 & 1.4 & 0.8 & -0.2 \end{bmatrix}$$

لنحسب مصفوفة التباين:

$$\Sigma = X'DX - gg' = \frac{1}{5}X'X - gg'$$

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 19 & 20 & 21 & 20 & 25 \\ 44 & 45 & 58 & 46 & 50 \\ 14 & 15 & 16 & 15 & 16 \\ 8 & 7 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 19 & 44 & 14 & 8 \\ 20 & 45 & 15 & 7 \\ 21 & 58 & 16 & 6 \\ 20 & 46 & 15 & 8 \\ 25 & 50 & 16 & 7 \end{bmatrix} - gg'$$

حيث أن:

$$gg' = \begin{bmatrix} 441 & 1020.6 & 319.2 & 151.2 \\ 1020.6 & 2361.96 & 738.72 & 349.92 \\ 319.2 & 738.72 & 231.04 & 109.44 \\ 151.2 & 349.92 & 109.44 & 51.84 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix} 445.4 & 1024.8 & 320.4 & 150.6 \\ 1024.8 & 2388.2 & 741.8 & 346.6 \\ 320.4 & 741.8 & 231.6 & 109 \\ 150.6 & 346.6 & 109 & 52.4 \end{bmatrix} - gg'$$

$$= \begin{bmatrix} 4.4 & 4.2 & 1.2 & -0.6 \\ 4.2 & 26.24 & 3.08 & -3.32 \\ 1.2 & 3.08 & 0.56 & -0.44 \\ -0.6 & -3.32 & -0.44 & 0.56 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$V = \begin{bmatrix} 4.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 26.24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.56 \end{bmatrix} \Rightarrow V^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{110}}{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{26.24}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}$$

لنحسب مصفوفة الارتباط:

$$\rho_{4\times4} = V^{-\frac{1}{2}}\Sigma V^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\rho_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0.39 & 0.76 & -0.38 \\ 0.39 & 1 & 0.80 & -0.87 \\ 0.76 & 0.80 & 1 & -0.78 \\ -0.38 & -0.87 & -0.78 & 1 \end{bmatrix}$$

لنحسب الجدول المعياري:

$$Z = YV^{\frac{-1}{2}} = \begin{bmatrix} -0.95 & -0.89 & -1.6 & 1.7 \\ -0.47 & -0.70 & -0.27 & -0.27 \\ 0 & 1.83 & 1.07 & -1.7 \\ -0.47 & -0.51 & -0.27 & 1.7 \\ 1.91 & 0.27 & 1.7 & -0.27 \end{bmatrix}$$

**ثانياً: في حال الأثقال غير متساوية:**

مصفوفة الأوزان هنا هي:

$$D = \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}_{5\times5}$$

لنحسب مركز الثقل:

$$g_{p\times1} = X'_{p\times n}.D_{n\times n}.1_{n\times1}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 20 & 21 & 20 & 25 \\ 44 & 45 & 58 & 46 & 50 \\ 14 & 15 & 16 & 15 & 16 \\ 8 & 7 & 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.7 \\ 49.6 \\ 15.3 \\ 7.1 \end{bmatrix}_{4\times1}$$

لنحسب التوقع الرياضي لجدول المعطيات:

$$E(X) = 1_{n\times1}.g'_{1\times p} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} * [20.7 \quad 49.6 \quad 15.3 \quad 7.1]$$

$$= \begin{bmatrix}20.7 & 49.6 & 15.3 & 7.1\\20.7 & 49.6 & 15.3 & 7.1\\20.7 & 49.6 & 15.3 & 7.1\\20.7 & 49.6 & 15.3 & 7.1\\20.7 & 49.6 & 15.3 & 7.1\end{bmatrix}$$

لنحسب الجدول المركزي:

$$Y = X - E(X) = \begin{bmatrix}-1.7 & -5.6 & -1.3 & 0.9\\-0.7 & -4.6 & -0.3 & -0.1\\0.3 & 8.4 & 0.7 & -1.1\\-0.7 & -3.6 & -0.3 & 0.9\\4.3 & 0.4 & 0.7 & -0.1\end{bmatrix}_{5\times4}$$

لنحسب مصفوفة التباين:

$$\Sigma = X'DX - gg' = \frac{1}{5}X'X - gg'$$

حيث أن:

$$gg' = \begin{bmatrix}428.49 & 1026.72 & 316.71 & 146.97\\1026.2 & 2460.16 & 758.88 & 352.16\\316.71 & 758.88 & 234.09 & 108.63\\146.97 & 352.16 & 108.63 & 50.41\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix}430.9 & 1030.0 & 317.4 & 146.5\\1030.0 & 2492.6 & 762.0 & 348.0\\317.4 & 762.0 & 234.5 & 108.2\\146.5 & 348.0 & 108.2 & 51.1\end{bmatrix} - gg'$$

$$= \begin{bmatrix}2.41 & 3.28 & 0.69 & -0.47\\3.28 & 32.44 & 3.12 & -4.16\\0.69 & 3.12 & 0.41 & -0.43\\-0.47 & -4.16 & -0.43 & 0.69\end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$V=\begin{bmatrix}2.41 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 32.44 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.41 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.69\end{bmatrix}\Longrightarrow V^{-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}0.64 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0.18 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1.56 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1.2\end{bmatrix}$$

لنحسب مصفوفة الارتباط:

$$\rho_{4\times 4}=V^{-\frac{1}{2}}\Sigma V^{-\frac{1}{2}}=$$

$$\rho_{4\times 4}=\begin{bmatrix}1 & 0.37 & 0.69 & -0.36\\ 0.37 & 1 & 0.85 & -0.87\\ 0.69 & 0.85 & 1 & -0.81\\ -0.36 & -0.87 & -0.81 & 1\end{bmatrix}$$

لنحسب الجدول المعياري:

$$Z=YV^{\frac{-1}{2}}=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.98 & -2.03 & 1.1\\ -0.45 & -0.81 & -0.46 & -0.12\\ 0.19 & 1.47 & 1.09 & -1.32\\ -0.45 & -0.63 & -0.47 & 1.1\\ 2.77 & 0.07 & 1.1 & -0.12\end{bmatrix}$$

<u>ومن أجل تسهيل الحسابات السابقة سيتم شرح التعليمات اللازمة في مقرر البرامج الإحصائية2 في محاضرة المصفوفات المرفقة مع هذه المحاضرة.</u>